

# XIV - Nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## I - L'ensemble des nombres complexes

### I.1 - Définition et Opérations

#### Définition 1 - Nombre complexe

On admet l'existence d'un ensemble noté  $\mathbb{C}$ , appelé ensemble des *nombres complexes*, muni d'une addition et d'une multiplication, tel que :

- $\mathbb{C}$  contient un nombre noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$ .
- pour tout élément  $z \in \mathbb{C}$ , il existe un unique couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $z = a + bi$ . Cette écriture est la *forme algébrique* de  $z$ .
  - ★ Le réel  $a$  est la *partie réelle* de  $z$ , noté  $a = \Re(z)$ .
  - ★ Le réel  $b$  est la *partie imaginaire* de  $z$ , noté  $b = \Im(z)$ .

Deux nombres complexes  $z_1 = a + bi$  et  $z_2 = \alpha + \beta i$  sont égaux si et seulement si  $(a = \alpha \text{ et } b = \beta)$ .

#### Exemple 1 - Quelques nombres complexes

Le réel  $12 = 12 + 0i$  est un nombre complexe.  
Les nombres  $3 + 2i$  ou  $\sqrt{3} + \sqrt{2}i$  sont des nombres complexes.

#### Définition 2 - Affixe, Image

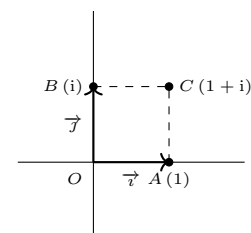
Soit  $M$  un point du plan de coordonnées  $(a, b)$ . L'*affixe* du point  $M$  est le nombre complexe  $a + bi$ .

Soit  $z = x + yi$  un nombre complexe sous forme algébrique. Le point de coordonnées  $(x, y)$  est l'*image* du nombre complexe  $z$ .

Soit  $\vec{u}$  un vecteur du plan de coordonnées  $(x, y)$ . L'*affixe* du vecteur  $\vec{u}$  est le nombre complexe  $x + yi$ .

#### Exemple 2 - Le plan complexe

Soit  $a = 1$ ,  $b = i$  et  $c = 1 + i$ . On note  $A$  (resp.  $B$ ,  $C$ ) l'image de  $a$  (resp.  $b$ ,  $c$ ). Alors,



#### Définition 3 - Opérations sur les nombres complexes

Soit  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = \alpha + \beta i$  deux nombres complexes sous forme algébrique et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- **Addition.**  $z_1 + z_2 = (a + \alpha) + (b + \beta)i$ .
- **Multiplication.**  $z_1 z_2 = (a\alpha - b\beta) + (a\beta + b\alpha)i$ .
- **Inverse.** Si  $z_1 \neq 0$ , alors  $\frac{1}{z_1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ .

#### Exemple 3 - Opérations

En utilisant les définitions précédentes,

$$\begin{aligned} (1 + 2i) + 4(-1 + 3i) &= (1 + 2i) + (-4 + 12i) \\ &= (1 - 4) + (2 + 12)i \\ &= -3 + 14i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + i)(3 - 2i) &= 3 - 2i + 3i + i(-2i) \\ &= (3 + 2) + (3 - 2)i \\ &= 5 + i. \end{aligned}$$

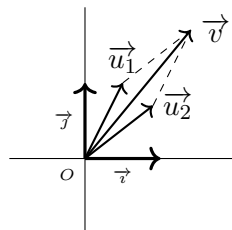
$$\begin{aligned}\frac{1+i}{2-3i} &= (1+i) \frac{2+3i}{4+9} \\ &= \frac{2+3i+2i+3i^2}{13} \\ &= \frac{-1+5i}{13}.\end{aligned}$$

### Proposition 1 - Interprétation géométrique

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan d'affixes respectifs  $u$ ,  $v$ . Pour tous  $\lambda$ ,  $\mu$  réels, le vecteur  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$  a pour affixe  $\lambda u + \mu v$ .

