

XII - Statistique descriptive

I - Description statistique d'une population

I.1 - Statistique

Définition 1 - Population, Taille, Individus

- Une *étude statistique* est une étude visant à recueillir et analyser des informations sur un ensemble fini, généralement noté Ω , appelé *population*.
- Les éléments de la population Ω sont des *individus*.
- La *taille* de la population est le cardinal de l'ensemble Ω .

Exemple 1 - Populations

- L'ensemble des individus constituant la population française est une population.
- L'ensemble des élèves d'une classe est une population.

Définition 2 - Caractères, Modalités

Soit Ω une population.

- Un *caractère* sur Ω est une application définie sur Ω .
- Si X est une application, un élément $x \in X(\Omega)$ est une *modalité* du caractère.

Exemple 2

- Si Ω est la population française, on peut considérer les caractères :
 - ★ la taille en cm ; dont 150, 172.45, 190 sont des caractères.
 - ★ la couleur des yeux ; dont bleu, marron, vert sont des caractères.

- Si Ω est l'ensemble des élèves de la classe, la note obtenue lors du dernier devoir de mathématiques est un caractère.

Définition 3 - Quantitatif, Qualitatif

Soit Ω une population et X un caractère sur Ω .

- Si X est à valeurs réelles, X est un caractère *quantitatif*.
- Si X est à valeurs dans un ensemble quelconque non inclus dans \mathbb{R} , X est un caractère *qualitatif*.
- Si $X(\Omega)$ est dénombrable, le caractère est *discret*. Sinon, il est continu.

Exemple 3

- La taille des individus est un caractère quantitatif continu. La couleur des yeux est un caractère qualitatif discret.
- La note obtenue au dernier devoir de mathématiques est un caractère quantitatif discret (la note est généralement arrondie à une décimale).

I.2 - Statistiques univariées

Définition 4 - Effectif, Fréquence, Série

Soit Ω une population de cardinal N et X un caractère sur Ω . Posons

$$n_x = |\{\omega \in \Omega ; X(\omega) = x\}|.$$

- L'entier n_x est l'*effectif* de la modalité x . Il s'agit du nombre d'individus de la population qui présentent la modalité x .

- Le réel $f_x = \frac{n_x}{N}$ est la *fréquence* de la modalité x . Les fréquences sont souvent exprimées sous forme de pourcentages.
- Si l'effectif est discret, en notant $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, la *série statistique* des effectifs associée à Ω est l'ensemble des couples $\{(x_i, n_i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$.

Exemple 4 - Notes au devoir

Supposons que la liste des notes au devoir est la suivante : 8.2, 5.5, 10, 4.7, 15.7, 12.1, 4.7, 12.1, 9.3, 4.7, 9.6, 14.5, 10, 18.9, 19.5, 7.5, 8.2, 18.9, 10, 11.1.

- Représentation sous forme de tableau des effectifs :

4.7	5.5	7.5	8.2	9.3	9.6	10	11.1	12.1	14.5	15.7	18.9	19.5
3	1	1	2	1	1	3	1	2	1	1	2	1

- Représentation sous forme de tableau des fréquences :

4.7	5.5	7.5	8.2	9.3	9.6	10	11.1	12.1	14.5	15.7	18.9	19.5
$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$

Proposition 1 - Somme des fréquences

Soit Ω une population et X un caractère sur Ω . Pour toute modalité x de X , on note f_x sa fréquence. Alors,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f_x = 1.$$

Définition 5 - Fréquences cumulées d'une modalité

Soit Ω une population de taille N et X un caractère discret dont les modalités peuvent être ordonnées. Posons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

La *fréquence cumulée* de la modalité x_i est l'entier

$$F_i = \frac{|\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \leq x_i\}|}{N}.$$

Le réel F_i est la proportion d'individus qui ont une modalité au plus égale à x_i .

Exemple 5 - Notes au devoir

Reprenons les données de l'exemple précédent.

