

## I. Résolutions d'équations

**Exercice 1.** [IMT] Résoudre l'équation différentielle  $t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$ . Y-a-t-il des solutions définies sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 2.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(\sinh x)y' - y \cosh x = -1$ .

**Exercice 3.** [CCP] On considère l'équation différentielle

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$$

1. Déterminer les fonctions développables en série entière solutions de (\*). Pourquoi y a-t-il d'autres solutions sur  $]0, 1[$  ?

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$ .

*Indication.* On effectuera le changement de variable  $y(x) = z(x)/(1-x)$  et on soignera les raccords.

**Exercice 4.** On considère l'équation différentielle  $ty' + y = 3t^2 \cos(t^{3/2})$ .

1. Déterminer une solution de l'équation différentielle développable en série entière au voisinage de 0.

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 5.** [X-ENS] Déterminer toutes les fonctions continues  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1.$$

**Exercice 6.** [Mines] Déterminer une condition sur la fonction  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pour que la fonction  $f : t \mapsto \frac{t}{\cosh(t)}$  soit solution sur  $\mathbb{R}$  de  $y'' + \lambda y' + y = 0$ . Résoudre alors cette équation.

*Indic. :* Étudier la fonction  $f \cdot \cosh$ .

## II. Coefficients constants

**Exercice 7.** [IMT] Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Justifier sans calcul que  $A$  est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de  $A$ .

3. Résoudre le système différentiel  $(x' = x + 2z, y' = y, z' = 2x + z)$ .

**Exercice 8.** Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}$$

**Exercice 9.** Soient  $A$  une matrice antisymétrique d'ordre  $n$  et  $X$  une solution du système différentiel  $X' = AX$ . Montrer que  $\|X\|$  est constante.

**Exercice 10.** Dériver  $t \mapsto \|X(t)\|^2$ .

## III. Comportement des solutions

**Exercice 11.** [Centrale]

1. Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$ ,  $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Montrer que l'équation  $y' + f(t)y = g(t)$  admet une unique solution  $\varphi$  telle que  $\varphi(t_0) = x_0$ . Exprimer  $\varphi$  à l'aide d'intégrales.

2. Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $h$  une fonction bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que l'équation  $y' - ay = h$  admet une unique solution bornée sur  $\mathbb{R}_+$ .

## IV. Avec Python

**Exercice 12.** [Centrale] Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ .

1. Déterminer une fonction  $x$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0 telle que  $x'' + \omega^2 x = 0$ ,  $x(0) = 0$  et  $x'(0) = a$ .

**2.** On considère l'équation différentielle  $x'' + x = 0$ ,  $x(0) = 0$  et  $x'(0) = a$ . En utilisant **Python**, tracer la courbe représentative de  $x$  sur  $]0, 10]$  pour  $a \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5\}$ .

**3.** Soient  $r \in ]0, 1[$  et  $F : t \mapsto \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2(\omega u)}}$ .

**a)** Montrer que  $F$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , strictement croissante et impaire.

**b)** Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  puis que sa réciproque  $F^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**c)** Pour  $r = 0.9$  et  $\omega = 1$ , en utilisant **Python**, tracer la courbe représentative de  $F$  sur  $[-5, 5]$ .

**4. a)** Tracer la courbe représentative de  $t \mapsto 2 \arcsin(r \sin(\omega F^{-1}(t)))$  sur  $[-5, 5]$ .

**b)** On suppose que  $0 < a < 2\omega$ . On pose  $r = \frac{a}{2\omega}$  et  $\varphi(t) = 2 \arcsin(r \sin(\omega F^{-1}(t)))$ . Montrer que  $\varphi'' + \omega^2 \sin(\varphi) = 0$ .