■ Chapitre 10 ■
Séries entières

Notation.
■ $\mathscr{B}(0,\rho)$ désigne la boule euclidienne (sur $\mathbb{C}$) centrée en 0 et de rayon ρ.

I. Rayon de convergence des séries entières

I.1 Définition

Définition 1 (Série entière).
Soit (a_n) une suite de nombres complexes. La série $\sum a_n z^n$ est la *série entière* de la variable complexe z. Les nombres a_n sont les *coefficients* de la série entière.

Exercice 1. Montrer que

1. $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$, $\forall\ z \in \mathscr{B}(0,1)$.

2. $\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\forall\ x \in]-1,1[$.

3. $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $\forall\ x \in]-1,1[$.

4. $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

Lemme 1 (Lemme d'Abel).
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout nombre complexe z,
$$|z| < |z_0| \ \Rightarrow\ \sum a_n z^n \text{ converge absolument.}$$

Propriété 1.
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}_+ \ ;\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0.

Définition 2 (Rayon de convergence).
Le *rayon de convergence* de la série $\sum a_n z^n$ est le réel
$$\rho = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ \ ;\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\right\},$$
où $\rho = +\infty$ si l'ensemble n'est pas borné.
Dans le cas où la variable est complexe, le *disque ouvert de convergence* est le disque $\mathscr{B}(0,\rho)$.
Dans le cas où la variable est réelle, l'*intervalle ouvert de convergence* est l'intervalle $]-\rho,\rho[$.

Exercice 2.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries exponentielle et géométrique.

2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum n z^n$ et de $\sum \frac{1}{n} z^n$.

3. Déterminer le rayon de convergence de $\sum n! z^n$ et de $\sum \sin(n) z^n$.

Propriété 2 (Convergence & Rayon de convergence).
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ. Alors, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$,

(i). si $z_0 \in \mathscr{B}(0,\rho)$, alors la série $\sum a_n z_0^n$ converge absolument.

(ii). si $|z_0| > \rho$, alors $\sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement.

Exercice 3. Étudier les séries $\sum n z^n$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ et $\sum \frac{z^n}{n}$ sur les extrémités de leur intervalle de convergence.

I.2 Détermination pratique du rayon de convergence

Théorème 1 (Théorème de comparaison).

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs ρ_a et ρ_b.

(i). Si $a_n = O(b_n)$, alors $\rho_a \geqslant \rho_b$.

(ii). Si $a_n \sim b_n$, alors $\rho_a = \rho_b$.

(iii). Si $a_n = nb_n$, alors $\rho_a = \rho_b$.

Exercice 4. Déterminer les rayons de convergence et la somme des séries $\sum \frac{n^3}{n!} z^n$ et $\sum \frac{n!}{n!} z^n$.

Propriété 3 (Règle de d'Alembert).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que, à partir d'un certain rang, le coefficient a_n est non nul et qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ tende vers ℓ. Alors, le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut $\frac{1}{\ell}$.

Exercice 5.

1. Reprendre les exemples précédents.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Déteminer le rayon de convergence des séries entières de coefficient

a) $\frac{\sinh(n)}{\cosh(n)^2}$. **b)** $\frac{\sin(\theta/n)}{n!}$.

3. Soit (a_n) la suite définie pour tout n entier naturel par $a_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}$ et $a_{2n+1} = \frac{1}{3^{2n+1}}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et étudier le comportement asymptotique de (a_{n+1}/a_n).

4. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum 2^n \ln(n) z^{2n}$.

I.3 Propriétés algébriques

Théorème 2 (Somme & Produit de Cauchy de séries entières).

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs ρ_a et ρ_b. Pour tout entier naturel n, on pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors,

(i). $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min\{\rho_a, \rho_b\}$.

(ii). $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min\{\rho_a, \rho_b\}$.

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{\rho_a, \rho_b\}$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Exercice 6.

1. Déterminer un exemple où $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence strictement plus grand que le minimum entre ρ_a et ρ_b.

2. Déterminer les rayons de convergence des séries $f(z) = 1 - z$, $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et $f \cdot g$.

