# III - Intégration

## I - Primitives

**Définition 1 - Primitive**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Une *primitive* de $f$ est une fonction dérivable $F$ sur $I$ telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$.

**Exemple 1**

Soit $F(x) = x\ln(x) - x$ définie sur $]0, 1]$. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, 1]$, alors $F$ est dérivable et pour tout $x \in ]0, 1]$,

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Ainsi, $F$ est une primitive de ln sur $]0, 1]$.

**Exercice 1.** Déterminer la fonction dont $F(x) = \frac{x^3}{12} + 4x^2 + 1$ est une primitive.

**Théorème 1 - Primitives de fonctions continues**

Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet des primitives. Si $F$ et $G$ sont des primitives d'une fonction $f$ continue sur $I$, alors il existe un réel $c$ tel que $\forall\, x \in I$, $F(x) = G(x) + c$.

**Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles**

| Fonction $f(x)$ | Primitive $F(x)$ | Intervalle |
|---|---|---|
| $c$ | $cx$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^a$, $a \neq -1$ | $\frac{1}{a+1}x^{a+1}$ | $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln(x)$ | $]0, +\infty[$ |
| $\mathrm{e}^{ax}$, $a \neq 0$ | $\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$ | $\mathbb{R}$ |

**Exercice 2.** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x^5$.
2. $\frac{3}{x}$.
3. $\mathrm{e}^{3x}$.
4. $\frac{1}{x^5}$.

**Proposition 2 - Primitive de fonctions composées**

Soit $u$ une fonction dérivable telle que $u'$ soit continue.

| Fonction $f(x)$ | Primitive $F(x)$ |
|---|---|
| $\lambda u'(x) + \mu v'(x)$ | $\lambda u(x) + \mu v(x)$ |
| $u'(x)u^a(x)$, $a \neq -1$ | $\frac{1}{a+1}u^{a+1}(x)$ |
| $\frac{u'(x)}{u(x)}$ | $\ln\lvert u(x)\rvert$ |
| $u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ | $\mathrm{e}^{u(x)}$ |
| $u'(x)v'(u(x))$ | $v(u(x))$ |

**Exercice 3.** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

**1.** $\frac{1}{x}\ln(x)$.
**2.** $\frac{1}{x}\ln^4(x)$.
**3.** $(3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}$.
**4.** $\frac{2x+1}{x^2+x}$.

## II - Intégrale sur un segment

**Définition 2 - Intégrale sur un segment**

L'*intégrale*, sur le segment $[a,b]$, d'une fonction $f$ positive, est l'aire, délimitée par les abscisses $a$ et $b$, et comprise entre la courbe représentative de $f$ et l'axe des abscisses. Cette quantité est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Proposition 3 - Intégrale d'une fonction continue**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $F$ une primitive de $f$. L'intégrale de $f$ sur $[a,b]$ est le réel défini par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

**Exemple 2**

En utilisant les primitives usuelles,

- $\displaystyle\int_1^2 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}$.
- $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^3+4x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^5 - 1$.

**Exercice 4.** Exprimer simplement les intégrales suivantes :

**1.** $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$.
**2.** $\displaystyle\int_3^4 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
**3.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
**4.** $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

**Théorème 2 - Intégrale et Primitive**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$. On note $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors, $F$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$. En particulier, pour tout réel $x > a$, $F'(x) = f(x)$.

**Exemple 3**

Soit $F$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. La fonction $F$ est dérivable et $F'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, $F'$ est positive et $F$ est croissante.

## II.1 - Propriétés de l'intégrale

**Définition 3 - Intégrale des fonctions continues par morceaux**

Soit $f$ une fonction définie sur un segment $I = \bigcup_{k=0}^{n} [a_k, b_k]$. On suppose que $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, i.e. prolongeable par continuité sur chacun des segments $[a_k,b_k]$. Alors, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Proposition 4 - Relation de Chasles**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$ et $a$, $b$ et $c$ des réels de $I$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

### Exemple 4 - Fonction définie par morceaux

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = x - 1$ sinon. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

### Proposition 5 - Linéarité de l'intégrale

Soit $f$ et $g$ des fonctions continues sur $[a, b]$ et $\lambda$ un réel. Alors,

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

### Exemple 5

En utilisant les primitives usuelles,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{12}{x} + 5x^3\,\mathrm{d}x &= 12\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 5\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x \\ &= 12\,[\ln(x)]_1^2 + 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 \\ &= 12\,(\ln(2) - \ln(1)) + 5\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= 12\ln(2) + \frac{5}{4}\cdot 15.\end{aligned}$$

**Exercice 5.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 2\,\mathrm{e}^x + 3x^2\,\mathrm{d}x$.

### Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (I)

Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$. Si $a \leqslant b$ et, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

### Exemple 6

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ et $0 \leqslant x \leqslant y$. Alors,

$$\begin{aligned}F(y) &= \int_0^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t, \text{ d'après la relation de Chasles} \\ &= F(x) + \int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^t \geqslant 0$ pour tout $t \in [x, y]$ et $x \leqslant y$, donc $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Ainsi, $F(x) \leqslant F(y)$ et $F$ est croissante.
Ce raisonnement reste valable dès que l'intégrande est positif.

**Exercice 6.** Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_3^x x^2 - 2x + 1\,\mathrm{d}x$ est croissante sur $[3, +\infty[$.

