XIV - Nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I - L'ensemble des nombres complexes

I.1 - Définition et Opérations

Définition 1 - Nombre complexe

On admet l'existence d'un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des *nombres complexes*, muni d'une addition et d'une multiplication, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
- pour tout élément $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + b\,\mathrm{i}$. Cette écriture est la *forme algébrique* de z.
  - ⋆ Le réel a est la *partie réelle* de z, noté $a = \mathscr{Re}\,(z)$.
  - ⋆ Le réel b est la *partie imaginaire* de z, noté $b = \mathscr{Im}\,(z)$.

Deux nombres complexes $z_1 = a + b\,\mathrm{i}$ et $z_2 = \alpha + \beta\,\mathrm{i}$ sont égaux si et seulement si $(a = \alpha$ et $b = \beta)$.

Exemple 1 - Quelques nombres complexes

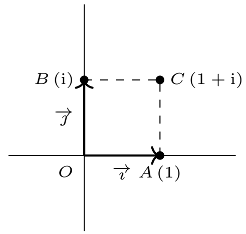
Le réel $12 = 12 + 0\,\mathrm{i}$ est un nombre complexe.
Les nombres $3 + 2\,\mathrm{i}$ ou $\sqrt{3} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$ sont des nombres complexes.

Définition 2 - Affixe, Image

Soit M un point du plan de coordonnées (a, b). L'*affixe* du point M est le nombre complexe $a + b\,\mathrm{i}$.
Soit $z = x + y\,\mathrm{i}$ un nombre complexe sous forme algébrique. Le point de coordonnées (x, y) est l'*image* du nombre complexe z.
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (x, y). L'*affixe* du vecteur $\vec{u}$ est le nombre complexe $x + y\,\mathrm{i}$.

Exemple 2 - Le plan complexe

Soit $a = 1$, $b = \mathrm{i}$ et $c = 1 + \mathrm{i}$. On note A (resp. B, C) l'image de a (resp. b, c). Alors,



Définition 3 - Opérations sur les nombres complexes

Soit $z_1 = a + b\,\mathrm{i}$, $z_2 = \alpha + \beta\,\mathrm{i}$ deux nombres complexes sous forme algébrique et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Addition.** $z_1 + z_2 = (a + \alpha) + (b + \beta)\,\mathrm{i}$.
- **Multiplication.** $z_1 z_2 = (a\alpha - b\beta) + (a\beta + b\alpha)\,\mathrm{i}$.
- **Inverse.** Si $z_1 \neq 0$, alors $\frac{1}{z_1} = \frac{a - b\,\mathrm{i}}{a^2 + b^2}$.

Exemple 3 - Opérations

En utilisant les définitions précédentes,

$$\begin{aligned}(1 + 2\,\mathrm{i}) + 4(-1 + 3\,\mathrm{i}) &= (1 + 2\,\mathrm{i}) + (-4 + 12\,\mathrm{i})\\ &= (1 - 4) + (2 + 12)\,\mathrm{i}\\ &= -3 + 14\,\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1 + \mathrm{i})(3 - 2\,\mathrm{i}) &= 3 - 2\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i} + \mathrm{i}(-2\,\mathrm{i})\\ &= (3 + 2) + (3 - 2)\,\mathrm{i}\\ &= 5 + \mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

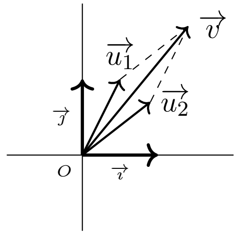
$$\begin{aligned}\frac{1+\mathrm{i}}{2-3\,\mathrm{i}} &= (1+\mathrm{i})\frac{2+3\,\mathrm{i}}{4+9}\\ &= \frac{2+3\,\mathrm{i}+2\,\mathrm{i}+3\,\mathrm{i}^2}{13}\\ &= \frac{-1+5\,\mathrm{i}}{13}.\end{aligned}$$

Proposition 1 - Interprétation géométrique

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectifs u, v. Pour tous λ, μ réels, le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$ a pour affixe $\lambda u+\mu v$.

Addition de vecteurs

Soit $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur d'affixe z_1 et $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur d'affixe z_2. Alors, z_1+z_2 a pour image le vecteur $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$:



Théorème 1 - Propriétés des opérations

Soit z_1, z_2, $z_3\in\mathbb{C}$.

- **Propriétés de l'addition.**
  - ⋆ Associativité : $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.
  - ⋆ Commutativité : $z_1+z_2=z_2+z_1$.
  - ⋆ Élément neutre : $z_1+0=z_1$.
  - ⋆ Opposé : $z_1+(-z_1)=0$.
- **Propriétés de la multiplication.**
  - ⋆ Associativité : $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.
  - ⋆ Commutativité : $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.
  - ⋆ Élément neutre : $z_1\cdot 1=z_1$.
  - ⋆ Inverse : Si $z_1\neq 0$, alors $z_1\cdot\frac{1}{z_1}=1$.
- **Distributivité :** $z_1\cdot(z_2+z_3)=(z_1\cdot z_2)+(z_1\cdot z_3)$.

