



Il convient de traiter en priorité la **Partie 1**. Les questions **8.a)** et **8.c)** ne pourront être traitées qu'une fois que le cours de seconde année sur les intégrales aura été effectué car elles utilisent la formule d'intégration par parties.

Exercice 1.

Partie 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est \mathbb{R} .

On admet que f est continue et dérivable sur \mathbb{R} .

2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

En déduire la monotonie de f sur \mathbb{R} .

3. Calculer la limite de f en $-\infty$.

\mathcal{C}_f admet-elle une asymptote ? Si oui, donner l'équation de cette asymptote.

4. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

c) En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$.

d) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x , et en déduire la position relative de (D) par rapport à \mathcal{C}_f .

5. Déterminer l'équation de la tangente (T_0) à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

6. a) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes et la valeur en 0.

b) Tracer sur un même repère l'allure de la courbe \mathcal{C}_f , les droites (D) et (T_0) .

On admet qu'une valeur approchée de $\ln(2)$ est 0,69.

Partie 2

Pour tout entier naturel n , on pose pour tout réel x de $[0, 1]$, $g_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$ et $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$.

7. a) Montrer que $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$.

b) En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

8. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n ,

$$I_n = \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 \frac{x e^{-nx}}{1 + e^{-nx}} dx.$$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \ln(1 + e^{-n}) + n \int_0^1 x e^{-nx} dx$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\int_0^1 x e^{-nx} dx = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1 - e^{-n}}{n^2}$.

d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

9. a) Écrire une fonction en langage Python, nommée `gn`, prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et un réel `x` et renvoyant $g_n(x)$.

b) On dispose d'une fonction en langage Python nommée `I` prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et renvoyant une valeur approchée de I_n à 10^{-7} près. On exécute le code suivant :

```

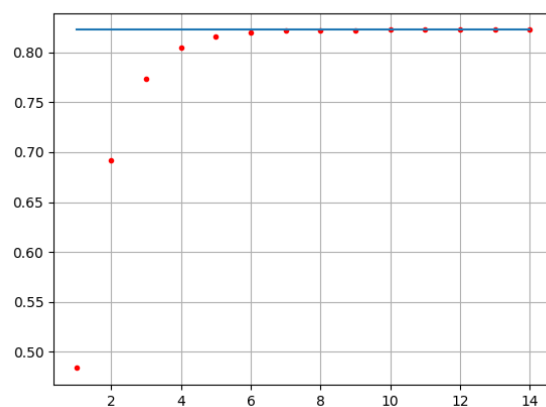
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L_x = np.zeros(14)
L_y = np.zeros(14)
for n in range(14):
    L_x[n] = n + 1
    L_y[n] = (n + 1) * I(n + 1)

plt.plot(L_x, L_y, 'r')
plt.plot([1, 14], [np.pi**2/12, np.pi**2/12])
plt.show()

```

On obtient la figure ci-dessous :



Que peut-on conjecturer sur la suite $(nI_n)_{n \geq 1}$?