IV - Espaces vectoriels

I - Systèmes d'équations linéaires

Définition 1 - Système linéaire

Soient $(a_{1,1},\dots,a_{1,p},\dots,a_{n,1},\dots,a_{n,p},b_1,\dots,b_n)$ des réels. Le système $(\mathscr{S})$

$$(\mathscr{S})\begin{cases} a_{1,1}x_1+\dots+a_{1,p}x_p &= b_1\\ a_{2,1}x_1+\dots+a_{2,p}x_p &= b_2\\ \vdots &= \vdots\\ a_{n,1}x_1+\dots+a_{n,p}x_p &= b_n\end{cases}$$

est un *système linéaire* d'inconnues $x_1,\dots,x_p$.

- Un p-uplet $(x_1,\dots,x_p)$ est *solution* de $(\mathscr{S})$ s'il est solution de chacune des lignes du système.
- Deux systèmes sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple 1

Les systèmes suivants sont des systèmes d'équations linéaires :

- $\begin{cases} 2x+3y+z &= 0\\ x+5y+2z &= 1\end{cases}$
- $\begin{cases} 2x+3y+5z=2\end{cases}$
- $\begin{cases} 2x+3y=1\end{cases}$
- $\begin{cases} 2x+y &= 3\\ x+5y &= 2\end{cases}$

Définition 2 - Opérations élémentaires

Nous noterons $L_1,\dots,L_n$ les lignes du système et appellerons *opérations élémentaires* sur les lignes du système les transformations suivantes :

- Pour $i\neq j$, l'échange des lignes L_i et L_j, symbolisé par $L_i\leftrightarrow L_j$.
- Pour $\alpha\neq 0$, la multiplication de la ligne L_i par α, symbolisée par $L_i\leftarrow \alpha L_i$.
- Pour $i\neq j$ et $\beta\in\mathbb{R}$, l'ajout à L_i de la ligne L_j multipliée par β, symbolisé par $L_i\leftarrow L_i+\beta L_j$.

Théorème 1

Le système obtenu par application d'opérations élémentaires sur les lignes est équivalent au système initial.

Principe de l'algorithme du pivot de Gauss : On utilise les opérations élémentaires pour transformer le système en un système échelonné, c'est-à-dire dans lequel le nombre d'inconnues décroît strictement quand on passe d'une ligne à la suivante.

Algorithme :

- On cherche une ligne où le coefficient α de x_1 est non nul et simple. Notons cette ligne L_{i_0}.
- On échange les lignes 1 et i_0, $L_1\leftrightarrow L_{i_0}$.
- On utilise la nouvelle ligne L_1 pour éliminer les occurrences de x_1 dans les lignes suivantes, c'est la ligne pivot. Par exemple, si à la ligne L_2 le coefficient de x_1 est a, on effectue $L_2\leftarrow \alpha L_2 - aL_1$.
- On reprend ensuite les étapes de l'algorithme en travaillant sur toutes les lignes sauf la première de manière à éliminer x_2...
- Enfin, on exprime les solutions en fonction des variables libres.

Définition 3 - Rang d'un système linéaire

Le *rang* du système est le nombre d'équations non triviales du système échelonné.

Théorème 2 - Ensemble de solutions

Soit S l'ensemble des solutions du système $(\mathscr{S})$.
- Soit $S = \emptyset$, les équations sont *incompatibles*.
- Soit S est un singleton, le rang est alors égal au nombre d'inconnues.
- Soit S est infini, le rang est alors strictement inférieur au nombre d'inconnues.

Exemple 2 - Résolution de système

Résolvons le système suivant avec l'algorithme du pivot de Gauss :

$$(\mathscr{S})\begin{cases} 2x+3y+z & =7 \\ x-y+2z & =-3 \\ 3x+y-z & =6 \end{cases}.$$

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est solution de $(\mathscr{S})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z & =-3 & {\scriptstyle L_1 \leftrightarrow L_2} \\ 2x+3y+z & =7 \\ 3x+y-z & =6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z & =-3 \\ 5y-3z & =13 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2-2L_1} \\ 4y-7z & =15 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3-3L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z & =-3 \\ 5y-3z & =13 \\ -23z & =23 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow 5L_3-4L_2} \end{cases}.$$

Le système $(\mathscr{S})$ possède une unique solution. L'ensemble des solutions est

$$\{(1,2,-1)\}.$$

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y & =2 \\ x-2y & =5 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x+2y+3z & =1 \end{cases}$.

II - Espaces vectoriels

On note $\overrightarrow{0_n} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels non nuls.

Définition 4 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

On définit sur $\mathbb{R}^n$ une addition et une multiplication par un réel de la manière suivante :

Addition. Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n).$$

Multiplication par un réel. Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Exemple 3 - Cas où $n = 2, 3$

- Si $n = 2$.

$$\begin{aligned} (1,2)+(3,4) &= (4,6) \\ (1,5)+(-1,0) &= (0,5) \\ 3 \cdot (4,2) &= (12,6) \end{aligned}$$

- Si $n = 3$.

$$\begin{aligned} (1,-1,2)+(4,5,-5) &= (5,4,-3) \\ (1,0,-1)+(3,1,2) &= (4,1,1) \\ 2 \cdot (4,1,-2) &= (8,2,-4) \end{aligned}$$

Proposition 1 - Structure d'espace vectoriel

- Propriétés de l'addition. Soit x, y, z des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
  - ⋆ Associativité : $x+(y+z) = (x+y)+z$.
  - ⋆ Élément neutre : $x + \overrightarrow{0_n} = \overrightarrow{0_n} + x = x$.
  - ⋆ Existence d'un opposé : $x + (-1) \cdot x = (-1) \cdot x + x = \overrightarrow{0_n}$.
  - ⋆ Commutativité : $x+y = y+x$.

- Propriétés de la multiplication par un réel. Soit $x,\, y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l|l} \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x & (\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ 1 \cdot x = x & \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \end{array}$$

$\mathbb{R}^n$ est un *espace vectoriel*. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont des *vecteurs*.

III - Familles de vecteurs

Dans tout ce chapitre, p désigne un entier naturel non nul.

III.1 - Sous-espace vectoriel

Définition 5 - Sous-espace vectoriel

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est un *sous-espace vectoriel* si
- $\overrightarrow{0_n} \in A$,
- pour tout $x,\, y \in An$ et $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha x + \beta y \in A$.

Exemple 4 - Exemple de sous-espaces vectoriels

- $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- $\left\{\overrightarrow{0_n}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- Géométriquement,
  - ⋆ les droites sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
  - ⋆ les droites sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
  - ⋆ les plans sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.

1. On note $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; x+y+z=0 \text{ et } 2x+3y+5z=0\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. On note $\mathscr{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; x+y+z=1 \text{ et } 2x+3y+5z=3\right\}$. Montrer que $\mathscr{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Définition 6 - Combinaison linéaire

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
- si $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, le vecteur $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1, \dots, x_p)$ est noté :

$$\mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_p\} = \left\{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i,\; \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}\right\}.$$

Proposition 2

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors, $\mathrm{Vect}\,\{x_1, \dots, x_p\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5 - Un peu de géométrie

- $D = \mathrm{Vect}\,\{(1,2)\} = \{\alpha(1,2),\; \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $D = \mathrm{Vect}\,\{(1,0)\} = \{\alpha(1,0),\; \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $D = \mathrm{Vect}\,\{(1,0,1)\} = \{\alpha(1,0,1),\; \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- $P = \mathrm{Vect}\,\{(1,0,0),(0,0,1)\} = \{(\alpha,0,\beta),\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un plan de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 6 - Équation cartésienne → Combinaison linéaire

Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; x+y+z=0 \text{ et } 2x+3y+5z=0\right\}$.
Écrivons F comme un ensemble de combinaisons linéaires.

$$(x,y,z) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2x+3y+5z &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ y+3z &= 0 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \; ; \begin{cases} x &= 2\lambda \\ y &= -3\lambda . \\ z &= \lambda \end{cases}$$

Ainsi,

$$F = \{\lambda \cdot (2,-3,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,\{(2,-3,1)\}\,.$$