Exemple 4 - Identité remarquable

En utilisant les propriétés précédentes,

$$\begin{aligned}(2+3\,\mathrm{i})^2 &= 2^2+2\times 2\times 3\,\mathrm{i}+(3\,\mathrm{i})^2\\ &= 4+12\,\mathrm{i}-9\\ &= -5+12\,\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

Plus généralement, si z_1, z_2 sont des nombres complexes et n est un entier naturel, on peut montrer la formule du binôme de Newton :

$$(z_1+z_2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^k z_2^{n-k}.$$

I.2 - Équations du second degré

Proposition 2 - Trinômes

Soit a, b, c trois réels tels que $a\neq 0$. L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$. Posons $\Delta=b^2-4ac$ le *discriminant* de cette équation.

- Si $\Delta=0$, l'équation possède une unique solution $x_0=-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\text{ et }x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta<0$, l'équation possède deux solutions

$$x_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\text{ et }x_2=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple 5 - Résolution d'équation

Soit z une solution de $z^2 + 3z + 4 = 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times 4 = -7$. Ainsi,

$$z \in \left\{ \frac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}, \frac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{7}}{2} \right\}.$$

Proposition 3 - Relations coefficients / racines

Soit z_1, z_2 les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Alors,

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \text{ et } z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}.$$

I.3 - Conjugaison

Définition 4 - Conjugué

Soit a, b deux réels et $z = a + b\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe $\overline{z} = a - b\,\mathrm{i}$ est le *conjugué* de z.

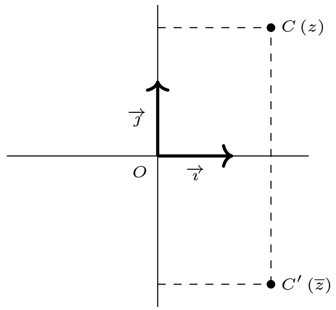
Exemple 6 - Conjugués

$\overline{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$, $\overline{2} = 2$, $\overline{\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}} = \sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}$.

Proposition 4 - Interprétation géométrique

Soit M un point du plan d'affixe z. Le point d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Conjugués



Proposition 5 - Proptiétés du conjugué

Soit z un nombre complexe.

- $\overline{(\overline{z})} = z$.
- $\mathscr{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathscr{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
- z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.
- $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$. De plus, $z\overline{z} = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Proposition 6 - Conjugué et Opérations

Soit z_1, z_2 deux nombres complexes.

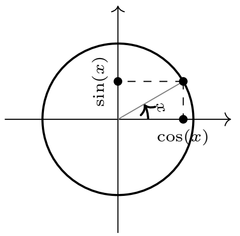
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

II - Cercle trigonométrique

II.1 - Cosinus et Sinus

Pour tout x réel, on lit les valeurs de ses sinus et cosinus sur le *cercle trigonométrique*.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

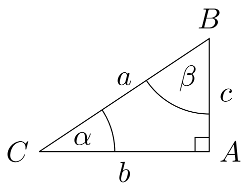


Proposition 7 - Théorème de Thales

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note a (resp. b, c) la longueur du segment $[BC]$ (resp. $[AC]$, $[AB]$) et β l'angle non orienté $\widehat{CBA}$. Alors,

$$\cos(\beta) = \frac{c}{a} \text{ et } \sin(\beta) = \frac{b}{a}.$$

Illustration graphique

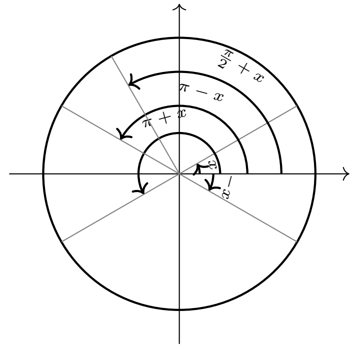


Proposition 8 - Formules d'addition

Pour tous a, b réels,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,	
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$



Exemple 7 - Formules d'addition

Nous pouvons généraliser les expressions précédentes :

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b)\\ &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),\\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a)\\ &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).\end{aligned}$$

Théorème 2 - Théorème de Pythagore

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

II.2 - Équations trigonométriques

Définition 5 - Modulo

Pour tous x, y, v réels, la relation $x \equiv y \quad [v]$ se lit x *est congru à* y *modulo* v et signifie qu'il existe un entier relatif k tel que $x = y + kv$.

Proposition 9

Pour tout couple de réels (x, y),

- $\sin(x) = \sin(y)$ si et seulement si
$$x \equiv y \quad [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y \quad [2\pi].$$
- $\cos(x) = \cos(y)$ si et seulement si
$$x \equiv y \quad [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y \quad [2\pi].$$
- $\cos(x) = \cos(y)$ et $\sin(x) = \sin(y)$ si et seulement si
$$x \equiv y \quad [2\pi].$$

Exemple 8 - Résolution d'équation

Soit x tel que $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Alors,

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$x \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi].$$

Lemme 1 - Paramétrisation du cercle unité

Pour tous x, y réels tels que $x^2 + y^2 = 1$, il existe un réel θ tel que
$$x = \cos(\theta),\ y = \sin(\theta).$$

