

# V - Dérivations

## Stratégie

Lors du calcul des dérivées, il est important d'appliquer une stratégie de calculs pour *reconnaître* la formule à utiliser. Nous présentons et illustrons ces règles ci-dessous, de la plus élémentaire à la plus élaborée. Plutôt que d'écrire « La dérivée de la fonction  $f(x) = \dots$  est la fonction  $f'(x) = \dots$  », nous adopterons la notation **non standard**  $f(x) \rightsquigarrow f'(x)$ .

### I - Fonctions élémentaires

#### À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$c \in \mathbb{R}, c$	$\rightsquigarrow$	0

#### Exemple 1

$$3 \rightsquigarrow 0$$

#### À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$x^n$	$\rightsquigarrow$	$nx^{n-1}$

#### Exemple 2

$$\begin{array}{lll} x & \rightsquigarrow & 1 \\ x^2 & \rightsquigarrow & 2x \\ \sqrt{x} = x^{1/2} & \rightsquigarrow & \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ x^{1/3} & \rightsquigarrow & \frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} \\ \frac{1}{x^2} = x^{-2} & \rightsquigarrow & -2x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3} \\ \frac{1}{x^3} = x^{-3} & \rightsquigarrow & -3x^{-3-1} = -\frac{3}{x^4} \\ \frac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3} & \rightsquigarrow & -\frac{1}{3}x^{-1/3-1} = -\frac{1}{x^{4/3}} \end{array}$$

#### À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$\ln(x)$	$\rightsquigarrow$	$\frac{1}{x}$

#### À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$e^{ax}$	$\rightsquigarrow$	$a e^{ax}$

#### Exemple 3

$$\begin{array}{lll} e^x & \rightsquigarrow & e^x \\ e^{3x} & \rightsquigarrow & 3e^{3x} \end{array}$$

## II - Fonctions composées

### À Savoir

$$\begin{array}{ll} \text{fonction} & \rightsquigarrow \text{dérivée} \\ \lambda u(x) & \rightsquigarrow \lambda u'(x) \end{array}$$

### Exemple 4

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{3}x^2 & \rightsquigarrow \frac{1}{3} \times 2x = \frac{2x}{3} \\ 3x^{1/2} & \rightsquigarrow 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

### À Savoir

$$\begin{array}{ll} \text{fonction} & \rightsquigarrow \text{dérivée} \\ u(x) + v(x) & \rightsquigarrow u'(x) + v'(x) \end{array}$$

### Exemple 5

$$\begin{array}{ll} x^4 + x^5 & \rightsquigarrow 4x^3 + 5x^4 \\ e^{3x} + \frac{1}{x} & \rightsquigarrow 3e^{3x} - \frac{1}{x^2} \end{array}$$

### À Savoir

$$\begin{array}{ll} \text{fonction} & \rightsquigarrow \text{dérivée} \\ \lambda u(x) + \mu v(x) & \rightsquigarrow \lambda u'(x) + \mu v'(x) \end{array}$$

### Exemple 6

$$\begin{array}{ll} 3x - 2x^7 & \rightsquigarrow 3 - 2 \times 7x^6 = 3 - 14x^6 \\ \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{x} & \rightsquigarrow \frac{1}{3} \times 3e^{3x} + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{3x} - \frac{2}{x^2} \end{array}$$

### À Savoir

$$\begin{array}{ll} \text{fonction} & \rightsquigarrow \text{dérivée} \\ u^n(x) & \rightsquigarrow nu'(x)u^{n-1}(x) \end{array}$$

