# T.D. X - Réduction

## I - Diagonalisation

## II - Réduction & Application

**Solution de l'exercice 8.**

**1.** D'après la définition, pour tout $n$ entier naturel, $v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = -1$. Ainsi, $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $-1$. Donc,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = -2^n.$$

**2.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible, i.e. $\mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$. Or,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -4 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -4 \end{pmatrix} && {\scriptstyle C_2 \leftrightarrow C_3} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & 4 \\ 0 & -2-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} && {\scriptstyle L_2 \leftrightarrow L_3}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$ si et seulement si $\lambda \in \{-3, -2, 2\}$.

**3.** D'après la question précédente, $A$ possède trois valeurs propres distinctes, donc $A$ est diagonalisable.

En résolvant des systèmes linéaires, on obtient

$$\begin{aligned}
E_{-3}(A) &= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}, \\
E_{-2}(A) &= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \\
E_{3}(A) &= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A = PDP^{-1}$.

**4.** Montrons par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n$ entier naturel.

**Initialisation.** Lorsque $n = 0$. D'une part, $A^0 = I_3$. D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^nA \\
&= PD^nP^{-1}A, \quad \text{d'après l'H.R.} \\
&= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \quad \text{d'après la question } \mathbf{3.} \\
&= PD^nDP^{-1} \\
&= PD^{n+1}P^{-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

**Conclusion.** Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.$$

**5.** Comme la matrice $D$ est diagonale,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour tout $n$ entier naturel,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

**6.** En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3u_n + 4v_n - w_n \\ 2v_n \\ -4v_n + 2w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= AU_n. \end{aligned}$$

**7.** Montrons par récurrence que $U_n = A^n$ pour tout $n$ entier naturel.
**Initialisation.** Lorsque $n = 0$. Comme $A^0 = I_3$, alors $A^0U_0 = I_3U_0 = U_0$. La propriété est donc vraie à l'ordre 0.
**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = A^nU_0$. Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n, \text{ d'après la question } \mathbf{6} \\ &= AA^nU_0, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= A^{n+1}U_0, \text{ d'après la définition des puissances} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

**Conclusion.** Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, U_n = A^nU_0.$$

**8.** En reprenant le résultat de la question **5.**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= A^nU_0 \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n - 2^n + (-2)^n + 2(-3)^n - 2(-2)^n \\ -2^n \\ -(-2)^n + 2^n + 2(-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n$ entier naturel,

$$\begin{cases} u_n &= -2^n - (-2)^n - (-3)^{n+1} \\ v_n &= -2^n \\ w_n &= 2^n + (-2)^n \end{cases}$$

□