

T.D. III - Intégrale sur un segment

I - Calculs d'intégrales par primitives

Exercice 1. (Fonctions polynomiales, ⚙️) Déterminer des primitives des fonctions suivantes puis calculer la valeur de l'intégrale :

- | | |
|---|--|
| <p>1. $x^2 + x + 1$.
 $\int_1^2 (x^2 + x + 1) dx$.</p> <p>2. $2x^3 + 4x + 2$.
 $\int_0^2 (2x^3 + 4x + 2) dx$.</p> | <p>3. $4x^3 + 2x^2 - 1$.
 $\int_1^2 (4x^3 + 2x^2 - 1) dx$.</p> <p>4. $x^{10} + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}$.
 $\int_0^1 \left(x^{10} + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}\right) dx$.</p> |
|---|--|

Exercice 2. (Fonctions puissances, ⚙️) Déterminer des primitives des fonctions suivantes puis calculer la valeur de l'intégrale :

- | | |
|--|--|
| <p>1. $x^{3/2}$.
 $\int_0^1 x^{3/2} dx$.</p> <p>2. $\frac{1}{\sqrt{x}}$.
 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.</p> <p>3. $\frac{1}{3x^2}$.
 $\int_1^2 \frac{1}{3x^2} dx$.</p> | <p>4. $\frac{4}{x^5}$.
 $\int_1^2 \frac{4}{x^5} dx$.</p> <p>5. $(2x + 1)(x^2 + x)^5$.
 $\int_{-1}^0 (2x + 1)(x^2 + x)^5 dx$.</p> <p>6. $(x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4)$.
 $\int_{-1}^0 (x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4) dx$.</p> |
|--|--|

Exercice 3. (Logarithmes & Exponentielles, ⚙️) Déterminer des primitives des fonctions suivantes puis calculer la valeur de l'intégrale :

- | | |
|---|---|
| <p>1. $\frac{3}{x}$.
 $\int_1^2 \frac{3}{x} dx$.</p> <p>2. $\frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 1}$.
 $\int_1^2 \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 1} dx$.</p> | <p>3. e^{2x}.
 $\int_{-2}^2 e^{2x} dx$.</p> <p>4. $\frac{1}{e^{12x}}$.
 $\int_{-2}^2 \frac{1}{e^{12x}} dx$.</p> |
|---|---|

5. $(e^x + 1)(e^x + x)^{22}$.
 $\int_0^1 (e^x + 1)(e^x + x)^{22} dx$.

6. $\frac{e^x + 1}{e^x + x}$.
 $\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx$.

Exercice 4. (Calculs d'intégrales, ⚙️) Calculer les valeurs des intégrales suivantes :

- | | |
|---|---|
| <p>1. $\int_0^1 (x^2 + 3x + 1) dx$.</p> <p>2. $\int_{-2}^1 e^{3x} dx$.</p> <p>3. $\int_1^{-1} e^3 dx$.</p> | <p>4. $\int_2^1 \frac{1}{x} dx$.</p> <p>5. $\int_0^1 2e^x + 3x^2 dx$.</p> |
|---|---|

Exercice 5. Soit $A \geq 1$. Déterminer $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx$.

II - Fonctions définies par morceaux

Exercice 6. (Loi uniforme) Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \notin [1, 3]$ et $f(x) = \frac{1}{2}$ sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction f .
2. Déterminer les intégrales suivantes :

- | | |
|---|--|
| <p>a) $\int_{-2}^0 f(x) dx$.</p> <p>b) $\int_{-1}^{3/2} f(x) dx$.</p> <p>c) $\int_{-1}^2 f(x) dx$.</p> | <p>d) $\int_{-4}^3 f(x) dx$.</p> <p>e) $\int_{-5}^{10} f(x) dx$.</p> |
|---|--|

3. Si $x \in [1, 3]$, déterminer $\int_1^x f(t) dt$.

Exercice 7. (Loi exponentielle) Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 2e^{-2x}$ sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction f .

2. Déterminer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-2}^0 f(x) \, dx.$

b) $\int_{-1}^{3/2} f(x) \, dx.$

c) $\int_{-1}^2 f(x) \, dx.$

d) $\int_{-4}^3 f(x) \, dx.$

e) $\int_{-5}^{10} f(x) \, dx.$

3. Si $x \geq 0$, déterminer $\int_0^x f(t) \, dt$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) \, dt$.

Exercice 8. (\Rightarrow) Calculer $\int_{-1}^5 |x - 2| \, dx$.

III - Linéarité de l'intégrale

Exercice 9. (\otimes)

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{t}{1+t} \, dt$.

Exercice 10. (\otimes) Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt$.
Montrer que $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 11. (\otimes) Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x} \, dx$.

1. Calculer I .

2. Calculer $I + J$.

3. En déduire la valeur de J .

Exercice 12. (\otimes) Soit $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} \, dx$.

1. Calculer I .

2. Calculer $I + J$.

3. En déduire la valeur de J .

IV - Dérivation par rapport aux bornes

Exercice 13. (\Rightarrow) Montrer que $F(x) = \int_3^x (t^2 - 2t + 1) \, dt$ est croissante.

Exercice 14. Soit f la fonction définie pour tout $x \geq 1$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt$.

1. Déterminer la dérivée f' de f .

2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

3. Déterminer la dérivée seconde f'' de f .

V - Inégalités

Exercice 15. Soit g la fonction définie pour tout $x \geq 1$ par $g(x) = \frac{e^x}{x^3}$.

1. Déterminer la dérivée g' de g .

2. En déduire le tableau de variations de g .

3. En déduire l'encadrement : $0 \leq \int_1^3 g(t) \, dt \leq 2e$.

Exercice 16. Soit f la fonction définie pour tout $x \geq 1$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt$.

1. Minorer $\frac{1}{t}$ pour tout $t \in [1, x]$ et en déduire que $f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 17. (\Rightarrow) Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2} \, dx$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. Montrer que (u_n) est minorée par 0.

3. En minorant $1 - x^2$, montrer que $u_n \leq \frac{4}{3(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

4. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 18. (☞) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

1. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leq I_n \leq \ln(2)$.
2. Étudier les variations de la suite (I_n) .
3. En déduire que la suite (I_n) converge.

VI - Intégrations par parties

Exercice 19. (☞) À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| 1. $\int_0^1 x e^x dx.$ | 4. $\int_0^1 x^2 e^x dx.$ |
| 2. $\int_1^2 x e^{2x} dx.$ | 5. $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx.$ |
| 3. $\int_1^e x \ln(x) dx.$ | 6. $\int_1^e (\ln(t))^2 dt.$ |

Exercice 20. Soit $A \geq 1$. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx$.

Exercice 21. Soit f la fonction définie pour tout $x \geq 1$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt.$$

2. À l'aide d'une seconde intégration par parties, montrer que

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt.$$

Exercice 22. (☞) Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1. Calculer u_0 .
2. Montrer que $f(t) = (2-t)e^t$ est une primitive de la fonction $g(t) = (1-t)e^t$.
3. Déterminer la valeur de u_1 .
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.
5. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
6. Déterminer la limite de (nu_n) .

Exercice 23. (☞) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = \int_1^e t(\ln(t))^n dt$.

1. Calculer u_0 .
2. a) Montrer que, pour tout $t \in [1, e]$, $0 \leq \ln(t) \leq 1$.
b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n$.
4. En déduire u_1 , u_2 et u_3 .