- Le tableau des effectifs cumulés est le suivant :

4.7	5.5	7.5	8.2	9.3	9.6	10	11.1	12.1	14.5	15.7	18.9	19.5
3	4	5	7	8	9	12	13	15	16	17	19	20

- Le tableau des fréquences est le suivant :

4.7	5.5	7.5	8.2	9.3	9.6	10	11.1	12.1	14.5	15.7	18.9	19.5
$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{19}{20}$	$\frac{20}{20}$

Définition 6 - Classe

Les valeurs prises par le caractère X peuvent être regroupées en sous-ensembles de $X(\Omega)$ appelées *classes*. On étend les notions d'effectifs et de fréquences aux classes.

Exemple 6 - Notes au devoir

Reprenons les données de l'exemple précédent. Les modalités peuvent être regroupées selon les classes suivantes :

[0, 1[[1, 2[[2, 3[[3, 4[[4, 5[[5, 6[[6, 7[[7, 8[[8, 9[[9, 10[[10, 11[
0	0	0	0	3	1	0	1	2	2	3

[11, 12[[12, 13[[13, 14[[14, 15[[15, 16[[16, 17[[17, 18[[18, 19[[19, 20]
1	2	0	1	1	0	0	2	1

I.3 - Représentations graphiques

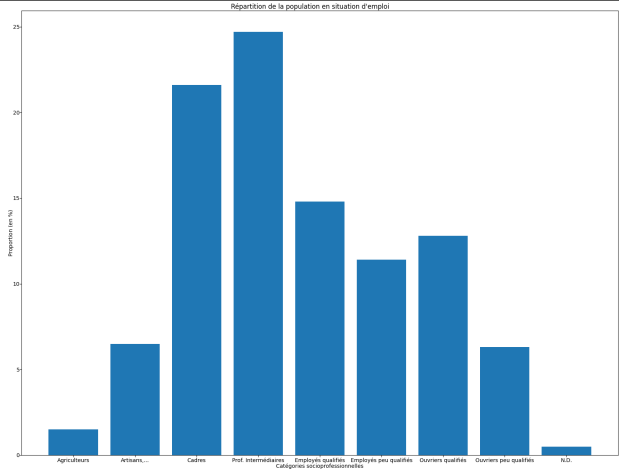
Définition 7 - Diagramme en bâtons

Dans un *diagramme en bâtons*, les modalités du caractère discret étudié sont indiquées en abscisses (il peut s'agir d'un caractère qualitatif). Les effectifs ou fréquences sont indiquées en ordonnées.

Exemple 7 - Catégories socioprofessionnelles

En 2021, la répartition (en pourcentages) de la population en situation d'emploi selon la catégorie socioprofessionnelle était la suivante (source INSEE) :

Catégorie socioprofessionnelle	Proportion
Agriculteurs	1.5
Artisans, commerçants, chefs d'entreprise	6.5
Cadres	21.6
Professions intermédiaires	24.7
Employés qualifiés	14.8
Employés peu qualifiés	11.4
Ouvriers qualifiés	12.8
Ouvriers peu qualifiés	6.3
Non déterminé	0.5

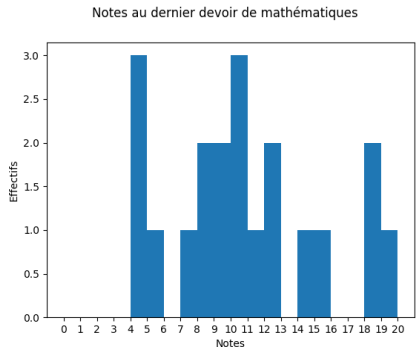


Définition 8 - Histogramme

Dans un *histogramme*, le caractère étudié est regroupé en classes. Les valeurs des classes sont indiquées en abscisses. Les effectifs ou fréquences sont indiquées en ordonnées.

Exemple 8 - Notes au devoir

En reprenant les notes obtenues lors du dernier devoir de mathématiques :

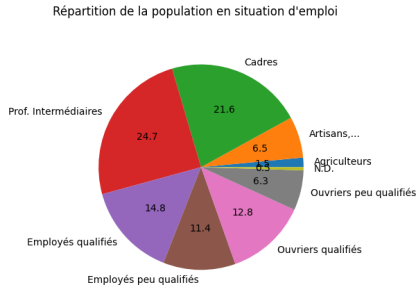


Définition 9 - Diagramme circulaire

Dans un *diagramme circulaire*, à chaque modalité du caractère (discret) ou chaque classe est dévolue une partie d'un disque dont l'aire est proportionnelle à sa fréquence.

Exemple 9 - Catégories socioprofessionnelles

En reprenant les données précédentes :



I.4 - Caractéristiques de position et de dispersion

Définition 10 - Mode

Soit Ω une population et X un caractère discret sur Ω . Un *mode* est une modalité $x \in X(\Omega)$ dont l'effectif est maximal.

Exemple 10 - Notes au devoir

En reprenant les notes au devoir, les modes sont 4.7 et 10.

Définition 11 - Médiane

Soit Ω une population de taille N et X un caractère discret ordonné sur Ω . On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

La modalité x_i est la *médiane* de X si

$$|\{\omega \in \Omega ; X(\omega) < x_i\}| < \frac{N}{2} \text{ et } |\{\omega \in \Omega ; X(\omega) > x_i\}| < \frac{N}{2}.$$

La médiane est une modalité qui partage la population en deux parties contenant sensiblement les mêmes effectifs.

Plus généralement, les *quantiles* sont les modalités qui permettent de diviser la population en intervalles consécutifs contenant sensiblement les mêmes effectifs.

Exemple 11 - Notes au devoir

Rappelons que $N = 20$ soit $N/2 = 10$. En utilisant le tableau des effectifs cumulés,

- Le nombre d'étudiants ayant une note strictement inférieure à 10 vaut 9.
- Le nombre d'étudiants ayant une note strictement supérieure à 10 vaut $20 - 12 = 8$.

Ainsi, la médiane vaut 10.

Définition 12 - Moyenne

Soit Ω une population de taille N et X un caractère sur Ω . On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Pour toute modalité x_i , on note n_i son effectif et f_i sa fréquence. La moyenne \bar{X} du caractère X est le réel

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i x_i = \sum_{i=1}^n f_i x_i.$$

Exemple 12 - Notes au devoir

En utilisant un logiciel de calcul, la moyenne vaut

$$\frac{3 \cdot 4.7 + 5.5 + 7.5 + 2 \cdot 8.2 + 9.3 + 9.6 + 3 \cdot 10 + 11.1 + 2 \cdot 12.1 + 14.5 + 15.7 + 2 \cdot 18.9 + 19.5}{20} = 10.76$$

Définition 13 - Étendue

Soit Ω une population de taille N et X un caractère discret sur Ω à valeurs réelles. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

- L'*étendue* est la différence entre la plus grande et la plus petite modalité du caractère X .
- Si \bar{X} est la moyenne du caractère x , la *variance* du caractère X est le réel :

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2.$$

- L'*écart-type* est le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- Si $x_p < x_q < x_r$ sont trois modalités qui divisent la population en 4 intervalles successifs ayant sensiblement les

mêmes effectifs :

$$\begin{aligned} |\{\omega \in \Omega ; X(\omega) < x_p\}| &< \frac{N}{4}, \\ |\{\omega \in \Omega ; x_p < X(\omega) < x_q\}| &< \frac{N}{4}, \\ |\{\omega \in \Omega ; x_q < X(\omega) < x_r\}| &< \frac{N}{4} \\ \text{et } |\{\omega \in \Omega ; x_r < X(\omega)\}| &< \frac{N}{4}, \end{aligned}$$

La modalité x_p est le premier *quartile*, la modalité x_q est le second *quartile* et la modalité x_r est le troisième *quartile*. La différence $x_r - x_p$ entre le plus grand et le plus petit quartile est l'*écart interquartile*.

- Le *coefficient de variation* de X est égal au rapport $\frac{\sigma(X)}{\bar{X}}$.

Exemple 13 - Notes au devoir

En utilisant un logiciel de calcul,

- l'étendue vaut $19.5 - 4.7 = 14.8$.
- la variance vaut environ 20.9.
- l'écart-type vaut environ 4.6.

L'avantage de l'écart-type est qu'il s'exprime dans la même unité que les données initiales (contrairement à la variance qui s'exprime en fonction de cette unité au carré). Le coefficient de variation est un nombre sans dimension.

