

# V - Estimation

## I - Définitions

### Définition 1 - Échantillon

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $X$  une variable aléatoire. Un  $n$ -échantillon de  $X$  est un  $n$ -uplet  $(X_1, \dots, X_n)$  tel que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  soient mutuellement indépendantes et de même loi que  $X$ .

### Définition 2 - Estimateur

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de probabilité dépendant d'un paramètre  $\theta$  et  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de  $X$ . Un *estimateur* de  $\theta$  est une variable aléatoire  $\varphi(X_1, \dots, X_n)$  où  $\varphi$  est une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Exemple 1 - Estimateurs

- Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon d'une variable aléatoire  $X$ . Les quantités suivantes sont des estimateurs de  $\mathbf{E}[X]$  :

$$\star T_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

$$\star T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_k.$$

$$\star T_3 = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

$$\star T_4 = \frac{X_1 X_2}{2}.$$

- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , on peut chercher à estimer son paramètre  $p$  (qui est égal à son espérance), sa variance  $\sigma^2 = p(1-p), \dots$
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ , on peut chercher à estimer son paramètre  $\lambda$  (qui est égal à son espérance), la quantité  $\mathbf{P}([X = 0]) = e^{-\lambda}, \dots$
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ , on peut chercher à estimer son paramètre  $n$ . Par exemple, si on a accès aux résultats d'un dé, on peut chercher à estimer son nombre de faces.

### Définition 3 - Biais

Soit  $T$  un estimateur de  $\theta$ . Le *biais* de  $T$  est le réel  $b_\theta(T) = \mathbf{E}[T] - \theta$ . Si  $b_\theta(T) = 0$ , l'estimateur  $T$  est un estimateur *sans biais* de  $\theta$ .

### Exemple 2 - Calculs de biais

Reprenons l'exemple précédent en notant  $m = \mathbf{E}[X]$ .

- Soit  $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ . Alors,

$$\mathbf{E}[T_1] - m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k] - m = \frac{nm}{n} - m = 0.$$

Ainsi,  $T_1$  est un estimateur sans biais de  $m$ .

- Soit  $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_k$ . Alors,

$$\mathbf{E}[T_2] - m = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k] - m = \frac{nm}{n-1} - m = \frac{m}{n(n-1)}.$$

Ainsi,  $T_2$  est un estimateur de  $m$  de biais  $\frac{m}{n(n-1)}$ .

- Soit  $T_3 = \frac{X_1 + X_2}{2}$ . Alors,

$$\mathbf{E}[T_3] - m = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]}{2} - m = 0.$$

Ainsi,  $T_3$  est un estimateur sans biais de  $m$ .

- Soit  $T_4 = \frac{X_1 X_2}{2}$ . Les variables aléatoires étant indépendantes,

$$\mathbf{E}[T_4] - m = \frac{\mathbf{E}[X_1] \mathbf{E}[X_2]}{2} - m = \frac{m^2}{2} - m = \frac{m(m-2)}{2}.$$

Ainsi,  $T_4$  est un estimateur de  $m$  de biais  $\frac{m(m-2)}{2}$ .

**Définition 4 - Risque quadratique**

Soit  $T$  un estimateur de  $\theta$ . Le *risque quadratique* de  $T$  est défini par

$$R_\theta(T) = \mathbf{E} [(T - \theta)^2].$$

En particulier,

$$R_\theta(T) = b(T, \theta)^2 + \mathbf{V}(T).$$

Si  $T$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ , alors  $R_\theta(T) = \mathbf{V}(T)$ .

**Exemple 3 - Calculs de risques quadratiques**

Reprenons les exemples précédents, pour les estimateurs sans biais. On suppose que  $X$  admet une variance.

- Comme  $T_1$  est un estimateur sans biais de  $m$ , alors les variables aléatoires étant indépendantes,

$$\begin{aligned} R_m(T_1) &= \mathbf{V}(T_1) = \mathbf{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) \\ &= \frac{\mathbf{V}(X)}{n}. \end{aligned}$$

- Comme  $T_3$  est sans biais et  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes,

$$R_m(T_3) = \mathbf{V}(T_3) = \frac{\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2)}{4} = \frac{\mathbf{V}(X)}{2}.$$

**Définition 5 - Meilleur estimateur**

L'estimateur  $T_1$  est un *meilleur estimateur* que  $T_2$  si

$$\forall \theta \in I, R_\theta(T_1) \leq R_\theta(T_2).$$

**Exemple 4 - Comparaison d'estimateurs**

En reprenant l'exemple précédent,  $T_1$  est un meilleur estimateur que  $T_3$  dès que  $n \geq 2$ .

**II - Estimation d'une proportion****Théorème 1 - Loi faible des grands nombres**

Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une moyenne  $m$  et une variance  $\sigma^2$ . Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que  $X$ . Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

**Définition 6 - Estimateur convergent**

Soit  $T_n$  un estimateur de  $\theta$ . L'estimateur  $T_n$  est *convergent* si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$ .

**Théorème 2 - Estimation ponctuelle d'une proportion**

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de  $X$  et  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Alors,  $\bar{X}_n$  est un estimateur sans biais et convergent de  $p$ .

**Exemple 5 - Sondage**

On souhaite connaître la proportion de français favorables à une réforme donnée. On modélise le problème en considérant une variable aléatoire  $X$  suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . On interroge  $n$  français choisis indépendamment dans la population. On note  $X_i$  la réponse donnée par l'individu numéro  $i$  : 1 si l'individu est favorable et 0 sinon. On suppose que  $X_i$  suit la même loi que  $X$ . Pour estimer  $p$ , on va donc utiliser la quantité  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ .