I - Formules de Taylor

Nous présentons ici deux formules de Taylor. La formule de Taylor-Lagrange, qui n'est pas présentée dans ces notes, est également très intéressante mais dépasse le cadre du programme.

I - Formule de Taylor-Young : local !

Théorème 1 - Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I contenant a. Alors,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Propriété locale !

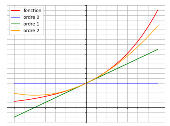
La formule de Taylor-Young assure que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n} = 0,$$

c'est-à-dire que l'erreur commise en approchant $f(x)$ par $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ est **négligeable devant** $(x-a)^n$ (qui est elle-même une quantité très petite !), lorsque x tend vers a.

* Lorsque $n = 0$, on approche $f(x)$ par $f(a)$ (fonction constante égale à a).
* Lorsque $n = 1$, on approche $f(x)$ par $f(a) + f'(a)(x-a)$ (droite tangente à la courbe représentative de f en a).

Le graphique suivant illustre le caractère local de l'approximation : lorsque x est *loin* de 0, l'écart entre $f(x)$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ augmente.



Proposition 1 - Obtention d'équivalent

On note p la plus petite dérivée telle que $f^{(p)}(a) \neq 0$. Alors,

$$f(x) \sim_a \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p.$$

Exemple 1 - Calculs d'équivalents

* On pose $f(x) = \ln(1+x)$. Comme $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $f'(0) = 1 \neq 0$, alors

$$\ln(1+x) \sim_0 f'(0)x^1 \sim_0 x.$$

* On pose $f(x) = \frac{e^x}{1+x} - 1$. Alors,
  * $f(0) = 0$.
  * $f'(x) = \frac{e^x\, x}{(1+x)^2}$ et $f'(0) = 0$.
  * $f''(x) = \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3}$ et $f''(0) = 1$.

  Ainsi,

$$\frac{e^x}{1+x} - 1 \sim_0 \frac{1}{2}x^2.$$

Proposition 2 - Représentations graphiques

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et $a \in I$. On note

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2).$$

Alors,

* la tangente à la courbe représentative de f en a a pour équation $y = a_0 + a_1(x-a)$,
* si $a_2 > 0$, au voisinage de a, la tangente se trouve au-dessous de la courbe représentative,
* si $a_2 < 0$, au voisinage de a, la tangente se trouve au-dessus de la courbe représentative,
* si $a_2 = 0$, on ne peut pas conclure et il faut rechercher un développement limité d'ordre supérieur.

Exemple 2

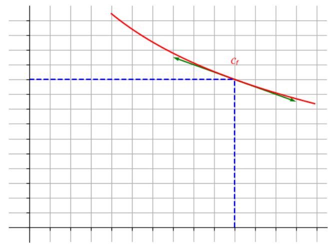
Comportement au voisinage de 1 de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ et

$$f' : x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}},$$
$$f'' : x \mapsto \frac{\sqrt{x}+1}{4x^{3/2}}\,\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}.$$

D'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0 telle que

$$\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$$
$$\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}} - \underbrace{\left[1 - \frac{1}{2}(x-1)\right]}_{\text{éq. de la tangente}} = \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$$
$$= \frac{1}{4}(x-1)^2(1 + 4\varepsilon(x-1)).$$

Ainsi, lorsque x est proche de 1, alors $1 + 4\varepsilon(x-1) > 0$ et $(x-1)^2 \geqslant 0$. Donc $f(x) - \left[1 - \frac{1}{2}(x-1)\right] \geqslant 0$ et la courbe représentative de f se trouve au-dessus de la tangente.



II - Formule de Taylor avec reste intégral : une propriété globale

Théorème 2 - Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve. Se démontre par récurrence à l'aide de la formule d'intégration par parties. Lorsque $n = 0$ on retrouve le théorème fondamental du calcul différentiel. □

Propriété globale !

* Il s'agit ici d'une propriété globale valable **pour tous** les réels x de l'intervalle $[a,b]$.
* Le reste intégral permet de quantifier de manière exacte le reste de la formule de Taylor-Young (au prix d'une hypothèse en plus).
* Lorsque $n = 0$, on retrouve le théorème fondamental du

calcul différentiel :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 3 - Série exponentielle

Montrons que **pour tout** x réel,

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

* Supposons $x \geqslant 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0, x]$, alors

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| &= \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \mathrm{e}^x \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x \\ &\leqslant \mathrm{e}^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

D'après les propriétés de comparaison des puissances et de l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = 0.$$

* Supposons $x \leqslant 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[x, 0]$, alors

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| &= \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 1 \times \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_x^0 \\ &\leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

D'après les propriétés de comparaison des puissances et de l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = 0.$$