En reprenant le tableau des effectifs,

- le nombre de notes strictement inférieures à 7.5 vaut 4,
- le nombre de notes strictement comprises entre 7.5 et 10 vaut 4,
- le nombre de notes strictement comprises entre 10 et 14.5 vaut 4,
- le nombre de notes strictement supérieures à 14.5 vaut 4.

Nous avons ainsi déterminé les quatre quartiles.

II - Statistiques bivariées

Définition 14 - Effectifs, Marginales

Soit X, Y deux caractères définis sur une population Ω de taille N . On note x_1, \dots, x_n les modalités de X et y_1, \dots, y_p les modalités de Y .

- Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $n_{i,j}$ l'*effectif* du couple de modalités (x_i, y_j) et $f_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{N}$ sa fréquence.
- Les *effectifs marginaux* en X sont, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les entiers $n_i = \sum_{j=1}^p n_{i,j}$.
- Les *effectifs marginaux* en Y sont, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, les entiers $m_j = \sum_{i=1}^n n_{i,j}$.

On définit de manière analogue les fréquences et fréquences marginales. Ces quantités peuvent être représentées dans un tableau. On définit, comme dans le cadre des variables aléatoires, les valeurs de X conditionnellement à $Y = y_j$ ainsi que les valeurs de Y conditionnellement à $X = x_i$.

Exemple 14 - Mesures d'arbres

On liste ci-dessous la circonférence X (en cm) et le volume Y (en cm^3) de différents arbres : (9, 10), (9, 10), (9, 10), (11, 15), (11, 20), (11, 20), (11, 15), (11, 15), (11, 20), (11, 20), (11, 25), (11, 20), (11, 20), (11, 20), (13, 15), (13, 20), (13, 35), (13, 20), (15, 30), (15, 30), (15, 35), (15, 35), (15, 35), (15, 40), (15, 45), (19, 55), (19, 55), (19, 60), (19, 50), (19, 50), (21, 60).

Les marginales selon Y (resp. X) sont indiquées dans la dernière colonne (resp. ligne)

$\begin{smallmatrix} Y \backslash X \\ \hline \end{smallmatrix}$	9	11	13	15	19	21	
10	3	0	0	0	0	0	3
15	0	3	1	0	0	0	4
20	0	7	2	0	0	0	9
25	0	1	0	0	0	0	1
30	0	0	0	2	0	0	2
35	0	0	1	3	0	0	4
40	0	0	0	1	0	0	1
45	0	0	0	1	0	0	1
50	0	0	0	0	2	0	2
55	0	0	0	0	2	0	2
60	0	0	0	0	1	1	2
	3	11	4	7	5	1	31

Définition 15 - Covariance, Coefficient de corrélation

On reprend les notations de la définition précédente.

- La *covariance* de X et de Y est le réel

$$\sigma_{X,Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p n_{i,j} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}).$$

- Le *coefficient de corrélation* de X et Y est le réel

$$r = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Exemple 15 - Mesures d'arbres

Un logiciel de calcul permet d'obtenir

$$\bar{X} = 13.6$$

$$\bar{Y} = 29.4$$

$$\sigma_X \simeq 3.4$$

$$\sigma_Y \simeq 15.3$$

$$\sigma_{X,Y} \simeq 51.8$$

$$r \simeq 0.95$$

Théorème 1 - Méthode des moindres carrés

On reprend les notations des questions précédentes. La *droite de régression linéaire* de Y par rapport à X a pour équation :

$$y = ax + b = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X^2} (x - \bar{X}) + \bar{Y}.$$

Si le coefficient de corrélation r^2 est proche de 1, l'approximation du nuage de points par la droite de régression est bonne. Les caractères X et Y sont *corrélés*. On peut alors effectuer une prédiction sur la valeur de y connaissant une valeur de x .

Exemple 16 - Mesures d'arbres

Un logiciel de calcul permet d'obtenir

$$a \simeq 4.3 \text{ et } b \simeq -29.5$$

On peut représenter le nuage de points ainsi que la droite de régression sur un même graphique. On a mis également en évidence le point de coordonnées (\bar{X}, \bar{Y}) . Comme r est proche de 1, l'approximation par une droite de régression est bonne.

