

# VI - Calculs de sommes

## Séries numériques

### Révisions

Suites numériques.

## I - Calculs de sommes

### I.1 - Généralités

#### Définition 1 - Le symbole $\sum$

Le symbole  $\sum$  permet de désigner la somme des termes d'une suite de réels. Ainsi, si  $(u_k)_{p \leq k \leq n}$  est une suite de réels,

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

On prononce *somme pour k variant de p à n des  $u_k$* .

#### Exemple 1 - Quelques sommes

- Si  $u_k = 2$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= u_1 + \cdots + u_n \\ &= \underbrace{2 + \cdots + 2}_{n \text{ termes}} = 2n. \end{aligned}$$

- Si  $v_k = 3$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , alors

$$\sum_{k=0}^n v_k = v_0 + \cdots + v_n = \underbrace{3 + \cdots + 3}_{n+1 \text{ termes}} = 3(n+1).$$

- Si  $w_k = k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ , alors

$$\sum_{k=0}^5 w_k = w_0 + \cdots + w_5 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

#### Proposition 1 - Somme de termes constants

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

- $\sum_{k=1}^n a = n \times a$ ,
- $\sum_{k=0}^n a = (n+1) \times a$ ,
- $\sum_{k=p}^n a = (n-p+1) \times a$ .

#### Exemple 2

- $\sum_{k=3}^7 2 = (7-3+1) \times 2 = 10$ .
- $\sum_{k=1}^{12} e = (12-1+1) \times e = 12e$ .
- Soit  $n$  un entier naturel.  $\sum_{k=0}^n n = (n+1-1)n = n^2$ .

#### Proposition 2

Soit  $(u_k)_{1 \leq k \leq n+1}$  une suite de réels. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \left( \sum_{k=0}^n u_k \right) + u_{n+1}.$$

**Proposition 3 - Sommes classiques**

Soit  $q \neq 1$ . On prouve par récurrence que :

- $\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .
- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .
- $\sum_{k=p}^n q^k = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ .

**Exemple 3 - Sommes classiques**

- $\sum_{k=0}^{100} k = \frac{100 \times (100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$ .
- $\sum_{k=0}^{12} k = \frac{12 \times (12+1)}{2} = 6 \times 13 = 78$ .
- $\sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{1-2^{10+1}}{1-2} = 2^{11} - 1$ .
- $\sum_{k=3}^{12} 3^k = 3^3 \times \frac{1-3^{12-3+1}}{1-3} = 3^3 \times \frac{3^{10} - 1}{2}$ .
- $\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{101}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{101}}\right)$ .

**Proposition 4 - Linéarité de la somme**

Soient  $(u_k)_{p \leq k \leq n}$ ,  $(v_k)_{p \leq k \leq n}$  deux suites de réels et  $\alpha$  un réel.

$$\sum_{k=p}^n (\alpha \times u_k + v_k) = \alpha \sum_{k=p}^n u_k + \sum_{k=p}^n v_k.$$

**Exemple 4 - Un calcul de somme**

Calculons

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{10} \left(2 + \frac{3}{5^k}\right) &= \sum_{k=3}^{10} 2 + \sum_{k=3}^{10} \left(3 \times \frac{1}{5^k}\right) \\ &= 2(10 - 3 + 1) + 3 \times \sum_{k=3}^{10} \left(\frac{1}{5}\right)^k \\ &= 2 \times 8 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10-3+1}}{1 - \frac{1}{5}} \\ &= 16 + \frac{3}{5^3} \times \frac{1 - \frac{1}{5^8}}{\frac{4}{5}} = 16 + \frac{3}{5^3} \times \frac{5}{4} \times (1 - 5^{-8}) \\ &= 16 + \frac{3}{100} (1 - 5^{-8}). \end{aligned}$$

**I.2 - Sommes télescopiques****Proposition 5 - Somme télescopique**

Soit  $(u_k)_{p \leq k \leq n+1}$  une suite de réels. Alors,

$$\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

et

$$\sum_{k=p}^n (u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{n+1}.$$

**Exemple 5 - Deux sommes télescopiques**

- Lorsque  $p = 0$  et  $n = 4$ ,

$$\sum_{k=0}^4 (u_{k+1} - u_k) = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots$$

$$\begin{aligned} & \cdots + (u_4 - u_3) + (u_5 - u_4) \\ &= u_5 - u_0. \end{aligned}$$

- On remarque que  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= - \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= - \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

En particulier,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$ .

### I.3 - Changements d'indices

#### Proposition 6 - Changement d'indice

Soit  $(u_k)_{0 \leq k \leq n+1}$  une suite de réels.

- $\sum_{k=p}^{k=n} u_{k-1} = \sum_{k-1=p-1}^{k-1=n-1} u_{k-1} = \sum_{\ell=p-1}^{\ell=n-1} u_{\ell}.$
- $\sum_{k=p}^{k=n} u_{k+1} = \sum_{k+1=p+1}^{k+1=n+1} u_{k+1} = \sum_{\ell=p+1}^{\ell=n+1} u_{\ell}.$

#### Exemple 6 - Un changement d'indice

On admet que, pour tout  $n$  entier naturel,  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k+1)^2 &= \sum_{k+1=1}^{k+1=n+1} (k+1)^2 = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell^2 \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+1} \ell^2 - 0^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

## II - Séries numériques

### Définition 2 - Série

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels. Pour tout  $n$  entier naturel, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

- La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la *série de terme général*  $u_n$ .
- Le réel  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  est la *somme partielle* d'ordre  $n$ .

