# V - Quand (ne pas) utiliser le déterminant ?

L'objectif de ces notes est de montrer que, dans le cadre d'un cours élémentaire d'algèbre linéaire, l'usage du déterminant peut grandement être évité. En effet, il est surtout utilisé comme un moyen calculatoire pour prouver certaines propriétés. Or, un calcul efficace du déterminant repose sur l'usage du pivot de Gauss pour échelonner la matrice. On peut donc la plupart du temps se cantonner à cet algorithme du pivot de Gauss sans introduire l'outil complexe qu'est le déterminant.

## I - La liberté des familles

### I.1 - La dimension 2

**Proposition 1 - Colinéarité**

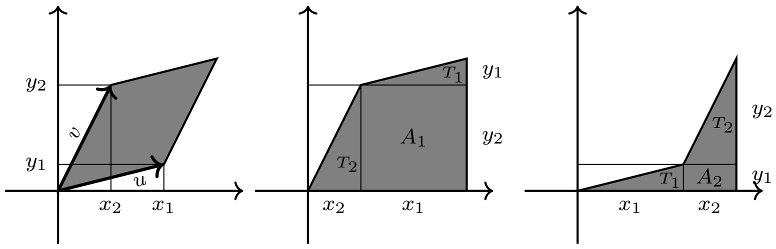
Soient $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. La famille $(u, v)$ est libre si et seulement si $x_1y_2 - y_2x_1 \neq 0$.

**Remarque 1**

Le calcul $x_1y_2 - y_2x_1$ est obtenu en calculant le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

**Géométrie du déterminant**

Le calcul du déterminant est un calcul d'aire. Ainsi, la quantité $x_1y_2 - y_2x_1$ est ici l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $u$ et $v$. Les deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si l'aire du parallélogramme est nulle :




Ainsi, l'aire du parallélogramme est égale à :

$$(A_1 + T_1 + T_2) - (A_2 + T_1 + T_2) = A_1 - A_2 = x_1y_2 - x_2y_1.$$

### I.2 - Les dimensions supérieures

**Proposition 2 - Liberté**

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille d'éléments de $E$ (espace vectoriel de dimension $n$) et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. On note $A = \text{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_1, \ldots, u_n)$. Alors, on a les équivalences :

* $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $E$ si et seulement si $\det A \neq 0$.
* $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $E$ si et seulement si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

**Exemple 1**

Comme la famille est de même cardinal que la dimension de l'espace, il suffit de montrer sa liberté pour montrer qu'il s'agit d'une base.

Montrons que la famille $((1, 2, -1), (2, 1, 1), (0, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Cette famille est bien une famille de 3 vecteurs d'un espace

vectoriel de dimension 3. Montrons donc qu'elle est libre.
En effet, soit $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha(1,2,-1)+\beta(2,1,1)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0).$$

Alors,

$$(\alpha+2\beta, 2\alpha+\beta+\gamma, -\alpha+\beta+\gamma)=(0,0,0).$$

Ainsi,

$$\begin{cases}\alpha+2\beta & =0\\ 2\alpha+\beta+\gamma & =0\\ -\alpha+\beta+\gamma & =0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta & =0\\ -3\beta+\gamma & =0 & {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-2L_1}\\ 3\beta+\gamma & =0 & {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3+L_1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta & =0\\ -3\beta+\gamma & =0\\ 2\gamma & =0 & {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3+L_2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha & =0\\ \beta & =0\\ \gamma & =0\end{cases}$$

# II - L'inversibilité des matrices

## II.1 - La dimension 2

**Proposition 3 - Inversibilité dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$**

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

* La matrice $A$ est inversible si et seulement si $ad-bc\neq 0$.
* Si $ad-bc\neq 0$, alors $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

**Remarque 2**

L'inversibilité de $A$ est équivalente à la liberté de ses vecteurs colonnes.

**Exemple 2**

Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$. Comme $3\times 4-(-1)\times 2=14\neq 0$, alors $A$ est inversible et

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

## II.2 - Les dimensions supérieures

**Proposition 4 - Inversibilité**

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, on a les équivalences :

* la matrice $A$ est inversible si et seulement si $\det(A)\neq 0$ si et seulement si $\det(A)\neq 0$.
* la matrice $A$ est inversible si et seulement si $\det(A)\neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Rg}(A)=n$.

**Exemple 3**

Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss,

$$\begin{aligned}\mathrm{Rg}(A) &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\\ 0 & 11 & 4\\ 0 & 11 & 4\end{pmatrix} \quad {\scriptstyle \begin{matrix} L_2\leftarrow 3L_2-L_1\\ L_3\leftarrow 2L_1-3L_3\end{matrix}}\\ &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\\ 0 & 11 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3-L_2}\end{aligned}$$

La famille ainsi obtenue est échelonnée donc $\mathrm{Rg}(A)=2$. La matrice $A$ n'est donc pas inversible.

