



Partie I : Approximation décimale d'un réel

1. Soient x un nombre réel et n un entier naturel. Montrer que $10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$ est une approximation décimale de x à 10^{-n} près. Cette approximation est-elle par défaut ou par excès ?

2. Soit x un réel strictement positif. On définit $a_0 = \lfloor x \rfloor$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k 10^{-k}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.

b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$.

d) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

e) Montrer par l'absurde que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} ; a_n < 9\}$ est infini. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée le *développement décimal propre* de x .

3. On pourra généraliser les résultats de cette partie en remplaçant 10 par un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie II : Construction à partir du développement décimal

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs vérifiant

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq 9$,

(ii). $\{n \in \mathbb{N} ; a_n < 9\}$ est infini.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k 10^{-k}$.

4. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Montrer que sa limite x est un réel positif.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p > n$, on pose $U_p = \sum_{k=n+1}^p a_k 10^{-k}$ et $V_p =$

$$\sum_{k=n+1}^p 9 \cdot 10^{-k}.$$

a) Montrer que la suite (U_p) converge vers $x - S_n$.

b) Montrer qu'il existe un entier $p > n$ tel que pour tout entier naturel $N \geq p$, il existe un entier $q > N$ tel que $V_q - U_q \geq 10^{-q} + 10^{-p}$. En déduire que $x - S_n < 10^{-n}$.

c) En déduire que $S_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$.

Partie III : Développement décimal périodique et nombres rationnels

Nous allons montrer dans cette partie qu'un réel positif x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

6. Soit x un réel positif et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son développement décimal. On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls N et q tels que pour tout $n \geq N$, $a_{n+q} = a_n$. On pose $r = \sum_{k=0}^{N-1} a_k 10^{-k}$ et $T_p =$

$$\sum_{k=0}^{q-1} a_{N+pq+k} 10^{-(N+pq+k)}.$$

a) On pose $s = \sum_{k=0}^{q-1} a_{N+k} 10^{-k}$. Montrer que $T_p = 10^{-(N+pq)} s$ puis que

la suite $(\sum_{k=0}^n T_p)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

b) En déduire que x est rationnel.

7. Calculer, sans calculatrice, le développement décimal de $22/7$ et vérifier la propriété annoncée.

8. Soit $x = p/q$ un nombre rationnel positif. Notons r_0 le reste de la division euclidienne de p par q et pour tout $k \in \mathbb{N}$, r_{k+1} le reste de la division euclidienne de $10r_k$ par q .

a) Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{p}{q} = a_0 + a_1 10^{-1} + \dots + a_k 10^{-k} + \frac{r_k}{q} 10^{-k}$.

b) En remarquant que le nombre de restes possibles $\{r_k, k \in \mathbb{N}\}$ est fini, montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.