

■ Chapitre 9 ■

Séries entières

Notation.

■ $\mathcal{B}(0, \rho)$ désigne la boule euclidienne (sur \mathbb{C}) centrée en 0 et de rayon ρ .

I. Rayon de convergence des séries entières

I.1 Définition

Définition 1 (Série entière).

Soit (a_n) une suite de nombres complexes. La série $\sum a_n z^n$ est la *série entière* de la variable complexe z . Les nombres a_n sont les *coefficients* de la série entière.

Exercice 1. Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} 1. \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \forall z \in \mathcal{B}(0, 1). \\ 2. \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \forall x \in]-1, 1[. \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3. \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \forall x \in]-1, 1[. \\ 4. e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \forall z \in \mathbb{C}. \end{array}$$

Lemme 1 (Lemme d'ABEL).

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout nombre complexe z ,

$$|z| < |z_0| \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ converge absolument.}$$

Propriété 1.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}_+ ; (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle de \mathbb{R}_+ contenant 0.

Définition 2 (Rayon de convergence).

Le *rayon de convergence* de la série $\sum a_n z^n$ est le réel

$$\rho = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ ; (a_n r^n) \text{ est bornée}\},$$

où $\rho = +\infty$ si l'ensemble n'est pas borné.

Dans le cas où la variable est complexe, le *disque ouvert de convergence* est le disque $\mathcal{B}(0, \rho)$.

Dans le cas où la variable est réelle, l'*intervalle ouvert de convergence* est l'intervalle $] -\rho, \rho[$.



Exercice 2.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries exponentielle et géométrique.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum n z^n$ et de $\sum \frac{1}{n} z^n$.
3. Déterminer le rayon de convergence de $\sum n! z^n$ et de $\sum \sin(n) z^n$.

Propriété 2 (Convergence & Rayon de convergence).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ . Alors, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$,

(i). si $z_0 \in \mathcal{B}(0, \rho)$, alors la série $\sum a_n z_0^n$ converge absolument.

(ii). si $|z_0| > \rho$, alors $\sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement.



Exercice 3. Étudier les séries $\sum n z^n$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ et $\sum \frac{z^n}{n}$ sur les extrémités de leur intervalle de convergence.

I.2 Détermination pratique du rayon de convergence

Théorème 1 (Théorème de comparaison).



Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs ρ_a et ρ_b .

- (i). Si $a_n = O(b_n)$, alors $\rho_a \geq \rho_b$.
- (ii). Si $a_n \sim b_n$, alors $\rho_a = \rho_b$.
- (iii). Si $a_n = nb_n$, alors $\rho_a = \rho_b$.

Exercice 4. Déterminer les rayons de convergence et la somme des séries $\sum \frac{n^3}{n!} z^n$ et $\sum \frac{n!}{n!} z^n$.

Propriété 3 (Règle de d'ALEMBERT).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que, à partir d'un certain rang, le coefficient a_n est non nul et qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$ tende vers ℓ . Alors, le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut $\frac{1}{\ell}$.

Exercice 5.

1. Reprendre les exemples précédents.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières de coefficient

a) $\frac{\sinh(n)}{\cosh(n)^2}$.

b) $\frac{\sin(\theta/n)}{n!}$.



3. Soit (a_n) la suite définie pour tout n entier naturel par $a_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}$ et $a_{2n+1} = \frac{1}{3^{2n+1}}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et étudier le comportement asymptotique de (a_{n+1}/a_n) .



4. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum 2^n \ln(n) z^{2n}$.

I.3 Propriétés algébriques

Théorème 2 (Somme & Produit de CAUCHY de séries entières).

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs ρ_a et ρ_b .

Pour tout entier naturel n , on pose $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Alors,

- (i). $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min\{\rho_a, \rho_b\}$.
- (ii). $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min\{\rho_a, \rho_b\}$.

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{\rho_a, \rho_b\}$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Exercice 6.

1. Déterminer un exemple où $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence strictement plus grand que le minimum entre ρ_a et ρ_b .



