VIII - Intégration

I - Primitives

Définition 1 - Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une *primitive* de f est une fonction dérivable F sur I telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = x\ln(x) - x$. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors F est dérivable et pour tout $x \in]0,1]$,

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Ainsi, F est une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1 - Primitives de fonctions continues

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.
Si F et G sont des primitives d'une fonction f continue sur I, alors il existe un réel c tel que $\forall\, x \in I$, $F(x) = G(x) + c$.

Exemple 2

Si G est une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, alors il existe un réel c tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ G(x) = x\ln(x) - x + c.$$

Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Intervalle
c	cx	$\mathbb{R}$
$x^a,\ a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0,+\infty[$
$\mathrm{e}^{ax},\ a \neq 0$	$\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}$	$\mathbb{R}$

Exemple 3

Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{1/4}$ est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{1/4+1} = \frac{4}{5}x^{5/4}.$$

Proposition 2 - Primitive de fonctions composées

Soit u une fonction dérivable telle que u' soit continue.

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$\lambda u'(x) + \mu v'(x)$	$\lambda u(x) + \mu v(x)$
$u'(x)u^a(x),\ a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1}(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$
$u'(x)v'(u(x))$	$v(u(x))$

Exemple 4

La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ est de la forme $u'(x)u(x)$ où $u(x) = \ln(x)$. Ainsi, une primitive de f est donnée par $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$.

II - Intégrale sur un segment

Définition 2 - Intégrale d'une fonction continue

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est le réel défini par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple 5

En utilisant les primitives usuelles,

- $\displaystyle\int_1^2 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}$.
- $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^3+4x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^5 - 1$.

Théorème 2 - Intégrale et Primitive

Soient f une fonction continue définie sur I et $a \in I$. On note $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors, F est l'unique primitive de f qui s'annule en a. En particulier, pour tout réel $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

II.1 - Propriétés de l'intégrale

Définition 3 - Fonctions continues par morceaux

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}]a_k, b_k[$. On suppose que f est continue par morceaux sur I, i.e. continue sur chacun des intervalles $]a_k, b_k[$ et prolongeable par continuité e, a_k et b_k. Alors, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition 3 - Relation de Chasles

Soient f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et a, b et c des réels de I. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 6 - Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = x - 1$ sinon. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^1 0\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2 = 0 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Proposition 4 - Linéarité de l'intégrale

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et

λ un réel. Alors,

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 7

En utilisant les primitives usuelles,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{12}{x} + 5x^3\,\mathrm{d}x &= 12\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 5\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x\\ &= 12\left[\ln(x)\right]_1^2 + 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2\\ &= 12\left(\ln(2) - \ln(1)\right) + 5\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}\right)\\ &= 12\ln(2) + \frac{5}{4}\cdot 15.\end{aligned}$$

Proposition 5 - Croissance de l'intégrale (I)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Si $a \leqslant b$ et, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Exemple 8

Soient $F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ et $0 \leqslant x \leqslant y$. Alors,

$$\begin{aligned}F(y) &= \int_0^y \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^y \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= F(x) + \int_x^y \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, $\frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2} \geqslant 0$ pour tout $t \in [x,y]$ et $x \leqslant y$, donc $\int_x^y \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Ainsi, $F(x) \leqslant F(y)$ et F est croissante.

Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (II)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. Si $a \leqslant b$ et pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 9

Pour tout $x \in [0,1]$, $x+1 \geqslant 1$. Ainsi,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Proposition 7 - Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Si $a \leqslant b$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 10

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$. Comme la fonction exponentielle est croissante,

$$\left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |(-t)^n|\,\frac{\mathrm{e}^t}{n!}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^x}{(n+1)!}.$$

Proposition 8 - Positivité de l'intégrale des fonctions continues

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si f est à valeurs positives, alors $f\equiv 0$ si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exemple 11 - Contre-exemple

La propriété précédente est fausse si f est seulement continue par morceaux. Par exemple, si $f(x)=0$ sur $]0,1]$ et $f(1)=1$. Alors, f est non nulle et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

II.2 - Calculs d'intégrales

Théorème 3 - Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 12 -

- Calculons $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

  On pose $\begin{cases} u(x) &= x \\ u'(x) &= 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) &= \mathrm{e}^{2x} \\ v(x) &= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \end{cases}$. Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{e}^4}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_1^2$$
$$= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{4} = \frac{3\,\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}.$$

- Calculons $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

  On pose $\begin{cases} u(x) &= \ln(x) \\ u'(x) &= \frac{1}{x} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) &= 1 \\ v(x) &= x \end{cases}$. Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = [\ln(x)x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\ln(2) - [x]_1^2 = 2\ln(2) - 2 + 1 = 2\ln(2) - 1.$$

Théorème 4 - Changement de variable

Soient $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ et φ une fonction de $[a,b]$ dans I de classe $\mathscr{C}^1$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 13 -

Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$ à l'aide du changement de variable $t=\ln(u)$.

