

# IV - Fonctions

## I - Fonctions particulières

### I.1 - Polynômes

#### À Savoir

Soit  $a, b, c$  des réels tels que  $a \neq 0$ .

- \* Si  $f : x \mapsto ax + b$ , alors  $f$  est un **polynôme de degré 1** et de coefficient dominant égal à  $a$ . Il s'annule en  $-\frac{b}{a}$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $f(x)$	$-\text{signe de } a \quad 0 \quad \text{signe de } a$		

- \* Si  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ , alors  $f$  est un **polynôme de degré 2** (appelé également **trinôme**) et de coefficient dominant égal à  $a$ . Le discriminant de  $f$  est égal à  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- ★ Si  $\Delta > 0$ , la fonction  $f$  possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Alors,  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  et  $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ .

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
signe de $f(x)$	$\text{signe de } a \quad 0 \quad -\text{signe de } a \quad 0 \quad \text{signe de } a$			

- ★ Si  $\Delta = 0$ , la fonction  $f$  possède une unique racine :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

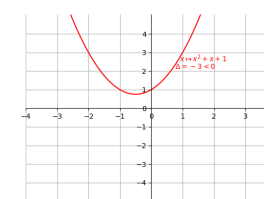
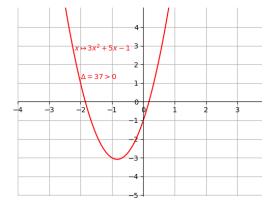
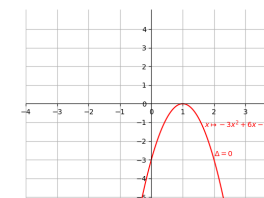
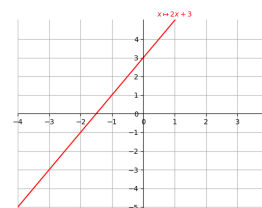
$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
signe de $f(x)$	$\text{signe de } a \quad 0 \quad \text{signe de } a$		

- ★ Si  $\Delta < 0$ , la fonction  $f$  ne possède pas de racine réelle.

$x$	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f(x)$	$\text{signe de } a$	

#### Représentations graphiques

Il est important de savoir représenter graphiquement ces fonctions.



**À Savoir**

Si  $f$  est un polynôme et si  $a$  est une racine de  $f$  (c'est-à-dire  $f(a) = 0$ ), alors il existe un polynôme  $g(x)$  tel que

$$f(x) = (x - a)g(x).$$

**Exemple 1**

Posons  $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$ .

On remarque que

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 6 \times (-2)^2 - (-2) + 30 \\ &= -2^3 - 6 \times 2^2 + 2 + 30 \\ &= -8 - 24 + 2 + 30 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 2)(ax^2 + bx + c) \\ x^3 - 6x^2 - x + 30 &= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de  $x^3$  dans les deux membres :

$$1 = a$$

En identifiant les coefficients constants dans les deux membres :

$$30 = 2c$$

$$c = 15$$

En identifiant les coefficients de  $x$  dans les deux membres :

$$-1 = c + 2b$$

$$-1 = 15 + 2b$$

$$2b = -16$$

$$b = -8$$

Ainsi,

$$f(x) = (x + 2)(x^2 - 8x + 15)$$

Le discriminant de  $x^2 - 8x + 15$  est

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 15 = 64 - 60 = 4.$$

Ainsi, les racines de  $x^2 - 8x + 15$  sont

$$x_1 = \frac{8 - 2}{2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{8 + 2}{2} = 5.$$

Finalement,

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$$

et

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x + 2)(x - 3)(x - 5).$$

**I.2 - Valeur absolue****À Savoir**

Soit  $a$  un réel. La **valeur absolue** de  $a$ , notée  $|a|$ , est égale à

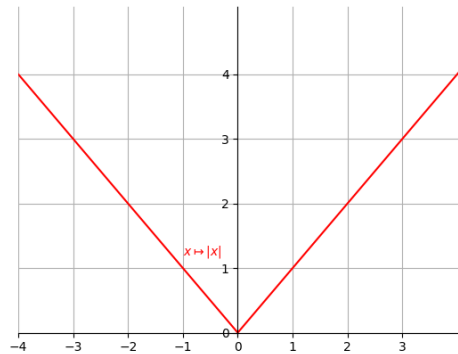
$$\begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty.$$

