

T.D. VIII - Intégration

I - Calculs d'intégrales

Exercice 1. (⚙️) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. $f_1(x) = \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}.$ | 5. $f_5(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$ |
| 2. $f_2(x) = \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}.$ | 6. $f_6(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}.$ |
| 3. $f_3(x) = x\sqrt{1-2x^2}.$ | 7. $f_7(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$ |
| 4. $f_4(x) = (e^x+1)^3 e^x.$ | 8. $f_8(x) = \frac{\ln^{27}(x)}{x}.$ |

Exercice 2. (Changements de variables, ⚙️) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $f_1(x) = \frac{1}{e^x+1}.$
$\varphi : u \mapsto \ln(u), \frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}.$ | 3. $f_3(x) = \frac{1}{2x \ln(x)+x}.$
$\varphi : u \mapsto e^u.$ |
| 2. $f_2(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$
$\varphi : u \mapsto u^2.$ | 4. $f_4(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}.$
$\varphi : u \mapsto \sqrt{u-2}.$ |

Exercice 3. (Intégrations par parties, ⚙️) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 1. $f_1(x) = x e^x.$ | 3. $f_3(x) = x^2 \ln(x).$ |
| 2. $f_2(x) = x^2 e^x.$ | |

Exercice 4. (⚙️)

1. Montrer qu'il existe a, b réels tels que

$$\forall x \in [0, 1], \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx.$

Exercice 5. (Fonction bêta) Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx.$$

- Pour q non nul, déterminer une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
- Exprimer la valeur de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

II - Inégalités

Exercice 6. (⚙️) Montrer que $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} \leq 1.$

Exercice 7. (→)

1. Montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt.$$

2. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln(t) dt + \ln(n).$$

3. En utilisant une primitive de \ln , en déduire la limite de la suite de terme général $\frac{\ln(n!)}{n \ln(n)}.$

Exercice 8. (→) Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$

1. En utilisant la concavité du logarithme, montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, \forall t \in]x^2, 1[, \frac{2 \ln(x)}{x^2 - 1} (t - 1) \leq \ln(t) \leq t - 1.$$

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.

3. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1[$ et calculer sa dérivée.

Exercice 9. Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$.

1. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leq I_n \leq \ln(2)$.
2. Étudier les variations de la suite (I_n) .
3. En déduire que la suite (I_n) converge.
4. Montrer que : $\forall x \geq 0, 0 \leq \ln(1 + x) \leq x$.
5. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 10. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x^2) dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^2} dx$.

1. a) Calculer J_1 .
b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.
c) En déduire que (J_n) converge et déterminer sa limite.
2. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \geq 1, I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

- b) Montrer que la suite (I_n) converge.
- c) Montrer que la suite (nI_n) converge et déterminer sa limite.

III - Intégrales généralisées

Exercice 11. (✱) En comparant l'intégrande avec une fonction de référence, montrer que les intégrales suivantes convergent :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. 2. $\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt$. | <ol style="list-style-type: none"> 3. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1 + t^4} dt$. 4. $\int_0^1 \frac{\ln t}{1 + t^4} dt$. |
|---|--|

Exercice 12. (✱✱) Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int_0^1 x \ln^2(x) dx$. 2. $\int_0^1 \ln^2(t) dt$. | <ol style="list-style-type: none"> 3. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$.
$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$. |
|--|--|

IV - Intégrales classiques

Exercice 13. (Expression intégrale de la factorielle, ✱✱) Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0 .
2. Montrer que l'intégrale I_n converge.
3. Montrer que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.
4. En déduire, pour tout n entier naturel, une expression simple de I_n .

Exercice 14. (Fonction Gamma d'Euler, ✱) Pour tout réel x strictement positif, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Soit $x > 0$.
a) Pour tout $t \in]0, 1]$, rappeler la définition de t^{x-1} .
b) Déterminer un équivalent, lorsque $t \rightarrow 0$ de $t^{x-1} e^{-t}$.
c) En déduire que $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.
d) Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$\forall t \geq a, t^{x-1} e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

- e) En déduire que $\int_a^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.
- f) En déduire que la fonction Γ est bien définie.
2. En utilisant une intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, M]$ puis en faisant tendre ε vers 0 et M vers $+\infty$, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire, pour tout n entier naturel, la valeur de $\Gamma(n+1)$.