

## T.D. V - Applications linéaires

**Exercice 1.** Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1.  $E_1 = \{(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n ; x_1 = 0 \text{ ET } x_2 = 0\}$
2.  $E_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + x_2 = 0\}$
3.  $E_3 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 \neq 0\}$
4.  $E_4 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 = x_2\}$
5.  $E_5 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 x_2 = 0\}$

### I - Applications linéaires

**Exercice 2.** Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires. Le cas échéant, déterminer le noyau et l'image.

1.  $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (-x + 2y, 2x - 3y + z)$
2.  $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x - y + 3z, 4x + y - z)$
3.  $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y + z, x + y + z, x)$
4.  $f_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto z(x + y, x - y)$
5.  $f_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto 2(x + y + z, x - y)$

**Exercice 3.** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ . Montrer que  $g \circ f = 0$  si et seulement si  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ .

**Exercice 4.** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  une application linéaire non nulle. Montrer que  $f$  est surjective.

**Exercice 5.** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ , la famille  $(x, f(x))$  soit liée. On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$ .

1. Montrer qu'il existe  $a_i \in \mathbb{R}$  tel que  $f(e_i) = a_i e_i$ .
2. Montrer qu'il existe  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  tel que  $f(e_i + e_j) = a_{i,j}(e_i + e_j)$ .
3. Montrer que,  $a_i = a_j$  puis qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  telle que  $f = a \text{Id}$ .

**Exercice 6.** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

1. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $d_k = \dim(\text{Ker}(u^k))$ .

2. Montrer que la suite  $(d_k)$  est croissante et majorée. En déduire que la suite  $(d_k)$  est convergente.

On admettra que la suite  $(d_k)$  est stationnaire et on note  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $d_{p-1} \neq d_p$  et, pour tout  $k \geq p$ ,  $d_k = d_p$ .

3. Montrer que  $\text{Ker } u^{p-1} \neq \text{Ker } u^p$  et, pour tout  $k \geq p$ ,  $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^p$ .

### II - Applications linéaires & Matrices

**Exercice 7.** Pour les applications linéaires  $f$  et les bases  $\mathcal{B}$  suivantes, déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

1.  $f_1 : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ .
2.  $f_2 : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$ ,  $\mathcal{B} = ((0, 1), (1, 0))$ .
3.  $f_3 : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 2), (3, 4))$ .
4.  $f_4 : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$ .

**Exercice 8.** Soit  $\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1))$ ,  $\mathcal{B}_2 = ((3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7))$  et  $f : (x, y, z) \mapsto (2x + 2y + z, 3x + z, 5z)$ . Déterminer  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$ .

**Exercice 9.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}_1 = (e_3, e_2, e_1)$ .

### III - Calculs de puissances

**Exercice 10. (Calcul de puissances)** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ . On note  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

1. Déterminer le rang de  $u$ .
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de  $u$ . En déduire une nouvelle base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Écrire la matrice de passage  $P$  de la base canonique à  $\mathcal{B}$ .
4. Déterminer la matrice  $B$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
5. Écrire une relation entre les matrices  $A$ ,  $P$  et  $B$ .
6. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $B^n$ . En déduire la valeur de  $A^n$ .

**Exercice 11.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$B = A - bJ$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Déterminer  $J^n$ .
2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer  $A^n$ .

**Exercice 12.** Soit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = A - I_3$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $B^n$ .
2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer  $A^n$ .

### IV - Rangs de matrices

**Exercice 13.** Sans calcul, déterminer le rang des matrices suivantes :

$1. A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$4. A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$
$2. A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$	$5. A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
$3. A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$	$6. J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice 14.** Déterminer le rang des matrices suivantes :

$1. A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$	$3. A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$2. A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	

### V - Questions plus théoriques

**Exercice 15.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  par  $\varphi : M \mapsto MA$ . On note  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
2. Écrire la matrice associée à  $\varphi$  dans la base canonique.

**Exercice 16.** Pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ , on note  $E_{i,j}$  la matrice carrée de taille  $n$  dont le coefficient d'indice  $(k, \ell)$  vaut 1 si  $(k, \ell) = (i, j)$  et vaut 0 sinon. On note

$$Z_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}.$$

1. Montrer que  $Z_n$  est un espace vectoriel.
2. Soit  $A \in Z_n$ .
  - a) Écrire les produits  $E_{i,j}A$  et  $AE_{i,j}$ . En déduire que  $a_{i,i} = a_{j,j}$  et  $a_{k,i} = 0$  si  $k \neq i$  et  $a_{j,k} = 0$  si  $k \neq j$ .
  - b) En déduire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A = \lambda I$ .
3. Déterminer  $Z_n$ .

**Exercice 17.** Une matrice  $A$  est antisymétrique si  $A^T = -A$ . Montrer que, pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe un unique couple  $(S, A)$  où  $S$  est symétrique et  $A$  est antisymétrique tel que  $M = S + A$ .

**Exercice 18.** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  telle  $f^3 = 0$  et  $f^2 \neq 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ .
2. Montrer que  $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0))$  forme une base de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .
4. Soit  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $f \circ g = g \circ f$ . Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ .
5. En déduire que  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  commute avec  $f$  si et seulement s'il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $g = af^2 + bf + c\text{Id}$ .

**Exercice 19.** Soit  $A = (a_{ij})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ . Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $AX = 0$ .

1. Montrer que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$ .

On suppose  $X \neq 0$  et on note  $i_0$  un indice tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_k| \leq |x_{i_0}|.$$

2. Montrer que  $|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$ .
3. En déduire que  $X = 0$  puis que  $A$  est inversible.