



*L'usage de toute calculatrice est interdit. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroté les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer. Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.*

**Exercice 1.** Soit  $M$  et  $I$  les matrices d'ordre 3 définies par :  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**1. a)** Calculer  $M^2$  et  $M^3$  et en déduire à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que  $M$  n'est pas inversible.

**b)** Pour tout entier  $n \geq 3$ , déterminer  $M^n$ .

**c)** Calculer  $(I - M)(I + M + M^2)$ . En déduire que  $(I - M)$  est inversible et donner son inverse  $(I - M)^{-1}$ .

**d)** Déterminer un polynôme annulateur de la matrice  $M$ .

**e)** En déduire la seule valeur propre possible de  $M$ .

**2.** On pose :  $S = M + I$ .

**a)** À l'aide de la formule du binôme, exprimer pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la matrice  $S^n$  en fonction de  $I$ ,  $M$  et  $M^2$ .

**b)** Déterminer la deuxième colonne de la matrice  $S^n$ .

**3.** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$ ,  $(v_n)_{n \geq 0}$  et  $(w_n)_{n \geq 0}$  les trois suites définies par :

$$u_0 = 0, v_0 = 1, w_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n \end{cases}$$

**a)** Établir pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'égalité :  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ .

**b)** En déduire pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la relation :  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ .

**c)** Exprimer  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$ . Montrer que  $u_n + v_n + w_n = 1$ .

**4.** Dans cette question, on se propose de déterminer une matrice  $J$  d'ordre 3, triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux non nuls et une matrice  $P$  d'ordre 3, inversible, qui vérifient la relation  $J = PMP$ .

**a)** On pose :  $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Calculer les matrices colonnes  $V$  et  $W$  définies par :  $V = -MU$  et

$$W = M^2U.$$

**b)** Soit  $P$  la matrice d'ordre 3 dont la première colonne est  $W$ , la deuxième est  $V$  et la troisième est  $U$ .

Calculer  $P^2$  ; en déduire que  $P$  est inversible et donner son inverse  $P^{-1}$ .

**c)** Expliciter la matrice  $J = PMP$ .

**Exercice 2.** On considère les deux suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$u_0 = 0, v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs de  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$  et  $v_2$ .
2. Compléter le script Python suivant qui permet de déterminer  $u_n$  et  $v_n$  pour  $n$  fixé à 50.

```
n = ...
u = ...
v = ...
for i in range(1, n+1):
    u = ...
    v = ...

print(u)
print(v)
```

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $w_n = v_n - u_n$ .

- a) Établir pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'égalité :  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}w_n$ .
- b) En déduire que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .
- c) i. Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right).$$

- ii. En déduire à l'aide de la question **3.a)** l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- iii. Vérifier que l'expression précédente reste valide pour  $n = 0$ .

- d) Justifier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et donner sa limite.

- e) Déterminer l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$  et donner la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

4. a) Justifier que l'unique réel  $\alpha$  pour lequel la série de terme général  $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ , est convergente est  $\alpha = \frac{2}{3}$ .

Dans les questions suivantes, on choisit  $\alpha = \frac{2}{3}$ .

- b) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $t_n > 0$  et établir l'égalité :  $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = 1$ .

5. Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{P}([X = n]) = t_n$ .

- a) On pose  $Y = X + 1$ . Reconnaître la loi de la variable aléatoire  $Y$ .
- b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X$ .

**Exercice 3.** On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$$

*On ne cherchera pas à déterminer explicitement  $f(x)$ .*

1. a) Soit  $x$  un réel supérieur ou égal à 1.

Minorer  $\frac{1}{t}$  pour tout  $t$  de  $[1, x]$ , puis montrer que, pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$ , on a :  $f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$ .

- b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

- c) Justifier l'existence, sur  $[1, +\infty[$ , de la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  et montrer que, pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \frac{e^x}{x}$ .

- d) Montrer que la fonction  $f$  est convexe sur  $[1, +\infty[$ .

- e) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1 ?

