■ ■ ■

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Partie I : Matrices à diagonale dominante

La matrice A est à *diagonale dominante* si

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ |a_{i,i}| > r_i$$

1. Montrer que, si A est à diagonale dominante, alors $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

2. Montrer que ce résultat est faux si l'inégalité est large.

Partie II : Disque de Gerschgorin

Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on note $\mathscr{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z - z_0| < r\}$ le disque centré en z_0 et de rayon r.

On pose $E = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{B}}(a_{i,i}, r_i)$ et $E' = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{B}}\left(a_{i,i}, \sum_{k \neq i} |a_{k,i}|\right)$.

3. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset E$.

4. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset E \cap E'$.

5. Retrouver le résultat de la partie précédente.

Partie III : Ovales de Cassini

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $C_{i,j} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z - a_{i,i}|\,|z - a_{j,j}| \leqslant r_i r_j\}$, appelé ovale de Cassini.

6. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n,\, i \neq j} C_{i,j}$.

Mathématiciens

CASSINI Giovanni Domenico (8 juin 1625 à Perinaldo-14 sept. 1712 à Paris).

GERSCHGORIN Semion (24 août 1901 à Proujany-30 mai 1933 à Leningrad).