T.D. IV - Variables aléatoires discrètes

I - Lois usuelles finies

Solution de l'exercice 1. Soit $\omega \in \Omega$.
Comme $Y_n(\omega)$ est un produit de réels valant soit 0 soit 1, alors $Y_n(\omega) \in \{0,1\}$. Ainsi, Y_n suit une loi de Bernoulli.
De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y_n = 1) &= \mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^n X_i = 1\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = 1\}\right) \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = 1), \quad \text{car les v.a. sont indépendantes} \\
&= p^n.
\end{aligned}$$

Finalement, $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p^n)$. □

Solution de l'exercice 2. Remarquons que N peut prendre les valeurs $0, 1, \ldots, n$, soit

$$N(\Omega) = [\![0, n]\!].$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N = 0) &= \mathbf{P}(\forall\, i \in [\![1, n]\!], X_i = 1) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = 1\}\right) \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = 1), \quad \text{car les v.a. sont indépendantes} \\
&= \frac{1}{n!} \\
\mathbf{P}(N = k) &= \mathbf{P}(\forall\, i \in [\![1, k-1]\!], X_i = 1 \text{ ET } X_k = 0) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{X_i = 1\} \cap \{X_k = 0\}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}(X_i = 1)\right) \times \mathbf{P}(X_k = 0), \quad \text{car les v.a. sont indépendantes} \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{k-1}{k!}.
\end{aligned}$$

Remarque. En utilisant une somme télescopique, on vérifie que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(N = k) &= \mathbf{P}(N = 0) + \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(N = k) \\
&= \frac{1}{n!} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{n!} + 1 - \frac{1}{n!} = 1.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[N] &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(N=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{k!}\\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}[N] = \mathrm{e}$. □

II - Variables aléatoires finies

Solution de l'exercice 3.

1. En notant α le coefficient de proportionnalité, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$,

$$\mathbf{P}(X=i) = \alpha i.$$

Or, $\sum\limits_{i=1}^{4} \mathbf{P}(X=i) = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\alpha(1+2+3+4) &= 1\\ \alpha &= \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall\, i \in [\![1,4]\!],\, \mathbf{P}(X=i) = \frac{i}{10}.$$

2. D'après la définition de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \sum_{i=1}^{4} i\mathbf{P}(X=i)\\ &= \sum_{i=1}^{4} i \times \frac{i}{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{4} i^2\\ &= \frac{1}{10} \times \frac{4(4+1)(2\times 4+1)}{6} = \frac{4\times 5\times 9}{10\times 6} = 3.\end{aligned}$$

D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[X^2\right] &= \sum_{i=1}^{4} i^2\mathbf{P}(X=i)\\ &= \sum_{i=1}^{4} \frac{i^3}{10} = \frac{1}{10} \times \left(\frac{4(4+1)}{2}\right)^2\\ &= \frac{4^2\times 5^2}{10\times 4} = 10.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = 10 - 3^2 = 1.$$

3. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i}\mathbf{P}(X=i) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} \times \frac{i}{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{4} 1 = \frac{2}{5}.$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. Comme il y a exactement 3 boules noires, la première boule rouge apparaîtra au moins au 4e tirage. Ainsi, $X(\Omega) = \{1,2,3,4\}$.

* La probabilité qu'une boule rouge soit tirée lors du premier tirage est égale à
$$\mathbf{P}(X=1) = \frac{7}{10}.$$
* En utilisant la formule des probabilités composées et en notant N_i (resp. R_i) l'événement « une boule noire (resp. rouge) est tirée au i^{e} tirage »,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=2) &= \mathbf{P}(N_1\cap R_2) = \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}_{N_1}(R_2)\\ &= \frac{3}{10}\times\frac{7}{9} = \frac{7}{30}.\end{aligned}$$
* En utilisant la formule des probabilités composées et les notations précédentes,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=3) &= \mathbf{P}(N_1\cap N_2\cap R_3) = \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}_{N_1}(N_2)\mathbf{P}_{N_1\cap N_2}(R_3)\\ &= \frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8} = \frac{7}{120}.\end{aligned}$$

* En utilisant la formule des probabilités composées et les notations précédentes,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=4) &= \mathbf{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap R_4) \\ &= \mathbf{P}(N_1)\mathbf{P}_{N_1}(N_2)\mathbf{P}_{N_1\cap N_2}(N_3)\mathbf{P}_{N_1\cap N_2\cap N_3}(R_4) \\ &= \frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{7} = \frac{1}{120}.\end{aligned}$$