### Proposition 7 - Croissance de l'intégrale (II)

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. Si, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

**Exemple 7**

Pour tout $x \in [0,1]$, $x^3 \leqslant x^2$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

**Proposition 8 - Inégalité triangulaire**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**Exemple 8**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$. Alors,

$$\left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |(-t)^n|\,\frac{\mathrm{e}^t}{n!}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^x}{(n+1)!}.$$

**Proposition 9 - Positivité de l'intégrale**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$. Si $f$ est à valeurs positives, alors $f \equiv 0$ si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

**Exercice 7.** Montrer que ce résultat est faux en général si la fonction est continue par morceaux.

## II.2 - Calculs d'intégrales

**Théorème 3 - Intégration par parties**

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que $u'$ et $v'$ soient continues sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Exemple 9 -**

- Calculons $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
  Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Alors, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$. Comme $u$, $v$ sont dérivables et $u'$, $v'$ sont continues sur $[0,1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2\,\mathrm{e}^4}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_1^2\\ &= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{4}\\ &= \frac{3\,\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}.\end{aligned}$$

- Calculons $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.
  Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. Alors, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$. Comme $u$, $v$ sont dérivables et $u'$, $v'$ sont continues sur $[1,2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln(2) - [x]_1^2\\ &= 2\ln(2) - 2 + 1\\ &= 2\ln(2) - 1.\end{aligned}$$

**Exercice 8.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

**Théorème 4 - Changement de variable**

Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et $\varphi$ une fonction de $[a, b]$ dans $I$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exemple 10 -**

Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$ à l'aide du changement de variable $t = \ln(u)$.
La fonction $\varphi : [1, \mathrm{e}] \to [0, 1]$, $u \mapsto \ln(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u+1}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right]\mathrm{d}u \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= [\ln(u)]_1^{\mathrm{e}} - [\ln(1+u)]_1^{\mathrm{e}} \\
&= 1 - \ln(1+\mathrm{e}) + \ln(2).
\end{aligned}$$

**Exercice 9.** Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$.

## III - Intégrales généralisées

Dans tout ce paragraphe, $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

## III.1 - Définition

**Définition 4 - Convergence**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$.

- Si $I = [a, b[$ et $f$ est continue sur $[a, b[$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $x$ tend vers $b$.
- Si $I = ]a, b]$ et $f$ est continue sur $]a, b]$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $x$ tend vers $a$.
- Si $I = ]a, b[$ et $f$ est continue sur $]a, b[$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge* s'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

Dans tous les cas, si l'intégrale ne converge pas, elle *diverge*.

**Exemple 11**

La fonction ln est continue sur $]0, 1]$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

**Théorème 5 - Intégrales de référence**

(*i*). **Intégrales de Riemann sur** $[1, +\infty[$**.**
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Alors, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$.

(*ii*). **Intégrales de Riemann sur $]0,1]$.**
$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Alors, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$.

(*iii*). **Fonction exponentielle.**
$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$. Alors, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

(*iv*). **Fonction logarithme.**
$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$.

## III.2 - Propriétés

**Proposition 10 - Linéarité**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Alors, $\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Proposition 11 - Relation de Chasles**

On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $c \in ]a,b[$. Alors, $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Proposition 12 - Croissance de l'intégrale**

On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

(*i*). Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(*ii*). Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Théorème 6 - Inégalité triangulaire**

Si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**Théorème 7 - Positivité**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f$ est nulle sur $I$.

## III.3 - Preuves d'existences

**Proposition 13 - Intégrale faussement impropre**

Soit $f$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Alors, les intégrales de $f$ sur $[a,b]$, $]a,b]$, $]a,b[$ et $[a,b[$ sont égales.

**Exemple 12**

Montrons que $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. On pose $f : t \mapsto t\ln(t)$.

- La fonction $f$ est continue sur $]0,1]$.
- D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$. Ainsi, $f$ est prolongeable par continuité en 0.

Finalement, l'intégrale de $f$ sur $]0,1]$ est bien définie.

**Proposition 14 - Fonctions à valeurs positives**

Si $f$ est valeurs positives sur $[a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

**Théorème 8 - Domination locale**

Soient $f$, $g$ deux fonctions continues de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}_+$.

- S'il existe un réel $c$ tel que $\forall\, x \in [c,b[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et $\displaystyle\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si $f(x) \sim_b g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

**Exemple 13**

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
  - ⋆ $x \mapsto x^n\,\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
  - ⋆ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$, il existe un réel $c$ tel que, pour tout $x \geqslant c$,
  $$x^n\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}.$$
  D'après les intégrales de référence, $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.
  Ainsi, $\displaystyle\int_c^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.
  Comme $x \mapsto x^n\,\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0,c]$, son intégrale sur ce segment est bien définie.

  Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.
- Étudions $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$.
  - ⋆ $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est continue sur $[0,1[$.
  - ⋆ $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)} \sim_1 \frac{1}{2(1-t)}$.
  Or, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x) \to +\infty$ quand $x \to 1$.

  Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$ n'est pas convergente.

## III.4 - Méthodes de calculs

Utiliser les méthodes de calcul sur un segment (primitivation, intégration par parties, changement de variable), puis étudier la limite.

**Exemple 14**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

- Si $n = 0$, alors $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$.
- Si $n \geqslant 1$. Soit $M \geqslant 0$. Les fonctions $u : x \mapsto x^n$ et $v : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,M]$. D'après la

formule d'intégration par parties,

$$\int_0^M x^n \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^n \,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^M + \int_0^M nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -M^n \,\mathrm{e}^{-M} + n\int_0^M x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, lorsque $M \to +\infty$, on obtient la relation :

$$I_n = nI_{n-1}.$$

- On montre alors par récurrence que, pour tout $n$ entier naturel, $I_n = n!$.