II - Puissances

Le nombre réel x^a est défini différemment en fonction de la nature du nombre a. Cependant, les règles de calcul seront toujours les mêmes !

I - Lorsque a est un entier naturel (positif)

À Savoir

Si a est un entier naturel et x est un réel,

* $x^0 = 1$.
* $x^a = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}}$.

Exemple 1

$$\begin{aligned} 3^0 &= 1, \\ 3^1 &= 3, \\ 3^3 &= 3 \times 3 \times 3 = 27. \end{aligned}$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers naturels et x est un réel,

$$\begin{aligned} x^a \times x^b &= \underbrace{\overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{a \text{ facteurs}} \times \overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{b \text{ facteurs}}}_{a+b \text{ facteurs}} \\ &= x^{a+b}. \end{aligned}$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} 3^2 \times 3^3 &= 3^5, \\ 6^2 \times 3^3 &= 3^2 \times 2^2 \times 3^3 = 2^2 \times 3^5, \\ 3^n \times 3 &= 3^{n+1}. \end{aligned}$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers naturels et x est un réel,

$$\begin{aligned} (x^a)^b &= \Bigg(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}}\Bigg)^b = \underbrace{\overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{a \text{ facteurs}} \times \cdots \times \overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{a \text{ facteurs}}}_{b \text{ facteurs}} \\ &= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \times b \text{ facteurs}} \\ &= x^{a \times b}. \end{aligned}$$

Exemple 3

$$\begin{aligned} \left(5^2\right)^3 &= 5^{2\times 3} = 5^6, \\ 81^5 &= \left(3^4\right)^5 = 3^{4\times 5} = 3^{20}. \end{aligned}$$

II - Lorsque a est un entier négatif

À Savoir

Si a est un entier négatif et x un réel non nul, alors $-a$ est un entier positif et

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{-a \text{ facteurs}}}.$$

Exemple 4

$$3^{-1} = \frac{1}{3^{+1}} = \frac{1}{3},$$
$$3^{-2} = \frac{1}{3^{+2}} = \frac{1}{9},$$
$$\frac{1}{3^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{3^3}} = 3^3.$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers,

$$x^a \times x^b = x^{a+b}.$$

Exemple 5

$$3^{-2} \times 3^5 = 3^{-2+5} = 3^3,$$
$$3^6 \times 3^{-12} = 3^{6-12} = 3^{-6},$$
$$\frac{3^5}{3^7} = 3^5 \times \frac{1}{3^7} = 3^5 \times 3^{-7} = 3^{5-7} = 3^{-2},$$
$$3^5 3^{-5} = 3^{5-5} = 3^0 = 1.$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers,

$$(x^a)^b = x^{ab}.$$

Exemple 6

$$(5^{-2})^3 = 5^{-2\times 3} = 5^{-6}$$
$$\left(\frac{1}{81}\right)^5 = \left(\frac{1}{3^4}\right)^5 = (3^{-4})^5 = 3^{-20},$$
$$\left(\frac{1}{25}\right)^{-3} = (5^{-2})^{-3} = 5^{-2\times(-3)} = 5^6.$$

III - Lorsque $a = 1/n$

À Savoir

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f(y) = y^n$ est strictement croissante, continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 0$, $\lim_{y\to+\infty} f(y) = +\infty$. Comme $x \in [0, +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel y tel que $y^n = x$. Ce réel est noté $x^{\frac{1}{n}}$.

Exemple 7

* Comme $2^2 = 4$, alors $2 = 4^{1/2}$.
* Si $x \geqslant 0$, alors $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Attention. Dans ce cas, le nombre x doit être positif.

À Savoir

Si a est un entier, b est un entier naturel non nul et x est un réel positif,

$$\left(x^{1/b}\right)^a = x^{a/b}$$

Exemple 8

$$\left(2^{1/3}\right)^9 = 2^{9/3} = 2^3.$$

IV - Lorsque a est un réel

À Savoir

Si a est un réel et x est un réel strictement positif,

$$x^a = \mathrm{e}^{a\ln(x)}.$$

Cette notion généralise les définitions précédentes.

Exemple 9

$$3^{1.5} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\ln(3)}$$

Attention. Dans ce cas, le nombre x doit être strictement positif.

À Savoir

Si a, b sont deux réels et x, y sont deux réels strictement positifs,

$$\begin{aligned}(x\times y)^a &= x^a \times y^a,\\ x^a \times x^b &= x^{a+b},\\ (x^a)^b &= x^{a\times b}.\end{aligned}$$

Exemple 10

Déterminons les réels x tels que $3^{-x} = \frac{3}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-x\ln(3)} &= \frac{3}{2}\\ \ln\left(\mathrm{e}^{-x\ln(3)}\right) &= \ln\left(\frac{3}{2}\right)\\ -x\ln(3) &= \ln(3)-\ln(2)\\ x &= \frac{\ln(2)-\ln(3)}{\ln(3)}.\end{aligned}$$

V - Exercices

Solution de l'exercice 1.

1. D'après les propriétés des puissances,

$$\mathrm{e}^{n+1} - \mathrm{e}^n = \mathrm{e}^n \times \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^n = \mathrm{e}^n(\mathrm{e}-1).$$

2. D'après les propriétés des puissances,

$$2^{n+1} - 2^n = 2^n \times 2^1 - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n.$$

3. D'après les propriétés des puissances,

$$(n+1)2^n - 2^{n+1} = (n+1)2^n - 2^n \times 2^1 = 2^n(n+1-1) = n2^n.$$

$\square$