

# T.D. III - Intégration

## I - Primitives & Intégrales

**Exercice 1. (✳)** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| 1. $\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}$ . | 5. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . |
| 2. $\frac{8x^2}{(x^3+2)^3}$ . | 6. $\frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}$ .          |
| 3. $x\sqrt{1-2x^2}$ .         | 7. $\frac{\ln(x)}{x}$ .                  |
| 4. $(e^x + 1)^3 e^x$ .        | 8. $\frac{\ln^{27}(x)}{x}$ .             |

**Exercice 2. (Changements de variables, ✳)** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\frac{1}{e^x+1}$ .<br>$\varphi : u \mapsto \ln(u), \frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}$ . | 3. $\frac{1}{2t \ln(t)+t}$ .<br>$\varphi : u \mapsto e^u$ .           |
| 2. $\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ .<br>$\varphi : u \mapsto u^2$ .  | 4. $\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}$ .<br>$\varphi : u \mapsto \sqrt{u-2}$ . |

**Exercice 3. (Intégrations par parties, ✳)** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- |                |  |
|----------------|--|
| 1. $\ln(x)$ .  | 4. $x^2 \ln(x)$ .  |
| 2. $x e^x$ .   | 5. $\sqrt{1+x} \ln(x)$ .<br>$\varphi : u \mapsto \sqrt{u-2}$ . |
| 3. $x^2 e^x$ . |  |

**Exercice 4.**

- Montrer qu'il existe  $a, b$  réels tels que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  
 $\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ .
- En déduire la valeur de  $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$ .

**Exercice 5. (✳)** Montrer que  $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} \leq 1$ .

**Exercice 6. (Loi exponentielle, ✳)** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $f(x) = 2e^{-2x}$  sinon.

- Représenter graphiquement la fonction  $f$ .
- Déterminer les intégrales suivantes :

a)  $\int_{-2}^0 f(x) dx$ .

b)  $\int_{-1}^{3/2} f(x) dx$ .

- Si  $x \geq 0$ , déterminer  $\int_0^x f(t) dt$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$ .

**Exercice 7. (✳)**

- Montrer que, pour tout  $k \geq 2$ ,

$$\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt.$$

- En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln(t) dt + \ln(n).$$

- En utilisant une primitive de  $\ln$ , en déduire la limite de la suite de terme général  $\frac{\ln(n!)}{n \ln(n)}$ .

**Exercice 8. (✳)** Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on pose  $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ .

- En utilisant la concavité du logarithme, montrer que

$$\forall x \in ]0, 1[, \forall t \in ]x^2, 1[, \frac{2 \ln(x)}{x^2 - 1} (t - 1) \leq \ln(t) \leq t - 1.$$

- Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 1.
- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0, 1[$  et calculer sa dérivée.

## II - Suites d'intégrales

**Exercice 9. (✳)** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

1. Montrer que  $(I_n)$  converge et déterminer sa limite.
2. Calculer  $I_n + I_{n+1}$ .
3. En déduire la limite de la suite de terme général  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ .

**Exercice 10.** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ .

1. Montrer que :  $\forall x \geq 0, 0 \leq \ln(1+x) \leq x$ .
2. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

**Exercice 11.** Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$  et  $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ .

1. a) Calculer  $J_1$ .  
b) Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$ .  
c) En déduire que  $(J_n)$  converge et déterminer sa limite.
2. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \geq 1, I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

- b) Montrer que la suite  $(I_n)$  converge.
- c) Montrer que la suite  $(nI_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 12. (Fonction bêta)** Pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , on note  $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$ .

1. Déterminer une relation entre  $I_{p,q}$  et  $I_{p+1,q-1}$ .
2. Exprimer la valeur de  $I_{p,q}$  à l'aide de factorielles.

### III - Calculs d'intégrales généralisées

**Exercice 13. (✱)** Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 x \ln^2(x) dx.$$

$$2. \int_0^1 \ln^2(t) dt.$$

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

$$4. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt.$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}.$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

$$6. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt.$$

$$7. \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^2}.$$

**Exercice 14. (Loi uniforme, ✱)** Soit  $a < b$  et  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Déterminer  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

**Exercice 15. (Loi exponentielle, ✱)** Soit  $\lambda > 0$  et  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Déterminer  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

**Exercice 16. (✱)** Montrer que les intégrales suivantes convergent :

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

$$\forall t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}.$$

$$2. \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt.$$

$$\forall t \geq a, \sqrt{t} e^{-t} \leq 1/t^2.$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^4} dt.$$

$$4. \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^4} dt.$$

$$5. \int_0^1 \frac{\sqrt{t}-1}{t^2-1} dt.$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t} dt.$$

3. En déduire, pour tout  $n$  entier naturel, la valeur de  $\Gamma(n+1)$ .

**Exercice 19.** On pose  $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$ .

1. Existence. On pose  $f : x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$ .

a) Montrer que  $f$  admet un prolongement continu en 0.

b) Montrer que  $f$  admet un prolongement continu en 1.

c) En déduire que l'intégrale  $I$  converge.

