T.D. X - Variables aléatoires à densité

I - Études de densités

Exercice 1. Soit f la fonction définie pour tout t réel par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } t \in [5, 10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. a) Représenter graphiquement la fonction f.

b) Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Représenter graphiquement la fonction F.

3. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $\mathbf{P}([X < 7])$.

b) $\mathbf{P}([5 < X < 6])$.

c) $\mathbf{P}([3 < X < 9])$.

d) $\mathbf{P}([X \geqslant 8])$.

e) $\mathbf{P}_{[X>6]}([X < 7])$.

f) $\mathbf{P}_{[X<7]}([X > 6])$.

g) $\mathbf{P}_{[X>7]}([X > 6])$.

h) $\mathbf{P}_{[X<6]}([X > 7])$.

4. a) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

b) Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 2. Soit f la fonction définie pour tout t réel par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } t \in [10, 13] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. a) Représenter graphiquement la fonction f.

b) Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Représenter graphiquement la fonction F.

3. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $\mathbf{P}([X < 10])$.

b) $\mathbf{P}([10 < X < 12])$.

c) $\mathbf{P}([9 < X < 11])$.

d) $\mathbf{P}([X \geqslant 11])$.

e) $\mathbf{P}_{[X>11]}([X < 12])$.

f) $\mathbf{P}_{[X<12]}([X > 11])$.

g) $\mathbf{P}_{[X>12]}([X > 11])$.

h) $\mathbf{P}_{[X<11]}([X > 12])$.

4. a) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

b) Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 3. Soit a un réel et f la fonction définie pour tout t réel par $f(t) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{2-t} & \text{si } t \geqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. a) Déterminer la valeur de a pour laquelle f est une densité de probabilité.

b) Représenter graphiquement f.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Représenter graphiquement la fonction F.

3. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $\mathbf{P}([X \leqslant 3])$.

b) $\mathbf{P}([1 < X < 2])$.

c) $\mathbf{P}([0 < X < 3])$.

d) $\mathbf{P}([X \geqslant 4])$.

4. Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

a) Rappeler la formule (avec une intégrale) et la valeur de $\mathbf{E}[Y]$.

b) On pose $Z = Y + 2$. Déterminer la fonction de répartition puis une densité de Z.

c) En déduire que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 4. Soit a un réel et f la fonction définie pour tout t réel par $f(t) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{3-t} & \text{si } t \geqslant 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. a) Déterminer la valeur de a pour laquelle f est une densité de probabilité.

b) Représenter graphiquement f.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Représenter graphiquement la fonction F.

3. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $\mathbf{P}([X \leqslant 3])$.

b) $\mathbf{P}([1 < X < 2])$.

c) $\mathbf{P}([0 < X < 5])$.

d) $\mathbf{P}([X \geqslant 4])$.

4. Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

a) Rappeler la formule (avec une intégrale) et la valeur de $\mathbf{E}[Y]$.

b) On pose $Z = Y + 3$. Déterminer une fonction de répartition puis une densité de Z.

c) En déduire que X admet une espérance et la calculer.

II - Travail sur la fonction de répartition

Exercice 5. Soit $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier éventuellement la loi des variables aléatoires suivantes :

1. $X = 3U$.

2. $Y = U + 1$.

3. $Z = \frac{1}{2}X + 1$.

4. $W = X^2$.

5. $H = \ln(X)$.

6. $E = -\ln(X)$.

Exercice 6. Soit $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier éventuellement la loi des variables aléatoires suivantes :

1. $X = 4U$.

2. $Y = U + 2$.

3. $Z = \frac{1}{2}X + 1$.

4. $W = X^2$.

5. $H = \ln(X)$.

6. $E = -\ln(X)$.

III - Lois usuelles

Exercice 7. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(5,4)$. En utilisant la table de la loi normale, calculer

1. $\mathbf{P}([X \leqslant 2])$.

2. $\mathbf{P}([X > 2{,}51])$.

3. $\mathbf{P}([Y < 1])$.

4. $\mathbf{P}([3 < Y \leqslant 10])$.

Exercice 8. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(2,9)$. En utilisant la table de la loi normale, calculer

1. $\mathbf{P}([X \leqslant 2])$.

2. $\mathbf{P}([X > 2{,}51])$.

3. $\mathbf{P}([Y < 1])$.

4. $\mathbf{P}([3 < Y \leqslant 6])$.

Exercice 9. Un archer lance deux flèches en direction d'une cible de rayon d'un mètre. On suppose qu'il atteint systèmatiquement et que ses lancers sont indépendants. Pour tout $i \in \{1,2\}$, on note R_i la variable aléatoire égale à la distance (en mètres) de la flèche numéro i au rayon de la cible et on suppose que $R_i \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. On note également $R = \min\{R_1, R_2\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([R > x]) = \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x])$.

2. En déduire, pour tout x réel, la fonction de répartition F de R.

3. Calculer la probabilité que la flèche la mieux lancée par l'archer soit située à moins de 50cm de la cible.

Exercice 10. Un appareil électronique utilise deux piles dont les durées de vie respectives sont T_1 et T_2. On suppose que T_1 et T_2 sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre 1. L'appareil cesse de fonctionner au bout d'un temps $T = \max\{T_1, T_2\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([T < x]) = \mathbf{P}([T_1 < x] \cap [T_2 < x])$.

2. En déduire, pour tout x réel, la fonction de répartition F de T.

3. Calculer la probabilité que l'appareil cesse de fonctionner, à cause de ses piles, au bout de 6 mois.