

I - Suites & Fonctions

Dans tout le cours, on note :

- pour $a < b$ réels, $[a, b]$ l'ensemble des **réels** compris entre a et b :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}.$$

- pour $0 \leq a < b$ entiers, $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble des **entiers** compris entre a et b :

$$\llbracket a, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{N} ; a \leq n \leq b\}.$$

I - Suites

I.1 - Suites usuelles

Définition 1 - Suite arithmétique

Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$ est une suite *arithmétique* de *raison* a .

Proposition 1

Soit u une suite arithmétique de raison a . Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $u_n = u_0 + na$.
- $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}a$.

Exemple 1 - Une suite arithmétique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 12$. Soit n un entier naturel.
D'après les propriétés des suites arithmétiques, pour tout n entier naturel,

$$u_n = 12n + 3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n (12k + 3) = 12 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 3 \\ &= 12 \frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) \\ &= 3(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

Définition 2 - Suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$ est une suite *géométrique* de *raison* q .

Proposition 2

Soit u une suite géométrique de raison q . Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $u_n = q^n u_0$.
- $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exemple 2 - Une suite géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 12 \cdot u_n$. Soit n un entier naturel.

D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout n entier naturel,

$$u_n = 12^n u_0 = 3 \times 12^n.$$

En utilisant le résultat sur la somme des termes d'une suite géo-

métrique dont la raison est différente de 1,

$$\sum_{k=0}^n u_k = 3 \times \frac{12^{n+1} - 1}{12 - 1} = \frac{3}{11} (12^{n+1} - 1).$$

Définition 3 - Suite arithmético-géométrique

Soient $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + a$ est une suite *arithmético-géométrique*.

Exemple 3 - Étude des suites arithmético-géométriques



Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

- Commençons par chercher une solution ℓ de l'équation $\ell = 2\ell + 3$.
On obtient $\ell = -3$.
- Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - \ell = u_n + 3$.
Montrons que (v_n) est une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= (2u_n + 3) + 3 \\ &= 2u_n + 6 \\ &= 2(u_n + 3) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

De plus, $v_0 = u_0 + 3 = 4$.

- D'après les résultats sur les suites géométriques,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n v_0 = 2^{n+2}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+2} - 3.$$

I.2 - Études locale & globale

Définition 4 - Monotonie

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- (u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- (u_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
- (u_n) est constante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$.
- (u_n) est stationnaire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n$.

Exemple 4 - Suites arithmétiques & géométriques

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors, pour tout n entier naturel,

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Ainsi,

- ★ Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
- ★ Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- ★ Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.
- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$. Alors, pour tout n entier naturel, $u_n = q^n u_0 > 0$. De plus,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

Ainsi,

- ★ Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- ★ Si $q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- ★ Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Définition 5 - Majorée, Minorée

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- La suite (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

- La suite (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- La suite (u_n) est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exemple 5 - Une suite géométrique

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$.

- Comme u_n est la somme de termes positifs, alors $u_n \geq 0$ et la suite (u_n) est minorée par 0.
- D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique, pour tout n entier naturel,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2.$$

Ainsi, la suite (u_n) est majorée par 2.

Finalement, la suite (u_n) est bornée.

I.3 - Limites

Proposition 3 - Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$.

- La somme $(u_n + v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	\times
$-\infty$	$-\infty$	\times	$-\infty$

- Le produit $(u_n v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	ab	$\pm\infty (a \neq 0)$	$\pm\infty (a \neq 0)$
$+\infty$	$\pm\infty (b \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty (b \neq 0)$	$-\infty$	$+\infty$

- Le quotient (u_n/v_n)

	$b \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	a/b	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$	\times	\times
$-\infty$	$\pm\infty$	\times	\times

Exemple 6 - Calculs de limites

- Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_n = n^2 + \sqrt{n}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- Pour tout $n \geq 0$, on pose $v_n = n^2 - \sqrt{n}$. La forme obtenue ainsi est une forme indéterminée. Or, pour $n > 0$,

$$v_n = \sqrt{n} (n^{3/2} - 1).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} = +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

- Pour tout $n \geq 0$, on pose $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$

Proposition 4 - Limites classiques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Exemple 7 - Série géométrique

Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout n entier naturel, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n x^k$.
D'après le résultat sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Comme $x \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - x}.$$

Théorème 1 - Théorème d'encadrement

Soient u, v, w trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$ telles que, à partir d'un certain rang,

$$v_n \leq u_n \leq w_n.$$

- Si (v_n) et (w_n) convergent vers un même réel ℓ , alors (u_n) converge également vers ℓ .
- Si (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
- Si (w_n) tend vers $-\infty$, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Exemple 8 - Factorielle vs puissance

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{3^n}{n!}$.