### Graphes de la fonction valeur absolue



#### Exemple 2

D'après la définition,

$$|0| = 0$$

$$|2| = 2$$

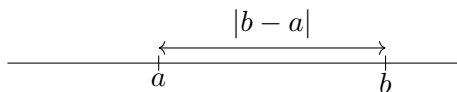
$$|-3| = 3$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

#### À Savoir

Soit  $a, b$  deux réels. La valeur  $|a - b|$  est la **distance** entre les réels  $a$  et  $b$ .

### Valeur absolue et Distance à 0



## I.3 - Logarithme

### À Savoir

La fonction **logarithme népérien**, notée  $\ln$ , définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ , est la primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui s'annule en 1 :

$$\forall x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

La fonction logarithme est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty,$$

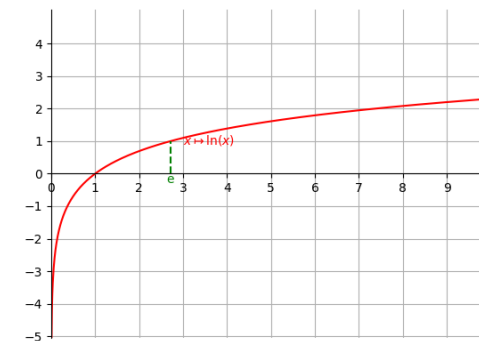
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Ses valeurs remarquables sont :

$$\ln(1) = 0,$$

$$\ln(e) = 1.$$

### Graphes de la fonction logarithme



**À Savoir**

La fonction logarithme est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

**Exemple 3**

Soit  $f(x) = x \ln(x) - x + 10$ . En utilisant les règles de dérivation, la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \ln'(x) - 1 + 0 \\ &= \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln(x). \end{aligned}$$

**À Savoir**

Pour tous  $a, b > 0$  et  $x$  réel,

$$\begin{aligned} \ln(ab) &= \ln(a) + \ln(b), \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b), \\ \ln(a^x) &= x \ln(a). \end{aligned}$$

**Exemple 4**

$$\begin{aligned} \ln(e^4) &= 4 \ln(e) = 4, \\ \ln(8) &= \ln(2^3) = 3 \ln(2). \end{aligned}$$

**I.4 - Exponentielle****À Savoir**

La fonction **exponentielle**, notée  $\exp$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , est la fonction réciproque de la fonction logarithme. On note  $e^x = \exp(x)$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x,$$

$$\forall x > 0, e^{\ln(x)} = x.$$

La fonction exponentielle est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

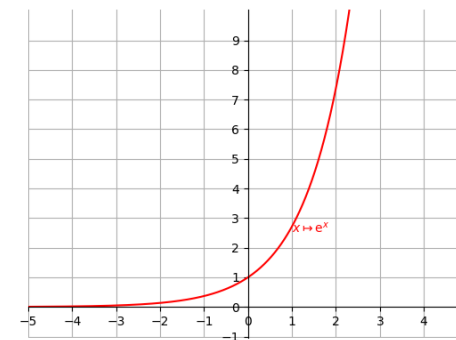
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Ses valeurs remarquables sont :

$$e^0 = 1,$$

$$e^1 = e.$$

**Graphes de la fonction exponentielle**

**À Savoir**

La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x).$$

**Exemple 5**

Soit  $f(x) = 4x e^x + x^2$ . La fonction  $f$  est dérivable pour tout  $x$  réel et

$$f'(x) = 4 \times 1 \times e^x + 4x e^x + 2x = 4(1+x)e^x + 2x.$$

**À Savoir**

Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b,$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}.$$

