

## T.D. IV - Variables aléatoires discrètes finies

### I - Lois usuelles

**Exercice 1.** Une urne contient 4 boules, indistinguables au toucher, numérotées de 1 à 4. On tire aléatoirement une boule dans l'urne et on note  $X$  son numéro.

Reconnaitre la loi de la variable aléatoire  $X$  puis donner l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 2.** On dispose d'un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. Le dé est lancé et on note  $X$  la valeur du nombre obtenu.

Reconnaitre la loi de la variable aléatoire  $X$  puis donner l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 3.** On dispose d'un jeton à 2 faces. Sur l'une des faces est inscrit un 0 et sur l'autre face est inscrit un 1. La probabilité que, lors d'un lancer, la face contenant 1 soit visible est égale à  $\frac{2}{3}$ . On note  $X$  le nombre qui apparaît quand on lance le jeton.

1. Reconnaitre la loi de  $X$  puis donner l'espérance et la variance de  $X$ .

Le jeton est lancé successivement 5 fois. On note  $Y$  le nombre de 1 qui sont apparus au cours de ces lancers.

2. Reconnaitre la loi de  $Y$  puis donner l'espérance et la variance de  $Y$ .

**Exercice 4.** Une entreprise fabrique en série des ampoules. 5% des ampoules présentent un défaut et sont inutilisables. On prélève une ampoule du stock et on note  $X$  son état : 0 si elle est défectueuse, 1 si elle fonctionne.

1. Reconnaitre la loi de  $X$  puis donner l'espérance et la variance de  $X$ .

On prélève maintenant 30 ampoules du stock. On note  $Y$  le nombre d'ampoules défectueuses.

2. Reconnaitre la loi de  $Y$  puis donner l'espérance et la variance de  $Y$ .

**Exercice 5.** Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires, indistinguables au toucher. On tire, successivement et avec remise, 4 boules de l'urne. On note  $X$  le nombre de boules noires tirées.

Reconnaitre la loi de  $X$  puis donner l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 6.** Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires, indistinguables au toucher. On tire, successivement et avec remise, 5 boules de l'urne. On note  $X$  le nombre de boules rouges tirées.

Reconnaitre la loi de  $X$  puis donner l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 7.** Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2 et 2, indistinguables au toucher. On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne. On note  $X$  le nombre de boules numérotées 1 obtenues.

Reconnaitre la loi de  $X$  puis donner l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 8.** Un dé équilibré à 12 faces est lancé successivement 5 fois. On note  $X$  le nombre de 1 obtenus au cours de ces lancers.

Reconnaitre la loi de  $X$  puis donner l'espérance et la variance de  $X$ .

### II - Calculs de lois

**Exercice 9.** Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2 et 4, indistinguables au toucher. On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne. On note  $X$  la somme des numéros des boules obtenues.

Déterminer la loi de  $X$  puis calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 10.** Une pièce de monnaie renvoie Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$  et Face avec probabilité  $\frac{2}{3}$ . Un joueur joue contre son banquier. Si le lancer renvoie Face, le joueur gagne 10€. Si le lancer renvoie Pile, il perd 5€. On note  $S$  la somme que le joueur a remportée au cours de 3 lancers successifs (cette somme peut être négative).

1. Déterminer la loi de  $S$ .

2. Calculer l'espérance et la variance de  $S$ .

**Exercice 11.** On considère la variable aléatoire  $X$  dont la loi est donnée par :

$k$	-2	-1	0	3
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

On pose  $Y = X^2$ .

1. Déterminer la loi de  $Y$ .
2. Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .
3. Déterminer l'espérance et la variance de  $Y$ .

**Exercice 12.** On considère la variable aléatoire  $X$  dont la loi est donnée par :

$k$	0	1	4	9
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

On pose  $Y = \sqrt{X}$ .

1. Déterminer la loi de  $Y$ .
2. Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .
3. Déterminer l'espérance et la variance de  $Y$ .

**Exercice 13.** On considère la variable aléatoire  $X$  dont la loi est donnée par :

$k$	1	2	3	4	5
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

On pose  $Y = |X - 3|$ .

1. Déterminer la loi de  $Y$  puis l'espérance de  $Y$ .
2. Calculer directement l'espérance de  $Y$  à l'aide du théorème de transfert.

**Exercice 14.** On considère la variable aléatoire  $X$  dont la loi est donnée par :

$k$	-1	0	1	2	3
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

On pose  $Y = |X - 1|$ .

1. Déterminer la loi de  $Y$  puis l'espérance de  $Y$ .
2. Calculer directement l'espérance de  $Y$  à l'aide du théorème de transfert.

### III - Espérance & Variance sans calcul de loi

**Exercice 15.** Un dé équilibré à 12 faces est lancé successivement 30 fois. Les lancers sont supposés indépendants. On note  $X_i$  le résultat obtenu lors du  $i^{\text{e}}$  lancer,  $S = \sum_{i=1}^{30} X_i$  la somme des valeurs obtenues et  $P = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{30}$  leur produit.

