T.D. I - Suites & Fonctions

I - Suites

I.1 - Suites classiques

Solution de l'exercice 1. Notons r la raison de la suite arithmétique. Alors, pour tout n entier naturel, $u_n = u_1 + (n-1)r$.
On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} u_{80} & = u_1 + 79r \\ u_{15} & = u_1 + 14r \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 393 & = u_1 + 79r \\ 133 & = u_1 + 14r \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 393 & = u_1 + 79r \\ 260 & = (79-14)r \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 393 & = u_1 + 79r \\ r & = \frac{260}{65} = 4 \end{cases}$$

Ainsi, $u_1 = 133 - 14 \times 4 = 77$. □

Solution de l'exercice 2.

1. En utilisant la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{4u_0} = \sqrt{4} = 2, \\ u_2 &= \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8} = 2^{3/2}, \\ u_3 &= \sqrt{4 \times 2^{3/2}} = \sqrt{2^{7/2}} = 2^{7/4}, \\ u_4 &= \sqrt{4 \times 2^{7/4}} = \sqrt{2^{15/4}} = 2^{15/8}, \\ u_5 &= \sqrt{4 \times 2^{15/8}} = \sqrt{2^{31/8}} = 2^{31/16}. \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - \ln(4) &= \ln(\sqrt{4u_n}) - \ln(4) \\ &= \frac{1}{2}\ln(4) + \frac{1}{2}\ln(u_n) - \ln(4) \\ &= \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

D'après les résultats sur les suites géométriques,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0.$$

Or, $v_0 = \ln(u_0) - \ln(4) = -\ln(4) = -2\ln(2)$. Finalement,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = -2\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

3. En utilisant la relation sur (v_n),

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= v_n + \ln(4) \\ u_n &= \mathrm{e}^{v_n + \ln(4)} \\ &= \mathrm{e}^{v_n}\,\mathrm{e}^{\ln(4)} \\ &= 4\,\mathrm{e}^{-\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &= 4 \times 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &= 2^{2-\frac{1}{2^{n-1}}} \\ &= 2^{\frac{2^n-1}{2^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 4 \times 2^{-0} = 4.$$

$\square$

Solution de l'exercice 3.

1. En résolvant l'équation,

$$\begin{aligned} \ell &= -\frac{\ell}{2} + 12 \\ \frac{3}{2}\ell &= 12 \\ \ell &= 8. \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= -\frac{1}{2}u_n - 8 + 12 \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 4 \\ &= -\frac{1}{2}(u_n - 8) \\ &= -\frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

3. Comme $v_0 = 0 - 8 = -8$, en utilisant les résultats sur les suites géométriques, pour tout n entier naturel,

$$v_n = -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

4. D'après la définition de v_n,

$$u_n = -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 8.$$

Comme $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$, alors $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 8.$$

$\square$

Solution de l'exercice 4.

1. En résolvant l'équation,

$$\begin{aligned} \ell &= 3\ell + 4 \\ 2\ell &= -4 \\ \ell &= -2. \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= 3u_n + 4 + 2 \\ &= 3u_n + 6 \\ &= 3(u_n + 2) \\ &= 3v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

3. Comme $v_0 = 2 + 2 = 4$, en utilisant les résultats sur les suites géométriques, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 4 \times 3^n.$$

4. D'après la définition de v_n,

$$u_n = 4 \times 3^n - 2$$

Comme $3 > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

$\square$

Solution de l'exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} \\ &= \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3} \\ &= \frac{2u_n+3-u_n-4}{2u_n+3+3u_n+12} \\ &= \frac{u_n-1}{5u_n+15} \\ &= \frac{v_n}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 5.

2. D'une part, $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+3} = -\frac{1}{3}$.
D'autre part, d'après les résultats sur les suites géométriques, pour tout n entier naturel,

$$v_n = -\frac{1}{3 \times 5^n}.$$

En revenant à la définition de v_n,

$$\begin{aligned} \frac{u_n-1}{u_n+3} &= -\frac{1}{3 \times 5^n} \\ u_n - 1 &= -\frac{u_n}{3 \times 5^n} - \frac{1}{5^n} \\ 3 \times 5^n u_n - 3 \times 5^n &= -u_n - 3 \\ (3 \times 5^n + 1)u_n &= 3(5^n - 1) \\ u_n &= 3\frac{5^n-1}{3 \times 5^n + 1}. \end{aligned}$$

3. Comme $\frac{1}{5} \in]-1,1[$ et $u_n = 3\frac{1-5^{-n}}{3+5^{-n}}$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 3.$$

□

I.2 - Sommes des termes

Solution de l'exercice 6.

1. Les termes de la somme sont tous constants et elle est constituée de $n+1$ termes. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

2. Les termes de la somme sont constants et elle est constituée de n termes. Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} 2 = 2n$.

