T.P. V - Matrices

Code Capytale : `62c9-794137`

I - Ce qu'il faut savoir

Solution de l'exercice 1.

1. D'après la définition,

$$C_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. D'après la définition des suites (u_n) et (v_n),

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_n + v_n \\ 2u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= AC_n. \end{aligned}$$

3. On montre la propriété par récurrence sur n.
Initialisation. Lorsque $n = 0$, montrons que $C_0 = A^0 C_0$.
D'après la définition des puissances de matrices, $A^0 = I$. Ainsi, d'après les propriétés de la matrice identité,

$$A^0 C_0 = IC_0 = C_0.$$

La propriété est donc vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $C_n = A^n C_0$. Montrons que $C_{n+1} = A^{n+1} C_0$. Or,

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= AC_n, \text{ d'après la question } \mathbf{2.} \\ &= A \times A^n C_0, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} C_0, \text{ d'après la définition des fonctions puissance} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, C_n = A^n C_0.$$

4.

```
import numpy as np

n = 12

A = np.array([[1, 1], [2, 0]])

C = np.array([1, 0])

for k in range(1, 13):
    C = np.dot(A, C)

print(C[0], C[1])
```

□