



I. Natures de séries entières

Exercice 1. (♣) Soit $a > 0$. Déterminer la nature des séries de terme général

- | | |
|--|---|
| 1. $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1$ | 7. $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ |
| 2. $\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ | 8. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ |
| 3. $\frac{\sinh(n)}{\sinh(2n)}$ | 9. $(-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ |
| 4. $\exp\{-\cosh(1/n)\}$ | 10. $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ |
| 5. $\exp\{-\cosh(n)\}$ | 11. $\arctan\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ |
| 6. $\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ | |

Exercice 2. Déterminer la nature des séries de terme général $u_n = \sin[\pi(2 - \sqrt{3})^n]$ et $v_n = \sin[\pi(2 + \sqrt{3})^n]$.

Exercice 3. [Mines] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$. 2. $\frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n n^\alpha}$. 3. $\sin\left(\pi\sqrt{n^2 + x^2}\right)$.

Exercice 4. [Mines] Étudier la convergence des séries de termes généraux :

1. $(-1)^n \frac{\cos(\ln(n))}{n}$. 2. $\frac{\cos(\ln(n))}{n}$. 3. $\frac{\cos(\ln(n))}{\ln(n)}$.

Exercice 5. (Fonction Zeta) Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

- Montrer que ζ est décroissante et en déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $\lim_{1^+} \zeta = \ell$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\ell \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$.
- En déduire la valeur de ℓ .
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1$.

Exercice 6. [Mines] Pour tout $(p, q) \in (\mathbb{R}_+)^2$, montrer que $\sum_{k=1}^n k^p \ln^q(k) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{p+1} \ln^q(n)}{p+1}$.

Exercice 7. (♣) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer, en fonction du couple (α, β) , la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$.

Exercice 8. Étudier la convergence de la série obtenue à partir de la série harmonique en supprimant tous les entiers n dont l'écriture en base 10 contient le nombre 5.

Exercice 9. [Mines] Pour tout $n \geq 1$, on note (E_n) l'équation $x^3 + \frac{1}{n}x^2 + x - 2 = 0$.

- Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n qui soit solution de (E_n) .
- Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.
- Déterminer la nature de $\sum (1 - x_n)$.

Exercice 10. Soit $\lambda \in]0, 1[$.

- Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n solution de $\lambda e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.
- Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

II. Calculs de sommes

Exercice 11. (À partir de la constante d'EULER, ♡) On admet qu'il existe un réel γ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln n) = \gamma$.

- Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}$. En déduire que $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge et déterminer sa somme.
- Dans cette question, on suppose que $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 1$ et $a_{3n+3} = -1$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{a_k}{k}$.
- On suppose maintenant que $a_{4n+1} = a_{4n+2} = 1$ et $a_{4n+3} = a_{4n+4} = -1$.

a) Montrer que, pour tout N entier naturel,

$$\sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) = \int_0^1 \frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2} dx.$$

b) En déduire que $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) = \frac{\pi}{4}$.

c) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2)$.

Exercice 12. (Décompositions en éléments simples, ♥)

1. Déterminer des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{n^2 + 9n + 5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)} = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{2n+3} + \frac{\gamma}{2n+5} + \frac{\delta}{n+4}.$$

2. Montrer la convergence puis déterminer la somme de la série de terme général u_n .

Exercice 13. En utilisant un produit de Cauchy, déterminer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$.

III. Découverte d'autres méthodes

Exercice 14. (Critère de condensation de CAUCHY)

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs. Montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.

2. Retrouver le critère de convergence des séries de RIEMANN.

3. Montrer que la série de BERTRAND $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 15. (Règle de DUHAMEL) Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs.

1. Montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors

(i). si $\beta > 1$, alors $\sum u_n$ converge.

(ii). si $\beta < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $n! \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 16. (Produit infini) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \prod_{q=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{q-1}}{\sqrt{q}}\right)$.

1. En étudiant la suite $\ln(u_n)$, montrer que (u_n) converge vers 0.

2. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $u_n \sim \frac{a}{\sqrt[n]{n}}$.

On pourra utiliser l'existence de la constante d'EULER.

Exercice 17. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n-1}{n} z^n.$$

IV. Avec Python

Exercice 18. [Centrale] On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Prouver que la série de terme général u_n est convergente. Donner une approximation de sa somme S à 10^{-6} près.

2. Prouver que $S = \ln(2)$.

3. Soit (v_n) une suite obtenue en permutant les termes de la suite (u_n) : on prend alternativement deux signes positifs puis un négatif, $(v_n) = (1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{4}, \dots)$. Calculer v_{250} , v_{251} et v_{252} .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

4. Calculer T_{250} , T_{251} et T_{252} . Conjecture ?

5. Conjecturer la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{T_n}\right)$ puis démontrer la conjecture.

Mathématiciens

EULER Leonhard (15 avr. 1707 à Basel-18 sept. 1783 à St Pétersbourg).

CAUCHY Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).

DUHAMEL Jean-Marie (5 fév. 1797 à St Malo-29 avr. 1872 à Paris).

BERTRAND Joseph (11 mar. 1822 à Paris-3 avr. 1900 à Paris).

RIEMANN Georg Friedrich Bernhard (17 sept. 1826 à Breselenz-20 juil. 1866 à Selasca).