I. Arithmétique des entiers naturels

Exercice 1. [X] Soit $n = 101010\cdots0101$ avec 2016 zéros. Montrer que n n'est pas premier.

II. Polynômes

Exercice 2. [ENSAM] Soit P un polynôme à coefficients réels.

1. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) + P'(x) \geqslant 0$. Montrer que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. On suppose maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) - P''(x) \geqslant 0$. Montrer que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On suppose ici que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) - P'(x) - P''(x) + P'''(x) \geqslant 0$. Peut-on dire que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Exercice 3. [Mines] Déterminer les nombres complexes solutions de l'équation $1 + 2z + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Exercice 4. Soient n un entier naturel non nul et $P = \frac{1}{n!}X^n(4-2X)^n$. Montrer que toutes les dérivées de P en 0 et en 2 sont des nombres entiers.

Exercice 5. (Polynôme réciproque) [Centrale] Un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de degré n est réciproque si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = a_{n-k}$.

1. Montrer que P est réciproque si et seulement si $P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

Dans toute la suite, P désigne un polynôme réciproque.

2. Montrer que, si 1 est racine de P, alors sa multiplicité est strictement supérieure à 1.

3. Discuter de la racine -1.

4. Montrer que tout polynôme réciproque de degré pair s'écrit sous la forme $P = a_{2p} \prod_{k=0}^{p} (X^2 - \alpha_k X + 1)$.

5. Que dire si P est réciproque de degré impair ?

Exercice 6. [Mines] Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal tel que le reste de la division de P par

$$X^2 + X + 1 \text{ soit } X - \frac{1}{2} \text{ et celui par } X^2 - X + 1 \text{ soit } -X + \frac{1}{2}.$$

III. Avec Python

Exercice 7. [Centrale] Soient $P = X^2 - X + 41$ et $T = X^2 - 79X + 1601$.

1. Soit $p = P(42)$ et $t = T(80)$. Écrire une suite d'instructions `Python` pour vérifier que pour tout $k \in [\![-15, 15]\!]$, l'entier $P(42 + kp)$ est divisible par p et l'entier $T(80 + kt)$ est divisible par t.

2. Soient P un polynôme non constant à coefficients entiers et n, k deux entiers. On suppose que $m = P(n)$ est non nul. Montrer que $P(n + km)$ est divisible par m.

3. Écrire une fonction `est_premier` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie `True` si n est premier, `False` sinon.

On rappelle que n est premier si et seulement si les restes de la division euclidienne de n par k, pour $k \in [\![2, \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!]$ sont tous non nuls.

4. Vérifier que $P(n)$ est premier pour tout $n \in [\![0, 40]\!]$, ainsi que $T(n)$ pour tout $n \in [\![0, 79]\!]$. Est-ce encore vrai pour $P(41)$ et $T(80)$?

5. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme Q non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $|Q(n)|$ soit premier pour tout entier naturel n.

Euler *exhiba en 1772 le polynôme $P(X) = X^2 - X + 41$ pour lequel, pour tout $n \in [\![0, 39]\!]$, $P(n)$ est un nombre premier. Cependant, $P(40) = 41^2$ n'est pas premier. La recherche de polynômes prenant des valeurs premières est encore d'actualité. Ces équations permettent de caractériser des nombres répartis selon des diagonales dans la spirale d'***Ulam**.