## Théorème 1 - Calcul d'inverse

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On peut de manière équivalente :

* **utiliser la comatrice.**
  * ⋆ Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, le cofacteur d'indice $i, j$ de $A$ est $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j}\det A_{i,j}$ où $A_{i,j}$ est la matrice de taille $n-1$ déduite de $A$ en supprimant la $i^{\text{e}}$ ligne et la $j^{\text{e}}$ colonne.
  * ⋆ La comatrice de $A$, notée ${}^cA$ est la matrice des cofacteurs de $A$ : ${}^cA = (\Delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

  En notant $({}^cA)^T$ la transposée de la comatrice de $A$, alors

$$A({}^cA)^T = (\det A)I_n.$$

  Ainsi, si $A$ est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^cA)^T.$$

* **utiliser la méthode de Gauss-Jordan.** Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de $A$ revient à multiplier $A$ à droite par une matrice inversible. Ainsi, si, on effectue les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de $A$ que sur la matrice identité pour obtenir la matrice identité, alors $PA = I_n$ et $PI_n = P$. On obtient ainsi $A^{-1} = P$.

## Remarque 3

Il n'est pas raisonnable d'utiliser cette formule pour calculer effectivement l'inverse d'une matrice. En effet, elle nécessite de calculer $n^2$ déterminants de tailles $n-1$.
L'intérêt de cette formule est avant tout théorique. En effet, on remarque par exemple que si les coefficients de $A$ sont tous rationnels, alors ceux de $A^{-1}$ le sont également.

## Exemple 4 - Méthode de Gauss-Jordan

On place les matrices $A$ et $I_n$ côte à côte. On transforme la matrice $A$ en la matrice $I_n$ à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. On effectue les mêmes opérations sur $I_n$.

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3} \end{array}$$

On obtient ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

# III - La recherche de valeurs propres

**Proposition 5 - Valeurs propres & Inversibilité**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a les équivalentces :

* Le réel $\lambda$ est une valeur propre de $A$ si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
* Le réel $\lambda$ est une valeur propre de $A$ si et seulement si $\mathrm{Rg}(A - \lambda I_n) < n$.

**Remarque 4 - Preuves de non inversibilité**

Pour montrer la non inversibilité de $A - \lambda I_n$, on peut calculer la quantité $\det(A - \lambda I_n)$, appelée polynôme caractéristique de $A$. L'ensemble des racines de ce polynôme est égal à l'ensemble des valeurs propres de $A$. Cependant, le calcul de ce déterminant repose généralement sur un échelonnement de la matrice que nous pourrons donc effectuer sans parler de déterminant en considérant le point suivant.

**Exemple 5**

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 8 & -4 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ 8 & -4 & -5-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 0 \end{pmatrix} && {\scriptstyle L_2 \leftrightarrow L_3} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ 8 & -5-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} && {\scriptstyle C_2 \leftrightarrow C_3} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 8 & -5-\lambda & -4 \\ 7-\lambda & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} && {\scriptstyle L_1 \leftrightarrow L_2} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 8 & -5-\lambda & -4 \\ 0 & -\lambda^2+2\lambda+3 & -4(\lambda+1) \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} && {\scriptstyle L_2 \leftrightarrow 8L_2 - (7-\lambda)L_1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
(-\lambda^2 + 2\lambda + 3)(-1-\lambda) &= 0 \\
-(\lambda+1)(\lambda-3)(-\lambda-1) &= 0 \\
\lambda &\in \{-1, 3\}\,.
\end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs propres de $A$ est donc $\{-1, 3\}$.

# IV - Existence d'un polynôme annulateur

**Théorème 2 - Existence d'un polynôme annulateur**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe un polynôme non nul $P$ tel que $P(A) = 0_n$. Autrement dit, il existe un entier $p$ et $a_0, \ldots, a_p)$ non tous nuls tels que

$$a_p A^p + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0_n.$$

**Remarque 5 - Question de dimension**

Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $n^2$, la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n^2})$, qui contient $n^2 + 1$ vecteurs, est une famille liée. Ainsi, il existe $a_0, \ldots, a_{n^2}$ non tous nuls tels que

$$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2} = 0_n.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton, qui utilise la notion de polynôme caractéristique et se démontre non trivialement, assure qu'il existe un polynôme annulateur de degré $n$...

L'algorithme présenté dans l'exemple suivant permet de trouver le polynôme minimal de la matrice, i.e. le polynôme annulateur unitaire de plus petit degré.

**Exemple 6**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche le plus petit entier naturel $p$ tel que la famille $(I_n, A, \ldots, A^p)$ soit libre.

- $*$ Comme $A$ n'est pas une matrice scalaire, alors $A$ n'est pas colinéaire à $I_n$ et la famille $(I_n, A)$ est libre.
- $*$ Soit $(\alpha,\, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = \alpha A + \beta I_n$. Alors,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  En étudiant le coefficient de la première ligne, troisième colonne, on constate que cette équation est impossible. Ainsi, $(I_n, A, A^2)$ est libre.
- $*$ Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A^3 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_n$. Alors,

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & 18 \\ -9 & -5 & 9 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 & = \alpha + \beta + \gamma \\ 6 & = 4\alpha + 2\beta \\ 18 & = 6\alpha \\ -9 & = -3\alpha \\ -5 & = \alpha + \beta + \gamma \\ 9 & = 6\alpha + 3\beta \\ -3 & = -2\alpha + -\beta \\ -5 & = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 3 \\ \beta & = -3 \\ \gamma & = -5 \end{cases}$$

Ainsi, $(I_n, A, A^2, A^3)$ est liée et

$$A^3 = 3A^2 - 3A - 5I_n.$$

Le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X + 5$ est donc un polynôme annulateur de $A$.