■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.
Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. Afin de lutter contre le vol et le recel de vélos volés, le Gouvernement a rendu obligatoire le marquage de vélos vendus par des professionnels. D'un point de vue très rudimentaire, la base de données permettant de relier un vélo à son propriétaire est constituée d'une unique table nommée `Immatriculations` dont les attributs sont les suivants :

- `Id` : INTEGER, numéro du vélo ;
- `Marque` : TEXT, nom de la marque du vélo ;
- `Couleur` : TEXT, couleur du vélo ;
- `NomProprietaire` : TEXT, nom du propriétaire du vélo ;
- `ContactProprietaire` : TEXT, numéro de téléphone pour contacter le propriétaire ;
- `Prix` : FLOAT, prix d'achat du vélo.

Dans les questions suivantes, les requêtes sont à écrire en langage SQL.

1. Écrire une requête permettant d'afficher tous les contacts des propriétaires d'un vélo présent dans la base.

2. Écrire une requête permettant d'afficher le nom des propriétaires d'un vélo de couleur `'Orange'`.

3. Écrire une requête permettant d'afficher les identifiants des vélos `'Orange'` de marque `'Pentathlon'`.

4. Écrire une requête permettant d'afficher le prix moyen des vélos inscrits sur la base de données. On pourra utiliser la fonction d'agrégat `AVG()`.

5. Écrire une requête permettant de modifier le prix d'achat du vélo dont l'identifiant est `56243` qui devait être vendu à 150 euros mais qui finalement a été cédé à 110 euros.

Exercice 2. Soit g la fonction definie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$.

1. a) Montrer que la dérivée de g vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité : $g'(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

b) Calculer $g(1)$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

d) Dresser le tableau des variations de g sur $]0;+\infty[$ en y faisant figurer les résultats obtenus aux questions **1.b)** et **1.c)**.

e) Justifier que pour tout réel $x > 0$ on a : $g(x) > 0$.

2. Soit f la fonction definie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{x - \ln(x)}$.

a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $f'(x) = \dfrac{1-x}{x(x-\ln(x))^2}$.

b) Déduire de **1.c)** les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.
Donner une interprétation graphique de la limite de f en $+\infty$.

c) Dresser le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$. On y fera figurer les limites obtenues a la question **2.b)** ainsi que $f(1)$.

3. On cherche a résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $]0;+\infty[$.

a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'équation $f(x) = x$ est équivalente a l'équation : $x - \ln(x) - \dfrac{1}{x} = 0$.

On pose donc pour tout réel $x > 0$: $h(x) = x - \ln(x) - \dfrac{1}{x}$.

b) Montrer que la dérivée de h vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité : $h'(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}$.
En déduire le sens de variation de h sur $]0;+\infty[$.

c) On donne : $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$. Dresser le tableau des variations de h.

d) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.
Calculer $f(1)$. En déduire la valeur de α.

4. Tracer l'allure de la représentation graphique de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 4cm.

Exercice 3. On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. a) Établir pour tout $x \in [0,1]$, l'encadrement : $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $\forall\, x \in [0,1]$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. On note f' la dérivée de f.

a) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $f'(x)$.

b) En déduire que $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$.

3. a) En utilisant l'identité $x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-x^2} = x^{n+1} \times x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ et à l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n, la relation : $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$.

b) Déterminer la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{I_{2n+1}}{n!}$.

a) Établir la relation : $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2\,\mathrm{e}} \times \frac{1}{(n+1)!}$. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

b) Donner sous forme de somme, l'expression de I_{2n+1} en fonction de n.

c) Vérifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $I_{2k+1} = kI_{2k-1} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$. À l'aide de cette relation et de la valeur de I_1, compléter le script suivant afin qu'il calcule la valeur de I_{31}.

```python
import numpy as np

n = ...
I = 1/2 - 1/(2 * np.exp(1))
for k in range(1, n+1):
    I = ...
print(I)
```

Exercice 4. On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^3.

2. Vérifier que $P^2AP = L$.

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $P^2A^nP = L^n$.

b) Soit $J = L - I$. Calculer J^2 puis J^3.

c) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

d) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, les neuf coefficients de L^n. Vérifier que votre résultat reste vrai lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$.

e) Dédure des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On considère les trois suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ et $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = u_n; v_{n+1} = v_n + 2w_n \text{ et } w_{n+1} = 2u_n + w_n.$$

a) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$? Donner u_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

c) Établir pour tout entier $n \geqslant 1$ que : $X_n = A^{n-1}X_1$.

d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $v_n = 2n(n-1)$ et $w_n = 2n$.

e

Exercice 5.

1. Soit A, J et I les trois matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer deux réels a et b tels que $A = aJ + bI$.

b) Calculer J^2 en fonction de J.

c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$A^n = (-2)^nI + \frac{1}{2}\left[4^n - (-2)^n\right]J.$$

d) Donner l'expression explicite de A^n sous forme d'une matrice d'ordre 2.

2. On note $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ les deux suites définies par $v_0 = 3$, $w_0 = 1$ et les relations suivantes, valables pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} v_{n+1} & = v_n + 3w_n \\ w_{n+1} & = 3v_n + w_n \end{cases}.$$

On considère pour tout n de $\mathbb{N}$, la matrice X_n à deux lignes et une colonne définie par $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Déterminer X_0.

b) Établir par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $X_n = A^n X_0$.

c) En déduire l'expression de X_n en fonction de n.

d) Calculer les valeurs de v_n et de w_n en fonction de n.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 3$ et la relation suivante, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{3u_n + 1}.$$

a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité suivante : $u_n = \frac{v_n}{w_n}$.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.