**Exemple 6**

$$e^3 \times e^2 = e^5, e^{\ln(8)} = 8 \text{ et } e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

**II - Généralités****À Savoir**

\* Si  $f$  est **croissante** sur  $I$  et  $x, y \in I$ . Alors,

$$\begin{aligned} x &\leq y \\ \Rightarrow f(x) &\leq f(y) \end{aligned}$$

\* Si  $f$  est **décroissante** sur  $I$  et  $x, y \in I$ . Alors,

$$\begin{aligned} x &\leq y \\ \Rightarrow f(y) &\leq f(x) \end{aligned}$$

**Exemple 7**

Comme la fonction exponentielle est croissante, et  $2 \leq 3$ , alors  $e^2 \leq e^3$ .

Comme la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$  et  $2 \leq 3$ , alors  $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}$ .

**À Savoir**

\* La fonction  $f$  est paire si  $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$ .

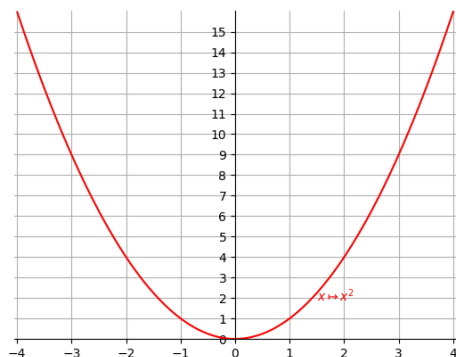
Sa courbe représentative présente alors une symétrie axiale dont l'axe est l'axe des ordonnées.

\* La fonction  $f$  est impaire si  $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$ .

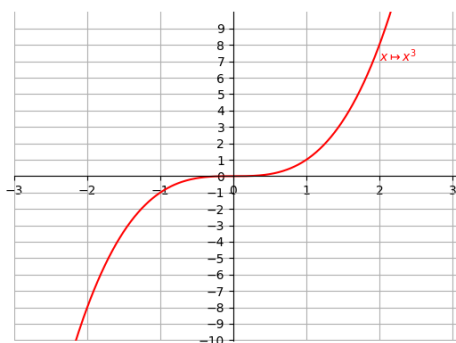
Sa courbe représentative présente alors une symétrie centrale centrée en l'origine du repère.

**Graphes et Parité**

La fonction carré est paire :



La fonction cube est impaire :



## II.1 - Limites

### À Savoir

- \* La **limite à droite** de  $f$  en  $a$  est la valeur que prend  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  tout en restant supérieur à  $a$ . On la note  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .
- \* La **limite à gauche** de  $f$  en  $a$  est la valeur que prend  $f(x)$

lorsque  $x$  tend vers  $a$  tout en restant inférieur à  $a$ . On la note  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

### Exemple 8

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

### À Savoir

- \* La limite en  $-\infty$  ou en  $+\infty$  d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- \* La limite en  $-\infty$  ou en  $+\infty$  d'un quotient de polynômes est égale à la limite du quotient de leurs termes de plus haut degré.

### Exemple 9

- \* Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 100x^2 - 12 = +\infty.$$

- \* Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 = -\infty$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 + 300x^3 - 12 = -\infty.$$

- \* Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 = +\infty$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 - 300x^2 - 12 = +\infty.$$

- \* Comme  $\frac{5x^4}{12x^6} = \frac{5}{12x^2}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{12x^2} = 0$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + 2x^2 - x + 1}{12x^6 + 26x^5} = 0.$$

\* Comme  $\frac{4x^3}{3x^3} = \frac{4}{3}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 12x^2 + x + 1}{3x^3 - 5x^2 + 12} = \frac{4}{3}.$$

### À Savoir

Si la case indique ??, la limite est indéterminée. Il faut transformer l'expression (factorisation, expression conjuguée, croissances comparées, ...) pour pouvoir la déterminer.

\* **Multiplication** par une constante.

$\lim f =$	$\ell$	$-\infty$	$+\infty$	
$\lim kf =$	$k\ell$	$-\infty$	$+\infty$	si $k > 0$
	$k\ell$	$+\infty$	$-\infty$	si $k < 0$
	0	0	0	si $k = 0$

\* **Addition** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de  $\lim(f + g)$ .

$\lim g \backslash \lim f$	$\ell_1$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2$	$\ell_1 + \ell_2$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	??
$+\infty$	$+\infty$	??	$+\infty$

\* **Multiplication** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de  $\lim(f \times g)$ .

$\lim g \backslash \lim f$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 > 0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	??	??
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	??	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	??	$-\infty$	$+\infty$

\* **Quotient** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de  $\lim \frac{f}{g}$ .

$\lim f \backslash \lim g$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 > 0$	$0^-$	$0^+$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 < 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$0^-$	$0^+$	$-\infty$	$+\infty$
$0^-$	$+\infty$	$-\infty$	??	??	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	??	??
$+\infty$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	??	??

### À Savoir

Théorème des **croissances comparées**. Soit  $\alpha > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^\alpha \ln(x)) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

### Exemple 10

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

\* Soit  $f(x) = x \ln(x) - x$ . D'après le théorème des croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ . D'après les limites classiques,

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ . Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x) - x) = 0.$$

\* Soit  $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{e^x}{15x^{100}}$ . D'après les propriétés classiques,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . D'après le théorème des croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = +\infty$ . Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} + \frac{e^x}{15x^{100}} = +\infty.$$

\* Soit  $f(x) = x \ln(x) - x = x \left( \frac{\ln(x)}{x} - 1 \right)$ . D'après le théorème des croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} - 1 = -1$ . Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) - x = -\infty.$$

### À Savoir

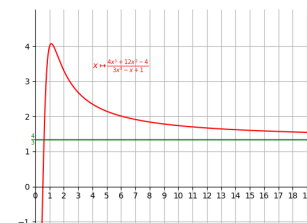
- \* Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ , alors la droite d'équation  $y = \ell$  est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de  $f$ .
- \* Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ , alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est une **droite asymptote** à la courbe représentative de  $f$ .
- \* Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ , alors la droite d'équation  $x = a$  est une asymptote verticale à la courbe représentative de  $f$ .

### Exemple 11

\* Soit  $f(x) = \frac{4x^3 + 12x^2 - 4}{3x^3 - x + 1}$ . Comme  $\frac{4x^3}{3x^3} = \frac{4}{3}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{4}{3}.$$

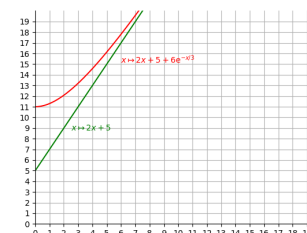
Ainsi, la courbe représentative de  $f$  possède une asymptote horizontale d'équation  $y = \frac{4}{3}$ .



\* Soit  $f(x) = 2x + 5 + 6e^{-x/3}$ . Alors,

$$f(x) - (2x + 5) = 6e^{-x/3}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x/3} = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 5) = 0$ . Ainsi, la courbe représentative de  $f$  possède une droite asymptote d'équation  $y = 2x + 5$ .



\* Soit  $f(x) = \ln|x - 1|$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln|x - 1| = -\infty$ . Ainsi, la courbe représentative de  $f$  possède une asymptote verticale d'équation  $x = 1$ .





## II.2 - Continuité

### À Savoir

\* La fonction  $f$  est **continue** au point  $a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

\* Si  $f, g$  sont continues en  $a$  et  $k \in \mathbb{R}$ , alors

- \*  $f + kg$  est continue en  $a$ ,
- \*  $f \times g$  est continue en  $a$ ,
- \*  $\frac{f}{g}$  est continue en  $a$  si  $g(a) \neq 0$ ,
- \*  $x \mapsto f(g(x))$  est continue en  $a$  si elle est définie.

