

T.D. VI - Calculs de sommes

Séries numériques

I - Calculs de sommes

Exercice 1. (Sommes à étendre, ⚙️) Calculer les sommes suivantes :

- | | | |
|-----------------------|------------------------------|--------------------------|
| 1. $\sum_{k=0}^5 3.$ | 3. $\sum_{\ell=1}^7 \ell.$ | 5. $\sum_{k=12}^{27} k.$ |
| 2. $\sum_{n=3}^5 10.$ | 4. $\sum_{\ell=2}^5 \ell^2.$ | |

Exercice 2. (Sommes géométriques, ⚙️) Calculer les sommes suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $\sum_{k=5}^{12} 2^k.$ | 5. $\sum_{\ell=1}^5 (3^\ell - 2).$ |
| 2. $\sum_{n=3}^{10} (-1)^n.$ | 6. $\sum_{k=0}^n \left(\frac{2^k}{5^k} + \frac{1}{4^k} \right).$ |
| 3. $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{2^{2n}}.$ | 7. $\sum_{k=0}^n \frac{3^k + 4^k}{5^k}.$ |
| 4. $\sum_{n=1}^4 \frac{3^{2n+1}}{2^{2n}}.$ | |

Exercice 3. (⚙️) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Calculer $\sum_{k=0}^{10} u_k.$

Exercice 4. (⚙️) Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $w_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{5}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer w_n en fonction de n .
2. Calculer $\sum_{k=5}^{21} w_k.$

II - Sommes télescopiques

Exercice 5. (⚙️) Pour tout n entier naturel, on pose $w_n = \frac{1}{2^n}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} w_n.$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 6. (⚙️) Pour tout n entier naturel, on pose $w_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} w_n.$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 7. (⚙️) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour tout n entier naturel, exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 8. (⚙️) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de réels telle que $v_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = (-8)^n.$$

Pour tout n entier naturel, exprimer v_n en fonction de n .

Exercice 9. (⚙️) Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $b_n = n3^{n-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $2b_n = b_{n+1} - b_n - 3^n$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^n 3^k.$

3. Montrer que $\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$.

4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^n k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}.$$

Exercice 10. Pour tout $k \geq 1$, on pose $u_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

1. Exprimer u_k en fonction de $\ln(k+1)$ et $\ln(k)$.

2. À l'aide d'une somme télescopique, calculer $\sum_{k=1}^n u_k$.

3. En déduire la nature (et éventuellement la somme) de la série $\sum u_k$.

Exercice 11. (\rightarrow) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n e^{-1/u_n}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $-\ln(u_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$.

III - Séries géométriques... et plus

Exercice 12. (\otimes) Vérifier la convergence puis calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k}.$

2. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{5^k}.$

3. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}}.$

4. $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{3^{2\ell+1}}{10^\ell}.$

Exercice 13. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = 5 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n + \frac{2}{3}$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la série de terme général $\alpha - u_n$ converge. Donner la valeur de ce réel α_0 .

2. En déduire la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha_0 - u_k)$.

Exercice 14. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \alpha$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha = \frac{1}{4}$.

Exercice 15. Pour tout n entier naturel, on pose

$$p_n = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

1. Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}$ convergent.

2. Vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

Exercice 16. (\rightarrow) Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^n k \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\sum_{k=1}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \left(\frac{3}{4}\right)^\ell.$$

3. En déduire que $\sum_{k=0}^n k \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k - n \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

4. En utilisant les questions précédentes, calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$.