3. D'après les résultats sur la somme des premiers entiers, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. D'après les résultats sur la somme des premiers carrés d'entiers, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. D'après les résultats sur la somme des premiers cubes d'entiers, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. □

Solution de l'exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} H_{n+1} - H_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (H_n) est croissante.
D'après le théorème de la limite monotone,

- ∗ soit (H_n) est majorée et elle converge alors vers un réel ℓ,
- ∗ soit (H_n) tend vers $+\infty$.

2. Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}H_{2n} - H_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\geqslant \frac{1}{2n}} \\ &\geqslant \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 \\ &\geqslant \frac{1}{2n}(2n-n) \\ &\geqslant \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Supposons par l'absurde que (H_n) converge vers un réel ℓ. Alors, en passant à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\ell - \ell \geqslant \frac{1}{2},$$

soit $\frac{1}{2} \leqslant 0$. Ceci est impossible.
Comme (H_n) ne converge pas, d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$. $\square$

Solution de l'exercice 8.

1. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Comme $p \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \to +\infty} p^{n+1} = 0$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1}{1-p}.$$

2. D'une part, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Ainsi, f est dérivable et pour tout x réel,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}.$$

D'autre part, $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Ainsi, f est dérivable et pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

Ainsi, pour $p \in]-1, 1[$,

$$\sum_{k=1}^{n} k p^{k-1} = \frac{1 - p^{n+1} - (n+1)p^n(1-p)}{(1-p)^2}.$$

Comme $p \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \to +\infty} p^{n+1} = 0$.
Toujours comme $p \in]-1, 1[$, d'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{n \to +\infty} (n+1)p^n = 0$.
Finalement,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} k p^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

$\square$

Solution de l'exercice 9.

1. Soit $k \geqslant 2$. Alors,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k \times (k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

2. En sommant les relations précédentes et en reconnaissant une somme télescopique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} &\leqslant \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] \\ &\leqslant 1 - \frac{1}{n} \\ 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} &\leqslant 2 - \frac{1}{n} \\ S_n &\leqslant 2.\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0.$$

Ainsi, la suite (S_n) est croissante.

La suite (S_n) est croissante et majorée par 2 donc elle est convergente.

Remarque. On peut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. □

Solution de l'exercice 10.

1. Soit $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geqslant 0.$$

Ainsi, la fonction f est croissante. Comme $f(0) = 0$, alors pour tout $x \geqslant 0$,

$$\ln(1+x) \leqslant x.$$

Soit $g : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} \geqslant 0.$$

Ainsi, la fonction g est croissante. Comme $g(0) = 0$, alors pour tout $x \geqslant 0$,

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x).$$

2. On remarque que $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$
$$\frac{1}{1+k} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

2$^{\text{e}}$ méthode. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors, en utilisant la croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$$
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

3$^{\text{e}}$ méthode. La fonction ln est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$. En utilisant le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]k, k+1[$ tel que

$$\frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k+1-k} = \frac{1}{c}.$$

On conclut en utilisant l'encadrement $k < c < k+1$.

3. En sommant les relations précédentes et en reconnaissant une somme télescopique,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n+1) - \ln(1) \leqslant H_n$$
$$H_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n.$$

4. En utilisant l'inégalité de droite de l'encadrement précédent,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n.$$

En utilisant l'inégalité de gauche de l'encadrement précédent à l'ordre $n-1$,

$$H_n - 1 \leqslant \ln(n).$$

Finalement,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

On remarque que

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$. D'après le théorème d'encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ soit

$$H_n \sim \ln(n).$$

5. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= H_n - \ln(n+1) - H_{n-1} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

D'après la première inégalité de la question **1** pour $x = \frac{1}{n}$, alors $c_{n+1} - c_n \geqslant 0$.
Ainsi, la suite (c_n) est croissante.

6. Soit $n \geqslant 2$. D'après la question **4.**,

$$\begin{aligned} H_{n-1} &\leqslant 1 + \ln(n-1) \\ H_{n-1} - \ln(n) &\leqslant 1 + \ln(n-1) - \ln(n) \\ c_n &\leqslant 1 + \ln(n-1) - \ln(n). \end{aligned}$$

7. Comme la fonction logarithme est croissante, $\ln(n-1) - \ln(n) \leqslant 0$.
Ainsi, $c_n \leqslant 1$.
Finalement, la suite (c_n) est croissante et majorée par 1 donc convergente.
Remarque. Sa limite, notée γ est appelée constante d'Euler. On ne sait pas à ce jour si γ est ou non un nombre rationnel... □

I.3 - Suites définies par récurrence

Solution de l'exercice 11.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{-u_n} > 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

2. On suppose que la suite (u_n) est majorée. Alors, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ. En passant à la limite dans l'égalité,

$$\begin{aligned} \ell &= \ell + \mathrm{e}^{-\ell} \\ \mathrm{e}^{-\ell} &= 0. \end{aligned}$$

On obtient une contradiction car l'exponentielle est à valeurs strictement positives.

