

T.D. VIII - Intégrales généralisées

I - Fonctions continues

Exercice 1. Montrer que les intégrales suivantes convergent et déterminer leurs valeurs.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt.$

2. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt.$

3. $\int_2^{+\infty} \frac{5}{t^3} dt.$

4. $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^4} dt.$

5. $\int_0^{+\infty} e^{-5t} dt.$

6. $\int_1^{+\infty} e^{-3t} dt.$

7. $\int_2^{+\infty} 3e^{-5t} dt.$

8. $\int_3^{+\infty} 2e^{-t} dt.$

II - Fonctions discontinues

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } t \in [5, 10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

1. Pour tout x réel, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

a) Pour tout $x < 5$, déterminer la valeur de $F(x).$

b) Pour tout $x \in]5, 10[$, déterminer la valeur de $F(x).$

c) Pour tout $x > 10$, déterminer la valeur de $F(x).$

d) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt.$

a) Pour tout $x < 5$, déterminer la valeur de $G(x).$

b) Pour tout $x \in]5, 10[$, déterminer la valeur de $G(x).$

c) Pour tout $x > 10$, déterminer la valeur de $G(x).$

d) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t \in [2, 4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

1. Pour tout x réel, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

a) Pour tout $x < 2$, déterminer la valeur de $F(x).$

b) Pour tout $x \in]2, 4[$, déterminer la valeur de $F(x).$

c) Pour tout $x > 4$, déterminer la valeur de $F(x).$

d) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt.$

a) Pour tout $x < 2$, déterminer la valeur de $G(x).$

b) Pour tout $x \in]2, 4[$, déterminer la valeur de $G(x).$

c) Pour tout $x > 4$, déterminer la valeur de $G(x).$

d) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2e^{-2t} & \text{sinon} \end{cases}.$

1. Pour tout x réel, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

a) Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $F(x).$

b) Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $F(x).$

c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt$.

a) Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

b) Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

On pourra utiliser une intégration par parties.

c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Pour tout x réel, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

a) Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.

b) Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.

c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt$.

a) Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

b) Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

On pourra utiliser une intégration par parties.

c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 6. Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et

g la fonction définie pour tout $t \geq 0$ par $g(t) = -\frac{1}{1+t^2}$.

1. Pour tout réel $t \geq 0$, déterminer $g'(t)$.

2. Pour tout $x \geq 0$, déterminer la valeur de $\int_{-\infty}^x \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$.

3. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \ln(t) & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Pour

tout réel A supérieur ou égal à 1, on pose $I(A) = \int_{-\infty}^A \frac{f(x)}{x} dx$ et

$$J(A) = \int_{-\infty}^A \frac{f(x)}{x} dx.$$

1. Pour tout $A \geq 1$, déterminer la valeur de $I(A)$.

2. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ diverge.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $A \geq 1$,

$$J(A) = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.$$

4. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ converge et déterminer sa valeur.