



## I. Suites numériques

**Exercice 1. (Somme des relations de comparaison, ♡)** Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites à valeurs positives telles que  $a_n \sim b_n$ .

1. Si  $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)$  diverge, montrer que  $\sum_{k=1}^n a_k \sim \sum_{k=1}^n b_k$ .
2. En déduire que, si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel strictement positif  $\ell$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \ell$ .
3. En déduire la limite de la suite de terme général  $\left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{3}{k}\right)^k\right]^{1/n}$ .

**Exercice 2. (Suites sous-additives, ♡)** [CCP] Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle vérifiant pour tout  $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n = \min_{k \in [1, n]} \frac{u_k}{k}$ .

### 1. Exemples.

a) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $t_n = n^\alpha$ . Montrer que  $(t_n)$  est sous-additive si et seulement si  $\alpha \leq 1$ . Déterminer alors la limite de la suite  $(t_n/n)$ .

b) Soit  $(w_n)$  une suite réelle telle que pour tout  $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $w_{n+m} = w_n + w_m$ . Montrer que  $(w_n)$  est sous-additive et calculer la limite de la suite  $(w_n/n)$ .

2. Montrer qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ .
3. Montrer que pour tout  $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $u_{nm} \leq m u_n$ .
4. On suppose que  $\ell \neq -\infty$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .
  - a) Montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{u_m}{m} \leq \ell + \varepsilon$ .

b) En utilisant le théorème de la division euclidienne, montrer que  $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell$ .

**Exercice 3. (♣)** Soit  $u$  une suite réelle ou complexe telle que les suites extraites  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$  et  $(u_{3n})$  soient convergentes. Montrer que la suite  $u$  est convergente.

**Exercice 4. [X]** Soient  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $p \geq 2$  et  $a_1, \dots, a_p$  des réels strictement positifs. Déterminer la limite de la suite de terme général  $u_n = \left(\sum_{i=1}^p a_i i^n\right)^{1/n}$ .

## II. Suites définies implicitement

**Exercice 5. [Mines]** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer qu'il existe un unique réel  $u_n \in \mathbb{R}_+$  tel que  $u_n^5 + n u_n - 1 = 0$ .
2. Prouver que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
3. Déterminer le développement asymptotique à 2 termes de  $u_n$ .

**Exercice 6. [Mines]** Soit  $f_n(x) = x^n + \dots + x^2 + x - 1$ . On considère  $a_n$  l'unique racine réelle positive de  $f_n$ .

1. Montrer que la suite  $(a_n)$  converge vers un réel  $\ell$  à déterminer.
2. Déterminer un équivalent de  $(a_n - \ell)$ .

## III. Fonctions de la variable réelle

**Exercice 7. (♣)** Pour tout réel  $x$ , on note sa partie entière  $[x]$  et sa partie fractionnaire  $\{x\} = x - [x]$ . Déterminer les points de discontinuité des fonctions  $x \mapsto [x]$  et  $x \mapsto \{x\}$ .

**Exercice 8. (♣)** Soit  $f$  définie pour tout  $x \in ]0, 1]$  par  $f(x) = (1-x) \sin \frac{\pi}{x}$ .

1. Montrer que  $f$  est bornée et déterminer ses bornes supérieure et inférieure.
2. La fonction  $f$  est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

**Exercice 9. (♡)** [Mines] Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a, b]$ .

Étudier la suite de terme général  $u_n = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n}$ .

**Exercice 10. (Équation fonctionnelle)** [CCEM] Déterminer les fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que pour tout réel  $x$ ,  $xf(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

**Exercice 11.** [X-ENS] Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme scindé sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ .

1. Montrer que  $P'$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $P^2 + a^2$  ne possède que des racines simples non réelles.

**Exercice 12. (Z)** Soit  $b > 0$  et  $f$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $f(0) = 0$  et  $f(x) = |x|^{5/2} \sin(|x|^{-b})$  sinon. Montrer que  $f''(0)$  existe si et seulement si  $b < \frac{1}{2}$ .

#### IV. Relations de comparaison

**Exercice 13. (Z)** Déterminer les développements limités suivants :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $e^x - \cos x$ , à l'ordre 2 en 0.        | 7. $\ln x$ à l'ordre 2 en $\frac{1}{2}$ .           |
| 2. $\sqrt{1-x^2}$ , à l'ordre 4 en 0.        | 8. $\ln(\sin x)$ à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{6}$ .   |
| 3. $\frac{\sin x}{1+x}$ , à l'ordre 3 en 0.  | 9. $(x - \ln(1+x))(e^x - \cos x)$ à l'ordre 4 en 0. |
| 4. $\ln(\cos x)$ à l'ordre 4 en 0.           | 10. $\frac{x}{e^x-1}$ à l'ordre 4 en 0.             |
| 5. $\sqrt{x}$ à l'ordre 2 en 2.              |   |
| 6. $\sin x$ à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{6}$ . |   |

**Exercice 14.** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage de  $x$ . Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Montrer que cette limite peut exister sans que  $f$  admette de dérivée seconde en  $x$ .

**Exercice 15.** Soit  $(p, q) \in (\mathbb{R}_+)^2$ . Montrer que  $\int_2^n x^p \ln^q(x) dx \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{p+1} \ln^q(n)}{p+1}$ .

**Exercice 16.** Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 6, en  $+\infty$  de la fonction arctan.

**Exercice 17. (Z)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{x^2-8x+2}{\sqrt{1+x^2}}$ .

1. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
2. a) Calculer le développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 3.  
b) En déduire l'équation de sa tangente en 0 puis leurs positions relatives au voisinage de 0.
3. a) Montrer que  $f$  admet une asymptote en  $+\infty$  dont on déterminera l'équation.  
b) Quelle est la position relative de la courbe représentative de  $f$  par rapport à cette asymptote au voisinage de  $+\infty$ ?

#### V. Suites récurrentes

**Exercice 18. (Z)** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in \mathbb{R}_+$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1+2u_n}$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et préciser sa limite.

**Exercice 19.** Soit  $x \in [0, 1]$ . On définit  $f_1 = \sqrt{2+2x}$  puis pour tout entier naturel  $n$ ,  $f_{n+1} = \sqrt{2+f_n}$ . Montrer que la suite  $(f_n)$  converge et en déterminer un encadrement.

#### VI. Avec Python

**Exercice 20.** [Centrale] Soit  $f_n = -a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k$  avec  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$  et  $a_k \geq 0$  pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .

1. Montrer qu'une telle fonction  $f_n$  s'annule une unique fois sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On note  $u_n$  son zéro.
2. On pose  $f_n : x \mapsto -1 + \sum_{k=1}^n (k+1)x^k$ .  
a) Représenter les graphes sur  $[0, 1]$  des  $f_n$  pour  $n \in \llbracket 1, 7 \rrbracket$ . Conjecture sur la suite  $(u_n)$ ?  
b) Donner une expression simple de  $f_n$  et en déduire le résultat.
3. Lorsque, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k = (k+1)!$ , déterminer la limite de  $(u_n)$ .