



## I. Produits scalaires, Familles de vecteurs

**Exercice 1.** (4) [CCP] On définit, sur  $(\mathbb{R}_n[X])^2$ ,  $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.

2. Trouver une base orthonormée de  $\mathbb{R}_3[X]$  pour ce produit scalaire.

**Exercice 2.** (4) [CCP] Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{U}(E)$  un automorphisme tel que pour tout  $(x, y) \in E^2$ , si  $\langle x, y \rangle = 0$ , alors  $\langle f(x), f(y) \rangle = 0$ .

1. Que dire de la famille  $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$  ?

2. En calculant  $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle$  de deux façons, montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\|f(e_i)\|^2 = a^2$ . Que dire de la famille  $\frac{1}{a}\mathcal{B}'$  ?

**Exercice 3.** [TPE] Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$ , dont le produit scalaire est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soient  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$  et  $\mathcal{G} = (y_1, \dots, y_p)$  deux familles de vecteurs de  $E$  telles que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est libre si et seulement si  $\mathcal{G}$  est libre.

2. Montrer que  $\dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{G})$ .

3. On note  $F = \text{Vect } \mathcal{F}$  et  $G = \text{Vect } \mathcal{G}$ . En déduire qu'il existe une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $f(x_i) = y_i$  et pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| = \|x\|$ .

**Exercice 4.** Soient  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$  une famille de  $E$  et  $x = \sum_{i=1}^p x_i u_i \in E$ .

Montrer que  $\|x\|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^p x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2 \right)$ .

**Exercice 5. (Famille obtusangle)** [X-ENS] Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n \geq 2$ .

1. Soit  $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de vecteurs de  $E$  telle que pour tout  $i \neq j$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle < 0$ . Montrer que  $p \leq n + 1$ .

2. Montrer que le cas  $p = n + 1$  est possible.

3. Soient  $\mathcal{B} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  telle que pour tout  $i \neq j$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle \leq 0$  et  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in E$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\langle x, x_i \rangle \geq 0$ . Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i \geq 0$ .

**Exercice 6.** [Centrale] Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ , on définit

$$f(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

1. Montrer que  $f$  est un produit scalaire.

2. Montrer

$$\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X] ; \forall Q \in \mathbb{R}_n[X], Q(1) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

3. Montrer que  $P_n$  possède  $n$  racines simples dans  $[-1, 1]$ .

**Exercice 7.** (4) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\|AX\| \leq \|X\|$ . Montrer que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|{}^tAX\| \leq \|X\|.$$

**Exercice 8.** [Centrale] Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé.

1. On suppose que  $N$  est euclidienne.

a) Montrer que  $N$  satisfait l'identité du parallélogramme.

b) Donner une expression du produit scalaire en fonction de  $N$ .

c) La norme  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  vérifie-t-elle l'identité du parallélogramme ?

2. On suppose que la norme  $N$  sur  $E$  vérifie l'identité du prallélogramme. On pose  $f(x, y) = N(x + y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2$  pour tout  $(x, y) \in E^2$ .

**a)** Soit  $(x, x', y) \in E^3$ . Montrer que

$$f(x + x', y) = 2f(x, y/2) + 2f(x', y/2)$$

**b)** En déduire que  $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$ .

**c)** Montrer que pour tous  $(x, y) \in E^2$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(tx, y) = tf(x, y)$ .

**d)** Conclure que  $f$  est un produit scalaire et que la norme  $N$  est euclidienne.

**Exercice 9. (Matrice de GRAM, ♡)** Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille d'éléments de  $E$ . On définit

$$G(x_1, \dots, x_p) = \det[(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j \in \llbracket 1, p \rrbracket}].$$

**1.** Montrer que la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est liée si et seulement si  $G(x_1, \dots, x_p) = 0$ .

On pourra montrer que si la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre, alors  $G(x_1, \dots, x_p) > 0$ .

**2.** Soit  $(\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$  et  $x = x_1 + \sum_{i=2}^p \lambda_i x_i$ . Montrer que  $G(x, x_2, \dots, x_p) = G(x_1, \dots, x_p)$  et  $G(\lambda x_1, \dots, x_p) = \lambda^2 G(x_1, \dots, x_p)$ .

**3.** Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille libre et  $F = \text{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$ . Montrer que

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}.$$

**Exercice 10. [X-ESPCI]** Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**1.** Montrer qu'il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$M \in H \Leftrightarrow \text{Tr}(AM) = 0.$$

Soit  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour tout entier naturel  $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $B = E_{1,n} + \sum_{i=2}^n E_{i,i-1}$  et  $J_r = \sum_{i=1}^r E_{i,i}$ .

