

## T.D. II - Intégrale sur un segment

### I - Calcul de primitives

**Exercice 1. (Fonctions polynomiales, ⚙️)** Déterminer des primitives des fonctions suivantes

- |                             |   |
|-----------------------------|---|
| <b>1.</b> $x^2 + x + 1$ .   | <b>3.</b> $4x^3 + 2x^2 - 1$ .                       |
| <b>2.</b> $2x^3 + 4x + 2$ . | <b>4.</b> $x^{10} + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}$ . |

**Exercice 2. (Fonctions puissances, ⚙️)**

- |                                  |                                       |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| <b>1.</b> $x^{3/2}$ .            | <b>4.</b> $\frac{4}{x^5}$ .           |
| <b>2.</b> $\frac{1}{\sqrt{x}}$ . | <b>5.</b> $(2x + 1)(x^2 + x)^5$ .     |
| <b>3.</b> $\frac{1}{3x^2}$ .     | <b>6.</b> $(x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4)$ . |

**Exercice 3. (Logarithmes & Exponentielles, ⚙️)**

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| <b>1.</b> $\frac{3}{x}$ .                      | <b>4.</b> $\frac{1}{e^{12x}}$ .       |
| <b>2.</b> $\frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 1}$ . | <b>5.</b> $(e^x + 1)(e^x + x)^{22}$ . |
| <b>3.</b> $e^{2x}$ .                           | <b>6.</b> $\frac{e^x + 1}{e^x + x}$ . |

**Exercice 4. (Calculs d'intégrales, ⚙️)** Calculer les intégrales suivantes :

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| <b>1.</b> $\int_0^1 (x^2 + 3x + 1) dx$ . | <b>3.</b> $\int_1^{-1} e^3 dx$ .      |
| <b>2.</b> $\int_{-2}^1 e^{3x} dx$ .      | <b>4.</b> $\int_2^1 \frac{1}{x} dx$ . |

### II - Propriétés de l'intégrale

**Exercice 5. (Loi uniforme)** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 0$  si  $x \notin [1, 3]$  et  $f(x) = \frac{1}{2}$  sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction  $f$ .
2. Déterminer les intégrales suivantes :

- |                                       |                                      |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| <b>a)</b> $\int_{-2}^0 f(x) dx$ .     | <b>d)</b> $\int_{-4}^3 f(x) dx$ .    |
| <b>b)</b> $\int_{-1}^{3/2} f(x) dx$ . | <b>e)</b> $\int_{-5}^{10} f(x) dx$ . |
| <b>c)</b> $\int_{-1}^2 f(x) dx$ .     |                                      |

3. Si  $x \in [1, 3]$ , déterminer  $\int_1^x f(t) dt$ .

**Exercice 6. (Loi exponentielle)** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $f(x) = 2e^{-2x}$  sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction  $f$ .
2. Déterminer les intégrales suivantes :

- |                                       |                                      |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| <b>a)</b> $\int_{-2}^0 f(x) dx$ .     | <b>d)</b> $\int_{-4}^3 f(x) dx$ .    |
| <b>b)</b> $\int_{-1}^{3/2} f(x) dx$ . | <b>e)</b> $\int_{-5}^{10} f(x) dx$ . |
| <b>c)</b> $\int_{-1}^2 f(x) dx$ .     |                                      |

3. Si  $x \geq 0$ , déterminer  $\int_0^x f(t) dt$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$ .

**Exercice 7.** Calculer  $\int_{-1}^5 |x - 2| dx$ .

**Exercice 8. (✱)** Soit  $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$  et  $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$ .

1. Calculer  $I$ .
2. Calculer  $I + J$ .
3. En déduire la valeur de  $J$ .

**Exercice 9. (✱)** Soit  $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$  et  $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$ .

1. Calculer  $I$ .
2. Calculer  $I + J$ .
3. En déduire la valeur de  $J$ .

**Exercice 10. (↗)** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2} dx$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
2. Montrer que  $(u_n)$  est minorée par 0.
3. En minorant  $1 - x^2$ , montrer que  $u_n \leq \frac{4}{3(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ .
4. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 11. (↗)** Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ .

1. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $0 \leq I_n \leq \ln(2)$ .
2. Étudier les variations de la suite  $(I_n)$ .
3. En déduire que la suite  $(I_n)$  converge.

### III - Intégrations par parties

**Exercice 12. (✱✱)** À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

- |                             |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. $\int_0^1 x e^x dx$ .    | 4. $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$ . |
| 2. $\int_1^2 x e^{2x} dx$ . | 5. $\int_1^e (\ln(t))^2 dt$ . |
| 3. $\int_1^e x \ln(x) dx$ . | 6. $\int_1^e t^2 e^t dt$ .    |

**Exercice 13. (↗)** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$ .

1. Montrer que  $f(t) = (2-t)e^t$  est une primitive de la fonction  $g(t) = (1-t)e^t$ .
2. Déterminer la valeur de  $u_1$ .
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ .

**Exercice 14. (↗)** Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $u_n = \int_1^e t(\ln(t))^n dt$ .

1. Calculer  $u_0$ .
2. a) Montrer que, pour tout  $t \in [1, e]$ ,  $0 \leq \ln(t) \leq 1$ .  
b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} u_n$ .
4. En déduire  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .