■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer. Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. On pose, pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$:

$$f(x) = x\ln(1+x).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et que sa dérivée f' est également dérivable sur l'intervalle $]-1,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère plan.

1. a) Déterminer la limite de f en -1.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$: $f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$.

c) En déduire les variations de la fonction f' sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

3. Tracer l'allure $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan, en soignant le tracé au point d'abscisse 0.

4. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

b) Vérifier que : $\forall\, x \in [0,1]$, $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

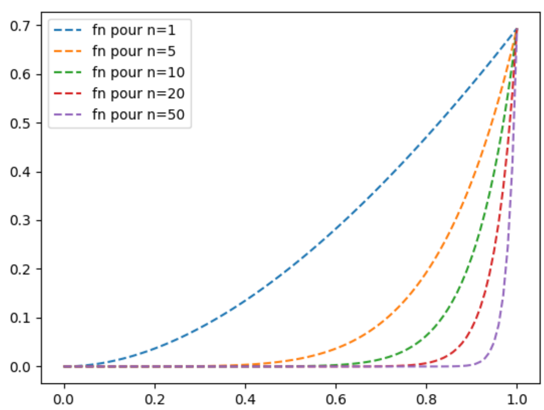
c) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

d) Calculer l'intégrale I.

5. On considère à présent la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in]-1,+\infty[,\ f_n(x) = x^n\ln(1+x).$$

On pose alors pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Le graphique ci-dessous contient les représentations graphiques des fonctions f_1, f_5, f_{10}, f_{20} et f_{50} sur l'intervalle $[0,1]$.



Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour qu'il trace les courbes des fonctions ci-dessus.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return ...

X = np.linspace(0, 1, 100)

for n in [...]:
    plt.plot(..., ..., "--", label=r"fn pour n="+str(n))

plt.legend()
...
```

6. a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En utilisant le graphique ci-dessus, conjecturer la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

7. a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, x \in [0,1],\ 0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n \ln(2).$$

b) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 2. On considère les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.

b) Vérifier que le polynôme $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de la matrice A. En déduire les valeurs propres possibles de A.

c) Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. À quelles valeurs propres sont-ils associés ?

d) Justifier l'égalité $P^{-1}AP = C$.

2. a) Exprimer B en fonction de I_2 et A. Exprimer de même D en fonction de I_2 et C.

b) En déduire que $P^{-1}BP = D$.

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $P^{-1}B^nP = D^n$.

b) Pour tout entier naturel n, donner les coefficients de D^n.

c) Déduire de **3.a)** et **3.b)** que pour tout entier naturel n on a : $B^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$.

4. Antoine et Béatrice jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\dfrac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$.
On suppose que c'est Antoine qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « Antoine gagne le n^{e} échange » et B_n l'événement « Béatrice gagne le n^{e} échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.

a) Donner les valeurs de a_1 et b_1. Calculer a_2 et vérifier que $a_2 = \dfrac{5}{9}$.

b) On observe qu'Antoine emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange ?

c) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$. Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

d) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Vérifier que $X_{n+1} = \frac{1}{3}BX_n$

e) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $X_n = \frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$.

f) Déduire de **3.c)** que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $a_n = \dfrac{3^n + 1}{2 \times 3^n}$.
Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$

5. Simulation informatique.
On suppose avoir importé le module `numpy.random` via l'instruction `import numpy.random as rd`.
On rappelle que l'instruction `a = rd.binomial(1, p)` simule une loi de Bernoulli de paramètre p.
Ainsi, si $p = \frac{2}{3}$ l'instruction `a = rd.binomial(1, 2/3)` affecte à la variable `a` la valeur 0 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et la valeur 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
On utilise cette instruction pour simuler une partie de 20 échanges entre Antoine et Béatrice.

a) Recopier et compléter les lignes 6 et 7 du programme ci-dessous de telle sorte que lors de chacun des 20 échanges de la partie la variable `a` corresponde au point marqué par Antoine lors de cet échange (c'est-à-dire 1 ou 0).

b) Recopier et compléter les lignes 4 et 9 afin que la variable `S` calcule la somme des points obtenus par Antoine durant la partie.

```
1  import numpy.random as rd
2
3  a = rd.binomial(1, 2/3)
4  S = ....
5  for i in range(2, 21):
6      if a == 1:
7          a = rd.binomial(.........)
8      else:
9          a = rd.binomial(.........)
10     S = ....
11
12 print(S)
```

Exercice 3. *Dans tout l'exercice*, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, t \geqslant 0,\ g(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

a) On note g' la dérivée de la fonction g. Pour tout réel $t \geqslant 0$, calculer $g'(t)$.

b) Pour tout $x \geqslant 0$; on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$. Déduire de la question précédente la valeur de $I(x)$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé, telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et admettant f comme densité.

2. On note F la fonction de répartition de X. Établir la relation suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. On pose $Y = \frac{X^2}{1+X^2}$ et on note G la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.

a) Étudier les variations de la fonction Q qui, à tout réel $x \geqslant 0$, associe $Q(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, puis déterminer $Y(\Omega)$.

b) Pour tout $y \in [0, 1[$, calculer $G(y)$ et en déduire que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1[$.

c) Vérifier que $X = \sqrt{\frac{Y}{1-Y}}$. On rappelle que `rd.rand()` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Compléter le script suivant afin qu'il simule la variable aléatoire X.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

Y = ............
X = ............
```

4. Pour tout réel $h > 0$, soit T_h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x > 0,\ T_h(x) = \frac{1}{h} \times \mathbf{P}_{[X>x]}\left([X \leqslant x+h]\right).$$

a) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que l'on a : $\lim\limits_{h\to 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$.

b) Pour tout réel $x > 0$, on pose : $T(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$. Déterminer explicitement $T(x)$.

c) Pour tout réel $x > 0$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x T(t)\, \mathrm{d}t$ et exprimer cette intégrale en fonction de $F(x)$.