# T.D. IX - Variables aléatoires à densité

**Exercice 1.** Soit $\lambda$, $mu$ deux réels strictement positifs, $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu)$. On suppose que $X$ et $Y$ sont indépendantes. On pose $Z = \min\{X, Y\}$.

**1.** Exprimer la fonction de répartition de $Z$ en fonction des fonctions de répartition de $X$ et de $Y$.

**2.** En déduire que $Z \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda + \mu)$.

## I - Lois usuelles

**Exercice 2.** Soit $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier la loi des variables aléatoires suivantes :

**1.** $X = 3U$.

**2.** $Y = U + 1$.

**3.** $Z = \frac{1}{2}X + 1$.

**4.** $W = X^2$.

**5.** $H = \ln(X)$.

**6.** $E = -\ln(X)$.

**Exercice 3.** Un archer lance deux flèches en direction d'une cible de rayon d'un mètre. On suppose qu'il l'atteint systèmatiquement et que ses lancers sont indépendants. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on note $R_i$ la variable aléatoire égale à la distance (en mètres) de la flèche numéro $i$ au centre de la cible et on suppose que $R_i \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. On note $R = \min\{R_1, R_2\}$.

**1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([R > x]) = \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x])$.

**2.** En déduire l'expression de la fonction de répartition $F$ de $R$.

**3.** Calculer la probabilité que la flèche la mieux lancée par l'archer soit située à moins de 50cm de la cible.

**Exercice 4.** Un appareil électronique possède un compartiment accueillant deux piles dont les durées de vie (en mois) respectives sont $T_1$ et $T_2$. On suppose que $T_1$ et $T_2$ sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre 1. L'appareil cesse de fonctionner lorsque les deux piles sont vides, i.e. au bout d'un temps $T = \max\{T_1, T_2\}$.

**1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}([T_1 \leqslant x] \cap [T_2 \leqslant x])$.

**2.** En déduire l'expression de la fonction de répartition $F$ de $T$.

**3.** Calculer la probabilité que l'appareil cesse de fonctionner, à cause de ses piles, au bout de 6 mois.

**Exercice 5.** Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

**1.** On pose $Y = \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Déterminer la loi de $Y$.

**2.** On pose $Z = \sqrt{X}$. Déterminer la loi de $Z$, son espérance et sa variance.

**3.** On pose $W = X^2$. Déterminer une densité de $W$.

**Exercice 6.** On note $\Phi$ la fonction définie pour tout $x$ réel par

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

**1.** Montrer que $\Phi$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

**2.** Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Montrer qu'il existe un unique réel $t_0$ strictement positif tel que $\mathbf{P}(-t_0 < X < t_0) = 0{,}95$.

**3.** Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(8, 4)$. En utilisant la table de la loi normale, déterminer des valeurs approchées de :

**a)** $\mathbf{P}(X < 7{,}5)$.

**b)** $\mathbf{P}(X > 8{,}5)$.

**c)** $\mathbf{P}(6{,}5 < X < 10)$.

**d)** $\mathbf{P}_{[X>5]}(X > 6)$.

## II - Densités

**Exercice 7.** On définit la fonction $f$ pour tout $t$ réel positif par

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**1.** Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

**2.** Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. Montrer que $X$ admet une espérance et une variance et les déterminer.

**Exercice 8.** Soit $f$ la fonction définie pour tout $x$ réel par $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

**1.** Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$.

**2.** Déterminer la fonction de répartition de $X$.

Soit $\varphi$ la fonction définie pour tout $x$ réel par $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

**3.** Montrer que $\varphi$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

**4.** Déterminer l'expression de $\varphi^{-1}$.

**5.** On pose $Y = \varphi(X)$. Montrer que $Y$ est une variable aléatoire dont on précisera la densité.

**Exercice 9. (Lois de Pareto)** Soit $\alpha > 0$ et $f_\alpha$ la fonction définie pour tout $t$ réel par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{C}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**1.** Déterminer la constante $C$ telle que $f$ soit une densité de probabilité.

Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f_\alpha$.

**2.** Déterminer la fonction de répartition de $X$.

**3.** Déterminer l'espérance et la variance de $X$ en discutant selon les valeurs de $\alpha$.

**4.** Soit $Y = X^2$. Déterminer une densité puis l'espérance (si elle existe) de $Y$.

**5.** Soit $T = \sqrt{X}$. Déterminer une densité puis l'espérance (si elle existe) de $Y$.

## III - Estimation

**Exercice 10.** Soit $\theta > 0$ et $X$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$. Pour estimer $\theta$, on considère un 4-échantillon $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ de $X$ et on propose les estimateurs suivants :

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} \text{ et } T_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4}{10}.$$

**1.** Calculer l'espérance de chacun de ces estimateurs.

**2.** Calculer le risque quadratique de chacun de ces estimateurs.

**3.** Lequel de ces deux estimateurs vous semble préférable ?

**Exercice 11.** Soit $\theta > 0$ et $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\theta]$. Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n$-échantillon de $X$. On pose $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

**1.** Déterminer la loi de $M_n$, calculer son espérance et sa variance.

**2.** En déduire que $U_n = \frac{n+1}{2n} M_n$ est un estimateur sans biais de $\theta$.

**3.** On pose $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de $\theta$.

**4.** Quel estimateur choisir entre $U_n$ et $\overline{X}_n$ ?

**Exercice 12.** Soit $\theta$ un réel strictement positif et $f$ la fonction définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-(t-\theta)}$ lorsque $\theta \leqslant t$ et $f(t) = 0$ sinon.

**1.** Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.

Soit $T$ une variable aléatoire de densité $f$, $n \geqslant 2$ et $(T_1, \ldots, T_n)$ un $n$-échantillon de $T$.

**2.** Calculer l'espérance et la variance de $T$.

On pose $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i$.

**3.** Montrer que $Y_n$ admet une espérance et une variance et les déterminer.

**4.** Montrer que $\hat{Y}_n = Y_n - 1$ est un estimateur sans biais de $\theta$.

**5.** Déterminer le risque quadratique de $\hat{Y}_n$.

On pose $Z_n = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} T_i$.

**6.** Exprimer la fonction de répartition $F_n$ de $Z_n$ en fonction de celle, notée $F$, de $T$.

**7.** En déduire que $Z_n$ est une variable à densité.

**8.** Déterminer l'espérance et la variance de $Z_n$.

**9.** En déduire que $\hat{Z}_n = Z_n - \frac{1}{n}$ est un estimateur sans biais de $\theta$.

**10.** Déterminer le risque quadratique de $\hat{Z}_n$.

**11.** Comparer les risques quadratiques de $\hat{Y}_n$ et $\hat{Z}_n$.