T.D. VIII - Réduction des matrices carrées

I - Valeurs propres / Vecteurs propres

Solution de l'exercice 1. Comme $AX_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3X_1$, alors X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3. □

Solution de l'exercice 2. Comme $AX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -X_1$, alors X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. □

Solution de l'exercice 3. Comme

$$\begin{aligned} AX_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\times 1+\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \sqrt{3}\times\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}\times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}(1+\sqrt{6}) \\ \sqrt{3}(\sqrt{6}+1) \end{pmatrix} = (1+\sqrt{6})X_1, \end{aligned}$$

alors X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1+\sqrt{6}$.

Comme

$$\begin{aligned} AX_2 &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}+2\sqrt{3} \\ -3\sqrt{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\times 1+\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}\times\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}\times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}(1-\sqrt{6}) \\ \sqrt{3}(-\sqrt{6}+1) \end{pmatrix} = (1-\sqrt{6})X_2, \end{aligned}$$

alors X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1-\sqrt{6}$. □

Solution de l'exercice 4. Comme

$$\begin{aligned} AX_1 &= \begin{pmatrix} -2-2\sqrt{2}-1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left((\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\times 1+1^2\right) \\ -(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(1+\sqrt{2})^2 \\ -(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} = -(1+\sqrt{2})X_1, \end{aligned}$$

alors X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-(1+\sqrt{2})$.

Comme

$$\begin{aligned} AX_2 &= \begin{pmatrix} -2+2\sqrt{2}-1 \\ -(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\sqrt{2}^2-2\sqrt{2}\times 1+1^2\right) \\ -(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(1-\sqrt{2})^2 \\ -(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} = -(1-\sqrt{2})X_2, \end{aligned}$$

alors X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-(1-\sqrt{2})$. □

Solution de l'exercice 5. Comme

$$AX_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_1,$$

alors X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

Comme

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4X_2,$$

alors X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

Comme

$$AX_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2X_3,$$

alors X_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2. □

Solution de l'exercice 6. Comme

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} = 16X_1,$$

alors X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 16.

Comme

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 8X_2,$$

alors X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 8.

Comme

$$AX_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -4X_3,$$

alors X_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -4. $\square$

II - Polynômes annulateurs

Solution de l'exercice 7.

1. D'après la définition du calcul matriciel,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = 4A$$
$$A^2 - 4A = 0_2.$$

Ainsi, $X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

2. Comme $X^2 - 4X = X(X-4)$, les racines de $X^2 - 4X$ sont 0 et 4. Ainsi, les valeurs propres possibles de A sont 0 et 4.

3. Comme $1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \neq 0$, alors P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A = PDP^{-1}$ et la matrice A est diagonalisable. $\square$

Solution de l'exercice 8.

1. En utilisant les opérations matricielles,

$$(M-I)(M+3I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. D'après la question précédente, $(X-1)(X+3)$ est un polynôme annulateur de M.

3. Comme les racines de $(X-1)(X+3)$ sont 1 et -3, les valeurs propres possibles de M sont 1 et -3.

Remarque. On peut trouver un vecteur propre associé à la valeur propre -3 en cherchant un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ tel que $MX = X$. $\square$

Solution de l'exercice 9.

1. D'après la définition du produit matriciel,

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2J.$$

2. D'après la question précédente, $J^3 - 2J = 0_3$ donc $X^3 - 2X$ est un polynôme annulateur de J.
Or,

$$X^3 - 2X = X(X^2-2) = X(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}).$$

Ainsi, les racines de $X^3 - 2X$ sont 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
Les valeurs propres possibles de J sont donc 0, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. $\square$

Solution de l'exercice 10.

1. En utilisant les définitions du produit matriciel, on vérifie que $A^3 + A^2 - 4A - 4I = 0_3$. Ainsi, R est un polynôme annulateur de A.

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^3 + A^2 - 4A &= 4I \\ A(A^2 + A - 4I) &= 4I \\ A\left[\frac{1}{4}(A^2 + A - 4I)\right] &= I. \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 + A - 4I)$.

3. D'après la définition de R,

$$R(2) = 2^3 + 2^2 - 4 \times 2 - 4 = 0.$$

Ainsi, 2 est racine du polynôme R.

4. Comme 2 est une racine de R, il existe un polynôme Q tel que $R = (X-2)Q$. En utilisant une division euclidienne,

$$R(X) = (X-2)(X^2 + 3X + 2).$$

5. Le discriminant du trinôme $X^2 + 3X + 2$ vaut $3^2 - 4 \times 2 = 1$. Ainsi, ses racines sont

$$\frac{-3-1}{2} = -2 \text{ et } \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Ainsi, les racines de R sont $-2, -1$ et 2.
Les valeurs propres possibles de A sont donc -2, -1 et 2.

6. Comme

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2X_1,$$

alors X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2.

Comme

$$AX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -X_2,$$

alors X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

Comme

$$AX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_3,$$

alors X_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

7. D'après la définition du produit matriciel,

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $AP = PD$.