2. Déterminer les rayons de convergence des séries $f(z) = 1 - z$, $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et $f \cdot g$.

3. Montrer que $\sum (n+1) z^n$ est un produit de séries entières de rayon de convergence égal à 1 et que son rayon est égal à 1.

II. Séries entières de la variable réelle

Dans toute cette partie, les séries entières sont considérées comme étant de la variable réelle.

II.1 Régularité

Propriété 4 (Convergence normale).

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence ρ . Pour tout $(a, b) \in]-\rho, \rho[^2$ tels que $a < b$, la série entière $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur $[a, b]$.



Exercice 7. Montrer qu'il n'y a pas nécessairement convergence normale sur $[-\rho, \rho]$.

Théorème 3 (Continuité, Primitive, Dérivée).

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $\rho > 0$ et de somme f .

- (i). f est continue sur $] -\rho, \rho[$.
- (ii). Pour tout segment $[a, b] \subset] -\rho, \rho[$, la fonction f est intégrable sur $[a, b]$.
- (iii). Si F est une primitive de f , alors

$$\forall x \in] -\rho, \rho[, F(x) - F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

- (iv). f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\rho, \rho[$ et

$$\forall x \in] -\rho, \rho[, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Exercice 8. Pour tout $x \in] -1, 1[$, déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Propriété 5 (Continuité, Admis).

La série de la variable complexe $\sum a_n z^n$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

Propriété 6 (Coefficients & Dérivation).

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence non nul et de somme f . Alors, pour tout entier naturel n ,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Théorème 4 (Unicité).

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence non nuls. S'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in] -r, r[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

alors pour tout entier naturel n , $a_n = b_n$.

II.2 Développement en série entière au voisinage de 0

Définition 3 (Fonction développable en série entière).

Soit f une fonction d'un intervalle I de \mathbb{K} contenant 0 en son intérieur et $r > 0$. La fonction f est *développable en série entière* sur l'intervalle $] -r, r[$ s'il existe une suite (a_n) telle que

$$\forall x \in] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exercice 9. Déterminer la forme du développement en série entière d'une fonction paire (resp. impaire) développable en série entière.

Définition 4 (Série de TAYLOR).

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ de I (intervalle contenant 0) dans \mathbb{R} . La *série de Taylor* de f (en 0) est $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Théorème 5 (Série entière & Série de TAYLOR).

Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$. Alors, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -r, r[$, sa série de Taylor a un rayon de convergence supérieur à r et f est égale à la somme de sa série de Taylor.

Réciproquement, pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -r, r[$, f est développable en série entière sur $] -r, r[$ si et seulement si elle est la somme de sa série de Taylor, i.e. si et seulement si

$$\forall x \in] -r, r[, \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t) dt = 0.$$

Exercice 10.

1. Reprendre l'exemple de la fonction exponentielle.
2. La fonction $x \mapsto \exp(-1/x^2)$ est-elle développable en série entière ?



III. Détermination pratique

III.1 Exemples de développements en séries entières

1. **a)** Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le développement en série entière et le rayon de convergence de $z \mapsto \frac{1}{z-a}$.
b) En déduire le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-2x \cos(\alpha) + x^2}$.
2. Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.
3. Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
4. Soit $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 satisfaite par f , puis en déduire le développement en série entière de f .

III.2 Formulaire

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} & , \rho = +\infty \\
 \sin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , \rho = +\infty \\
 \cos(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , \rho = +\infty \\
 \sinh(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , \rho = +\infty \\
 \cosh(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , \rho = +\infty \\
 \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n & , \rho = 1 \\
 \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} & , \rho = 1 \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n & , \rho = 1 \\
 \arctan(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & , \rho = 1 \\
 \arcsin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} & , \rho = 1.
 \end{aligned}$$

Exercice 11. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}$.

IV. Fonctions génératrices

Notation.

■ Les variables aléatoires sont réelles, discrètes, à valeurs dans \mathbb{N} .

Définition 5 (Fonction génératrice).

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} . La *fonction génératrice* de X est la série entière

$$G_X : t \mapsto \mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \cdot t^k.$$

Exercice 12.