On peut résumer la loi de X dans le tableau suivant :

k	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X=k)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

2. D'après la définition de l'espérance,

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{4} i\mathbf{P}(X=i) = \frac{7}{10} + 2\frac{7}{30} + 3\frac{7}{120} + 4\frac{1}{120} = \frac{11}{8}.$$

D'après le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \sum_{i=1}^{4} i^2\mathbf{P}(X=i) = \frac{7}{10} + 2^2\frac{7}{30} + 3^2\frac{7}{120} + 4^2\frac{1}{120} = \frac{55}{24}.$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{55}{24} - \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{77}{192}.$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. Le nombre de tirages possibles est $(2n)!$. La position de la première boule impaire est comprise entre 1 et $(n+1)$, soit $(n+1)$ possibilités. Il y a enfin $n!$ façons de disposer les boules paires. Au final,

$$\frac{(n+1)\times n!}{(2n)!} = \frac{(n+1)!}{(2n)!}.$$

2. Le nombre de positions des boules impaires est $\binom{2n}{n}$. Leur ordre est ensuite fixé. Il y a ensuite $n!$ manières de disposer les boules paires. Ainsi,

$$\frac{\binom{2n}{n}n!}{(2n)!} = \frac{1}{n!}.$$

3. D'une part, $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$. Ensuite, sur $\{X=k\}$, il y a $\binom{k-1}{n-1}$ manières de choisir les positions des boules impaires (la dernière étant en position k). Ensuite, il y a $n!$ façons de disposer les boules impaires et $n!$ de disposer les paires. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \sum_{k=n}^{2n} k\frac{(n!)^2\binom{k-1}{n-1}}{(2n)!} \\ &= \frac{n(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n} \\ &= \frac{n(n!)^2}{(2n)!}\binom{2n+1}{n+1} \\ &= \frac{n(2n+1)}{n+1}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 6.

1. D'après la formule du triangle de Pascal, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}\binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{q}\left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right] \\ &= \binom{q+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{q+1}{p+1}.\end{aligned}$$

2. Comme il y a exactement b boules blanches dans l'urne, il faut effectuer au moins b tirages pour pouvoir extraire toutes les boules blanches de l'urne. Ainsi, $X(\omega) = [\![b, n+b]\!]$.
Un tirage consiste en une succession de $n+b$ boules où n sont noires et b sont blanches. Ainsi, un tirage est uniquement déterminé par la position des b boules blanches parmi ces $n+b$ boules, soit un nombre de tirages égal à :

$$\binom{n+b}{b}.$$

Soit $k \in [\![b, n+b]\!]$. Si $X=k$, alors une boule blanche a été tirée au k^{e} tirage et les $b-1$ autres boules blanches ont été tirées lors des $k-1$ tirages précédents. Les boules rouges sont alors réparties sur les autres tirages. Le nombre de tirages où la dernière boule blanche tirée l'est lors du k^{e} tirage est donc égal à :

$$\binom{k-1}{b-1}.$$

Finalement,

$$\mathbf{P}(X=k)=\frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}.$$

Remarque. En utilisant la première question,

$$\sum_{k=b}^{n+b}\binom{k-1}{b-1}=\sum_{k=b-1}^{n+b-1}\binom{k}{b-1}=\binom{n+b}{b}.$$

Ainsi, $\sum_{k=b}^{n+b}\mathbf{P}(X=k)=1$.

En utilisant la formule du capitaine, la première question, ainsi que la définition de l'espérance,

$$\sum_{k=b}^{n+b}k\binom{k-1}{b-1}=b\sum_{k=b}^{n+b}\binom{k}{b}=b\binom{n+b+1}{b+1}.$$

Ainsi, $\mathbf{E}[X]=\frac{b(n+b+1)}{b+1}$.