Exemple 7 - Combinaison linéaire → Équation cartésienne

Soit $F = \mathrm{Vect}\,\{(1,2,3),(1,0,1),(2,2,4)\}$.
Déterminons une équation cartésienne de F.
$(x,y,z) \in F$ si et seulement s'il existe $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x,y,z) = \lambda(1,2,3) + \mu(1,0,1) + \nu(2,2,4)$
si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda+\mu+2\nu &= x \\ 2\lambda+2\nu &= y \\ 3\lambda+\mu+4\nu &= z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+2\nu &= x \\ -2\mu-2\nu &= y-2x \leftarrow L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2\mu-2\nu &= z-3x \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu+2\nu &= x \\ -2\mu-2\nu &= y-2x \\ 0 &= x-2y+z \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Ainsi, une description de F via une équation cartésienne est

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x-2y+z=0\right\}.$$

Proposition 3 - S

it $(x_1,\ldots,x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $(\alpha_2,\ldots,\alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\alpha_1 \neq 0$. Alors,

- $\mathrm{Vect}\,\{x_1,\ldots,x_p\} = \mathrm{Vect}\left\{\alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_i, x_2, \ldots, x_p\right\}$.
- Si $x_p \in \mathrm{Vect}\,\{x_1,\ldots,x_{p-1}\}$, alors $\mathrm{Vect}\,\{x_1,\ldots,x_p\} = \mathrm{Vect}\,\{x_1,\ldots,x_{p-1}\}$.

III.2 - Bases

Dans cette partie, $(x_1,\ldots,x_p)$ désigne une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 7 - Famille libre

La famille $(x_1,\ldots,x_p)$ est *libre* si, pour tout $\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = \overrightarrow{0_n} \Rightarrow \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \alpha_i = 0.$$

La famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est une famille de vecteurs *linéairement indépendants*.

Exemple 8

La famille $((1,2),(3,4))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
En effet, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(1,2) + \beta(3,4) = (0,0)$. Alors,

$$(\alpha+3\beta, 2\alpha+4\beta) = (0,0)$$

De même,

$$\begin{cases} \alpha+3\beta &= 0 \\ 2\alpha+4\beta &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+3\beta &= 0 \\ -2\beta &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Montrer que $((1,2,-1),(2,1,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Définition 8 - Famille génératrice

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille *génératrice* de F si, pour tout $x \in F$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$.

Exercice 4. Montrer que $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Définition 9 - Base

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est une *base* de F si elle est génératrice et que ses vecteurs sont linéairement indépendants.

Exemple 9 - Bases canoniques

- $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 4 - Dimension

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_q)$ sont des bases de F, alors $p = q$. L'entier p est la *dimension* de l'espace vectoriel F, noté $\dim F$. Par convention, $\dim \left\{\overrightarrow{0_n}\right\} = 0$.

Exercice 5.

1. Déterminer la dimension de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la dimension de $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x + 2y + z = 0\right\}$.

Proposition 5 - Caractérisation des bases

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension q de $\mathbb{R}^n$ et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de F. Il y a équivalence entre :

(i). $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de F.

(ii). $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants et $p = q$.

(iii). $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille génératrice de F et $p = q$.

Exercice 6. Montrer que $((1,2,3),(1,0,1),(0,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3 - Théorème de la base incomplète

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de F. Il existe une famille $(y_{p+1}, \ldots, y_q)$ telle que $(x_1, \ldots, x_p, y_{p+1}, \ldots, y_q)$ soit une base de F.

Définition 10 - Coordonnées

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_p)$ une base de F et $x \in F$. Il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$.

Exemple 10 - Calcul de coordonnées

Déterminons les coordonnées de $(3,1,2)$ dans la base $((1,2,3),(1,0,1),(0,1,-1))$.
Il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(3,2,1) = \lambda(1,2,3) + \mu(1,0,1) + \nu(0,1,-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu & = 3 \\ 2\lambda + \nu & = 2 \\ 3\lambda + \mu - \nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu & = 3 \\ -2\mu + \nu & = -4 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ -2\mu - \nu & = -8 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu & = 3 \\ -2\mu + \nu & = -4 \\ -4\mu & = -12 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = 0 \\ \nu & = 2 \\ \mu & = 3 \end{cases}$$

Ainsi,

$$(3,2,1) = 0 \cdot (1,2,3) + 3 \cdot (1,0,1) + 2 \cdot (0,1,-1).$$