T.D. X - Réduction

I - Diagonalisation

Solution de l'exercice 1.

1. La matrice A_1 est diagonale, donc diagonalisable.

2. La matrice est A_2 est symétrique réelle donc diagonalisable.

3. La matrice A_3 est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale et sont donc 1, 2 et 3. Comme A_3 est de taille 3 et possède 3 valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

4. La matrice A_4 est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc A_4 possède comme seule valeur propre 2. Ainsi, si A_4 était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $A_4 = P2I_3P^{-1} = 2I_3$. Or, $A \neq 2I_3$. Ainsi, A_4 n'est pas diagonalisable. □

Solution de l'exercice 2.

1. La matrice $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \times 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda \in \{-1, 4\}. \end{aligned}$$

2. La matrice A est de taille 2 et possède deux valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4. Alors,

$$\begin{aligned} AX = 4X & \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 3y & = 4x \\ 2x + 2y & = 4y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -3x + 3y & = 0 \\ 2x - 2y & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & (x, y) \in \text{Vect}\{(1, 1)\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $E_4(A) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. Alors,

$$\begin{aligned} AX = -X & \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 3y & = -x \\ 2x + 2y & = -y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + 3y & = 0 \\ 2x + 3y & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & (x, y) \in \text{Vect}\{(-3, 2)\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

4. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d'après les formules de changement de base,

$$A = PDP^{-1}.$$

□

Solution de l'exercice 3. La matrice $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si

$$\begin{aligned} & (2-\lambda)(-\lambda) - (-1) \times 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\lambda - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda \in \{-1\}. \end{aligned}$$

1. D'après la question précédente, l'unique valeur propre de A est -1. Supposons par l'absurde que A soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice inversible P telle que

$$\begin{aligned} A &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P(-I_2)P^{-1} = -I_2. \end{aligned}$$

Or, $A \neq -I_2$, donc on obtient une contradiction et A n'est pas diagonalisable. □

Solution de l'exercice 4. Soit A diagonalisable dont l'unique valeur propre est λ_0. Alors, il existe une matrice inversible P telle que

$$\begin{aligned} A &= P(\lambda_0 I_n)P^{-1} \\ &= \lambda_0 I_n. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble recherché ne contient qu'un seul élément et vaut $\{\lambda_0 I_n\}$. □

Solution de l'exercice 5.

1. On remarque que

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 4X_1.$$

Comme X_1 est non nul et $AX_1 = 4X_1$, alors X_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

De même,

$$AX_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2X_2.$$

Comme X_2 est non nul et $AX_2 = -2X_2$, alors X_2 est vecteur propre de A associé à la valeur propre -2.

Enfin,

$$AX_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = X_3.$$

Comme X_3 est non nul et $AX_3 = X_3$, alors X_3 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

2. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'après les formules de changement de base,

$$A = PDP^{-1}.$$

□

Solution de l'exercice 6.

1. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rg}(A-\lambda I_3) &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_1 \leftrightarrow L_2} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2+\lambda L_1} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftrightarrow L_2} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftrightarrow L_3-(1-\lambda^2)L_2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Rg}(A-\lambda I_3) < 3 \\
\Leftrightarrow\ & \lambda^3 - 2\lambda = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \lambda(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2}) = 0
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$. Alors,

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 0 \\ x+z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(A) = \mathrm{Ker}(A)$. Alors,

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y &= \sqrt{2}x \\ x+z &= \sqrt{2}y \\ y &= \sqrt{2}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{2}y+z &= 0 \\ -\sqrt{2}x+y &= 0 \\ y-\sqrt{2}z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{2}y+z &= 0 \\ -y+\sqrt{2}z &= 0 \\ y-\sqrt{2}z &= 0 \end{cases} \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2+\sqrt{2}L_1}.$$

Ainsi,

$$E_{\sqrt{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

De manière analogue,

$$E_{-\sqrt{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Finalement, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, alors

$$A = PDP^{-1}.$$

□

II - Réduction & Application

Solution de l'exercice 7.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant des opérations élémentaires,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rg}(A-\lambda I_3) &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_2 \leftrightarrow L_1} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-(2-\lambda)(3-\lambda) & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2-(3-\lambda)L_1} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda^2+5\lambda-7 & 1 \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftrightarrow L_2} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-(-\lambda^2+5\lambda-7)(1-\lambda) \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3-(-\lambda^2+5\lambda-7)L_2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A-\lambda I_3) < 3$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
-\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8 &= 0 \\
-(\lambda-2)^3 &= 0 \\
\lambda &= 2.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique valeur propre de A est 2.

