T.D. VII - Variables aléatoires discrètes infinies

I - Modélisation & Lois géométriques

Solution de l'exercice 1. T est l'instant du premier succès (obtenir une boule blanche) dans un schéma de Bernoulli où la probabilité de succès vaut $\frac{3}{8}$. Ainsi, $T \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{3}{8}\right)$.
D'après les résultats sur la loi géométrique,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1-\frac{3}{8}}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{5}{8} \times \frac{8^2}{3^2} = \frac{40}{9}.$$

□

Solution de l'exercice 2. T est l'instant du premier succès (obtenir une boule noire) dans un schéma de Bernoulli où la probabilité de succès vaut $\frac{3}{5}$. Ainsi, $T \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{3}{5}\right)$.
D'après les résultats sur la loi géométrique,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1-\frac{3}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} \times \frac{5^2}{3^2} = \frac{10}{9}.$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. Comme S est la somme des résultats de deux lancers d'un dé à 6 faces, $S(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$.

On distingue tous les lancers possibles :

$$\mathbf{P}([S=2]) = \mathbf{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$
$$\mathbf{P}([S=3]) = \mathbf{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$
$$\mathbf{P}([S=4]) = \mathbf{P}(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$
$$\mathbf{P}([S=5]) = \mathbf{P}(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$
$$\mathbf{P}([S=6]) = \mathbf{P}(\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}) = \frac{5}{36}$$
$$\mathbf{P}([S=7]) = \mathbf{P}(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$\mathbf{P}([S=8]) = \mathbf{P}(\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}) = \frac{5}{36}$$
$$\mathbf{P}([S=9]) = \mathbf{P}(\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$
$$\mathbf{P}([S=10]) = \mathbf{P}(\{(4,6),(5,5),(6,4)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$
$$\mathbf{P}([S=11]) = \mathbf{P}(\{(6,5),(6,6)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$
$$\mathbf{P}([S=12]) = \mathbf{P}(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}$$

Ainsi,

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([S=k])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. T est l'instant de premier succès dans un schéma de Bernoulli où la probabilité de succès vaut $\mathbf{P}([S=7]) = \frac{1}{6}$. Ainsi, $T \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.
D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6 \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1-\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{5}{6} \times 6^2 = 30.$$

$\square$

Solution de l'exercice 4.

1. X compte le nombre de succès (obtenir Pile) lors de la succession de 4 expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès égale à $\frac{1}{3}$. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(4, \frac{1}{3}\right)$.

2. T est le premier instant de succès (obtenir au moins 2 piles) dans un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut $\mathbf{P}([X \geqslant 2])$.
Ainsi, $T \hookrightarrow \mathscr{G}(\mathbf{P}([X \geqslant 2]))$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X \geqslant 2]) &= \mathbf{P}([X = 2]) + \mathbf{P}([X = 3]) + \mathbf{P}([X = 4]) \\
&= \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{4-2} + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{4-3} + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^{4-4} \\
&= 6\frac{2^2}{3^4} + 4\frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^4} \\
&= \frac{6 \times 4 + 4 \times 2 + 1}{3^4} \\
&= \frac{33}{3^4} = \frac{11}{27}.
\end{aligned}$$

D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{11}{27}} = \frac{27}{11} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - \frac{11}{27}}{\left(\frac{11}{27}\right)^2} = \frac{16}{27} \times \frac{27^2}{11^2} = \frac{432}{121}.$$

$\square$

Solution de l'exercice 5.

1. On note
U_1 : « Choisir l'urne numérotée 1 »
U_2 : « Choisir l'urne numérotée 2 »
Comme (U_1, U_2) est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(R) &= \mathbf{P}_{U_1}(R)\,\mathbf{P}(U_1) + \mathbf{P}_{U_2}(R)\,\mathbf{P}(U_2) \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

2. T est l'instant de premier succès (obtenir une boule rouge) dans un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut $\mathbf{P}(R) = \frac{3}{10}$.
Ainsi, $T \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{3}{10}\right)$.
D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{3} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - \frac{3}{10}}{\left(\frac{3}{10}\right)^2} = \frac{7}{10} \times \frac{10^2}{3^2} = \frac{70}{9}.$$

$\square$

Solution de l'exercice 6.