Concernant la variance, en utilisant deux fois la formule du capitaine,

$$\begin{aligned}
\binom{n+b}{b}\mathbf{E}\left[X^2\right] &= \sum_{k=b}^{n+b}k^2\binom{k-1}{b-1}\\
&= b\sum_{k=b}^{n+b}k\binom{k}{b}\\
&= b(b+1)\sum_{k=b}^{n+b}\binom{k+1}{b+1}-b\sum_{k=b}^{n+b}\binom{k}{b}\\
&= b(b+1)\binom{n+b+2}{b+2}-b\binom{n+b+1}{b+1}\\
&= \binom{n+b+1}{b+1}b\frac{n(b+1)+b(b+2)}{b+2}\\
\mathbf{E}\left[X^2\right] &= b\cdot\frac{n+b+1}{(b+1)(b+2)}[n(b+1)+b(b+2)]\\
\mathbf{V}(X) &= \frac{bn(n+b+1)}{(b+1)^2(b+2)}.
\end{aligned}$$

□

III - Lois usuelles infinies

Solution de l'exercice 7.

1. Les tirages étant effectués avec remise, à chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule rouge est égale à $\frac{7}{10}$.
Ainsi, l'expérience est une suite d'expériences de Bernoulli de probabilité de succès égale à $\frac{7}{10}$. Comme X est égale au rang du premier succès, alors

$$X\hookrightarrow\mathscr{G}\left(\frac{7}{10}\right).$$

2. En utilisant les propriétés des lois géométriques,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \frac{1}{\frac{7}{10}}=\frac{10}{7}\\
\mathbf{V}(X) &= \frac{1-\frac{7}{10}}{\left(\frac{7}{10}\right)^2}=\frac{3}{10}\times\frac{10^2}{7^2}=\frac{30}{49}.
\end{aligned}$$

$\square$

Solution de l'exercice 8.

1. Ici, $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Ainsi, on explicite les événements :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S=2) &= \mathbf{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}\\
\mathbf{P}(S=3) &= \mathbf{P}(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}\\
\mathbf{P}(S=4) &= \mathbf{P}(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}\\
\mathbf{P}(S=5) &= \mathbf{P}(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}\\
\mathbf{P}(S=6) &= \mathbf{P}(\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}) = \frac{5}{36}\\
\mathbf{P}(S=7) &= \mathbf{P}(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\\
\mathbf{P}(S=8) &= \mathbf{P}(\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}) = \frac{5}{36}\\
\mathbf{P}(S=9) &= \mathbf{P}(\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}\\
\mathbf{P}(S=10) &= \mathbf{P}(\{(4,6),(5,5),(6,4)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}\\
\mathbf{P}(S=11) &= \mathbf{P}(\{(5,6),(6,5)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}\\
\mathbf{P}(S=12) &= \mathbf{P}(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

2. L'expérience est une suite d'expériences de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $\frac{1}{6}$. Comme T est l'instant de premier succès, alors

$$T \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{6}\right).$$

D'après les résultats sur les lois géométriques,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[T] &= \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6,\\
\mathbf{V}(T) &= \frac{1-\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{5}{6} \times 6^2 = 30.
\end{aligned}$$

$\square$

Solution de l'exercice 9.

1. On utilise une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(Y=k) = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-(k+1)}\right) = \mathrm{e}^{-0} - \mathrm{e}^{-(n+1)}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(Y=k) = 1.$$

2. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, alors $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
D'après les définitions, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z=k) &= \mathbf{P}(Y+1=k) = \mathbf{P}(Y=k-1)\\
&= \mathrm{e}^{-(k-1)} - \mathrm{e}^{-(k-1+1)} = \mathrm{e}^{-k+1} - \mathrm{e}^{-k}\\
&= \mathrm{e}^{-(k-1)}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) = \left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathscr{G}(1-\mathrm{e}^{-1})$.

En utilisant les résultats sur les lois géométriques,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Z] &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},\\
\mathbf{V}(Z) &= \frac{\mathrm{e}^{-1}}{(1-\mathrm{e}^{-1})^2} = \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}.
\end{aligned}$$

3. En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[Z-1] = \mathbf{E}[Z] - 1 = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}-1}.$$

En utilisant les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(Z-1) = \mathbf{V}(Z) = \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}.$$

4. Comme M est de taille 2, la matrice M est inversible si et seulement si $1 \times Y - 1 \times 0 \neq 0$. Ainsi, la probabilité que M soit inversible vaut

$$\mathbf{P}(Y \neq 0) = 1 - \mathbf{P}(Y=0) = 1 - \left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}.$$

□

Solution de l'exercice 10.

1. Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}[X > n-1] &= \bigcup_{k=n}^{+\infty} [X = k] \\ &= [X = n] \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [X = k] \right) \\ &= [X = n] \cup [X > n].\end{aligned}$$

2. En utilisant la question précédente, les événements étant disjoints,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > n-1) &= \mathbf{P}(X = n) + \mathbf{P}(X > n) \\ u_{n-1} &= \mathbf{P}(X = n) + u_n \\ u_{n-1} - u_n &= \mathbf{P}(X = n).\end{aligned}$$

3. En utilisant la définition des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) &= \frac{\mathbf{P}([X > n] \cap [X > n-1])}{\mathbf{P}([X > n-1])} \\ &= \frac{\mathbf{P}([X > n])}{\mathbf{P}([X > n-1])}, \text{ car } [X > n] \subset [X > n+1] \\ &= \frac{\mathbf{P}([X > n-1]) - \mathbf{P}([X = n])}{\mathbf{P}([X > n-1])}, \text{ d'après la question } \mathbf{3.} \\ &= 1 - \mathbf{P}_{[X>n-1]}([X = n]).\end{aligned}$$

4. En utilisant l'hypothèse et la question précédente,

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, d'après la définition des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) &= \frac{1}{3} \\ \frac{\mathbf{P}([X > n] \cap [X > n-1])}{\mathbf{P}([X > n-1])} &= \frac{1}{3} \\ \frac{\mathbf{P}([X > n])}{\mathbf{P}([X > n-1])} &= \frac{1}{3} \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} &= \frac{1}{3} \\ u_n &= \frac{1}{3} u_{n-1}.\end{aligned}$$

5. Comme la suite (u_n) est une suite géométrique,

$$u_n = u_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \mathbf{P}(X > 0) \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

6. En utilisant la question **2.**,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = n) = u_{n-1} - u_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{2}{3}\right)$.

7. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. L'événement $\{U_p = i\}$ est un succès dans une expérience de Bernoulli de probabilité de succès égale à $\frac{1}{n}$. La variable aléatoire $X_{i,m}$ compte le nombre de succès lors d'une suite de m expériences de Bernoulli indépendantes, donc $X_{i,m}$ suit une loi binomiale de paramètres m et $1/n$.

2. En utilisant un système complet d'événements puis en remarquant que $\{X_{i,m} = j\} = \emptyset$ dès que $m < j$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_i = j) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_i = j, N = m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_{i,m} = j, N = m) \\ &= \sum_{m=j}^{+\infty} \binom{m}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-j} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \\ &= e^{\lambda/n} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^j \frac{1}{j!}.\end{aligned}$$

Ainsi, Y_i suit une loi de Poisson de paramètre λ/n. □

Solution de l'exercice 12.

1. Comme X est le nombre de succès dans une expérience de Bernoulli de probabilité de succès égale à $\frac{1}{12}$, alors

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(60, 1/12).$$

2. Comme $\mathbf{E}[X] = 60 \times \frac{1}{12} = 5$, alors $\mathbf{E}[Z] = 5$ et Z suite une loi de Poisson de paramètre 5.
En utilisant la table précédente,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq \mathbf{P}(Z \leqslant 3) &= \mathbf{P}(Z = 0) + \mathbf{P}(Z = 1) + \mathbf{P}(Z = 2) + \mathbf{P}(Z = 3) \\ &\simeq 0{,}006 + 0{,}034 + 0{,}084 + 0{,}140 \\ &\simeq 0{,}264.\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des probabilités,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \geqslant 4) &= 1 - \mathbf{P}(X < 4) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 3) \\ &\simeq 1 - 0{,}264 \\ &\simeq 0{,}736.\end{aligned}$$

□

IV - Variables aléatoires infinies

Solution de l'exercice 13.

1. Le premier saut est réalisé avec probabilité 1 donc il est nécessairement réussi. Le numéro du premier saut raté est donc supérieur ou égal à 2 et le numéro du dernier saut réussi est donc supérieur ou égal à 1. Ainsi, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $n \geqslant 1$. Si $X(\omega) = n$, alors les n permiers sauts ont été réussis et le $(n+1)^{\mathrm{e}}$ a échoué. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = n) &= 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{n+1-1}{n+1} \\ &= \frac{n}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant une somme télescopique,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}(X = n) &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(N+1)!}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{P}(X = n) = 1.$$

2. En utilisant la loi obtenue précédemment et la définition de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} \\ &= \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{(\ell-1)^2}{\ell!} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(\ell-1)^2}{\ell!}.\end{aligned}$$

Rappelons que si $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= 1,\\
\mathbf{V}(Y) &= 1\\
\mathbf{E}\left[(Y-\mathbf{E}[Y])^2\right] &= 1\\
\mathbf{E}\left[(Y-1)^2\right] &= 1\\
\sum_{\ell=0}^{+\infty}(\ell-1)^2\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\ell!} &= 1\\
\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(\ell-1)^2}{\ell!} &= \mathrm{e}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(\ell-1)^2}{\ell!} - \frac{(0-1)^2}{0!}\\
&= \mathrm{e}-1.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 14.

