

# V - Variables aléatoires discrètes finies

## Révisions

Probabilités.

Dans tout le cours,  $\Omega$  désigne un univers et  $\mathbf{P}$  est une probabilité.

## I - Variables aléatoires réelles finies

### I.1 - Définition

#### Définition 1 - Variable aléatoire réelle

On suppose que  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  est un ensemble fini. Une *variable aléatoire* est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### Exemple 1 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

Un dé équilibré est lancé successivement 2 fois. On note les résultats obtenus à l'issue de chacun des lancers.

L'univers est  $\Omega = \{(i, j), 1 \leq i, j \leq 6\} = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ .

La somme  $S$  des résultats obtenus à l'issue des 2 lancers est une variable aléatoire :

$$\begin{aligned} S : \quad \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (d_1, d_2) &\mapsto d_1 + d_2 \end{aligned}$$

#### Notations

Si  $x \leq y$  sont des réels, on notera

$$\begin{aligned} [X = x] &= \{\omega \in \Omega ; X(\omega) = x\} \\ [X \leq x] &= \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \leq x\} \\ [X \geq x] &= \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \geq x\} \\ [x \leq X \leq y] &= \{\omega \in \Omega ; x \leq X(\omega) \leq y\} \end{aligned}$$

#### Exemple 2 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.

$$\begin{aligned} [S = 3] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega ; d_1 + d_2 = 3\} \\ &= \{(1, 2), (2, 1)\}. \\ [S \leq 4] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega ; d_1 + d_2 \leq 4\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}. \end{aligned}$$

#### Définition 2 - Système complet

Soient  $\Omega$  un univers fini et  $X$  une variable aléatoire. Notons  $x_1, \dots, x_p$  les valeurs prises par  $X$ . Alors,  $\{[X = x_i], i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$  est un système complet d'événements. C'est le *système complet* associé à la variable aléatoire  $X$ .

#### Exemple 3 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent. Le système complet associé à  $S$  est :

$$\begin{aligned} \{[S = 2], [S = 3], [S = 4], [S = 5], [S = 6], [S = 7], \\ [S = 8], [S = 9], [S = 10], [S = 11], [S = 12]\}. \end{aligned}$$

## I.2 - Loi de probabilité

### Définition 3 - Loi de probabilité

La loi de la variable aléatoire  $X$  est la donnée :

- des valeurs  $x_1, \dots, x_p$  prises par  $X$  ;
- de la famille de probabilités

$$(\mathbf{P}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}([X = x_p])).$$

La loi d'une variable aléatoire peut être représentée sous forme d'un tableau.

### Lois usuelles - À connaître par cœur

- **Somme de deux dés équilibrés.** Nous obtenons successivement :

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([S = k])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- **Loi certaine.** La variable aléatoire  $X$  ne prend qu'une seule valeur  $c$  et  $\mathbf{P}([X = c]) = 1$ . L'expérience renvoie toujours le même résultat.
- **Loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .** Notée  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . L'expérience renvoie les résultats  $1, 2, \dots$ , ou  $n$  et chacun de ces résultats a la même probabilité d'apparaître. Les valeurs prises par  $X$  sont  $1, \dots, n$  et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}([X = i]) = \frac{1}{n}.$$

- **Loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .** Notée  $\mathcal{B}(p)$ . L'expérience (dite expérience de Bernoulli) renvoie le résultat 0 (on parle d'échec) ou 1 (on parle de succès). Le succès apparaît avec probabilité  $p$ . Soit  $p \in [0, 1]$ . Les valeurs prises par  $X$  sont 0 et 1 et

$$\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - p \text{ et } \mathbf{P}([X = 1]) = p.$$

- **Loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .** Notée  $\mathcal{B}(n, p)$ .

La variable aléatoire compte le nombre de succès dans une succession de  $n$  expériences de Bernoulli indépendantes (appelé schéma de Bernoulli) dont la probabilité de succès vaut  $p$ .

Soit  $p \in [0, 1]$ . Les valeurs prises par  $X$  sont  $0, \dots, n$  et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

### Définition 4 - Fonction de répartition

Soit  $X$  une variable aléatoire. La fonction de répartition de  $X$  est la fonction  $F_X$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$ .