### Addition de vecteurs

Soit  $\vec{u}_1$  un vecteur d'affixe  $z_1$  et  $\vec{u}_2$  un vecteur d'affixe  $z_2$ . Alors,  $z_1 + z_2$  a pour image le vecteur  $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$  :



### Théorème 1 - Propriétés des opérations

Soit  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ .

#### • Propriétés de l'addition.

- ★ Associativité :  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ .
- ★ Commutativité :  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ .
- ★ Élément neutre :  $z_1 + 0 = z_1$ .
- ★ Opposé :  $z_1 + (-z_1) = 0$ .

#### • Propriétés de la multiplication.

- ★ Associativité :  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ .
- ★ Commutativité :  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ .
- ★ Élément neutre :  $z_1 \cdot 1 = z_1$ .

★ Inverse : Si  $z_1 \neq 0$ , alors  $z_1 \cdot \frac{1}{z_1} = 1$ .

- **Distributivité** :  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$ .

### Exemple 4 - Identité remarquable

En utilisant les propriétés précédentes,

$$\begin{aligned}(2+3i)^2 &= 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 \\ &= 4 + 12i - 9 \\ &= -5 + 12i.\end{aligned}$$

Plus généralement, si  $z_1, z_2$  sont des nombres complexes et  $n$  est un entier naturel, on peut montrer la formule du binôme de Newton :

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}.$$

## I.2 - Équations du second degré

### Proposition 2 - Trinômes

Soit  $a, b, c$  trois réels tels que  $a \neq 0$ . L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet toujours des solutions sur  $\mathbb{C}$ . Posons  $\Delta = b^2 - 4ac$  le *discriminant* de cette équation.

- Si  $\Delta = 0$ , l'équation possède une unique solution  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .
- Si  $\Delta > 0$ , l'équation possède deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si  $\Delta < 0$ , l'équation possède deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

**Exemple 5 - Résolution d'équation**

Soit  $z$  une solution de  $z^2 + 3z + 4 = 0$ . Le discriminant de ce trinôme vaut  $\Delta = 3^2 - 4 \times 4 = -7$ . Ainsi,

$$z \in \left\{ \frac{-3 - i\sqrt{7}}{2}, \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2} \right\}.$$

**Proposition 3 - Relations coefficients / racines**

Soit  $z_1, z_2$  les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ . Alors,

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \text{ et } z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}.$$

**I.3 - Conjugaison****Définition 4 - Conjugué**

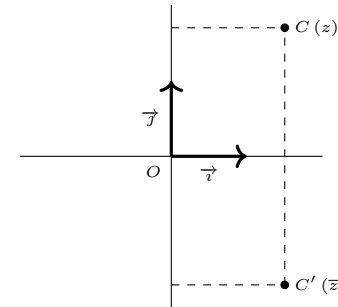
Soit  $a, b$  deux réels et  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ . Le nombre complexe  $\bar{z} = a - bi$  est le *conjugué* de  $z$ .

**Exemple 6 - Conjugués**

$$\bar{i} = -i, \bar{2} = 2, \overline{\sqrt{3} + 2i} = \sqrt{3} - 2i.$$

**Proposition 4 - Interprétation géométrique**

Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$ . Le point d'affixe  $\bar{z}$  est le symétrique de  $M$  par rapport à l'axe des abscisses.

**Conjugués****Proposition 5 - Propriétés du conjugué**

Soit  $z$  un nombre complexe.

- $\overline{(\bar{z})} = z$ .
- $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,  $\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .
- $z$  est réel si et seulement si  $z = \bar{z}$ .
- $z$  est imaginaire pur si et seulement si  $z = -\bar{z}$ .
- $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$ . De plus,  $z\bar{z} = 0$  si et seulement si  $z = 0$ .

**Proposition 6 - Conjugué et Opérations**

Soit  $z_1, z_2$  deux nombres complexes.

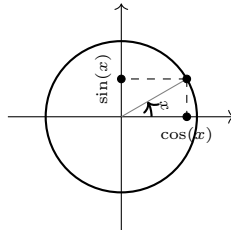
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ .

## II - Cercle trigonométrique

### II.1 - Cosinus et Sinus

Pour tout  $x$  réel, on lit les valeurs de ses sinus et cosinus sur le *cercle trigonométrique*.

