

III - Récurrences

À Savoir

Le raisonnement par récurrence se déroule en 3 étapes principales.

- * On énonce clairement la propriété à démontrer. Cette propriété doit dépendre d'un entier naturel noté n .
- * **L'initialisation.** On montre la propriété lorsque $n = 0$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel) ou lorsque $n = 1$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul).

Généralement, la propriété est une égalité. On montre alors que les deux membres de l'égalité sont égaux à une même valeur.

- * **L'hérédité.** On fixe un entier naturel n . On suppose la propriété vraie à l'ordre n (c'est l'hypothèse de récurrence). On montre que la propriété est vraie lorsque n est remplacé par $(n + 1)$ (ne pas oublier le parenthésage).

Généralement, on part d'un côté de l'égalité et on arrive à l'autre côté. Une des étapes du calcul utilise l'hypothèse de récurrence.

- * **Conclusion.** On conclut clairement en citant l'initialisation, l'hérédité et le principe de récurrence.

I - Calculs de sommes

Exemple 1 - Somme des n premiers entiers non nuls

Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On note $P_n : \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^0 k = \frac{0(0+1)}{2}$. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 k &= 0 \\ \frac{0(0+1)}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons

que $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= 0 + 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\
&= [0 + 1 + \cdots + n] + (n+1), \text{ d'après les propriétés des sommes} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 2 - Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $q \neq 1$. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

On note $P_n : \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^0 q^k = \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q}$. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^0 q^k &= q^0 = 1 \\
\frac{1 - q^{0+1}}{1 - q} &= \frac{1 - q}{1 - q} = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Montrons

que $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \\
&= [q^0 + q^1 + \cdots + q^n] + q^{n+1}, \text{ d'après les propriétés des sommes} \\
&= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q} \\
&= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - \overbrace{q \cdot q^{n+1}}^{q^{n+2}}}{1 - q} \\
&= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exercice 1. (Somme des n premiers carrés) Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 2. (Somme des n premiers cubes) Montrer par récurrence que,

pour tout n entier naturel,

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Exercice 3. (Formule du binôme de Newton, $\rightarrow \rightarrow$) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

II - Inégalités

Exemple 3 - Inégalité de Bernoulli

Soit $x > 0$. Montrons que, pour tout $n \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

On note $P_n : (1+x)^n \geq 1+nx$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $(1+x)^0 \geq 1+0x$. Or,

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &= 1 \\ 1+0x &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(1+x)^n \geq 1+nx$. Montrons que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. En effet,

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \times (1+x), \text{ d'après la définition des puissances} \\ &\geq (1+nx) \times (1+x), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &\geq 1+x+nx+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x, \text{ car } nx^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour

tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Exemple 4 - Suite & Encadrement

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq 5$.

On note $P_n : 0 \leq u_n \leq 5$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $0 \leq u_0 \leq 5$.

$u_0 = 3 \in [0, 5]$, donc P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leq u_n \leq 5$. Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 5$. En effet,

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_n \leq 5, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ 15 &\leq u_n + 15 \leq 20 \\ \sqrt{15} &\leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{20}, \text{ la fonction racine étant croissante} \\ 0 &\leq \sqrt{15} \leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{20} \leq \sqrt{25}, \text{ car } 20 \leq 25 \\ 0 &\leq u_{n+1} \leq 5, \text{ d'après la définition de } u_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 5.$$

Exercice 4. (Suite & Encadrement) Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n \leq 3$.

Exercice 5. (Suite & Encadrement) Soit (u_n) définie par $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $4 \leq u_n \leq 10$.

III - Suites définies par récurrence

Exercice 6. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 3$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = 5 + 3n$.

Exercice 7. (Suite géométrique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 5 \times u_n$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = 3 \times 5^n$.

Exercice 8. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + n + 1$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 9. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = \sqrt{n + 9}$.

Exercice 10. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.