

T.D. IV - Variables aléatoires discrètes

I - Lois usuelles finies

Solution de l'exercice 1. Soit $\omega \in \Omega$.

Comme $Y_n(\omega)$ est un produit de réels valant soit 0 soit 1, alors $Y_n(\omega) \in \{0, 1\}$. Ainsi, Y_n suit une loi de Bernoulli.

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_n = 1) &= \mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^n X_i = 1\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = 1\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = 1), \text{ car les v.a. sont indépendantes} \\ &= p^n. \end{aligned}$$

Finalement, $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^n)$. □

Solution de l'exercice 2. Remarquons que N peut prendre les valeurs $0, 1, \dots, n$, soit

$$N(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N = 0) &= \mathbf{P}(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i = 1) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = 1\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = 1), \text{ car les v.a. sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{n!} \\ \mathbf{P}(N = k) &= \mathbf{P}(\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, X_i = 1 \text{ ET } X_k = 0) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{X_i = 1\} \cap \{X_k = 0\}\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}(X_i = 1)\right) \times \mathbf{P}(X_k = 0), \text{ car les v.a. sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{k-1}{k!}. \end{aligned}$$

□

II - Variables aléatoires finies

Solution de l'exercice 3.

1. En notant α le coefficient de proportionnalité, pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$,

$$\mathbf{P}(X = i) = \alpha i.$$

Or, $\sum_{i=1}^4 \mathbf{P}(X = i) = 1$. Ainsi,

$$\alpha(1 + 2 + 3 + 4) = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{10}.$$

Finalement,

$$\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \mathbf{P}(X = i) = \frac{i}{10}.$$

2. D'après la définition de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{i=1}^4 i \mathbf{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^4 i \times \frac{i}{10} \\ &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^4 i^2 \\ &= \frac{1}{10} \frac{4(4+1)(2 \times 4 + 1)}{6} \\ &= \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 30. \end{aligned}$$

3. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\frac{1}{X}\right] &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i} \mathbf{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i} \times \frac{i}{10} \\ &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^4 1 = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. Comme il y a exactement 3 boules noires, la première boule rouge apparaîtra au moins au 4^e tirage. Ainsi, $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

* La probabilité qu'une boule rouge soit tirée lors du premier tirage est égale à

$$\mathbf{P}(X = 1) = \frac{7}{10}.$$

* En utilisant la formule des probabilités composées et en notant N_i (resp. R_i) l'événement « une boule noire (resp. rouge) est tirée au i^{e} tirage »,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = 2) &= \mathbf{P}(N_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(N_1) \mathbf{P}_{N_1}(R_2) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{30}. \end{aligned}$$

* En utilisant la formule des probabilités composées et les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = 3) &= \mathbf{P}(N_1 \cap N_2 \cap R_3) = \mathbf{P}(N_1) \mathbf{P}_{N_1}(N_2) \mathbf{P}_{N_1 \cap N_2}(R_3) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{120}. \end{aligned}$$

* En utilisant la formule des probabilités composées et les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = 4) &= \mathbf{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap R_4) \\ &= \mathbf{P}(N_1) \mathbf{P}_{N_1}(N_2) \mathbf{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) \mathbf{P}_{N_1 \cap N_2 \cap N_3}(R_4) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{7} = \frac{1}{120}. \end{aligned}$$

