

T.D. XIV - Nombres complexes

I - Écritures

Exercice 1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $(2 + 6i)(6 + i)$.
2. $(4 - 3i)^2$.
3. $(1 - 2i)(1 + 2i)$.
4. $(2 - 3i)^4$.

5. $\frac{1}{3-i}$.
6. $\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$.
7. $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

Exercice 2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. 12.
2. $\frac{3}{2}i$.
3. -3.
4. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
5. $-2i$.
6. $\frac{1+i}{1-i}$.
7. $\left(\frac{i}{1+i}\right)^4$.
8. $-3(\cos \theta + i \sin \theta)$.

9. $2(\cos(2\theta) - i \sin(2\theta))$.
10. $\frac{1+4i}{2-2i}$.
11. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(1-i)$.
12. $\frac{1-i\sqrt{3}}{-2-i\sqrt{3}}$.
13. $\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}$.
14. $\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}$.

Exercice 3. Soit $z = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

1. Calculer $|z|$.
2. Mettre z sous forme algébrique.
3. Calculer z^{2021} .

Exercice 4. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ de modules 1 tels que $a \neq b$. Montrer que $\frac{a+b}{a-b}$ est un nombre imaginaire pur.

Exercice 5. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^n e^{ikx}$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

II - Résolution d'équations

Exercice 6. Déterminer les nombres complexes z solutions des équations suivantes :

1. $z^2 + 9 = 0$
2. $z^2 - z + 1 = 0$.
3. $z^2 + z + 1 = 0$.
4. $3z^2 - 6z + 6 = 0$.
5. $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
6. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Soit z un réel tel que $z^n = 1$.

1. Montrer que $|z| = 1$. On pose dans la suite $z = e^{i\theta}$.
2. Déterminer les valeurs possibles pour θ .
3. Représenter graphiquement les solutions des équations :
 - a) $z^2 = 1$.
 - b) $z^3 = 1$.
 - c) $z^4 = 1$.
 - d) $z^5 = 1$.

III - Géométrie

Exercice 8. Soit z un nombre complexe de module 1.

- a) Calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.
- b) Représenter géométriquement les points d'affixes 1, z , $1-z$ et $1+z$ puis interprétez le résultat obtenu.

Exercice 9. Décrire les transformations du plan complexe définies par :

1. $z \mapsto (1+i)z + 2-i$.
2. $z \mapsto (-3+4i)z + 12+16i$.
3. $z \mapsto iz + 1$.

Exercice 10. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tels que $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ soit réel.