T.D. I - Récurrences

I - Les classiques : Sommes d'entiers

Solution de l'exercice 1. On note P_n : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0(0+1)}{2}$. Or,

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0$$
$$\frac{0(0+1)}{2} = 0$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= 0+1+2+\cdots+n+(n+1)\\ &= [0+1+\cdots+n]+(n+1), \text{ d'après les propriétés des sommes}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 2. On note P_n : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$. Or,

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$$
$$\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= 0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2\\ &= \left[0^2+1^2+\cdots+n^2\right]+(n+1)^2,\ \text{ d'après les propriétés des sommes}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2,\ \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]\\ &= \frac{n+1}{6}\left[2n^2+n+6n+6\right]\\ &= \frac{n+1}{6}\left[2n^2+7n+6\right]\\ &= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3),\ \text{ car } (n+2)(2n+3)=2n^2+7n+6\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□

Solution de l'exercice 3. On note $P_n : \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Initialisation. Lorsque $n=0$. Montrons que $\sum_{k=0}^{0} k^3 = \left[\frac{0(0+1)}{2}\right]^2$. Or,

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$$

$$\left[\frac{0(0+1)}{2}\right]^2 = 0$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= 0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3\\ &= \left[0^3+1^3+\cdots+n^3\right]+(n+1)^3,\ \text{ d'après les propriétés des sommes}\\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3,\ \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{(n+1)^2}{2^2}\left[n^2+4(n+1)\right]\\ &= \frac{(n+1)^2}{2^2}\left[n^2+4n+4\right]\\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\times(n+2)^2.\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

□

II - Formules de sommes

Solution de l'exercice 4. On note $P_n : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^{0} q^k = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$. Or,

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$$
$$\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

Ainsi, P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \\ &= \left[q^0 + q^1 + \cdots + q^n\right] + q^{n+1}, \text{ d'après les propriétés des sommes} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - \underbrace{q \cdot q^{n+1}}_{q^{n+2}}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

□

Solution de l'exercice 5. Notons $P_n : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$. Or,

$$(a+b)^0 = 1$$
$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Montrons que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$. Or,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b), \text{ d'après la définition des puissances}\\
&= \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right](a+b), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}, \text{ par distributivité}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}, \text{ par distributivité}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n}{\ell-1}a^{\ell}b^{n-(\ell-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}, \text{ en posant } \ell=k+1\\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell-1}a^{\ell}b^{n-(\ell-1)} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \binom{n}{0}a^0b^{n+1} + \cdots\\
&\qquad \cdots + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^kb^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}, \text{ d'après le triangle de Pascal}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{0}a^0b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

□

III - Inégalités

Solution de l'exercice 6. On note $P_n : (1+x)^n \geqslant 1+nx$.
Initialisation. Lorsque $n=0$. Montrons que $(1+x)^0 \geqslant 1+0x$. Or,

$$\begin{aligned}
(1+x)^0 &= 1\\
1+0x &= 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. Montrons que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$. En effet,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \times (1+x), \text{ d'après la définition des puissances}\\
&\geqslant (1+nx)\times(1+x), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&\geqslant 1+x+nx+nx^2\\
&\geqslant 1+(n+1)x+nx^2\\
&\geqslant 1+(n+1)x, \text{ car } nx \geqslant 0
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

□

Solution de l'exercice 7. On note $P_n : u_n \leqslant 3$.
Initialisation. Lorsque $n=0$. Montrons que $u_0 \leqslant 3$.
Or, $u_0 = 0 \leqslant 3$, donc P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leqslant 3$. Montrons que $u_{n+1} \leqslant 3$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{u_n + 6}, \text{ d'après la définition de } (u_n) \\ &\leqslant \sqrt{3+6}, \text{ d'après l'H.R. et la croissance de la fonction racine} \\ &\leqslant \sqrt{9} \\ &\leqslant 3. \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant 3.$$

