# ■ Chapitre 16 ■
# Calcul différentiel

■ $p$ désigne un entier naturel non nul (généralement $p \leqslant 3$).
■ $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^p$ et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne.
■ $(e_1, \dots, e_p)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
■ $U$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$.
■ $f$ désigne une fonction de $U$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 1.** Soit $h \in \mathbb{R}^p$ un vecteur non nul. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in ]-\delta, \delta[$, $a + th \in U$.

## I. Applications continûment différentiables

### I.1 Dérivées partielles

**Définition 1 (Application partielle).**
Pour tout $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ et $i \in [\![1, p]\!]$, l'*application partielle* en $a$ selon la $i$-ème composante est définie par $f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$. De plus, il existe un ouvert $U_{a,i}$ contenant $a_i$ tel que $f_{a,i}$ soit définie sur $U_{a,i}$.

**Propriété 1.**
Si $f$ est continue sur $U$, alors, pour tous $i \in [\![1, p]\!]$ et $a \in U$, l'application partielle $f_{a,i}$ est continue sur $U_{a,i}$.

**Exercice 2.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.

**1.** Montrer que les applications partielles de $f$ sont continues.

**2.** Déterminer $\lim_{x \to 0} f(x, x)$.

**Définition 2 (Dérivées d'une fonction selon un vecteur).**
La fonction $f$ admet une *dérivée partielle* en $a$ par rapport à la $i$-ème variable si l'application partielle $f_{a,i}$ admet une dérivée en $a_i$. Cette valeur est notée $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

**Exercice 3.**

**1.** Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $f : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$. Déterminer les dérivées partielles de $f$.

**2.** Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \frac{x^4y^4}{x^4+y^4}$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que $f$ est continue en $(0, 0)$ et déterminer ses dérivées partielles.

**3.** Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0, 0) = 0$. Déterminer les dérivées partielles de $f$.

**4.** Déterminer les dérivées partielles, lorsqu'elles existent, de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|_2$.

### I.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

**Définition 3 (Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$).**
Soit $f$ une fonction définie sur $U$. La fonction $f$ est de *classe* $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles sont définies et continues sur $U$. On note $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$ à valeurs réelles.

**Théorème 1 (Développement limité d'ordre 1).**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$ et $a \in U$. Alors, il existe une fonction $\varepsilon$ telle que $\lim\limits_a \varepsilon = 0$ et pour tout $u \in U$,

$$f(u) = f(a) + \sum_{i=1}^{p}(u_i - a_i)\partial_i f(a) + \|u-a\|\,\varepsilon(u).$$

La fonction $f$ admet un *développement limité* d'ordre 1 en $a$.

**Exercice 4.** Montrer que, si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$, alors $f$ est continue sur $U$.

### I.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

**Définition 4 (Dérivées partielles d'ordre 2).**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$ et $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. Si $\partial_i f$ admet une dérivée partielle en $a$ selon la $j$-ème variable, on note

$$\partial_j\left(\partial_i f\right) = \partial^2_{j,i} f.$$

Lorsque $i = j$, on note $\partial^2_i f$ cette dérivée.
Si toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de $f$ sont continues, $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U$.

**Théorème 2 (Théorème de Schwarz, Admis).**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U$. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\partial^2_{i,j} f = \partial^2_{j,i} f$.

**Exercice 5.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$. Déterminer les dérivées partielles $\partial^2_{1,2} f(0,0)$ et $\partial_{2,1} f^2(0,0)$.

## II. Différentielle et Gradient

### II.1 Différentielle

**Définition 5 (Différentielle).**

Soient $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$. L'application $h \mapsto \sum\limits_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a)$ est la *différentielle* de $f$ en $a$, notée $df(a)$. L'application $df(a)$ est une application linéaire. On note

$$df(a)\cdot h = \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a).$$

**Exercice 6.** Déterminer la différentielle…

**1.** … d'une application constante.

**2.** … de $f : (x,y,z) \mapsto ax + by + cz$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

**3.** … de $u$, où $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

**4.** … de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.

**Définition 6 (Gradient).**

Soit $f$ une fonction admettant des dérivées partielles selon chacune de ses variables. Le *gradient* de $f$ en $a$ est le vecteur

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_p f(a) \end{pmatrix}.$$

**Propriété 2 (Différentielle & Gradient).**

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^p$,

$$df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

### II.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

**Propriété 3 (Addition & Multiplication).**

Soient $f$, $g$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda$ un réel. Les fonctions $\lambda f + g$ et $fg$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\begin{aligned} d(\lambda f + g)(a) &= \lambda df(a) + dg(a), \\ d(fg)(a) &= g(a)df(a) + f(a)dg(a). \end{aligned}$$

**Théorème 3 (Règle de la chaîne).**

Soient $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$ et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ de $I \subset \mathbb{R}$ dans $U$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors, la fonction $f \circ \gamma$ est dérivable et pour tout $t \in I$,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i'(t) \partial_i f(\gamma(t)) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

**Exercice 7.**

**1.** Interpréter géométriquement la dérivée de $f \circ \gamma$.

**2.** Montrer que $\nabla f(a)$ désigne la plus grande pente au point $a$.

**Théorème 4 (Caractérisation des fonctions constantes).**

Soient $U$ un ouvert convexe et $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$. L'application $f$ est constante si et seulement si toutes ses dérivées partielles sont nulles.

