■ Chapitre 11 ■
Réduction des endomorphismes

Notations.
■ $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
■ n désigne un entier naturel non nul.
■ E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
■ M désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
■ f, g sont des endomorphismes de E.

Définition 1 (Diagonalisable).

(i). L'endomorphisme f est *diagonalisable* s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

(ii). La matrice M est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale.

Exercice 1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si ${}^tM$ est diagonalisable.

Exercice 2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rl} u_{n+1} & = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} & = 3u_n - 4v_n + 12w_n \\ -w_{n+1} & = u_n - 2v_n + 5w_n \end{array} \right.$$

Pour tout entier naturel n, on note $X_n = {}^t\begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

2. En supposant que A est diagonalisable, expliquer comment résoudre ce système.

3. Toujours en supposant que A est diagonalisable, expliquer comment résoudre le système différentiel $u(0) = 1$, $v(0) = w(0) = 0$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rl} u'(t) & = 2u(t) + 4w(t) \\ v'(t) & = 3u(t) - 4v(t) + 12w(t) \\ w'(t) & = u(t) - 2v(t) + 5w(t) \end{array} \right.$$

I. Valeurs propres, Vecteurs propres

I.1 Spectre

Propriété 1 (Droite stable).
Soit D une droite de E. Si D est stable par f, il existe un scalaire λ tel que $\forall\, x \in D,\ f(x) = \lambda x$.

Définition 2 (Valeur / Vecteurs propres).

* Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. S'il existe un vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$, alors
  (i). λ est une *valeur propre* de f.
  (ii). x est un *vecteur propre* de f.
* Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Les *valeurs propres* de M sont les valeurs propres de f.

Exercice 3.

1. Montrer que, si u est un vecteur propre de f, alors pour tout scalaire α non nul, αu est un vecteur propre de f.

2. Déterminer les valeurs propres d'une homothétie.

3. Déterminer les valeurs propres d'une matrice diagonale.

4. Déterminer les valeurs propres d'un projecteur.

5. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $m \in \mathbb{N}$ supérieur à 2 tel que $f^m = \mathrm{Id}_E$. Montrer que les valeurs propres de f sont des éléments de $\mathbb{U}_m$.

6. Soit $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \mapsto f'$. Déterminer les valeurs propres de φ.

Théorème 1 (Base de vecteurs propres).

Si E est de dimension finie, l'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Exercice 4. Soit f un endomorphisme diagonalisable. Notons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice de f dans une base de vecteurs propres. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est l'ensemble des éléments diagonaux.

Propriété 2.

Si E est de dimension finie, λ est une valeur propre de f si et seulement si $\lambda \mathrm{Id}_E - f$ n'est pas inversible.

Exercice 5.

1. Montrer que si A et B sont semblables, alors λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de B.

2. Soient $\mu_1, \dots, \mu_r$ des scalaires qui ne sont pas des valeurs propres de f et $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \mu_i)$. Montrer que $P(f)$ est inversible.

Définition 3 (Spectre).

Le *spectre* de f, noté $\mathrm{Sp}(f)$ est l'ensemble des valeurs propres de f.

Exercice 6.

1. Déterminer le spectre de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer le spectre de $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.

Exercice 7.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $\overline{\lambda}$ est également une valeur propre de A.

I.2 Polynôme caractéristique

Dans toute la suite, E est supposé de dimension finie.

Définition 4 (Polynôme caractéristique).

(i). Le *polynôme caractéristique* de l'endomorphisme f, noté χ_f, est défini par

$$\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - f).$$

(ii). Le *polynôme caractéristique* de la matrice M, noté χ_M, est défini par

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M).$$

Exercice 8.

1. Montrer que $\chi_f(\lambda) = (-1)^n \det(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer χ_A.

3. Montrer que M et ${}^tM$ ont même polynôme caractéristique.

4. Montrer que, si M et N sont semblables, alors $\chi_M = \chi_N$. Que pensez-vous de la réciproque ?

Théorème 2 (Polynôme caractéristique & Spectre).

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(f) \iff \chi_f(\lambda) = 0.$$

Exercice 9.

1. Déterminer les spectres des homothéties, matrices triangulaires et projecteurs.

2. Montrer qu'une matrice et sa transposée ont même spectre.

3. Montrer que deux matrices semblables ont même spectre.

4. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de R_θ.

Propriétés 3 (Propriétés du polynôme caractéristique).

Soit χ_f le polynôme caractéristique de f. On note $n = \dim(E)$. Alors,

(i). χ_f est unitaire et de degré n.

(ii). le coefficient de X^{n-1} dans χ_f est $-\operatorname{Tr}(f)$.

(iii). le coefficient constant de χ_f est $(-1)^n \det(f)$.

En particulier, si $\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ est scindé, alors

$$\operatorname{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ et } \det(f) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Exercice 10.

1. Montrer que f possède au plus n valeurs propres distinctes.

2. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire, montrer que f a au moins une valeur propre réelle.

3. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, montrer que f a au moins une valeur propre.

4. Soit $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$.

a) Lorsque u est inversible, montrer que $\chi_{uv} = \chi_{vu}$.

b) En déduire que $\chi_{uv} = \chi_{vu}$ par un argument de continuité.