3. Finalement, la suite (u_n) est croissante et non majorée. D'après le théorème de la limite monotone,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. On raisonne par récurrence sur n.
Initialisation. Lorsque $n = 1$, alors $u_1 = \sqrt{1 + u_0}$. Comme $u_0 \geqslant -1$, alors u_1 est bien défini. De plus, la fonction racine carrée est à valeurs positives donc $u_1 \geqslant 0$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n \geqslant 0$. Alors, $1 + u_n \geqslant 0$ donc u_{n+1} est bien défini. Comme la fonction racine carrée est à valeurs positives, alors $u_{n+1} \geqslant 0$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 1 et est héréditaire, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant 0.$$

2. La fonction g est définie sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $]-1, +\infty[$. De plus, pour tout $x > -1$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1.$$

De plus,

$$\begin{aligned} & g'(x) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{1+x} \leqslant 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1+x \leqslant \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow\ & x \leqslant -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

D'une part, $g(-3/4) = \frac{5}{4}$.
D'autre part, pour $x \geqslant 0$, $g(x) = \sqrt{x}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{-}\sqrt{x}\right)$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
On obtient le tableau de variations suivant :

x	-1		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Enfin,

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ \sqrt{1+x} &= x \\ 1+x &= x^2 \\ x^2 - x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Les racines de ce trinôme sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comme $g(0) = 1$, le tableau de variation de g assure que le zéro de g est positif. Ainsi,

- g est positive sur $\left]-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$,
- g est négative sur $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.

3. a) Comme f est la composée de $x \mapsto 1+x$ et de la fonction racine carrée qui sont croissantes, alors f est croissante. On raisonne ensuite par récurrence.

Initialisation. $u_0 \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ par hypothèse.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comme la fonction f est croissante, alors

$$\begin{aligned} f(u_n) &\leqslant f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ u_{n+1} &\leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 1 et est héréditaire, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, alors $g(u_n) \geqslant 0$. Ainsi, $f(u_n) \geqslant u_n$ soit $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

c) Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors (u_n) converge vers un réel ℓ.
Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue, alors $f(\ell) = \ell$ soit $g(\ell) = 0$. Or, le seul réel pour lequel $g(x) = 0$ est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. a) En utilisant la croissance de f, on montre par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

b) Comme la fonction g est négative sur $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$, on montre que la suite (u_n) est décroissante.

c) Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge. On montre comme précédemment que la suite (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

I.4 - Suites définies implicitement

Solution de l'exercice 13.

1. Le résultat est trivial pour $n=0$. On pose $f_n : x \mapsto x^5+nx-1$. La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions strictement croissantes et $f_n(0)=-1$, $f_n(1)=n\geqslant 0$. Ainsi, f_n admet un unique zéro compris dans l'intervalle $]0,1[$.

2. D'une part,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= u_n^5+(n+1)u_n-1\\ &= u_n^5+nu_n-1+u_n\\ &= f_n(u_n)+u_n\\ &= u_n>0\\ f_{n+1}(u_n) &> f_{n+1}(u_{n+1}). \end{aligned}$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante, alors $u_{n+1}<u_n$.

3. Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente.
Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers un réel $\ell>0$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^5=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n=+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^5+nu_n-1=+\infty.$$

Or, cette quantité est toujours nulle. On obtient ainsi une contradiction et $\ell\leqslant 0$.
Comme $u_n\geqslant 0$, alors $\ell\geqslant 0$. Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=0.$$

2^e méthode. Comme $u_n=\frac{1-u_n^5}{n}$ pour tout entier naturel n non nul, et (u_n) est bornée, alors (u_n) converge vers 0.

4. D'après la définition,

$$nu_n-1=u_n^5.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^5=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n=1$. Ainsi,

$$u_n\sim\frac{1}{n}.$$

5. En utilisant l'équation initiale,

$$u_n^5+n\left(\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)-1=0$$

$$\varepsilon_n=-u_n^5\sim-\frac{1}{n^5}.$$

6. D'après la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\varepsilon_n}{-\frac{1}{n^5}}=1.$$

Ainsi, en posant $\delta_n=1-\frac{\varepsilon_n}{-\frac{1}{n^5}}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n=0$ et

$$\begin{aligned} \varepsilon_n+\frac{1}{n^5} &= \frac{1}{n^5}\delta_n\\ nu_n-1 &= -\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^5}\delta_n\\ u_n &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^6}\delta_n. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 14.

1. Comme $f'(x)=1-\frac{1}{x}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction f réalise une bijection de $]0,1]$ dans $[1,+\infty[$. Comme $n\in[1,+\infty[$, il existe un unique réel $u_n\in]0,1]$ tel que $f(u_n)=n$.

3. On remarque que

$$\begin{aligned} f(u_{n+1}) &= n+1=f(u_n)+1\\ f(u_{n+1}) &\geqslant f(u_n)\\ u_{n+1} &\leqslant u_n \end{aligned}$$

car f est décroissante sur $]0,1]$.
Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers un réel positif ℓ.

Supposons par l'absurde que $\ell \neq 0$. Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n - \ln(u_n) = n,$$

et en passant à la limite dans cette égalité,

$$\ell - \ln(\ell) = +\infty.$$

On obtient ainsi une contradiction.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2e méthode. En notant g la restriction de f à $]0,1[$, on obtient que $u_n = g^{-1}(n)$. Comme g est décroissante, alors g^{-1} est décroissante et (u_n) est décroissante.
De plus, $\lim\limits_{0^+} g = +\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty} g^{-1} = 0$. D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Comme $u_n - \ln(u_n) = n$, alors $u_n = \mathrm{e}^{u_n}\mathrm{e}^{-n} \sim \mathrm{e}^{-n}$ car $u_n \to 0$.

5. En reprenant ces équations, comme $u_n \to 0$,

$$\begin{aligned} u_n - \mathrm{e}^{-n} &= \mathrm{e}^{-n}(\mathrm{e}^{u_n} - 1) \\ &\sim \mathrm{e}^{-n} u_n \\ &\sim \mathrm{e}^{-2n} \end{aligned}$$

6. Soit $\delta_n = \frac{u_n - \mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{-2n}} - 1$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$ et

$$\begin{aligned} u_n - \mathrm{e}^{-n} &= \mathrm{e}^{-2n} + \mathrm{e}^{-2n}\delta_n \\ u_n &= \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + \mathrm{e}^{-2n}\delta_n. \end{aligned}$$

□

II - Fonctions

II.1 - Calculs de développements limités

Solution de l'exercice 15.

1. Un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré :

$$f_1(x) \sim_{+\infty} \frac{x^5}{2x^3} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{2}.$$

2. On factorise par le terme qui croît le plus vite :

$$f_2(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2}\underbrace{\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)}_{\to 1} \sim_{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2}.$$

3. On factorise numérateur et dénominateur par le terme qui croît le plus vite :

$$f_3(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}\,{-2x}} \sim_{+\infty} 1,$$

car numérateur et dénominateur tendent vers 1.

4. On factorise par x^2 puis on utilise les propriétés du logarithme :

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \ln(x^2)\underbrace{\left[1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x^2)}\right]}_{\to 1} \\ &\sim_{+\infty} \ln(x^2) \sim_{+\infty} 2\ln(x). \end{aligned}$$

5. On factorise numérateur et dénominateur par les termes qui croissent le plus vite :

$$f_5(x) = \frac{x}{x^2} \times \underbrace{\frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}}_{\to 3} \sim_{+\infty} \frac{3}{x}.$$

6. Un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré :

$$f_6(x) \sim_{+\infty} \frac{x^5\,\mathrm{e}^{-x}}{12x} \sim_{+\infty} \frac{x^4\,\mathrm{e}^{-x}}{12}.$$

7. En factorisant par les termes dominants,

$$\begin{aligned} f_7(x) &= \frac{(x+25)\ln(x)}{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)} \\ &\sim_{+\infty} \frac{x\ln(x)}{\mathrm{e}^x} \sim_{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\ln(x). \end{aligned}$$

8. En utilisant les propriétés du logarithme,

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \ln(x)\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right] \\ &\sim_{+\infty} \ln(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_8(x) \sim_{+\infty} \frac{\ln(x)\,\mathrm{e}^x}{2x}.$$

9. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$, alors

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}.$$

Ainsi,

$$f_9(x) \sim_{+\infty} \frac{3x\times x}{5x^4} \sim_{+\infty} \frac{3}{5x^3}.$$

10. En factorisant par les termes dominants,

$$f_{10}(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)} \sim_{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} \sim_{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

11. En factorisant par les termes dominants,

$$f_{11}(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x\left(1-\mathrm{e}^{-2x}\right)} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} \sim_{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

12. En factorisant par les termes dominants,

$$f_{12}(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-2x})}{x^2\,\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-2x})} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}.$$

13. En factorisant par les termes dominants,

$$f_{13}(x) = \frac{x^4\,\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-2x})} \sim_{+\infty} x^4.$$

14. En factorisant par les termes dominants,

$$f_{14}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-2x})} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x} \sim_{+\infty} \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

15. Comme un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré,

$$f_{15}(x) \sim_{+\infty} \frac{x^3\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}{x^4} \sim_{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}{x}.$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. Comme $\lim\limits_{x\to0} x^5+3x+1=1$, $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^{-x}=1$ et $\lim\limits_{x\to0} 12x+3=3$, alors

$$f_1(x) \sim_0 \frac{1}{3}.$$

2. Comme $\lim\limits_{x\to0} x+25=25$ et $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=2$, alors

$$f_2(x) \sim_0 \frac{25\ln(x)}{2}.$$

3. Comme $\ln(1+x)\sim_0 x$, $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^x=1$ et $\lim\limits_{x\to0} 2x+5=5$, alors

$$f_3(x) \sim_0 \frac{x}{5}.$$

4. D'une part, $\lim\limits_{x\to0} 3x+12=12$ et $\lim\limits_{x\to0} 5x^4+2=2$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \ln\frac{1+x}{x} \\
&= \ln(1+x) - \ln(x) \\
&= -\ln(x)\underbrace{\left[1-\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right]}_{\to 1} \\
&\sim_0 -\ln(x).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_4(x) \sim_0 -\frac{12\ln(x)}{2} \sim_0 -6\ln(x).$$

5. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2$, alors

$$f_5(x) \sim_0 \frac{x}{2}.$$

6. D'après la formule de Tayloy-Young, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 telles que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\
\mathrm{e}^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\
&= 2x\underbrace{\left(1+\frac{\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\to 1} \\
&\sim_0 2x.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_6(x) \sim_0 \frac{x^2}{2x} \sim_0 \frac{x}{2}.$$

2^e^ méthode. On remarque que

$$f_6(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)} \sim_0 \frac{x^2}{1\times 2x} \sim_0 \frac{x}{2}.$$

7. D'une part, $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2$.
D'autre part, d'après la formule de Tayloy-Young, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 telles que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\
\mathrm{e}^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\
&= 2x\underbrace{\left(1+\frac{\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\to 1} \\
&\sim_0 2x.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$f_7(x) \sim_0 \frac{2}{x^2\times 2x} \sim_0 \frac{1}{x^3}.$$

8. D'une part, $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2$.
D'autre part, d'après la formule de Tayloy-Young, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 telles que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\
\mathrm{e}^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\
&= 2x\underbrace{\left(1+\frac{\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\to 1} \\
&\sim_0 2x.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$f_8(x) \sim_0 \frac{2x^4}{2x} \sim_0 x^3.$$

9. D'après la formule de Tayloy-Young, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 telles que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\ \mathrm{e}^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\ &= 2x \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\to 1} \\ &\sim_0 2x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_9(x) \sim_0 \frac{\sqrt{x}}{2x} \sim_0 \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

□

Solution de l'exercice 17.

1. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+2x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} - 1 = -1$, alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}-1} = 0.$$

2. En utilisant les équivalents classiques,

$$\ln(1+2x) \sim_0 2x$$
$$\text{et } \sqrt{1+x} - 1 \sim_0 \frac{x}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-1} \sim_0 \frac{2x}{\frac{x}{2}} \sim_0 4.$$

Finalement,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-1} = 4.$$

3. En utilisant les équivalents classiques,

$$\mathrm{e}^x - 1 \sim_0 x.$$

Ainsi, $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \sim_0 1$ et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

4. En utilisant les équivalents classiques,

$$\ln(1+2x) \sim_0 2x$$
$$\text{et } \sqrt{1+2x} - 1 \sim_0 \frac{2x}{2} \sim_0 x.$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+2x}-1} \sim_0 \frac{2x}{x} \sim_0 2$$

Finalement,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+2x}-1} = 2.$$

5. En utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\mathrm{e}^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{e}^{3x} - 1 - 3x}{x^2} = \frac{9}{2} + \varepsilon(x).$$

Finalement,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x} - 1 - 3x}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. On remarque que
$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}.$$
Or, $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$.
Ainsi,
$$f_1(x) \sim_1 \frac{1}{\sqrt{2(x-1)}}.$$

2. Comme $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1+x) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}$, alors
$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \\ &\sim_1 \frac{\ln(2)}{\sqrt{2(x-1)}}. \end{aligned}$$

3. D'une part, comme $\lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0$, en utilisant les équivalents en 0 classiques,
$$\begin{aligned} \ln(x) &= \ln(1+x-1) \\ &\sim_1 (x-1). \end{aligned}$$
D'autre part, $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}$.
Ainsi,
$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{\ln(1+x-1)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \\ &\sim_1 \frac{x-1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}} \\ &\sim_1 \sqrt{\frac{x-1}{2}}. \end{aligned}$$

4. Comme $\lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0$, en utilisant les équivalents classiques en 0,
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} - 1 &= (1+x-1)^{1/3} - 1 \\ &\sim_1 \frac{x-1}{3} \\ \sqrt{x} - 1 &= (1+x-1)^{1/2} - 1 \\ &\sim_1 \frac{x-1}{2}. \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} f_4(x) &\sim_1 \frac{\frac{x-1}{3}}{\frac{x-1}{2}} \\ &\sim_1 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5. Comme $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$, alors
$$\begin{aligned} f_5(x) &= \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \\ &\sim_1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{2(x-1)}}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 19.

1. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle,
$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \exp\left\{n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\right\}.$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{n} = 0$, donc en utilisant les équivalents classiques en 0,
$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) &\sim_{+\infty} \frac{\alpha}{n} \\ n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) &\sim_{+\infty} \alpha. \end{aligned}$$
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) = \alpha$. En utilisant la continuité de la fonction exponentielle,
$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left\{n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\right\} = \alpha.$$
Finalement,
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\alpha}.$$

2. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$, en utilisant les développents limités classiques en 0,
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{3/x} - 1 &\sim_{+\infty} \frac{3}{x} \\ x\left(\mathrm{e}^{3/x} - 1\right) &\sim_{+\infty} 3. \end{aligned}$$

Ainsi,
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\mathrm{e}^{3/x} - 1\right) = 3.$$

□

Solution de l'exercice 20.

