Suites numériques, Fonctions de la variables réelle

Chapitre I

■ ■ ■

I. Suites numériques

Indications pour l'exercice 1.

1. Se rappeler que $a_n \sim b_n$ si et seulement si $a_n - b_n = o(b_n)$.
Revenir aux ε et utiliser que, à p.c.r., $(1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n$.
Sommer ensuite cette relation puis utiliser la divergence de la série.

2. C'est un cas particulier de la question précédente.

3. Montrer que $\ln(u_n) \to 3$ puis utiliser la continuité de la fonction exponentielle. □

Indications pour l'exercice 2.

1. a) Étudier les variations de $f : x \mapsto (x+m)^\alpha - x^\alpha - m^\alpha$.

b) (w_n) est une suite arithmétique.

2. Penser au théorème de la limite monotone.

3. Récurrence.

4. a) Revenir à la définition de la notion de limite.

b) Décomposer $n = mq + r$, où l a été choisi précédemment et r ne prend qu'un nombre fini de valeurs. □

Indications pour l'exercice 4. Passer à la forme exponentielle puis factoriser par p^n. □

II. Suites définies implicitement

Indications pour l'exercice 5.

1. Étudier les variations de $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

2. En étudiant le signe $f_{n+1}(u_n)$, montrer que (u_n) est décroissante et minorée.

3. Étudier dans un premier temps la limite de la suite (nu_n).
En notant $\varepsilon_n = nu_n - 1$, en déduire la limite de $(n\varepsilon_n)$.
Conclure. □

Indications pour l'exercice 6.

1. Étudier les variations de f_n pour montrer que $a_n \in \left[0, \sqrt[n]{\frac{2}{n+1}}\right]$.
En étudiant le signe de $f_{n+1}(a_n)$, montrer ensuite que (a_n) est décroissante et minorée.
Après avoir montrer que (u_n^{n+1}) converge, en déduire que $\ell = 1/2$.

2. En notant $u_n = a_n - \frac{1}{2}$, montrer que $2^n u_n \to 1$. □

III. Fonctions de la variable réelle

Indications pour l'exercice 7. Étudier les limites à droite et à gauche en distinguant les points entiers. □

Indications pour l'exercice 8.

1. Faire un dessin puis utiliser des caractérisations séquentielles.

2. Utiliser la question précédente. □

Indications pour l'exercice 9. Montrer que $u_n \to \sup_{[a,b]} |f| = M$.

Pour cela, montrer que $u_n \leqslant M$.
Ensuite, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $u_n^n \geqslant \eta(M-\varepsilon)^n$. □

Indications pour l'exercice 10. En justifiant, dériver puis vérifier l'ensemble des solutions. □

Indications pour l'exercice 11.

1. Utiliser la définition des racines multiples, puis utiliser le théorème de Rolle entre les racines.

2. Remarquer que $P^2 + a^2$ est à racines complexes alors que Q' est à racines réelles. □

Indications pour l'exercice 12. Étudier de manière pédestre la régularité de f en 0 : continuité, dérivabilité (théorème de prolongement dérivable), limite du taux d'accroissement de la dérivée. □

IV. Relations de comparaison

Indications pour l'exercice 14. Penser à la formule de Taylor-Young.
Choisir comme contre-exemple une fonction impaire non dérivable en 0. □

Indications pour l'exercice 15. Effectuer une intégration par parties puis majorer l'intégrale restante. □

Indications pour l'exercice 16. Pour $x > 0$, relier $\arctan(x)$ et $\arctan(1/x)$. Utiliser ensuite le développement limité de la fonction arctangente. □

Indications pour l'exercice 17.

1. Étudier le signe de la dérivée.

2. a) Utiliser les développements limités classiques.

b) Déterminer un équivalent de $f - t$ où t est l'équation de la tangente.

3. a) Effectuer un développement asymptotique de f en $+\infty$ en considérant $u \mapsto f(1/u)$.

b) Pousser, si ce n'est déjà fait, le développement précédent à l'ordre suivant. □

V. Suites récurrentes

Indications pour l'exercice 18. Étudier les points fixes de f.
Montrer que f est décroissante et dresser le tableau de variations de $f \circ f$.
Distinguer enfin les cas $u_0 \in [0, 1/\sqrt{2}]$ et $u_0 \in [1/\sqrt{2}, +\infty[$. □

Indications pour l'exercice 19. Étudier les variations de $t \mapsto \sqrt{2+2t}$ et chercher les points fixes.
Comparer $f_2 - f_1$ puis conclure. □

VI. Avec Python

Indications pour l'exercice 20.

1. Étudier les variations de f_n.

2. a) On peut utiliser le module `numpy.polynomial`.

b) En étudiant le signe de $f_{n+1}(u_n)$, on montre que (u_n) est décroissante et minorée.
En montrant que $u_n^n \to 0$, montrer que (u_n) converge vers 0.

c) □