T.D. X - Variables aléatoires à densité

I - Densités

Solution de l'exercice 1.

* D'après les théorèmes usuels, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en $2a$.

  Comme $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.
  Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t}{2a^2} = \frac{0}{2a^2} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 0.
  En particulier, f est continue en 0.

  Comme $\lim\limits_{t\to 2a^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 2a^+} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à droite en $2a$.
  Comme $\lim\limits_{t\to 2a^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 2a^-} \frac{t}{2a^2} = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}$, alors f admet une limite finie à gauche en $2a$.
  En particulier, f n'est pas continue en $2a$.
* Comme $x \geqslant 0$ lorsque $x \in [0, 2a]$ alors f est positive sur $[0, 2a]$. De plus, elle est positive en dehors de $[0, 2a]$, donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
* Comme f est nulle en dehors de $[0, 2a]$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2a} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2a} \frac{t}{2a^2}\,\mathrm{d}t \\ = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2a} &= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{(2a)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 1.\end{aligned}$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité. □

Solution de l'exercice 2.

* D'après les théorèmes usuels, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.
  Comme $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 1.
  Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.
  En particulier, f est continue en 0.
* Comme la fonction ln est positive sur $[1, +\infty[$, alors f est positive sur $[1, +\infty[$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 1]$, alors $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.
* Soit $x \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

  Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité. □

Solution de l'exercice 3.

* D'après les théorèmes généraux, f_n est continue sauf éventuellement en 0 et 1.

  Comme $\lim\limits_{t\to 0-} f_n(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$, alors f_n admet une limite finie à gauche en 0.
  Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} f_n(t) = n0^{n-1} = 0$, alors f_n admet une limite finie à droite en 0.
  En particulier, f_n est continue en 0.

  Comme $\lim\limits_{t\to 1^+} f_n(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} 0 = 0$, alors f_n admet une limite finie à droite en 1.
  Comme $\lim\limits_{t\to 1^-} f_n(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} nt^{n-1} = n1^{n-1} = n$, alors f_n admet une limite finie à gauche en 1.

En particulier, f_n est continue en 0.

* Comme $nt^{n-1} \geqslant 0$ sur $[0,1]$ et f_n est nulle en dehors de $[0,1]$, alors f_n est positive sur $\mathbb{R}$.
* Comme f_n est nulle en dehors de $[0,1]$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) = \int_0^1 nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = n\left[\frac{t^n}{n}\right]_0^1$$
$$= n\left(\frac{1}{n} - 0\right) = 1.$$

Finalement, f_n est bien une densité de probabilité. □

Solution de l'exercice 4.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 0, a et $2a$.

  Comme $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.
  Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t}{a^2} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 0.
  En particulier, f est continue en 0.

  Comme $\lim\limits_{t\to a^-} f(t) = \lim\limits_{t\to a^-} \frac{t}{a^2} = \frac{1}{a}$, alors f admet une limite finie à gauche en a.
  Comme $\lim\limits_{t\to a^+} f(t) = \lim\limits_{t\to a^+} \frac{2a-t}{a^2} = \frac{2a-a}{a^2} = \frac{1}{a}$, alors f admet une limite finie à droite en a.
  En particulier, f est continue en a.

  Comme $\lim\limits_{t\to 2a^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 2a^-} \frac{2a-t}{a^2} = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en $2a$.
  Comme $\lim\limits_{t\to 2a^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 2a^+} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à droite en $2a$.
  En particulier, f est continue en $2a$.
* Comme $t \geqslant 0$ sur $[0,a]$ et $2a - t \geqslant 0$ sur $[a, 2a@$, alors f est positive sur $\mathbb{R}$.
* Comme f est continue en dehors de $[0,2a]$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{t}{a^2}\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} \frac{2a-t}{a^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^a + \frac{2}{a}[t]_a^{2a} - \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^{2a}$$
$$= \frac{1}{2} + 2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité. □

Solution de l'exercice 5.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 0 et 1.

  Comme $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.
  Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{kt}{1+t} = \frac{k\times 0}{1+0} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 0.
  En particulier, f est continue en 0.

  Comme $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} \frac{kt}{1+t} = \frac{k}{2}$, alors f admet une limite finie à gauche en 1.
  Comme $\lim\limits_{t\to 1^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 1.
  En particulier, f est continue en 0 si $k = 0$ et n'est pas continue en 1 sinon.
* Comme $\frac{t}{1+t} \geqslant 0$ lorsque $t \in [0,1]$, alors $\frac{kt}{1+t} \geqslant 0$ si et seulement si $k \geqslant 0$. De plus, f est nulle, donc positive, en dehors de $[0,1]$. Ainsi, $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $k \geqslant 0$.
* Comme f est nulle en dehors du segment $[0,1]$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kt}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{kt}{1+t}\,\mathrm{d}t = k\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = k(1-\ln(2)).$$

  Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kt}{1+t}\,\mathrm{d}t = 1$ si et seulement si $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$.