Pour tout $n \geq 4$, $\frac{3}{n} \leq \frac{3}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n &= \frac{3 \times 3 \times \cdots \times 3}{1 \times 2 \times \cdots \times n} \\ &\leq \frac{3}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \\ &\leq \frac{9}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{3}{4} \in]0, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$. D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Théorème 2 - Théorème de la limite monotone

Soit u une suite croissante.

- Si u est majorée, alors elle converge.
- Si u n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Soit v une suite décroissante.

- Si v est minorée, alors elle converge.
- Si v n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Exemple 9 - Série exponentielle

Pour tout n entier naturel, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

- D'une part, pour tout n entier naturel,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Ainsi, la suite (S_n) est croissante.

- D'autre part, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} n! &= 1 \times 2 \times \cdots \times n \\ &\geq 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &\leq 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq 3. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (S_n) est majorée par 3.

La suite (S_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

Pour la culture, il est bon de savoir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

II - Fonctions

II.1 - Régularité

Définition 6 - Continuité & Dérivabilité - Définition informelle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non vide et $x_0 \in I$.

- La fonction f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- La fonction f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe.}$$

Cette limite est le nombre dérivé de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

Définition 7 - Classe \mathcal{C}^n

Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^n si :

- ses dérivées successives $f, f', \dots, f^{(n)}$ existent,
- $f^{(n)}$ est continue.

II.2 - Étude d'extrema

Théorème 3 - Régularité & Variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

- Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive sur I , sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est strictement négative sur I , sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple 10

Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 1$.

La fonction f est dérivable comme fonction polynomiale et pour tout x réel,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4).$$

De plus, les fonctions polynomiales se comportent en l'infini comme leur terme de plus haut degré, donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 1 \searrow	-31 \nearrow	$+\infty$	

Théorème 4 - Dérivation & Extrema

Soit f une fonction dérivable sur un ouvert I et $x_0 \in I$. Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Exemple 11

- Soit $f : x \mapsto x^3$. La fonction f est dérivable et $f'(x) = x^2$. Ainsi, $f'(0) = 0$. Cependant,

$$f(-1) = -1 < 0 = f(0) < f(1).$$

Ainsi, f n'atteint pas d'extremum en 0.

- Sur $[-2, +\infty[$, on définit $f(x) = -x^3 + x^2$. La fonction f est dérivable et, pour tout x réel

$$f'(x) = -3x^2 + 2x = x(-3x + 2).$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	-2	0	$2/3$	$+\infty$				
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$			
$f(x)$	-16	\searrow		0	\nearrow	$4/27$	\searrow	$-\infty$

Ainsi, f ne possède pas de minimum et son maximum (atteint en $2/3$), vaut $\frac{4}{27}$.

II.3 - Formule de Taylor**Théorème 5 - Théorème de Rolle**

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Définition 8 - Relations de comparaison

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a .

- f et g sont équivalentes en a , noté $f \sim_a g$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- f est négligeable devant g en a , si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Proposition 5 - Croissances comparées

- Au voisinage de $+\infty$:

★ Si $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0.$$

★ Si $\alpha, \beta, \gamma < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{(\ln x)^\gamma} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = 0.$$

- Au voisinage de 0 : si $\beta < 0, \gamma > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\ln x|^\gamma}{x^\beta} = 0.$$

Exemple 12

- Soit $f : x \mapsto \sqrt{x} \ln \left(\frac{x^2}{1+x} \right)$.

