T.D. VIII - Intégration

I - Calculs d'intégrales

Solution de l'exercice 1.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\int^x f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int^x t\,\mathrm{d}t + \int^x 5\,\mathrm{d}t - \int^x \frac{4}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + C.$$

2. La fonction est continue sur $]-\infty, -\sqrt[3]{2}[$ et sur $]-\sqrt[3]{2}, +\infty[$. On reconnaît une expression de la forme $u'(x)u(x)^{-3}$, où $u(x) = x^3 + 2$. Ainsi,

$$\int^x f_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{8}{-6}\int^x (-2)\times 3t^2(t^3+2)^{-3}\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{3}(x^3+8)^{-2} + C.$$

3. La fonction est continue sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. On reconnaît une expression de la forme $u'(x)u(x)^{1/2}$, où $u(x) = 1 - 2x^2$. Ainsi,

$$\int^x f_3(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\int^x \left(\frac{3}{2}\right)(-4t)\sqrt{1-2t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{(1-2x^2)^{3/2}}{6} + C.$$

4. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. On reconnaît une expression de la forme $u'(x)u(x)^3$, où $u(x) = 1 + \mathrm{e}^x$. Ainsi,

$$\int^x f_4(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int^x 4\,\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)^3\,\mathrm{d}t = \frac{(1+\mathrm{e}^x)^4}{4} + C.$$

5. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. On reconnaît une expression de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi,

$$\int^x f_5(t)\,\mathrm{d}t = \ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) + C.$$

La fonction f_5 est appelée tangente hyperbolique.

6. La fonction est continue sur $]0, +\infty[$. On reconnaît une expression de la forme $u'(x)u(x)$, où $u(x) = \ln(x)$. Ainsi,

$$f_6(x) = \frac{1}{2}\int^x 2\frac{1}{t}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C.$$

7. La fonction est continue sur $]0, +\infty[$. On reconnaît une expression de la forme $u'(x)u(x)^{27}$, où $u(x) = \ln(x)$. Ainsi,

$$f_7(x) = \frac{1}{28}\int^x 28\frac{1}{t}\ln^{27}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(\ln(x))^{28}}{28} + C.$$

□

Solution de l'exercice 2.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. En effectuant le changement de variables $\varphi : u \mapsto \ln(u)$, alors

$$\begin{aligned}\int^x f_1(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t = \int^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(u)}+1}\times\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int^{\mathrm{e}^x}\frac{1}{u(u+1)}\,\mathrm{d}u = \int^{\mathrm{e}^x}\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right]\mathrm{d}t \\ &= \ln(\mathrm{e}^x) - \ln(1+\mathrm{e}^x) = x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C.\end{aligned}$$

2^e méthode. On remarque que

$$\int^x \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = -\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) + C = -\ln(\mathrm{e}^{-x}) - \ln(\mathrm{e}^x+1) + C.$$

2. La fonction est continue sur $]0, +\infty[$. En effectuant le changement de variable $\varphi : u \mapsto u^2$, alors

$$\begin{aligned}\int^x f_2(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\sqrt{x}} \frac{1-\sqrt{u^2}}{\sqrt{u^2}}(2u)\,\mathrm{d}u = \int^{\sqrt{x}} 2(1-u)\,\mathrm{d}u \\ &= -(1-\sqrt{x})^2 + C.\end{aligned}$$

2ᵉ méthode. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\int^x f_2(t)\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t - \int^x 1\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{x} - x + C.$$

3. La fonction est continue sur $]0, \mathrm{e}^{-1/2}[$ et $]\mathrm{e}^{-1/2}, +\infty[$. En utilisant le changement de variable $\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^u$, alors

$$\begin{aligned}\int^x f_3(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\ln(x)} \frac{1}{2\,\mathrm{e}^u \ln(\mathrm{e}^u) + \mathrm{e}^u}\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\\ &= \int^{\ln(x)} \frac{1}{2u+1}\,\mathrm{d}u = \frac{\ln|2\ln(x)+1|}{2} + C.\end{aligned}$$

4. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x > 0$, en utilisant le changement de variable $\varphi : u \mapsto \sqrt{u-2}$, alors

$$\begin{aligned}\int^x f_4(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \frac{(\sqrt{u-2})^3}{(\sqrt{u-2})^2+2}\frac{1}{2\sqrt{u-2}}\,\mathrm{d}u\\ &= \int^x \frac{(u-2)^{3/2}}{u} + \frac{1}{2\sqrt{u-2}}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int^x \frac{u-2}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\int^x 1\,\mathrm{d}u - 2\int^x \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \frac{x-2\ln(x)}{2} + C.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$ sont dérivables et de dérivées continues sur $\mathbb{R}$. De plus, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int^x t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[t\,\mathrm{e}^t\right]^x - \int^x 1\times\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$ sont dérivables et de dérivées continues sur $\mathbb{R}$. De plus, $u'(x) = 2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int^x t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\,\mathrm{e}^t\right]^x - \int^x 2t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Les fonctions $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$ sont dérivables et de dérivées continues sur $\mathbb{R}$. De plus, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int^x t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t &= \left[t^2\,\mathrm{e}^t\right]^x - 2\left(\left[t\,\mathrm{e}^t\right]^x - \int^x 1\times\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)\\ &= x^2\,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x + C.\end{aligned}$$

3. La fonction est continue sur $]0, +\infty[$. Les fonctions $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$ sont dérivables et de dérivées continues sur $]0, +\infty[$. De plus, $u(x) = \frac{x^3}{3}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int^x t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]^x - \int^x \frac{t^3}{3}\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]^x - \left[\frac{t^3}{9}\right]^x\\ &= \frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. Soit a, b réels tels que

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}\\ \frac{x}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}\\ x &= (a+b)x + 2a + b.\end{aligned}$$

En particulier,

* lorsque $x = 0$, alors $0 = 2a + b$;
* lorsque $x = 1$, alors $1 = 3a + 2b$.

Ainsi,

$$\begin{cases}2a+b &= 0\\ 3a+2b &= 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a &= -1 \quad {\scriptstyle L_1\leftarrow 2L_1 - L_2}\\ 3a+2b &= 1\end{cases}$$

Alors, $a=-1$ et $b=2$ et

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{2}{2x+2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\left[\ln|x+2|\right]_0^1 - \left[\ln|x+1|\right]_0^1\\ &= 2\left(\ln(3)-\ln(2)\right) - \left(\ln(2)-\ln(1)\right)\\ &= 2\ln(3) - 3\ln(2).\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. Les fonctions $u(x) = (1-x)^q$ et $v'(x) = x^p$ sont dérivables et de dérivées continues sur $[0,1]$. De plus, $u'(x) = -q(1-x)^{q-1}$ et $v(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}I_{p,q} &= \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x\\ &= \left[(1-x)^q\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 (1-x)^{q-1}x^{p+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}.\end{aligned}$$

2. En utilisant la relation précédente,

$$\begin{aligned}I_{p,q} &= \frac{q}{p+1}\times\frac{q-1}{p+2}\times\frac{q-2}{p+3}\times\cdots\times\frac{1}{p+q}I_{p+q,0}\\ &= \frac{q!p!}{(p+q)!}\int_0^1 x^{p+q}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{q!p!}{(p+q+1)!}.\end{aligned}$$

□

II - Inégalités

Solution de l'exercice 6. Comme la fonction $t\mapsto 1+t+t^2$ est une somme de fonctions croissantes sur $[0,1]$, alors elle est croissante. Ainsi, pour $t\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}1 \leqslant 1+t+t^2 &\leqslant 3\\ \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{1+t+t^2} &\leqslant 1\\ \int_0^1 \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} &\leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}t\\ \frac{1}{3} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} &\leqslant 1.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. Comme la fonction ln est croissante sur $[k,k+1]$, alors

$$\begin{aligned}k \leqslant t &\leqslant k+1\\ \ln(k) \leqslant \ln(t) &\leqslant \ln(k+1)\\ \int_k^{k+1}\ln(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_k^{k+1}\ln(k+1)\,\mathrm{d}t\\ \ln(k) \leqslant \int_k^{k+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \ln(k+1).\end{aligned}$$

Ainsi,

* en utilisant le membre de gauche,

$$\ln(k) \leqslant \int_k^{k+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

