T.D. I - Suites & Fonctions

I - Suites

I.1 - Suites classiques

Solution de l'exercice 1. On obtient $u_1 = 77$. $\square$

Solution de l'exercice 2.

1. On obtient 2, $2^{3/2}$, $2^{7/4}$, $2^{15/8}$, $2^{31/16}$.

2.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - \ln(4) \\ &= \frac{1}{2}\ln(4) + \frac{1}{2}\ln(u_n) - \ln(4) \\ &= \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} v_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n (-\ln 4). \end{aligned}$$

$\square$

Solution de l'exercice 3.

1. $\ell = 8$.

2. $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$.

3. $v_n = -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

4. $u_n = -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 8 \to 8$. $\square$

Solution de l'exercice 4. $u_n = 4 \cdot 3^n - 2$. $\square$

I.2 - Sommes des termes

I.3 - Suites définies par récurrence

I.4 - Suites définies implicitement

Solution de l'exercice 13.

1. Le résultat est trivial pour $n = 0$. On pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$. La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(0) = -1$, $f_n(1) = n \geqslant 0$. Ainsi, f_n admet un unique zéro compris dans l'intervalle $]0, 1[$.

2. Comme $f_{n+1}(u_n) = u_n > 0$, alors $u_{n+1} < u_n$. Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée donc convergente. Comme $u_n = \frac{1-u_n^5}{n}$ pour tout entier naturel n non nul, et (u_n) est bornée, alors (u_n) converge vers 0.

3. D'après la définition,

$$nu_n - 1 = u_n^5.$$

Ainsi, $nu_n \to 1$ et $u_n \sim \frac{1}{n}$.
De plus,

$$\begin{aligned} u_n^5 + n\left(\frac{1}{n} + \varepsilon_n\right) - 1 &= 0 \\ n\varepsilon_n &= -u_n^5 \\ &\sim -\frac{1}{n^5}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

$\square$

Solution de l'exercice 14.

1. Comme $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, on obtient le tableau de variations suivant.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En notant g la restriction de f à $]0,1[$, on obtient que $u_n = g^{-1}(n)$.

2. Comme g est décroissante, alors g^{-1} est décroissante et (u_n) est décroissante.
De plus, $\lim\limits_{0^+} g = +\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty} g^{-1} = 0$. D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Comme $u_n - \ln(u_n) = n$, alors $u_n = \mathrm{e}^{u_n}\,\mathrm{e}^{-n} \sim \mathrm{e}^{-n}$ car $u_n \to 0$.

4. En reprenant ces équations, comme $u_n \to 0$,

$$\begin{aligned} u_n - \mathrm{e}^{-n} &= \mathrm{e}^{-n}(\mathrm{e}^{u_n} - 1) \\ &\sim \mathrm{e}^{-n}\, u_n \\ &\sim \mathrm{e}^{-2n} \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n = \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right)$. □

II - Fonctions

II.1 - Calculs de développements limités

II.2 - Étude de courbes

Solution de l'exercice 22.

1. Notons f l'application proposée. La fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi, f est croissante sur $]0,\mathrm{e}[$, décroissante sur $]\,\mathrm{e},+\infty[$, tend vers $-\infty$ en 0 et tend vers 0 en $+\infty$.

2. D'après l'étude précédente, f admet un maximum en e de valeur $\frac{1}{e}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\ln\pi}{\pi} &< \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} \\ \mathrm{e}\ln\pi &< \pi\ln\mathrm{e}\,\pi^{\mathrm{e}} & &< \mathrm{e}^{\pi}, \end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est croissante. □

II.3 - Équations fonctionnelles

Solution de l'exercice 26. Analyse : Soit f satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. Alors, $f(0)^2 = 2f(0)$, soit $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$.

- ∗ Si $f(0) = 0$. Alors, pour tout réel x, $f(x)\cdot f(0) = f(x) + f(0)$, soit $f(x) = 0$ et f est la fonction nulle.
- ∗ Si $f(0) = 2$. Alors, pour tout réel x, $f(x)\cdot 2 = f(x) + 2$, soit $f(x) = 2$ et f est la fonction constante égale à 2.

Synthèse : Ces deux fonctions conviennent. □