VI - Primitives Stratégie

Lors du calcul de primitives, il est important d'appliquer une stratégie de calculs pour reconnaître la formule à utiliser. Nous présentons et illustrons ces règles ci-dessous, de la plus élémentaire à la plus élaborée. Plutôt que d'écrire « Une primitive de la fonction $f(x) = \cdots$ est la fonction $F(x) = \cdots$ », nous adopterons la notation **non standard** $f(x) \leadsto F(x)$.

I - Fonctions élémentaires



 $\begin{array}{lll} \text{fonction} & \leadsto & \text{primitive} \\ c \in \mathbb{R}, \ c & \leadsto & cx \end{array}$

Exemple 1

 $3 \longrightarrow 3x$

À Savoir

 $\begin{array}{ccc} \text{fonction} & \leadsto & \text{primitive} \\ n \neq -1, \; x^n & \leadsto & \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}$

Exemple 2

À Savoir

fonction \leadsto primitive $\frac{1}{x}$ \leadsto $\ln(x)$

À Savoir

 $\begin{array}{ccc} \text{fonction} & & \leadsto & \text{primitive} \\ a \neq 0, \, \mathrm{e}^{ax} & & \leadsto & \frac{1}{a} \, \mathrm{e}^{ax} \end{array}$

Exemple 3

 $e^x \longrightarrow e^x$ $e^{3x} \longrightarrow \frac{1}{3} e^{3x}$

Chapitre VI - Primitives : Stratégie ECT 2

II - Fonctions composées

À Savoir

fonction \leadsto primitive $\lambda u'(x) \leadsto \lambda u(x)$

Exemple 4

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{3}x^2 & & \leadsto & \frac{1}{3} \times \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{9} \\ 3x^{1/2} & & \leadsto & 3 \times \frac{2x^{3/2}}{3} = 2x^{3/2} \end{array}$$

À Savoir

fonction \leadsto primitive $u'(x) + v'(x) \qquad \leadsto \qquad u(x) + v(x)$

Exemple 5

$$x^{4} + x^{5} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{x^{5}}{5} + \frac{x^{6}}{6}$$

$$e^{3x} + \frac{1}{x} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{e^{3x}}{3} + \ln(x)$$

À Savoir

fonction \leadsto primitive $\lambda u'(x) + \mu v'(x) \qquad \leadsto \qquad \lambda u(x) + \mu v(x)$

Exemple 6

$$3x - 2x^{7} \qquad \rightsquigarrow \qquad 3 \times \frac{x^{2}}{2} - 2 \times \frac{x^{8}}{8} = \frac{3x^{2}}{2} - \frac{x^{8}}{4}$$

$$\frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{x} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{1}{3} \times \frac{e^{3x}}{3} + 2\ln(x) = \frac{e^{3x}}{9} + 2\ln(x)$$

À Savoir

 $\begin{array}{ccc} \text{fonction} & \leadsto & \text{primitive} \\ n \neq -1, \ u'(x)u^n(x) & \leadsto & \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x) \end{array}$

Exemple 7

$$(x+2)^{2} = \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{(x+2)^{2}}_{u(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}(x+2)^{3}$$

$$\underbrace{\frac{1}{(x+3)^{4}}}_{u'(x)} = \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{(x+3)^{-4}}_{u(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{-4+1}(x+3)^{-4+1} = -\frac{1}{3(x+3)^{3}}$$

$$\underbrace{2x}_{u'(x)} \underbrace{(x^{2}+3)^{4}}_{u(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{4+1}(x^{2}+3)^{5} = \underbrace{(x^{2}+3)^{5}}_{5}$$

$$\underbrace{\frac{2x}{(x^{2}+3)^{4}}}_{u'(x)} = \underbrace{2x}_{u'(x)} \underbrace{(x^{2}+3)^{-4}}_{u(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{-4+1}(x^{2}+3)^{-4+1} = -\frac{1}{3(x^{2}+3)^{3}}$$

$$\underbrace{(3x^{2}+2e^{2x})}_{u'(x)} \underbrace{(x^{3}+e^{2x})^{3}}_{u(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3+1}(x^{3}+e^{2x})^{3+1} = \underbrace{(x^{3}+e^{2x})^{4}}_{4}$$

$$\underbrace{(x^{2}+e^{3x})(x^{3}+e^{3x})^{5}}_{u'(x)} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{3}\underbrace{3(x^{2}+e^{3x})}\underbrace{(x^{3}+e^{3x})^{5}}_{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{6}(x^{3}+e^{3x})^{6}$$

À Savoir

 $\begin{array}{ccc} \text{fonction} & \leadsto & \text{primitive} \\ \frac{u'(x)}{u(x)} & \leadsto & \ln|u(x)| \end{array}$

Chapitre VI - Primitives : Stratégie ECT 2

Exemple 8

$$\frac{\frac{1}{x+12}}{\frac{2x+3}{x^2+e^{3x}}} \qquad \qquad \Rightarrow \qquad \ln|x+12| \\
\Rightarrow \qquad \ln\left(x^2+e^{3x}\right) \\
\frac{3x+e^{2x}}{3x^2+e^{2x}} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{2(3x^2+e^{2x})}{3x^2+e^{2x}}}_{u(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\ln\left(3x^2+e^{2x}\right)$$

À Savoir

fonction
$$\leadsto$$
 primitive $u'(x) e^{u(x)} \qquad \leadsto \qquad e^{u(x)}$

Exemple 9

$$(3x + e^{2x}) e^{3x^2 + e^{2x}} = \frac{1}{2} \left(2(3x^2 + e^{2x}) \right) e^{x^2 + e^{3x}} \qquad \Rightarrow \qquad e^{x+12}$$

$$(3x + e^{2x}) e^{3x^2 + e^{2x}} = \frac{1}{2} \left(2(3x^2 + e^{2x}) \right) e^{x^2 + e^{2x}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} e^{3x^2 + e^{2x}}$$

À Savoir

Si la fonction est sous forme d'un **produit** u(x)v'(x), on essaiera d'appliquer la formule d'intégration par parties. Si u et v sont deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur [a, b],

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'(x)v(x) dx.$$

Exemple 10

$$\int_{1}^{x} \underbrace{\ln(t) \cdot \underbrace{1}_{v'(t)} dt}_{u(t)} \cdot \underbrace{t}_{v'(t)} \int_{1}^{x} - \int_{1}^{x} \underbrace{\frac{1}{t}}_{u'(t)} \underbrace{t}_{v(t)} dt = x \ln(x) - (x - 1)$$

$$\int_{0}^{x} \underbrace{t}_{u(t)} \underbrace{e^{t}}_{v'(t)} dt$$

$$= \left[\underbrace{t}_{u(t)} \cdot \underbrace{e^{t}}_{v(t)}\right]_{0}^{x} - \int_{0}^{x} \underbrace{1}_{u'(t)} \underbrace{e^{t}}_{v(t)} dt = x e^{x} - (e^{x} - 1)$$