### Exemple 4 - Fonctions de répartition

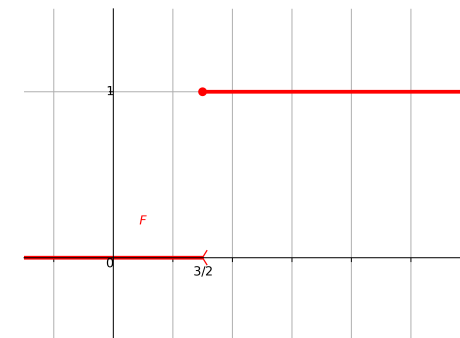
- Si  $X$  suit une loi certaine de valeur  $\frac{3}{2}$ .  
★ Si  $x < \frac{3}{2}$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

- ★ Si  $x \geq \frac{3}{2}$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}([X = 3/2]) = 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de  $X$  est :



- Si  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{3}{4}$ .
  - ★ Si  $x < 0$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

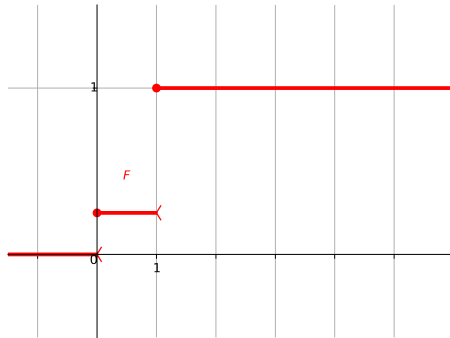
- ★ Si  $0 \leq x < 1$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}([X = 0]) = \frac{1}{4}.$$

- ★ Si  $x \geq 1$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de  $X$  est :



- Si  $X$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ .
  - ★ Si  $x < 1$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

- ★ Si  $1 \leq x < 2$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}([X = 1]) = \frac{1}{4}.$$

- ★ Si  $2 \leq x < 3$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}([X = 1] \sqcup [X = 2]) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

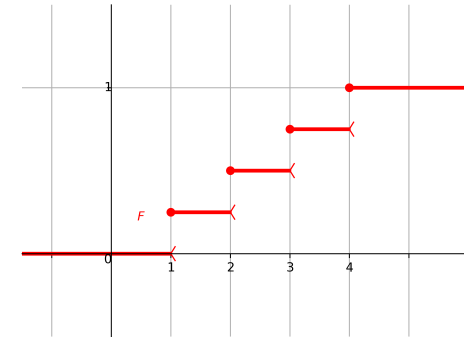
- ★ Si  $3 \leq x < 4$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}([X = 1] \sqcup [X = 2] \sqcup [X = 3]) = \frac{3}{4}.$$

- ★ Si  $x \geq 4$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de  $X$  est :



- Si  $S$  est la somme des résultats de 2 lancers successifs d'un dé équilibré à 6 faces.

- ★ Si  $x < 2$ . Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leq x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

- ★ Si  $2 \leq x < 3$ . Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leq x]) = \mathbf{P}([S = 2]) = \frac{1}{36}.$$

- ★ Si  $3 \leq x < 4$ . Alors,

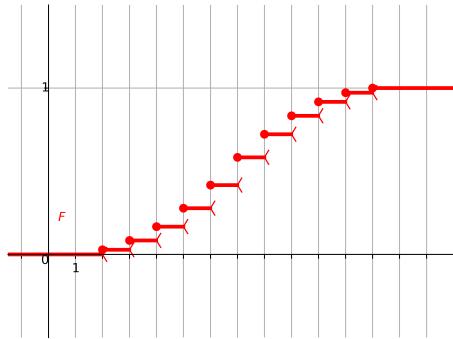
$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leq x]) = \mathbf{P}([S = 2] \sqcup [S = 3]) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36}.$$

- ★ ...

- ★ Si  $x \geq 12$ . Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leq x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de  $S$  est :



### Proposition 1

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont de même loi si et seulement si elles ont mêmes fonctions de répartition.