1. Dans toute la suite, ε désigne une fonction telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre. En utilisant la formule de Taylor-Young,
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\\
\mathrm{e}^x - 1 &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\\
\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

2. Dans toute la suite, ε désigne une fonction telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre. En utilisant la formule de Taylor-Young,
$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\\
1 + \ln(1+x) &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\\
(1 + \ln(1+x))^{-1} &= \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Or, $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 + u^2\varepsilon_1(u)$ où $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Ainsi,
$$\begin{aligned}
(1 + \ln(1+x))^{-1} &= 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)^2 + \cdots\\
&\quad \cdots + \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)\varepsilon_1\left(x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)\\
&= 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 + x^2\varepsilon(x)\\
&= 1 - x + \frac{3x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

□

II.2 - Étude de courbes

Solution de l'exercice 21.

1. a) Posons $f : u \mapsto \ln(1+u)$. La fonction f est deux fois dérivable sur $]-1, +\infty[$ et
$$\begin{aligned}
f'(u) &= \frac{1}{1+u},\\
f''(u) &= -\frac{1}{(1+u)^2}.
\end{aligned}$$

Comme $f'' \leqslant 0$, la fonction f est concave et sa courbe représentative se trouve en dessous de ses tangentes.
Or, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de f a pour équation $y = x$.
On obtient ainsi,
$$\forall\ u > -1,\ \ln(1+u) \leqslant u.$$

b) Posons $f : u \mapsto \mathrm{e}^u$. La fonction f est deux fois dérivable et
$$\begin{aligned}
f'(u) &= \mathrm{e}^u,\\
f''(u) &= \mathrm{e}^u.
\end{aligned}$$

Comme $f'' \geqslant 0$, la fonction f est convexe et sa courbe représentative se trouve en-dessus de ses tangentes.
Or, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de f a pour équation $y = x + 1$.
On obtient ainsi,
$$\forall\ u \in \mathbb{R},\ 1 + u \leqslant \mathrm{e}^u.$$

2. On pose $f : u \mapsto \ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}$. La fonction f est deux fois dérivable et
$$\begin{aligned}
f'(u) &= \frac{1}{1+u} - 1 + u,\\
f''(u) &= -\frac{1}{(1+u)^2} + 1 = \frac{(1+u)^2 - 1}{(1+u)^2}.
\end{aligned}$$

Rappelons que nous travaillons sur $\mathbb{R}_+$.

* Comme $f'' \geqslant 0$, la fonction f' est croissante.
* Comme f' est croissante et $f'(0) = \frac{1}{1+0} - 1 + 0 = 0$, alors f' est positive.
* Comme f' est positive, alors f est croissante.

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
$f'(x)$	0 $\nearrow$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	

Comme f est croissante et $f(0) = 0$, alors f est à valeurs positives. Ainsi,

$$\forall\, u \in [0, +\infty[,\ u - \frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u).$$

2e méthode. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, en posant $f : u \mapsto \ln(1+u)$,

$$\begin{aligned} f(u) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $x \geqslant 0$ et $t \in [0, x]$, alors $(x-t)^3 \geqslant 0$. Ainsi, le reste intégral est positif et on obtient l'inégalité attendue. □

Solution de l'exercice 22.

1. Notons f l'application proposée. La fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi, f est croissante sur $]0, \mathrm{e}[$, décroissante sur $]\,\mathrm{e}, +\infty[$, tend vers $-\infty$ en 0 et tend vers 0 en $+\infty$.

2. D'après l'étude précédente, f admet un maximum en e de valeur $\frac{1}{\mathrm{e}}$. Par conséquent,

$$\begin{gathered} \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} \\ \mathrm{e} \ln \pi < \pi \ln \mathrm{e} \\ \pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}, \end{gathered}$$

car la fonction exponentielle est croissante. □

Solution de l'exercice 23.

1. La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc d'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x).$$

Ainsi, la tangente à la courbe représentative de f en 0 a pour équation

$$t : x \mapsto 1 + x.$$

D'après le développement limité précédent,

$$\mathrm{e}^x - t(x) = \frac{x^2}{2}(1 + 2\varepsilon(x)) \sim \frac{x^2}{2}$$

Ainsi, $\mathrm{e}^x - t(x) \geqslant 0$ sur un voisinage de 0 et la courbe représentative de f se situe au-dessus de sa tangente.

Remarque. On aurait pu utiliser ici la convexité de la fonction exponentielle.

2. Comme $\lim\limits_{x \to 2} (x-2) = 0$, d'après les développements limités classiques en 0, il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^{2+x-2} = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{x-2} \\ &= \mathrm{e}^2 \left(1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + (x-2)^2 \varepsilon(x-2) \right) \\ &= \mathrm{e}^2 + (x-2)\,\mathrm{e}^2 + \frac{(x-2)^2}{2} + (x-2)^2 \varepsilon(x-2) \\ &= \mathrm{e}^2 (x-1) + \frac{(x-2)^2}{2} + (x-2)^2 \varepsilon(x-2). \end{aligned}$$

Ainsi, la tangente à la courbe représentative de f en 2 a pour équation

$$t : x \mapsto \mathrm{e}^2(x-1).$$

D'après le développement limité précédent,

$$\mathrm{e}^x - t(x) = \mathrm{e}^2 \frac{(x-2)^2}{2}(1+\varepsilon_1(x)) \sim_2 \mathrm{e}^2 \frac{(x-2)^2}{2}$$

Ainsi, $\mathrm{e}^x - t(x) \geqslant 0$ sur un voisinage de 2 et la courbe représentative de f se situe au-dessus de sa tangente.
Remarque. On aurait pu utiliser ici la convexité de la fonction exponentielle.

3. D'après les développements limités classiques en 0, il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$ et

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(1+x-1)\\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\varepsilon(x-1).\end{aligned}$$

Ainsi, la tangente à la courbe représentative de f en 1 a pour équation

$$t : x \mapsto x-1.$$

D'après le développement limité précédent,

$$\ln(x) - t(x) = -\frac{(x-1)^2}{2}(1+\varepsilon_1(x)) \sim_1 -\frac{(x-1)^2}{2}$$

Ainsi, $\ln(x) - t(x) \leqslant 0$ sur un voisinage de 1 et la courbe représentative de f se situe en-dessous de sa tangente.
Remarque. On aurait pu utiliser ici la concavité de la fonction logarithme.

4. Notons $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$. En utilisant le développement limité de la fonction exponentielle en 0, il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= 1 + x + x\varepsilon(x),\\ x\,\mathrm{e}^x &= x + x^2 + x^2\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de f a pour équation $y = x$.
De plus,

$$x\,\mathrm{e}^x - x = x^2(1+\varepsilon(x)) \sim_0 x^2.$$

Ainsi, $x\,\mathrm{e}^x - x \geqslant 0$ sur un voisinage de 0 et la courbe représentative de f se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.

5. Notons $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$. En utilisant le développement limité de la fonction exponentielle en 0, il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x),\\ \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de f a pour équation $t : x \mapsto 1 + \frac{x}{2}$.
De plus,

$$f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{6}(1+\varepsilon_1(x)) \sim_0 \frac{x^2}{6}.$$

Ainsi, $f(x) - t(x) \geqslant 0$ sur un voisinage de 0 et la courbe représentative de f se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0. $\square$

Solution de l'exercice 24.

1. Comme la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

2. En rappelant que $\sqrt{x^2} = |x|$, on obtient

$$f(x) = x + \sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = x + |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

* Si $x > 0$, alors $f(x) = x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

$*$ Si $x<0$, comme $\sqrt{1+u}-1 \sim_0 \frac{u}{2}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) \sim_{-\infty} x \times \left(\frac{1}{2x^2}\right) \\ &\sim_{-\infty} \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

3. Soit $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Comme la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f est dérivable en x et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1+\frac{1}{2}\times\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{2f(x)}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

Comme la fonction racine carrée est à valeurs positives, alors f' et f sont de même signe.

4. Si $x \geqslant 1$, alors $x+\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$. Ainsi, $f' \geqslant 0$ et f est croissante sur $[1,+\infty[$.

5. Soit $x \in D$. D'après la définition et la formule $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,

$$\begin{aligned} f(x)f(-x) &= \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\times\left(-x+\sqrt{(-x^2)-1}\right) \\ &= (x^2-1)-x^2 = -1. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x)$ et $f(-x)$ sont de signes opposés.
Soit $x<-1$. Alors, $-x>1$ et, d'après la question précédente, $f(-x) \geqslant 0$. Ainsi, $f(x) \leqslant 0$. Comme f' et f sont de même signe, alors $f'(x) \leqslant 0$.
La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty,-1[$.

6. En reprenant les calculs de la question **2.**, pour $x>0$,

$$\begin{aligned} f(x)-2x &= x + x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 2x \\ &= x\left(\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}-1\right). \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, en utilisant le développement limité de $(1+u)^{1/2}$, il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\begin{aligned} f(x)-2x &= x\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)-1\right) \\ &= -\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = 0$ et la droite Δ est bien asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
Remarquons enfin que $f(x)-2x \sim_{+\infty} -\frac{1}{2x}$, qui est une quantité strictement négative. Ainsi, au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de Δ.

