

T.D. IV - Variables aléatoires discrètes finies

I - Lois usuelles

Exercice 1. Une urne contient 4 boules, indistinguables au toucher, numérotées de 1 à 4. On tire aléatoirement une boule dans l'urne et on note X son numéro.

Reconnaitre la loi de la variable aléatoire X puis donner l'espérance et la variance de X .

Exercice 2. On dispose d'un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. Le dé est lancé et on note X la valeur du nombre obtenu.

Reconnaitre la loi de la variable aléatoire X puis donner l'espérance et la variance de X .

Exercice 3. On dispose d'un jeton à 2 faces. Sur l'une des faces est inscrit un 0 et sur l'autre face est inscrit un 1. La probabilité que, lors d'un lancer, la face contenant 1 soit visible est égale à $\frac{2}{3}$. On note X le nombre qui apparaît quand on lance le jeton.

1. Reconnaitre la loi de X puis donner l'espérance et la variance de X .

Le jeton est lancé successivement 5 fois. On note Y le nombre de 1 qui sont apparus au cours de ces lancers.

2. Reconnaitre la loi de Y puis donner l'espérance et la variance de Y .

Exercice 4. Une entreprise fabrique en série des ampoules. 5% des ampoules présentent un défaut et sont inutilisables. On prélève une ampoule du stock et on note X son état : 0 si elle est défectueuse, 1 si elle fonctionne.

1. Reconnaitre la loi de X puis donner l'espérance et la variance de X .

On prélève maintenant 30 ampoules du stock. On note Y le nombre d'ampoules défectueuses.

2. Reconnaitre la loi de Y puis donner l'espérance et la variance de Y .

Exercice 5. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires, indistinguables au toucher. On tire, successivement et avec remise, 4 boules de l'urne. On note X le nombre de boules noires tirées.

Reconnaitre la loi de X puis donner l'espérance et la variance de X .

Exercice 6. Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires, indistinguables au toucher. On tire, successivement et avec remise, 5 boules de l'urne. On note X le nombre de boules rouges tirées.

Reconnaitre la loi de X puis donner l'espérance et la variance de X .

Exercice 7. Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2 et 2, indistinguables au toucher. On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne. On note X le nombre de boules numérotées 1 obtenues.

Reconnaitre la loi de X puis donner l'espérance et la variance de X .

Exercice 8. Un dé équilibré à 12 faces est lancé successivement 5 fois. On note X le nombre de 1 obtenus au cours de ces lancers.

Reconnaitre la loi de X puis donner l'espérance et la variance de X .

II - Calculs de lois

Exercice 9. Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2 et 4, indistinguables au toucher. On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne. On note X la somme des numéros des boules obtenues.

Déterminer la loi de X puis calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 10. Une pièce de monnaie renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$. Un joueur joue contre son banquier. Si le lancer renvoie Face, le joueur gagne 10€. Si le lancer renvoie Pile, il perd 5€. On note S la somme que le joueur a remportée au cours de 3 lancers successifs (cette somme peut être négative).

1. Déterminer la loi de S .

2. Calculer l'espérance et la variance de S .

Exercice 11. On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

k	-2	-1	0	3
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

On pose $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Déterminer l'espérance et la variance de X .
3. Déterminer l'espérance et la variance de Y .

Exercice 12. On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

k	0	1	4	9
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

On pose $Y = \sqrt{X}$.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Déterminer l'espérance et la variance de X .
3. Déterminer l'espérance et la variance de Y .

Exercice 13. On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

k	1	2	3	4	5
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

On pose $Y = |X - 3|$.

1. Déterminer la loi de Y puis l'espérance de Y .
2. Calculer directement l'espérance de Y à l'aide du théorème de transfert.

Exercice 14. On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

k	-1	0	1	2	3
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

On pose $Y = |X - 1|$.

1. Déterminer la loi de Y puis l'espérance de Y .
2. Calculer directement l'espérance de Y à l'aide du théorème de transfert.

III - Espérance & Variance sans calcul de loi

Exercice 15. Un dé équilibré à 12 faces est lancé successivement 30 fois. Les lancers sont supposés indépendants. On note X_i le résultat obtenu lors du i^{e} lancer, $S = \sum_{i=1}^{30} X_i$ la somme des valeurs obtenues et $P = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{30}$ leur produit.

