**Exercice 1.** Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = A$ , A non nulle.

- **1. a)** Soit  $\lambda$  une valeur propre de A. Quelles sont les valeurs possibles pour  $\lambda$ ?
  - **b)** Montrer que  $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$ .
- **2.** On suppose que dim Ker A = 1.
  - a) En prenant  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{Ker } A$ , construire un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
  - b) En déduire que A est diagonalisable et exprimer A dans une base de diagonalisation.
- 3. On suppose que  $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ . Montrer que  $A = \operatorname{Id}$ .
- **4.** Finalement, décrire toutes les matrices A de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $A^2 = A$ .

Exercice 2. Soient les deux applications linéaires suivantes :

$$u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2: (z_1, z_2, z_3) \mapsto (2z_1 - z_3, 3z_1 + z_2 + 2z_3)$$
  
 $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: (z_1, z_2) \mapsto (z_1 + z_2, -z_2, 2z_1 - z_2).$ 

- 1. Déterminer H la matrice de u dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$ .
- **2.** Déterminer K la matrice de v dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .
- 3. Déterminer le noyau de u. u est-elle injective?
- **4.** Déterminer l'image de u. u est-elle surjective?
- **5.** Calculer HK.
- **6.** Montrer que  $(HK)^2 = \lambda \times I_2$  où  $I_2$  est la matrice identité de dimension 2 et  $\lambda$  est un scalaire (appartenant à  $\mathbb{R}$ ) à déterminer.
- 7. En déduire sans (long) calcul que HK est inversible.
- **8.** Déterminez  $(u \circ v)^2$ .