■ ■ ■

I. Convergence dominée, Intégration terme à terme

Exercice 1. (✍) Soit f une fonction continue sur $[1, \mathrm{e}]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = n\int_1^{1+1/n} f(t^n)\mathrm{d}t$.

Exercice 2. (✍) [ENSAM] Montrer la convergence et déterminer la somme de la série $\sum(-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. (✍) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+x^2\tan^2\theta}$.

Exercice 4. (✍) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n+\mathrm{e}^x}$.

Exercice 5. [CCP] Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ est convergente.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 1/(2n+1)$. En déduire le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Exercice 6. [TPE] Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\,t^n}{n!}\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I_n puis déterminer la limite de la suite (I_n).

Exercice 7. Montrer que $\int_0^1 \frac{(\ln(x))^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 8. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$.

II. Régularité des intégrales à paramètres

Exercice 9. (Théorème de Fubini, ♡) Soit $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{K}$ une application continue. En utilisant les applications H et G définies sur $[a,b]$ par

$$H(x) = \int_a^x \left(\int_c^d f(t,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t \text{ et } G(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(t,y)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y,$$

montrer que

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Exercice 10. [ENSAM] On pose $f(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

3. On admet que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 11. (✍) Étudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sqrt{1+tx}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12. Soit $F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de F.

2. Calculer F' et en déduire une expression de F.

3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

Exercice 13. (Intégrale de Dirichlet) [IMT] On note $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}(1-\mathrm{e}^{-xt})\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I est bien définie.

2. Montrer que F est définie sur $[0, +\infty[$, que F est continue sur $[0, +\infty[$ et que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

3. En déduire la valeur de I.

Exercice 14. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(tx)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$. Étudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de F.

Exercice 15. Soit F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$. Déterminer les limites de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 16. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

1. Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de F.

2. Déterminer F' et en déduire la valeur de $F(x)$.

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 17. [X-ENS]

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\, \mathrm{d}x$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

Exercice 18. (Intégrale de Gauss) [X-ENS] Soient f et g les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} \mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

1. Calculer $f(0)$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $-2g'(x)g(x) = f'(x)$.

3. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

Soit h une fonction continue par morceaux, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t$ soit convergente et non nulle.

4. Montrer que h est à valeurs positives.

Pour tout réel positif t non nul, on pose $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h(nt)$.

5. Montrer que S existe.

6. Déterminer un équivalent de $S(t)$ lorsque t tend vers 0^+.

7. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ lors que x tend vers 1^-.

Exercice 19. [Mines] Soit f la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

1. Vérifier l'existence de f puis montrer que f est $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier la convergence de cette suite puis trouver un équivalent en $+\infty$.

Exercice 20. [Mines] Soient a, b deux réels strictement positifs.

1. Montrer l'existence puis calculer $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, \mathrm{d}t$.

Ind. : Considérer I comme une fonction en a.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 21. [CCP] On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^3)}\, \mathrm{d}t$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

2. Déterminer un équivalent de I_n en $+\infty$.

Ind. : Étudier nI_n.

III. Avec Python

Exercice 22. [Centrale] Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $f_n : t \mapsto \frac{1-\cos(t/n)}{t^2(t^2+1)}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\, \mathrm{d}t$.

1. Tracer les graphes de $f_1, \ldots, f_{10}$ ainsi que celui de $t \mapsto 1/2$ sur $]0, \pi]$.

2. Déterminer la valeur de $u_1, \ldots, u_{30}$. Que constate-ton ? Le prouver.

3. On définit F sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2(t^2+1)}\, \mathrm{d}t$. Existence et continuité de F.

4. Tracer le graphe de F sur $]0, 10]$.

Mathématiciens

Gauss Johann Carl Friedrich (30 avr. 1777 à Brunswick-23 fév. 1855 à Göttingen).

Dirichlet Johann Peter Gustav Lejeune (13 fév. 1805 à Düren-5 mai 1859 à Göttingen).

Fubini Guido (19 jan. 1879 à Venise-6 juin 1943 à New York).