l - Calcul matriciel

I - Matrices

I.1 - Définition

Définition 1 - Matrices

Soit n, p deux entiers naturels non nuls.

- Une matrice de taille (n, p) est un tableau de nombres réels constitué de n lignes et de p colonnes.
- Le coefficient d'indice (i, j) d'une matrice est le coefficient situé à la i^e ligne et j^e colonne.
- L'ensemble des matrices de réels à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note généralement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$$

Exemple 1 - Matrices

- $\bullet \ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$
- $\bullet \ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$

Définition 2 - Matrices lignes / colonnes

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Si n = 1, alors A est une matrice ligne.
- Si p = 1, alors A est une matrice colonne.

Exemple 2

• Les matrices suivantes sont des matrices lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

• Les matrices suivantes sont des matrices colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Définition 3 - Égalité entre matrices

Deux matrices $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ sont égales si elles ont même taille et si, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$ et $j\in\{1,\ldots,p\},\ a_{i,j}=b_{i,j}.$

I.2 - Opérations

Définition 4 - Somme, Multiplication par un réel

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

• L'addition de matrices de mêmes tailles est obtenue en additionnant les éléments de mêmes indices. Ainsi, la matrice A+B est la matrice de taille (n,p) et de coefficients $(c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ définis par

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

• La *multiplication* d'une matrice par un réel est obtenue en multipliant chacun des coefficients de la matrice par ce Chapitre I - Calcul matriciel ECT 2

réel. Ainsi, la matrice αA est la matrice de taille (n,p) et de coefficients $(d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ définis par

$$d_{i,j} = \alpha a_{i,j}$$
.

Exemple 3

• Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
 et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

• Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
 et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 3 & -1 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Définition 5 - Matrice nulle

La matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls est la matrice nulle. Elle est notée $0_{n,p}$.

Proposition 1 - Propiétés de l'addition et de la multiplication par un réel

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Commutativité. A + B = B + A.
- Associativité. A + (B + C) = (A + B) + C.
- $\alpha(A+B) = \alpha A + \beta B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $A + (-1)A = 0_{n,p}$.

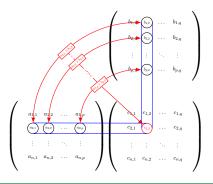
Définition 6 - Produit de matrices de tailles compatibles

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \ B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R}).$ La matrice $C = A \times B$ est la matrice de taille (n,q) dont le coefficient d'indice (i,j) est donné par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Exemple 4 - Représentation du produit matriciel

Pour effectuer un produit matriciel on représente souvent les matrices sur deux étages :



Exemple 5 - Calculs de produits

$$\bullet \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y + z \\ 3x - 2y + z \end{pmatrix}.$$

• On considère trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dé-

Chapitre I - Calcul matriciel ECT 2

finies par $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= z_n \end{cases}.$$

Pour tout
$$n \in \mathbb{N}$$
, on note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

En notant
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
, alors

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \iff U_{n+1} = AU_n.$$

Proposition 2 - Propriétés du produit matriciel

Soit A, B, C trois matrices dont les tailles sont compatibles et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Associativité (AB)C = A(BC).
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- Distributivité. (A+B)C = AC + BC et A(B+C) = AB + AC.

II - Matrices carrées

Définition 7 - Matrices carrées

Une matrice carrée M d'ordre p est une matrice dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes est égal à p. L'ensemble des matrices carrées d'ordre p est noté $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

Exemple 6 - Matrices carrées

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$

Définition 8 - Triangulaires, Diagonales, Identité

- Une matrice est triangulaire supérieure si les coefficients en dessous de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est triangulaire inférieure si les coefficients au dessus de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est diagonale si les coefficients en dehors de sa diagonale sont nuls.
- La matrice identité est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. La matrice identité d'ordre p est notée I_n .
- La matrice nulle est la matrice dont tous les éléments valent 0. La matrice nulle d'ordre p est notée 0_p .

Exemple 7

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.
- $\bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale.
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3.

III - Opérations sur les matrices carrées

Proposition 3

Si A et B sont des matrices carrées d'ordre p, alors

- A+B et AB sont bien définies et appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- \bullet $AI_p = I_p A = A$.
- $A0_p = 0_p A = 0_p$.

