

V - Dérivations Stratégie

Lors du calcul des dérivées, il est important d'appliquer une stratégie de calculs pour *reconnaître* la formule à utiliser. Nous présentons et illustrons ces règles ci-dessous, de la plus élémentaire à la plus élaborée. Plutôt que d'écrire « La dérivée de la fonction $f(x) = \dots$ est la fonction $f'(x) = \dots$ », nous adopterons la notation **non standard** $f(x) \rightsquigarrow f'(x)$.

I - Fonctions élémentaires

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	dérivée
$c \in \mathbb{R}, c$	\rightsquigarrow	0

Exemple 1

$$3 \rightsquigarrow 0$$

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	dérivée
x^n	\rightsquigarrow	nx^{n-1}

Exemple 2

x	\rightsquigarrow	1
x^2	\rightsquigarrow	$2x$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^{1/3}$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	\rightsquigarrow	$-2x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3}$
$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$	\rightsquigarrow	$-3x^{-3-1} = -\frac{3}{x^4}$
$\frac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3}$	\rightsquigarrow	$-\frac{1}{3}x^{-1/3-1} = -\frac{1}{x^{4/3}}$

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	dérivée
$\ln(x)$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{x}$

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	dérivée
e^{ax}	\rightsquigarrow	$a e^{ax}$

Exemple 3

e^x	\rightsquigarrow	e^x
e^{3x}	\rightsquigarrow	$3e^{3x}$

II - Fonctions composées

À Savoir

$$\begin{array}{lll} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ \lambda u(x) & \rightsquigarrow & \lambda u'(x) \end{array}$$

Exemple 4

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{3}x^2 & \rightsquigarrow & \frac{1}{3} \times 2x = \frac{2x}{3} \\ 3x^{1/2} & \rightsquigarrow & 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lll} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ u(x) + v(x) & \rightsquigarrow & u'(x) + v'(x) \end{array}$$

Exemple 5

$$\begin{array}{lll} x^4 + x^5 & \rightsquigarrow & 4x^3 + 5x^4 \\ e^{3x} + \frac{1}{x} & \rightsquigarrow & 3e^{3x} - \frac{1}{x^2} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lll} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ \lambda u(x) + \mu v(x) & \rightsquigarrow & \lambda u'(x) + \mu v'(x) \end{array}$$

Exemple 6

$$\begin{array}{lll} 3x - 2x^7 & \rightsquigarrow & 3 - 2 \times 7x^6 = 3 - 14x^6 \\ \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{x} & \rightsquigarrow & \frac{1}{3} \times 3e^{3x} + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{3x} - \frac{2}{x^2} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lll} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ u^n(x) & \rightsquigarrow & nu'(x)u^{n-1}(x) \end{array}$$

Exemple 7

$$\begin{array}{lll} (x+2)^2 = \underbrace{(x+2)}_{u(x)}^2 & \rightsquigarrow & 2 \times 1 \times (x+2)^{2-1} = 2(x+2) \\ \frac{1}{(x+3)^4} = \underbrace{(x+3)}_{u(x)}^{-4} & \rightsquigarrow & -4 \times 1 \times (x+3)^{-4-1} = -\frac{4}{(x+3)^5} \\ \underbrace{(x^2+3)}_{u(x)}^4 & \rightsquigarrow & 4 \times 2x \times (x^2+3)^{4-1} = 8x(x^2+3)^3 \\ \frac{1}{(x^2+3)^4} = \underbrace{(x^2+3)}_{u(x)}^{-4} & \rightsquigarrow & -4 \times (2x) \times (x^2+3)^{-4-1} = -\frac{8x}{(x^2+3)^5} \\ \underbrace{(x^3+e^{2x})}_{u(x)}^3 & \rightsquigarrow & 3 \times (3x^2 + 2e^{2x})(x^3 + e^{2x})^2 \\ \underbrace{(x^3+e^{3x})}_{u(x)}^5 & \rightsquigarrow & 5(3x^2 + 3e^{3x})(x^3 + e^{3x})^4 \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{lll} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ \ln |u(x)| & \rightsquigarrow & \frac{u'(x)}{u(x)} \end{array}$$

