Autour des règles de convergence / divergence

■ ■ ■

Soit (u_n) une suite de réels positifs.

Partie I : Règle de condensation de Cauchy

On suppose que la suite (u_n) est décroissante.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 2^n u_{2^n}$ converge.

2. Retrouver le critère de convergence des séries de Riemann.

3. Montrer que la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Partie II : Règle d'Alembert

On suppose que, à partir d'un certain rang, la suite (u_n) ne s'annule pas et qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

4. Règle.

a) Montrer que, si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.

b) Montrer que, si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

5. Exemples. Soit $x > 0$. Étudier la convergence des séries de terme général

a) $\binom{n+4}{n} x^n$. **b)** $\frac{x^n}{n!}$. **c)** $n! x^{n^2}$.

6. Limites. Montrer que, lorsque $\ell = 1$ dans le théorème précédent, on ne peut en général pas conclure.

Partie III : Règle de Rabbe-Duhamel

On suppose que, à partir d'un certain rang, la suite (u_n) ne s'annule pas et qu'il existe β tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

7. Règle.

a) Montrer que, si $\beta > 1$, alors $\sum u_n$ converge.

b) Montrer que, si $\beta < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

8. Exemples. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Déterminer la nature dess séries de terme général :

a) $n! \ln(1+1) \cdots \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. **b)** $\frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}$.

9. Limites. Montrer que, si $\beta = 1$, on ne peut en général pas conclure.

Partie IV : Règle de Cauchy

On suppose qu'il existe $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$.

10. Règle.

a) Montrer que, si $\lambda < 1$, alors $\sum u_n$ converge.

b) Montrer que, si $\lambda > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

11. Exemples. Déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$. **c)** $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

b) $\left(\frac{3n+4}{2n+1}\right)^n$.

12. Limites. Montrer que, lorsque $\lambda = 1$, on ne peut, en général, pas conclure.

Partie V : Pas de frontière entre divergence et convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ diverge. On note (s_n) la suite de ses sommes partielles, i.e. pour tout entier naturel n non nul, $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

13. Exemples.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$, puis de $\sum \frac{u_n}{1+nu_n}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1$ s'il existe un entier m tel que $n = 2^m - 1$ et 0 sinon. Déterminer la nature de $\sum u_n$, puis de $\sum \frac{u_n}{1+nu_n}$.

14. On suppose dans cette question que la suite (u_n) est à valeurs strictement positives. Montrer que $\sum \frac{u_n}{1+n^2 u_n}$ converge.

15. a) Montrer que si $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge, alors (u_n) converge vers 0.

b) Montrer que si (u_n) converge vers 0, alors $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ diverge.

c) En déduire la nature de $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$.

16. Soit (u_n) une suite de réels positifs et (t_n) la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n. Montrer que si (t_n) converge, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tous $n \geqslant n_0$, $p \geqslant 0$, $|t_{n+p} - t_n| \leqslant \varepsilon$.

17. a) Soient $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{u_{n+j}}{s_{n+j}} \geqslant 1 - \frac{s_n}{s_{n+k}}$.

b) En déduire que $\left(\sum \frac{u_n}{s_n}\right)$ diverge.

18. a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\frac{u_n}{(s_n)^2} \leqslant \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$

b) En déduire que $\sum \frac{u_n}{(s_n)^2}$ converge.

Mathématiciens

Alembert Jean Le Rond d' (17 nov. 1717 à Paris-29 oct. 1783 à Paris).
Cauchy Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).
Duhamel Jean-Marie (5 fév. 1797 à St Malo-29 avr. 1872 à Paris).
Bertrand Joseph (11 mar. 1822 à Paris-3 avr. 1900 à Paris).
Riemann Georg Friedrich Bernhard (17 sept. 1826 à Breselenz-20 juil. 1866 à Selasca).