1. Calculer l'espérance et la variance de S .
2. Calculer l'espérance de P .

Exercice 16. Une pièce de monnaie renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$. Un joueur joue contre son banquier. Si le lancer renvoie Face, le joueur gagne 10€. Si le lancer renvoie Pile, il perd 5€. La pièce est lancée successivement 50 fois. On note X_i la somme (éventuellement négative) empochée par le joueur lors du i^{e} lancer, $S = \sum_{i=1}^{50} X_i$ la somme finalement accumulée par le joueur et $P = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{50}$ leur produit.

1. Calculer l'espérance et la variance de S .
2. Calculer l'espérance de P .

IV - Lois de couple

Exercice 17. Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

$x \backslash y$	1	2	3	4
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Compléter la case vide.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) . En déduire $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{E}[Y]$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 1]$.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbf{P}([X = 0] \cup [Y = 1])$.
6. Calculer la covariance de X et de Y .
7. Calculer $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$. En déduire $\rho(X, Y)$.
8. Calculer $\text{Cov}(X + Y, X)$, $\text{Cov}(X, X + Y)$ et $\text{Cov}(2X, X)$.

Exercice 18. Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

$x \backslash y$	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
1		0	$\frac{1}{8}$

1. Compléter la case vide.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) . En déduire $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{E}[Y]$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y = 3]$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbf{P}([X = 1] \cup [Y = 1])$.
6. Calculer la covariance de X et de Y .
7. Calculer $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$. En déduire $\rho(X, Y)$.
8. Calculer $\text{Cov}(X + Y, X)$, $\text{Cov}(X, X + Y)$ et $\text{Cov}(2X, X)$.

Exercice 19. On lance 2 fois un dé équilibré à 6 faces. On note X le plus grand des résultats obtenus et Y le plus petit.

1. Décrire l'ensemble des valeurs prises par (X, Y) .
2. Décrire l'événement $[X = 1]$ puis calculer $\mathbf{P}([X = 1])$.
3. Décrire l'événement $[Y = 1]$ puis calculer $\mathbf{P}([Y = 1])$.
4. Décrire l'événement $[X = 1] \cap [Y = 1]$ puis calculer $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 20. Une grenouille est sur la première marche d'un escalier comportant 5 marches :

- * si la grenouille est sur la marche du bas, elle saute sur la deuxième marche.
- * si la grenouille est sur la marche du haut, elle se repose.
- * si la grenouille est sur une marche intermédiaire, elle tente de gober une mouche. Elle a une probabilité égale à $\frac{1}{3}$ de réussir. Si elle gobe la mouche, elle monte 2 marches d'un coup (si c'est possible) ! Sinon, elle ne monte qu'une seule marche.

On note X le nombre de sauts nécessaires pour arriver en haut de l'escalier et Y le nombre de fois où elle n'a sauté qu'une seule marche.

1. Décrire, à l'aide d'un arbre, l'ensemble des expériences possibles.
2. Décrire l'événement $[X = 4]$ puis calculer $\mathbf{P}([X = 4])$.
3. Décrire l'événement $[Y = 2]$ puis calculer $\mathbf{P}([Y = 2])$.
4. Décrire l'événement $[X = 4] \cap [Y = 2]$ puis calculer $\mathbf{P}([X = 4] \cap [Y = 2])$.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 21. On lance successivement une pièce équilibrée 4 fois. On note X le nombre de changements de résultats de la pièce. Par exemple, si les lancers renvoient...

... $PPFP$, alors $X(PPFP) = 2$.

... $FFFF$, alors $X(FFFF) = 0$.

... $PFPP$, alors $X(PFPP) = 3$.

On note Y le nombre de Pile obtenus au cours des 4 lancers.

1. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de Y , son espérance et sa variance.
3. Calculer la covariance de X et de Y .
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\rho(X, Y)$.
6. Calculer $\mathbf{E}[X + Y]$, $\mathbf{V}(X + Y)$ et $\mathbf{V}(X - Y)$.

Exercice 22. On considère une urne contenant 3 boules numérotées 1, 1 et 2. On réalise successivement et sans remise 2 tirages dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du premier

tirage et Y la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du second tirage.

1. Déterminer la loi de (X, Y) .
2. Déterminer les lois de X et de Y .
3. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{E}[Y]$.
4. Calculer $\mathbf{E}[XY]$ et en déduire la covariance de X et de Y .
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
6. Calculer $\rho(X, Y)$.
7. Calculer $\mathbf{E}[X + Y]$, $\mathbf{V}(X + Y)$ et $\mathbf{V}(X - Y)$.