1. On note U_k l'événement « L'urne numéro k a été choisie ».
Comme (U_1, U_2, U_3) est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N) &= \mathbf{P}_{U_1}(N)\,\mathbf{P}(U_1) + \mathbf{P}_{U_2}(N)\,\mathbf{P}(U_2) + \mathbf{P}_{U_3}(N)\,\mathbf{P}(U_3) \\
&= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{3 + 2 + 1}{4 \times 3} = \frac{\frac{3 \times 4}{2}}{4 \times 3} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. T est l'instant de premier succès (obtenir une boule noire) dans un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut $\frac{1}{2}$. Ainsi, $T \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.
D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2.$$

$\square$

II - Autour de la loi géométrique

Solution de l'exercice 7.

1. D'après les lois usuelles, $X \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{2}{5}\right)$.
D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - \frac{2}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \times \frac{5^2}{2^2} = \frac{15}{4}.$$

2. Si $X \leqslant n$, alors X peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X \leqslant n]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{5} \sum_{k-1=1}^{k-1=n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{5} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{\ell} \\
&= \frac{2}{5} \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{5}} \\
&= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n .
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. Comme T prend les valeurs $0, 1, 2, \ldots$, alors Y prend les valeurs $1, 2, 3, \ldots$
Ainsi, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}([Y = k]) = \mathbf{P}([Y - 1 = k - 1]) = \mathbf{P}([T = k - 1]) .$$

2. D'après la question précédente, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([Y = k]) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$.
Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{3}\right)$.
D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \times 3^2 = 6.$$

3. Rappelons que $Y = T + 1$, soit $T = Y - 1$. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[Y - 1] = \mathbf{E}[Y] - 1 = 3 - 1 = 2.$$

D'après les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}(T) = \mathbf{V}(Y - 1) = \mathbf{V}(Y) = 6.$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. Comme T prend les valeurs $0, 1, 2, \ldots$, alors Y prend les valeurs $1, 2, 3, \ldots$
Ainsi, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}([Y = k]) = \mathbf{P}([Y - 1 = k - 1]) = \mathbf{P}([T = k - 1]) .$$

2. D'après la question précédente, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([Y = k]) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$.
Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{5}\right)$.
D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5 \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{1 - \frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \times 5^2 = 20.$$

3. Rappelons que $Y = T + 1$, soit $T = Y - 1$. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[Y - 1] = \mathbf{E}[Y] - 1 = 5 - 1 = 4.$$

D'après les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}(T) = \mathbf{V}(Y - 1) = \mathbf{V}(Y) = 20.$$

□

Solution de l'exercice 10.

1. Comme X est à valeurs entières, si $X > n - 1$, alors soit $X = n$, soit $X > n$. Ainsi,

$$[X > n - 1] = [X = n] \cup [X > n].$$

2. Comme les ensembles $[X = n]$ et $X > n]$ sont incompatibles, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X > n-1]) = \mathbf{P}([X = n] \cup [X > n]) &= \mathbf{P}([X = n]) + \mathbf{P}([X > n]) \\ u_{n-1} &= \mathbf{P}([X = n]) + u_n \\ u_{n-1} - u_n &= \mathbf{P}([X = n]).\end{aligned}$$

3. D'après la définition des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) = \frac{\mathbf{P}([X > n] \cap [X > n-1])}{\mathbf{P}([X > n-1])}.$$

Or, dire que $X > n-1$ et $X > n$ est équivalent à dire que $X > n$. Ainsi,

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) = \frac{\mathbf{P}([X > n])}{\mathbf{P}([X > n-1])}.$$

Ainsi, d'après la question **2.**,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) &= \frac{\mathbf{P}([X > n-1]) - \mathbf{P}([X = n])}{\mathbf{P}([X > n-1])} \\ &= 1 - \frac{\mathbf{P}([X = n])}{\mathbf{P}([X > n-1])} \\ &= 1 - \mathbf{P}_{[X>n-1]}([X = n]).\end{aligned}$$

4. D'après la question précédente et l'énoncé,

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

D'après la définition des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) = \frac{\mathbf{P}([X > n] \cap [X > n-1])}{\mathbf{P}([X > n-1])} = \frac{\mathbf{P}([X > n])}{\mathbf{P}([X > n-1])} = \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

Finalement,

$$u_n = \frac{1}{3} u_{n-1}.$$

5. D'après la question précédente, (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme

$$u_0 = \mathbf{P}([X > 0]) = 1,$$

car X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi, ç

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

D'après la question **2.**,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X = n]) = u_{n-1} - u_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{2}{3}\right)$.

