T.D. VI - Calculs de sommes
Séries numériques

I - Calculs de sommes

Exercice 1. (Sommes à étendre, ⚙) Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{5} 3$.

2. $\sum_{n=3}^{5} 10$.

3. $\sum_{\ell=1}^{7} \ell$.

4. $\sum_{\ell=2}^{5} \ell^2$.

5. $\sum_{k=12}^{27} k$.

Exercice 2. (Sommes géométriques, ⚙) Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=5}^{12} 2^k$.

2. $\sum_{n=3}^{10} (-1)^n$.

3. $\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{2^{2n}}$.

4. $\sum_{n=1}^{4} \frac{3^{2n+1}}{2^{2n}}$.

5. $\sum_{\ell=1}^{5} (3^\ell - 2)$.

6. $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{5^k} + \frac{1}{4^k}\right)$.

7. $\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k+4^k}{5^k}$.

Exercice 3. (⚙) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.

2. Calculer $\sum_{k=0}^{10} u_k$.

Exercice 4. (⚙) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $w_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{5}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer w_n en fonction de n.

2. Calculer $\sum_{k=5}^{21} w_k$.

II - Sommes télescopiques

Exercice 5. (⚙) Pour tout n entier naturel, on pose $w_n = \frac{1}{2^n}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} w_n.$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 6. (⚙) Pour tout n entier naturel, on pose $w_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} w_n.$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7. (⚙) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour tout n entier naturel, exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 8. (⚙) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels telle que $v_0 = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, v_{n+1} - v_n = (-8)^n.$$

Pour tout n entier naturel, exprimer v_n en fonction de n.

Exercice 9. (➶) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $b_n = n3^{n-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $2b_n = b_{n+1} - b_n - 3^n$.

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} 3^k$.

3. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}$.

4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1}=\frac{(n+1)3^n}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3^{n+1}}{4}.$$

Exercice 10. Pour tout $k\geqslant 1$, on pose $u_k=\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

1. Exprimer u_k en fonction de $\ln(k+1)$ et $\ln(k)$.

2. À l'aide d'une somme télescopique, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

3. En déduire la nature (et éventuellement la somme) de la série $\sum u_k$.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1}=u_n\,\mathrm{e}^{-1/u_n}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $-\ln(u_{n+1})=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k}$.

III - Séries géométriques... et plus

Exercice 12. Vérifier la convergence puis calculer les sommes suivantes :

1. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{5^k}$.

2. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{3^k}{5^k}$.

3. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}}$.

4. $\sum\limits_{\ell=0}^{+\infty}\frac{3^{2\ell+1}}{10^\ell}$.

5. $\sum\limits_{\ell=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^\ell$.

6. $\sum\limits_{\ell=3}^{+\infty}\frac{2^{2\ell+1}}{3^{3\ell}}$.

Exercice 13. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n=5\times\left(\frac{1}{7}\right)^n+\frac{2}{3}$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la série de terme général $\alpha-u_n$ converge. Donner la valeur de ce réel α_0.

2. En déduire la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\alpha_0-u_n)$.

Exercice 14. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\alpha$. Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha=\frac{1}{4}$.

Exercice 15. Pour tout n entier naturel, on pose

$$p_n=\frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

1. Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}$ convergent.

2. Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p_n=1$.

Exercice 16. Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n}k\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-\sum\limits_{k=1}^{n}k\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$.

2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}=\sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}.$$

3. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n}k\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}-n\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$.

4. En utilisant les questions précédentes, calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$.