T.D. VII - Variables aléatoires discrètes

========

I - Lois usuelles finies

Solution de l'exercice 1. $\mathscr{B}(p^n)$. □

Solution de l'exercice 2. $N(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N=0) &= \mathbf{P}(\forall\ i \in [\![1,n]\!], X_i = 1) \\
&= \frac{1}{n!} \\
\mathbf{P}(N=k) &= \mathbf{P}(\forall\ i \in [\![1,k-1]\!], X_i = 1 \text{ ET } X_k = 0) \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\left(1 - \frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

□

II - Variables aléatoires finies

Solution de l'exercice 6.

1. Le nombre de tirages possibles est $(2n)!$. La position de la première boule impaire est comprise entre 1 et $(n+1)$, soit $(n+1)$ possibilités. Il y a enfin $n!$ façons de disposer les boules paires. Au final,

$$\frac{(n+1)n!}{(2n)!}.$$

2. Le nombre de positions des boules impaires est $\binom{2n}{n}$. Leur ordre est ensuite fixé. Il y a ensuite $n!$ manières de disposer les boules paires. Ainsi,

$$\frac{\binom{2n}{n}n!}{(2n)!} = \frac{1}{n!}.$$

3. D'une part, $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$. Ensuite, sur $\{X = k\}$, il y a $\binom{k-1}{n-1}$ manières de choisir les positions des boules impaires (la dernière étant en position k). Ensuite, il y a $n!$ façons de disposer les boules impaires et $n!$ de disposer les paires. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{k=n}^{2n} k \frac{(n!)^2\binom{k-1}{n-1}}{(2n)!} \\
&= \frac{n(n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=n}^{2n} \underbrace{\binom{k}{n}}_{=\binom{k}{n+1}-\binom{k-1}{n-1}} \\
&= \frac{n(n!)^2}{(2n)!}\binom{2n+1}{n+1} \\
&= \frac{n(2n+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. D'après la formule du triangle de Pascal, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$. On utilise ensuite une somme télescopique.

2. D'une part, $X(\omega) = [\![b, n+b]\!]$. De plus, en numérotant les boules pour compter plus aisément,

* il y a $(n+b)!$ tirages possibles.
* Pour les tirages favorables, la b-ème boule blanche étant tirée lors du k-ème tirage, le nombre de tirages favorables vaut

$$\underbrace{\binom{k-1}{b-1}}_{\text{position des boules blanches}} \quad \underbrace{b!}_{rpartitiondesboulesblanches} \quad \underbrace{n!}_{rpartitiondesboulesnoires}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}(X=k) = \frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$$

Remarque. En utilisant la première question,

$$\sum_{k=b}^{n+b}\binom{k-1}{b-1}=\sum_{k=b-1}^{n+b-1}\binom{k}{b-1}=\binom{n+b}{b}.$$

Ainsi, $\sum_{k=b}^{n+b} p_b = 1$.
De plus,

$$\sum_{k=b}^{n+b} k\binom{k-1}{b-1}=b\sum_{k=b}^{n+b}\binom{k}{b}=b\binom{n+b+1}{b+1}.$$

Ainsi, $\mathbf{E}\left[X\right]=\frac{b(n+b+1)}{b+1}$.
Concernant la variance,

$$\begin{aligned}
\binom{n+b}{b}\mathbf{E}\left[X^2\right] &= \sum_{k=b}^{n+b} k^2\binom{k-1}{b-1}\\
&= b\sum_{k=b}^{n+b} k\binom{k}{b}\\
&= b(b+1)\sum_{k=b}^{n+b}\binom{k+1}{b+1}-b\sum_{k=b}^{n+b}\binom{k}{b}\\
&= b(b+1)\binom{n+b+2}{b+2}-b\binom{n+b+1}{b+1}\\
&= \binom{n+b+1}{b+1}b\frac{n(b+1)+b(b+2)}{b+2}\\
\mathbf{E}\left[X^1\right] &= \frac{n+b+1}{(b+1)(b+2)}[n(b+1)+b(b+2)]\\
\mathbf{V}\left(X\right) &= \frac{bn(n+b+1)}{(b+1)^2(b+2)}.
\end{aligned}$$

□

III - Lois usuelles infinies

Solution de l'exercice 13.

1. L'événement $\{U_p = i\}$ est modélisé par une expérience de Bernoulli de probabilité de succès égale à $\frac{1}{n}$. La variable aléatoire $X_{i,m}$ suit une loi binomiale de paramètres m et $1/n$.

2. En utilisant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(Y_i=j\right) &= \sum_{m=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(Y_i=j,\, N=m\right)\\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(X_{i,m}=j,\, N=m\right)\\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\binom{m}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-j}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\\
&= e^{\lambda/n}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^j\frac{1}{j!}.
\end{aligned}$$

Ainsi, Y_i suit une loi de Poisson de paramètre λ/n. □

IV - Variables aléatoires infinies

Solution de l'exercice 17.

1. Le joueur gagne si et seulement si le numéro renvoyé est pair. Ainsi, la probabilité de gagner est

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1}{3}.$$

2. On remarque que $G(\Omega)=\left\{(-1)^k k,\, k\in\mathbb{N}\right\}$.
De plus, si $n=2k$, $\mathbf{P}\left(G=n\right)=\frac{1}{2^n}$. Si $n=2k+1$, $\mathbf{P}\left(G=-n\right)=\frac{1}{2^n}$.
Sinon, $\mathbf{P}\left(G=n\right)=0$.
Ainsi, $\mathbf{E}\left[G\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}=-\frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\ell(\ell+1)}{2^\ell}$.

Notons $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Alors, $\sum u_n$ est absolument convergente et

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}\right)\\
\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\
\left(\frac{1}{1+1/2}\right)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\
\frac{4}{9} &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\
\mathbf{E}\left[G\right] &= -\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

2ème méthode. On aurait également pu utiliser la dérivation des séries entières. $\square$

V - Lois jointes

Solution de l'exercice 21. D'après la définition, $R = 1 + \sum_{j=1}^{n} I_j$. De plus, $I_j \sim \mathscr{B}(2pq)$, donc $\mathbf{E}\left[I_j\right] = 2pq$.
Ainsi,

$$\mathbf{E}\left[R\right] = 1 + 2(n-1)pq.$$

Si $k - j > 2$, d'après le lemme des coalitions, I_j et I_k sont indépendants. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[I_i I_{i+1}\right] &= \mathbf{P}\left(\{PFP\} \sqcup \{FPF\}\right)\\
&= p^2 q + q^2 p\\
&= pq
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left(R\right) &= \sum_{j=1}^{n-1}\mathbf{V}\left(I_j\right) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}\mathrm{Cov}\left(I_i, I_j\right)\\
&= (n-1)\mathbf{V}\left(I_1\right) + 2(n-1)\mathrm{Cov}\left(I_1, I_2\right)\\
&= (n-1)2pq(1-2pq) + 2(n-2)(pq - 4p^2q^2)\\
&= 2pq\left[2n - 3 - 2pq(3n-5)\right]
\end{aligned}$$

$\square$