

I. Normes

Exercice 1. (A) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $\|(x, y)\| = \max\{|x + y|, |x - 2y|\}$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^2 et dessiner sa boule unité fermée.

Exercice 2. [TPE] Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $N(u) = \sup\{|x + ty|, t \in [0, 1]\}$.

1. Montrer que $N(u) = \max\{|x|, |x + y|\}$, puis que N est une norme.
2. Soit B la boule unité de N . Trouver le plus petit disque euclidien centré en 0 contenant B et le plus grand disque euclidien centré en 0 contenu dans B .

On pourra commencer par représenter graphiquement la boule unité.

Exercice 3. E désigne l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, lipschitziennes. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{(x, y) \in [0, 1]^2, x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

Montrer que N est une norme sur E .

Exercice 4. [IMT] On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^1

de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour $f \in E$, on note $N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'^2(t) dt}$.

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de réel a strictement positif tel que : $\forall f \in E$, $N(f) \leq a\|f\|_\infty$.

Exercice 5. Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in \mathcal{G}_n(\mathbb{C}), \|PAP^{-1}\| = \|A\|.$$

Exercice 6. (A) Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $f \in E^*$ non nulle. On note $H = \text{Ker } f$ et $\|f\| = \sup_{a \in \overline{\mathcal{B}}(0, 1)} |f(a)|$. Soit $x \in E$.

1. Montrer que pour tout $y \in H$, $|f(x)| \leq \|f\| \|x - y\|$.

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \overline{\mathcal{B}}(0, 1)$ tel que

$$\|f\| - \varepsilon \leq |f(a)|.$$

3. En déduire que $d(x, H) = \inf_{y \in H} \|x - y\| = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.

Indication : On pourra poser $h = x - \frac{f(x)}{f(a)}a$.

II. Topologie générale

Exercice 7. Déterminer si les ensembles suivants sont des fermés.

1. $\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.
2. $\{(-1)^{n+1} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.
3. $\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}, (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$.

Exercice 8. Soient A et B deux parties de \mathbb{R}^n .

1. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Montrer que, en général, il n'y pas égalité.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 9. (A) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. On suppose que (A^k) converge vers une matrice P et (B^k) converge vers une matrice Q . Montrer que P et Q commutent.

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que (A^k) converge vers une matrice B . Montrer que B est la matrice nulle.

Exercice 11. [CCP] Soit E l'ensemble des suites numériques réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum x_n^2$ converge.

1. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{N}}$, montrer que $2|ab| \leq a^2 + b^2$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espaces des suites numériques réelles.

3. Soit $\varphi : ((x_n), (y_n)) \in E^2 \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \in \mathbb{R}$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E ; En déduire que $\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2}$ est l'expression d'une norme, notée N , sur E .

4. Montrer que, pour (x_n) dans E , la suite $(x_n + x_{n+1})$ l'est aussi.

5. Soit $g : (x_n) \in E \mapsto (x_n + x_{n+1}) \in E$. Montrer que g est lipschitzienne pour la norme N .

Exercice 12. (\clubsuit , \heartsuit) [Mines] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique. On note $G_f = \{T \in \mathbb{R} ; \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$.

1. On suppose que f est continue. Montrer que G_f est un fermé.

2. Donner un exemple de fonction pour laquelle $G_f = \mathbb{Q}$.

3. Soit f une fonction 1 et $\sqrt{2}$ périodique. Montrer que $f(x) = f(0)$ possède une infinité de solutions dans $]0, \pi/2[$.

Exercice 13. [Mines] Soient E un espace vectoriel normé, $\|\cdot\|$ une norme sur E . Pour tout $A \subset E$ et $x \in E$, on définit $d(x, A) = \inf \{d(x, y), y \in A\}$.

1. Soit F un fermé non vide de E . Montrer que x appartient à $E \setminus F$ si et seulement si $d(x, F) > 0$.

2. Montrer que tout ouvert de E est réunion dénombrable de fermés.

III. Avec Python

Exercice 14. [Centrale 2] La matrice $M = (m_{i,j})$ est dite à diagonale strictement positive (abrégé en DSP) si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |m_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |m_{i,j}|.$$

1. Écrire un programme `est_dsp(M)` qui renvoie `True` si M est à DSP et `False` sinon.

2. Trouver une matrice de $O_2(\mathbb{R})$ qui ne soit pas à DSP; tester le programme sur cette matrice.

3. Les matrices à DSP sont-elles stables par produit?

4. Pour tout vecteur X , on note $\|X\|_\infty = \sup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$. Soit M à DSP. Montrer que si $X \neq 0$, alors $MX \neq 0$. Qu'en déduire sur M ?

5. Écrire une fonction `rmin` déterminant

$$r_{min} = \inf \left\{ |m_{i,i}| - \sum_{j=1, j \neq i}^n |m_{i,j}|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

6. Prouver que l'ensemble des matrices à DSP est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.