7. TODO □

II.3 - Équations fonctionnelles

Solution de l'exercice 25.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'équation satisfaite par f,

$$|f(x)-f(0)| = |x|.$$

Ainsi, soit $f(x)-f(0)=x$, soit $f(x)-f(0)=-x$. En notant $\varepsilon(x)$ ce signe, alors

$$\begin{aligned} f(x)-f(0) &= \varepsilon(x)x \\ f(x) &= \varepsilon(x)x+f(0). \end{aligned}$$

2. Soit $x \neq 0$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} (f(x)-f(1))^2 &= (x-1)^2 \\ (\varepsilon(x)x-\varepsilon(1)1)^2 &= (x-1)^2 \\ \varepsilon(x)^2x^2-2\varepsilon(x)\varepsilon(1)x+\varepsilon(1)^2 1^1 &= x^2-2x+1. \end{aligned}$$

Or, $\varepsilon(x)$, $\varepsilon(1) \in \{-1,1\}$, donc $\varepsilon(x)^2=\varepsilon(1)^2=1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x^2-2\varepsilon(x)\varepsilon(1)x+1 &= x^2-2x+1 \\ 2\varepsilon(x)\varepsilon(1)x &= 2x \\ \varepsilon(x)\varepsilon(1) &= 1, \text{ car } x \neq 0. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon(1)^2 = 1$, en multipliant par $\varepsilon(1)$ l'égalité précédente,

$$\begin{aligned} \varepsilon(1)^2\varepsilon(x) &= \varepsilon(1) \\ \varepsilon(x) &= \varepsilon(1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall\, x \neq 0,\ \varepsilon(x) = \varepsilon(1).$$

3. Soit f une fonction qui satisfait l'équation. D'après la question précédente, il existe $\varepsilon(1) \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\forall\, x \neq 0,\ f(x) = \varepsilon(1)x + f(0).$$

Cette équation est toujours valable lorsque $x = 0$. Ainsi, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

* soit $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + c$,
* soit $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x + c$.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions satisfont bien l'équation.
Finalement, l'ensemble des fonctions recherchées est

$$\{x \mapsto x + c,\ x \mapsto -x + c,\ c \in \mathbb{R}\}.$$

□

Solution de l'exercice 26.

1. Soit f satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. Alors, $f(0)^2 = 2f(0)$, soit $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$.

2. Si $f(0) = 0$. Alors, pour tout réel x, $f(x) \cdot f(0) = f(x) + f(0)$, soit $f(x) = 0$ et f est la fonction nulle.

3. Si $f(0) = 2$. Alors, pour tout réel x, $f(x) \cdot 2 = f(x) + 2$, soit $f(x) = 2$ et f est la fonction constante égale à 2.

4. Réciproquement, la fonction nulle et la fonction constante égale à 2 sont bien solution de l'équation.
Finalement, l'ensemble des fonctions qui satisfont l'équation est :

$$\{x \mapsto 0,\ x \mapsto 2\}.$$

□

Solution de l'exercice 27.

1. En évaluant en $x = y = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(0 + 0) &= f(0) + f(0) \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par récurrence sur n.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} f(0 \times x) &= f(0) = 0, \\ 0f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(0 \times x) = 0 \times f(x)$ et la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(nx) = nf(x)$. Alors,

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx + x) \\ &= f(nx) + f(x), \text{ d'après l'équation fonctionnelle} \\ &= nf(x) + f(x), \text{ d'après la relation de récurrence} \\ &= (n+1)f(x). \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Comme la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x).$$

3. On suppose que f est bornée. Ainsi, il existe un réel M tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant M.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} f(nx) &= nf(x) \\ f(x) &= \frac{f(nx)}{n} \\ 0 \leqslant |f(x)| &= \frac{|f(nx)|}{n} \\ &\leqslant \frac{M}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = f(x) = 0.$$

La fonction f est donc la fonction nulle.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'équation fonctionnelle en prenant $y = -x$ et en utilisant la question **1.**,

$$\begin{aligned} f(x-x) &= f(x) + f(-x) \\ 0 &= f(x) + f(-x) \\ f(-x) &= -f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est impaire.

5. En utilisant la question **2.** avec $x = 1$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1).$$

En utilisant la question précédente,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(-n) = -f(n) = -nf(1).$$

6. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. En utilisant la question **2.** avec $n = q$ et $x = \frac{p}{q}$,

$$\begin{aligned} f\left(q \times \frac{p}{q}\right) &= qf\left(\frac{p}{q}\right) \\ f(p) &= qf\left(\frac{p}{q}\right) \\ pf(1) &= qf\left(\frac{p}{q}\right), \quad \text{d'après la question précédente} \\ f\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p}{q}f(1). \end{aligned}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$ et (p_n/q_n) une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$. D'après la question précédente,

$$f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{p_n}{q_n} f(1).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$ et f est continue, alors

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = f(x).$$

Ainsi, en passant à la limite dans l'égalité,

$$f(x) = xf(1).$$

Remarque. Il est intéressant dans cet exercice de remarquer la démarche. On démontre la propriété $f(x) = xf(1)$:

* pour $x \in \mathbb{N}$ dans la question **5.** première partie,
* pour $x \in \mathbb{Z}$ dans la question **5.** seconde partie,
* pour $x \in \mathbb{Q}$ dans la question **6.**,
* pour $x \in \mathbb{R}$ avec l'hypothèse de continuité dans la question **7**.

On remarque également que la question **7.** suppose qu'il existe une suite de rationnels qui converge vers x. Il est aisé de construire cette suite en choisissant :

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}.$$

$\square$