T.D. V - Séries numériques

I - Calculs de sommes

Exercice 1. (Sommes à étendre) Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{5} 3$.

2. $\sum_{n=3}^{5} 10$.

3. $\sum_{\ell=1}^{7} \ell$.

4. $\sum_{n=3}^{10} (-1)^n$.

5. $\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{2^{2n}}$.

6. $\sum_{n=1}^{4} \frac{3^{2n+1}}{2^{2n}}$.

Exercice 2. (Sommes géométriques) Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=3}^{10} 2^k$.

2. $\sum_{\ell=1}^{5} (3^\ell - 2)$.

3. $\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{2^k}{5^k} + \frac{1}{4^k}\right)$.

4. $\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k+4^k}{5^k}$.

II - Sommes télescopiques

Exercice 3. Pour tout n entier naturel, on pose $w_n = \frac{1}{2^n}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} w_n.$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4. Pour tout n entier naturel, on pose $w_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} w_n.$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5. Pour tout $k \geqslant 1$, on pose $u_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

1. Exprimer u_k en fonction de $\ln(k+1)$ et $\ln(k)$.

2. À l'aide d'une somme télescopique, calculer $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

3. En déduire la nature (et éventuellement la somme) de la série $\sum u_k$.

Exercice 6. Pour tout $k \geqslant 2$, on pose $u_k = \frac{1}{k^3-k}$.

1. Déterminer 3 réels a, b et c tels que

$$\forall\, k \geqslant 2,\ u_k = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

2. En utilisant la linéarité de la somme puis des changements d'indices, calculer $\sum_{k=2}^{n} u_k$.

3. En déduire la nature (et éventuellement la somme) de la série $\sum u_k$.

III - Séries géométriques... et plus

Exercice 7. Vérifier la convergence puis calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k}$.

2. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{5^k}$.

3. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}}$.

4. $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{3^{2\ell+1}}{10^\ell}$.

Exercice 8. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 2 - \alpha + \frac{1}{5^n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha = 2$.

Exercice 9. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \alpha$. Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha = \frac{1}{4}$.

Exercice 10. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = n2^{n-1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $a_n = a_{n+1} - a_n - 2^n$.

2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$.

3. Calculer $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

4. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

Exercice 11. (Série harmonique, ➶) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Exprimer $H_{2n} - H_n$ en fonction d'un seul signe somme.

2. Montrer que $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

3. En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite (H_n) diverge.

4. En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer que (H_n) tend vers $+\infty$.