* en utilisant le membre de droite à remplaçant k par $k-1$, alors

$$\int_{k-1}^{k}\ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(k).$$

Finalement, on obtient bien

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. En sommant la relation de gauche obtenue à la question précédente et en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \int_{1}^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant \ln\left(\prod_{k=2}^{n} k\right)\\ \int_{1}^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(n!).\end{aligned}$$

En sommant la relation de droite obtenue à la question précédente et en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_{k}^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ \ln((n-1)!) &\leqslant \int_{1}^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t\\ \ln(n!) &\leqslant \int_{1}^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

3. Comme une primitive de ln est $t \mapsto t\ln(t) - t$, en utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned}n\ln(n) - n - (1\ln(1) - 1) \leqslant \ln(n!) & \leqslant (n\ln(n) - n) - (1\ln(1) - 1) + \ln(n)\\ 1 - \frac{n-1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} & \leqslant 1 + \frac{\ln(n) - n + 1}{n\ln(n)}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{-n+1}{n\ln(n)} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)-n+1}{n\ln(n)} = 0$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n\ln(n)} = 1.$$

Ainsi, $\frac{n!}{n\ln(n)} \sim_{+\infty} 1$. □

Solution de l'exercice 8.

1. Posons $\varphi : t \mapsto t - 1 - \ln(t)$.
La fonction φ est deux fois dérivable sur $]x^2, 1[$ et

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t},\\ \varphi''(t) &= \frac{1}{t^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, φ' est croissante. Comme $\varphi'(1) = 0$, alors φ' est négative et φ est décroissante. Ainsi, pour $t \in]x^2, 1[$,

$$\begin{aligned}\varphi(1) &\leqslant \varphi(t)\\ 0 &\leqslant t - 1 - \ln(t)\\ \ln(t) &\leqslant t - 1.\end{aligned}$$

Posons $\psi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t-1}$. La fonction ψ est deux fois dérivable et

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{1 - \frac{1}{t} - \ln(t)}{(t-1)^2}\\ &= \frac{1 - \frac{1}{t} + \ln\frac{1}{t}}{(t-1)^2}.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de convexité établie grâce à la fonction φ du point précédent, $\ln\frac{1}{t} + 1 - \frac{1}{t} \leqslant 0$. Ainsi, ψ' est négative et ψ est décroissante. Comme $x^2 \leqslant t$, on obtient ainsi l'inégalité :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x^2)}{x^2-1} &\geqslant \frac{\ln(t)}{t-1}\\ \frac{2\ln(x)}{x^2-1}(t-1) &\leqslant \ln(t), \quad \text{car } t \leqslant 1.\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, comme $x^2 \leqslant x$,

$$\begin{aligned}\frac{2\ln(x)}{x^2-1}\int_{x^2}^{x} (t-1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} &\leqslant \int_{x^2}^{x} (t-1)\,\mathrm{d}t\\ \frac{2\ln(x)}{x^2-1}\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_{x^2}^{x} \leqslant -f(x) &\leqslant \left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_{x^2}^{x}\\ \frac{2\ln(x)}{x^2-1}\,\frac{(x-1)^2 - (x^2-1)^2}{2} \leqslant -f(x) &\leqslant \frac{(x-1)^2 - (x^2-1)^2}{2}.\end{aligned}$$

lorsque $x \to 1$,
$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2-(x^2-1)^2}{2} = 0.$$
Par ailleurs,
$$\frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{x+1}.$$
Ainsi, d'après la définition de la dérivée, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2}$.
Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$
et la fonction f est prolongeable par continuité en 1.

3. En notant F une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$, alors pour tout $x \in]0,1[$,
$$\begin{aligned} f(x) &= F(x^2) - F(x) \\ f'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x) \\ &= 2xf(x^2) - f(x) \\ &= 2x\frac{1}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}. \end{aligned}$$

Étude de la régularité en 0. Comme la fonction ln est croissante et $x^2 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$,
$$\begin{aligned} x^2 \leqslant t &\leqslant x \\ \frac{1}{\ln(x)} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} &\leqslant \frac{1}{\ln(x^2)} \\ \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x^2)} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} &\leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)} \\ \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leqslant f(x) &\leqslant \frac{x(x-1)}{\ln(x)}. \end{aligned}$$
En utilisant le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
En utilisant l'encadrement précédent,
$$\frac{x-1}{2\ln(x)} \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x} \leqslant \frac{x-1}{\ln(x)}.$$
D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. La fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. □

Solution de l'exercice 9.