### Exemple 12

Soit  $k \neq 0$  et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(t) = \begin{cases} k \frac{t}{1+t} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pourra représenter les valeurs prises par  $f$  dans un tableau :

$t$	0	1
$f(t)$	0	$k \frac{1}{1+1} = \frac{k}{2}$

D'après les propriétés des fonctions usuelles,  $f$  est continue sur  $] -\infty, 0[$ ,  $[0, 1]$  et  $]1, +\infty[$ . Il suffit donc d'étudier la continuité de  $f$  en 0 et en 1.

\* Comme  $f$  est constante égale à 0 sur  $] -\infty, 0[$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

\* Comme  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0) = k \frac{0}{1+0} = 0.$$

Ainsi,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  et la fonction  $f$  est continue en 0.

\* Comme  $f$  est constante égale à 0 sur  $]1, +\infty[$ , alors

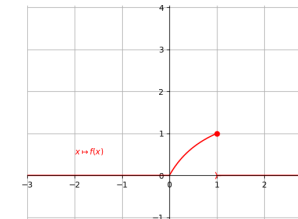
$$\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 0 = 0.$$

\* Comme  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = f(1) = \frac{k}{2}.$$

Comme  $k \neq 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t)$  et la fonction  $f$  n'est pas continue en 1.

Lorsque  $k = 2$ , la représentation graphique de  $f$  est la suivante :



### À Savoir

**Théorème des valeurs intermédiaires.** Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et  $f(a) \leq y \leq f(b)$  ou  $f(b) \leq y \leq f(a)$ , alors il **existe**  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = y$ .

### À Savoir

**Théorème de la bijection monotone.** Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a, b]$  et  $f(a) \leq y \leq f(b)$  ou  $f(b) \leq y \leq f(a)$ , alors il **existe un unique**  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = y$ .

**Exemple 13**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x - \ln(x)}.$$

On cherche à résoudre l'équation  $f(x) = x$  dans  $]0; +\infty[$ .  
D'après la définition de  $f$ ,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{x - \ln(x)} = x \\ &\Leftrightarrow 1 = x(x - \ln(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x - \ln(x) \\ &\Leftrightarrow x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

On pose ainsi  $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$ .

**Continuité.** La fonction  $h$  est continue sur  $]0, +\infty[$  car somme de fonctions continues sur cet intervalle.

**Stricte monotonie.** La fonction  $h$  est dérivable et, en utilisant la dérivée d'une somme de fonctions,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}.$$

Le discriminant du trinôme  $x^2 - x + 1$  vaut  $1 - 4 = -3$ . Ainsi, le trinôme ne s'annule jamais et est du signe de son coefficient dominant qui vaut 1. Ainsi,  $h'$  est à valeurs strictement positives et  $h$  est strictement croissante.

**Intervalle image.** Comme  $h(x) = x - \frac{1}{x}(x \ln(x) + 1)$ . D'après le théorème des croissances comparées et le produit des limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty.$$

Comme  $h(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ , d'après le théorème de croissances comparées ainsi que le produit des limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Le tableau de variations de  $h$  est donc le suivant :

$x$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$\parallel$	+
$h(x)$	$\parallel$	$+\infty$

$-\infty \nearrow$

D'après le théorème de la bijection monotone, il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $h(\alpha) = 0$ .

Ainsi, d'après la question **3.a**), il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

Enfin,  $f(1) = 1$  donc 1 est l'unique solution de l'équation  $f(x) = x$ .

**À Savoir**

Si  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[a, b]$ , alors il existe une unique fonction  $h$  telle que

$$\forall y \in [f(a), f(b)], f(h(y)) = y$$

et

$$\forall x \in [a, b], h(f(x)) = x.$$

La fonction  $h$  est la **bijection réciproque** de  $f$ .

**À Savoir**

Algorithme de **dichotomie**. Soit  $f$  telle que  $f(a)f(b) \leq 0$ . Pour trouver une valeur approchée à  $\varepsilon$  près d'un réel  $c$  tel que  $f(c) = 0$ , on procède itérativement comme suit :

- \* si  $b - a \leq \varepsilon$ , on renvoie la valeur  $a$ .
- \* sinon on pose  $m = \frac{a+b}{2}$ .
  - ★ Si  $f(a)f(m) \leq 0$ , on recommence en remplaçant  $b$  par  $m$ .

