

# T.D. VI - Espaces vectoriels

## I - Systèmes linéaires

**Exercice 1.** Résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{array}{ll}
 1. (\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 2 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases} & 4. (\mathcal{S}_4) \begin{cases} x + y + z = 5 \end{cases} \\
 2. (\mathcal{S}_2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases} & 5. (\mathcal{S}_5) \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases} \\
 3. (\mathcal{S}_3) \begin{cases} 2x - y + 4z = 2 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases} & 6. (\mathcal{S}_6) \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 8 \\ -x + 2y + 4z = -11 \end{cases}
 \end{array}$$

**Exercice 2.** Identifier les réels  $\lambda$  pour lesquels le système d'équations suivant possède une solution.

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

## II - Familles de vecteurs

**Exercice 3.** Soit  $n \geq 3$ . Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- $E_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 = 0 \text{ ET } x_2 = 0\}$
- $E_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + x_2 = 0\}$
- $E_3 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 \neq 0\}$
- $E_4 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 = x_2\}$
- $E_5 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 x_2 = 0\}$

**Exercice 4. (Familles libres)** Montrer que les familles suivantes sont libres :

- $((-1, -1, 1, 2), (1, -1, 1, 5)).$
- $((8, 4, 1, -2), (1, 3, 0, 5)).$
- $((1, 1, 3, 2), (1, -1, 1, 3), (0, 1, 5, 2)).$
- $((1, 2, 3, 4), (-1, 3, 2, 1), (2, 1, -1, 1)).$

**Exercice 5. (Familles génératrices)** Déterminer une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

- $F_1 = \{(2\lambda, -\lambda, -3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}.$
- $F_2 = \{(2\lambda, 0, -3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}.$
- $F_3 = \{(2\lambda + \mu, 2\mu, 3\lambda - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$
- $F_4 = \{(2\lambda + \mu, 5\lambda + 2\mu, 3\lambda - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$

**Exercice 6. (Bases)** Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x - 3y + z = 0\}.$
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 4x + y + z = 0 \text{ ET } 3x + z = 0\}.$
- $F_3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases} \right\}.$
- $F_4 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ x + y - t = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \right\}.$

**Exercice 7. (Équations cartésiennes)** Pour chacune des questions suivantes, déterminer une équation cartésienne de l'espace vectoriel.

- $F_1 = \text{Vect} \{(1, 1, 2), (1, 0, 1)\}.$
- $F_2 = \text{Vect} \{(1, 2), (4, 6)\}.$
- $F_3 = \text{Vect} \{(1, 0, 1), (2, 3, 1)\}.$
- $F_4 = \text{Vect} \{(1, 1, 1)\}.$

**Exercice 8. (Coordonnées)**

1. Montrer que  $\mathcal{B}_1 = ((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer les coordonnées du vecteur  $(8, 4, 2)$  dans cette base.
2. Montrer que  $\mathcal{B}_2 = ((-1, -1, 1), (1, -1, 1), (2, 2, -1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer les coordonnées du vecteur  $(8, 4, 2)$  dans cette base.
3. Soit  $\mathcal{B} = ((-1, -1, 1), (2, 2, -1))$  et  $F = \text{Vect } \mathcal{B}$ . Déterminer les coordonnées de  $(3, 3, -1)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**III - Questions plus théoriques**

**Exercice 9.** Soit  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Montrer que  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
2. On note  $F + G = \{f + g, (f, g) \in F \times G\}$ . Montrer que  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
3. Montrer que, en général,  $F \cup G$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

*Indication : Exhiber un contre-exemple lorsque  $n = 2$ .*

**Exercice 10.** Soit  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + \dots + x_n = 0\}$ . Déterminer la dimension et une base de  $F$ .

**IV - Calcul matriciel**

**Exercice 11.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$B = A - bJ$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Déterminer  $J^n$ .
2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer  $A^n$ .

**Exercice 12.** Soit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = A - I_3$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $B^n$ .
2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer  $A^n$ .

**V - Matrices & Espaces vectoriels**

**Exercice 13.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; AM = MA\}$  l'ensemble des matrices qui commutent avec  $A$ .

1. Donner des exemples de matrices appartenant à  $\mathcal{C}(A)$ .
2. Montrer que  $\mathcal{C}(A)$  est un espace vectoriel.

**Exercice 14.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que la famille  $(I_2, A)$  est libre.
2. Exprimer  $A^2$  en fonction de  $I_2$  et de  $A$ .
3. En déduire la dimension de l'espace vectoriel  $F = \text{Vect } \{I_2, A, A^2\}$ .

**Exercice 15.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $F = \text{Vect } \{I_3, A, A^2\}$ .

1. Montrer que  $(I_3, A, A^2)$  est une famille libre et en déduire la dimension de  $F$ .
2. Calculer  $A^3 - 3A^2 - 4A + 3I_3$ .
3. Montrer que  $A$  est inversible et montrer que  $A^{-1} \in F$ .
4. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $A^n \in F$ .
5. En déduire la dimension de  $\text{Vect } \{A^k, k \in \mathbb{N}\}$ .

**Exercice 16. (☞)** On note  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de taille 3.

1. Montrer que  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer une base de  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ .
3. En déduire la dimension de  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ .
4. Généraliser les questions précédentes à l'ensemble  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  des matrices symétriques de taille  $n$ .

**Exercice 17. (☞)** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ . Montrer que la famille  $(I_3, A, A^2, A^3, \dots, A^9)$  est liée.