On remarque que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} [\ln(x^2) - \ln(1+x)] \\ &= \sqrt{x} [2 \ln(x) - \ln(1+x)]. \end{aligned}$$

D'une part, d'après le théorème des croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} 2 \ln(x) = 0.$$

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0$.

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

- Soit $g : x \mapsto \frac{\ln(x)+x}{x^2+1}$.
On remarque que

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{\ln(x)}{x} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{x}} + \frac{1}{x+\frac{1}{x}}.$$

D'après le théorème des croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0. \text{ D'après les opérations sur les limites,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty.$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Théorème 6 - Équivalent et dérivation

Si f est une fonction dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a) \cdot (x - a).$$

Exemple 13 - Équivalents classiques en 0

- Comme $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x}$,

$$\ln(1+x) - \ln(1) \sim_0 \frac{1}{1+0}(x-0)$$

$$\ln(1+x) \sim_0 x.$$

- Comme $x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $x \mapsto e^x$,

$$e^x - e^0 \sim_0 e^0(x-0)$$

$$e^x - 1 \sim_0 x.$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable sur

$] -1, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}$,

$$(1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha \sim_0 \alpha(1+0)^{\alpha-1}(x-0)$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x.$$

Proposition 6 - Relations de comparaison & Opérations

- \sim_a est une relation d'équivalence.
- Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors f et g sont de même signe sur un voisinage de a .
- Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.
- Si $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ et g_1, g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a , alors $\frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2}$.

Exemple 14

- On remarque que

$$1+x \sim_0 1 \text{ et } 1+2x \sim_0 1.$$

Cependant,

$$\ln(1+x) \sim_0 x \text{ et } \ln(1+2x) \sim_0 2x.$$

Ainsi, il **ne** faut **pas** composer des équivalents.

- On remarque que

$$\frac{1}{1+2x} \sim_0 1 \text{ et } 1-2x \sim_0 1.$$

Cependant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2x} - 1 + 2x &= \frac{1+2x-2x}{1+2x} - 1 + 2x \\ &= 1 - 2 \frac{x}{1+2x} - 1 + 2x \\ &= 2x \left(1 - \frac{1}{1+2x} \right) \\ &= 2x \frac{2x}{1+2x} \\ &\sim_0 4x^2. \end{aligned}$$

Ainsi, il **ne** faut **pas** additionner des équivalents.

Définition 9 - Développement limité à l'ordre 1 ou 2

Soit a un réel et f une fonction définie sur un voisinage de a .

- f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 s'il existe a_0 et a_1 réels et ε une fonction satisfaisant $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

- f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 s'il existe a_0 , a_1 et a_2 réels et ε une fonction satisfaisant $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + (x - a)^2\varepsilon(x).$$

Exemple 15 - Polynômes et Inverse

- Soit $f : x \mapsto 3 + 2x + 4x^2 + 3x^5 + 25x^{72}$. Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 2x + 4x^2 + x^2(3x^3 + 25x^{70}) \\ &= 3 + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

- Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 &= \frac{1 - x^3}{1 - x} \\ \frac{1}{1 - x} &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1 - x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^2 \frac{x}{1 - x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

- Soit $f : x \mapsto 4x^3 + 2x^2 + x + 1$. On remarque que

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + x^2 \times x = 1 + x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

- Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On remarque que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x}{1+x} \\ &= 1 - x \frac{1}{1+x} = 1 - x \frac{1+x-x}{1+x} \\ &= 1 - x + x^2 \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \frac{1+x-x}{1+x} \\ &= 1 - x + x^2 - x^2 \frac{x}{1+x} \\ &= 1 - x + x^2 - x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Proposition 7 - Développement limité & Régularité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- f admet un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si f est continue en a .

En particulier, si $f(x) = a_0 + \varepsilon(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = a_0$.

- f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a .

En particulier, si $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$, alors $a_0 = f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $a_1 = f'(a)$. La tangente en f à a a donc pour équation $a_0 + a_1(x - a)$.

