T.D. II - Dénombrement

I - Dés, Mots, Urnes,...

Exercice 1. (⚙) On somme les résultats obtenus en lançant deux fois de suite un dé à 6 faces. De combien de façons peut-on obtenir un total de 6 ? de 7 ? de 8 ?

Exercice 2. (⚙) *Cent mille milliards de poèmes* est un livre écrit par Raymond Queneau et publié en 1961. Ce livre comporte 10 pages. Chacune des pages est découpée en 14 bandes horizontales. Sur chaque bande est écrit un ver. En tournant les bandes séparément, on peut composer un poème constitué de 14 vers formant un sonnet. Combien de sonnets peut-on ainsi lire ?

Exercice 3. (⚙) Combien y-a-t-il de nombres à 4 chiffres ?

Exercice 4. (⚙) Déterminer le nombre de nombres à 5 chiffres où...

1. ...0 ne figure qu'une seule fois.

2. ...un et un seul chiffre est répété et ceci une unique fois.

Exercice 5. (⚙) Déterminer le nombre d'anagrammes des mots :

1. COMPTER

2. ANANAS

3. DENOMBREMENT

Exercice 6. (⚙) Une urne contient n boules noires ou blanches numérotées dont n_1 sont blanches et n_2 sont noires. On tire p boules dans cette urne. Déterminer le nombre de tirages donnant exactement p_1 boules blanches et p_2 boules noires lorsque...

1. ...les boules sont tirées simultanément.

2. ...les boules sont tirées successivement et sans remise.

3. ...les boules sont tirées successivement et avec remise.

Exercice 7. On dispose de 20 figurines qui ne diffèrent que par leur couleur et que nous souhaitons disposer sur une même rangée. Combien d'alignements différents peut-on obtenir lorsque...

1. ...toutes les figurines sont de la même couleur.

2. ...2 figurines sont rouges et les autres sont blanches.

3. ...3 figurines sont jaunes, 5 sont rouges et les autres sont blanches.

Exercice 8. (Poker) Durant une partie de poker, 5 cartes vous sont distribuées. Avec la convention qu'un as peut prendre les valeurs 1 ou As, déterminer le nombre de mains qui contiennent...

1. ...une seule paire.

2. ...5 cartes consécutives.

3. ...2 paires (de valeurs distinctes).

4. ...5 cartes de la même couleur.

Exercice 9. (➹) Tom possède une collection de 20 figurines d'animaux. Ce mercredi soir, avant de partir dîner, il aligne aléatoirement ses figurines et prend une photo.

1. Sachant que, parmi les figurines, il y a exactement 2 oiseaux, quelle est la probabilité que ces deux oiseaux soient placés côte à côte.

2. On suppose maintenant qu'il possède 5 oiseaux. Quelle est la probabilité qu'au moins 2 de ces oiseaux soient placés côte à côte ?

II - Coefficients binomiaux

Exercice 10. (Identité de Vandermonde) Soit $x \in \mathbb{R}$, n, $p \in \mathbb{N}$.

1. Développer de deux manières différentes l'expression $(1+x)^n(1+x)^p$.

2. En déduire que, si $k \leqslant \inf(n,p)$, $\binom{n+p}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k-j}\binom{p}{j}$.

3. On considère un ensemble E fini et une partition (A, B) de E telle que A contient n éléments et B en contient p. Proposer une démonstration combinatoire de l'égalité précédente.

Exercice 11. Soit k, n deux entiers naturels non nuls tels que $k \leqslant n$. Combien y-a-t il de k-uplets $(i_1, \ldots, i_k)$ appartenant à $[\![1, n]\!]^k$ lorsque...

1. ...les répétitions sont autorisées.

2. ...les répétitions ne sont pas autorisées.

3. ...on impose $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$.

Exercice 12. (✎) On note $C_{n,p}$ (resp. $SC_{n,p}$) l'ensemble des suites croissantes (resp. strictement) de p éléments de $[\![1, n]\!]$.

1. Montrer que l'application $\Phi : C_{n,p} \to SC_{n+p-1,p}$, $(u_1, \ldots, u_p) \mapsto (u_1, u_2 + 1, \ldots, u_p + p - 1)$ est bijective. En déduire le cardinal de $C_{n,p}$.

2. On effectue p tirages successifs avec remise de n jetons numérotés de 1 à n. Déterminer le nombre de résultats permettant d'obtenir une suite de numéros qui soit

a) croissante,

b) strictement croissante,

c) monotone,

d) strictement monotone.

III - Compter autrement

Exercice 13. (✎) Soit n, $p \in \mathbb{N}^\star$. Combien peut-on construire de p-listes $(u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{N}^p$ telles que $\sum_{k=1}^{p} u_k = n$?

Exercice 14. (✎) Un maçon dispose de n briques indistinguables pour construire un mur vertical sans trous. Ainsi, toute brique se trouve soit sur le sol, jouxtant une autre brique, soit posée sur une autre brique. Déterminer le nombre de formes de murs distinctes que le maçon peut construire.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et E un ensemble fini à n éléments. Combien y-a-t-il de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$?

Exercice 16. (Relations binaires, ✎) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et E un ensemble fini de cardinal n. Quel est le nombre dans E de

1. ...relations binaires ?

2. ...relations binaires symétriques ?

3. ...relations binaires réflexives et symétriques ?

4. ...relations binaires réflexives et antisymétriques ?