1. En utilisant la croissance des fonctions puissances puis du logarithme,
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant x^n \leqslant 1^n \\ 1 &\leqslant 1 + x^n \leqslant 1 + 1 \\ \ln(1) &\leqslant \ln(1+x^n) \leqslant \ln(2) \\ \int_0^1 0\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln(2)\,\mathrm{d}x, \text{ car } 0 \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant I_n \leqslant [\ln(2)x]_0^1 \\ 0 &\leqslant I_n \leqslant \ln(2)\times 1 - \ln(2) \times 0 \\ 0 &\leqslant I_n \leqslant \ln(2). \end{aligned}$$

2. En reprenant la stratégie précédente,
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant x \times x^{n-1} \leqslant 1 \times x^{n-1}, \text{ car } x^{n-1} \geqslant 0 \\ 1 &\leqslant 1 + x^n \leqslant 1 + x^{n-1} \\ 0 &\leqslant \ln(1+x^n) \leqslant \ln(1+x^{n-1}) \\ \int_0^1 0\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^{n-1})\,\mathrm{d}x, \text{ car } 0 \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant I_n \leqslant I_{n-1}. \end{aligned}$$
Ainsi, la suite (I_n) est décroissante.

3. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, la suite (I_n) converge.

4. Posons $\varphi : x \mapsto x - \ln(1+x)$. La fonction φ est dérivable et pour tout $x > 0$,
$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$
Ainsi, $\varphi' \geqslant 0$, la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\varphi(0) = 0$. Ainsi,
$$\forall\, x > 0,\ \ln(1+x) \leqslant x.$$

5. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$$
$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

□

Solution de l'exercice 10.

1. a) D'après les définitions,

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}.$$

b) Comme $1+x^2 \geqslant 1$, en utilisant la croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$$
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$
$$0 \leqslant J_1 \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

c) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

2. a) On pose $u(x) = \ln(1+x^2)$ et $v'(x) = x^n$, soit $u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Comme les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0,1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2}. \end{aligned}$$

b) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$ et, d'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} \frac{J_{n+2}}{n+1} = 0$, d'après le théorème d'addition des limites,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

c) D'après la question **2.a)**,

$$nI_n = \frac{n}{n+1}\ln(2) - 2\frac{n}{n+1}J_{n+2}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} J_{n+2} = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \ln(2).$$

□

III - Intégrales généralisées

Solution de l'exercice 11.

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On découpe l'intervalle d'étude.

- ∗ **Étude en** $+\infty$**.** D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2} = 0$. Ainsi, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$.
  Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
- ∗ **Étude en** $-\infty$**.** Comme $\lim_{t\to-\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2} = 0$, un raisonnement analogue montre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
- ∗ **Étude sur** $[-1,1]$**.** Comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[-1,1]$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} t^2 \times \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t} = 0$.
Ainsi, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2}$.
Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi, $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

3. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^4}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{\ln t}{1+t^4} = 0$. Ainsi, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant \frac{\ln t}{1+t^4} \leqslant \frac{1}{t^2}$.
Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge.

4. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^4}$ est continue sur $]0, 1]$.
Comme $\frac{\ln t}{1+t^4} \sim \ln(t)$ et que $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge. □

Solution de l'exercice 12.

1. La fonction $x \mapsto x\ln^2(x)$ est continue sur $]0, 1]$.
Comme $\lim_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$, la fonction est prolongeable par continuité en 0. Ainsi, $\int_0^1 x\ln^2(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $u(x) = \ln^2(x)$ et $v'(x) = x$. Alors, $u'(x) = \frac{2}{x}\ln(x)$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[\varepsilon, 1]$. En utilisant une intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 x\ln^2(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\ln^2(x)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{2}{x}\ln(x)\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\varepsilon^2\ln^2(\varepsilon)}{2} - \int_\varepsilon^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x$. Alors, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[\varepsilon, 1]$. En utilisant une intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 x\ln^2(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon^2\ln^2(\varepsilon)}{2} - \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\varepsilon^2\ln^2(\varepsilon)}{2} + \frac{\varepsilon^2\ln(\varepsilon)}{2}\\ &= -\frac{\varepsilon^2\ln^2(\varepsilon)}{2} + \frac{\varepsilon^2\ln(\varepsilon)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^1 x\ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} x\ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