**2.** Calculer  $J_r B$ .

**3.** Montrer que  $B$  est inversible.

**4.** En déduire que  $H$  contient une matrice inversible.

**Exercice 11. [ENS]** Soient  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ . On définit, pour tout  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , le système  $(X_k)$  de la manière suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, X_k = AX_{k-1} + BU_{k-1},$$

où  $(U_k)$  est une famille de vecteurs de  $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ .

Le système  $(A, B)$  est dit *contrôlable* si pour tous  $N \geq n$ ,  $(\tilde{X}_0, \tilde{X}_N) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ , il existe  $(U_i) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})^N$  tel que le système  $(X_k)$  définit par  $X_0 = \tilde{X}_0$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_k = AX_{k-1} + BU_{k-1}$  est tel que  $X_N = \tilde{X}_N$ .

**1.** Exprimer  $X_n$  en fonction de  $A, B, X_0, U_0, \dots, U_{n-1}$ .

On pose  $C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathcal{M}_{n,nm}(\mathbb{R})$ , matrice définie par blocs.

**2.** On suppose que  $\text{Rg}(C) < n$ . Montrer l'existence de  $X \neq 0$  tel que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  ${}^t X A^k B = 0$ . En déduire que le système n'est pas contrôlable.

On suppose à présent que le système n'est pas contrôlable et on note  $N$  le rang à partir duquel il n'est plus contrôlable.

**3.** Montrer que  $F : (U_0, \dots, U_{N-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{N-1} A^i B U_{N-1-i}$  définie de  $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})^N$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est linéaire et non surjective.

**4.** Montrer qu'il existe  $X \neq 0$  tel que pour tout  $(U_0, \dots, U_{N-1})$ ,  ${}^t X \left( \sum_{i=0}^{N-1} A^i B U_{N-1-i} \right) = 0$ .

**5.** En déduire que  $\text{Rg}(C) < n$ .

**6.** Donner une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité.

## II. Projections

**Exercice 12. (♣)** Soit  $F$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^4$  défini par les équations  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  et  $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ . Déterminer la projection orthogonale sur  $F$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^4$ , calculer  $d(x, F)$ .

**Exercice 13. [CCP]** Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ .

**1.** Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.

2. Soit  $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] ; P(1) = 0\}$ .

a) Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$  et déterminer la dimension de  $E$ .

b) Calculer la distance  $d(1, E)$ .

**Exercice 14.** [CCP] On définit  $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ .

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

2. Déterminer  $d = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt$ .

**Exercice 15.** [Mines] L'espace  $E = \mathbb{R}_3[X]$  est muni du produit scalaire défini par  $\langle P, Q \rangle = \int_{[-1,1]} PQ$ . Soit  $F = \{P \in E ; \langle X^2 - 1, P' \rangle = \langle X, P \rangle\}$  et  $Q = 1 + X + X^2 + X^3$ . Déterminer  $d(Q, F)$ .

**Exercice 16.** [Mines] Soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels et  $\Phi : (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \mapsto \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ .

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les  $a_k$  pour que  $\Phi$  soit un produit scalaire.

2. Calculer la distance de  $X^n$  à  $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] ; \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$ .

### III. Avec Python

**Exercice 17.** [Centrale 2] On étudie les matrices échiquier. Par exemple,

la matrice échiquier d'ordre 4 est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. a) Écrire une fonction `echiquier(n)` qui à un entier  $n$  renvoie la matrice échiquier de dimension  $n$ .

b) Écrire une fonction qui renvoie la liste des matrices échiquier de taille  $2p$  où  $p \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$ .

c) Calculer, pour toute matrice  $M$  de la liste précédente,  $M^3 - p^2 M$ . Conjecturer un résultat plus général puis le démontrer.

2. a) Justifier, sans utiliser le polynôme caractéristique, que les matrices échiquier sont diagonalisables.

b) Donner une base des sous-espaces propres de  $M$ .

c) Montrer que les sous-espaces propres sont orthogonaux.

d) Écrire une fonction `projection(x)` qui calcule le projeté orthogonal du vecteur  $x$  sur  $\text{Ker } M$ , où  $M$  est la matrice échiquier de taille  $n$ .

### Mathématiciens

**GRAM** Jorgen Pedersen (27 juin 1850-29 avr. 1916 à Copenhague).