



I. Arithmétique des entiers naturels

Indications pour l'exercice 1. Utiliser l'écriture de n en base 10 combinée avec la formule de Bernoulli. \square

II. Polynômes

Indications pour l'exercice 2.

1. Étudier le comportement de P en $\pm\infty$ et en déduire la parité de son degré. Utiliser ensuite le théorème des bornes atteintes généralisées.
2. Considérer la fonction $Q = P - P'$ et utiliser la question précédente.
3. Utiliser une fonction auxiliaire. \square

Indications pour l'exercice 3. Factoriser sous la forme $(1+z) \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ puis utiliser les racines de l'unité. \square

Indications pour l'exercice 4. On pourra utiliser la formule de Taylor polynomiale pour étudier les valeurs des dérivées successives en 0. En 2, on pourra utiliser le même argument ou se ramener en 0 à l'aide de symétries. \square

Indications pour l'exercice 5.

1. Raisonner par double implication.
2. Pour le cas n pair, trouver un contre-exemple.
3. Raisonner par récurrence en faisant apparaître une racine de P .
4. Faire intervenir le polynôme $(X+1)Q$. \square

Indications pour l'exercice 6. Introduire les quotients des divisions euclidiennes puis évaluer la relation en j . \square

III. Avec Python

Indications pour l'exercice 7.

- 1.
2. On pourra commencer par montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(n+km)^p - m^p$ est divisible par m .
- 3.
- 4.
5. Étudier les racines de $Q(n + XQ(n))$. \square

Mathématiciens

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1^{er} juil. 1646 à Leipzig-14 nov. 1716 à Hanovre).

EULER Leonhard (15 avr. 1707 à Basel-18 sept. 1783 à St Pétersbourg).