# ■ Chapitre 6 ■
# Probabilités sur des ensembles finis ou dénombrables

**Exercice 1. (Rappels de dénombrements)** On considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$ et $p$ un entier naturel. Pour chacune des expériences suivantes, proposer éventuellement une modélisation en termes d'ensemble de fonctions, puis déterminer le nombre de résultats possibles.

**1.** Tirages successifs et avec remise de $p$ boules.

**2.** Tirages successifs et sans remise de $p$ boules.

**3.** Tirage simultané de $p$ boules.

Déterminer…

**4.** …le nombre d'éléments de $\{(i_1, \ldots, i_p) \in [\![1, n]\!]^p \ ; \ 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n\}$.

**5.** …le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT.

**Définition 1 (Ensemble dénombrable).**
Un ensemble $\Omega$ est *dénombrable* s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\Omega$.

**Exercice 2.** Montrer que…

**1.** …$\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.

**2.** …$f : (p, q) \mapsto q + \sum_{k=1}^{p+q} k$ réalise une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

**Propriété 1 (Produit cartésien & Dénombrabilité).**
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(\Omega_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des ensembles dénombrables. Le produit cartésien $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ est dénombrable.

**Propriété 2.**
Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

**Exercice 3.** Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

**Propriété 3.**
Soit $\Omega$ un ensemble non vide. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$(i)$. $\Omega$ est un ensemble fini ou dénombrable, i.e. il existe une injection de $\Omega$ dans $\mathbb{N}$.

$(ii)$. Il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\Omega$.

**Exercice 4.**

**1.** Soit $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables. Montrer que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$ est dénombrable.

**2.** Montrer que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

**Notation.**
■ Dans toute la suite, $\Omega$ désigne un ensemble non vide, fini ou dénombrable.

# I. Mesures de probabilité

## I.1 Tribus

**Définition 2 (Tribus, Espace probabilisable).**

Soit $\mathscr{F}$ un ensemble de parties de $\Omega$. L'ensemble $\mathscr{F}$ est une *tribu* (ou *$\sigma$-algèbre*) sur $\Omega$ si

$(i)$. $\Omega \in \mathscr{F}$.

$(ii)$. pour tout $A \in \mathscr{F}$, ${}^{c}A \in \mathscr{F}$.

$(iii)$. pour tout $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$, $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{F}$.

Le couple $(\Omega, \mathscr{F})$ est un espace *probabilisable*.

**Exercice 5.** Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

**1.** Montrer que $\mathscr{P}(\Omega)$ et $\{\emptyset, \Omega\}$ sont des tribus sur $\Omega$.

**2.** Soit $A \subset \Omega$. Montrer que $\{\emptyset, A, {}^{c}A, \Omega\}$ est une tribu sur $\Omega$.

**3.** $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ est-elle une tribu sur $\{1, 2\}$ ?

**4.** Lorsque $\Omega$ est fini, déterminer le nombre maximal d'éléments de $\mathscr{F}$.

**5.** Montrer que l'intersection de deux tribus est encore une tribu.

**6. Tribu engendrée.** Soit $A \subset \mathscr{P}(\Omega)$. Montrer qu'il existe une plus petite tribu $\mathscr{F}$ contenant $A$.

**Définition 3 (Expérience aléatoire, Univers, Événements).**

Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace probabilisable.

$(i)$. Pour certaines expériences, on ne peut prédire avec certitude le *résultat*, on peut seulement décrire l'ensemble des résultats possibles. Ces expériences sont dites *aléatoires*. L'ensemble de tous les résultats possibles est l'*univers*, noté $\Omega$.

$(ii)$. Les éléments de $\mathscr{F}$ sont des *événements*.

$(iii)$. Soient $A$, $B$ deux événements. Si $A \cap B = \emptyset$, alors $A$ et $B$ sont des événements *incompatibles*.

**Exercice 6.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

**1.** Pour chacune des expériences suivantes, déterminer l'univers ainsi qu'une tribu naturelle associée.

**a)** Lancer unique d'une pièce de monnaie.

**b)** Lancer unique d'un dé à 6 faces.

**2.** On effectue $n$ lancers consécutifs d'une pièce de monnaie. Décrire l'univers $\Omega$ que l'on munira de la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$. Montrer que les événements A : *La pièce a renvoyé face* et $B$ : *La pièce a renvoyé k fois pile* s'écrivent comme une réunion finie de singletons de $\Omega$.