2. D'après la définition de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{i=1}^4 i \mathbf{P}(X = i) \\ &= \frac{7}{10} + 2 \frac{7}{30} + 3 \frac{7}{120} + 4 \frac{1}{120} = \frac{11}{8}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \sum_{i=1}^4 i^2 \mathbf{P}(X = i) \\ &= \frac{7}{10} + 2^2 \frac{7}{30} + 3^2 \frac{7}{120} + 4^2 \frac{1}{120} = \frac{55}{24}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{55}{24} - \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{77}{192}.$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. Le nombre de tirages possibles est $(2n)!$. La position de la première boule impaire est comprise entre 1 et $(n+1)$, soit $(n+1)$ possibilités. Il y a enfin $n!$ façons de disposer les boules paires. Au final,

$$\frac{(n+1)n!}{(2n)!}.$$

2. Le nombre de positions des boules impaires est $\binom{2n}{n}$. Leur ordre est ensuite fixé. Il y a ensuite $n!$ manières de disposer les boules paires. Ainsi,

$$\frac{\binom{2n}{n}n!}{(2n)!} = \frac{1}{n!}.$$

3. D'une part, $X(\Omega) = \llbracket n, 2n \rrbracket$. Ensuite, sur $\{X = k\}$, il y a $\binom{k-1}{n-1}$ manières de choisir les positions des boules impaires (la dernière étant en position k). Ensuite, il y a $n!$ façons de disposer les boules impaires et $n!$ de disposer les paires. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{k=n}^{2n} k \frac{(n!)^2 \binom{k-1}{n-1}}{(2n)!} \\ &= \frac{n(n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} \\ &= \frac{n(n!)^2}{(2n)!} \binom{2n+1}{n+1} \\ &= \frac{n(2n+1)}{n+1}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 6.

1. D'après la formule du triangle de Pascal, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^q \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right] \\ &= \binom{q+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{q+1}{p+1}. \end{aligned}$$

2. Comme il y a exactement b boules blanches dans l'urne, il faut effectuer au moins b tirages pour pouvoir extraire toutes les boules blanches de l'urne. Ainsi, $X(\omega) = \llbracket b, n+b \rrbracket$.

Un tirage consiste en une succession de $n+b$ boules où n sont noires et b sont blanches. Ainsi, un tirage est uniquement déterminé par la position des b boules blanches parmi ces $n+b$ boules, soit un nombre de tirages égal à :

$$\binom{n+b}{b}.$$

Soit $k \in \llbracket b, n+b \rrbracket$. Si $X = k$, alors une boule blanche a été tirée au k^{e} tirage et les $b-1$ autres boules blanches ont été tirées lors des $k-1$ tirages précédents. Les boules rouges sont alors réparties sur les autres tirages. Le nombre de tirages où la dernière boule blanche tirée l'est lors du k^{e} tirage est donc égal à :

$$\binom{k-1}{b-1}.$$

Finalement,

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}.$$

Remarque. En utilisant la première question,

$$\sum_{k=b}^{n+b} \binom{k-1}{b-1} = \sum_{k=b-1}^{n+b-1} \binom{k}{b-1} = \binom{n+b}{b}.$$

Ainsi, $\sum_{k=b}^{n+b} p_k = 1$.

En utilisant la formule du capitaine, la première question, ainsi que la définition de l'espérance,

$$\sum_{k=b}^{n+b} k \binom{k-1}{b-1} = b \sum_{k=b}^{n+b} \binom{k}{b} = b \binom{n+b+1}{b+1}.$$

Ainsi, $\mathbf{E}[X] = \frac{b(n+b+1)}{b+1}$.

Concernant la variance, en utilisant deux fois la formule du capitaine,

$$\begin{aligned} \binom{n+b}{b} \mathbf{E}[X^2] &= \sum_{k=b}^{n+b} k^2 \binom{k-1}{b-1} \\ &= b \sum_{k=b}^{n+b} k \binom{k}{b} \\ &= b(b+1) \sum_{k=b}^{n+b} \binom{k+1}{b+1} - b \sum_{k=b}^{n+b} \binom{k}{b} \\ &= b(b+1) \binom{n+b+2}{b+2} - b \binom{n+b+1}{b+1} \\ &= \binom{n+b+1}{b+1} b \frac{n(b+1) + b(b+2)}{b+2} \\ \mathbf{E}[X^1] &= \frac{n+b+1}{(b+1)(b+2)} [n(b+1) + b(b+2)] \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{bn(n+b+1)}{(b+1)^2(b+2)}. \end{aligned}$$

□

III - Loix usuelles infinies

Solution de l'exercice 7.