## II - Espérance & Variance

### II.1 - Espérance

#### Définition 5 - Espérance

Soient  $X$  une variable aléatoire et  $x_1, \dots, x_p$  les valeurs prises par  $X$ . L'espérance de  $X$ , notée  $\mathbf{E}[X]$ , est le réel

$$\mathbf{E}[X] = x_1 \mathbf{P}([X = x_1]) + \dots + x_p \mathbf{P}([X = x_p]).$$

#### Exemple 5 - Loïs usuelles - À connaître par cœur

- **Loi certaine de valeur  $c$ .**

$$\mathbf{E}[X] = c \mathbf{P}([X = c]) = c.$$

- **Loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .**

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= 1 \mathbf{P}([X = 1]) + 2 \mathbf{P}([X = 2]) + \dots + n \mathbf{P}([X = n]) \\ &= 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + \dots + n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

- **Loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .**

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= 0 \times \mathbf{P}([X = 0]) + 1 \times \mathbf{P}([X = 1]) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

- **Loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .**

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n \times p.$$

### Proposition 2 - Linéarité

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires et  $a, b$  deux réels. Alors,  $\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y]$ .

#### Exemple 6 - Somme de deux dés

Notons  $X_1$  le résultat du premier lancer et  $X_2$  le résultat du second. Alors,  $X_1$  et  $X_2$  suivent une loi uniforme sur  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$  et  $S = X_1 + X_2$ . Ainsi,

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] = \frac{6+1}{2} + \frac{6+1}{2} = 7.$$

**Proposition 3 - Théorème de transfert**

Soient  $X$  une variable aléatoire,  $x_1, \dots, x_p$  les valeurs prises par  $X$  et  $g$  une fonction à valeurs réelles. On note  $Y = g(X)$  la variable aléatoire définie par

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Alors,

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^p g(x_k) \mathbf{P}([X = x_k]).$$

**Exemple 7 - Carré de la somme**

On reprend les notations de l'exemple précédent. Posons  $Y = S^2$ . Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= 2^2 \frac{1}{36} + 3^2 \frac{2}{36} + 4^2 \frac{3}{36} + 5^2 \frac{4}{36} + 6^2 \frac{5}{36} + 7^2 \frac{6}{36} + \dots \\ &\quad \dots + 8^2 \frac{5}{36} + 9^2 \frac{4}{36} + 10^2 \frac{3}{36} + 11^2 \frac{2}{36} + 12^2 \frac{1}{36} \end{aligned}$$

**II.2 - Variance****Définition 6 - Variance, Écart-type**

Soit  $X$  une variable aléatoire. La *variance* de  $X$ , notée  $\mathbf{V}(X)$ , est le réel :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2].$$

L'écart-type est  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ .

**Variance**

Comme l'espérance s'interprète comme une moyenne, la variance est la moyenne des écarts quadratiques (c'est-à-dire au carré) à la moyenne.

**Exemple 8 - Lois usuelles - À connaître par cœur**

- **Loi certaine de valeur  $c$ .**

$$\mathbf{V}(X) = 0.$$

- **Loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .**

$$\mathbf{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

- **Loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .**

$$\mathbf{V}(X) = p(1 - p).$$

- **Loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .**

$$\mathbf{V}(X) = np(1 - p).$$

**Proposition 4**

Soient  $X$  une variable aléatoire et  $a, b$  deux réels. Alors,

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X).$$

**Exemple 9**

Soit  $Y$  une variable suivant une loi uniforme sur  $\llbracket 2, 12 \rrbracket$ . On pose  $X = Y - 1$ .

Déterminons la loi de  $X$ .

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([Y = k])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Comme  $X = Y - 1$ ,

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{P}([X = j])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi,  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 11 \rrbracket)$ .

Déterminons l'espérance et la variance de  $Y$ .

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X + 1] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[1] = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7,$$

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X + 1) = \mathbf{V}(X) = \frac{11^2 - 1}{12} = 10.$$

### Théorème 1 - Formule de Kœnig-Huygens

Soit  $X$  une variable aléatoire. Alors,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$

### Définition 7 - Variable centrée, réduite

Soit  $X$  une variable aléatoire.