Dans la suite, on se propose de montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) e^{-x} = 1$ .

**2. a)** Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$  définie par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, g(t) = \frac{e^t}{t^3}.$$

**b)** En déduire l'encadrement :  $0 \leq \int_1^3 g(t) dt \leq 2e$ .

**c)** Montrer que, pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 3, on a l'encadrement :

$$0 \leq \int_3^x g(t) dt \leq \frac{x-3}{x^3} e^x.$$

**3. a)** Grâce à une intégration par parties, montrer que, pour tout réel  $x$  de  $[1, +\infty[$ , on a :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt.$$

**b)** À l'aide d'une deuxième intégration par parties, établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x g(t) dt.$$

**4. a)** Utiliser les questions précédentes pour déterminer un encadrement de  $f(x)$  qui soit valable pour tout réel  $x$  de  $[3, +\infty[$ .

**b)** En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) e^{-x} = 1$ .

**Exercice 4.** On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au toucher. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $X_n$  (respectivement  $Y_n$ ) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (respectivement blanches) contenues dans l'urne à l'issue de la  $n$ -ième expérience, c'est-à-dire après le tirage d'une boule et de la remise d'une boule supplémentaire.

Pour tout entier  $k \geq 1$ , on note  $R_k$  (respectivement  $B_k$ ) l'événement : « tirer une boule rouge (respectivement blanche) lors du  $k$ -ième tirage ».

**1. a)** Justifier que  $X_1(\Omega) = \llbracket 1, 2 \rrbracket$ . Donner la loi de  $X_1$ . Calculer  $\mathbf{E}[X_1]$  et  $\mathbf{V}(X_1)$ .

**b)** Exprimer les événements  $[X_2 = 1]$ ,  $[X_2 = 2]$  et  $[X_2 = 3]$  en fonction des événements  $B_1, B_2, R_1$  et  $R_2$ .

**c)** Montrer que  $X_2$  suit la loi discrète uniforme sur  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ . En déduire  $\mathbf{E}[X_2]$  et  $\mathbf{V}(X_2)$ .

**2. a)** Donner sous forme de tableau la loi conjointe du couple  $(X_1, X_2)$ .

**b)** Calculer la covariance de  $X_1$  et  $X_2$ . Les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes ?

**3. a)** Pour tout entier  $n \geq 1$ , exprimer l'événement  $[X_n = 1]$  en fonction des événements  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

**b)** Montrer que  $\mathbf{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{n+1}$ . De même, calculer  $\mathbf{P}([X_n = n+1])$ .

**4. a)** Établir pour tout entier  $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ , les égalités suivantes :

$$\mathbf{P}_{[X_n=k-1]}([X_{n+1}=k]) = \frac{k-1}{n+2} \text{ et } \mathbf{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1}=k]) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$

**b)** En déduire pour tout  $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ , une relation entre  $\mathbf{P}([X_{n+1}=k])$ ,  $\mathbf{P}([X_n=k])$  et  $\mathbf{P}([X_n=k-1])$ .

**c)** À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , la variable aléatoire  $X_n$  suit la loi discrète uniforme sur  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ .

**5.** On rappelle que l'appel à la fonction `randint(a, b)` du module `numpy.random` renvoie un entier suivant une loi uniforme sur l'ensemble d'entiers  $\{a, a+1, \dots, b-1\}$ . Compléter le programme suivant afin qu'il simule une réalisation de la variable aléatoire  $X_{20}$ .

```
import numpy.random as rd
n = ...
r = 1
b = 1
for k in range(1, n+1):
    if rd.randint(1, k+2) <= r:
        ....
    else:
        ....
x = ...
print(x)
```

- 6. a)** Justifier que les variables aléatoires  $X_n$  et  $Y_n$  sont de même loi.
- b)** Pour tout entier  $n \geq 1$ , que vaut  $X_n + Y_n$  ?
- c)** Quel est le coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X_n, Y_n)$  de  $X_n$  et  $Y_n$  ?