1. Les tirages étant effectués avec remise, à chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule rouge est égale à $\frac{7}{10}$.

Ainsi, l'expérience est une suite d'expériences de Bernoulli de probabilité de succès égale à $\frac{7}{10}$. Comme X est égale au rang du premier succès,

alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{7}{10}\right).$$

2. En utilisant les propriétés des lois géométriques,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{1}{\frac{7}{10}} = \frac{10}{7} \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{1 - \frac{7}{10}}{\left(\frac{7}{10}\right)^2} = \frac{3}{10} \times \frac{10^2}{7^2} = \frac{30}{49}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. Ici, $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$. Ainsi, on explicite les événements :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S=2) &= \mathbf{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36} \\ \mathbf{P}(S=3) &= \mathbf{P}(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\ \mathbf{P}(S=4) &= \mathbf{P}(\{(1,3), (2,2), (3,1)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\ \mathbf{P}(S=5) &= \mathbf{P}(\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \\ \mathbf{P}(S=6) &= \mathbf{P}(\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}) = \frac{5}{36} \\ \mathbf{P}(S=7) &= \mathbf{P}(\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ \mathbf{P}(S=8) &= \mathbf{P}(\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}) = \frac{5}{36} \\ \mathbf{P}(S=9) &= \mathbf{P}(\{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \\ \mathbf{P}(S=10) &= \mathbf{P}(\{(4,6), (5,5), (6,4)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\ \mathbf{P}(S=11) &= \mathbf{P}(\{(5,6), (6,5)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\ \mathbf{P}(S=12) &= \mathbf{P}(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

2. L'expérience est une suite d'expériences de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $\frac{1}{6}$. Comme T est l'instant de premier succès,

alors

$$T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right).$$

D'après les résultats sur les lois géométriques,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[T] &= \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6, \\ \mathbf{V}(T) &= \frac{1 - \frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{5}{6} \times 6^2 = 30.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. On utilise une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^n \left(e^{-k} - e^{-(k+1)} \right) = e^{-0} - e^{-(n+1)}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(Y = k) = 1.$$

2. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, alors $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

D'après les définitions, pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = k) &= \mathbf{P}(Y + 1 = k) = \mathbf{P}(Y = k - 1) \\ &= e^{-(k-1)} - e^{-(k-1+1)} = e^{-k+1} - e^{-k} \\ &= e^{-(k-1)} (1 - e^{-1}) = (1 - e^{-1}) (e^{-1})^{k+1}.\end{aligned}$$

Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1})$.

En utilisant les résultats sur les lois géométriques,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Z] &= \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}, \\ \mathbf{V}(Z) &= \frac{e^{-1}}{(1 - e^{-1})^2} = \frac{e}{(e - 1)^2}.\end{aligned}$$

3. En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[Z - 1] = \mathbf{E}[Z] - 1 = \frac{e}{e - 1} - 1 = \frac{1}{e - 1}.$$

En utilisant les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(Z - 1) = \mathbf{V}(Z) = \frac{e}{(e - 1)^2}.$$

4. Comme M est de taille 2, la matrice M est inversible si et seulement si $1 \times Y - 1 \times 0 \neq 0$. Ainsi, la probabilité que M soit inversible vaut

$$\mathbf{P}(Y \neq 0) = 1 - \mathbf{P}(Y = 0) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}.$$

□

Solution de l'exercice 10.