1. On remarque que

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. En utilisant une somme télescopique,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \frac{1}{1}-\frac{1}{N+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P}(X=k)=1$.

3. D'après les définitions,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=0)+\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k) &= 1\\
\mathbf{P}(X=0)+1 &= 1\\
\mathbf{P}(X=0) &= 0.
\end{aligned}$$

4. En utilisant les propriétés des probabilités,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X>n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant une somme télescopique,

$$\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{N+1}.$$

Ainsi, $\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{n+1}$ et

$$\mathbf{P}(X>n)=\frac{1}{n+1}.$$

□

V - Fonctions de répartition

Solution de l'exercice 15.

1. Soit $\omega\in\Omega$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\max\{X(\omega),Y(\omega)\}\leqslant x\\
\Leftrightarrow\ & X(\omega)\leqslant x \text{ et } Y(\omega)\leqslant x.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$[\max\{X,Y\} \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x].$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{P}(X \leqslant x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \mathbf{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{\ell=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} (1-p)^{\ell} = p\frac{1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}}{1-(1-p)} \\ &= 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}. \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition et la question précédente,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}(Z \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}(\max\{X,Y\} \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]) \\ &= \mathbf{P}([X \leqslant x]) \times \mathbf{P}([Y \leqslant x]), \text{ par indépendance} \\ &= F(x)G(x). \end{aligned}$$

4. En utilisant les calculs précédents,

$$F_Z(x) = \left(1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}\right)\left(1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}\right) = \left(1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}\right)^2.$$

Ainsi, comme $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = k) &= \mathbf{P}(Z \leqslant k) - \mathbf{P}(Z \leqslant k-1) \\ &= \left(1-(1-p)^k\right)^2 - \left(1-(1-p)^{k-1}\right)^2. \end{aligned}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$[\min\{X,Y\} > x] = [X > x] \cap [Y > x].$$

Ainsi, en utilisant l'événement complémentaire,

$$\begin{aligned} F_W(x) &= \mathbf{P}(\min\{X,Y\} \leqslant x) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\min\{X,Y\} > x) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X > x] \cap [Y > x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}(X > x) \times \mathbf{P}(Y > x), \text{ par indépendance} \\ &= 1 - (1-\mathbf{P}(X \leqslant x)) \times (1 - \mathbf{P}(Y \leqslant x)) \\ &= 1 - (1-F(x))(1-G(x)). \end{aligned}$$

6. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} F_W(x) &= 1 - \left(1-\left(1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}\right)\right) \times \left(1-\left(1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}\right)\right) \\ &= 1-(1-p)^{2\lfloor x \rfloor}. \end{aligned}$$

Comme $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W = k) &= \mathbf{P}(W \leqslant k) - \mathbf{P}(W \leqslant k-1) \\ &= 1-(1-p)^{2k} - \left(1-(1-p)^{2(k-1)}\right) \\ &= \left[(1-p)^2\right]^{k-1}(1-(1-p)^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $W \hookrightarrow \mathscr{G}(1-(1-p)^2)$. □

Solution de l'exercice 16.

1. D'après la définition, $F(x) = \mathbf{P}([X \leqslant x])$. Comme une probabilité est à valeurs dans $[0,1]$, alors $F(x) \in [0,1]$.

2. Soient $x \leqslant y$.
Soit $\omega \in \Omega$. Si $X(\omega) \leqslant x$, alors $X(\omega) \leqslant y$. Ainsi,

$$\begin{gathered} [X \leqslant x] \subset [X \leqslant y] \\ \mathbf{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbf{P}(X \leqslant y) \\ F(x) \leqslant F(y). \end{gathered}$$

Ainsi, F est croissante.