3. Monter que $\sum (n+1) z^n$ est un produit de séries entières de rayon de convergence égal à 1 et que son rayon est égal à 1.

II. Séries entières de la variable réelle

Dans toute cette partie, les séries entières sont considérées comme étant de la variable réelle.

II.1 Régularité

Propriété 4 (Convergence normale).

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence ρ. Pour tout $(a,b) \in]-\rho,\rho[^2$ tels que $a < b$, la série entière $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur $[a,b]$.

Exercice 7. Montrer qu'il n'y a pas nécessairement convergence normale sur $[-\rho,\rho]$.

Théorème 3 (Continuité, Primitive, Dérivée).

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $\rho > 0$ et de somme f.

(i). f est continue sur $]-\rho,\rho[$.

(ii). Pour tout segment $[a,b] \subset]-\rho,\rho[$, la fonction f est intégrable sur $[a,b]$.

(iii). Si F est une primitive de f, alors

$$\forall\, x \in]-\rho,\rho[,\ F(x) - F(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

(iv). f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\rho,\rho[$ et

$$\forall\, x \in]-\rho,\rho[,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Exercice 8. Pour tout $x \in]-1,1[$, déterminer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Propriété 5 (Continuité, Admis).

La série de la variable complexe $\sum a_n z^n$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

Propriété 6 (Coefficients & Dérivation).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence non nul et de somme f. Alors, pour tout entier naturel n,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Théorème 4 (Unicité).

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence non nuls. S'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall\, x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

alors pour tout entier naturel n, $a_n = b_n$.

II.2 Développement en série entière au voisinage de 0

Définition 3 (Fonction développable en série entière).

Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{K}$ contenant 0 en son intérieur et $r > 0$. La fonction f est *développable en série entière* sur l'intervalle $]-r, r[$ s'il existe une suite (a_n) telle que

$$\forall\ x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exercice 9. Déterminer la forme du développement en série entière d'une fonction paire (resp. impaire) développable en série entière.

Définition 4 (Série de TAYLOR).

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de I (intervalle contenant 0) dans $\mathbb{R}$. La *série de Taylor* de f (en 0) est $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Théorème 5 (Série entière & Série de TAYLOR).

Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$. Alors, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, sa série de Taylor a un rayon de convergence supérieur à r et f est égale à la somme de sa série de Taylor.

Réciproquement, pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, f est développable en série entière sur $]-r, r[$ si et seulement si elle est la somme de sa série de Taylor, i.e. si et seulement si

$$\forall\ x \in]-r, r[,\ \lim_{N \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 10.

1. Reprendre l'exemple de la fonction exponentielle.

2. La fonction $x \mapsto \exp(-1/x^2)$ est-elle développable en série entière ?

III. Détermination pratique

III.1 Exemples de développements en séries entières

1. a) Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le développement en série entière et le rayon de convergence de $z \mapsto \frac{1}{z-a}$.

b) En déduire le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-2x\cos(\alpha)+x^2}$.

2. Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.

3. Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

4. Soit $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 satisfaite par f, puis en déduire le développement en série entière de f.

III.2 Formulaire

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{e}^z & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} & , \rho = +\infty \\
\sin(x) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , \rho = +\infty \\
\cos(x) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , \rho = +\infty \\
\sinh(x) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , \rho = +\infty \\
\cosh(x) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , \rho = +\infty \\
\frac{1}{1-z} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n & , \rho = 1 \\
\ln(1+x) & = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} & , \rho = 1 \\
(1+x)^\alpha & = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n & , \rho = 1 \\
\arctan(x) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & , \rho = 1 \\
\arcsin(x) & = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} & , \rho = 1.
\end{array}$$

Exercice 11. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}$.

IV. Fonctions génératrices

Notation.

■ Les variables aléatoires sont réelles, discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 5 (Fonction génératrice).

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. La *fonction génératrice* de X est la série entière

$$G_X \ : \ t \mapsto \mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \cdot t^k.$$

Exercice 12.

