IV - Matrices inversibles

Révisions

Résolution de systèmes par méthode du pivot de Gauss.

Exemple 1

On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 2x+3y & =5 \\ -x+7y & =6 \end{cases}.$$

On remarque que ce système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

La résolution du système s'effectue en suivant la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} 2x+3y & =5 \\ -x+7y & =6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y & =5 \\ 17y & =17 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow 2L_3+L_2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & =1 \\ x & =\frac{5-3y}{2}=1. \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution du système est égale à $(1,1)$.

I - Inversibilité

Définition 1 - Matrice inversible

Une matrice A d'ordre p est *inversible* s'il existe une matrice B telle que $AB = I_p$. La matrice B est l'*inverse* de A et notée A^{-1}.

Exemple 2 - Matrices inversibles et non inversibles

- On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $AB = I_2$, alors A est inversible et $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Comme $I_p \times I_p = I_p$, alors I_p est inversible et son inverse est I_p.
- Comme $0_p \times A = 0_p \neq I_p$ pour toute matrice carrée A, alors la matrice nulle n'est pas inversible.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. En utilisant la définition du produit matriciel, on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = B$.

Proposition 1 - Inversibilité et produit

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre p.

- Si $AB = I_p$, alors $BA = I_p$. Ainsi, $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.
- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et

$(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemple 3

- Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
En utilisant la définition du produit matriciel, on remarque que
$$M^2 - 2M + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} M^2 - 2M &= -I_3 \\ -(M^2 - 2M) &= I_3 \\ 2M - M^2 &= I_3 \\ M(2I_3 - M) &= I_3. \end{aligned}$$
Ainsi, M est inversible et $M^{-1} = 2I_3 - M$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
  - ⋆ D'une part,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  - ⋆ D'autre part,
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc, $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse vaut
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

II - Calculs de puissances

Théorème 1 - Puissance et relation PDP^{-1}

Soit A une matrice carrée d'ordre p. On suppose qu'il existe une matrice P inversible d'ordre p et une matrice diagonale D d'ordre p telles que $A = PDP^{-1}$. Alors, pour tout n entier naturel, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exemple 4

On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On cherche les coefficients de A^n pour tout n entier naturel.
- On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant la définition du produit matriciel,
$$PQ = I_3.$$
Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = Q$.
- On calcule aisément
$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, PD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} AP &= PD \\ APP^{-1} &= PDP^{-1} \\ AI_3 &= PDP^{-1} \\ A &= PDP^{-1}. \end{aligned}$$

- Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $A^n = PD^nP^{-1}$.
  Initialisation. Lorsque $n = 0$.
  ⋆ D'une part, $A^0 = I_3$.
  ⋆ D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
  Ainsi, $A^0 = PD^0P^{-1}$ et la propriété est vraie à l'ordre 0.
  Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$. On veut montrer que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$. En effet,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= PD^nP^{-1}A, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \text{ d'après le point précédent} \\ &= PD^nI_3DP^{-1}, \text{ car } PP^{-1} = I_3 \\ &= PD^nDP^{-1}, \text{ car } I_3D = D \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

  Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
  Conclusion. Finalement, l'a propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, A^n = PD^nP^{-1}.$$

- D'après le résultat précédent,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n & 1 - 3^n \\ 0 & 3^n & 1 - 3^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

III - Critères d'inversibilité

III.1 - Cas des matrices diagonales

Proposition 2 - Inversibilité des matrices diagonales

Soit D une matrice diagonale.
- Si D possède au moins un 0 sur la diagonale, alors D n'est pas inversible.
- Si tous les coefficients diagonaux de D sont non nuls, alors D est inversible. Alors, D^{-1} est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de D.

Exemple 5

- Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice D est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3. Comme ils sont tous non nuls, la matrice D est inversible et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
- Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice D est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1 et 0. Comme l'un des coefficients diagonaux est non nul, la matrice D n'est pas inversible.
- Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$. La matrice A est diagonale et ses coefficients diagonaux sont -3, 3 et 10. Comme ils sont tous non nuls, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

- Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice B est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1, 0 et -2. Comme un des coefficients diagonaux est nul, la matrice B n'est pas inversible.

III.2 - Cas des matrices triangulaires

Proposition 3 - Inversibilité des matrices triangulaires

Soit T une matrice triangulaire.
- Si T possède au moins un 0 sur la diagonale, alors T n'est pas inversible.
- Si tous les coefficients diagonaux de T sont non nuls, alors T est inversible.