La fonction $\varphi : [1, \mathrm{e}] \to [0,1]$, $u \mapsto \ln(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u+1} \times \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right] \mathrm{d}u \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = [\ln(u)]_1^{\mathrm{e}} - [\ln(1+u)]_1^{\mathrm{e}} \\ &= 1 - \ln(1+\mathrm{e}) + \ln(2).\end{aligned}$$

II.3 - Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 5 - Formule de Taylor avec reste intégral

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Alors, pour tout $(a,x) \in I^2$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 14

- La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$. De plus, pour tout $x > -1$,
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$
D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x > -1$,
$$\ln(1+x) = 0 + \frac{x}{1}\cdot\frac{1}{1+0} + \int_0^x \frac{(x-t)}{1!} \times \left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right) \mathrm{d}t$$
$$\ln(1+x) - x = -\int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$
Si $x \geqslant 0$ et $t \in [0,x]$, alors $\frac{x-t}{(1+t)^2} \geqslant 0$ et $\ln(1+x) - x \leqslant 0$.
Si $-1 < x \leqslant 0$ et $t \in [x,0]$, alors $\frac{x-t}{(1+t)^2} \leqslant 0$ et $\ln(1+x) - x \leqslant 0$.
Finalement,
$$\forall\, x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x.$$
- Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, pour tout x réel,
$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$
Si $x \geqslant 0$ et $t \in [0,x]$, alors
$$0 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x$$
$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x$$
$$0 \leqslant \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x.$$
D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.
Si $x \leqslant 0$ et $t \in [x,0]$, d'après l'inégalité triangulaire,
$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$
On conclut comme précédemment que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.

III - Intégrales généralisées

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

III.1 - Définition

Définition 4 - Convergence

Soit f une fonction continue par morceaux sur I.

- Si $I = [a, b[$ et f est continue sur $[a, b[$. L'*intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque x tend vers b.
- Si $I =]a, b]$ et f est continue sur $]a, b]$. L'*intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque x tend vers a.
- Si $I =]a, b[$ et f est continue sur $]a, b[$. L'*intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge* s'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

Dans tous les cas, si l'intégrale ne converge pas, elle *diverge*.

Exemple 15

La fonction ln est continue sur $]0, 1]$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon.$$

Ainsi, $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$ et $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 6 - Intégrales de référence

(i). **Intégrales de Riemann sur** $[1, +\infty[$**.** $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Alors, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.

(ii). **Intégrales de Riemann sur** $]0, 1]$**.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Alors, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$.

(iii). **Fonction exponentielle.** $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$. Alors, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

(iv). **Fonction logarithme.** $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$.

III.2 - Propriétés

Proposition 9 - Linéarité

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent, alors $\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 10 - Relation de Chasles

On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $c \in]a,b[$. Alors, $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 11 - Croissance de l'intégrale

On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

(i). Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(ii). Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 7 - Inégalité triangulaire

Si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente et $a \leqslant b$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 8 - Positivité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est nulle sur I.

III.3 - Preuves d'existences

Proposition 12 - Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Alors, les intégrales de f sur $[a,b]$, $]a,b]$, $]a,b[$ et $[a,b[$ sont égales.

Exemple 16

Montrons que $\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. On note f la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(t) = t\ln(t)$.

- La fonction f est continue sur $]0,1]$.
- D'après les croissances comparées, $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$. Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0.

Finalement, l'intégrale de f sur $]0,1]$ est bien définie.

Proposition 13 - Fonctions à valeurs positives

Si f est valeurs positives sur $[a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

Théorème 9 - Domination locale

Soient f, g deux fonctions continues de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}_+$.

- S'il existe un réel c tel que $\forall\, x \in [c,b[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et $\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si $f(x) \sim_b g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Exemple 17

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$.
  - ⋆ $x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  - ⋆ Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{n+2} \mathrm{e}^{-x} = 0$, il existe un réel c tel que, pour tout $x \geqslant c$,
  $$x^{n+2} \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1, \text{ soit } x^n \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}.$$
  $$\int_c^x t^n \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t \leqslant \int_c^x \frac{1}{t^2} \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{c} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{c}.$$
  Comme $t^n \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_c^x t^n \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ est croissante et majorée par $\frac{1}{c}$ donc convergente. Ainsi, $\displaystyle\int_c^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ converge.
  - ⋆ Comme $x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0, c]$, son intégrale sur ce segment est bien définie.

  Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$ converge.
- Étudions $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2}$.
  - ⋆ $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est continue sur $[0, 1[$.
  - ⋆ $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)} \sim_1 \frac{1}{2(1-t)}$.
  Comme $\displaystyle\lim_{t \to 1} \frac{2(1-t)}{1-t^2} = 1$, il existe $c < 1$ tel que pour tout $x \geqslant c$,
  $$\frac{1}{2} \leqslant \frac{2(1-x)}{1-x^2}, \text{ soit } \frac{1}{4(1-x)} \leqslant \frac{1}{1-x^2}.$$
  $$\int_c^x \frac{1}{1-t^2} \,\mathrm{d}t \geqslant \int_c^x \frac{4}{(1-t)} \,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{4} \left(-\ln(1-x) + \ln(1-c) \right).$$

  Comme $\displaystyle\lim_{x \to 1} \ln(1-x) = -\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$ n'est pas convergente.

III.4 - Méthodes de calculs

Utiliser les méthodes de calcul sur un segment (primitivation, intégration par parties, changement de variable), puis étudier la limite.

Exemple 18

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$.

- Si $n = 0$. Pour tout $x \geqslant 0$,
  $$\int_0^x \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t} \right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$
  Ainsi, $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = 1$.
- Si $n \geqslant 1$. Soit $M \geqslant 0$.
  On pose $\begin{cases} u(x) & = x^n \\ u'(x) & = nx^{n-1} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) & = \mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) & = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$. Comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, M]$, d'après la formule d'intégration par parties,
  $$\begin{aligned} \int_0^M x^n \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x &= \left[-x^n \mathrm{e}^{-x} \right]_0^M + \int_0^M nx^{n-1} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x \\ &= -M^n \mathrm{e}^{-M} + n \int_0^M x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$
  D'après le théorème des croissances comparées, lorsque $M \to +\infty$, on obtient la relation :
  $$I_n = nI_{n-1}.$$
- On montre alors par récurrence que, pour tout n entier naturel, $I_n = n!$.