5. Soit $A \in \mathscr{G}\ell_n(\mathbb{K})$. Exprimer χ_A en fonction de $\chi_{A^{-1}}$.

Définition 5 (Ordre de multiplicité).

Soit λ une valeur propre de f. La valeur propre λ est d'*ordre de multiplicité* p si elle est racine d'ordre p de χ_f.

Proposition 4.
Soit F un sous-espace de E stable par f et g l'endomorphisme induit par f sur F. Alors, le polynôme χ_g divise le polynôme χ_f.

I.3 Sous-espaces propres

Définition 6 (Sous-espace propre).
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'espace vectoriel $E_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est le *sous-espace propre* associé à λ.

Exercice 11.

1. Montrer que $\dim E_\lambda(f) \geqslant 1$ si et seulement si λ est une valeur propre de f.

2. Déterminer les sous-espaces propres des homothéties, projecteurs, matrices diagonales.

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$.

Théorème 3.
Soit μ une valeur propre de f. Alors, la dimension de $E_\mu(f)$ est majorée par l'ordre de multiplicité de μ dans χ_f.

Exercice 12. Déterminer les sous-espaces propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 4.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ des scalaires deux à deux distincts. La somme $\sum_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(f)$ est directe.
En particulier, si $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est une famille de valeurs propres deux à deux distinctes, toute famille de vecteurs propres $(x_1, \dots, x_m)$ associée aux $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est une famille libre.

Exercice 13. Écrire la matrice de la restriction de f à l'espace vectoriel $\bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(f)$ dans une base adaptée à la décomposition.

Propriété 5 (Commutativité).
Si f et g commutent, alors les sous-espaces propres de f sont stables par g.

II. Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

II.1 Caractérisations

Théorème 5 (Diagonalisabilité & Somme directe).
L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de f.

Exercice 14. Montrer que si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples, alors f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Corollaire 6 (Diagonalisabilité & Dimensions).
f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de E.

Exercice 15.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

Théorème 7 (Diagonalisation & Polynôme caractéristique).

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre λ de f, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est égale à la multiplicité de λ dans χ_f.

Corollaire 8.

Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable.

Exercice 16.

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable.

II.2 Diagonalisation & Polynômes annulateurs

Proposition 6 (Polynôme annulateur & Valeurs propres).

Soit P un polynôme annulateur de f. Si λ est une valeur propre de f, alors $P(\lambda) = 0$.

Exercice 17.

1. Montrer que la réciproque de la proposition précédente est fausse.

2. Déterminer le spectre d'un endomorphisme nilpotent. Montrer que les endomorphismes nilpotents ne sont pas diagonalisables.

Théorème 9 (Théorème de Cayley-Hamilton).

Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Exercice 18.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, exprimer A^{-1} en fonction des puissances successives de A.

2. Retrouver la propriété des matrices nilpotentes : Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente, alors son indice de nilpotence est inférieur à n.

3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non nulle telle que $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$. Montrer que M est une matrice nilpotente.

Théorème 10 (Diagonalisation & Polynôme annulateur).

Il y a équivalence entre les propriétés suivantes.

(i). f est diagonalisable.

(ii). $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de f.

(iii). f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Exercice 19. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^3 - 2M^2 + M - I_n = 0_n$. Montrer que M est diagonalisable.

Corollaire 11 (Stabilité par restriction).
Soit f un endomorphisme diagonalisable et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors l'endomorphisme induit par f sur F est diagonalisable.

II.3 Diagonalisation de matrices symétriques réelles

Théorème 12 (Théorème spectral matriciel, Provisoirement admis).
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice P telles que ${}^tPP = I_n$ et $M = PD{}^tP$.

III. Trigonalisation

Définition 7 (Trigonalisable).

(i). L'endomorphisme f est *trigonalisable* s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

(ii). La matrice M est *trigonalisable* si M est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 20.

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme trigonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u)$ est trigonalisable.

2. Déterminer une matrice qui est trigonalisable mais non diagonalisable.

3. Déterminer une matrice trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Théorème 13 (Trigonalisable & Polynôme caractéristique).
L'endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Exercice 21. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, trigonaliser l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Corollaire 14.
Tous les endomorphismes de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sont trigonalisables sur $\mathbb{C}$.

Exercice 22.

1. Montrer que $\overline{\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Reprendre l'étude des suites définies par une équation linéaire récurrente d'ordre 2.

Diagonalisation simultanée

Exercice 23. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E. On suppose que u et v sont diagonalisables.

1. Montrer que u et v commutent si et seulement s'ils sont diagonalisables dans une même base.

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\Phi_{A,B}(M) = AM + MB.$$

2. On suppose que A est diagonalisable et $B = 0$. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

3. On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

Programme officiel (PSI)

Algèbre linéaire - B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (p. 7,8)

Mathématiciens

Hamilton William Stirling (8 mar. 1788 à Glasgow-6 mai 1856 à Edimbourg).
Cayley Arthur (16 août 1821 à Richmond-26 jan. 1895 à Cambridge).