Devoir en temps libre

À rendre le lundi 15/01/2024

■ ■ ■

Exercice 1. Soit

$$\begin{cases} x_n &= \frac{3}{4}x_{n-1} + \frac{1}{4}z_{n-1} \\ y_n &= \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-1} + \frac{1}{4}z_{n-1} \\ z_n &= \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{1}{2}z_{n-1} \end{cases}$$

1. On pose $V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, montrer qu'il existe entier V_n et V_{n-1} une relation de la forme $V_n = SV_{n-1}$ où S est une matrice à déterminer. En déduire V_n en fonction de S et de V_0.

2. Résoudre et discuter en fonction du paramètre réel λ, l'équation $SV = \lambda V$, où $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Pour quelles valeurs de λ, existe-t-il au moins une solution différente de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? donner précisément l'ensemble des solutions correspondantes.

3. On considère les vecteurs

$$\begin{cases} \varepsilon_1 &= 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ \varepsilon_2 &= e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 &= 3e_1 + e_2 - 4e_3 \end{cases}$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Pourquoi peut-on affirmer que P est inversible ? Calculer son inverse P^{-1}.

5. On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$. Calculer PDP^{-1}.

6. En déduire la limite de V_n quand n tend vers $+\infty$.