■ Chapitre 17 ■
Fonctions vectorielles, Arcs paramétrés

Notations.
■ I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
■ L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.
■ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire et $\|\cdot\|_2$ la norme associée.
■ f désigne une fonction de I vers $\mathbb{R}^n$.

I. Régularité

I.1 Dérivabilité

Définition 1 (Dérivabilité).
Soit $x_0 \in I$. La fonction f est *dérivable* au point x_0 si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

* son taux d'accroissement en x_0 admet une limite finie lorsque x tend vers x_0, i.e. il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0)) = \ell.$$

* la fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, i.e. il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $f(x) = a + (x - x_0)b + o(x - x_0)$.

La limite du taux d'accroissement est notée $f'(x_0)$. Alors, $f(x_0) = a$ et $f'(x_0) = b$.

Propriété 1 (Applications coordonnées).
Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $x_0 \in I$. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est dérivable en x_0.

Exercice 1. Déterminer la dérivée des fonctions

1. $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$.

2. $g : t \mapsto (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))$.

Définition 2 (Dérivabilité sur un intervalle).
La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

I.2 Dérivabilité & Opérations

Théorème 1 (Structure d'espace vectoriel).
Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda f + g$ est dérivable en x_0 et

$$(\lambda f + g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + g'(x_0).$$

Théorème 2 (Applications linéaires).
Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ une application linéaire. Si f est dérivable en x_0, alors $u \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(u \circ f)'(x_0) = u \circ f'(x_0).$$

Exercice 2. Soit ω un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $f : t \mapsto (1, t^2, t^3)$, où $\mathbb{R}^3$ est orienté par la base canonique. Déterminer la dérivée de la fonction $g : t \mapsto \omega \wedge f(t)$.

Théorème 3 (Applications bilinéaires).

Soit ψ une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Si f et g sont dérivables en x_0, alors $\psi(f,g)$ est dérivable en x_0 et

$$\psi(f,g)'(x_0) = \psi(f',g)(x_0) + \psi(f,g')(x_0).$$

Exercice 3.

1. Soient f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ orienté par la base canonique. Déterminer la dérivée de la fonction $h : t \mapsto f(t) \wedge g(t)$.

2. Soient M et N deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, à dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la dérivée de $h : t \mapsto M(t) \cdot N(t)$.

Corollaire 4.

Soient f et g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}^2$. Les fonctions $\langle f, g\rangle$ et $\det(f,g)$ sont dérivables et satisfont, pour tout réel $t \in I$,

$$\begin{aligned}
\langle f,g\rangle' &= \langle f',g\rangle + \langle f,g'\rangle,\\
\|f\|_2'(t) &= \frac{\langle f(t), f'(t)\rangle}{\|f(t)\|_2} \text{ ssi } f(t) \neq (0,0),\\
\det(f,g)' &= \det(f',g) + \det(f,g').
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation différentielle $y'' = ay' + by$. En utilisant la bilinéarité du déterminant, déterminer une équation différentielle satisfaite par $W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$.

I.3 Classe $\mathscr{C}^k$

Définition 3 (Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$).

Soit $k \in \mathbb{N}$. Sous réserve d'existence, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f est définie par

$$f^{(0)} = f,\ f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'.$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ si $f^{(k)}$ existe et est continue. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si toutes ses dérivées existent.

Propriétés 2.

Soient f, g deux fonctions dérivables k fois, λ un réel, u une application linéaire et ψ une application bilinéaire. Alors, $\lambda f + g$, $u \circ f$ et $\psi(f,g)$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ et

(i). $(\lambda f + g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + g^{(k)}$.

(ii). $(u \circ f)^{(k)} = u \circ f^{(k)}$.

(iii). $\psi(f,g)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \psi(f^{(k-j)}, g^{(j)})$.

II. Arc paramétré

II.1 Définition

Définition 4 (Arc paramétré, Support).

Soit $k \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}^2$. Le couple (I,f) est un *arc paramétré*, ou *courbe paramétrée*, de classe $\mathscr{C}^k$.

L'ensemble $f(I) = \{f(t),\, t \in I\}$ est le *support* de la courbe (I,f).

Exercice 5.

