IV - Matrices inversibles

Révisions

Résolution de systèmes par méthode du pivot de Gauss.

Exercice 1. On considère le système d'équations

$$(S)\begin{cases} 2x+3y &= 5 \\ -x+7y &= 6 \end{cases}.$$

1. Résoudre le système (S) en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

2. Écrire matriciellement le système (S).

I - Inversibilité

Définition 1 - Matrice inversible

Une matrice A d'ordre p est *inversible* s'il existe une matrice B telle que $AB = I_p$. La matrice B est l'*inverse* de A et notée A^{-1}.

Exemple 1 - Matrices inversibles et non inversibles

- On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $AB = I_2$, alors A est inversible et $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Comme $I_p \times I_p = I_p$, alors I_p est inversible et son inverse est I_p.
- Comme $0_p \times A = 0_p \neq I_p$ pour toute matrice carrée A, alors la matrice nulle n'est pas inversible.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB.

2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Proposition 1 - Inversibilité et produit

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre p.

- Si $AB = I_p$, alors $BA = I_p$. Ainsi, $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.
- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemple 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse vaut

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^2 - 2M + I_3$.

2. En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.

II - Calculs de puissance

Théorème 1 - Puissance et relation PDP^{-1}

Soit A une matrice carrée d'ordre p. On suppose qu'il existe une matrice P inversible d'ordre p et une matrice diagonale D d'ordre p telles que $A = PDP^{-1}$. Alors, pour tout n entier naturel, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 4. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. En notant $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer le produit PQ. En déduire que P est inversible.

2. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

3. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. En déduire, pour tout n entier naturel, une expression des coefficients de A^n en fonction de n.

III - Critères d'inversibilité

III.1 - Cas des matrices diagonales

Proposition 2 - Inversibilité des matrices diagonales

Soit D une matrice diagonale.

- Si D possède au moins un 0 sur la diagonale, alors D n'est pas inversible.
- Si tous les coefficients diagonaux de D sont non nuls, alors D est inversible. Alors, D^{-1} est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de D.

Exemple 3

- Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice D est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3. Comme ils sont tous non nuls, la matrice D est inversible et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
- Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice D est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1 et 0. La matrice D n'est pas inversible.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Pour chacune de ces matrices, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, exprimer son inverse.

III.2 - Cas des matrices triangulaires

Proposition 3 - Inversibilité des matrices triangulaires

Soit T une matrice triangulaire.

- Si T possède au moins un 0 sur la diagonale, alors T n'est pas inversible.
- Si tous les coefficients diagonaux de T sont non nuls, alors T est inversible.

Exemple 4

- Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice T est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux $(1, -1, 2)$ sont non nuls. Ainsi, T est inversible.
- Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les coefficients diagonaux de T sont 1 et 0. Comme T est triangulaire supérieure et que 0 est un coefficient diagonal de T, alors T n'est pas inversible.

Exercice 6. Parmi les matrices suivantes, déterminer lesquelles sont inversibles et lesquelles ne le sont pas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0,01 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

III.3 - Cas des matrices carrées d'ordre 2

Proposition 4 - Inversibilité des matrices d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 2.

- Si $ad - cb = 0$, alors la matrice A n'est pas inversible.
- Si $ad - cb \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple 5 -

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Comme $2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$ est non nul, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, déterminer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

III.4 - Non inversibilité

Proposition 5

Soit A une matrice inversible d'ordre p et B, C deux matrices carrées d'ordre p.

- Si $AB = AC$, alors $B = C$.
- Si $BA = CA$, alors $B = C$.

Exemple 6 - Preuve de non inversibilité

- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
  On remarque que $AB = AC$. Supposons par l'absurde que A soit inversible. Alors, $B = C$. Cependant, $B \neq C$. Ainsi, A n'est pas inversible.
- Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $N \times N = 0_2$. Supposons par l'absurde que N soit inversible. Comme $N \times N = N \times 0_2$, alors $N = 0_2$. On obtient ainsi une contradiction et N n'est pas inversible.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A$.
2. En déduire qu'il existe une matrice B non nulle telle que $AB = 0_3$.
3. En déduire que A n'est pas inversible.

IV - Systèmes linéaires

IV.1 - Résolution de systèmes

Théorème 2 - Inversibilité & Systèmes linéaires

Soit un système écrit sous forme matricielle $AX = Y$. Le système admet une unique solution si et seulement si A est inversible. Alors, $X = A^{-1}Y$.

Exemple 7 -

Nous cherchons à résoudre le système $\begin{cases} x + 2y &= 4 \\ 3x + 4y &= -1 \end{cases}$.

En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, le système s'écrit $AX = Y$.
Comme $1 \times 4 - 3 \times 2 = -2 \neq 0$, la matrice A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, le système possède une unique solution et

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}Y = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $x = -9$ et $y = \frac{13}{2}$.

Exercice 9. Utiliser la stratégie précédente pour résoudre le système $\begin{cases} -x + 3y &= 11 \\ x + 2y &= 9 \end{cases}$.

IV.2 - Calculs d'inverses

Théorème 3 - Inverse & Système linéaire

Soit A une matrice carrée d'ordre p. La matrice A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que pour toutes X, Y matrices colonnes, le système $X = AY$ s'écrit $Y = BX$. Alors, $A^{-1} = B$.

Exemple 8 - Inverse par résolution de $AX = Y$,

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. En utilisant la méthode du pivot de Gauss,

$$AX = Y$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z &= a \\ -x + y + z &= b \\ x + z &= c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z &= a \\ 2y + 2z &= a + b & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ y &= a - c & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_1 - L_3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + y &= a \\ 2z + 2y &= a + b \\ y &= a - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ z &= -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c \\ y &= a - c \end{cases}$$

En posant $B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $Y = BX$. D'où,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Déterminer l'inverse de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 9 - Inverse par pivot sur I,

On place les matrices A et I côte à côte. On transforme la matrice A en la matrice I à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. On effectue les mêmes opérations sur I.

$$\begin{array}{|ccc|ccc|l}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2} \\
\hline
2 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3} \\
0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \\
0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & \\
\hline
2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \\
0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & \\
0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}
\end{array}$$

On obtient ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$