Exemple 8

$$\begin{array}{lll} \ln |x+12| & \rightsquigarrow & \frac{1}{x+12} \\ \ln(x^2 + e^{3x}) & \rightsquigarrow & \frac{2x + 3e^{3x}}{x^2 + e^{3x}} \\ \ln(3x^2 + e^{2x}) & \rightsquigarrow & \frac{3 \times 2x + 2e^{2x}}{3x^2 + e^{2x}} = 2 \frac{3x + e^{2x}}{3x^2 + e^{2x}} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{ccc} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ e^{u(x)} & \rightsquigarrow & u'(x) e^{u(x)} \end{array}$$

Exemple 9

$$\begin{array}{ccc} e^{x+12} & \rightsquigarrow & \underbrace{1}_{u'(x)} \times e^{x+12} = e^{x+12} \\ e^{x^2+e^{3x}} & \rightsquigarrow & \underbrace{(2x + 3e^{3x})}_{u'(x)} e^{x^2+e^{3x}} \\ e^{3x^2+e^{2x}} & \rightsquigarrow & \underbrace{(3 \times 2x + 2e^{2x})}_{u'(x)} e^{3x^2+e^{2x}} = 2(3x + e^{2x}) e^{3x^2+e^{2x}} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{ccc} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ u(x) \times v(x) & \rightsquigarrow & u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \end{array}$$

Exemple 10

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{e^{2x}}_{v(x)} & \rightsquigarrow & \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{e^{2x}}_{v(x)} + \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{2e^{2x}}_{v'(x)} = (2x+3)e^{2x} \\ \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{\ln|x|}_{v(x)} & \rightsquigarrow & \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{\ln|x|}_{v(x)} + \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)} = \ln|x| + \frac{x+1}{x} \\ \underbrace{(x^2+1)}_{u(x)} \underbrace{e^{3x+4}}_{v(x)} & \rightsquigarrow & \underbrace{2x}_{u'(x)} \underbrace{e^{3x+4}}_{v(x)} + \underbrace{(x^2+1)}_{u(x)} \underbrace{3e^{3x+4}}_{v'(x)} = (3x^2+2x+3)e^{3x+4} \end{array}$$

À Savoir

$$\begin{array}{ccc} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{dérivée} \\ \int_a^x f(t) dt & \rightsquigarrow & f(x) \end{array}$$

Exemple 11

$$\begin{array}{ccc} \int_a^x \frac{e^t}{t^4} dt & \rightsquigarrow & \frac{e^x}{x^4} \\ \int_1^{3x} \frac{\ln(t)}{1+t^5} dt & \rightsquigarrow & \frac{\ln(x)}{1+x^5} \end{array}$$

III - Exercices

Exercice 1. Dériver les fonctions suivantes. La lettre e désigne le réel $\exp(1)$.

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| 1. $f(x) = 3$. | 7. $f(x) = \ln x $. |
| 2. $f(x) = e$. | 8. $f(x) = e^x$. |
| 3. $f(x) = x^{10}$. | 9. $f(x) = \frac{1}{x}$. |
| 4. $f(x) = x^{3/4}$. | 10. $f(x) = \ln 2x $. |
| 5. $f(x) = \frac{1}{x^5}$. | 11. $f(x) = e^{5x}$. |
| 6. $f(x) = \sqrt{x}$. | |

Exercice 2. Dériver les fonctions suivantes. La lettre e désigne le réel $\exp(1)$.

- | | |
|--|--------------------------------|
| 1. $f(x) = 4x + 3$. | $2\sqrt{x}$. |
| 2. $f(x) = 2x^2 + x^5$. | 4. $f(x) = (2x)^3$. |
| 3. $f(x) = 3e^x + \frac{4}{5}\ln(x) +$ | 5. $f(x) = 3e^{2x} - (4x)^4$. |