6. D'après les propriétés des probabilités,

$$\mathbf{P}([X \leqslant n]) = 1 - \mathbf{P}([X > n]) = 1 - u_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. Si $Z \leqslant n$, alors $\max\{X_1, X_2\} \leqslant n$. Ainsi, $X_1 \leqslant n$ et $X_2 \leqslant n$. Alors,

$$[Z \leqslant n] = [X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n].$$

2. Comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$\mathbf{P}([Z \leqslant n]) = \mathbf{P}([X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n]) = \mathbf{P}([X_1 \leqslant n]) \times \mathbf{P}([X_2 \leqslant n]).$$

De plus, comme $X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(2/3)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{G}(2/3)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X_1 \leqslant n]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_1 = k]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2}{3} \sum_{k-1=0}^{k-1=n} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2}{3} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell} \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n .
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbf{P}([Z \leqslant n]) = \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2 .$$

3. On remarque que, comme Z est à valeurs entières,

$$\begin{aligned}
[Z \leqslant n] &= [Z < n] \cup [Z = n] \\
[Z \leqslant n] &= [Z \leqslant n-1] \cup [Z = n] \\
\mathbf{P}([Z \leqslant n]) &= \mathbf{P}([Z \leqslant n-1]) + \mathbf{P}([Z = n]) \\
\mathbf{P}([Z = n]) &= \mathbf{P}([Z \leqslant n]) - \mathbf{P}([Z \leqslant n-1]) \\
&= \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)^2 \\
&= 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} - 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2} \\
&= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{9}\right) \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{8}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} .
\end{aligned}$$

4. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, d'après les résultats sur les séries géométriques, $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Comme $-1 < \frac{1}{9} < 1$, d'après les résultats sur les séries géométriques, $\sum \left(\frac{1}{9}\right)^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([Z = n]) &= \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} - \frac{8}{9} \times \frac{9}{8} \\
&= 2 - 1 = 1.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. D'une part, comme $-1 < \mathrm{e}^{-1} < 1$, alors $\sum \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

D'autre part, comme $-1 < \mathrm{e}^{-1} < 1$, alors $\sum \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} \times \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\ell} = \frac{1}{\mathrm{e}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}.$$

Finalement,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([Y = k]) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \frac{1}{\mathrm{e}-1} = 1.$$

2. Comme Y prend les valeurs $0, 1, \ldots$, alors Z prend les valeurs $1, 2, \ldots$ et $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Z=k]) &= \mathbf{P}([Y+1=k]) = \mathbf{P}([Y=k-1])\\ &= \mathrm{e}^{-(k-1)} - \mathrm{e}^{-(k-1+1)} = \mathrm{e}^{-(k-1)} - \mathrm{e}^{-k}\\ &= \mathrm{e}^{-(k-1)}(1-\mathrm{e}^{-1})\\ &= \left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) \times \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
D'après les propriétés des lois géométriques,

$$\mathbf{E}[Z] = \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Z) &= \frac{1-\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2}\\ &= \frac{1}{\mathrm{e}} \times \frac{\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}-1)^2}\\ &= \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}.\end{aligned}$$

3. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[Z-1] = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}-1}.$$

D'après les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(Z-1) = \mathbf{V}(Z) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

4. Comme M est une matrice de taille 2, elle est inversible si et seulement si $1 \times Y - 1 \times 0 = Y \neq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M \text{ inversible}) &= \mathbf{P}([Y \neq 0]) = 1 - \mathbf{P}([Y=0]) = 1 - \left(\mathrm{e}^{-0} - \mathrm{e}^{-(0+1)}\right)\\ &= \frac{1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 13.

1. Comme $([Y=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X=Y]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X=Y] \cap [Y=k])\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X=k] \cap [Y=k])\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X=k]) \times \mathbf{P}([Y=k]), \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\\ &= \sum_{k-1=0}^{k-1=n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^{\ell}.\end{aligned}$$

Comme $-1 < \frac{4}{9} < 1$, alors $\sum \left(\frac{4}{9}\right)^k$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{\ell} = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$

3. En utilisant les questions **1.** et **2.**,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X=Y]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X=k]) \times \mathbf{P}([Y=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

□

III - Autour de la loi de Poisson

Solution de l'exercice 14.

