■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.
Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1.
Soit u un réel quelconque et f_u la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_u(x) = \frac{(x-u)^2}{x^2+u^2}$.

1. Que vaut f_0 ?

2. a) Pour $u \neq 0$, montrez que f_u est continue et dérivable.

b) Calculez sa dérivée f'_u.

c) Donnez la limite de f_u lorsque x tend vers $+\infty$.

3. a) On suppose $u > 0$. Dressez le tableau des variations de f_u.

b) Mêmes questions pour $u < 0$.

4. a) Soit u un réel non nul quelconque.

i. Montrez que f_u admet un maximum global unique et donnez sa valeur.

ii. Montrez que f_u admet un minimum global unique et donnez sa valeur.

b) Représentez graphiquement f_1 sur $[-5, 5]$.

Exercice 2. Pour tout $a > 0$, la fonction $\log_a$ est appelée fonction logarithme de base a. Elle est définie, pour tout $x > 0$ par $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \log_x(x+1)$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f.

2. Variations.

a) Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

b) Calculer la dérivée f' de f et, à l'aide de la question précédente, en déduire le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x.

c) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

d) Préciser l'équation de la tangente en 0 à la courbe $\mathscr{C}$.

3. Soit φ la fonction définie par
$$\varphi(x) = \log_{x+1}(x).$$

a) Préciser son domaine de définition et étudier ses variations.

b) Construire la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de φ.

c) Montrer que le seul point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$ a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1\right)$.

4. Déterminer l'ensemble des réels x tels que
$$\log_x(x+1) \geqslant \log_{x+1}(x).$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) & = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) & = 1 \end{cases}$$

et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

Partie I

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f. S'il y a lieu, préciser la valeur de $f'(0)$.

2. Étudier les variations de f.

3. Faire une étude précise en $+\infty$ et en $-\infty$ en précisant, dans chacun des cas, la position $\mathscr{C}$ par rapport à l'asymptote.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Partie II

5. Soit n un entier naturel non nul.

a) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

b) Déterminer un développement limité à l'ordre 1 de f en 0.

c) Déterminer le développement limité de $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ à l'ordre n en 0.

On admettra que f admet également un développement limité à l'ordre n et on le notera $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x)$, où ε est une fonction telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

d) Déterminer les valeurs de b_0 et b_1.

e) Déterminer le développement limité de f à l'odre 3 en 0. En déduire les valeurs de b_2 et b_3.

6. Soit n un entier naturel non nul.

a) On suppose qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_n, c_0, \dots, c_n$ et deux fonctions ε_1, ε_2 telles que $\lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x)$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\, a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \varepsilon_2(x).$$

Montrer par récurrence que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i = c_i$.

b) En remarquant que $x = f(x)(\mathrm{e}^x - 1)$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0.$$

c) En déduire une expression de b_n en fonction de $b_0, \dots, b_{n-1}$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k$.

7. Expliciter les fonctions g_0, g_1 et g_2.

8. Soit $n \geqslant 2$. Montrer les égalités suivantes :

a) $g_n(0) = g_n(1)$.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R},\, g_n'(x) = n g_{n-1}(x)$.

c) $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\, \mathrm{d}x = 0$.

Exercice 4. Pour tout $x > 0$, on définit la fonction $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$. Si x est un réel, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à x. On rappelle que, pour tout n entier naturel non nul, $n = \sum_{j=0}^{k-1} n_j 10^j$ est l'écriture décimale de n si $n_{k-1} \in [\![1, 9]\!]$ et pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $n_j \in [\![0, 9]\!]$. Par exemple, l'écriture décimale de 1984 est $1984 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 8 \times 10 + 1$.
On pourra, si on le souhaite, utiliser les valeurs approchées de $\log(2) \simeq 0{,}301$ et de $\log(3) \simeq 0{,}477$.

Première partie

On définit la suite (u_n) en posant, pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = n^n.$$

1. Calculer ses quatre premiers termes.

2. Si $n = \sum_{j=0}^{k-1} n_j 10^j$ est écrit sous forme décimale, montrer que $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$. En déduire que le nombre de chiffres k de n est toujours égal à $\lceil \log(n) \rceil$.

3. Déterminer le nombre de chiffres de u_{60}.

4. a) Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$.

5. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$.

a) Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $\frac{1}{k^k} \leqslant \frac{1}{k^2}$.

b) En déduire que la suite (s_n) est majorée.

c) Montrer que la suite (s_n) est convergente.

6. Étudier la convergence de la suite de terme général $t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{u_k}$.

Deuxième partie

On donne la relation :

$$x^x = \mathrm{e}^y\,.$$

7. Étudier le signe de y selon les valeurs de x.

8. Dans un plan muni d'un repère orthonormé, représenter l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient cette relation.

Troisième partie

9. Étudier les variations de la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x^x.$$

On précisera notamment :

a) la dérivée ;

b) le sens de variation ;

c) les branches infinies.