1. Comme X est à valeurs dans \mathbb{N}^* ,

$$\begin{aligned}[X > n - 1] &= \bigcup_{k=n}^{+\infty} [X = k] \\ &= [X = n] \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [X = k] \right) \\ &= [X = n] \cup [X > n].\end{aligned}$$

2. En utilisant la question précédente, les événements étant disjoints,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > n - 1) &= \mathbf{P}(X = n) + \mathbf{P}(X > n) \\ u_{n-1} &= \mathbf{P}(X = n) + u_n \\ u_{n-1} - u_n &= \mathbf{P}(X = n).\end{aligned}$$

3. En utilisant la définition des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X > n-1]}([X > n]) &= \frac{\mathbf{P}([X > n] \cap [X > n - 1])}{\mathbf{P}([X > n - 1])} \\ &= \frac{\mathbf{P}([X > n])}{\mathbf{P}([X > n - 1])} \\ &= \frac{\mathbf{P}([X > n - 1]) - \mathbf{P}([X = n])}{\mathbf{P}([X > n - 1])}, \text{ d'après la question 3.} \\ &= 1 - \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X = n]).\end{aligned}$$

4. En utilisant l'hypothèse et la question précédente,

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, d'après la définition des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) &= \frac{1}{3} \\ \frac{\mathbf{P}([X > n] \cap [X > n-1])}{\mathbf{P}([X > n-1])} &= \frac{1}{3} \\ \frac{\mathbf{P}([X > n])}{\mathbf{P}([X > n-1])} &= \frac{1}{3} \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} &= \frac{1}{3} \\ u_n &= \frac{1}{3}u_{n-1}.\end{aligned}$$

5. Comme la suite (u_n) est une suite géométrique,

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathbf{P}(X > 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

6. En utilisant la question 2.,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = n) &= u_{n-1} - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$.

7. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \leq n) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. L'événement $\{U_p = i\}$ est modélisé par une expérience de Bernoulli de probabilité de succès égale à $\frac{1}{n}$. La variable aléatoire $X_{i,m}$ suit une loi binomiale de paramètres m et $1/n$.

2. En utilisant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_i = j) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_i = j, N = m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_{i,m} = j, N = m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \\ &= e^{\lambda/n} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^j \frac{1}{j!}.\end{aligned}$$

Ainsi, Y_i suit une loi de Poisson de paramètre λ/n . □

Solution de l'exercice 12.

1. Comme X est le nombre de succès dans une expérience de Bernoulli de probabilité de succès égale à $\frac{1}{12}$, alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(60, 1/12).$$

2. Comme $\mathbf{E}[X] = 60 \times \frac{1}{12} = 5$, alors $\mathbf{E}[Z] = 5$ et Z suit une loi de Poisson de paramètre 5.

En utilisant la table précédente,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z \leq 3) &= \mathbf{P}(Z = 0) + \mathbf{P}(Z = 1) + \mathbf{P}(Z = 2) + \mathbf{P}(Z = 3) \\ &\simeq 0,006 + 0,034 + 0,084 + 0,140 \\ &\simeq 0,264.\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des probabilités,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \geq 4) &= 1 - \mathbf{P}(X < 4) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 3) \\ &\simeq 1 - 0,264 \\ &\simeq 0,736.\end{aligned}$$

□

IV - Variables aléatoires infinies

Solution de l'exercice 13.

1. Le premier saut est réalisé avec probabilité 1 donc il est nécessairement réussi. Le numéro du premier saut raté est donc supérieur ou égal à 2 et le numéro du dernier saut réussi est donc supérieur ou égal à 1. Ainsi, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $n \geq 1$. Si $X(\omega) = n$, alors les n premiers sauts ont été réussis et le $(n+1)^{\text{e}}$ a échoué. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = n) &= 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{n+1-1}{n+1} \\ &= \frac{n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant une somme télescopique,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \mathbf{P}(X = n) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \mathbf{P}(X = n) = 1.$$

2. En utilisant la loi obtenue précédemment et la définition de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} \\ &= \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{(\ell-1)^2}{\ell!} \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(\ell-1)^2}{\ell!}. \end{aligned}$$

Rappelons que si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= 1, \\ \mathbf{V}(Y) &= 1 \\ \mathbf{E}[(Y - \mathbf{E}[Y])^2] &= 1 \\ \mathbf{E}[(Y - 1)^2] &= 1 \\ \sum_{\ell=0}^{+\infty} (\ell-1)^2 \frac{e^{-1}}{\ell!} &= 1 \\ \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\ell-1)^2}{\ell!} &= e. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\ell-1)^2}{\ell!} - \frac{(0-1)^2}{0!} \\ &= e - 1. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 14.

