T.D. VII - Variables aléatoires discrètes

========

I - Lois usuelles finies

Exercice 1. Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de moyenne p. On note $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 2. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. On note N la variable aléatoire qui vaut 0 si $X_1 = \cdots = X_n = 1$ et $\min\{k \in [\![1,n]\!]\ ;\ X_k = 0\}$ sinon. Déterminer la loi de N ?

II - Variables aléatoires finies

Exercice 3. On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

k	-1	0	1	2	3
$\mathbf{P}([X=k])$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

On pose $Y = |X-1|$.

1. Déterminer la loi de Y puis l'espérance de Y.

2. Calculer directement l'espérance de Y à l'aide du théorème de transfert.

Exercice 4. Un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 est lancé une fois. La probabilité d'apparition de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu.

1. Déterminer la loi de X.

2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

3. Déterminer $\mathbf{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.

Exercice 5. Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à vider l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 6. On tire sans remise $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.

1. Calculer la probabilité d'obtenir $1, 3, \dots, 2n-1$ dans cet ordre et consécutivement.

2. Déterminer la probabilité de tirer $1, 3, \dots, 2n-1$ dans cet ordre mais pas forcément consécutivement.

3. On note X la variable aléatoire associée au rang de la dernière boule impaire tirée. Calculer $\mathbf{E}[X]$.

Exercice 7.

1. Soient p, $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.

2. Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On retire une à une et sans remise les boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages effectués jusqu'au retrait de toutes les boules blanches. Déterminer la loi de X. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

III - Lois usuelles infinies

Exercice 8. Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 9. Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note S la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

1. Quelle est la loi de S ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note T la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 10. Soit Y une variable aléatoire telle que,

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\, \mathbf{P}(Y = k) = \mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-(k+1)}\,.$$

On pose $Z = Y + 1$.

1. Vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) = 1$.

2. Reconnaître la loi de Z puis en déduire son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de Y.

4. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 11. (✐) On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall\, n \geqslant 1,\, \mathbf{P}_{[X>n-1]}([X = n]) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathbf{P}([X > n])$.

1. Justifier que

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n].$$

2. En déduire que $u_{n-1} - u_n = \mathbf{P}([X = n])$.

3. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul,

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) = 1 - \mathbf{P}_{[X>n-1]}([X = n])\,.$$

4. En déduire que pour tout n entier naturel non nul, $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$.

5. Exprimer, pour tout n entier naturel la valeur de u_n en fonction de n puis reconnaître la loi de X.

6. Exprimer $\mathbf{P}([X \leqslant n])$ en fonction de n.

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$. On note $A = [X \text{ est paire}]$ et $B = [X \text{ est impaire}]$. Montrer que $\mathbf{P}(A) < \mathbf{P}(B)$.

Exercice 13. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(U_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $X_{i,m} = |\{k \in [\![1,m]\!]\ ;\ U_k = i\}|$.

1. Déterminer la loi de $X_{i,m}$.

2. Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de la famille $(U_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $Y_i = X_{i,N}$. Déterminer la loi de Y_i.

Exercice 14. Un serveur téléphonique ouvre sa ligne chaque minute. Chaque minute, la probabilité qu'il prenne un client est constante et égale à $\frac{1}{12}$. On note X le nombre d'appels auxquels le serveur a répondu en 1 heure.

1. Déterminer la loi de X, son espérance $\mathbf{E}[X]$ et sa variance $\mathbf{V}(X)$.

On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X. On considère la table de la loi de Poisson de paramètre 5 suivante :

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}([Y = k])$	0.006	0.034	0.084	0.140	0.175	0.175	0.146

2. Déterminer des valeurs approchées de $\mathbf{P}(X \leqslant 3)$ puis $\mathbf{P}(X \geqslant 4)$.

IV - Variables aléatoires infinies

Exercice 15. Un sauteur tente de franchir successivement les hauteurs numérotées 1, 2, 3, …, n, … On suppose que les sauts sont mutuellement indépendants et que la probabilité de franchir la hauteur numéro

n vaut $\frac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Calculer la loi de X et vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n) = 1$.

2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 16. Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à obtention de tous les numéros. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir tous les numéros. On note $E_{i,j}$ l'événement « La boule i n'a pas été obtenue au cours des n premiers tirages. » Soit $n \geqslant 3$.

1. Exprimer $[X > n]$ en fonction des $E_{i,n}$.

2. Montrer que $\mathbf{P}(X > n) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

3. En déduire la loi de X.

Exercice 17. Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel N non nul selon la loi de probabilité : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(N=n) = \frac{1}{2^n}$. Le joueur gagne N jetons si N est pair ; il perd N jetons si N est impair.

1. Quelle est la probabilité de gagner une partie ?

2. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que,

$$\forall\ k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X=k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2. Vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k) = 1$.

3. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(X=0)$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X > n) = \frac{1}{n+1}$.

V - Lois jointes

Exercice 19. Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

$x \backslash y$	1	2	3	4
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Compléter la case vide.

2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y). En déduire $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{E}[Y]$.

3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=1]$.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Calculer $\mathbf{P}([X=0] \cup [Y=1])$.

6. Calculer la covariance de X et de Y.

7. Calculer $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$. En déduire $\rho(X,Y)$.

8. Calculer $\operatorname{Cov}(X+Y, X)$, $\operatorname{Cov}(X, X+Y)$ et $\operatorname{Cov}(2X, X)$.

Exercice 20. On lance 2 fois un dé équilibré à 6 faces. On note X le plus grand des résultats obtenus et Y le plus petit.

1. Décrire l'ensemble des valeurs prises par (X, Y).

2. Décrire l'événement $[X=1]$ puis calculer $\mathbf{P}([X=1])$.

3. Décrire l'événement $[Y=1]$ puis calculer $\mathbf{P}([Y=1])$.

4. Décrire l'événement $[X=1] \cap [Y=1]$ puis calculer $\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1])$.

5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 21. (Excursions) Une pièce biaisée dont face apparaît avec probabilité p est lancée n fois. Une *excursion* est une série de lancers qui renvoient le même résultat. Par exemple, dans la séquence FFPFPPF, il y a 5 excursions. On note R le nombre d'excursions. Montrer que $\mathbb{E}[R] = 1 + 2(n-1)p(1-p)$ puis calculer $\mathbf{V}(R)$.

Indication : Exprimer R en fonction de I_j : le $(j+1)$-ème lancer est différent du j-ème.