II - Calcul matriciel

I - Matrices

I.1 - Définition

Définition 1 - Matrices

Soit n, p deux entiers naturels non nuls.
- Une *matrice* de *taille* (n,p) est un tableau de nombres réels constitué de n lignes et de p colonnes.
- Le *coefficient* d'indice (i,j) d'une matrice est le coefficient situé à la i^{e} ligne et j^{e} colonne.
- L'ensemble des matrices de réels à n lignes et p colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note généralement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Exemple 1 - Matrices

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Définition 2 - Matrices lignes / colonnes

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Si $n = 1$, alors A est une *matrice ligne* (ou *vecteur ligne*).
- Si $p = 1$, alors A est une *matrice colonne* (ou *vecteur colonne*).

Exemple 2

- Les matrices suivantes sont des matrices lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- Les matrices suivantes sont des matrices colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Définition 3 - Égalité entre matrices

Deux matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ sont *égales* si elles ont même taille et si, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $j \in \{1,\ldots,p\}$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.

I.2 - Opérations

Définition 4 - Somme, Multiplcation par un réel

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
- L'*addition* de matrices de mêmes tailles est obtenue en additionnant les éléments de mêmes indices. Ainsi, la matrice $A+B$ est la matrice de taille (n,p) et de coefficients $(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ définis par

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

- La *multiplication* d'une matrice par un réel est obtenue en multipliant chacun des coefficients de la matrice par ce réel. Ainsi, la matrice αA est la matrice de taille (n,p) et de coefficients $(d_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ définis par

$$d_{i,j} = \alpha a_{i,j}.$$

Exemple 3

- Soit $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 5\end{pmatrix}$. Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix}4 & 1\\5 & 9\end{pmatrix},\ 3A = \begin{pmatrix}3 & 6\\9 & 12\end{pmatrix}.$$

- Soit $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2}\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}3 & 1 & -\frac{1}{2}\\\frac{2}{3} & 1 & -2\end{pmatrix}$. Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\\frac{2}{3} & 3 & -1\end{pmatrix},\ 3A = \begin{pmatrix}3 & 0 & \frac{9}{2}\\0 & 6 & 3\end{pmatrix}.$$

Définition 5 - Matrice nulle

La matrice de taille (n,p) dont tous les coefficients sont nuls est la *matrice* nulle. Elle est notée $0_{n,p}$.

Proposition 1 - Propiétés de l'addition et de la multiplication par un réel

Soit A, B, $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$.
- *Commutativité.* $A + B = B + A$.
- *Associativité.* $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $A + (-1)A = 0_{n,p}$.

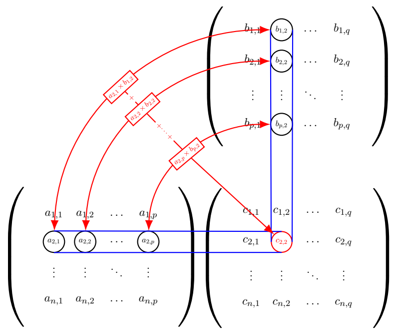
Définition 6 - Produit de matrices de tailles compatibles

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. La matrice $C = A \times B$ est la matrice de taille (n,q) dont le coefficient d'indice (i,j) est donné par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Représentation du produit matriciel

Pour effectuer un produit matriciel on représente souvent les matrices sur deux étages :



Exemple 4 - Calculs de produits

- $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 0 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\0 & -1 & 0\\1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 3 & 10\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 0 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\3 & -2 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x + 5y + z\\3x - 2y + z\end{pmatrix}$.
- On considère trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défi-

nies par $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} & = 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} & = -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} & = z_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

En notant $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n.$$

Proposition 2 - Propriétés du produit matriciel

Soit A, B, C trois matrices dont les tailles sont compatibles et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *Associativité.* $(AB)C = A(BC)$.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- *Distributivité.*
  $(A+B)C = AC + BC$ et $A(B+C) = AB + AC$.