III - Module et Argument

III.1 - Module

Définition 6 - Module

Pour tout nombre complexe $z = a + b\,\mathrm{i}$ écrit sous forme algébrique, le *module* de z, noté $|z|$, est le réel
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Exemple 9 - Calculs de modules

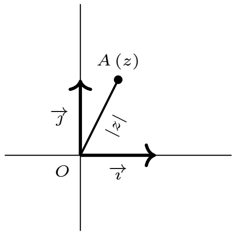
$$\begin{aligned}
|2| &= \sqrt{2 \times 2} = 2, \\
|-3| &= \sqrt{(-3) \times (-3)} = 3, \\
|\mathrm{i}| &= \sqrt{\mathrm{i} \times (-\mathrm{i})} = 1, \\
|1 + \mathrm{i}| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\
\left|3 - \sqrt{2}\,\mathrm{i}\right| &= \sqrt{9 + 2} = \sqrt{11}.
\end{aligned}$$

Proposition 10 - Interprétation géométrique

Soit M un point du plan d'affixe z. La distance OM du point M à l'origine est égale au module $|z|$.
Soit A, B deux points du plan d'affixes respectifs a, b. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $(b - a)$. Ainsi, la longueur AB est égale au module du nombre complexe $b - a$.

Module

Représentation de l'image d'un nombre complexe ainsi que de son module :



Proposition 11 - Module

Soit z un nombre complexe.

- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- $|\overline{z}| = |z|$.
- $|\mathscr{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathscr{Im}(z)| \leqslant |z|$.
- Si z est non nul, alors $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Proposition 12 - Module et Opérations

Soit z_1, z_2 deux nombres complexes.

- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
- **Inégalité triangulaire :** $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ avec égalité si et seulement s'il existe λ réel positif tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.

III.2 - Exponentielle complexe

Définition 7 - Exponentielle complexe

Soit $z = x + y\,\mathrm{i}$ un nombre complexe sous forme algébrique. On note $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\left(\cos(y) + \sin(y)\,\mathrm{i}\right)$.

Exemple 10 - Exponentielles complexes

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^2 &= \mathrm{e}^{2+0\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^2 \\
\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}} &= \mathrm{e}^0\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}\right) = \mathrm{i} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} &= \mathrm{e}^0\left(\cos(\pi) + \sin(\pi)\,\mathrm{i}\right) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

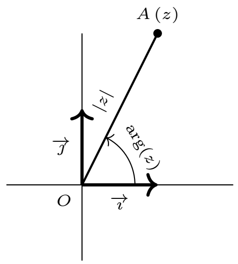
Définition 8 - Argument, Forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul.

- Tout réel θ tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}$ est **un** *argument* de z.
- L'unique réel $\theta \in]-\pi;\pi]$ tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}$ est **l'***argument principal* de z, noté $\arg(z)$.
- Le nombre complexe z s'écrit sous la forme $z = |z|\,\mathrm{e}^{\arg(z)\,\mathrm{i}}$. Cette écriture est la *forme trigonométrique* du nombre complexe z.

Module & Argument

Représentation de l'image d'un nombre complexe ainsi que de son module :



Exemple 11 - Formes trigonométriques

Mise sous forme trigonométrique en factorisant par le module puis en reconnaissant un argument classique :

$$\begin{aligned}
2 &= 2\,\mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}}, \\
-3 &= 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}, \\
\mathrm{i} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}, \\
1+\mathrm{i} &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right) \\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

Proposition 13 - Exponentielle et Opérations

- $\forall\, z, z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}\cdot \mathrm{e}^{z'}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z} \neq 0$.

Exemple 12 - Forme trigonométrique

En utilisant le calcul précédent,

$$(1+\mathrm{i})^2 = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = 2\,\mathrm{i}\,.$$

$$(1+\mathrm{i})^4 = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -4.$$

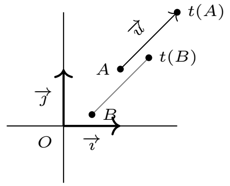
IV - Transformations géométriques

Proposition 14 - Translations, Homothéties, Rotations

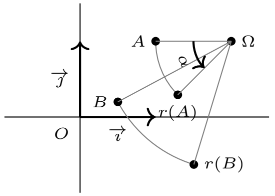
- Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe b. L'image d'un point M d'affixe z par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe $z+b$.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. L'image d'un point M d'affixe z par la rotation d'angle θ et de centre d'affixe ω a pour affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}(z-\omega)+\omega$.
- Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$. L'image d'un point M d'affixe z par l'homothétie de centre d'affixe ω et de rapport k a pour affixe $k(z-\omega)+\omega$.

Transformations du plan complexe

- Soit $t : z \mapsto z + (1+\mathrm{i})$ et $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe $1+\mathrm{i}$.



- Soit $r : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}\left(z-(2+\mathrm{i})\right)+(2+\mathrm{i})$, Ω le point d'affixe $2+\mathrm{i}$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$.



- Soit $h : z \mapsto 3\left(z-(2+\mathrm{i})\right)+(2+\mathrm{i})$, Ω le point d'affixe $2+\mathrm{i}$ et $k=3$.