1. On remarque que

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. En utilisant une somme télescopique,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(X = k) = 1.$

3. D'après les définitions,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) &= 1 \\ \mathbf{P}(X = 0) + 1 &= 1 \\ \mathbf{P}(X = 0) &= 0.\end{aligned}$$

4. En utilisant les propriétés des probabilités,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).\end{aligned}$$

En utilisant une somme télescopique,

$$\sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}.$$

Ainsi, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1}$ et

$$\mathbf{P}(X > n) = \frac{1}{n+1}.$$

□

V - Fonctions de répartition

Solution de l'exercice 15.

1. D'après la définition, $F(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$. Comme une probabilité est à valeurs dans $[0, 1]$, alors $F(x) \in [0, 1]$.

2. Soit $x \leq y$.

Soit $\omega \in \Omega$. Si $X(\omega) \leq x$, alors $X(\omega) \leq y$. Ainsi,

$$\begin{aligned}[X \leq x] &\subset [X \leq y] \\ \mathbf{P}(X \leq x) &\leq \mathbf{P}(X \leq y) \\ F(x) &\leq F(y).\end{aligned}$$

Ainsi, F est croissante.

3. Soit $x < x_1$. Alors, $[X \leq x] = \emptyset$ et $F(x) = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
Soit $x \geq x_p$. Alors, $[X \geq x_p] = 1$ et $F(x) = 1$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow x_1} F(x) = 1$.

4. D'après le raisonnement de la partie précédente, F est constante, donc continue, sur $] -\infty, x_1[$ et sur $]x_p, +\infty[$.

Soit $x \in]x_i, x_{i+1}[$. Alors,

$$\begin{aligned}[X \leq x] &= \bigcup_{i=1}^i [X = x_i] = [X \leq x_i] \\ \mathbf{P}(X \leq x) &= \mathbf{P}(X \leq x_i) \\ F(x) &= F(x_i).\end{aligned}$$

Ainsi, F est constante donc continue sur $]x_i, x_{i+1}[$.

Enfin, en posant $x_0 = x_1 - 1$ et $x_{p+1} = x_p + 1$, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, d'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_i^-} F(x) &= F(x_{i-1}), \\ \lim_{x \rightarrow x_i^+} F(x) &= F(x_i).\end{aligned}$$

Or, $F(x_i) - F(x_{i-1}) = \mathbf{P}(X \leq x_i) - \mathbf{P}(X \leq x_{i-1}) = \mathbf{P}(X = x_i)$.

Ainsi, F est continue sauf en tout point où $\mathbf{P}(X = x_i) \neq 0$. □

Solution de l'exercice 16.

1. Soit $\omega \in \Omega$. Alors,

$$\begin{aligned}\max\{X(\omega), Y(\omega)\} &\leq x \\ \Leftrightarrow X(\omega) &\leq x \text{ et } Y(\omega) \leq x.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$[\max\{X, Y\} \leq x] = [X \leq x] \cap [Y \leq x].$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition et la question précédente,

$$\begin{aligned}
 F_Z(x) &= \mathbf{P}(Z \leq x) \\
 &= \mathbf{P}(\max X, Y \leq x) \\
 &= \mathbf{P}([X \leq x] \cap [Y \leq x]) \\
 &= \mathbf{P}([X \leq x]) \times \mathbf{P}([Y \leq x]), \text{ par indépendance} \\
 &= F(x)G(x).
 \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$[\min X, Y \geq x] = [X \geq x] \cap [Y \geq x].$$

