

II - Intégrale sur un segment

Révisions

- Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$c, c \in \mathbb{R}$	0
$x^a, a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^{ax}	$a e^{ax}$

- Règles de dérivation :

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$c \cdot u(x), c \in \mathbb{R}$	$c \cdot u'(x)$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$u^n(x)$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$
$u(v(x))$	$v'(x)u'(v(x))$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$

- Interprétation de l'intégrale des fonctions positives comme aire entre la courbe et l'axe des abscisses..

I - Primitives

Définition 1 - Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Une *primitive* de f est une fonction dérivable F sur I telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 1

Soit $F(x) = x \ln(x) - x$ définie sur $]0, +\infty[$. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors F est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Ainsi, F est une primitive de \ln sur $]0, +\infty[$.

Exercice 1. Déterminer la fonction dont $F(x) = \frac{x^3}{12} + 4x^2 + 1$ est une primitive.

Théorème 1 - Primitives de fonctions continues

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives. Si F et G sont des primitives d'une fonction f continue sur I , alors il existe un réel c tel que $\forall x \in I, F(x) = G(x) + c$.

Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles ⚙️

Fonction f	Primitive F
$c, c \in \mathbb{R}$	cx
$x^a, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$e^{ax}, a \neq 0$	$\frac{1}{a} e^{ax}$

Exercice 2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. x^5 . 2. $\frac{3}{x}$. 3. e^{3x} . 4. $\frac{1}{x^5}$.

Proposition 2 - Primitive de fonctions composées ⚙️Soit u une fonction dérivable telle que u' soit continue.

Fonction f	Primitive F
$\lambda u'(x)$	$u(x)$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x)$
$u'(x)u^a(x), a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} u^{a+1}(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$

Exercice 3. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $\frac{1}{3x}$. 5. $\frac{1}{x} \ln^4(x)$.
 2. $e^{2x} + \sqrt{x}$. 6. $\frac{2x+1}{x^2+x}$.
 3. $3e^{2x} + 5\sqrt{x}$. 7. $\frac{x+1}{x^2+2x}$.
 4. $\frac{1}{x} \ln(x)$. 8. $(3x^2 + 4)e^{x^3+4x}$.

II - Intégrale d'une fonction continue**Définition 2 - Intégrale d'une fonction continue** ⚙️

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f .
 L'intégrale de f sur $[a, b]$ est le réel défini par

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple 2

En utilisant les primitives usuelles,

- $\int_1^2 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$.
- $\int_0^1 (3x^2 + 4)e^{x^3+4x} dx = [e^{x^3+4x}]_0^1 = e^5 - 1$.

Exercice 4. Exprimer simplement les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 x^3 dx$. 3. $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.
 2. $\int_3^4 e^{2x} dx$. 4. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4} dx$.

Théorème 2 - Intégrale et Primitive ⚙️

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en
 a . En particulier, pour tout réel $x > a$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 3

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x e^t dt$. La
 fonction F est dérivable et $F'(x) = e^x$. Ainsi, F' est positive et
 F est croissante.

III - Propriétés de l'intégrale

Proposition 3 - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c des réels de I . Alors,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Exemple 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 1$ et $f(x) = x - 1$ sinon. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) \, dx &= \int_{-1}^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 0 \, dx + \int_1^2 (x - 1) \, dx \\ &= 0 + \left[\frac{(x-1)^2}{2} \right]_1^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Proposition 4 - Linéarité de l'intégrale

Soit f, g des fonctions continues sur $[a, b]$ et α, β des réels. Alors,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$

Exemple 5

En utilisant les primitives usuelles,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{12}{x} + 5x^3 \right) \, dx &= 12 \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx + 5 \int_1^2 x^3 \, dx \\ &= 12 [\ln(x)]_1^2 + 5 \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 \\ &= 12 (\ln(2) - \ln(1)) + 5 \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= 12 \ln(2) + \frac{5}{4} \cdot 15. \end{aligned}$$

Exercice 5. Calculer $\int_0^1 2e^x + 3x^2 \, dx$.

Proposition 5 - Croissance de l'intégrale (I)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $a \leq b$ et, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.

Exemple 6

Soit $F(x) = \int_0^x e^t \, dt$ et $0 \leq x \leq y$. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^y e^t \, dt = \int_0^x e^t \, dt + \int_x^y e^t \, dt \\ &= F(x) + \int_x^y e^t \, dt \end{aligned}$$

Or, $e^t \geq 0$ pour tout $t \in [x, y]$ et $x \leq y$, donc $\int_x^y e^t \, dt \geq 0$. Ainsi, $F(x) \leq F(y)$ et F est croissante.

Exercice 6. Montrer que $F(x) = \int_3^x (t^2 - 2t + 1) \, dt$ est croissante.

Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (II)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Si, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.

Exemple 7

Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \, dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x} \right) \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} \, dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{(x-1)}_{\leq 0} \underbrace{\frac{x^n}{1+x}}_{\geq 0} \, dx. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq 1$, les bornes de l'intégrale sont bien ordonnées. Comme la fonction intégrée est négative, alors $I_{n+1} - I_n \leq 0$, soit $I_{n+1} \leq I_n$.

La suite (I_n) est donc décroissante.

Théorème 3 - Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Exemple 8 - ⚙️

- Calculons $\int_1^2 x e^{2x} \, dx$.

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{2x}$. Alors, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$. Comme u, v sont dérivables et u', v' sont continues sur $[1, 2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^2 x e^{2x} \, dx &= \left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} \, dx \\ &= \frac{2e^4}{2} - \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_1^2 \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} \\ &= \frac{3e^4}{4} - \frac{e^2}{4}. \end{aligned}$$

- Calculons $\int_1^2 \ln(x) \, dx$.

Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. Alors, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$. Comme u, v sont dérivables et u', v' sont conti-

nues sur $[1, 2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x) \, dx &= [\ln(x)x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= 2 \ln(2) - 1 \ln(1) - \int_1^2 1 \, dx \\ &= 2 \ln(2) - [x]_1^2 \\ &= 2 \ln(2) - 2 + 1 \\ &= 2 \ln(2) - 1.\end{aligned}$$

Exercice 7. Calculer

1. $\int_0^1 x e^x \, dx.$

2. $\int_0^1 x^2 e^x \, dx.$

3. $\int_0^1 x \ln(x) \, dx.$