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

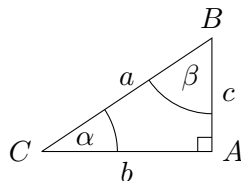


#### Proposition 7 - Théorème de Thalès

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$ . On note  $a$  (resp.  $b, c$ ) la longueur du segment  $[BC]$  (resp.  $[AC]$ ,  $[AB]$ ) et  $\beta$  l'angle non orienté  $\widehat{CBA}$ . Alors,

$$\cos(\beta) = \frac{c}{a} \text{ et } \sin(\beta) = \frac{b}{a}.$$

#### Illustration graphique



#### Proposition 8 - Formules d'addition

Pour tous  $a, b$  réels,

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b),$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a).$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

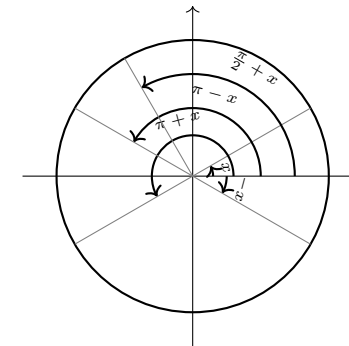
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$



#### Exemple 7 - Formules d'addition

Nous pouvons généraliser les expressions précédentes :

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(-b) - \sin(a) \sin(-b)$$

$$= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b),$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(-b) + \sin(-b) \cos(a)$$

$$= \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a).$$

**Théorème 2 - Théorème de Pythagore**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ .

**II.2 - Équations trigonométriques****Définition 5 - Modulo**

Pour tous  $x, y, v$  réels, la relation  $x \equiv y [v]$  se lit *x est congru à y modulo v* et signifie qu'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $x = y + kv$ .

**Proposition 9**

Pour tout couple de réels  $(x, y)$ ,

- $\sin(x) = \sin(y)$  si et seulement si

$$x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y [2\pi].$$

- $\cos(x) = \cos(y)$  si et seulement si

$$x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y [2\pi].$$

- $\cos(x) = \cos(y)$  et  $\sin(x) = \sin(y)$  si et seulement si

$$x \equiv y [2\pi].$$

**Exemple 8 - Résolution d'équation**

Soit  $x$  tel que  $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ x &\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]. \end{aligned}$$

**Lemme 1 - Paramétrisation du cercle unité**

Pour tous  $x, y$  réels tels que  $x^2 + y^2 = 1$ , il existe un réel  $\theta$  tel que

$$x = \cos(\theta), y = \sin(\theta).$$

**III - Module et Argument****III.1 - Module****Définition 6 - Module**

Pour tout nombre complexe  $z = a + bi$  écrit sous forme algébrique, le *module* de  $z$ , noté  $|z|$ , est le réel

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Exemple 9 - Calculs de modules**

$$|2| = \sqrt{2 \times 2} = 2,$$

$$|-3| = \sqrt{(-3) \times (-3)} = 3,$$

$$|i| = \sqrt{i \times (-i)} = 1,$$

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$|3 - \sqrt{2}i| = \sqrt{9 + 2} = \sqrt{11}.$$

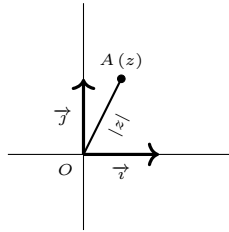
**Proposition 10 - Interprétation géométrique**

Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$ . La distance  $OM$  du point  $M$  à l'origine est égale au module  $|z|$ .

Soit  $A, B$  deux points du plan d'affixes respectifs  $a, b$ . Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour affixe  $(b - a)$ . Ainsi, la longueur  $AB$  est égale au module du nombre complexe  $b - a$ .

**Module**

Représentation de l'image d'un nombre complexe ainsi que de son module :

**Proposition 11 - Module**

Soit  $z$  un nombre complexe.