★ Sinon on recommence en remplaçant  $a$  par  $m$ .

## II.3 - Dérivabilité

### À Savoir

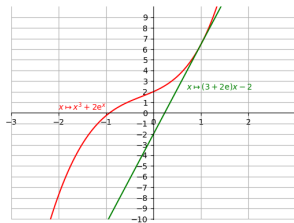
Si  $f$  est une fonction dérivable en  $a$  et  $\mathcal{C}_f$  est sa courbe représentative dans un repère orthonormé, l'équation de la **tangente** à  $\mathcal{C}_f$  au point  $a$  est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

### Exemple 14

Soit  $f(x) = x^3 + 2e^x$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = 3x^2 + 2e^x$ . Ainsi, l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1 est :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= (3 + 2e)(x - 1) + (1 + 2e) \\ &= (3 + 2e)x - (3 + 2e) + (1 + 2e) \\ &= (3 + 2e)x - 2. \end{aligned}$$



### À Savoir

Soit  $I$  un intervalle de  $f$ .

\* Si  $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ .

- \* Si  $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .
- \* Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$  sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- \* Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$  sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

### Exemple 15

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x - \ln(x)$ .

D'après les propriétés du logarithme,

$$g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ , d'après les propriétés d'addition des limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

En factorisant par  $x$ , on obtient  $g(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$ .

D'une part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

D'autre part, d'après les croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ,

soit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$ .

Ainsi, d'après les propriétés de multiplication des limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

La fonction identité et la fonction logarithme népérien sont dérivables sur  $]0, +\infty[$ . De plus, en utilisant la dérivée d'une somme de fonctions, pour  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $g$  est dérivable et

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}.$$

Comme  $x > 0$ , le réel  $g'(x)$  est du signe de  $x - 1$ . On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

$x$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		$+\infty \searrow \quad \nearrow +\infty$ $\quad \quad \quad 1$		

### À Savoir

Si  $f$  admet un **maximum** ou un **minimum** en  $a$ , alors  $f'(a) = 0$ .

## II.4 - Convexité

### À Savoir

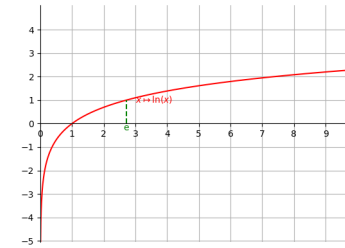
La fonction  $f$  est **convexe** si sa courbe représentative se situe au-dessous de chacune de ses cordes.

Si  $f$  est deux fois dérivable :

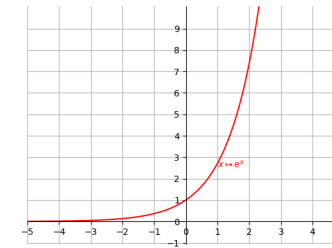
- \*  $f$  est **convexe** si et seulement si  $f'' \geq 0$ .
- \*  $f$  est **concave** si et seulement si  $f'' \leq 0$ .

### Exemple 16

En posant  $f(x) = e^x$ , alors  $f'(x) = e^x$  et  $f''(x) = e^x$ . Ainsi,  $f'' \geq 0$  et la fonction exponentielle est convexe. Si on se déplace en vélo le long d'une route qui a une forme convexe, on va toujours pencher à gauche.



En posant  $f(x) = \ln(x)$ , alors  $f'(x) = \frac{1}{x}$  et  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Ainsi,  $f'' \leq 0$  et la fonction logarithme est concave. Si on se déplace en vélo le long d'une route qui a une forme concave, on va toujours pencher à droite.



### À Savoir

La courbe représentative de  $f$  admet un **point d'inflexion** en  $a$  si  $f''(a) = 0$  et si  $f''$  change de signe en  $a$ .