Supposons par l'absurde que A est diagonalisable. Il existe une matrice P inversible telle que $A = P(2I_3)P^{-1} = 2I_3$. On obtient ainsi une contradiction et A n'est pas inversible.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A)$. Alors,

$$\begin{aligned}
& AX = 2X \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 3x-y+z &= 2x \\ x+2y &= 2y \\ y+z &= 2z \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ x &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

3. a) D'après la question précédente, on cherche e_1 tel que $e_1 \in E_2(f)$. On pose donc $e_1 = (0,1,1)$.

b) D'après la définition de f,

$$\begin{aligned}
f(e_2) &= e_1 + 2e_2 \\
(3a-b-1, a+2b, b-1) &= (0,1,1) + 2(a,b,-1).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} 3a-b-1 &= 2a \\ a+2b &= 1+2b \\ b-1 &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b &= 1 \\ a &= 1 \\ b &= 0 \end{cases}$$

On pose ainsi $e_2 = (1,0,-1)$.

c) D'après la définition de f,

$$\begin{aligned}
f(e_3) &= e_2 + 2e_3 \\
(3c-d+2, c+2d, d+2) &= (1,0,-1) + 2(c,d,2).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} 3c-d+2 &= 1+2c \\ c+2d &= 2d \\ d+2 &= -1+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c-d &= -1 \\ c &= 0 \\ d &= 1 \end{cases}$$

On pose ainsi $e_3 = (0,1,2)$.

d) Montrons que (e_1, e_2, e_3) est libre. Soit λ, μ, ν des réels tels que

$$\begin{aligned}
&\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = (0,0,0)\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \mu & = 0 \\ \lambda + \nu & = 0 \\ \lambda - \mu + 2\nu & = 0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \mu & = 0 \\ \lambda + \nu & = 0 \\ \lambda + 2\nu & = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

soit $\lambda = \mu = \nu = 0$.
Ainsi, $\mathscr{B}$ est une famille libre composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}$, espace vectoriel de dimension 3, donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
De plus, d'après les questions précédentes, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = T$.

4. D'après les questions précédentes,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons l'inverse de T en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \\ \end{array}$$

Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $T = 2I_3 + B$.
Comme $2I_3$ et B commutent, d'après la formule du binôme de Newton,

$$T^n = (2I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} B^k.$$

Or, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_3$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} nB + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. En utilisant les formules de changement de base,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$$
$$A = PTP^{-1}.$$

On montre ainsi par récurrence que

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

En utilisant la question précédente et en effectuant un produit matriciel,

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \times 3^n & 1 - 3^n & 3^n - 1 \\ -2(2^n - 3^n) & 2^{n+2} - 3^n - 1 & -2^{n+1} + 3^n + 1 \\ -2(2^n - 3^n) & 2^{n+2} - 3^n - 3 & -2^{n+1} + 3^n + 3 \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. D'après la définition, pour tout n entier naturel, $v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = -1$. Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme -1. Donc,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = -2^n.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible, i.e. $\mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$.

Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -4 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -4 \end{pmatrix} & {\scriptstyle C_2 \leftrightarrow C_3} \\ &= \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & 4 \\ 0 & -2-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} & {\scriptstyle L_2 \leftrightarrow L_3} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$ si et seulement si $\lambda \in \{-3, -2, 2\}$.

3. D'après la question précédente, A possède trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.
En résolvant des systèmes linéaires, on obtient

$$E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$E_{3}(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A = PDP^{-1}$.

4. Montrons par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout n entier naturel.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. D'une part, $A^0 = I_3$. D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= PD^nP^{-1}A, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \text{ d'après la question } \mathbf{3.} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.$$

5. Comme la matrice D est diagonale,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour tout n entier naturel,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

6. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3u_n + 4v_n - w_n \\ 2v_n \\ -4v_n + 2w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= AU_n. \end{aligned}$$

7. Montrons par récurrence que $U_n = A^nU_0$ pour tout n entier naturel.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Comme $A^0 = I_3$, alors $A^0U_0 = I_3U_0 = U_0$. La propriété est donc vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = A^nU_0$. Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n, \text{ d'après la question } \mathbf{6} \\ &= AA^nU_0, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= A^{n+1}U_0, \text{ d'après la définition des puissances} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = A^nU_0.$$

8. En reprenant le résultat de la question **5.**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= A^nU_0 \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n - 2^n + (-2)^n + 2(-3)^n - 2(-2)^n \\ -2^n \\ -(-2)^n + 2^n + 2(-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout n entier naturel,

$$\begin{cases} u_n &= -2^n - (-2)^n - (-3)^{n+1} \\ v_n &= -2^n \\ w_n &= 2^n + (-2)^n \end{cases}$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. On utilise la définition du produit matriciel,

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^3 - 4A^2 + A + 6I_3 &= 0 \\ A^3 - 4A^2 + A &= -6I_3 \\ A\left[-\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I_3)\right] &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I_3).$$

3. On remarque que

$$R(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 8 = 0.$$

En utilisant une division euclidienne, on obtient

$$R(X) = (X-2)(X^2 - 2X - 3).$$

4. On remarque que

$$R(X) = (X-2)(X+1)(X-3).$$

Si λ est une valeur propre de A, il existe un vecteur X non nul tel que

$$\begin{aligned} AX &= \lambda X \\ A^2X &= A(\lambda X) = \lambda^2 X \\ A^3X &= A(A^2X) = \lambda^2 AX = \lambda^3 X. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question **1.**,

$$\begin{aligned} (A^3 - 4A^2 + A + 6I_3)X &= 0_3 X \\ A^3X - 4A^2X + AX + 6X &= 0_{3,1} \\ \lambda^3 X - 4\lambda^2 X + \lambda X + 6X &= 0_{3,1} \\ (\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6)X &= 0_{3,1} \end{aligned}$$

Comme X est non nul, alors $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$, soit $R(\lambda) = 0$.
Ainsi, $\lambda \in \{-1, 2, 3\}$.

5. En résolvant des équations, on obtient

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \\ E_2(A) &= \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \\ E_3(A) &= \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

6. Ainsi, A possède trois valeurs propres distinctes et A est diagonalisable. $\square$