### Exemple 7

$$\begin{array}{ll} (x+2)^2 = \underbrace{(x+2)}_{u(x)}^2 & \rightsquigarrow 2 \times 1 \times (x+2)^{2-1} = 2(x+2) \\ \frac{1}{(x+3)^4} = \underbrace{(x+3)}_{u(x)}^{-4} & \rightsquigarrow -4 \times 1 \times (x+3)^{-4-1} = -\frac{4}{(x+3)^5} \\ \underbrace{(x^2+3)}_{u(x)}^4 & \rightsquigarrow 4 \times 2x \times (x^2+3)^{4-1} = 8x(x^2+3)^3 \\ \frac{1}{(x^2+3)^4} = \underbrace{(x^2+3)}_{u(x)}^{-4} & \rightsquigarrow -4 \times (2x) \times (x^2+3)^{-4-1} = -\frac{8x}{(x^2+3)^5} \\ \underbrace{(x^3+e^{2x})}_{u(x)}^3 & \rightsquigarrow 3 \times (3x^2 + 2e^{2x})(x^3 + e^{2x})^2 \\ \underbrace{(x^3+e^{3x})}_{u(x)}^5 & \rightsquigarrow 5(3x^2 + 3e^{3x})(x^3 + e^{3x})^4 \end{array}$$

### À Savoir

$$\begin{array}{ll} \text{fonction} & \rightsquigarrow \text{dérivée} \\ \ln |u(x)| & \rightsquigarrow \frac{u'(x)}{u(x)} \end{array}$$

### Exemple 8

$$\begin{array}{ll} \ln |x+12| & \rightsquigarrow \frac{1}{x+12} \\ \ln(x^2 + e^{3x}) & \rightsquigarrow \frac{2x+3e^{3x}}{x^2+e^{3x}} \\ \ln(3x^2 + e^{2x}) & \rightsquigarrow \frac{3 \times 2x + 2e^{2x}}{3x^2+e^{2x}} = 2 \frac{3x+e^{2x}}{3x^2+e^{2x}} \end{array}$$

### À Savoir

$$\begin{array}{ll} \text{fonction} & \rightsquigarrow \text{dérivée} \\ e^{u(x)} & \rightsquigarrow u'(x) e^{u(x)} \end{array}$$

**Exemple 9**

$$\begin{aligned}
 e^{x+12} &\rightsquigarrow \underbrace{1}_{u'(x)} \times e^{x+12} = e^{x+12} \\
 e^{x^2+e^{3x}} &\rightsquigarrow \underbrace{(2x + 3e^{3x})}_{u'(x)} e^{x^2+e^{3x}} \\
 e^{3x^2+e^{2x}} &\rightsquigarrow \underbrace{(3 \times 2x + 2e^{2x})}_{u'(x)} e^{3x^2+e^{2x}} = 2(3x + e^{2x}) e^{3x^2+e^{2x}}
 \end{aligned}$$

**À Savoir**

$$\begin{aligned}
 \text{fonction} &\rightsquigarrow \text{dérivée} \\
 u(x) \times v(x) &\rightsquigarrow u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)
 \end{aligned}$$

**Exemple 10**

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{e^{2x}}_{v(x)} &\rightsquigarrow \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{e^{2x}}_{v(x)} + \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{2e^{2x}}_{v'(x)} = (2x+3)e^{2x} \\
 \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{\ln|x|}_{v(x)} &\rightsquigarrow \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{\ln|x|}_{v(x)} + \underbrace{(x+1)}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)} = \ln|x| + \frac{x+1}{x} \\
 \underbrace{(x^2+1)}_{u(x)} \underbrace{e^{3x+4}}_{v(x)} &\rightsquigarrow \underbrace{2x}_{u'(x)} \underbrace{e^{3x+4}}_{v(x)} + \underbrace{(x^2+1)}_{u(x)} \underbrace{3e^{3x+4}}_{v'(x)} = (3x^2+2x+3)e^{3x+4}
 \end{aligned}$$

**À Savoir**

$$\begin{aligned}
 \text{fonction} &\rightsquigarrow \text{dérivée} \\
 \int_a^x f(t) dt &\rightsquigarrow f(x)
 \end{aligned}$$

**Exemple 11**

$$\begin{aligned}
 \int_3^x \frac{e^t}{t^4} dt &\rightsquigarrow \frac{e^x}{x^4} \\
 \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^5} dt &\rightsquigarrow \frac{\ln(x)}{1+x^5}
 \end{aligned}$$