- $|z| = 0$  si et seulement si  $z = 0$ .
- $|\bar{z}| = |z|$ .
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  et  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ .
- Si  $z$  est non nul, alors  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

**Proposition 12 - Module et Opérations**

Soit  $z_1, z_2$  deux nombres complexes.

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .
- **Inégalité triangulaire :**  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  avec égalité si et seulement s'il existe  $\lambda$  réel positif tel que  $z_1 = \lambda z_2$  ou  $z_2 = \lambda z_1$ .

**III.2 - Exponentielle complexe****Définition 7 - Exponentielle complexe**

Soit  $z = x + yi$  un nombre complexe sous forme algébrique. On note  $e^z = e^x (\cos(y) + \sin(y)i)$ .

**Exemple 10 - Exponentielles complexes**

$$e^2 = e^{2+0i} = e^2$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = e^0 \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)i \right) = i$$

$$e^{i\pi} = e^0 (\cos(\pi) + \sin(\pi)i) = -1.$$

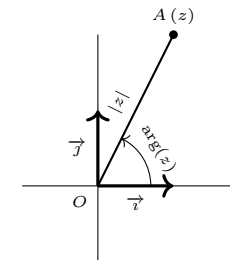
**Définition 8 - Argument, Forme trigonométrique**

Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

- Tout réel  $\theta$  tel que  $z = |z| e^{i\theta}$  est **un argument** de  $z$ .
- L'unique réel  $\theta \in ]-\pi; \pi]$  tel que  $z = |z| e^{i\theta}$  est **l'argument principal** de  $z$ , noté  $\arg(z)$ .
- Le nombre complexe  $z$  s'écrit sous la forme  $z = |z| e^{i\arg(z)}$ . Cette écriture est la *forme trigonométrique* du nombre complexe  $z$ .

**Module & Argument**

Représentation de l'image d'un nombre complexe ainsi que de son module :



**Exemple 11 - Formes trigonométriques**

Mise sous forme trigonométrique en factorisant par le module puis en reconnaissant un argument classique :

$$\begin{aligned} 2 &= 2e^{0i}, \\ -3 &= 3e^{i\pi}, \\ i &= e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ 1+i &= \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i \right) \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

**Proposition 13 - Exponentielle et Opérations**

- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$ .
- Pour tout  $z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$ .

**Exemple 12 - Forme trigonométrique**

En utilisant le calcul précédent,

$$\begin{aligned} (1+i)^2 &= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i. \\ (1+i)^4 &= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{i\pi} = -4. \end{aligned}$$

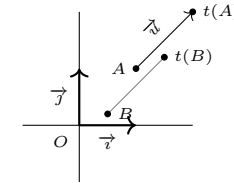
**IV - Transformations géométriques****Proposition 14 - Translations, Homothéties, Rotations**

- Soit  $\vec{u}$  un vecteur d'affixe  $b$ . L'image d'un point  $M$  d'affixe  $z$  par la translation de vecteur  $\vec{u}$  a pour affixe  $z + b$ .
- Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{C}$ . L'image d'un point  $M$  d'affixe  $z$  par la rotation d'angle  $\theta$  et de centre d'affixe  $\omega$  a pour affixe  $e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ .

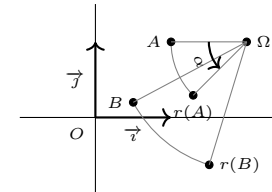
- Soit  $k \in \mathbb{R}^*$  et  $\omega \in \mathbb{C}$ . L'image d'un point  $M$  d'affixe  $z$  par l'homothétie de centre d'affixe  $\omega$  et de rapport  $k$  a pour affixe  $k(z - \omega) + \omega$ .

**Transformations du plan complexe**

- Soit  $t : z \mapsto z + (1+i)$  et  $\vec{u}$  le vecteur d'affixe  $1+i$ .



- Soit  $r : z \mapsto e^{i\frac{\pi}{4}}(z - (2+i)) + (2+i)$ ,  $\Omega$  le point d'affixe  $2+i$  et  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .



- Soit  $h : z \mapsto 3(z - (2+i)) + (2+i)$ ,  $\Omega$  le point d'affixe  $2+i$  et  $k = 3$ .

