

T.D. XIV - Nombres complexes

I - Écritures

Exercice 1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- | | |
|-------------------------|---|
| 1. $(2 + 6i)(6 + i)$. | 5. $\frac{1}{3-i}$. |
| 2. $(4 - 3i)^2$. | 6. $\frac{1-\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i}$. |
| 3. $(1 - 2i)(1 + 2i)$. | 7. $\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}$. |
| 4. $(2 - 3i)^4$. | |

Exercice 2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

- | | |
|---|--|
| 1. 12. | 8. $-3(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)$. |
| 2. $\frac{3}{2}i$. | 9. $2(\cos(2\theta) - \sin(2\theta)i)$. |
| 3. -3. | 10. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(1 - i)$. |
| 4. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. | 11. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{1-\sqrt{3}i}$. |
| 5. -2i. | 12. $\sin(\theta) + \cos(\theta)i$. |
| 6. $\frac{1+i}{1-i}$. | |
| 7. $\left(\frac{i}{1+i}\right)^4$. | |

Exercice 3. Soit $z = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

- Calculer $|z|$.
- Mettre z sous forme algébrique.
- Calculer z^{2021} .

Exercice 4. (Angle moitié) Soit $a, b \in \mathbb{C}$ de modules 1 tels que $a \neq b$. Montrer que $\frac{a+b}{a-b}$ est un nombre imaginaire pur.

On pourra écrire $a = e^{i\theta}$ et $b = e^{i\varphi}$ sous forme trigonométrique puis factoriser par $e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}$.

Exercice 5. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer $\sum_{k=0}^n e^{kxi}$.
- En déduire $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

II - Résolution d'équations

Exercice 6. Déterminer les nombres complexes z solutions des équations suivantes :

- | | |
|------------------------|-------------------------------------|
| 1. $z^2 + 9 = 0$ | 4. $3z^2 - 6z + 6 = 0$. |
| 2. $z^2 - z + 1 = 0$. | 5. $z^4 + z^2 + 1 = 0$. |
| 3. $z^2 + z + 1 = 0$. | 6. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$. |

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Soit z un nombre complexe tel que $z^n = 1$.

- Montrer que $|z| = 1$. On pose dans la suite $z = e^{i\theta}$.
- Déterminer les valeurs possibles pour θ .
- Représenter graphiquement les solutions des équations :

| | |
|----------------|----------------|
| a) $z^2 = 1$. | c) $z^4 = 1$. |
| b) $z^3 = 1$. | d) $z^5 = 1$. |

III - Géométrie

Exercice 8. Soit z un nombre complexe de module 1.

- Calculer $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$.
- Représenter géométriquement les points d'affixes 1, z , $1 - z$ et $1 + z$ puis interprétez le résultat obtenu.

Exercice 9. Décrire les transformations du plan complexe définies par :

1. $z \mapsto e^{\frac{\pi}{4}i}(z - (1 + i)) + 1 + i$.
2. $z \mapsto z + 12 + 16i$.
3. $z \mapsto iz + 1$.

Exercice 10. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tels que $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ soit réel.