T.D. VI - Espaces vectoriels

I - Systèmes linéaires

Solution de l'exercice 1.

1. On commence par mettre la ligne ayant le coefficient de x le plus simple

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z & = 6 \quad {\scriptstyle L_1 \leftrightarrow L_2} \\ 2x - y + 4z & = 2 \quad {\scriptstyle L_2 \leftrightarrow L_1} \\ 4x + 3y - 2z & = 14 \end{cases}$$

On élimine ensuite la variable x dans les deuxième et troisième lignes

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z & = 6 \\ 5y - 10z & = 10 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2} \\ 5y - 10z & = 10 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow -4L_1 + L_3} \end{cases}$$

On simplifie les équations

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z & = 6 \\ y - 2z & = 2 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2} \\ -y + 2z & = -2 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow \frac{1}{5} L_3} \end{cases}$$

On élimine la variable y de la troisième ligne

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z & = 6 \\ y - 2z & = 2 \\ 0 & = 0 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_2 + L_3} \end{cases}$$

En supprimant les équations triviales, on obtient un système triangulaire

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z & = 6 \\ y - 2z & = 2 \end{cases}$$

La variable z est une variable libre.

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \;; \begin{cases} x + 2y - 3z & = 6 \\ y - 2z & = 2 \\ z & = \lambda \end{cases}$$

On résout alors

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x & = 6 - 2\lambda + 3\lambda \\ y & = 2 + 2\lambda \\ z & = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$

Finalement, le système $(\mathscr{S})$ possède une infinité de solutions. L'ensemble de ces solutions est

$$\boxed{\{(2 - \lambda, 2 + 2\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2, 2, 0) + \lambda(-1, 2, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

2. Les sytème possède deux variables libres. Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{(5 - \lambda - \mu, \lambda, \mu),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

3. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est solution de $(\mathscr{S}_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z & = -1 \\ -7y + 11z & = 10 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \\ -7y + 11z & = 7 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1} \end{cases}.$

Les deuxième et troisième lignes sont incompatibles, le système ne possède aucune solution. L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\emptyset.}$$

4.

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ est solution de } (\mathscr{S}_4) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 4z & = -11 \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ 2x - 3y + 5z & = 8 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \\ y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \;; \begin{cases} x & = -17 - 22\lambda \\ y & = -14 - 13\lambda \\ z & = \lambda \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions du système ($\mathscr{S}_4$) est infini et est donné par

$$\boxed{\{(-17-22\lambda, -14-13\lambda, \lambda) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

□

Solution de l'exercice 2. On raisonne par équivalences

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 & = 2 \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1} \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 & = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 & = 2 \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ -5x_2 + 3x_3 - 7x_4 & = -3 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ 5x_2 - 3x_3 + 7x_4 & = \lambda - 2 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 & = 2 \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ -5x_2 + 3x_3 - 7x_4 & = -3 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ 0 & = \lambda - 5 \end{cases}$$

Si $\lambda = 5$, le sytème possède une infinité de solution. Si $\lambda \neq 5$, l'ensemble des solutions est l'ensemble vide. Finalement, l'unique solution est

$$\boxed{\lambda = 5.}$$

□

II - Familles de vecteurs

III - Questions plus théoriques