2. La fonction $t \mapsto \ln^2(t)$ est continue sur $]0, 1]$.
D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{t\to 0} \sqrt{t}\ln^2(t) = 0$. Ainsi, il existe $A \geqslant 0$ tel que

$$\forall\ t \leqslant A,\ 0 \leqslant \ln(t)^2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_0^1 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2(t)$. Alors, $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{2}{t}\ln(t)$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[\varepsilon, 1]$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t &= \left[t\ln^2(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 t \times \frac{2}{t}\ln(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\varepsilon\ln^2(\varepsilon) - 2\left[t\ln(t) - t\right]_\varepsilon^1\\ &= -\varepsilon\ln^2(\varepsilon) + 2 - 2(\varepsilon\ln(\varepsilon) - \varepsilon).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^1 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t = 2.$$

3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
On remarque que

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2) + b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(a+b)x + 2a + b}{(x+1)(x+2)}.$$

Ainsi, pour que $a+b=0$ et $2a+b=1$, il faut choisir $a=1$ et $b=-1$.
Soit $M \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^M \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x\\ &= [\ln(x+1)]_0^M - [\ln(x+2)]_0^M\\ &= \ln(M+1) - 0 - \ln(M+2) + \ln(2)\\ &= \ln(2) + \ln\frac{M+1}{M+2}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{M\to+\infty} \frac{M+1}{M+2} = 1$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \ln(2).$$

□

IV - Intégrales classiques

Solution de l'exercice 13.

1. Soit $M \geqslant 0$. D'après la définition,

$$\int_0^M \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^M = 1-\mathrm{e}^{-M}.$$

Ainsi,

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

2. a) Comme $\lim_{t\to+\infty} t^{n+2}\,\mathrm{e}^{-t} = 0$, il existe un réel a tel que pour tout $t \geqslant a$,

$$0 \leqslant t^n\,\mathrm{e}^t \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

b) Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge, alors $\int_1^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

De plus, $t \mapsto t^n\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,1]$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

3. Soit $M \geqslant 0$. Soit $u(t) = t^{n+1}$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$. Alors $u'(t) = (n+1)t^n$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}I_{n+1} = \int_0^M t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^M + \int_0^M (n+1)t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= -M^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t} + (n+1)\int_0^M t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème des croissances comparées,

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = (n+1)I_n.$$

4. Comme $I_0 = 1$ et $I_{n+1} = (n+1)I_n$, on montre par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.$$

□

Solution de l'exercice 14.

1. a) D'après la définition des puissances, pour $t > 0$, $t^{x-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}$.

b) Comme $\lim_{t\to 0} \mathrm{e}^{-t} = 1$, alors $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \sim_0 t^{x-1}$.

c) Comme $x > 0$, alors $x-1 > -1$. Ainsi, $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc, d'après la question précédente, $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

d) D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t/2} = 0$. Ainsi, il existe un réel a tel que

$$\forall\, t \geqslant a,\ t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t/2}.$$

e) Comme $\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

f) La fonction $t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. D'après les questions précédentes, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ convergent. Donc,

$$\forall\, x > 0,\ \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

2. Soit $0 < \varepsilon < M$. On pose $u(t) = t^x$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$, soit $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v(t) = -\,\mathrm{e}^{-t}$. Comme les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[\varepsilon, M]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^M t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-t^x\,\mathrm{e}^{-t}\right]_\varepsilon^M + x\int_\varepsilon^M t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= M^x\,\mathrm{e}^{-M} - \varepsilon^x\,\mathrm{e}^{-\varepsilon} + x\int_\varepsilon^M t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme $x > 0$, alors $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^x\,\mathrm{e}^{-\varepsilon} = 0$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{M\to+\infty} M^x\,\mathrm{e}^{-M} = 0$.
D'après la question **2.** les intégrales convergent. Ainsi, en faisant tendre ε vers 0 puis M vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

3. On remarque que $\Gamma(0) = 1$. On montre ainsi par récurrence sur n que $\Gamma(n+1) = n!$. $\square$