II - Matrices carrées

Définition 7 - Matrices carrées

Une *matrice carrée* M d'ordre p est une matrice dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes est égal à p. L'ensemble des matrices carrées d'ordre p est noté $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

Exemple 5 - Matrices carrées

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition 8 - Triangulaires, Diagonales, Identité

- Une matrice est *triangulaire supérieure* si les coefficients en dessous de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *triangulaire inférieure* si les coefficients au dessus de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *diagonale* si les coefficients en dehors de sa diagonale sont nuls.
- La matrice *identité* est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. La matrice identité d'ordre p est notée I_p.
- La matrice *nulle* est la matrice dont tous les éléments valent 0. La matrice nulle d'ordre p est notée 0_p.

Exemple 6

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale.
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3.

III - Opérations sur les matrices carrées

Proposition 3

Si A et B sont des matrices carrées d'ordre p, alors
- $A+B$ et AB sont bien définies et appartiennent à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- $AI_p = I_pA = A$.
- $A0_p = 0_pA = 0_p$.

Exemple 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.
- $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 10 & 10 & -2 \end{pmatrix}$.
- $AB = \begin{pmatrix} 2 & 60 & 16 \\ 13 & 20 & -1 \\ -13 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
- $BA = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 5 \\ -5 & -19 & -3 \\ 0 & 87 & 44 \end{pmatrix}$.

IV - Calculs de puissances

Exemple 8 - Pourquoi calculer des puissances de matrices ?

On considère les suites définies par $x_0 = y_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} & = y_n \\ y_{n+1} & = x_n - y_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors,

$$\begin{aligned} U_1 &= A \times U_0 \\ U_2 &= A \times U_1 \\ &= \underbrace{A \times A}_{2 \text{ facteurs}} \times U_0 \\ U_3 &= A \times U_2 \\ &= A \times A \times U_1 \\ &= \underbrace{A \times A \times A}_{3 \text{ facteurs}} U_0 \\ \vdots &= \vdots \\ U_n &= \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}} U_0 \end{aligned}$$

Définition 9 - Puissance d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre p et n un entier naturel. Alors,
- $A^0 = I_p$.
- $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$.

Exemple 9

- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors,
  - $\star$ $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  - $\star$ $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
  - $\star$ $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
  - $\star$ $A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors,
  - $\star$ $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  - $\star$ $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  - $\star$ $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  - $\star$ $A^3 = A \times A^2 = A \times I_2 = A$.

IV.1 - Matrices diagonales

Proposition 4 - Puissance d'une matrice diagonale

Soit D une matrice diagonale d'ordre p et n un entier naturel. La matrice D^n est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de D élevés à la puissance n.

Exemple 10 - Puissances & Diagonales

Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.
Cette propriété se prouve par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a bien $D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n, c'est-à-dire $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D^n \times D \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

IV.2 - Formule du binôme de Newton

Binôme de Newton

Les coefficients binomiaux s'obtiennent rapidement à l'aide du triangle de Pascal :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Ce tableau correspond aux coefficients binomiaux suivants :

$$\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Proposition 5 - Coefficients binomiaux

Soit n un entier naturel non nul et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors,

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$,
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$,
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Théorème 1 - Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux réels et n un entier naturel. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 11

- $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Définition 10 - Matrices qui commutent

Soit A et B deux matrices d'ordre p. Les matrices A et B *commutent* si $AB = BA$.

Exemple 12 - Commutativité

- I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ commutent.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ ne commutent pas.

Théorème 2 - Formule du binôme de Newton

Soient A et B deux matrices d'ordre p qui commutent. Alors, pour tout n entier naturel,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Exemple 13 - Application de la formule du binôme

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- D'une part, $A = I_2 + N$.
- D'autre part, $I_2N = NI_2 = N$. Ainsi, I_2 et N commutent.
- On remarque ensuite que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_2^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k, \quad \text{car } I_2^{n-k} = I_2 \\
&= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + 0_2 + \cdots + 0_2 \\
&= I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$