Théorème 7 - Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n . Pour tout $a \in I$, il existe une fonction ε_a telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_a(x) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

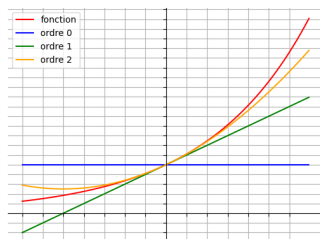
Exemple 16 - Développement limités classiques en 0

- La fonction $f : x \mapsto e^x$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto e^x, \\ f'' : x &\mapsto e^x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + e^0(x-0) + \frac{e^0}{2}(x-0)^2 + x^2 \varepsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x). \end{aligned}$$



- La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -1, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto \frac{1}{1+x}, \\ f'' : x &\mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(1+0) + \frac{1}{1+0}x - \frac{1}{2(1+0)^2}x^2 + x^2 \varepsilon(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -1, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f'' : x &\mapsto \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x).$$

- On considère la fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$. On utilise les développements limités classiques et on note $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots$ des fonctions qui tendent vers 0 en 0 mais dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\sqrt{1+x}) \\ &= \exp\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right) \\ &= e \exp\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right) \\ &= e \left(1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right) + \dots\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right)^2 + \dots\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right) \varepsilon_1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, en factorisant par x^2 et en regroupant les termes

qui tendent vers 0, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= e \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x) \right) \\ &= e \left(1 + \frac{1}{2}x + x^2\varepsilon(x) \right) \\ &= e + \frac{e}{2}x + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Proposition 8 - Développement limité & Comportement local

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I contenant a .

- Si $f''(a) > 0$, alors f se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.
- Si $f''(a) < 0$, alors f se situe au-dessous de sa tangente sur un voisinage de 0.

Si $f''(a) = 0$ et si f est suffisamment régulière, on effectuera un développement limité à un ordre supérieur.

Exemple 17

Comportement au voisinage de 1 de $f : x \mapsto e^{1-\sqrt{x}}$. La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto -\frac{e^{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, \\ f'' : x &\mapsto \frac{\sqrt{x}+1}{4x^{3/2}} e^{1-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Young,

$$e^{1-\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1).$$

En particulier, il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0 telle

que

$$\begin{aligned} e^{1-\sqrt{x}} - \underbrace{\left[1 - \frac{1}{2}(x-1) \right]}_{\text{éq. de la tangente}} &= \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1) \\ &= \frac{(x-1)^2}{4} + (x-1)^2\varepsilon(x-1) \\ &= \frac{1}{4}(x-1)^2(1 + \varepsilon(x-1)). \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque x est proche de 1, alors $1 + \varepsilon(x-1) > 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$. Donc $f(x) - [1 - \frac{1}{2}(x-1)] \geq 0$ et la courbe représentative de f se trouve au-dessus de la tangente.



II.4 - Fonctions convexes

Définition 10 - Convexité pour les fonctions de classe \mathcal{C}^2

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$. f est une fonction *convexe* si $f'' \geq 0$.

Proposition 9 - Convexité & Tangentes

Soit f une fonction convexe et dérivable sur I . Alors,

$$\forall x, a \in I, f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a).$$

II.5 - Plan d'étude de fonction

- (i). Ensemble de définition.
- (ii). Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
- (iii). Dérivabilité, Variations.
- (iv). Branches infinies.
- (v). Représentation graphique avec les tangentes remarquables.

Exemple 18 - Étude de fonction

Soit $f : x \mapsto x - 1 + \frac{1}{x-2}$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- (i). f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- (ii). f est dérivable sur $] -\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$. Sur chacun de ces intervalles,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow -1 \searrow -\infty$				$+\infty \searrow 3 \nearrow +\infty$		

La fonction f est deux fois dérivable et $f''(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$. Ainsi, $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 2$ et f est convexe sur $]2, +\infty[$. Comme $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \leq 2$, alors f est concave sur $] -\infty, 2[$.

- (iii). Étude des branches infinies.
 - Comme $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote verticale à la courbe.
 - Comme $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote verticale à la courbe.

- Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -1$, alors la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$. De plus, $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \geq 0$ pour tout $x > 2$. Ainsi, \mathcal{C}_f se trouve au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
- Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = -1$, alors la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$. De plus, $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \leq 0$ pour tout $x < 2$. Ainsi, f se trouve au-dessous de son asymptote.

(iv). Tracé.

