T.D. IV - Espaces vectoriels

I - Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants.

1. $(\mathscr{S}_1)\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 3x+4y-z &= 2 \\ x+3y+z &= 10 \end{cases}$.

2. $(\mathscr{S}_2)\begin{cases} 2x+3y+z &= 7 \\ x-y+2z &= -3 \\ 3x+y-z &= 6 \end{cases}$.

3. $(\mathscr{S}_3)\begin{cases} 2x-y+4z &= 2 \\ x+2y-3z &= 6 \\ 4x+3y-2z &= 14 \end{cases}$.

4. $(\mathscr{S}_4)\begin{cases} x+y+z &= 5 \end{cases}$.

5. $(\mathscr{S}_5)\begin{cases} x+2y-3z &= -1 \\ 3x-y+2z &= 7 \\ 5x+3y-4z &= 2 \end{cases}$.

6. $(\mathscr{S}_6)\begin{cases} 2x-3y+5z &= 8 \\ -x+2y+4z &= -11 \end{cases}$.

Exercice 2. Identifier les réels λ pour lesquels le système d'équations suivant possède une solution.

$$(\mathscr{S})\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4 &= 1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4 &= 2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4 &= \lambda \end{cases}$$

II - Familles de vecteurs

Exercice 3. (Familles libres) Montrer que les familles suivantes sont libres :

1. $\big((-1,-1,1,2),(1,-1,1,5)\big)$.

2. $\big((8,4,1,-2),(1,3,0,5)\big)$.

3. $\big((1,1,3,2),(1,-1,1,3),(0,1,5,2)\big)$.

4. $\big((1,2,3,4),(-1,3,2,1),(2,1,-1,1)\big)$.

Exercice 4. (Familles génératrices) Déterminer une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

1. $F=\{(2\lambda,-\lambda,-3\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

2. $F=\{(2\lambda,0,-3\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

3. $F=\{(2\lambda+\mu,2\mu,3\lambda-\mu),\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}\}$.

4. $F=\{(2\lambda+\mu,5\lambda+2\mu,3\lambda-\mu),\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 5. (Bases) Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ 2x-3y+z=0\big\}$.

2. $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ 4x+y+z=0 \text{ ET } 3x+z=0\big\}$.

3. $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x-y-z=0 \text{ ET } 2x+3y+z=0 \text{ ET } 5x+5y+z=0\big\}$.

4. $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ ;\ \begin{cases} x+2y+3z+t &= 0 \\ x+y-t &= 0 \\ 2x+3y+2z &= 0 \end{cases}\right\}$.

Exercice 6. (Équations cartésiennes) Pour chacune des questions suivantes, déterminer une équation cartésienne de l'espace vectoriel.

1. $\mathrm{Vect}\,\{(1,1,2),(1,0,1)\}$.

2. $\mathrm{Vect}\,\{(1,2),(4,6)\}$.

3. $\mathrm{Vect}\,\{(1,0,1),(2,3,1)\}$.

4. $\mathrm{Vect}\,\{(1,1,1)\}$.

Exercice 7. (Coordonnées)

1. Montrer que $\mathscr{B}_1=\big((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(8,4,2)$ dans cette base.

2. Montrer que $\mathscr{B}_2=\big((-1,-1,1),(1,-1,1),(2,2,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(8,4,2)$ dans cette base.

3. Soit $\mathscr{B}=((-1,-1,1),(2,2,-1))$ et $F=\mathrm{Vect}\,\mathscr{B}$. Déterminer les coordonnées de $(3,3,-1)$ dans la base $\mathscr{B}$.

III - Questions plus théoriques

Exercice 8. Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. On note $F + G = \{f + g, (f, g) \in F \times G\}$. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que, en général, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Indication : Exhiber un contre-exemple lorsque $n = 2$.

Exercice 9. Soient $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (1, 1, 1, 3)$, $u_3 = (2, 1, 1, 1)$, $u_4 = (-1, 0, -1, 2)$ et $u_5 = (2, 3, 0, 1)$. On considère les sous-espaces vectoriels U, V de $\mathbb{R}^4$ définis par $U = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ et $V = \mathrm{Vect}\{u_4, u_5\}$. Quelles sont les dimensions de U, V, $U \cap V$ et $U + V$?

Exercice 10. Soit $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ;\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. Déterminer la dimension et une base de F.