3. Soit $x < x_1$. Alors, $[X \leqslant x] = \emptyset$ et $F(x) = 0$. Ainsi, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
Soit $x \geqslant x_p$. Alors, $[X \geqslant x_p] = 1$ et $F(x) = 1$. Ainsi, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

4. D'après le raisonnement de la partie précédente, F est constante, donc continue, sur $]-\infty, x_1[$ et sur $]x_p, +\infty[$.
Soit $x \in [x_i, x_{i+1}[$. Alors,

$$\begin{aligned}[X \leqslant x] &= \bigsqcup_{k=1}^{i} [X = x_k] = [X \leqslant x_i] \\ \mathbf{P}(X \leqslant x) &= \mathbf{P}(X \leqslant x_i) \\ F(x) &= F(x_i).\end{aligned}$$

Ainsi, F est constante donc continue sur $[x_i, x_{i+1}[$.
Alors,

$$\begin{aligned}F(x_i^+) - F(x_i^-) = F(x_i) - F(x_{i-1}) &= \sum_{k=1}^{i} \mathbf{P}(X = x_k) - \sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{P}(X = x_k) \\ &= \mathbf{P}(X = x_i).\end{aligned}$$

Ainsi, F est continue sauf en tout point où $\mathbf{P}(X = x_i) \neq 0$. □

VI - Lois jointes

Solution de l'exercice 17.

1. Comme la somme des probabilités vaut 1, alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + p + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} &= 1 \\ 1 + p &= 1 \\ p &= 0.\end{aligned}$$

2. On complète le tableau précédent :

$x \backslash y$	1	2	3	4	$\mathbf{P}(X = x)$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

Comme $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1/4)$, alors

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{4}.$$

De plus, d'après la loi de Y obtenue ci-dessus,

$$\mathbf{E}[Y] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} = 2.$$

3. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X=1]}([Y = 1]) &= \frac{\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1])}{\mathbf{P}([X = 1])} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0, \\ \mathbf{P}_{[X=1]}([Y = 2]) &= \frac{\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 2])}{\mathbf{P}([X = 1])} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0, \\ \mathbf{P}_{[X=1]}([Y = 3]) &= \frac{\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 3])}{\mathbf{P}([X = 1])} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \\ \mathbf{P}_{[X=1]}([Y = 4]) &= \frac{\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 4])}{\mathbf{P}([X = 1])} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On peut donc résumer la loi de Y sachant $[X = 1]$ dans le tableau suivant :

k	3	4
$\mathbf{P}_{[X=1]}([Y = k])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4. On remarque que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) &= 0 \\ \mathbf{P}(X = 1) \times \mathbf{P}(Y = 1) &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \neq 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) \neq \mathbf{P}(X = 1) \times \mathbf{P}(Y = 1)$$

et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

5. D'après les propriétés des probabilités,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X = 0] \cup [Y = 1]) &= \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(Y = 1) - \mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

6. En utlisant la définition,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[XY] &= 0\times 1\times\frac{1}{2}+0\times 2\times\frac{1}{8}+0\times 3\times\frac{1}{8}+0\times 4\times 0+\cdots\\ &\quad\cdots+1\times 1\times 0+1\times 2\times 0+1\times 3\times\frac{1}{8}+1\times 4\times\frac{1}{8}\\ &=\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la question **1.**,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbf{E}[XY]-\mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y]\\ &=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\times 2=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

7. Comme $X\hookrightarrow\mathscr{B}(1/4)$, alors

$$\mathbf{V}(X)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}.$$

D'après le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}\left[Y^2\right]=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{8}=\frac{21}{4}.$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(Y)=\mathbf{E}\left[Y^2\right]-\mathbf{E}[Y]^2=\frac{21}{4}-2^2=\frac{5}{4}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\,\mathbf{V}(Y)}}\\ &=\frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{5}{4}}}=\sqrt{\frac{3}{5}}.\end{aligned}$$

8. En utilisant la linéarité de la covariance par rapport à son premier argument,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+Y,X) &= \mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbf{V}(X)+\mathrm{Cov}(X,Y)\\ &=\frac{3}{16}+\frac{3}{8}=\frac{9}{16}.\end{aligned}$$

En utlisant la symétrie de la covariance,

$$\mathrm{Cov}(X,X+Y)=\mathrm{Cov}(X+Y,X)=\frac{9}{16}.$$

En utilisant la linéarité de la covariance par rapport à son premier argument,

$$\mathrm{Cov}(2X,X)=2\mathrm{Cov}(X,X)=2\mathbf{V}(X)=2\times\frac{3}{16}=\frac{3}{8}.$$

