Interpolation de LAGRANGE & Zéros des polynômes de TCHEBYCHEV

■ ■ ■

Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de KRONECKER par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon. Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_0, \dots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$ tels que $a_0 < \cdots < a_n$.

Partie I : Interpolation de Lagrange

1. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.

2. Montrer que $\varepsilon : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $P \mapsto (P(a_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$ est un isomorphisme.

3. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = f(a_i)$.
Ce polynôme s'appelle le *polynôme d'interpolation de Lagrange* associé à la fonction f aux points $(a_0, \dots, a_n)$. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([-1, 1])$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[-1,1]} |f|$.

Partie II : Polynômes de Tchebychev

On définit par récurrence la suite de polynômes

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Le polynôme T_n est le $n$ème polynôme de Tchebychev.

4. Expliciter, sous forme canonique, T_1, T_2, T_3 et T_4.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est un polynôme à coefficients entiers dont vous déterminerez la parité, le degré et le coefficient dominant.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

b) Montrer que, pour tout $tg \in [0, \pi]$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, T_n possède exactement n racines distinctes.

Partie III : Erreur d'interpolation

8. Soient $f \in \mathscr{C}^{n+1}([-1, 1], \mathbb{R})$ et P_f le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f. Montrer que

$$\forall\, x \in [-1, 1],\ \exists\, \xi \in]-1, 1[\ ;\ f(x) - P_f(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - a_i)}{(n+1)!}.$$

On pourra considérer la fonction $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) - P_f(t) - K \prod_{i=0}^{n}(t - a_i)$.

Pour tout entier naturel n, on note $t_{n+1} = 2^{-n}T_{n+1}$.

9. Montrer que t_{n+1} est un polynôme unitaire.

10. Montrer que, pour tout polynôme Q unitaire de degré $n+1$, $\|Q\|_\infty \geqslant 2^{-n}$ avec égalité si et seulement si $Q = t_{n+1}$.

11. Quel est l'intérêt des racines des polynômes de Tchebychev dans l'interpolation de Lagrange ?

Mathématiciens

KRONECKER Leopold (7 déc. 1823 à Liegnitz-29 déc. 1891 à Berlin).