

T.D. VII - Variables aléatoires discrètes infinies

I - Modélisation & Loix géométriques

Solution de l'exercice 1. T est l'instant du premier succès (obtenir une boule blanche) dans un schéma de Bernoulli où la probabilité de succès vaut $\frac{3}{8}$. Ainsi, $T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{8}\right)$.

D'après les résultats sur la loi géométrique,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - \frac{3}{8}}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{5}{8} \times \frac{8^2}{3^2} = \frac{40}{9}.$$

□

Solution de l'exercice 2. T est l'instant du premier succès (obtenir une boule noire) dans un schéma de Bernoulli où la probabilité de succès vaut $\frac{3}{5}$. Ainsi, $T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{5}\right)$.

D'après les résultats sur la loi géométrique,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - \frac{3}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} \times \frac{5^2}{3^2} = \frac{10}{9}.$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. Comme S est la somme des résultats de deux lancers d'un dé à 6 faces. Alors, $S(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$.

On distingue tous les lancers possibles. Il y a 36 lancers de dés possibles

et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([S = 2]) &= \mathbf{P}(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36} \\ \mathbf{P}([S = 3]) &= \mathbf{P}(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\ \mathbf{P}([S = 4]) &= \mathbf{P}(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\ \mathbf{P}([S = 5]) &= \mathbf{P}(\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \\ \mathbf{P}([S = 6]) &= \mathbf{P}(\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}) = \frac{5}{36} \\ \mathbf{P}([S = 7]) &= \mathbf{P}(\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ \mathbf{P}([S = 8]) &= \mathbf{P}(\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}) = \frac{5}{36} \\ \mathbf{P}([S = 9]) &= \mathbf{P}(\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \\ \mathbf{P}([S = 10]) &= \mathbf{P}(\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\ \mathbf{P}([S = 11]) &= \mathbf{P}(\{(6, 5), (6, 6)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\ \mathbf{P}([S = 12]) &= \mathbf{P}(\{(6, 6)\}) = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Ainsi,

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([S = k])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. T est l'instant de premier succès dans un schéma de Bernoulli où la probabilité de succès vaut $\mathbf{P}([S = 7]) = \frac{1}{6}$. Ainsi, $T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6 \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - \frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{5}{6} \times 6^2 = 30.$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. X compte le nombre de succès (obtenir Pile) lors de la succession de 4 expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès égale à $\frac{1}{3}$. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, \frac{1}{3})$.

2. T est le premier instant de succès (obtenir au moins 2 piles) dans un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut $\mathbf{P}([X \geq 2])$.

Ainsi, $T \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathbf{P}([X \geq 2]))$.

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X \geq 2]) &= \mathbf{P}([X = 2]) + \mathbf{P}([X = 3]) + \mathbf{P}([X = 4]) \\ &= \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ &= 6 \frac{2^2}{3^4} + 4 \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^4} = \frac{6 \times 4 + 4 \times 2 + 1}{3^4} \\ &= \frac{33}{3^4} = \frac{16 \times 27}{11^2} = \frac{11}{27}.\end{aligned}$$

D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{11}{27}} = \frac{27}{11} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - \frac{11}{27}}{\left(\frac{11}{27}\right)^2} = \frac{16}{27} \times \frac{27^2}{11^2} = \frac{432}{121}.$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. On note

U_1 : « Choisir l'urne numérotée 1 »

U_2 : « Choisir l'urne numérotée 2 »

Comme (U_1, U_2) est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R) &= \mathbf{P}_{U_1}(R) \mathbf{P}(U_1) + \mathbf{P}_{U_2}(R) \mathbf{P}(U_2) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.\end{aligned}$$

2. T est l'instant de premier succès (obtenir une boule rouge) dans un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut $\mathbf{P}(R) = \frac{3}{10}$. Ainsi, $T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{10}\right)$.

D'après les propriétés des lois géométriques,

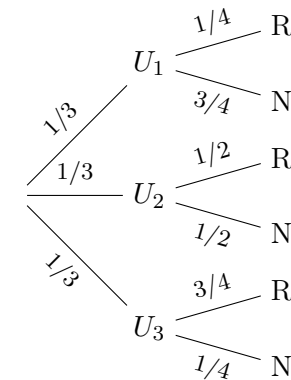
$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{3} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - \frac{3}{10}}{\left(\frac{3}{10}\right)^2} = \frac{7}{10} \times \frac{10^2}{3^2} = \frac{70}{9}.$$

□

Solution de l'exercice 6. D'après l'énoncé,

- * l'urne 1 contient 1 boule rouge et 3 boules noires,
- * l'urne 2 contient 2 boules rouges et 2 boules noires,
- * l'urne 3 contient 3 boules rouges et 1 boule noire.