On note  $\sum u_n$  la suite  $\left( \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Exemple 7 - Des sommes partielles

- La somme partielle d'ordre 100 de la série de terme général  $\frac{1}{n}$  est :

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}.$$

- La somme partielle d'ordre 10 de la série de terme géné-

ral  $\frac{1}{2^n}$  est :

$$S_{100} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^{11}} \right).$$

## II.1 - Nature des séries

### Définition 3 - Série convergente, Série divergente

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels.

- Si  $\left( \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, alors la série de terme général  $u_n$  converge. Sinon, la série de terme général  $u_n$  diverge.
- Si la série de terme général  $u_n$  converge, la limite de  $\left( \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est la somme de cette série. On note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

### Exemple 8 - Une série convergente / Une série divergente

- On a vu que pour tout  $n$  entier naturel non nul,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1$ . Donc la série de terme général  $\frac{1}{k(k+1)}$  converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

- Soit  $\sum u_n$  la série de terme général  $4^n$ . Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 4^k &= \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} \\ &= 3(4^{n+1} - 1) \\ &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général  $4^n$  diverge.

### Théorème 1 - Condition nécessaire de convergence

- Si la série de terme général  $u_n$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
- Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0, alors la série de terme général  $u_n$  diverge.

### Exemple 9 - Divergence grossière

- Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n} = +\infty$ , alors la série de terme général  $\frac{n^2+1}{n}$  diverge.
- Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2-n+1}{2n(n+1)} = \frac{3}{2}$ , alors la série de terme général  $\frac{3n^2-n+1}{2n(n+1)}$  diverge.

## II.2 - Série géométrique

### Théorème 2 - Série géométrique

- Si  $q \in ]-1, 1[$ , alors la série de terme général  $q^n$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

- Si  $q \geq 1$  ou  $q \leq -1$ , alors la série de terme général  $q^n$  diverge.

**Exemple 10 - Une série géométrique**

Soit  $\sum u_n$  la série de terme général  $\frac{1}{2^n}$ . Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} &= \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ &\rightarrow 2.\end{aligned}$$

Ainsi,  $\sum \frac{1}{2^n}$  converge et sa somme vaut  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$ .

**III - 3 exemples de raisonnements****Théorème 3 - Une série de Riemann [H.P.]**

$$\sum \frac{1}{k^2} \text{ converge.}$$

**Exemple 11**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

- Montrons que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante. D'après les propriétés de la somme,

$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_{n+1} \geq S_n$  et  $(S_n)$  est croissante.

- En utilisant un changement de variable,

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k-1=0}^{k-1=n-1} \frac{1}{(k-1+1)^2} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\ell=n-1} \frac{1}{(\ell+1)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}.\end{aligned}$$

- Montrons que  $(S_n)$  est majorée.

$$\begin{aligned}k &\leq k+1 \\ \frac{1}{k+1} &\leq \frac{1}{k} \\ \frac{1}{(k+1)^2} &\leq \frac{1}{k(k+1)} \\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} - 1 &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 1 &\leq 1 - \frac{1}{n} \\ S_n &\leq 1 - \frac{1}{n} + 1 \\ &\leq 2.\end{aligned}$$

Ainsi,  $(S_n)$  est majorée par 2.

- Finalement,  $(S_n)$  est croissante et majorée donc convergente et  $\sum \frac{1}{k^2}$  converge. On peut montrer que sa somme vaut  $\frac{\pi^2}{6}$ .

**Théorème 4 - Série exponentielle [H.P.]**

$$\sum \frac{1}{k!} \text{ converge.}$$

**Exemple 12**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

- D'après les propriétés de la somme,

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n \geq 0$ ,  $T_{n+1} \geq T_n$  et  $(T_n)$  est croissante.

- De plus, pour tout  $k \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} k &\geq 2 \\ k(k-1)(k-2) \cdots 2 &\geq 2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 \\ k! &\geq 2^{k-1} \\ \frac{1}{k!} &\leq \frac{1}{2^{k-1}} \\ \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ T_n - 2 &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}} \\ T_n &\leq \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{2^\ell} + 2 \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n &\leq 1 - \frac{1}{2^n} + 2 \\ &\leq 3. \end{aligned}$$

Donc  $(T_n)$  est majorée par 3.

- Ainsi,  $(T_n)$  est croissante et majorée donc convergente. On peut montrer que sa limite vaut  $e^1$ . On peut généraliser ce résultat en montrant que pour tout réel  $x$ , la série  $\sum \frac{x^k}{k!}$  converge et sa somme vaut  $e^x$ .

**Théorème 5 - Série géométrique dérivée [H.P.]**

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < 1$ . Alors,

$$\sum kx^{k-1} \text{ converge.}$$

**Exemple 13**

On considère la fonction définie sur  $] -1, 1[$  par  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ .

La fonction  $f_n$  est dérivable et  $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ .

Or,  $f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ .

Ainsi,

$$f'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)x^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$ . Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Donc  $\sum kx^{k-1}$  converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$