

T.D. IX - Variables aléatoires à densité

I - Études de densités

Exercice 1. Soit f la fonction définie pour tout t réel par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } t \in [5, 10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Représenter graphiquement la fonction f .
- b) Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f .

2. a) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- b) Représenter graphiquement la fonction F .

3. Déterminer les probabilités suivantes :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> a) $P([X < 7])$. b) $P([5 < X < 6])$. c) $P([3 < X < 9])$. d) $P([X \geq 8])$. | <ol style="list-style-type: none"> e) $P_{[X > 6]}([X < 7])$. f) $P_{[X < 7]}([X > 6])$. g) $P_{[X > 7]}([X > 6])$. h) $P_{[X < 6]}([X > 7])$. |
|--|--|

4. a) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
- b) Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 2. Soit f la fonction définie pour tout t réel par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } t \in [10, 13] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Représenter graphiquement la fonction f .
- b) Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f .

2. a) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- b) Représenter graphiquement la fonction F .
3. Déterminer les probabilités suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> a) $P([X < 10])$. b) $P([10 < X < 12])$. c) $P([9 < X < 11])$. d) $P([X \geq 11])$. | <ol style="list-style-type: none"> e) $P_{[X > 11]}([X < 12])$. f) $P_{[X < 12]}([X > 11])$. g) $P_{[X > 12]}([X > 11])$. h) $P_{[X < 11]}([X > 12])$. |
|---|--|

4. a) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
- b) Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 3. Soit a un réel et f la fonction définie pour tout t réel par

$$f(t) = \begin{cases} a e^{2-t} & \text{si } t \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Déterminer la valeur de a pour laquelle f est une densité de probabilité.
- b) Représenter graphiquement f .

Soit X une variable aléatoire de densité f .

2. Déterminer la fonction de répartition F de X .
- a) Représenter graphiquement la fonction F .

3. Déterminer les probabilités suivantes :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> a) $P([X \leq 3])$. b) $P([1 < X < 2])$. | <ol style="list-style-type: none"> c) $P([0 < X < 3])$. d) $P([X \geq 4])$. |
|---|---|

4. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

- a) Rappeler la formule (avec une intégrale) et la valeur de $\mathbf{E}[Y]$.
- b) On pose $Z = Y + 2$. Déterminer la fonction de répartition puis une densité de Z .
- c) En déduire que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 4. Soit a un réel et f la fonction définie pour tout t réel par

$$f(t) = \begin{cases} a e^{3-t} & \text{si } t \geq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Déterminer la valeur de a pour laquelle f est une densité de probabilité.

b) Représenter graphiquement f .

Soit X une variable aléatoire de densité f .

2. Déterminer la fonction de répartition F de X .

a) Représenter graphiquement la fonction F .

3. Déterminer les probabilités suivantes :

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\mathbf{P}([X \leq 3])$. | c) $\mathbf{P}([0 < X < 5])$. |
| b) $\mathbf{P}([1 < X < 2])$. | d) $\mathbf{P}([X \geq 4])$. |

4. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

a) Rappeler la formule (avec une intégrale) et la valeur de $\mathbf{E}[Y]$.

b) On pose $Z = Y + 3$. Déterminer une fonction de répartition puis une densité de Z .

c) En déduire que X admet une espérance et la calculer.

II - Travail sur la fonction de répartition

Exercice 5. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier éventuellement la loi des variables aléatoires suivantes :

- | | |
|------------------------------------|---------------------------|
| 1. $X = 3U$. | 4. $W = X^2$. |
| 2. $Y = U + 1$. | 5. $H = \ln(X)$. |
| 3. $Z = \frac{1}{2}X + 1$. | 6. $E = -\ln(X)$. |

Exercice 6. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier éventuellement la loi des variables aléatoires suivantes :

- | | |
|------------------------------------|---------------------------|
| 1. $X = 4U$. | 4. $W = X^2$. |
| 2. $Y = U + 2$. | 5. $H = \ln(X)$. |
| 3. $Z = \frac{1}{2}X + 1$. | 6. $E = -\ln(X)$. |

III - Lois usuelles

Exercice 7. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 4)$. En utilisant la table de la loi normale, calculer

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. $\mathbf{P}([X \leq 2])$. | 3. $\mathbf{P}([Y < 1])$. |
| 2. $\mathbf{P}([X > 2.51])$. | 4. $\mathbf{P}([3 < Y \leq 10])$. |

Exercice 8. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 9)$. En utilisant la table de la loi normale, calculer

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $\mathbf{P}([X \leq 2])$. | 3. $\mathbf{P}([Y < 1])$. |
| 2. $\mathbf{P}([X > 2.51])$. | 4. $\mathbf{P}([3 < Y \leq 6])$. |

Exercice 9. Un archer lance deux flèches en direction d'une cible de rayon d'un mètre. On suppose qu'il atteint systématiquement et que ses lancers sont indépendants. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on note R_i la variable aléatoire égale à la distance (en mètres) de la flèche numéro i au rayon de la cible et on suppose que $R_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. On note également $R = \min\{R_1, R_2\}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([R > x]) = \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x])$.
- En déduire, pour tout x réel, la fonction de répartition F de R .
- Calculer la probabilité que la flèche la mieux lancée par l'archer soit située à moins de 50cm de la cible.

Exercice 10. Un appareil électronique utilise deux piles dont les durées de vie respectives sont T_1 et T_2 . On suppose que T_1 et T_2 sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre 1. L'appareil cesse de fonctionner au bout d'un temps $T = \max\{T_1, T_2\}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([T < x]) = \mathbf{P}([T_1 < x] \cap [T_2 < x])$.
- En déduire, pour tout x réel, la fonction de répartition F de T .
- Calculer la probabilité que l'appareil cesse de fonctionner, à cause de ses piles, au bout de 6 mois.