On peut alors construire un arbre de probabilités :



1. On note U_k l'événement « L'urne numéro k a été choisie ».

Comme (U_1, U_2, U_3) est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N) &= \mathbf{P}_{U_1}(N) \mathbf{P}(U_1) + \mathbf{P}_{U_2}(N) \mathbf{P}(U_2) + \mathbf{P}_{U_3}(N) \mathbf{P}(U_3) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{3 + 2 + 1}{4 \times 3} = \frac{\frac{3 \times 4}{2}}{4 \times 3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. T est l'instant de premier succès (obtenir une boule noire) dans un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut $\frac{1}{2}$. Ainsi, $T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2.$$

□

II - Autour de la loi géométrique

Solution de l'exercice 7.

1. D'après les lois usuelles, $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{5}\right)$.

D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - \frac{2}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \times \frac{5^2}{2^2} = \frac{15}{4}.$$

2. Si $X \leq n$, alors X peut prendre les valeurs $1, 2, \dots, n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X \leq n]) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \\ &= \frac{2}{5} \sum_{k=1}^{k-1=n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \\ &= \frac{2}{5} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{\ell} \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{5}} \\ &= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. Comme T prend les valeurs $0, 1, 2, \dots$, alors Y prend les valeurs $1, 2, 3, \dots$. Ainsi, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}([Y = k]) = \mathbf{P}([Y - 1 = k - 1]) = \mathbf{P}([T = k - 1]) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

2. D'après la question précédente, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([Y = k]) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$.
Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$.

D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \times 3^2 = 6.$$

3. Rappelons que $Y = T + 1$, soit $T = Y - 1$. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[Y - 1] = \mathbf{E}[Y] - 1 = 3 - 1 = 2.$$

D'après les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}(T) = \mathbf{V}(Y - 1) = \mathbf{V}(Y) = 6.$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. Comme T prend les valeurs $0, 1, 2, \dots$, alors Y prend les valeurs $1, 2, 3, \dots$. Ainsi, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}([Y = k]) = \mathbf{P}([Y - 1 = k - 1]) = \mathbf{P}([T = k - 1]) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}.$$

2. D'après la question précédente, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([Y = k]) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$.
Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right)$.

D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5 \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{1 - \frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \times 5^2 = 20.$$

3. Rappelons que $Y = T + 1$, soit $T = Y - 1$. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[Y - 1] = \mathbf{E}[Y] - 1 = 5 - 1 = 4.$$

D'après les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}(T) = \mathbf{V}(Y - 1) = \mathbf{V}(Y) = 20.$$

□

Solution de l'exercice 10.

1. Comme X est à valeurs entières, $X > n - 1$ est équivalent à soit $X = n$, soit $X > n$. Ainsi,

$$[X > n - 1] = [X = n] \cup [X > n].$$

2. Comme les événements $[X = n]$ et $X > n]$ sont incompatibles, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X > n - 1]) &= \mathbf{P}([X = n] \cup [X > n]) = \mathbf{P}([X = n]) + \mathbf{P}([X > n]) \\ u_{n-1} &= \mathbf{P}([X = n]) + u_n \\ u_{n-1} - u_n &= \mathbf{P}([X = n]). \end{aligned}$$

3. D'après la définition des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}_{[X > n-1]}([X > n]) = \frac{\mathbf{P}([X > n] \cap [X > n - 1])}{\mathbf{P}([X > n - 1])} = \frac{\mathbf{P}([X > n])}{\mathbf{P}([X > n - 1])} = \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

4. D'après la définition des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}_{[X > n-1]}([X > n]) = \frac{\mathbf{P}([X > n] \cap [X > n - 1])}{\mathbf{P}([X > n - 1])}.$$

Or, dire que $X > n - 1$ et $X > n$ est équivalent à dire que $X > n$. Ainsi,

$$\mathbf{P}_{[X > n-1]}([X > n]) = \frac{\mathbf{P}([X > n])}{\mathbf{P}([X > n - 1])}.$$

Ainsi, d'après la question **2.**,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X > n]) &= \frac{\mathbf{P}([X > n - 1]) - \mathbf{P}([X = n])}{\mathbf{P}([X > n - 1])} \\ &= 1 - \frac{\mathbf{P}([X = n])}{\mathbf{P}([X > n - 1])} \\ &= 1 - \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X = n]). \end{aligned}$$

5. D'après la question précédente et l'énoncé,

$$\mathbf{P}_{[X > n-1]}([X > n]) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Finalement,

$$u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}.$$

6. D'après la question précédente, (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme

$$u_0 = \mathbf{P}([X > 0]) = 1,$$

car X est à valeurs dans \mathbb{N}^* . Ainsi,

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

D'après la question **2.**,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = n]) &= u_{n-1} - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$.