**III - Exercices****Solution de l'exercice 1.**

1. La fonction  $f(x) = 3$  est constante. Sa dérivée vaut  $f'(x) = 0$ .
2. La fonction  $f(x) = e$  est constante. Sa dérivée vaut  $f'(x) = 0$ .
3. La fonction  $f(x) = x^{10}$  est une fonction puissance. Sa dérivée vaut

$$f'(x) = 10 \times x^{10-1} = 10 \times x^9.$$

4. La fonction  $f(x) = x^{3/4}$  est une fonction puissance. Sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}.$$

5. La fonction  $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$  est une fonction puissance. Sa dérivée vaut

$$f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}.$$

6. La fonction  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  est une fonction puissance. Sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

7. La fonction  $f(x) = \ln|x|$  est la fonction logarithme népérien. Sa dérivée vaut  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

8. La fonction  $f(x) = e^x$  est la fonction exponentielle. Sa dérivée vaut  $f'(x) = e^x$ .

**9.** La fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  est la fonction inverse. Sa dérivée vaut  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

On peut également remarquer que  $f(x) = x^{-1}$  et appliquer la formule pour les fonctions puissances :

$$f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2}.$$

**10.** La fonction  $f(x) = \ln |2x|$  est de la forme  $\ln |u(x)|$  en posant  $u(x) = 2x$ . Comme  $u'(x) = 2$ , on obtient

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}.$$

**11.** La fonction  $f(x) = e^{5x}$  est une fonction exponentielle. Sa dérivée vaut  $f'(x) = 5e^{5x}$ .  $\square$

### Solution de l'exercice 2.

**1.** La fonction  $f(x) = 4x + 3$  est de la forme  $f(x) = \lambda u(x) + v(x)$  avec  $\lambda = 4$ ,  $u(x) = x$ ,  $v(x) = 3$ . Comme  $u'(x) = 1$  et  $v'(x) = 0$ , alors  $f'(x) = 4$ .

**2.** La fonction  $f(x) = 2x^2 + x^5$  est de la forme  $f(x) = \lambda u(x) + v(x)$  avec  $\lambda = 2$ ,  $u(x) = x^2$  et  $v(x) = x^5$ . Comme  $u'(x) = 2x$  et  $v'(x) = 5x^4$ , alors

$$f'(x) = 2 \times 2x + 5x^4 = 4x + 5x^4.$$

**3.** La fonction  $f(x) = 3e^x + \frac{4}{5}\ln(x) + 2\sqrt{x}$  est de la forme  $f(x) = \lambda u(x) + \mu v(x) + \nu w(x)$ , avec  $\lambda = 3$ ,  $u(x) = e^x$ ,  $\mu = \frac{4}{5}$ ,  $v(x) = \ln(x)$  et  $\nu = 2$  et  $w(x) = \sqrt{x}$ . Comme  $u(x) = e^x$ ,  $v'(x) = \frac{1}{x}$  et  $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , alors

$$f'(x) = 3e^x + \frac{4}{5x} + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3e^x + \frac{4}{5x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

**4.** La fonction  $f(x) = (2x)^3$  est de la forme  $f(x) = u(x)^n$ , avec  $n = 3$  et  $u(x) = 2x$ . Comme  $u'(x) = 2$ , alors

$$f'(x) = \underbrace{3}_n \times \underbrace{2}_{u'(x)} \times \underbrace{(2x)^4}_{u(x)^{n-1}} = 6(2x)^4.$$

**5.** La fonction  $f(x) = 3e^{2x} - (4x)^4$  est de la forme  $f(x) = \lambda u(x) + v(x)$ , avec  $\lambda = 3$ ,  $u(x) = e^{2x}$  et  $v(x) = (4x)^4$ . Comme  $u'(x) = 2e^{2x}$  et  $v'(x) = 4 \times 4 \times (4x)^3 = 4^2(4x)^3$ , alors

$$f'(x) = 3 \times 2e^{2x} - 4^2(4x)^3 = 6e^{2x} - 4^2 \times 4^3 \times x^3 = 6e^{2x} - 4^5 x^3.$$

$\square$