1. Calculer l'espérance et la variance de  $S$ .
2. Calculer l'espérance de  $P$ .

**Exercice 16.** Une pièce de monnaie renvoie Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$  et Face avec probabilité  $\frac{2}{3}$ . Un joueur joue contre son banquier. Si le lancer renvoie Face, le joueur gagne 10€. Si le lancer renvoie Pile, il perd 5€. La pièce est lancée successivement 50 fois. On note  $X_i$  la somme (éventuellement négative) empochée par le joueur lors du  $i^{\text{e}}$  lancer,  $S = \sum_{i=1}^{50} X_i$  la somme finalement accumulée par le joueur et  $P = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{50}$  leur produit.

1. Calculer l'espérance et la variance de  $S$ .
2. Calculer l'espérance de  $P$ .

### IV - Lois de couple

**Exercice 17.** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

$x \backslash y$	1	2	3	4
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Compléter la case vide.
2. Déterminer les lois marginales du couple  $(X, Y)$ . En déduire  $\mathbf{E}[X]$  et  $\mathbf{E}[Y]$ .
3. Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = 1]$ .

4. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
5. Calculer  $\mathbf{P}([X = 0] \cup [Y = 1])$ .
6. Calculer la covariance de  $X$  et de  $Y$ .
7. Calculer  $\mathbf{V}(X)$  et  $\mathbf{V}(Y)$ . En déduire  $\rho(X, Y)$ .
8. Calculer  $\text{Cov}(X + Y, X)$ ,  $\text{Cov}(X, X + Y)$  et  $\text{Cov}(2X, X)$ .

**Exercice 18.** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

$x \backslash y$	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
1		0	$\frac{1}{8}$

1. Compléter la case vide.
2. Déterminer les lois marginales du couple  $(X, Y)$ . En déduire  $\mathbf{E}[X]$  et  $\mathbf{E}[Y]$ .
3. Déterminer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = 3]$ .
4. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
5. Calculer  $\mathbf{P}([X = 1] \cup [Y = 1])$ .
6. Calculer la covariance de  $X$  et de  $Y$ .
7. Calculer  $\mathbf{V}(X)$  et  $\mathbf{V}(Y)$ . En déduire  $\rho(X, Y)$ .
8. Calculer  $\text{Cov}(X + Y, X)$ ,  $\text{Cov}(X, X + Y)$  et  $\text{Cov}(2X, X)$ .

**Exercice 19.** On lance 2 fois un dé équilibré à 6 faces. On note  $X$  le plus grand des résultats obtenus et  $Y$  le plus petit.

1. Décrire l'ensemble des valeurs prises par  $(X, Y)$ .
2. Décrire l'événement  $[X = 1]$  puis calculer  $\mathbf{P}([X = 1])$ .
3. Décrire l'événement  $[Y = 1]$  puis calculer  $\mathbf{P}([Y = 1])$ .
4. Décrire l'événement  $[X = 1] \cap [Y = 1]$  puis calculer  $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$ .
5. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 20.** Une grenouille est sur la première marche d'un escalier comportant 5 marches :

- \* si la grenouille est sur la marche du bas, elle saute sur la deuxième marche.
- \* si la grenouille est sur la marche du haut, elle se repose.
- \* si la grenouille est sur une marche intermédiaire, elle tente de gober une mouche. Elle a une probabilité égale à  $\frac{1}{3}$  de réussir. Si elle gobe la mouche, elle monte 2 marches d'un coup (si c'est possible) ! Sinon, elle ne monte qu'une seule marche.

On note  $X$  le nombre de sauts nécessaires pour arriver en haut de l'escalier et  $Y$  le nombre de fois où elle n'a sauté qu'une seule marche.

1. Décrire, à l'aide d'un arbre, l'ensemble des expériences possibles.
2. Décrire l'événement  $[X = 4]$  puis calculer  $\mathbf{P}([X = 4])$ .
3. Décrire l'événement  $[Y = 2]$  puis calculer  $\mathbf{P}([Y = 2])$ .
4. Décrire l'événement  $[X = 4] \cap [Y = 2]$  puis calculer  $\mathbf{P}([X = 4] \cap [Y = 2])$ .
5. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 21.** On lance successivement une pièce équilibrée 4 fois. On note  $X$  le nombre de changements de résultats de la pièce. Par exemple, si les lancers renvoient...

...  $PPFP$ , alors  $X(PPFP) = 2$ .

...  $FFFF$ , alors  $X(FFFF) = 0$ .

...  $PFPP$ , alors  $X(PFPP) = 3$ .

On note  $Y$  le nombre de Pile obtenus au cours des 4 lancers.

1. Donner la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.
3. Calculer la covariance de  $X$  et de  $Y$ .
4. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
5. Calculer  $\rho(X, Y)$ .
6. Calculer  $\mathbf{E}[X + Y]$ ,  $\mathbf{V}(X + Y)$  et  $\mathbf{V}(X - Y)$ .

**Exercice 22.** On considère une urne contenant 3 boules numérotées 1, 1 et 2. On réalise successivement et sans remise 2 tirages dans l'urne. On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du premier

tirage et  $Y$  la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du second tirage.

1. Déterminer la loi de  $(X, Y)$ .
2. Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ .
3. Calculer  $\mathbf{E}[X]$  et  $\mathbf{E}[Y]$ .
4. Calculer  $\mathbf{E}[XY]$  et en déduire la covariance de  $X$  et de  $Y$ .
5. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
6. Calculer  $\rho(X, Y)$ .
7. Calculer  $\mathbf{E}[X + Y]$ ,  $\mathbf{V}(X + Y)$  et  $\mathbf{V}(X - Y)$ .