**3. Collectionneur de cartes.** Une marque de chocolat propose, pour tout achat d'une tablette, un portrait de mathématicien. Lors de l'achat de la tablette, le portrait n'est pas visible. Au total, la chocolaterie propose $N$ portraits distincts. Un collectionneur achète des tablettes tant qu'il n'a pas obtenu les $N$ portraits. Modéliser cette expérience.

**Propriété 4.**

Soient $\mathscr{F}$ une tribu sur $\Omega$, $n \in \mathbb{N}$ et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$.

$(i)$. $\emptyset \in \mathscr{F}$.

$(ii)$. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$.

$(iii)$. $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{F}$.

$(iv)$. $A_1 \backslash A_2 \in \mathscr{F}$.

**Définition 4 (Système complet d'événements).**

Soient $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace probabilisable et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$. La famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un *système complet d'événements* si

$(i)$. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$.

$(ii)$. $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$.

**Exercice 7.** Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable.

**1.** Soit $A \subset \Omega$. Montrer que $(A, {}^cA)$ est un système complet d'événements.

**2.** Si $\Omega = \{\omega_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, montrer que $(\{\omega_i\})_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

### I.2 Probabilités

**Définition 5 (Probabilité, Espace probabilisé, Axiomatique de Kolmogorov).**

Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace probabilisable. L'application $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to [0,1]$ est une *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{F})$ si

$(i)$. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

$(ii)$. **$\sigma$-Additivité.** Pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles la série $\sum \mathbb{P}(A_k)$ converge et

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ est un *espace probabilisé*.

**Exercice 8.** Proposer un espace probabilisé raisonnable pour…

**1.** …le lancer unique d'une pièce éventuellement biaisée.

**2.** …le lancer unique d'un dé équilibré à 6 faces.

**Propriétés 5.**

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$.

$(i)$. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

$(ii)$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, $\mathbb{P}\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

$(iii)$. $\mathbb{P}({}^cA) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

$(iv)$. Si $A \subset B$, alors

$$\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

$(v)$. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

$(vi)$. $\mathbb{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

**Propriété 6 (Continuités croissante & décroissante).**

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

$(i)$. Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante, i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset A_{k+1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right).$$

$(ii)$. Si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_{k+1} \subset B_k$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k\right).$$

**Exercice 9.** Soit $(A_n)$ une suite d'événements. Montrer que

**1.** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$.

**2.** $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)$.

**Propriété 7 (Sous-additivité, Inégalité de Boole).**

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k),$$

où le membre de droite est défini sur $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

**Exercice 10. (Formule du crible / Formule de Poincaré, H.P.)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathscr{F}^n$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right).$$

**Définition 6 (Événement négligeable, presque sûr).**

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B \in \mathscr{F}$.

$(i)$. Si $\mathbb{P}(B) = 0$, alors $B$ est un événement *négligeable*.

$(ii)$. Si $\mathbb{P}(B) = 1$, alors $B$ est un événement *presque sûr*.

### I.3 Probabilités sur des ensembles finis ou dénombrables

**Théorème 1 (Cas fini).**

On suppose que $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un ensemble fini muni de la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$.

$(i)$. Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Si, pour tout $i$ entier de $[\![1, n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}(\{x_i\})$, alors $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

$(ii)$. Si $(p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. En posant, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i\ ;\ x_i\in A} p_i$, l'application $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

**Exercice 11.** Montrer que les triplets suivants (munis de la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$) sont des espaces probabilisés.

**1. Équiprobabilité.** Si $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $p_k = \frac{1}{n}$.

**2. Bernoulli.** Si $\Omega = \{0, 1\}$ et $p \in [0, 1]$, $p_0 = 1 - p_1 = p$.

**3. Binomiale.** Si $\Omega = [\![0, n]\!]$ et $p \in [0, 1]$, $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

**Théorème 2 (Cas dénombrable).**

On suppose que $\Omega = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable muni de la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$.

$(i)$. Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. En posant, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $p_i = \mathbb{P}(\{x_i\})$, alors $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$.

(*ii*). Si $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$. Alors, en posant, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i\ ;\ x_i\in A} p_i$, l'application $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

**Exercice 12.** Montrer que les triplets suivants (munis de la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$) sont des espaces probabilisés.

**1. Géométrique.** Si $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, $p_k = p(1-p)^{k-1}$.

**2. Poisson.** Si $\Omega = \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $p_k = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

## II. Indépendance

### II.1 Probabilité conditionnelle

**Définition 7 (Probabilité conditionnelle).**

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A$, $B$ deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. La *probabilité conditionnelle* de $A$ sachant $B$, notée $\mathbb{P}(A|B)$ est définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

De plus, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot|B))$ est un espace probabilisé.