1. Déterminer les fonctions génératrices d'une variable aléatoire de loi...

a) ... constante presque sûrement.

b) ... de Bernoulli.

c) ... uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

d) ... Binomiale.

e) ... de Poisson.

f) ... géométrique.

2. Montrer que, si X est bornée, alors G_X est une fonction polynomiale.

Propriété 7 (Rayon de convergence).

Le rayon de convergence d'une fonction génératrice est supérieur ou égal à 1.

Propriété 8 (Fonctions génératrices & Loi).

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $t \in [-r, r]$, $G_X(t) = G_Y(t)$. Alors, X et Y suivent la même loi et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left(X = n\right) = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0).$$

Théorème 6 (Espérance & Variance).

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X.

(i). X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1. Alors, $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$.

(ii). X admet une variance finie si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1. Alors, $\mathbb{E}[X(X-1)] = G''_X(1)$.

Exercice 13.

1. Lorsqu'elle existe, exprimer la variance de X en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

2. Reprendre les exemples concernant les lois classiques.

Propriété 9 (Indépendance & Fonction génératrice).

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de fonctions génératrices G_X et G_Y. Alors, $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$.

Exercice 14. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, 2]\!]$ de loi conjointe

$$\mathbb{P}\left(X = 0, Y = 0\right) = \mathbb{P}\left(X = 1, Y = 1\right) = \mathbb{P}\left(X = 2, Y = 2\right) = \frac{1}{9}$$
$$\mathbb{P}\left(X = 0, Y = 2\right) = \mathbb{P}\left(X = 1, Y = 0\right) = \mathbb{P}\left(X = 2, Y = 1\right) = \frac{2}{9}$$
$$\mathbb{P}\left(X = 0, Y = 1\right) = \mathbb{P}\left(X = 1, Y = 2\right) = \mathbb{P}\left(X = 2, Y = 0\right) = 0$$

Déterminer les lois de X et de Y. En déduire les fonctions génératrices G_X, G_Y et G_{X+Y}.

Théorème 7 (Somme de variables aléatoires indépendantes).

(i). Soient $p \in [0, 1]$ et $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires discrètes indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. Alors, $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p).

(ii). Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Alors, $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 15.

1. Soient X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n, p)$ et Y une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(m, p)$. Si X et Y sont indépendantes, déterminer la loi de $X + Y$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(X_k)_{k \in [\![1, n]\!]}$ une suite variables aléatoires indépendantes et de mêmes lois et T une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ indépendante des (X_k).

a) Déterminer la fonction génératrice de $S : \omega \mapsto \sum_{k=1}^{T(\omega)} X_k(\omega)$ en fonction des fonctions génératrices de X_1 et de T.

b) Identité de WALD. Si X_1 et T sont d'espérances finies, montrer que S est d'espérance finie et $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[T]$.

c) Déterminer la valeur moyenne obtenue en sommant le résultat de T lancers de dés, lorsque T suit une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

Un cas particulier du théorème d'ABEL

Exercice 16. Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum a_n x^n$ soit de rayon de convergence R. Pour tout $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose que $\sum a_n R^n$ est convergente, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k R^k$ et S sa limite.

1. Montrer que f est continue sur $]-R, R[$.

2. En considérant une fonction $\widetilde{f}$, montrer que l'on peut se ramener au cas où $R = 1$ sans perdre de généralité.
On supposera dans la suite que $R = 1$.

3. Montrer, pour tout $x \in]-1, 1[$, la relation $f(x) = (1 - x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$.

4. En déduire que f est prolongeable par continuité 1.

Programme officiel (PSI)

Suites et séries - C - Séries entières (p. 16)
Probabilités - B - Variables aléatoires discrètes - c) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Mathématiciens

TAYLOR Brook (18 août 1685 à Edmonton-29 déc. 1731 à Londres).
ALEMBERT Jean Le Rond d' (17 nov. 1717 à Paris-29 oct. 1783 à Paris).
CAUCHY Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).
ABEL Niels Henrik (5 août 1802 à Frindöe-6 avr. 1829 à Froland).
WALD Abraham (31 oct. 1902 à Kolozsvàr-13 déc. 1950 à Travancore).