1. Déterminer les fonctions génératrices d'une variable aléatoire de loi...

- | | |
|--|---------------------|
| a) ... constante presque sûrement. | d) ... Binomiale. |
| b) ... de Bernoulli. | e) ... de Poisson. |
| c) ... uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$. | f) ... géométrique. |

2. Montrer que, si X est bornée, alors G_X est une fonction polynomiale.

Propriété 7 (Rayon de convergence).

Le rayon de convergence d'une fonction génératrice est supérieur ou égal à 1.

Propriété 8 (Fonctions génératrices & Loi).

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose qu'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $t \in [-r, r]$, $G_X(t) = G_Y(t)$. Alors, X et Y suivent la même loi et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0).$$

Théorème 6 (Espérance & Variance).

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} de fonction génératrice G_X .

- (i). X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1. Alors, $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$.
- (ii). X admet une variance finie si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1. Alors, $\mathbb{E}[X(X-1)] = G''_X(1)$.

Exercice 13.

- Lorsqu'elle existe, exprimer la variance de X en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.
- Reprendre les exemples concernant les lois classiques.

Propriété 9 (Indépendance & Fonction génératrice).

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de fonctions génératrices G_X et G_Y . Alors, $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$.



Exercice 14. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 0, 2 \rrbracket$ de loi conjointe

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=0, Y=0) &= \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=2, Y=2) = \frac{1}{9} \\ \mathbb{P}(X=0, Y=2) &= \mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(X=2, Y=1) = \frac{2}{9} \\ \mathbb{P}(X=0, Y=1) &= \mathbb{P}(X=1, Y=2) = \mathbb{P}(X=2, Y=0) = 0 \end{aligned}$$

Déterminer les lois de X et de Y . En déduire les fonctions génératrices G_X , G_Y et G_{X+Y} .

Théorème 7 (Somme de variables aléatoires indépendantes).

- (i). Soient $p \in [0, 1]$ et (X_1, \dots, X_n) des variables aléatoires discrètes indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p . Alors, $\sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .
- (ii). Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ . Alors, $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 15.

- Soient X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$ et Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(m, p)$. Si X et Y sont indépendantes, déterminer la loi de $X + Y$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$, $(X_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une suite variables aléatoires indépendantes et de mêmes lois et T une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ indépendante des (X_k) .

a) Déterminer la fonction génératrice de $S : \omega \mapsto \sum_{k=1}^{T(\omega)} X_k(\omega)$ en fonction des fonctions génératrices de X_1 et de T .

b) Identité de WALD. Si X_1 et T sont d'espérances finies, montrer que S est d'espérance finie et $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[T]$.

c) Déterminer la valeur moyenne obtenue en sommant le résultat de T lancers de dés, lorsque T suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.



Un cas particulier du théorème d'ABEL

Exercice 16. Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum a_n x^n$ soit de rayon de convergence R . Pour tout $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose que $\sum a_n R^n$ est convergente, on note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k R^k$ et S sa limite.

1. Montrer que f est continue sur $] -R, R[$.

2. En considérant une fonction \tilde{f} , montrer que l'on peut se ramener au cas où $R = 1$ sans perdre de généralité.

On supposera dans la suite que $R = 1$.

3. Montrer, pour tout $x \in]-1, 1[$, la relation $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$.

4. En déduire que f est prolongeable par continuité 1.



Programme officiel (PSI)

Suites et séries - C - Séries entières (p. 16)

Probabilités - B - Variables aléatoires discrètes - c) Variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} .

Mathématiciens

TAYLOR Brook (18 août 1685 à Edmonton-29 déc. 1731 à Londres).

ALEMBERT Jean Le Rond d' (17 nov. 1717 à Paris-29 oct. 1783 à Paris).

CAUCHY Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).

ABEL Niels Henrik (5 août 1802 à Frindöe-6 avr. 1829 à Froland).

WALD Abraham (31 oct. 1902 à Kolozsvár-13 déc. 1950 à Travancore).