Comme $1 - \ln(2) \geqslant 0$, la fonction f est une densité de probabilité si et seulement si $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$. □

II - Fonctions de répartition, Espérances, Variances

Solution de l'exercice 6.

1.

* D'après les théorèmes généraux, f est continue sauf éventuellement en 0.
Comme $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$, la fonction f admet une limite finie à gauche en 0.
Comme $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x+1)^2} = 1$, la fonction f admet une limite finie à droite en 0.
En particulier, la fonction f n'est pas continue en 0.
* Comme $\frac{1}{(x+1)^2} \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$ et $f(x)$ est nulle pour $x < 0$, alors la fonction f est à valeurs positives.
* Soit $A \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{A} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^A \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^A \\ &= 1 - \frac{1}{A+1}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{A\to+\infty} \int_{-\infty}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

2. D'après la définition, $F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

* Si $x \leqslant 0$, alors

$$F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

* Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned}F_T(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{1+x}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{sinon.}\end{cases}$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x \leqslant 0$, alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

* Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \left(\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-2\,\mathrm{e}^{-t/2}\right]_0^x - \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x \\ &= 2 - 2\,\mathrm{e}^{-x/2} - \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= 1 + \mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-x/2}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 + \mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x \geqslant 0.\end{cases}$$

2. Si $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(a)$, alors sa densité est donnée par

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ a\,\mathrm{e}^{-at} & \text{si } t \geqslant 0.\end{cases}$$

En particulier, $\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{a}$.

D'après la définition de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y] &= \frac{1}{a}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{a}\\ \int_0^{+\infty} at\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{a}\\ \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

3. Si l'intégrale converge, alors $\mathbf{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $A \geqslant 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{A} tf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A tf(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^A t\left(\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^A t\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t - \int_0^A t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'après la question précédente,

* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$,
* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Ainsi,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-\infty}^{A} tf(t)\,\mathrm{d}t = 4 - 1 = 3.$$

Donc, X admet une espérance et $\mathbf{E}[X] = 3$. □

Solution de l'exercice 8. *

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x < 1$, alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

* Si $x \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned}G(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Posons $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$ soit $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, x]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}G(x) &= \left[\ln(t) \times \left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \left(-\frac{\ln(1)}{1}\right) + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x\\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1.\end{aligned}$$

Finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1,\\ 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1.\end{cases}$$

2. Sous réserve de convergence, $\mathbf{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $x \geqslant 1$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x tf(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + \int_1^x t\frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}\ln(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_1^x = \frac{\ln(x)^2}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et X n'admet pas d'espérance. □

Solution de l'exercice 9.

1. Comme f est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2a} tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2a} \frac{t^2}{2a^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2a} \\ &= \frac{1}{2a^2} \times \frac{8a^3}{3} = \frac{4}{3}a.\end{aligned}$$

2. Comme f est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2a} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2a} \frac{t^3}{2a^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{2a} \\ &= \frac{1}{2a^2} \times \frac{16a^4}{4} = 8a^2.\end{aligned}$$

D'après la définition de la variance,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 &= 8a^2 - \left(\frac{4}{3}a\right)^2 \\ &= 8a^2\left(1 - \frac{2}{9}\right) = \frac{56}{9}a^2.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 10.

1. Comme f est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{a} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{a} \frac{t^2}{a^2}\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} t\frac{2a-t}{a^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{a} + \frac{2}{a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^{2a} - \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^{2a} \\ &= \frac{a}{3} + \frac{2}{a}\left(2a^2 - \frac{a^2}{2}\right) - \frac{1}{a^2}\left(\frac{8}{3}a^3 - \frac{a^3}{3}\right) \\ &= a\left(\frac{1}{3} + 4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

2. Comme f est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{a} \frac{t^3}{a^2}\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} t^2\frac{2a-t}{a^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{a} + \frac{2}{a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^{2a} - \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_a^{2a} \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{2}{3a}\left(8a^3 - a^3\right) - \frac{1}{4a^2}\left(16a^4 - a^4\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{14}{3} - \frac{15}{4}\right)a^2 \\ &= TODO\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 11. TODO □

III - Transformation de variables aléatoires

IV - Lois usuelles