

# T.D. I - Calcul matriciel

## I - Opérations sur des matrices

**Exercice 1.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2,5 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ -0,5 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -2,5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $AB$ .
2. Que dire du produit  $BA$  ?

**Exercice 2.** Déterminer les coefficients manquants :

$$\begin{pmatrix} 2 & \cdots \\ \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3. (✳)** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ .

Effectuer les calculs suivants :

1.  $A + 2B$ .
2.  $ABC$ .
3.  $A + BC$ .
4.  $(A - I_2)(B - I_2)$ .

**Exercice 4. (✳)** Pour chacune des matrices  $J$  suivantes, calculer  $J^2$ ,  $J^3$  puis  $J^k$  pour tout  $k \geq 3$ .

1.  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
2.  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
3.  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
4.  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 5. (✳)** Soit  $A$  une matrice d'ordre 3 et  $I$  la matrice identité d'ordre 3. Développer l'expression  $(A - 2I)(A - I)$ .

**Exercice 6. (✳)** Soit  $A$  une matrice d'ordre 4 et  $I$  la matrice identité d'ordre 4. Développer l'expression  $(A + I)^3$ .

**Exercice 7.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2$  puis  $A^3$ .

**Exercice 8.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2$  puis  $A^3$ .

**Exercice 9. (✳)**

1. Soit  $a$  et  $b$  deux réels. Développer l'expression  $(a + b)^2$ .
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a) Calculer  $(A + B)^2$ .
  - b) Calculer  $A^2 + 2AB + B^2$ .
  - c) Que peut-on conclure ?

## II - Calculs de puissances

### II.1 - Récurrences

**Exercice 10. (✳)** Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
2. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel non nul,
 
$$A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Cette relation est-elle encore vraie lorsque  $n = 0$  ?

**Exercice 11. (✳)** Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .

2. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel,

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

**Exercice 12.** Soit  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $B^2$  et  $B^3$ .

2. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel,

$$B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{2n+1} \\ 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13.** Soit  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $B^2$  et  $B^3$ .

2. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel,

$$B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 3^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n+1} \\ 0 & 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 14.**  $\rightarrow$  Soit  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  et  $I$  la matrice identité d'ordre

3.

1. a) Calculer  $A^2 - 2A - 8I$ .

b) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on ait  $A^n = a_n A + b_n I$ . On précisera les premiers termes  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ ; et on exprimera  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .

2. On définit deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $\begin{cases} u_n = 4a_n + b_n \\ v_n = -2a_n + b_n \end{cases}$ .

a) Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont géométriques.

b) En déduire une expression de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c) En déduire une expression de  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

3. Exprimer  $A^n$  en fonction de  $n$ .

## II.2 - Formule du binôme

**Exercice 15.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $J = A - 2I_3$ .

1. Expliciter  $J$ ,  $J^2$  et  $J^3$ . En déduire la valeur de  $J^k$  pour tout entier  $k \geq 3$ .

2. Montrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que pour tout  $n$  entier naturel,

$$A^n = 2^n \left( I_3 + \frac{n}{2} J + \frac{n(n-1)}{8} J^2 \right).$$

3. En déduire, pour  $n \geq 2$ , les neufs coefficients de la matrice  $A^n$ . Vérifier que votre résultat reste vrai pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

4. Démontrer le résultat précédent en utilisant une récurrence.

**Exercice 16.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = A - 3I_3$ .

1. Expliciter  $B$ ,  $B^2$  et  $B^3$ . En déduire  $B^k$  pour tout  $k \geq 3$ .

2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$A^n = 3^n \left( I + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right).$$

3. La formule est-elle encore vraie pour  $n = 0$ ?  $n = 1$ ?

**Exercice 17.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que pour tout  $n$  entier

$$\text{naturel, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$