Ainsi, en utilisant l'événement complémentaire,

$$\begin{aligned}
 F_W(x) &= \mathbf{P}(\min X, Y \leq x) \\
 &= 1 - \mathbf{P}(\min X, Y > x) \\
 &= 1 - \mathbf{P}([X > x] \cap [Y > x]) \\
 &= 1 - \mathbf{P}(X > x) \times \mathbf{P}(Y > x) \\
 &= 1 - (1 - \mathbf{P}(X \leq x)) \times (1 - \mathbf{P}(Y \leq x)) \\
 &= 1 - (1 - F(x))(1 - G(x)).
 \end{aligned}$$

□

VI - Loix jointes

Solution de l'exercice 17.

1. Comme la somme des probabilités vaut 1, alors

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + p + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} &= 1 \\
 1 + p &= 1 \\
 p &= 0.
 \end{aligned}$$

2. On complète le tableau précédent :

$x \backslash y$	1	2	3	4	$\mathbf{P}(X = x)$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}(Y = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

On obtient ainsi,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[X] &= 0 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \\
 \mathbf{E}[Y] &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} = 2.
 \end{aligned}$$

3. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{[X=1]}([Y=1]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=1])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0, \\
 \mathbf{P}_{[X=1]}([Y=2]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=2])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0, \\
 \mathbf{P}_{[X=1]}([Y=3]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=3])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \\
 \mathbf{P}_{[X=1]}([Y=4]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=4])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

On peut donc résumer la loi de Y sachant $[X=1]$ dans le tableau suivant :

k	3	4
$\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=k])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4. On remarque que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) &= 0 \\
 \mathbf{P}(X=1) \times \mathbf{P}(Y=1) &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \neq 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) \neq \mathbf{P}(X=1) \times \mathbf{P}(Y=1)$$

et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

5. D'après les propriétés des probabilités,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X = 0] \cup [Y = 1]) &= \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(Y = 1) - \mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

6. En utilisant la définition,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[XY] &= 0 \times 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 2 \times \frac{1}{8} + 0 \times 3 \times \frac{1}{8} + 0 \times 4 \times 0 + \dots \\ &\quad \dots + 1 \times 1 \times 0 + 1 \times 2 \times 0 + 1 \times 3 \times \frac{1}{8} + 1 \times 4 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{8}.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la question 1.,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X] \mathbf{E}[Y] \\ &= \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \times 2 = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

7. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2] &= 0^2 \times \frac{3}{4} + 1^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \\ \mathbf{E}[Y^2] &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{8} = \frac{21}{4}.\end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{21}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{83}{16} \\ \mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}[Y^2] - \mathbf{E}[Y]^2 = \frac{21}{4} - 2^2 = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \mathbf{V}(Y)}} \\ &= \frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{\frac{83}{16} \times \frac{5}{4}}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

8. En utilisant la linéarité de la covariance par rapport à son premier argument,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X + Y, X) &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(Y, X) = \mathbf{V}(X) + \text{Cov}(X, Y) \\ &= \frac{83}{16} + \frac{3}{8} = \frac{89}{16}.\end{aligned}$$

En utilisant la symétrie de la covariance,

$$\text{Cov}(X, X + Y) = \text{Cov}(X + Y, X) = \frac{89}{16}.$$

En utilisant la linéarité de la covariance par rapport à son premier argument,

$$\text{Cov}(2X, X) = 2\text{Cov}(X, X) = 2\mathbf{V}(X) = 2 \times \frac{89}{16} = \frac{89}{8}.$$

