V - Probabilités

I - L'univers

À Savoir

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.

Exemple : résultats obtenus à l'issue de deux lancers successifs d'un dé.

À Savoir

L'**univers** est l'ensemble des résultats possibles pour une expérience. Généralement noté Ω.

Exemple des 2 lancers de dé :
$\Omega = \{(i,j),\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 6\} = [\![1,6]\!]^2$

À Savoir

Un **événement** est une partie (ou sous-ensemble) de l'univers Ω.

Exemple des 2 lancers de dé :
A : *obtenir un nombre pair lors du premier lancer.*

À Savoir

Deux événements $A\,B$ sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$

Exemple des 2 lancers de dé :
A : *obtenir un nombre pair lors du premier lancer.*
B : *la somme des deux lancers vaut* 2.

À Savoir

l'événement **contraire** de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des expériences de Ω qui ne sont pas dans A.

Exemple des 2 lancers de dé :
A : *obtenir un nombre pair lors du premier lancer.*
$\overline{A}$: *obtenir un nombre impair lors du premier lancer.*

À Savoir

Un **système complet d'événements** est une famille d'événements $A_1, \dots, A_n$ tels que

$$\begin{cases} A_i \neq \emptyset & \forall\ 1 \leqslant i \leqslant n \\ A_i \cap A_j = \emptyset & \forall\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \\ \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \end{cases}$$

Exemple des 2 lancers de dé :
A_2 : *la somme des deux résultats vaut* 2.
A_3 : *la somme des deux résultats vaut* 3.
...
A_{12} : *la somme des deux résultats vaut* 12.
$(A_2, \dots, A_{12})$ est un système complet d'événements.

II - Probabilité

À Savoir

Une **probabilité** est une application $\mathbf{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que

- $*$ $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
- $*$ si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbf{P}(A \sqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

À Savoir

L'**équiprobabilité** est la probabilité définie (lorsque Ω est fini) par $\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(B)}$.

Exemple des 2 lancers de dé : le dé est équilibré
A : le résultat du premier lancer est pair.

$$A = \{(2i, j),\ 1 \leqslant i \leqslant 3,\ 1 \leqslant j \leqslant 6\}.$$
$$\mathbf{P}(A) = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}.$$

À Savoir

* $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
* $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Exemple des 2 lancers de dé équilibré :
A : le résultat du premier lancer est pair.
C : le résultat du second lancer est pair.
$A \cup C$: le résultat d'un des lancers est pair.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2},$$
$$A \cap C = \{(2i, 2j),\ 1 \leqslant i, j \leqslant 3\},$$
$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}(A \cup B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

À Savoir

Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$, alors la **probabilité conditionnelle de B sachant A** $\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$.

Exemple des 2 lancers de dé équilibré :
A : le résultat du premier lancer est pair.
B : le résultat du premier lancer est un 2.

$$A \cap B = B, \qquad \mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$
$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

À Savoir

Formule des probabilités composées. Si $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbf{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exemple d'une urne : Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules noires. On effectue 4 tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 2 boules rouges puis 2 boules noires ?
On note :
A_1 : la première boule tirée est rouge.
A_2 : la seconde boule tirée est rouge.
A_3 : la troisième boule tirée est noire.
A_4 : la quatrième boule tirée est noire.
Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \\ &\qquad \cdots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4) \\ &= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{4}{12} \\ &= \frac{5}{13 \times 7}.\end{aligned}$$

À Savoir

Formule des probabilités totales. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ système complet d'événements,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{A_i}(A)\,\mathbf{P}(A_i).$$

Exemple de l'urne. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge ?

Comme $(A_1, \overline{A_1})$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_2) &= \mathbf{P}(A_2 \cap A_1) + \mathbf{P}\left(A_2 \cap \overline{A_1}\right) \\ &= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \times \frac{10}{14} \\ &= \frac{10 \times 14}{15 \times 14} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

À Savoir

Formule de Bayes. Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$,

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}_B(A)\,\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Exemple de l'urne. L'expérimentateur tire successivement 2 boules et cache le résultat de son premier tirage. Sachant que le second tirage est une boule rouge, quelle est la probabilité que le premier tirage soit une boule rouge ?

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{A_2}(A_1) &= \frac{\mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(A_2)} \\ &= \frac{\frac{9}{14} \times \frac{10}{15}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{9}{14}.\end{aligned}$$

III - Indépendance

À Savoir

A et B sont **indépendants** si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Exemple des 2 lancers de dé équilibré :
A : *le résultat du premier lancer est pair.*
C : *le résultat du premier lancer est un multiple de* 3.

$$\begin{aligned}C &= \{(3i, j),\ 1 \leqslant i \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant 6\} \\ \mathbf{P}(A) &= \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(C) = \frac{2 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{3} \\ A \cap C &= \{(6, j),\ 1 \leqslant j \leqslant 6\} \\ \mathbf{P}(A \cap C) &= \frac{6}{6 \times 6} = 6.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(C)$. Les événements A et C sont indépendants.

À Savoir

Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si pour tout $J \subset [\![1, 6]\!]$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$.

Peut être utilisé entre les différents lancers d'une pièce, d'un dé, d'un tirage avec remise,...