I. Produits scalaires, Familles de vecteurs

Indications pour l'exercice 1.

1. Utiliser le nombre de racines des polynômes de degré inférieur à n.

2. Implémenter l'algorithme de Gram-Schmidt. □

Indications pour l'exercice 2.

1. Utiliser l'inversibilité de f pour montrer que la famille est une base. Pour l'orthogonalité, utiliser les hypothèses.

2. Utiliser la bilinéarité du produit scalaire ainsi que les propriétés de f. □

Indications pour l'exercice 3.

1. Montrer, en utilisant les normes, que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = 0$.

2. On pourra faire intervenir la taille des familles libres.

3. Extraire une base de F et une base de G. Compléter ensuite ces bases par des familles orthonormées. Définir ensuite f sur chacun des éléments de cette base. □

Indications pour l'exercice 4. Penser bilinéarité du produit scalaire et inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Indications pour l'exercice 5.

1. Montrer que $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre en calculant $\left\| \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i \right\|$ en distinguant les termes en fonction du signe de λ_i.

2. Choisir x_1 et x_2.

3. En notant $I = \{i \ ; \ \lambda_i < 0\}$, commencer par montrer que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. En déduire que $I = \emptyset$. □

Indications pour l'exercice 6.

1. Commencer par vérifier que l'intégrale est convergente.

2. Penser au théorème de représentation des formes linéaires.

3. Supposer par l'absurde que P_n possède r $(< n)$ racines distinctes en lesquelles il change de signe dans $[-1, 1]$ et exhiber un polynôme Q tel que $Q(1) = 0$ et PQ est de signe constant sur $[-1, 1]$. □

Indications pour l'exercice 7. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz en distinguant les cas où $X \in \operatorname{Ker}({}^tA)$. □

Indications pour l'exercice 8.

1. a) Question de cours.

b) Question de cours sur l'identité de polarisation.

c) Déterminer un contre-exemple à l'identité du parallélogramme.

2. a) Utiliser l'identité du parallélogramme.

b) Utiliser l'homogénéité de N puis l'identité du parallélogramme.

c) Montrer la propriété pour $t \in \mathbb{N}$ puis pour $t \in \mathbb{Z}$ puis pour $t \in \mathbb{Q}$ et enfin pour $t \in \mathbb{R}$.

d) Montrer les propriétés du produit scalaire. □

Indications pour l'exercice 9.

1. Pour le sens direct, on pourra s'attacher à montrer la contraposée en remarquant que, en décomposant les x_i dans une base orthonormée, $G = A^tA$.
Pour la réciproque, on utilise que le déterminant est une forme alternée.

2. Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes / colonnes.

3. Utiliser la définition du projecteur orthogonal, les questions précédentes, puis un développement selon les lignes / colonnes. □

Indications pour l'exercice 10.

1. Penser au théorème de représentation des formes linéaires.

2. Effectuer des calculs par blocs.

3. On peut interpréter B comme une matrice de changement de base.

4. Montrer que $Q^{-1}BP^{-1}$ est inversible et appartient à H. $\square$

Indications pour l'exercice 11.

1. On pourra écrire les premiers termes avant d'en déduire l'expression générale.

2. Utiliser que ${}^tC$ n'est pas inversible. Montrer ensuite que, si le système est contrôlable, alors ${}^tXX = 0$ soit $X = 0$.

3. Utiliser l'orthogonal de $\operatorname{Im} F$.

4. Choisir judicieusement les $(U_0, \ldots, U_{N-1})$. $\square$

II. Projections

Indications pour l'exercice 12. Montrer que, si $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$ et $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4)$, alors (f_1, f_2) est une base orthonormée de F. En déduire la matrice de p dans la base canonique.
Exprimer ensuite la distance en fonction du projeté orthogonal. $\square$

Indications pour l'exercice 13.

1. Pour le caractère défini positif, penser à utiliser l'ordre de multiplicité des racines.

2. a) Penser aux noyaux des formes linéaires.

b) Remarquer que $P \in E$ si et seulement si $P \in \operatorname{Vect}\{1\}^\perp$. En déduire une expression de $d(1, E)$ en fonction de la norme de 1. $\square$

Indications pour l'exercice 14.

1. Commencer par montrer que le produit scalaire est bien défini.
Utiliser le nombre de racines de P pour montrer que le produit scalaire est bien défini positif.

2. On note $Q = aX + b$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ puis on utilise les équations $\langle X^2 - Q, 1\rangle = 0$ et $\langle X^2 - Q, X\rangle = 0$. $\square$

Indications pour l'exercice 15. En effectuant une intégration par parties, on peut montrer que F est un hyperplan.
En remarquant que $F = \operatorname{Vect}\{X\}^\perp$, la distance est celle à un hyperplan. $\square$

Indications pour l'exercice 16.

1. On montrera que la C.N.S. est que les $a_0, \ldots, a_n$ soient deux à deux distincts.

2. On remarque que F est un hyperplan et que $F = \operatorname{Vect}\{1\}^\perp$. La distance recherchée est donc la distance à un hyperplan. $\square$

III. Avec Python

Indications pour l'exercice 17.

1. a) On peut utiliser le type `array`.

b) Utiliser une boucle.

c) Pour montrer le résultat, on pourra écrire les produits matriciels.

2. a) Penser à la symétrie.

b) On a obtenu précédemment un polynôme annulateur.
Le rang de M permet de déterminer la dimension du noyau. On exhibe ensuite des bases.

c) On peut vérifier que les sous-espaces propres sont orthogonaux ou utiliser la symétrie.

d) On exprimera la projection en utilisant une base orthonormée obtenue aux questions précédentes. $\square$