□

Solution de l'exercice 8. On note $P_n : 0 \leqslant u_n \leqslant 5$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $0 \leqslant u_0 \leqslant 5$.
$u_0 = 3 \in [0, 5]$, donc P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant 5$. Montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$. En effet,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n \leqslant 5&, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ 15 \leqslant u_n + 15 \leqslant 20& \\ \sqrt{15} \leqslant \sqrt{u_n + 15} \leqslant \sqrt{20}&, \text{ la fonction racine étant croissante} \\ 0 \leqslant \sqrt{15} \leqslant \sqrt{u_n + 15} \leqslant \sqrt{20} \leqslant \sqrt{25}&, \text{ la fonction racine étant croissante} \\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5&, \text{ d'après la définition de } u_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, 0 \leqslant u_n \leqslant 5.$$

□

Solution de l'exercice 9. On note $P_n : 4 \leqslant u_n \leqslant 10$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $4 \leqslant u_0 \leqslant 10$.
$u_0 = 6 \in [4, 10]$, donc P_0 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $4 \leqslant u_n \leqslant 10$. Montrons que $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$. En effet,

$$\begin{aligned} 4 \leqslant u_n \leqslant 10&, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ 19 \leqslant u_n + 15 \leqslant 25& \\ \sqrt{19} \leqslant \sqrt{u_n + 15} \leqslant \sqrt{25}&, \text{ la fonction racine étant croissante} \\ \sqrt{16} \leqslant \sqrt{19} \leqslant \sqrt{u_n + 15} \leqslant \sqrt{25} \leqslant \sqrt{100}&, \text{ la fonction racine étant croissante} \\ 4 \leqslant u_{n+1} \leqslant 10&, \text{ d'après la définition de } u_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, 4 \leqslant u_n \leqslant 10.$$

□

IV - Suites définies par récurrence

Solution de l'exercice 10. On note $P_n : u_n = 5 + 3n$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = 5 + 3 \times 0$. Or,

$$\begin{aligned} u_0 &= 5, \text{ d'après la définition} \\ 5 + 3 \times 0 &= 5 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 5 + 3n$. Montrons que $u_{n+1} = 5 + 3(n+1)$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 3, \text{ d'après la définition} \\ &= 5 + 3n + 3, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 5 + 3(n+1). \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = 5 + 3n.$$

$\square$

Solution de l'exercice 11. On note $P_n : u_n = 3 \times 5^n$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = 3 \times 5^0$. Or,
$$\begin{aligned} u_0 &= 3, \text{ d'après la définition} \\ 3 \times 5^0 &= 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 3 \times 5^n$. Montrons que $u_{n+1} = 3 \times 5^{n+1}$. En effet,
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5 \times u_n, \text{ d'après la définition} \\ &= 5 \times 3 \times 5^n, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 3 \times 5^{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = 3 \times 5^n.$$

$\square$

Solution de l'exercice 12. On note $P_n : u_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Or,
$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \text{ d'après la définition} \\ \frac{0(0+1)}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$. En effet,
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (n + 1), \text{ d'après la définition} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (n + 1)\left[\frac{n}{2} + 1\right] \\ &= (n + 1)\frac{n+2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\square$

Solution de l'exercice 13. On note $P_n : u_n = \sqrt{n+9}$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \sqrt{0+9}$. Or,
$$\begin{aligned} u_0 &= 3, \text{ d'après la définition} \\ \sqrt{0+9} &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \sqrt{9+n}$. Montrons que $u_{n+1} = \sqrt{9 + (n+1)}$. En effet,
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{1 + u_n^2}, \text{ d'après la définition} \\ &= \sqrt{1 + n + 9}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \sqrt{9 + (n+1)}/ \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = \sqrt{9+n}.$$

□

Solution de l'exercice 14. On note $P_n : u_n = \frac{2}{2n+1}$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \frac{2}{2\times 0+1}$. Or,

$$u_0 = 2, \text{ d'après la définition}$$
$$\frac{2}{2\times 0+1} = 2$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \frac{2}{2n+1}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n+1}, \text{ d'après la définition} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2}{2n+1}+1}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{2}{2+2n+1} \\ &= \frac{2}{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = \frac{2}{2n+1}.$$

□