**Théorème 5 (Composition).**

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $(x, y) : \mathbb{R}^2 \to U$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors, la fonction $g : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$ et

$$\begin{aligned} \partial_1 g(u, v) &= \partial_1 f(x(u, v), y(u, v)) \partial_1 x(u, v) + \partial_2 f(x(u, v), y(u, v)) \partial_1 y(u, v) \\ \partial_2 g(u, v) &= \partial_1 f(x(u, v), y(u, v)) \partial_2 x(u, v) + \partial_2 f(x(u, v), y(u, v)) \partial_2 y(u, v) \end{aligned}$$

**Exercice 8. (Gradient en coordonnées polaires)** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

**1.** Expliciter le calcul précédent en notant $x : (r, \theta) \mapsto r\cos(\theta)$ et $y : (r, \theta) \mapsto r\sin(\theta)$.

**2.** Exprimer $\nabla f$ en fonction des dérivées partielles de $g$ et des vecteurs $\overrightarrow{u}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\overrightarrow{v}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

# III. Applications

## III.1 Extrema et points critiques

**Définition 7 (Extremum local / global).**

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$.

$(i)$. $f$ présente un *maximum local* en $a$ s'il existe un ouvert $V \subset U$ contenant $a$ tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \leqslant f(a)$.

$(ii)$. $f$ présente un *minimum local* en $a$ s'il existe un ouvert $V \subset U$ contenant $a$ tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \geqslant f(a)$.

$(iii)$. $f$ présente un *maximum global* en $a$ si pour tout $x \in U$, $f(x) \leqslant f(a)$.

$(iv)$. $f$ présente un *minimum global* en $a$ si pour tout $x \in U$, $f(x) \geqslant f(a)$.

$(v)$. Un *extremum* est un maximum ou un minimum.

**Théorème 6 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum).**

Soit $f$ une application admettant des dérivées partielles selon chacune de ses variables sur $U$. Si $f$ présente un extremum local en $a$, alors $a$ est un point critique de $f$, i.e. $\nabla f(a) = 0$.

**Exercice 9.**

**1.** En étudiant la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$, montrer que la réciproque du théorème est fausse.

**2.** Déterminer les extrema de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ par $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

## III.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles

**Exercice 10.**

**1. Équation des cordes vibrantes.** Déterminer la forme des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, solutions de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.
*On effectuera le changement de variables $(u, v) = (x + ct, x - ct)$.*

**2.** Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles $x\partial_1 f(x, y) + y\partial_2 f(x, y) = x^2 + y^2$.
*On effectuera un changement de coordonnées en polaires.*

# IV. Géométrie : Courbes & Surfaces

## IV.1 Courbes du plan

**Notation.**

- On suppose dans cette section que $p = 2$.

**Définition 8 (Courbe définie implicitement).**

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$. L'ensemble $\Gamma$ des points de $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation $f(x, y) = 0$ est soit vide, soit l'équation implicite d'une courbe.

**Exercice 11.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $b \neq 0$. Représenter le support des courbes définies par :

**1.** $ax + by + c = 0$.

**2.** $y - \cosh(x) = 0$.

**3.** $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

**4.** $x^2 - y^2 = 0$.

**Définition 9 (Point régulier).**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$ et $\Gamma$ la partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation $f(x,y)=0$. Le point $(x_0,y_0)\in\Gamma$ est un *point régulier* de $\Gamma$ si $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$.

**Exercice 12.** Déterminer les points réguliers des exemples précédents.

**Théorème 7 (Paramétrage local, Admis).**

Soient $f\in\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ un point régulier de $\Gamma$, i.e.

$$f(x_0,y_0)=0 \text{ et } \nabla f(x_0,y_0)\neq 0.$$

Il existe $r>0$, $\eta>0$ et $\gamma:]-\eta,\eta[\to\mathbb{R}^2$ tels que

$(i)$. $\gamma(0)=(x_0,y_0)$,

$(ii)$. $(]-\eta,\eta[,\gamma)$ est un arc paramétré régulier,

$(iii)$. $\mathscr{B}((x_0,y_0),r)\subset U$ et pour tout $(x,y)\in\mathscr{B}((x_0,y_0),r)$,

$$f(x,y)=0 \iff \exists\, t\in]-\eta,\eta[\ ;\ (x,y)=\gamma(t).$$

Le couple $(]-\eta,\eta[,\gamma)$ est un *paramétrage local* de la courbe $\Gamma$ au voisinage de $(x_0,y_0)$.