1. Décrire le cercle trigonométrique à l'aide d'un arc paramétré.

2. Que dire du mouvement d'une particule dont la trajectoire f satisfait $\langle f', f'' \rangle = 0$?

3. Comment caractériser un mouvement à accélération centrale à l'aide des vecteurs f et f'' ?

II.2 Tangentes

Notation.
Dans toute la suite, $\Gamma = (I, f)$ désigne un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^2$. Pour tout $t \in I$, le point du plan de coordonnées $f(t)$ sera noté M_t. Le réel t_0 désigne un élément de I.

Définition 5 (Point régulier / singulier).
Le point M_{t_0} est dit
- (i). *régulier* si $f'(t_0) \neq (0, 0)$,
- (ii). *stationnaire* ou *singulier* si $f'(t_0) = (0, 0)$.

Exercice 6. Déterminer les points réguliers de

1. Cercle.
$f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$.

2. Cycloïde.
$g : t \mapsto (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))$.

3. $h : t \mapsto \left(2t - \frac{1}{t^2}, 2t + t^2\right)$.

4. $u : t \mapsto \left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{2t-1}{t^2}\right)$.

Définition 6 (Tangente).
L'arc Γ admet une *tangente* au point M_{t_0} s'il existe une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ telle que la fonction $t \mapsto \left(\frac{1}{u(t)}\overrightarrow{M_t M_{t_0}}\right)$ admette une limite non nulle $\overrightarrow{v}$ en t_0. La droite passant par M_{t_0} et dirigée par ce vecteur $\overrightarrow{v}$ est la *tangente* en M_{t_0} à Γ.

Proposition 3 (Tangente en un point régulier).
Si M_{t_0} est un point régulier, l'arc Γ admet une tangente au point M_{t_0} dirigée par le vecteur de coordonnées $f'(t_0)$.

Exercice 7. Soit $v \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$. Déterminer, en tout point, un vecteur directeur de la tangente pour les courbes :

1. $w : t \mapsto (t, v(t))$.

2. $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$.

3. Lemniscate de Bernoulli.
$v : t \mapsto \left(\frac{t}{t^4+1}, \frac{t^3}{t^4+1}\right)$.

Théorème 5.
S'il existe un plus petit entier $p \in [\![1, k]\!]$ tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$. La droite passant par le point M_{t_0} de coordonnées $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f^{(p)}(t_0)$ est la *tangente* à Γ en M_{t_0}.

Exercice 8. Déterminer, en tout point singulier, un vecteur directeur de la tangente de :

1. $g : t \mapsto (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))$.

2. $h : t \mapsto \left(2t - \frac{1}{t^2}, 2t + t^2\right)$.

3. $u : t \mapsto \left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{2t-1}{t^2}\right)$.

Notation.
On suppose dans la suite que $k \geqslant 2$.

Définition 7 (Repère local).
On suppose qu'il existe deux entiers minimaux $0 < p < q \leqslant k$ tels que $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ soient non colinéaires. Alors, $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ est le *repère local*.
- (i). Si p est impair et q est pair, le point $M(t_0)$ est un point *ordinaire*.
- (ii). Si p est impair et q est impair, le point $M(t_0)$ est un point d'*inflexion*.
- (iii). Si p est pair et q est impair, le point $M(t_0)$ est un point de *rebroussement de première espèce*.

(*iv*). Si p est pair et q est pair, le point $M(t_0)$ est un point de *rebroussement de seconde espèce*.

Exercice 9. Tracer l'allure, au voisinage des points singuliers, des arcs :

1. $t \mapsto \left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{2t-1}{t^2}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

2. $t \mapsto (t^2+t^3, \frac{t^3}{1+t})$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

II.3 Branches infinies

Notations.

- t_0 désigne une des bornes de l'intervalle I, ou les quantités $+\infty$ et $-\infty$.
- On note $f : t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$.

Définition 8 (Branche infinie, Direction asymptotique).

(i). L'arc Γ possède une *branche infinie* en t_0 si $\lim\limits_{t\to t_0} \|f(t)\| = +\infty$.

(ii). L'arc Γ admet une *direction asymptotique* de pente $m \in \mathbb{R}$ en t_0 si

$$\lim_{t\to t_0} \|f(t)\| = +\infty \text{ et } \lim_{t\to t_0} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = m.$$

Définition 9 (Asymptote, Branche parabolique).

