

T.D. VIII - Intégration

Solution de l'exercice 1.

1. a) 0

b)

2. a) On dérive par rapport à y , puis on évalue en $y = 1$. On obtient $k = f'(1)$.

b) $x \mapsto \lambda x + 4x \ln x$.

c) $f(1) = \lambda = 0$.

d) Non.

3. a) On intègre par rapport à y , sur \mathbb{R}_+^* , puis sur \mathbb{R}_-^* et enfin en 0.

b)

4.

□

I - Primitives & Intégrales

II - Suites d'intégrales

III - Calculs d'intégrales généralisées

IV - Intégrations par parties - Changement de variable

Solution de l'exercice 20. f est continue sur $]0, 1[$.

$f(x) \rightarrow 0$ lorsque x tend vers 0, donc elle est prolongeable par continuité en 0.

Sous réserve d'existence, $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \int_0^1 \frac{u}{\ln(1-u)} du$. Or, $g(u) \rightarrow 1$ lorsque $u \rightarrow 0$ donc g est prolongeable par continuité en 1.

En effectuant le changement de variables $\varphi(u) = e^{-u}$, on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u} du.$$

Or, $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u} du = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$. Ainsi,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u} du = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Or, pour tout ε , il existe ε_0 et M_0 tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et tout $M \geq M_0$, $\left| \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}-1}{t} dt \right| \leq \varepsilon \ln(2)$ et $\left| \int_M^{2M} \frac{e^{-t}}{t} dt \right| \leq \varepsilon \ln(2)$. Ainsi,

$$I = \ln(2).$$

□

V - Calculs d'équivalents