**Exercice 13.** Reprendre les exemples précédents.

**Théorème 8 (Tangente en un point régulier).**

Soient $f\in\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$, $\Gamma$ la courbe définie par $f(x,y)=0$ et $(x_0,y_0)$ un point régulier de $\Gamma$.

$(i)$. La normale à $\Gamma$ en $(x_0,y_0)$ est la droite passant par $(x_0,y_0)$ dirigée par $\nabla f(x_0,y_0)$.

$(ii)$. La courbe $\Gamma$ possède en $(x_0,y_0)$ une tangente d'équation

$$(x-x_0)\partial_1 f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_2 f(x_0,y_0)=0.$$

**Exercice 14.** Déterminer l'équation des tangentes pour…

**1.** …une droite.

**2.** …la chaînette $\{y-\cosh(x)=0\}$.

**3.** …un cercle.

**Définition 10 (Ligne de niveau).**

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. La *ligne de niveau* $\lambda$ de $f$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=\lambda$.

**Propriété 4 (Normales aux lignes de niveau).**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(x_0,y_0)$ un point régulier de la ligne de niveau $\lambda$ de $f$. Alors, $\nabla f(x_0,y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau $\lambda$ de $f$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de $f$, i.e. il existe $\eta>0$ tel que la fonction

$$t\mapsto f((x_0,y_0)+t\nabla f(x_0,y_0))$$

soit strictement croissante sur $]-\eta,\eta[$.

**Exercice 15.** Illustrer le résultat précédent sur le cercle unité.

### IV.2 Surfaces

**Notation.**

■ On suppose dans cette section que $p = 3$.

**Définition 11 (Surface définie implicitement).**

Soit $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$. L'ensemble $\mathscr{S}$ des points de $\mathbb{R}^3$ solutions de l'équation $f(x, y, z) = 0$ est soit vide, soit l'équation implicite d'une surface.

**Exercice 16.** Représenter les surfaces définies par les équations

**1.** $ax + by + cz - d = 0$.

**2.** $x^2 + y^2 = 1$.

**3.** $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.

**4.** $z = x^2 + y^2$.

**Définition 12 (Point régulier).**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{S}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation $f(x, y, z) = 0$. Le point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est un *point régulier* de $\mathscr{S}$ si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

**Définition 13 (Plan tangent en un point régulier).**

Soient $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$, $\mathscr{S}$ la courbe définie par $f(x, y, z) = 0$ et $(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de $\mathscr{S}$.

$(i)$. La surface $\mathscr{S}$ possède en $(x_0, y_0, z_0)$ un plan tangent d'équation

$$(x - x_0)\partial_1 f(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\partial_2 f(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\partial_3 f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

$(ii)$. La normale au plan tangent à $\mathscr{S}$ en $(x_0, y_0, z_0)$ est dirigée par $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

**Exercice 17.** Déterminer l'équation des plans tangents aux surfaces précédentes.

**Définition 14 (Courbe tracée sur une surface).**

Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{S}$ la partie de $\mathbb{R}^3$ d'équation $f(x, y, z) = 0$. Une *courbe tracée* sur la surface $\mathscr{S}$ est un arc paramétré $(I, \gamma)$, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma = (x, y, z)$ vérifie

$$\forall\, t \in I,\ f(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

**Propriété 5 (Tangente à une courbe dessinée sur une surface).**

Soit $\Gamma = (I, \gamma)$ une courbe tracée sur une surface $\mathscr{S}$ d'équation $f(x, y, z) = 0$ où $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Si $(x_0, y_0, z_0)$ est un point régulier de $\Gamma$ et de $\mathscr{S}$, alors la tangente à $\Gamma$ en ce point est incluse dans le plan tangent à $\mathscr{S}$ en ce point.

**Exercice 18.** Soit $a > 0$. Montrer que la courbe $\gamma : t \mapsto (\cos(at), \sin(at), at)$ est tracée sur la surface définie par $x^2 + y^2 = 1$. Représenter graphiquement ces objets puis illustrer la propriété précédente.

## Approximation au sens des moindres carrés

**Exercice 19.** Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $((x_i, y_i))_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{R}^2)^n$. On suppose que les réels $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux à une même valeur.

Posons $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$.

**1. a)** Calculer $\nabla f$.

**b)** En déduire que $f$ possède un unique point critique noté $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$.

**c)** Montrer que $f$ atteint, en ce point critique, un minimum global.

**2.** Retrouver le résultat précédent à l'aide d'un résultat d'algèbre linéaire.

## Programme officiel (PSI)

Calcul différentiel (p. 24, 25)

## Mathématiciens

**Schwarz** Hermann (25 jan. 1843 à Hermsdorf-30 nov. 1921 à Berlin).