Exemple 6

- Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice T est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont 1, -1 et 2. Comme T est triangulaire inférieure et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors T est inversible.
- Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice T est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont 0 et 1. Comme T est triangulaire supérieure et que 0 est un coefficient diagonal de T, alors T n'est pas inversible.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1. Comme A est triangulaire supérieure et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible.
- Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice B est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont 1, 0 et -1. Comme B est triangulaire inférieure et qu'un de ses coefficient diagonal est nul, alors B n'est pas inversible.
- Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice C est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont 1, 0,01 et -1. Comme C est triangulaire inférieure et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors C est inversible.

III.3 - Cas des matrices carrées d'ordre 2

Proposition 4 - Inversibilité des matrices d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 2.
- Si $ad - cb = 0$, alors la matrice A n'est pas inversible.
- Si $ad - cb \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple 7 -

- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Comme $2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$ est non nul, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Comme $1 \times 4 - 3 \times 2 = -2$ est non nul, alors A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $1 \times 1 - 2 \times 2 = -3$ est non nul, alors B est inversible et

$$B^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $1 \times 2 - 2 \times 1 = 0$, alors C n'est pas inversible.

III.4 - Non inversibilité

Proposition 5

Soit A une matrice inversible d'ordre p et B, C deux matrices carrées d'ordre p.
- Si $AB = AC$, alors $B = C$.
- Si $BA = CA$, alors $B = C$.

Exemple 8 - Preuve de non inversibilité

- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
On remarque que $AB = AC$. Supposons par l'absurde que A soit inversible. Alors, $B = C$. Cependant, $B \neq C$. Ainsi, A n'est pas inversible.
- Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $N \times N = 0_2$. Supposons par l'absurde que N soit inversible. Comme $N \times N = N \times 0_2$, alors $N = 0_2$. On obtient ainsi une contradiction et N n'est pas inversible.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. À l'aide de la définition du produit matriciel, on remarque que

$$A^2 - 3A = 0_3.$$

Ainsi, $A\,(A - 3I_3) = 0_3$.
Supposons par l'absurde que A soit inversible. Alors, il existe une matrice A^{-1} telle que $A^{-1}A = I_3$. Ainsi, en reprenant l'équation précédente,

$$\begin{aligned} A(A-3I_3) &= 0_3 \\ A^{-1}A(A-3I_3) &= A^{-1}0_3 \\ I_3(A-3I_3) &= 0_3 \\ A - 3I_3 &= 0_3 \\ A &= 3I_3 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une contradiction et la matrice A n'est donc pas inversible.

IV - Systèmes linéaires & Calculs d'inverses

IV.1 - Résolution de systèmes

Théorème 2 - Inversibilité & Systèmes linéaires

Soit un système écrit sous forme matricielle $AX = Y$. Le système admet une unique solution si et seulement si A est inversible. Alors, $X = A^{-1}Y$.

Exemple 9 -

Nous cherchons à résoudre le système $\begin{cases} x+2y &= 4 \\ 3x+4y &= -1 \end{cases}$.

En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, le système s'écrit $AX = Y$.
Comme $1 \times 4 - 3 \times 2 = -2 \neq 0$, la matrice A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, le système possède une unique solution et

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}Y = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $x = -9$ et $y = \frac{13}{2}$.

IV.2 - Calculs d'inverses

Théorème 3 - Inverse & Système linéaire

Soit A une matrice carrée d'ordre p. La matrice A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que pour toutes X, Y matrices colonnes, le système $AX = Y$ s'écrit $X = BY$. Alors, $A^{-1} = B$.

Exemple 10 - Inverse par résolution de $AX = Y$,

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. En utilisant la méthode du pivot de Gauss,

$$AX = Y$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= a \\ -x+y+z &= b \\ x+z &= c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= a \\ 2y+2z &= a+b & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ y &= a-c & L_3 \leftarrow L_1-L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z+y &= a \\ 2z+2y &= a+b \\ y &= a-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ z &= -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c \\ y &= a-c \end{cases}$$

En posant $B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $X = BY$. D'où,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 11 - Méthode de Gauss-Jordan,

On place les matrices A et I côte à côte. On transforme la matrice A en la matrice I à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

On effectue les mêmes opérations sur I.

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|} 2 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right. \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right. \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3} \end{array}$$

On obtient ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$