- $X$  est une variable centrée si  $\mathbf{E}[X] = 0$ .
- $X$  est une variable réduite si  $\mathbf{V}(X) = 1$ .

### Proposition 5

Soit  $X$  une variable aléatoire qui ne soit pas de loi certaine. La variable  $X^* = \frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sigma(X)}$  est une variable centrée réduite.

## III - Couple de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire  $X$  qui prend les valeurs  $x_1, \dots, x_p$  et une variable aléatoire  $Y$  qui prend les valeurs  $y_1, \dots, y_q$ .

## III.1 - Loi du couple

### Définition 8 - Loi du couple

La *loi du couple*  $(X, Y)$  est la donnée :

- des valeurs  $(x_i, y_j)$  prises par le couple  $(X, Y)$  ;
- des probabilités  $\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ .

### Exemple 10 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On dispose d'un bureau à 2 tiroirs et de 2 feuilles de papier. On dispose aléatoirement chacune des feuilles de papier dans l'un des tiroirs.

On note  $X$  le nombre de feuilles dans le premier tiroir et  $Y$  le nombre de tiroirs vides.

Le nombre de feuilles de papier dans le premier tiroir peut être égal à 0, 1 ou 2.

Le nombre de tiroirs vides peut être égal à 0 (il y a 1 feuille dans chaque tiroir) ou 1 (les 2 feuilles sont dans le même tiroir).

De plus,

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 0]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4}$$

On peut représenter ces résultats dans un tableau : à chaque ligne correspond une valeur  $x$  que peut prendre  $X$  ; à chaque colonne correspond une valeur  $y$  que peut prendre  $Y$  ; à l'intersection d'une ligne et d'une colonne se lit la probabilité  $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$  :

$x \backslash y$	0	1
0	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$

**Définition 9 - Marginales**

Les lois de  $X$  et de  $Y$  sont les *marginales* du couple  $(X, Y)$ .  
En utilisant le système complet associé à la variable aléatoire  $Y$  (resp.  $X$ ), on obtient

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \mathbf{P}([X = x_i]) = \sum_{j=1}^q \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \mathbf{P}([Y = y_j]) = \sum_{i=1}^p \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

**Exemple 11 - 2 feuilles et 2 tiroirs**

En reprenant les notations de l'exemple précédent, les marginales s'obtiennent en sommant les lignes / les colonnes du tableau.

$x \backslash y$	0	1	$\mathbf{P}([X = x])$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}([Y = y])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

La somme des cases de l'intérieur du tableau vaut 1.

**Définition 10 - Loi conditionnelle**

La *loi conditionnelle* de  $X$  sachant  $[Y = y_j]$  est la donnée :

- des valeurs  $x_1, \dots, x_p$  prises par  $X$  ;
- des probabilités  $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_p])$ .

**Exemple 12 - 2 feuilles et 2 tiroirs**

On reprend les notations de l'exercice précédent. La loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = 0]$  est égale à

$i$	0	1	2
$\mathbf{P}_{[Y=0]}([X = i])$	0	1	0

C'est une loi presque certaine : *sachant qu'aucun des tiroirs n'est vide, on est certain qu'il y a une feuille dans le premier tiroir.*

La loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = 1]$  est égale à

$i$	0	1	2
$\mathbf{P}_{[Y=1]}([X = i])$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

*Sachant qu'un des deux tiroirs est vide, il y a une chance sur deux que le premier tiroir contienne 0 feuille et une chance sur deux qu'il contienne les 2 feuilles.*

**III.2 - Indépendance****Définition 11 - Indépendance**

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont *indépendantes* si pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ ,

$$\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \mathbf{P}([X = x_i]) \times \mathbf{P}([Y = y_j]).$$

**Exemple 13**

- On considère le couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  dont la loi est définie par

$x \backslash y$	0	1	$\mathbf{P}([X = x])$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{P}([Y = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

On étudie le comportement de **tous** les couples de valeurs possibles :

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 0])$$

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 1])$$

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{P}([X = 1]) \times \mathbf{P}([Y = 0])$$

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{P}([X = 1]) \times \mathbf{P}([Y = 1])$$

Ainsi, les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

- 2 feuilles et 2 tiroirs.** En reprenant la loi du couple,

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0 \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 0]).$$

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  **ne** sont **pas** indépendantes.