Exemple 8

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
 et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\bullet \ A + B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 10 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \ AB = \begin{pmatrix} 2 & 60 & 16 \\ 13 & 20 & -1 \\ -13 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \ BA = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 5 \\ -5 & -19 & -3 \\ 0 & 87 & 44 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet BA = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 5 \\ -5 & -19 & -3 \\ 0 & 87 & 44 \end{pmatrix}$$

- $AI_3 = A =$
- $I_3A = A$.

IV - Calculs de puissances

Exemple 9 - Pourquoi calculer des puissances de matrices?

On considère les suites définies par $x_0 = y_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= x_n - y_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$U_{1} = A \times U_{0}$$

$$U_{2} = A \times U_{1}$$

$$= \underbrace{A \times A}_{2 \text{ facteurs}} \times U_{0}$$

$$U_{3} = A \times U_{2}$$

$$= A \times A \times U_{1}$$

$$= \underbrace{A \times A \times A}_{3 \text{ facteurs}} \times U_{0}$$

$$\vdots = \vdots$$

Définition 9 - Puissance d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre p et n un entier naturel. Alors,

- $\bullet \ A^n = \underbrace{\overset{r}{A} \times A \times \cdots \times A}_{r}.$

Chapitre I - Calcul matriciel

Exemple 10

• Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
. Alors,
• $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
• $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
• $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\star A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\star A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

• Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
. Alors,
• $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cccc} & & & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & \\ & & \\ & \\ & & \\ & \\ & \\ & & \\ & \\ & \\ & & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ &$$

$$\star A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\star A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\star A^3 = A \times A^2 = A \times I_2 = A.$$

IV.1 - Matrices diagonales

Proposition 4 - Puissance d'une matrice diagonale

Soit D une matrice diagonale d'ordre p et n un entier naturel. La matrice D^n est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de D élevés à la puissance n.

Exemple 11 - Puissances & Diagonales 😋

Soit
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Cette propriété se prouve par récurrence.

Initialisation. Pour n = 0, on a bien $D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n, c'est-à-dire $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{split} D^{n+1} &= D^n \times D \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}. \end{split}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre n+1.

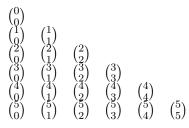
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

IV.2 - Formule du binôme de Newton

On rappelle que les coefficients binomiaux s'obtiennent rapidement à l'aide du triangle de Pascal :

1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1 1 5 10 10 5 1

Ce tableau correspond aux coefficients binomiaux suivants :



On obtient ainsi par exemple

•
$$\binom{1}{1} = 1$$
,

•
$$\binom{4}{2} = 6$$

$$=2,$$

Proposition 5 - Coefficients binomiaux

Soit n un entier naturel non nul et $k \in [0, n]$. Alors,

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,
\bullet \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,
\bullet \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} =$$

$$\bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{k-k},
\bullet \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}$$
,

$$\bullet \ \binom{n}{2} = \binom{n-1}{n-2} =$$

$$\bullet \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Théorème 1 - Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux réels et n un entier naturel. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

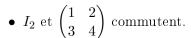
Exemple 12

- $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- $\bullet (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Définition 10 - Matrices qui commutent

Soit A et B deux matrices d'ordre p. Les matrices A et B commutent si AB = BA.

Exemple 13 - Commutativité



•
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
 et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ ne commutent pas.

Théorème 2 - Formule du binôme de Newton

Soient A et B deux matrices d'ordre p qui commutent. Alors, pour tout n entier naturel,

$$(A+B)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k} B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^{k}.$$

Exemple 14 - Application de la formule du binôme 🗱

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- D'une part, $A = I_2 + N$.
- D'autre part, $I_2N = NI_2 = N$. Ainsi, I_2 et N commutent.
- On remarque ensuite que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'après la formule du binôme de Newton,

$$A^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_{2}^{n-k} N^{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^{k}, \text{ car } I_{2}^{n-k} = I_{2}$$
$$= \binom{n}{0} N^{0} + \binom{n}{1} N^{1} + 0_{2} + \dots + 0_{2}$$
$$= I_{2} + nN = \binom{1}{0} \binom{n}{1}.$$