1. Comme X est le nombre de succès dans une expérience de Bernoulli de probabilité de succès égale à $\frac{1}{12}$, alors

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(60, 1/12).$$

2. Comme $\mathbf{E}[X] = 60 \times \frac{1}{12} = 5$, alors $\mathbf{E}[Z] = 5$ et Z suite une loi de Poisson de paramètre 5.

3. En utilisant la table précédente,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq \mathbf{P}(Z \leqslant 3) &= \mathbf{P}(Z=0) + \mathbf{P}(Z=1) + \mathbf{P}(Z=2) + \mathbf{P}(Z=3) \\ &\simeq 0{,}006 + 0{,}034 + 0{,}084 + 0{,}140 \\ &\simeq 0{,}264.\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des probabilités,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \geqslant 4) &= 1 - \mathbf{P}(X < 4) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 3) \\ &\simeq 1 - 0{,}264 \\ &\simeq 0{,}736.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 15.

1. Comme X est le nombre de succès (être défecteuse) dans une expérience de Bernoulli de probabilité de succès égale à $\frac{5}{100}$, alors

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{5}{100}\right).$$

2. Comme $\mathbf{E}[X] = 100 \times \frac{5}{100} = 5$, alors $\mathbf{E}[Z] = 5$ et Z suite une loi de Poisson de paramètre 5.

3. En utilisant la table,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \geqslant 10) &\simeq \mathbf{P}(Z \geqslant 10) \\ &\simeq 1 - \mathbf{P}(Z < 10) \\ &\simeq 1 - \mathbf{P}(Z \leqslant 9) \\ &\simeq 1 - 0{,}968 \\ &\simeq 0.032.\end{aligned}$$

□

IV - Autres lois

Solution de l'exercice 16. D'après la définition de l'espérance, si cette somme est bien définie,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbf{P}([X=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{6} \times 4 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 17.

1. En réduisant sous le même dénominateur,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. En utilisant la question précédente puis une somme télescopique,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left([X=k]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

3. Comme $([X=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left([X=k]\right) = 1$$

$$\mathbf{P}\left([X=0]\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left([X=k]\right) = 1$$

$$\mathbf{P}\left([X=0]\right) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left([X=k]\right) = 1 - 1 = 0.$$

4. En utilisant l'événement contraire puis les calculs précédents,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left([X>n]\right) = 1 - \mathbf{P}\left([X\leqslant n]\right) &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left([X=k]\right), \text{ car } X(\Omega)\subset\mathbb{N}\\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left([X=k]\right), \text{ car } \mathbf{P}\left([X=0]\right)=0\\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \text{ d'après le calcul de la question } \mathbf{2.}\\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{4(k-1)}{3^k} &= \sum_{k-1=1}^{k-1=n-1} \frac{4(k-1)}{3^{k-1+1}}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{4\ell}{3^{\ell+1}}\\ &= \frac{4}{3}\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell}.\end{aligned}$$

En utilisant le résultat admis pour $x = \frac{1}{3}$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{4(k-1)}{3^k} &= \frac{4}{3}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell} = \frac{4}{3}\times\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}\\ &= \frac{4}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{3^2}{2^2} = 1.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left([X=n]\right) = 1$.

2. En utilisant la définition de l'espérance, sous réserve de la convergence des séries,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbf{P}([X=n]) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n\frac{4(n-1)}{3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{4(n-1)}{3^n} \\
&= 4\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}\right] \\
&= 4\left[\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}\right] \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{4}{3}\times\frac{3^3}{2^3} - \frac{3^2}{2^2}\right] \\
&= \frac{4}{3}\times\frac{3^2}{2^2}\left[\frac{4}{3}\times\frac{3}{2} - 1\right] \\
&= 3\times 1 = 3.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 19.

1. Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$ et $-1 < \frac{1}{2} < 1$, d'après les résultats sur les séries géométriques,

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

et

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty}\mathbf{P}([Y=n]) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
&= 3-2=1.
\end{aligned}$$

2. D'après la définition de l'espérance, sous réserve de convergence des sommes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \sum_{n=2}^{+\infty}\mathbf{P}([Y=n]) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
&= \frac{3}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{3}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 1\right] - 2\left[\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - 1\right] - 2\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 - 1}\right] \\
&= \frac{3}{2}(9-1) - 2(4-1) \\
&= 3\times 4 - 2\times 3 = 6.
\end{aligned}$$

□