

T.D. VII - Variables aléatoires discrètes

=====

I - Lois usuelles finies

Exercice 1. Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de moyenne p . On note $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$. Déterminer la loi de Y .

Exercice 2. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. On note N la variable aléatoire qui vaut 0 si $X_1 = \dots = X_n = 1$ et $\min \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket ; X_k = 0\}$ sinon. Déterminer la loi de N ?

II - Variables aléatoires finies

Exercice 3. On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

| k | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----------------------|---------------|----------------|----------------|---------------|---------------|
| $\mathbf{P}([X = k])$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

On pose $Y = |X - 1|$.

- Déterminer la loi de Y puis l'espérance de Y .
- Calculer directement l'espérance de Y à l'aide du théorème de transfert.

Exercice 4. Un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 est lancé une fois. La probabilité d'apparition de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu.

- Déterminer la loi de X .
- Déterminer l'espérance et la variance de X .

- Déterminer $\mathbf{E} \left[\frac{1}{X} \right]$.

Exercice 5. Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à vider l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

- Déterminer la loi de X .
- Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 6. On tire sans remise $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.

- Calculer la probabilité d'obtenir $1, 3, \dots, 2n - 1$ dans cet ordre et consécutivement.
- Déterminer la probabilité de tirer $1, 3, \dots, 2n - 1$ dans cet ordre mais pas forcément consécutivement.
- On note X la variable aléatoire associée au rang de la dernière boule impaire tirée. Calculer $\mathbf{E}[X]$.

Exercice 7.

- Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.
- Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On retire une à une et sans remise les boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages effectués jusqu'au retrait de toutes les boules blanches. Déterminer la loi de X . Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

III - Lois usuelles infinies

Exercice 8. Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

- Déterminer la loi de X .

2. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 9. Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note S la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

1. Quelle est la loi de S ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note T la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T .

Exercice 10. Soit Y une variable aléatoire telle que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(Y = k) = e^{-k} - e^{-(k+1)}.$$

On pose $Z = Y + 1$.

1. Vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) = 1$.

2. Reconnaître la loi de Z puis en déduire son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de Y .

4. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 11. (\Rightarrow) On considère une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que

$$\forall n \geq 1, \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X = n]) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathbf{P}([X > n])$.

1. Justifier que

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n].$$

2. En déduire que $u_{n-1} - u_n = \mathbf{P}([X = n])$.

3. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul,

$$\mathbf{P}_{[X > n-1]}([X > n]) = 1 - \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X = n]).$$

4. En déduire que pour tout n entier naturel non nul, $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$.

5. Exprimer, pour tout n entier naturel la valeur de u_n en fonction de n puis reconnaître la loi de X .

6. Exprimer $\mathbf{P}([X \leq n])$ en fonction de n .

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique sur \mathbb{N}^* de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $A = [X \text{ est paire}]$ et $B = [X \text{ est impaire}]$. Montrer que $\mathbf{P}(A) < \mathbf{P}(B)$.

Exercice 13. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[[1, n]]$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in [[1, n]]$, on pose $X_{i,m} = |\{k \in [[1, m]] ; U_k = i\}|$.

1. Déterminer la loi de $X_{i,m}$.

2. Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de la famille $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout $i \in [[1, n]]$, on pose $Y_i = X_{i,N}$. Déterminer la loi de Y_i .

Exercice 14. Un serveur téléphonique ouvre sa ligne chaque minute. Chaque minute, la probabilité qu'il prenne un client est constante et égale à $\frac{1}{12}$. On note X le nombre d'appels auxquels le serveur a répondu en 1 heure.

1. Déterminer la loi de X , son espérance $\mathbf{E}[X]$ et sa variance $\mathbf{V}(X)$. On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X . On considère la table de la loi de Poisson de paramètre 5 suivante :

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mathbf{P}([Y = k])$ | 0.006 | 0.034 | 0.084 | 0.140 | 0.175 | 0.175 | 0.146 |

2. Déterminer des valeurs approchées de $\mathbf{P}(X \leq 3)$ puis $\mathbf{P}(X \geq 4)$.

IV - Variables aléatoires infinies

Exercice 15. Un sauteur tente de franchir successivement les hauteurs numérotées 1, 2, 3, ..., n , ... On suppose que les sauts sont mutuellement indépendants et que la probabilité de franchir la hauteur numéro

n vaut $\frac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Calculer la loi de X et vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1$.
2. Calculer l'espérance de X .

Exercice 16. Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à obtention de tous les numéros. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir tous les numéros. On note $E_{i,j}$ l'événement « La boule i n'a pas été obtenue au cours des n premiers tirages. » Soit $n \geq 3$.

1. Exprimer $[X > n]$ en fonction des $E_{i,n}$.
2. Montrer que $\mathbf{P}(X > n) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
3. En déduire la loi de X .

Exercice 17. Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel N non nul selon la loi de probabilité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}$. Le joueur gagne N jetons si N est pair ; il perd N jetons si N est impair.

1. Quelle est la probabilité de gagner une partie ?
2. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. Vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$.
3. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(X = 0)$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X > n) = \frac{1}{n+1}$.

V - Lois jointes

Exercice 19. Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

| $x \backslash y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 |
| 1 | | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

1. Compléter la case vide.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) . En déduire $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{E}[Y]$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 1]$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbf{P}([X = 0] \cup [Y = 1])$.
6. Calculer la covariance de X et de Y .
7. Calculer $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$. En déduire $\rho(X, Y)$.
8. Calculer $\text{Cov}(X + Y, X)$, $\text{Cov}(X, X + Y)$ et $\text{Cov}(2X, X)$.

Exercice 20. On lance 2 fois un dé équilibré à 6 faces. On note X le plus grand des résultats obtenus et Y le plus petit.

1. Décrire l'ensemble des valeurs prises par (X, Y) .
2. Décrire l'événement $[X = 1]$ puis calculer $\mathbf{P}([X = 1])$.
3. Décrire l'événement $[Y = 1]$ puis calculer $\mathbf{P}([Y = 1])$.
4. Décrire l'événement $[X = 1] \cap [Y = 1]$ puis calculer $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 21. (Excursions) Une pièce biaisée dont face apparaît avec probabilité p est lancée n fois. Une *excursion* est une série de lancers qui renvoient le même résultat. Par exemple, dans la séquence FFPFPFF, il y a 5 excursions. On note R le nombre d'excursions. Montrer que $\mathbf{E}[R] = 1 + 2(n-1)p(1-p)$ puis calculer $\mathbf{V}(R)$.

Indication : Exprimer R en fonction de I_j : le $(j+1)$ -ème lancer est différent du j -ème.