2. On pose  $J_{\varepsilon, M} = \int_{\varepsilon}^M \frac{x-1}{\ln(x)} dx$ .

a) Effectuer le changement de variable  $\varphi : u \mapsto e^{-u}$  dans  $J_{\varepsilon, M}$ .

b) En utilisant la linéarité de l'intégrale, calculer  $J_{\varepsilon, M}$ .

c) En faisant tendre successivement  $M$  vers  $+\infty$ , puis  $\varepsilon$  vers 0, en déduire la valeur de  $I$ .

## V - Calculs d'équivalents

**Exercice 20.** Pour chacune des fonctions suivantes, calculer un équivalent en  $+\infty$  et déterminer si l'intégrale de la fonction sur  $[1, +\infty[$  converge.

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $f_1(x) = \frac{(x^5+3x+1)e^{-x}}{12x+3}$ .           |  | 6. $f_6(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}$ .                 |
| 2. $f_2(x) = \frac{(x+25)\ln(x)}{e^x + e^{-x}}$ .        |  | 7. $f_7(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2(e^x - e^{-x})}$ .   |
| 3. $f_3(x) = \frac{\ln(x+1)e^x}{2x+5}$ .                 |  | 8. $f_8(x) = \frac{x^4(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}$ .   |
| 4. $f_4(x) = \frac{(3x+12)\ln(1+\frac{1}{x})}{5x^4+2}$ . |  | 9. $f_9(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x - e^{-x}}$ .            |
| 5. $f_5(x) = \frac{x}{e^x + e^{-x}}$ .                   |  | 10. $f_{10}(x) = \frac{t^3 e^{-2\sqrt{t}}}{1+t^3+t^4}$ . |

**Exercice 21.** Pour chacune des fonctions suivantes, calculer un équivalent en 0 et déterminer si l'intégrale de la fonction sur  $]0, 1]$  converge.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $f_1(x) = \frac{(x^5+3x+1)e^{-x}}{12x+3}$ . |  | 2. $f_2(x) = \frac{(x+25)\ln(x)}{e^x + e^{-x}}$ . |
|--|--|---|

## IV - Intégrations par parties - Changement de variable

**Exercice 17. (Expression intégrale de la factorielle, ⚙️)** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ .

1. Calculer  $I_0$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .
  - a) Montrer qu'il existe un réel  $a$  tel que

$$\forall t \geq a, 0 \leq t^n e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}.$$

- b) En déduire que l'intégrale  $I_n$  converge.
3. En utilisant une intégration par parties sur le segment  $[0, M]$ , puis en faisant tendre  $M$  vers  $+\infty$ , montrer que  $I_{n+1} = nI_n$ .
4. En déduire, pour tout  $n$  entier naturel, la valeur de  $I_n$ .

**Exercice 18. (Fonction Gamma d'Euler, ⚙️)** Pour tout réel  $x$  strictement positif, on pose  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

1. Soit  $x > 0$ .
  - a) Pour tout  $t \in ]0, 1]$ , rappeler la définition de  $t^{x-1}$ .
  - b) Déterminer un équivalent, lorsque  $t \rightarrow 0$  de  $t^{x-1} e^{-t}$ .
  - c) En déduire que  $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$  converge.
  - d) Montrer qu'il existe un réel  $a$  tel que

$$\forall t \geq a, t^{x-1} e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

- e) En déduire que  $\int_a^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  converge.
  - f) En déduire que la fonction  $\Gamma$  est bien définie.
2. En utilisant une intégration par parties sur le segment  $[\varepsilon, M]$  puis en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 et  $M$  vers  $+\infty$ , montrer que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

$$3. f_3(x) = \frac{\ln(x+1)e^x}{2x+5}.$$

$$4. f_4(x) = \frac{(3x+12)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{5x^4+2}.$$

$$5. f_5(x) = \frac{x}{e^x + e^{-x}}.$$

$$6. f_6(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}.$$

$$7. f_7(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2(e^x - e^{-x})}.$$

$$8. f_8(x) = \frac{x^4(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}.$$

$$9. f_9(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x - e^{-x}}.$$

**Exercice 22.** Pour chacune des fonctions suivantes, calculer un équivalent en 1 et déterminer si l'intégrale de la fonction sur  $]1, 2]$  converge.

$$1. f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$2. f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$3. f_3(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$4. f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x-1}}.$$

$$5. f_5(x) = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x^2-1}}.$$