7. D'après les propriétés des probabilités,

$$\mathbf{P}([X \leq n]) = 1 - \mathbf{P}([X > n]) = 1 - u_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. Si $Z \leq n$, alors $\max\{X_1, X_2\} \leq n$. Ainsi, $X_1 \leq n$ et $X_2 \leq n$. Alors,

$$[Z \leq n] = [X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n].$$

2. Comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$\mathbf{P}([Z \leq n]) = \mathbf{P}([X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n]) = \mathbf{P}([X_1 \leq n]) \times \mathbf{P}([X_2 \leq n]).$$

De plus, comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(2/3)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(2/3)$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X_1 \leq n]) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([X_1 = k]) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{3} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbf{P}([Z \leq n]) = \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2.$$

3. On remarque que, comme Z est à valeurs entières,

$$[Z \leq n] = [Z < n] \cup [Z = n]$$

$$[Z \leq n] = [Z \leq n-1] \cup [Z = n]$$

$$\mathbf{P}([Z \leq n]) = \mathbf{P}([Z \leq n-1]) + \mathbf{P}([Z = n])$$

$$\mathbf{P}([Z = n]) = \mathbf{P}([Z \leq n]) - \mathbf{P}([Z \leq n-1])$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)^2 \\ &= 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} - 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2} \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{9}\right) \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{8}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

4. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, d'après les résultats sur les séries géométriques, $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Comme $-1 < \frac{1}{9} < 1$, d'après les résultats sur les séries géométriques, $\sum \left(\frac{1}{9}\right)^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([Z = n]) &= \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} - \frac{8}{9} \times \frac{9}{8} \\ &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. D'une part, comme $-1 < e^{-1} < 1$, alors $\sum (e^{-1})^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}.$$

D'autre part, comme $-1 < e^{-1} < 1$, alors $\sum (e^{-1})^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} \times e^{-1} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{e} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}.$$

Finalement,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([Y = k]) = \frac{e}{e-1} - \frac{1}{e-1} = 1.$$

2^e méthode. Soit $n \geq 0$. En utilisant une somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^n (e^{-k} - e^{-(k+1)}) = e^{-0} - e^{-(n+1)} = 1 - e^{-(n+1)}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(n+1)} = 0$, alors $\sum (e^{-k} - e^{-(k+1)})$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-k} - e^{-(k+1)}) = 1.$$

2. Comme Y prend les valeurs $0, 1, \dots$, alors Z prend les valeurs $1, 2, \dots$ et $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Z = k]) &= \mathbf{P}([Y + 1 = k]) = \mathbf{P}([Y = k - 1]) \\ &= e^{-(k-1)} - e^{-(k-1+1)} = e^{-(k-1)} - e^{-k} \\ &= e^{-(k-1)}(1 - e^{-1}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right) \times \left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[Z] = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(Z) &= \frac{1 - (1 - \frac{1}{e})}{(1 - \frac{1}{e})^2} \\ &= \frac{1}{e} \times \frac{e^2}{(e-1)^2} \\ &= \frac{e}{(e-1)^2}. \end{aligned}$$

3. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[Z - 1] = \frac{e}{e-1} - 1 = \frac{1}{e-1}.$$

D'après les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(Z - 1) = \mathbf{V}(Z) = \frac{e}{e-1}.$$

4. Comme M est une matrice de taille 2, elle est inversible si et seulement si $1 \times Y - 1 \times 0 = Y \neq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M \text{ inversible}) &= \mathbf{P}([Y \neq 0]) = 1 - \mathbf{P}([Y = 0]) = 1 - (e^{-0} - e^{-(0+1)}) \\ &= \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 13.

1. Comme $([Y = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = Y]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = Y] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) \times \mathbf{P}([Y = k]), \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{k-1=0}^{k-1=n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^{\ell}. \end{aligned}$$

Comme $-1 < \frac{4}{9} < 1$, alors $\sum \left(\frac{4}{9}\right)^k$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{\ell} = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$

3. En utilisant les questions 1. et 2.,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = Y]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) \times \mathbf{P}([Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \right] \\ &= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2} \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

□

III - Autour de la loi de Poisson

Solution de l'exercice 14.