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan,

$$\begin{array}{|ccc|ccc|l}
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & L_2 \leftarrow L_3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & L_3 \leftarrow L_2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $AP = PD$, alors $A = PDP^{-1}$ et A est bien diagonalisable. $\square$

III - Calculs de puissances

Solution de l'exercice 11.

1. En utilisant la propriété et les valeurs des premiers termes,

$$\begin{aligned} u_1 &= -3u_0 + 4v_0 - w_0 = -3 \times 1 + 4 \times (-1) - 2 = -9 \\ v_1 &= 2v_0 = 2 \times (-1) = -2 \\ w_1 &= -4v_0 - 2w_0 = -4 \times (-1) - 2 \times 2 = 0. \end{aligned}$$

2. Comme $v_{n+1} = 2v_n$, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2. Ainsi,

$$v_n = 2^n v_0 = 2^n \times (-1) = -2^n.$$

3. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$PA = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$DP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $PA = DP$.

En utilisant la méthode de Gauss-Ĵordan,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right| \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right| \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_3}$$

Ainsi, P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, $A = P^{-1}DP$ et la matrice A est bien diagonalisable.

4. Montrons par récurrence que $A^n = P^{-1}D^nP$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$.

- $*$ $A^0 = I_3$.
- $*$ $P^{-1}D^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3$.

Ainsi, $A^0 = P^{-1}D^0P$ et la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = P^{-1}D^nP$. Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= P^{-1}D^nPA, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= P^{-1}D^nPP^{-1}DP, \text{ d'après la question } \mathbf{3.} \\ &= P^{-1}D^nI_3DP \\ &= P^{-1}D^{n+1}P. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = P^{-1}D^nP.$$

5. Comme D est diagonale, alors

$$D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
A^n &= P^{-1}D^nP \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n & -(-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & -2^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6. D'après les définitions,

$$\begin{aligned}
U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3u_n + 4v_n - w_n \\ 2v_n \\ -4v_n + 2w_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = AU_n.
\end{aligned}$$

7. Montrons par récurrence que $U_n = A^n U_0$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$.

$$A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0.$$

La propriété est donc vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $U_n = A^n U_0$. Alors,

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= AU_n, \text{ d'après la question précédente} \\
&= A \times A^n U_0, \text{ d'après l'H.R.} \\
&= A^{n+1} U_0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0.$$

8. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= U_n = A^n U_0 \\
&= \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-3)^n - (2^n - (-2)^n) + 2\left((-3)^n - (-2)^n\right) \\ -2^n \\ -\left((-2)^n - 2^n\right) + 2(-2)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3(-3)^n - 2^n - (-2)^n \\ -2^n \\ (-2)^n + 2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout n entier naturel,

$$\begin{cases} u_n &= 3(-3)^n - 2^n - (-2)^n \\ v_n &= -2^n \\ w_n &= (-2)^n + 2^n \end{cases}$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. En utilisant la propriété et les valeurs des premiers termes,

$$\begin{aligned}
u_1 &= -u_0 + w_0 = -1 + 2 = 1 \\
v_1 &= 2v_0 - 4w_0 = 2 \times (-1) - 4 \times 2 = -10 \\
w_1 &= -2w_0 = -2 \times 2 = -4.
\end{aligned}$$

2. Comme $w_{n+1} = -2w_n$, la suite (w_n) est une suite géométrique de raison -2. Ainsi,

$$w_n = (-2)^n w_0 = (-2)^n \times 2 = 2 \times (-2)^n.$$

3. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $AP = PD$.

En utilisant la méthode de Gauss-Ĵordan,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

Ainsi, P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors, $A = PDP^{-1}$ et la matrice A est bien diagonalisable.

4. Montrons par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$.
- $*$ $A^0 = I_3$.
- $*$ $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Ainsi, $A^0 = PD^0P^{-1}$ et la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= PD^nP^{-1}A, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \text{ d'après la question } \mathbf{3.} \\ &= PD^nI_3DP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.$$

5. Comme D est diagonale, alors

$$D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(-2)^n & (-1)^n & 0 \\ (-2)^n & 0 & 2^n \\ (-2)^n & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & (-1)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & (-2)^n - 2^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. D'après les définitions,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_n + w_n \\ 2v_n - 4w_n \\ -2w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = AU_n. \end{aligned}$$

7. Montrons par récurrence que $U_n = A^n U_0$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$.

$$A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0.$$

La propriété est donc vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $U_n = A^n U_0$. Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n, \text{ d'après la question précédente} \\ &= A \times A^n U_0, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= A^{n+1} U_0. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0.$$

8. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= U_n = A^n U_0 \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & (-1)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & (-2)^n - 2^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n + 2\left((-1)^n - (-2)^n\right) \\ -2^n + 2\left((-2)^n - 2^n\right) \\ 2(-2)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(-1)^n - 2 \times (-2)^n \\ 2 \times (-2)^n - 3 \times 2^n \\ 2 \times (-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout n entier naturel,

$$\begin{cases} u_n &= 3(-1)^n - 2 \times (-2)^n \\ v_n &= 2 \times (-2)^n - 3 \times 2^n \\ w_n &= 2 \times (-2)^n \end{cases}$$

□