Endomorphismes euclidiens

Chapitre XIV

I. Réduction des matrices symétriques

Exercice 1. (✍) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & b & a \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Exercice 3. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n. On pose $f : X \mapsto \|AX\|^2 - \langle AX, X\rangle^2$.

1. La fonction f est-elle minorée ?

2. Montrer que, si f est majorée, alors les valeurs propres de A sont toutes de même signe.

3. Lorsque les valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ de A sont toutes de même signe, montrer que $\sup\limits_{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f(X) = \frac{\lambda_n}{4}$.

Exercice 4. (Inégalité d'Hadamard, ♡) Soient $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n symétriques à valeurs propres strictement positives et $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Soit $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$. Montrer que $B = (\gamma_i \gamma_j a_{i,j}) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\det(A)^{1/n} \leqslant \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n}$.
On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité arithmético-géométrique.

3. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} > 0$. On pose $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{a_{i,i}}}$. En déduire que $\det(A) \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, $a \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice $C = \begin{pmatrix} a & {}^tB \\ B & A \end{pmatrix}$ est définie positive, i.e. pour tout $X \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXCX \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $X = 0_{n+1,1}$.

1. Montrer que A est inversible.

2. Montrer que l'application $J : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $X \mapsto {}^tXAX - 2{}^tBX + a$ atteint son minimum en $X_0 = A^{-1}B$.

Exercice 6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de l'espace vectoriel usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient u et v deux vecteurs unitaires orthogonaux et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f : x \mapsto x + \langle u, x\rangle v + \langle v, x\rangle u$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et que $P = \mathrm{Vect}\{u, v\}$ est stable par f.

2. Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres.

II. Endomorphismes orthogonaux

Exercice 7. (✍) [CCP] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $B = {}^tAA$.

1. Montrer que B n'est pas inversible.

2. Montrer que B est diagonalisable.

3. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(B)$ et que $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.

4. La matrice A est-elle orthogonale ?

5. Montrer que A et B commutent.

6. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $-\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 8. (✍) Soient u, $v \in \mathbb{R}^2$ unitaires. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on note $p(x) = \langle x, u\rangle u$ et $q(x) = \langle x, v\rangle v$. Montrer que $p + q - 2p \circ q$ est une similitude directe, i.e. est la composée d'une rotation et d'une homothétie.

Exercice 9. (✎) Soient $g \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^2)$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer les automorphismes orthogonaux f tels que $f^n = g$.

Exercice 10. [ENSAM] Déterminer le cardinal de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 11. Soient E une espace vectoriel de dimension 3 et f, g deux rotations de E qui ne sont ni des symétries ni l'identité. Si $f \circ g = g \circ f$, que peut-on dire de f et de g ?

Exercice 12. (✍) Soit $v_1 = (1,1,2)$ et $v_2 = (1,-1,0)$. Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour vecteurs propres v_1, v_2 et $v_1 \wedge v_2$.

Exercice 13. [ENSAM] L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée canonique. Soit ω un vecteur non nul et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \omega \wedge x$.

1. Montrer que f est un endomorphisme et que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$, $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

2. Trouver un polynôme annulateur de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Montrer que l'endomorphisme $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^{-1}$ est bien défini et déterminer ses propriétés géométriques.

Exercice 14. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux sur un espace vectoriel euclidien de dimension n. On suppose que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal.

1. Montrer que $p \circ q = q \circ p$.

2. Montrer que $\mathrm{Sp}(p+q) \subset \{0,1,2\}$. Donner un exemple où il y a égalité.

Exercice 15. [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre

(i). $\exists\, \Omega \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$; $M\Omega = \Omega S$.

(ii). $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\chi_M = \chi_S$.

2. Décrire les matrices Ω qui conviennent ?

III. Avec Python

Exercice 16. (Matrices d'Hadamard) [Centrale] On note H_n l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1,1\}$ dont les colonnes sont orthogonales pour le produit scalaire canonique, et SH_n l'ensemble des matrices symétriques de H_n.

1. Donner une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et la programmer en Python.

2. Soit A une matrice à coefficients dans $\{-1,1\}$. Montrer que A appartient à H_n si et seulement si $A^tA = nI_n$.

3. a) Que fait la commande Python :
`[[x,y] for x in [0,1] for y in [0,1]]` ?

b) Écrire une suite d'instructions en Python qui donne l'ensemble des matrices de H_4. Quel est le cardinal de H_4 ?

c) Même question avec SH_4.

4. Trouver avec Python l'ensemble $E = \{\mathrm{Tr}(A),\ A \in SH_4\}$. Le démontrer sans Python.

Mathématiciens

Hadamard Jacques Salomon (8 déc. 1865 à Versailles-17 oct. 1963 à Paris).