**Exercice 13.**

**1.** Un ami a lancé deux pièces équilibrées. Il vous dit qu'une des pièces a renvoyé face. Quelle est la probabilité que les deux pièces aient renvoyé face ?

**2.** Deux dés équilibrés à 6 faces sont lancés successivement. Étant donné que le premier des dés a renvoyé 3, quelle est la probabilité que la somme des 2 soit strictement supérieure à 6 ?

**Propriété 8 (Formule des probabilités composées).**

Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'événements tels que $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$ ne soit pas négligeable. Alors,

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}).$$

**Théorème 3 (Formule des probabilités totales).**

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables. Alors,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A|B_k)\cdot\mathbb{P}(B_k).$$

**Exercice 14. (Loi de succession de Laplace)** Soient $N+1$ urnes numérotées de 0 à $N$. L'urne numéro $k$ contient $k$ boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard. Dans l'urne choisie, on tire, avec des tirages indépendants, des boules avec remise.

**1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité $p_N(n)$ que la $(n+1)$-ème boule tirée soit blanche sachant que les $n$ précédentes l'étaient toutes ?

**2.** Déterminer $\lim_{N\to+\infty} p_N(n)$.

**Théorème 4 (Formule de Bayes).**

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $A \in \mathscr{F}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A|B_k)}{\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A|B_i)}.$$

**Exercice 15. (Faux positifs)**
Une maladie rare affecte une personne sur $10^5$. Un test pour la détecter est positif dans 99% des cas quand il est appliqué à une personne infectée et avec probabilité 1% si la personne est en bonne santé. Sachant que votre test est positif, quelle est la probabilité que vous soyez infecté ?

### II.2 Indépendance

**Définition 8 (Indépendance).**

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A$, $B$ deux événements de $\mathscr{F}$. Les événements $A$ et $B$ sont *indépendants* si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

**Exercice 16.**

**1.** On choisit aléatoirement une carte dans un jeu de 52 cartes. Montrer que les événements *la carte est une dame* et *la carte est un cœur* sont indépendants.

**2.** Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, montrer que $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

**3.** Un singe tape un mot de trois lettres sur un clavier contenant uniquement les 3 lettres $a$, $b$, $c$. Chacun des mots a la même probabilité d'apparition. On note $A_k$ l'événement la *$k$-ème lettre du mot est un $a$*. Montrer que $A_1$, $A_2$ et $A_3$ sont deux à deux indépendants.

**4.** On lance un dé équilibré à 6 faces. Les événements $P$ : *Obtenir un nombre pair* et T : *Obtenir un multiple de* 3 sont-ils indépendants ?

**5.** Soient $A$, $B$ deux événements disjoints. Peuvent-ils être indépendants ?

**6.** Soit $A \in \mathscr{F}$. Montrer que si $A$ est indépendant de $A$, alors $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

**7.** Lorsque $\Omega$ est fini, montrer qu'il existe un entier naturel $N$ tel que tout ensemble de $N$ événements contient au moins 2 événements égaux.

**Propriété 9.**

Soient $A$ et $B$ deux événements indépendants. Alors,

$(i)$. ${}^cA$ et $B$ sont indépendants.

$(ii)$. ${}^cA$ et ${}^cB$ sont indépendants.

**Exercice 17.** Généraliser le résultat précédent à une famille de $n$ événements indépendants.

**Définition 9 (Indépendance mutuelle).**

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements. Les $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont *mutuellement indépendants* si pour toute sous-famille finie $J \subset \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j).$$

**Exercice 18.**

**1.** Montrer que toute sous-famille d'une famille d'événements mutuellement indépendants est une famille d'événements mutuellement indépendants.

**2.** Montrer que, si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements indépendants, alors pour tout $\{i,j\}\subset\mathbb{N}$, les événements $A_i$ et $A_j$ sont indépendants.

**3.** On lance deux fois une pièce équilibrée. On note $A$ l'événement *Le premier lancer renvoie pile*, $B$ l'événement *le second lancer renvoie face* et $C$ l'événement *les deux lancers renvoient le même résultat*. Les événements $A$, $B$ et $C$ sont-ils mutuellement indépendants ?

