T.D. XI - Convergence Estimation

I - Inégalités

Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev ne sont pas exigibles au concours. Vous pouvez vous référer au cours pour leur formulation.

Exercice 1. Une usine fabrique des lampes qui sont défectueuses avec probabilité 10%. On prélève 100 lampes du stock et on note Y le nombre de lampes défectueuses.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Déterminer $\mathbf{E}[Y]$.

3. À l'aide de l'inégalité de Markov, majorer la probabilité qu'il y ait plus de 6 lampes défectueuses.

Exercice 2. Le nombre d'appels (durant un intervalle de temps d'une heure) à un centre téléphonique suit une loi de Poisson de paramètre 4.

1. Quel est le nombre moyen d'appels reçus en une heure ?

2. À l'aide de l'inégalité de Markov, majorer la probabilité qu'il y ait plus de 8 appels durant une heure ?

Exercice 3. Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, proposer une majoration de $\mathbf{P}([|X - \lambda| \geqslant \lambda])$.

Exercice 4. Soit $(X_1, \ldots, X_{100})$ une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$. On pose $Y = \sum\limits_{i=1}^{100} X_i$.

1. Déterminer la loi de Y.

2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, proposer une majoration de $\mathbf{P}([|Y - 25| \geqslant 10])$.

II - Convergence

Exercice 5. L'appel de fonction `randint(a, b)` du module `numpy.random` permet de simuler une loi uniforme sur l'ensemble des entiers compris entre `a` et `b` $- 1$. Le code suivant affiche la valeur `0.496`. Interpréter ce résultat.

```
import numpy.random as rd

N = 1000
s = 0

for i in range(N):
    s = s + rd.randint(0, 2)

print(s/N)
```

Exercice 6. L'appel de fonction `random()` du module `numpy.random` permet de simuler une loi uniforme sur l'ensemble des réels compris entre 0 et 1. Le code suivant affiche la valeur `1.98`. Interpréter ce résultat.

```
import numpy.random as rd

def X():
    u = rd.random()
    if u < 1/3:
        return -1
    elif u <= (1/3+1/6):
        return 2
    else:
        return 4

N = 1000
s = 0

for i in range(N):
    s = s + X()
```

```
print(s/N)
```

III - Estimation

Exercice 7. Soit $a > 0$. On note f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. Déterminer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

Un fabriquant de téléphones portables veut étudier l'autonomie de ses téléphones. Étant donné un téléphone pris au hasard et chargé au maximum, on note X le nombre d'heures écoulées lorsque le téléphone s'éteint. On suppose que X est une variable aléatoire de densité f. On allume en même temps n téléphones pris au hasard que l'on a chargés au maximum et on note X_i la durée en heures écoulées lorsque le i^{e} téléphone s'éteint. On suppose que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

3. Proposer un estimateur ponctuel de $\frac{3a}{2}$.

4. On suppose que $n = 100$ et on mesure $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i = 603$.

a) À quelle valeur peut-on estimer a ?

b) Déterminer $\mathbf{V}(Y)$.

c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $\mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{1}{n}Y - \frac{3a}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right)$.

d) Proposer un intervalle dans lequel $\frac{3a}{2}$ se trouve avec probabilité au moins égale à 95%.

Exercice 8. Soit $a > 0$. On note f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{3t^2}{a^3} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant a \\ 0 & \text{si } t > a \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. Déterminer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

Soit $n \geqslant 2$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose $Y_n = \frac{4}{3n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

3. Calculer $\mathbf{E}[Y_n]$ puis $\mathbf{V}(Y_n)$.

4. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}([|Y_n - a| \geqslant \varepsilon]) = 0$.

Exercice 9.

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \mathrm{e}^{a-x} & \text{si } x \geqslant a \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f et $Y = X - a$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Y.

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c) Donner l'espérance et la variance de Y. En déduire l'espérance et la variance de X.

Soit n un entier naturel on nul et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X. On note $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - 1)$.

3. Calculer l'espérance puis la variance de S_n.

Exercice 10. On note N le nombre total de loups dans le massif alpin. On cherche à estimer N à l'aide de différents protocoles. On commence par prélever 10 loups que l'on munit d'une puce puis qu'on relâche. On suppose que la population de loups n'évolue pas et que la probabilité de prélever un loup pucé est toujours égale à $\frac{10}{N}$.

1. Premier protocole. On prélève successivement 30 loups en relâchant à chaque fois le loup prélevé. On note X le nombre de loups pucés prélevés.

a) Reconnaître la loi de X.

b) Donner l'espérance et la variance de X en fonction de N.

c) Montrer que $\frac{X}{300}$ est un estimateur ponctuel de $\frac{1}{N}$.

d) Proposer un intervalle dans lequel $\frac{1}{N}$ se trouve avec probabilité au moins égale à 95%.

2. Second protocole. On prélève successivement des loups en les relâchant à chaque fois jusqu'à ce qu'on trouve un loup pucé. On note Y_1 le nombre de loups prélevés lorsqu'on trouve le premier loup pucé.

a) Reconnaître la loi de Y_1.

b) Donner l'espérance et la variance de Y_1 en fonction de N.