VII - Calcul matriciel

À Savoir

Opérations sur les matrices. Addition, Multiplication par un nombre, Multiplication de matrices.

* $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
* $\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$.
* $A + 0 = 0 + A = A$.
* $A + (-A) = (-A) + A = 0$.
* $A \times I = I \times A = A$.

Attention. En général, $AB \neq BA$.

Exemple 1

Soit A une matrice carrée.

$A^3 + 2A^2 + 3A = A \times A^2 + 2A \times A + 3A \times I = A(A^2 + 2A + 3I)$.

À Savoir

Systèmes linéaires. Traduire un système linéaire en équation matricielle et réciproquement.

Utilisation en lien avec :

* la résolution de systèmes.
* les suites définies par récurrence.
* la formule des probabilités totales.

Exemple 2

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ 3y + z &= 0 \\ -x + 2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n - v_n + 2w_n \\ v_{n+1} &= 3v_n + w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + 2w_n \end{cases} \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n$$

À Savoir

$$\begin{cases} A^0 &= I, \\ A^n &= \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}. \end{cases}$$

Caluls de puissances :

* formule donnée et démonstration par récurrence.
* puissance des matrices diagonales (par récurrence).
* formule du binôme de Newton. Si $A \times B = B \times A$, alors $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

  Utile surtout si $A^k = 0$ pour k assez grand.
* si $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$ (par récurrence).

À Savoir

Définition de l'inverse. Il existe B telle que $AB = I$. Alors, $A^{-1} = B$ et $BA = I$.

Existence d'un inverse :

* donnée d'une matrice B telle que $AB = I$.
* donnée d'une relation telle que $a_k A^k + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$.
* matrice d'ordre 2 et $ad - bc \neq 0$ + Calcul.
* matrice diagonale & tous les coefficients diagonaux non nuls + Calcul.
* matrice triangulaire & tous les coefficients diagonaux non nuls.
* calcul par inversion d'un système linéaire ou méthode du pivot sur l'identité.

Exemple 3

Si A est une matrice telle que $A^3 + 2A^2 + A + 5I = 0$. Alors,

$$A\left(A^2 + 2A + I\right) = -5I$$
$$A \times \left(-\frac{1}{5}\left(A^2 + 2A + I\right)\right) = I.$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{5}\left(A^2 + 2A + I\right)$.

Non-inversibilité. Utiliser une relation $AB = AC$ (ou $AB = 0$ ou ...). Supposer par l'absurde que A est inversible et en déduire $B = C$ (ou $B = 0$ ou ...). Obtenir une contradiction.