Soit Γ un arc paramétré de direction asymptotique m au point t_0.

(i). Si $f_2 - mf_1$ a une limite finie p en t_0, la droite d'équation $y = mx+p$ est dite *asymptote* à l'arc paramétré en t_0.

(ii). Si $f_2 - mf_1$ a une limite infinie en t_0, l'arc paramétré possède une *branche parabolique* de pente m en t_0.

II.4 Tracé d'un arc paramétré

Notation.

- $f : t \mapsto (x(t), y(t))$ désigne un arc paramétré.
- $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ désigne un repère orthonormé direct du plan euclidien orienté.

1. Recherche de l'intervalle de définition $\mathscr{D}$ de l'arc paramétré.

2. Réduction de l'intervalle d'étude en utilisant les symétries.
Généralement, on teste les changements de paramétrage

- $u = -t$, réduction à $\mathscr{D} \cap \mathbb{R}_+$,
- $u = 2t_0 - t$, réduction à $\mathscr{D} \cap [t_0, +\infty[$,
- $u = \frac{1}{t}$, réduction à $\mathscr{D} \cap]0, 1]$.

Propriété		Symétrie
$x(u) = x(t)$	$y(u) = y(t)$	identité
$x(u) = x(t) + a$	$y(u) = y(t) + b$	translation $a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$
$x(u) = -x(t)$	$y(u) = y(t)$	axe $(O, \overrightarrow{j})$
$x(u) = x(t)$	$y(u) = -y(t)$	axe $(O, \overrightarrow{i})$
$x(u) = -x(t)$	$y(u) = -y(t)$	centre O
$x(u) = y(t)$	$y(u) = x(t)$	axe première bissectrice

3. Régularité & Variations : étude des variations de x et y, tracé du tableau des variations (incluant les tangentes remarquables).

4. Étude des points stationnaires (Utilisation de la formule de Taylor-Young).

5. Étude des branches infinies : $\lim\limits_{t_0} \|f\| = +\infty$ (Utilisation de développements asymptotiques).

<table>
<tr><td>$\lim\limits_{t_0} |x(t)|$</td><td>$\lim\limits_{t_0} |y(t)|$</td><td>Comportement</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>y_0</td><td>asymptote $y = y_0$</td></tr>
<tr><td>x_0</td><td>$+\infty$</td><td>asymptote $x = x_0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{t_0} \frac{|y|}{|x|} = +\infty$</td><td>branche parabolique, direction (Oy)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{t_0} \frac{|y|}{|x|} = 0$</td><td>branche parabolique, direction (Ox).</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{t_0} \frac{y}{x} = a \in \mathbb{R}^\star$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$\lim\limits_{t_0} y - ax = \infty$</td><td>branche parabolique, direction $y = ax$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{t_0} y - ax = b$</td><td>asymptote $y = ax + b$</td></tr>
</table>

Si une des limites précédentes n'existe pas, on ne peut en général rien conclure.
Position par rapport aux asymptotes.

6. Recherche éventuelle des points doubles.
Recherche des solutions du système d'équations $x(t) = x(u)$, $y(t) = y(u)$, $t \neq u$.

7. Tracé (mise en valeur des tangentes et points remarquables, on pourra préciser le sens des t croissants).

Exercice 10. Étudier les courbes paramétrées :

1. $f(t) = \left(t^2 + t^3, \frac{t^3}{1+t}\right)$.

2. $g(t) = (\cos(3t), \sin(2t))$.

III. Propriétés métriques

Notation.

■ Γ désigne un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^k$ dont tous les points sont supposés réguliers, i.e. $f'(t_0) \neq (0,0)$.

Définition 10 (Longueur d'arc).

Soient t_1, $t_2 \in I$ tels que $t_1 \leqslant t_2$. Le réel $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \left\|f'(t)\right\|_2 \, dt$ est la *longueur d'arc* (M_{t_1}, M_{t_2}).

Exercice 11.

1. Calculer la longueur du segment de droite $t \mapsto (t, at+b)$ compris entre les paramètres 0 et 1.

2. Calculer la longueur du cercle unité.

3. Déterminer la distance parcourue par la valve du pneu d'un vélo lorsque celui-ci parcourt un tour.

Programme officiel (PSI)

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés (p. 16)