1. Comme X est le nombre de succès dans une suite de 60 expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès égale à $\frac{1}{12}$, alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(60, 1/12).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = 60 \times \frac{1}{12} = 5 \text{ et } \mathbf{V}(X) = 5 \left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{55}{12}.$$

2. Comme $\mathbf{E}[X] = 60 \times \frac{1}{12} = 5$, alors $\mathbf{E}[Z] = 5$ et Z suit une loi de Poisson de paramètre 5.

3. En utilisant la table précédente,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq 3) &\simeq \mathbf{P}(Z \leq 3) \\ &\simeq \mathbf{P}(Z = 0) + \mathbf{P}(Z = 1) + \mathbf{P}(Z = 2) + \mathbf{P}(Z = 3) \\ &\simeq 0,006 + 0,034 + 0,084 + 0,140 \\ &\simeq 0,264. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des probabilités,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \geq 4) &= 1 - \mathbf{P}(X < 4) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 3) \\ &\simeq 1 - 0,264 \\ &\simeq 0,736. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 15.

1. Comme X est le nombre de succès (être défectueuse) dans une suite de 100 expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès égale à $\frac{5}{100}$, alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(100, \frac{5}{100}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = 100 \times \frac{5}{100} = 5 \text{ et } \mathbf{V}(X) = 5 \left(1 - \frac{5}{100}\right) = \frac{19}{4}.$$

2. Comme $\mathbf{E}[X] = 100 \times \frac{5}{100} = 5$, alors $\mathbf{E}[Z] = 5$ et Z suite une loi de Poisson de paramètre 5.

3. En utilisant la table,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X \geq 10) &\simeq \mathbf{P}(Z \geq 10) \\
 &\simeq 1 - \mathbf{P}(Z < 10) \\
 &\simeq 1 - \mathbf{P}(Z \leq 9) \\
 &\simeq 1 - 0,968 \\
 &\simeq 0.032.
 \end{aligned}$$

□

IV - Autres lois

Solution de l'exercice 16. D'après la définition de l'espérance, si cette somme est bien définie,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[X] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbf{P}([X = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}, \text{ d'après la formule admise} \\
 &= \frac{1}{6} \times 4 = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 17.

1. En réduisant sous le même dénominateur,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. En utilisant la question précédente puis une somme télescopique,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

3. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) &= 1 \\
 \mathbf{P}([X = 0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) &= 1.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) = 1 - 1 = 0.$$

4. En utilisant l'événement contraire puis les calculs précédents,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([X > n]) &= 1 - \mathbf{P}([X \leq n]) = 1 - \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([X = k]), \text{ car } X(\Omega) \subset \mathbb{N} \\
 &= 1 - \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([X = k]), \text{ car } \mathbf{P}([X = 0]) = 0 \\
 &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1} \right), \text{ d'après le calcul de la question 2.} \\
 &= \frac{1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 18.1. Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n \frac{4(k-1)}{3^k} &= \sum_{k-1=1}^{k-1=n-1} \frac{4(k-1)}{3^{k-1+1}} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{4\ell}{3^{\ell+1}} \\
&= \frac{4}{3} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell \left(\frac{1}{3}\right)^\ell.
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat admis pour $x = \frac{1}{3}$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{4(k-1)}{3^k} &= \frac{4}{3} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^\ell = \frac{4}{3} \times \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{3^2}{2^2} = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}([X = n]) = 1$.

2. En utilisant la définition de l'espérance, sous réserve de convergence

des séries,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{n=2}^{+\infty} n \mathbf{P}([X = n]) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n \frac{4(n-1)}{3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{4(n-1)}{3^n}, \text{ car } \frac{1(1-1)}{3} = 0 \\
&= 4 \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \right] \\
&= 4 \left[\frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + 1\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} - \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \right] \\
&= \frac{4}{3} \left[\frac{4}{3} \times \frac{3^3}{2^3} - \frac{3^2}{2^2} \right] \\
&= \frac{4}{3} \times \frac{3^2}{2^2} \left[\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} - 1 \right] \\
&= 3 \times 1 = 3.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 19.1. Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$ et $-1 < \frac{1}{2} < 1$, d'après les résultats sur les séries géométriques,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^\ell = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^\ell = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}([Y = n]) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
&= 3 - 2 = 1.
\end{aligned}$$

2. D'après la définition de l'espérance, sous réserve de convergence des sommes,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[Y] &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}([Y = n]) \\
 &= \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
 &= \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
 &= \frac{3}{2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 1 \right] - 2 \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 \right] \\
 &= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 \right] - 2 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - 1 \right] \\
 &= \frac{3}{2}(9 - 1) - 2(4 - 1) \\
 &= 3 \times 4 - 2 \times 3 = 6.
 \end{aligned}$$

□