En utilisant la variance d'une somme,

$$\mathbf{V}(X+Y)=\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{3}{16}+\frac{5}{4}+2\frac{3}{8}=\frac{35}{16}.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. En fonction des valeurs obtenues pour chacun des lancers, les valeurs obtenues par le couple (X,Y) sont

$$\{(i,j),\ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant 6\}.$$

2. Si $X=1$, la plus grande valeur renvoyée est 1, donc les deux dés ont renvoyé la valeur 1. Ainsi,

$$[X=1]=\{(1,1)\}.$$

En utilisant l'équiprobabilité des lancers,

$$\mathbf{P}(X=1)=\frac{1}{36}.$$

3. Si $Y=1$, alors un des deux dés a renvoyé 1 :

$$[Y=1]=\{(1,1),(1,i),(j,1),\ 2\leqslant i,\ j\leqslant 6\}.$$

Comme $|[Y=1]|=11$, en utilisant l'équiprobabilité,

$$\mathbf{P}([Y=1])=\frac{11}{36}.$$

4. Si le plus petit et le plus grand des résultats obtenus vaut 1, alors les deux lancers ont renvoyé 1. Ainsi,

$$[X = 1] \cap [Y = 1] = \{(1,1)\}.$$

D'où,

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{36}.$$

5. Comme $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) \neq \mathbf{P}(X = 1)\,\mathbf{P}(Y = 1)$, alors X et Y ne sont pas indépendantes. □

Solution de l'exercice 19. Comme R compte le nombre de changements entre deux lancers successifs, alors

$$R = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} I_j.$$

De plus, I_j vaut soit 0 soit 1, donc I_j suit une loi de Bernoulli. Elle vaut 1 si deux lancers successifs donnent des valeurs différentes, soit

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(I_j = 1) &= \mathbf{P}(\{PF, FP\}) = \mathbf{P}(\{PF\}) + \mathbf{P}(\{FP\})\\ &= p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p).\end{aligned}$$

Ainsi, $I_j \sim \mathscr{B}(2p(1-p))$ et $\mathbf{E}[I_j] = 2p(1-p)$.
D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[R] = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{E}[I_j] = 1 + 2(n-1)p(1-p).$$

Soient $1 \leqslant j < k \leqslant n-1$.

* Si $k \geqslant j+2$, alors I_j dépend des j^{e} et $(j+1)^{\text{e}}$ lancers alors que I_k dépend des k^{e} et $(k+1)^{\text{e}}$ lancers. Comme $k > j+2$, alors tous ces lancers sont indépendants donc I_j et I_k sont indépendantes. Ainsi,
$$\mathrm{Cov}(I_j, I_k) = 0.$$
* Si $k = j+1$, alors $I_j I_k = I_j I_{j+1}$ prend les valeurs 0 et 1 donc suit une loi de Bernoulli. De plus, $I_j I_{j+1}$ vaut 1 si I_j et I_{j+1} valent 1 c'est-à-dire si les j^{e}, $(j+1)^{\text{e}}$ et $(j+2)^{\text{e}}$ lancers sont tous distincts. Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathbf{E}[I_j I_{j+1}] &= \mathbf{P}(I_j I_{j+1} = 1)\\ &= \mathbf{P}(\{PFP\} \sqcup \{FPF\})\\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p\\ &= p(1-p).\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(I_j, I_{j+1}) &= \mathbf{E}[I_j I_{j+1}] - \mathbf{E}[I_j]\,\mathbf{E}[I_{j+1}]\\ &= p(1-p) - (2p(1-p))^2\\ &= p(1-p)(1-4p(1-p)).\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la formule sur la variance d'une somme,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(R) &= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{V}(I_j) + 2 \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n-1} \mathrm{Cov}(I_j, I_k)\\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{V}(I_j) + 2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant n-2} \mathrm{Cov}(I_j, I_{j+1}) + 0\\ &= (n-1)2p(1-p)(1-2p(1-p)) + 2(n-2)p(1-p)(1-4p(1-p))\\ &= 2p(1-p)\left[n-1-2(n-1)p(1-p) + n-2-4(n-2)p(1-p)\right]\\ &= 2p(1-p)\left[2n-3-2p(1-p)(n-1+2n-4)\right]\\ &= 2p(1-p)\left[2n-3-2p(1-p)(3n-5)\right].\end{aligned}$$

□