En utilisant la variance d'une somme,

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{81}{16} + \frac{5}{4} + 2 \times \frac{5}{8} = \frac{121}{16}.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. En fonction des valeurs obtenus pour chacun des lancers, les valeurs obtenues par le couple (X, Y) sont

$$\{(i, j), 1 \leq i \leq j \leq 6\}.$$

2. Si $Y = 1$, la plus grande valeur renvoyée est 1, donc les deux dés ont renvoyé la valeur 1. Ainsi,

$$[X = 1] = \{(1, 1)\}.$$

En utilisant l'équiprobabilité des lancers,

$$\mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{36}.$$

3. Si $Y = 1$, alors un des deux dés a renvoyé 1 :

$$[Y = 1] = \{(1, 1), (1, i), (j, 1), 2 \leq i, j \leq 6\}.$$

Comme $|[Y = 1]| = 11$, en utilisant l'équiprobabilité,

$$\mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{11}{36}.$$

4. Si le plus petit et le plus grand des résultats obtenus vaut 1, alors les deux lancers ont renvoyé 1. Ainsi,

$$[X = 1] \cap [Y = 1] = \{(1, 1)\}.$$

D'où,

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{36}.$$

5. Comme $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) \neq \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 1)$, alors X et Y ne sont pas indépendantes. \square

Solution de l'exercice 19. Comme R compte le nombre de changements entre deux lancers successifs, alors

$$R = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} I_j.$$

De plus, I_j vaut soit 0 soit 1, donc I_j suit une loi de Bernoulli. Elle vaut 1 si deux lancers successifs donnent des valeurs différentes, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(I_j = 1) &= \mathbf{P}(\{PF, FP\}) = \mathbf{P}(\{PF\}) + \mathbf{P}(\{FP\}) \\ &= p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p). \end{aligned}$$

Ainsi, $I_j \sim \mathcal{B}(2p(1-p))$ et $\mathbf{E}[I_j] = 2p(1-p)$.

D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[R] = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{E}[I_j] = 1 + 2(n-1)p(1-p).$$

Soit $1 \leq j < k \leq n-1$.

- * Si $k \geq j+2$, alors I_j dépend des j et $(j+1)^{\text{e}}$ lancers alors que I_k dépend des k^{e} et $(k+1)^{\text{e}}$ lancers. Comme $k > j+2$, alors tous ces lancers sont indépendants donc I_j et I_k sont indépendantes. Ainsi,

$$\text{Cov}(I_j, I_k) = 0.$$

- * Si $k = j+1$, alors $I_j I_k = I_j I_{j+1}$ prend les valeurs 0 et 1 donc suit une loi de Bernoulli. De plus, $I_j I_{j+1}$ vaut 1 si I_j et I_{j+1} valent 1 c'est-à-dire si les j , $(j+1)$ et $(j+2)^{\text{es}}$ lancers sont tous distincts. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[I_j I_k] &= \mathbf{P}(I_j I_k = 1) \\ &= \mathbf{P}(I_j I_{j+1} = 1) \\ &= \mathbf{P}(\{PF P\} \sqcup \{F P F\}) \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p \\ &= p(1-p). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_j, I_{j+1}) &= \mathbf{E}[I_j I_{j+1}] - \mathbf{E}[I_j] \mathbf{E}[I_{j+1}] \\ &= p(1-p) - (2p(1-p))^2 \\ &= p(1-p)(1-4p(1-p)). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la formule sur la variance d'une somme,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(R) &= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{V}(I_j) + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n-1} \text{Cov}(I_j, I_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{V}(I_j) + 2 \sum_{1 \leq i \leq n-2} \text{Cov}(I_j, I_{j+1}) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1, k \geq i-2} \underbrace{\text{Cov}(I_j, I_k)}_{=0} \\ &= (n-1)2p(1-p)(1-2p(1-p)) + 2(n-2)p(1-p)(1-4p(1-p)) \\ &= 2p(1-p)[n-1-2(n-1)p(1-p) + n-2-4(n-2)p(1-p)] \\ &= 2p(1-p)[2n-3-2p(1-p)(n-1+2n-4)] \\ &= 2p(1-p)[2n-3-2p(1-p)(3n-5)]. \end{aligned}$$

\square