

T.P. IV - Fonctions & Suites

Code Capytale : 62c9-794137

I - Fonctions

Exercice 1. (Fonction définie par morceaux) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Compléter le script Python suivant pour que la fonction g prenne en entrée un réel x et calcule $g(x)$.

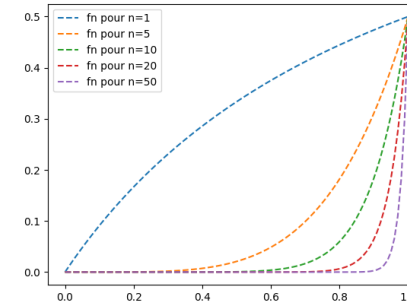
```
import numpy as np

def g(x):
    if x < 0:
        ....
    else:
        ....
```

1.

```
print (...)
print (...)
```

Exercice 2. (Une suite d'intégrales) Pour tout n entier naturel, on note $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$. Le graphique ci-dessous contient des représentations graphiques des fonctions f_1, f_5, f_{10}, f_{20} et f_{50} sur l'intervalle $[0, 1]$.



1. Compléter le code ci-dessous pour qu'il trace les courbes des fonctions ci-dessus.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return ...

X = np.linspace(0, 1, 100)

for n in [...]:
    plt.plot(..., ..., "--", label=r"fn pour n="+str(n))

plt.legend()
...
```

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, interpréter géométriquement l'intégrale I_n .

3. En utilisant le graphique ci-dessus, conjecturer la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

II - Suites

Exercice 3. (Étude de suite) Pour tout n entier naturel, on pose $c_n = 2 - \frac{3^n + 25}{4^{n-1}}$.

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.

2. On considère le code Python suivant :

```
n = 1
c = 2 - (3**n + 25)/4**(n-1)
while c < 1.95 :
    n = n + 1
    c = 2 - (3**n + 25)/4**(n-1)

print(n)
```

On obtient l'affichage suivant : 16.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 4. (Suite récurrente double) On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 4u_n + 2u_{n-1}$.

Compléter les 3 lignes du script Python ci-dessous pour qu'il calcule et affiche la valeur de u_{10} .

```
v = 0
u = 1
for i in range(..., ...):
    a = u
    ...
    v = a

print(u)
```

III - Suites et fonctions : la dichotomie

Exercice 5. (Exemple de dichotomie) On pose $h(x) = x^3 + \frac{1}{x^3} - 3$.

1. Montrer que h est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

2. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[1, +\infty[$.

3. Compléter le code Python suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de α par la méthode de dichotomie.

```
def h(x):
    return ...

a = ...
b = ...
while (b - a) > 10**-5:
    m = ...
    if h(m) * h(a) <= 0:
        b = m
    else:
        a = m

print(b)
```

IV - Introduction au produit matriciel

Le module `numpy`, importé via la ligne de commande `import numpy as np` permet de manipuler les matrices avec Python.

- * `A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])` permet de définir une matrice ligne par ligne et d'obtenir ainsi la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ qui sera ici stockée dans la variable `A`.
- * `3 * A` permet de multiplier `A` par le nombre 3.
- * Si `A` et `B` sont des matrices de mêmes tailles, `A + B` permet d'en calculer la somme.
- * Si `A` et `B` sont des matrices de tailles compatibles, `np.dot(A, B)` permet de multiplier les matrices `A` et `B`.

Exercice 6. (Produit matriciel) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 0, v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n \end{cases}.$$

Pour tout n entier naturel, on note $C_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer C_0 .
2. Montrer que, pour tout n entier naturel, $C_{n+1} = AC_n$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $C_n = A^n C_0$.
4. Compléter le script suivant pour qu'il calcule et affiche les termes u_{12} et v_{12} .

```
import numpy as np

n = ...

A = np.array([[...], [...]])

C = np.array([1, 0])

for k in range(..., ...):
    C = ...

print(C[0], C[1])
```