**4.** Dans l'exemple précédent concernant le singe, montrer que $A_1$, $A_2$ et $A_3$ sont mutuellement indépendants.

**Propriété 10 (Lemme des coalitions).**

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants.

$(i)$. Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles telle que pour tout $i\in I$, $B_i$ est égal à $A_i$ ou à ${}^{c}A_i$. Alors, $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

$(ii)$. Soient $(I_1,\dots,I_n)$ des parties de $I$ finies et deux à deux disjointes et $(B_i)_{j\in[\![1,n]\!]}$ telle que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $B_j$ est égal à $\bigcap_{k\in I_j} A_k$ ou à $\bigcup_{k\in I_j} A_k$. Alors, $(B_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

**Exercice 19.** On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ où $\Omega=\{P,F\}^{\mathbb{N}^*}$ qui modélise le lancer d'une pièce déséquilibrée. On suppose ainsi que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'événement $A_n$ que la pièce tombe sur pile lors du $n$-ème lancer est de probabilité $p\in]0,1[$. Montrer que, pour tout $\omega\in\Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\})=0$.

## Lemmes de Borel-Cantelli

**Exercice 20.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{F}^{\mathbb{N}}$. On note $B$ l'ensemble des éléments de $\Omega$ qui appartiennent à une infinité d'événements $A_n$ et $C$ l'ensemble des éléments de $\Omega$ qui appartiennent à tous les événements $A_n$ sauf un nombre fini.

**1. a)** Montrer que $B=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geqslant n} A_m$ et $C=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geqslant n} A_m$.

**b)** En déduire que $B$ et $C$ sont des événements.

**2. Lemme de Borel-Cantelli n°1.**

On suppose que $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n)$ converge. Pour tout entier naturel $n$, on pose $B_n=\bigcup_{m\geqslant n} A_m$.

**a)** Majorer $\mathbb{P}(B_n)$ en fonction du reste d'une série convergente.

**b)** En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)=0$, puis déterminer $\mathbb{P}(B)$.

**3.** On suppose qu'il existe un espace probabilisé modélisant les lancers indépendants et successifs de pièces déséquilibrées telles que, lors du $n$ème lancer, la pièce renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{n^2}$. Montrer que, presque sûrement, la pièce ne renvoie Pile qu'un nombre fini de fois.

**4. Lemme de Borel-Cantelli n°2.**

On suppose que la série $\sum\mathbb{P}(A_n)$ diverge et que les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants.

**a)** Montrer que $0\leqslant\prod_{k=0}^{N}(1-\mathbb{P}(A_k))\leqslant\exp\left\{-\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(A_k)\right\}$.

**b)** En déduire que $\mathbb{P}\left({}^c B\right) = 0$ puis que $\mathbb{P}\left(B\right) = 1$.

**5.** Soients $p \in ]0, 1[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Une pièce de monnaie renvoie pile avec probabilité $p$. On lance cette pièce une infinité de fois et on note $P_n$ l'événement : *le $n$-ème lancer renvoie pile.*

**a)** En posant $A_k = \bigcap_{i=km+1}^{(k+1)m} P_i$, montrer que $(A_n)$ satisfait les hypothèses du résultat précédent.

**b)** En déduire que, avec probabilité 1, il apparaît une infinité de séquences de $m$ piles consécutifs.

## Programme officiel (PCSI)

Probabilités - A - Généralités (p. 30)

## Programme officiel (PSI)

Probabilités - A - Espaces probabilisés (p. 19)

### Mathématiciens

**Bernoulli** Jacob (6 jan. 1655 à Basel-16 août 1705 à Basel).
**Bayes** Thomas (1702 à Londres-17 avr. 1761 à Tunbridge Wells).
**Laplace** Pierre-Simon (23 mar. 1749 à Beaumon-en-Auge-5 mar. 1827 à Paris).
**Poisson** Siméon Denis (21 juin 1781 à Pithiviers-25 avr. 1840 à Sceaux).
**Boole** George (2 nov. 1815 à Lincoln-8 déc. 1864 à Ballintemple).
**Poincaré** Jules Henri (29 avr. 1854 à Nancy-17 juil. 1912 à Paris).
**Borel** Émile (7 jan. 1871 à St Affrique-3 fév. 1956 à Paris).
**Cantelli** Francesco (20 déc. 1875 à Palerme-21 juil. 1966 à Rome).
**Kolmogorov** Andreï Nicolaïevitch (25 avr. 1903 à Tambov-20 oct. 1987 à Moscou).