**Indépendance en pratique**

- Pour montrer que  $X$  et  $Y$  **ne** sont **pas** indépendantes, il suffit de trouver une case du tableau telle que

$$\mathbf{P}([X = x_k] \cap [Y = y_j]) \neq \mathbf{P}([X = x_k]) \times \mathbf{P}([Y = y_j]).$$

- Pour montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, il faut montrer que cette égalité est vraie **pour toutes** les cases du tableau.

**Proposition 6 - Loi certaine**

Si  $Y$  est une variable aléatoire certaine, alors  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

**III.3 - Covariance****Proposition 7 - Espérance d'un produit**

En utilisant la loi du couple,

$$\mathbf{E}[X \times Y] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q x_i \times y_j \times \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

**Exemple 14 - 2 feuilles et 2 tiroirs**

En reprenant l'exemple des feuilles et des tiroirs,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[XY] &= 0 \times 0 \times 0 + 0 \times 1 \times \frac{1}{4} + \dots \\ &\quad \dots + 1 \times 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 \times 0 + \dots \\ &\quad \dots + 2 \times 0 \times 0 + 2 \times 1 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Théorème 2 - Espérance et Indépendance**

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors

$$\mathbf{E}[X \times Y] = \mathbf{E}[X] \times \mathbf{E}[Y].$$

**Définition 12 - Covariance**

La *covariance* de  $X$  et  $Y$ , notée  $\text{Cov}(X, Y)$ , est le réel

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X]) \times (Y - \mathbf{E}[Y])].$$



**Proposition 8 - Propriétés de la covariance**

Soient  $a, b, c$  trois réels et  $X, Y, Z$  trois variables aléatoires.

- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[X \times Y] - \mathbf{E}[X] \times \mathbf{E}[Y]$ .
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ .
- $\text{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$ .
- $\text{Cov}(X, c) = 0$ .
- $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z)$ .

**Exemple 15 - 2 feuilles et 2 tiroirs**

En reprenant les calculs précédents,

$$\mathbf{E}[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1,$$

$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X] \mathbf{E}[Y] = \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0.$$

**Proposition 9 - Covariance et Somme**

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

**Exemple 16 - Variance d'une somme**

On considère le couple  $(X_1, X_2)$  dont la loi est définie par :

$x_1 \backslash x_2$	0	1	$\mathbf{P}([X_1 = x_1])$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\mathbf{P}([X_2 = x_2])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

$X_1$  et  $X_2$  suivent toutes deux une loi de Bernoulli de para-

mètre  $3/4$ . Ainsi,

$$\mathbf{E}[X_1] = \frac{3}{4} \text{ et } \mathbf{V}(X_1) = \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}$$

$$\mathbf{E}[X_1 X_2] = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}[X_1 X_2] - \mathbf{E}[X_1] \mathbf{E}[X_2] = \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{16}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X_1 + X_2) &= \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2) \\ &= \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Proposition 10 - Covariance et Indépendance**

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ . En particulier,  $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X] \mathbf{E}[Y]$ .

**Exemple 17 - 2 feuilles et 2 tiroirs**

L'exemple des feuilles et des tiroirs montre que la covariance peut être nulle alors que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

**Définition 13 - Coefficient de corrélation linéaire**

Le *coefficient de corrélation linéaire* de  $X$  et  $Y$ , noté  $\rho(X, Y)$ , est défini par

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \mathbf{V}(Y)}}.$$

**Exemple 18**

En reprenant l'exemple précédent,

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{V}(X_1)\mathbf{V}(X_2)}} = \frac{\frac{-1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{3}{16}}} = -\frac{1}{3}.$$

**Proposition 11**

- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ .
- $|\rho(X, Y)| = 1$  signifie qu'il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\mathbf{P}(aX + bY + c = 0) = 1$ . Les variables  $X$  et  $Y$  sont reliées presque sûrement par une relation *affine*.