

## T.D. IV - Matrices inversibles

### I - Résolution de systèmes

**Exercice 1. (✳)** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{array}{ll}
 1. (S_1) \begin{cases} 5x + y - 2z &= 3 \\ x + 4y + z &= 2 \\ -3x + 2y + 3z &= -2 \end{cases} & 3. (S_3) \begin{cases} x + y - z &= 2 \\ 3x + 5y - z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 1 \end{cases} \\
 2. (S_2) \begin{cases} 2x + 3y - z &= 1 \\ 5x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + y + z &= 5 \end{cases} & 4. (S_4) \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ 3x + 4y - z &= 2 \\ x + 3y + z &= 10 \end{cases}
 \end{array}$$

**Exercice 2.** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{array}{ll}
 1. (S_1) \begin{cases} 2x + y + z + t &= 3 \\ x + y + z + t &= 12 \\ 3x + 2y + 2z + t &= 3 \\ 3x + y + 2z + 3t &= 5 \end{cases} & 2. (S_2) \begin{cases} 2x + 2y + z + t &= 1 \\ x + y + 3z + t &= 2 \\ 3x + y + 2z + 2t &= -1 \\ 3x + y + 2z + 3t &= 5 \end{cases}
 \end{array}$$

### II - Inverses par calculs de produits

**Exercice 3. (✳)** Dans chacune des questions suivantes, calculer le produit  $AB$ , en déduire que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$ .

$$\begin{array}{ll}
 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}. \\
 2. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \\
 3. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ -4 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** On pose

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $PQ$ . En déduire que  $P$  est inversible et donner  $P^{-1}$ .
2. On pose  $A = PMP^{-1}$ . Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel,

$$M^n = P^{-1}A^nP.$$

### III - Inverses par polynômes de matrices

**Exercice 5.** On pose  $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $M^2$  et en déduire que  $M^4 = I$ .
2. En déduire que  $M$  est inversible et donner l'expression de  $M^{-1}$  en fonction de  $M$ .

**Exercice 6. (✳)** On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^3 - 2A^2 - 12A + 19I_3$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 7. (✱)** On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^3 - 2A^2 + 3A + 14I_3$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 8.** Soit  $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer le produit matriciel  $(M - I)(M + 3I)$ .
2. En déduire que  $M$  est inversible et déterminer son inverse.

## IV - Non inversibilité

**Exercice 9. (✱)** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer  $\alpha$  tel que  $A^3 = \alpha A$ .
2. Montrer par l'absurde que  $A$  n'est pas inversible.

**Exercice 10. (✱)** On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$  puis  $A^3$ .
2. En déduire que  $A$  n'est pas inversible.

**Exercice 11. (✱)** On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $AB$  et  $AC$ .
2. En déduire que  $A$  n'est pas inversible.

## V - Inversibilité des matrices de taille 2

**Exercice 12. (✱)** Pour chacune des matrices d'ordre 2 suivante, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse.

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ .  | 3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .  | 5. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ .  |
| 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ . | 4. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . | 6. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$ . |

**Exercice 13.** On considère le système

$$\begin{cases} -x + 3y = 11 \\ x + 2y = 9 \end{cases}.$$

On pose  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer une matrice  $A$  telle que  $AX = Y$ .
2. Montrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .
3. Utiliser  $A^{-1}$  pour résoudre le système.

## VI - Inversibilité des matrices diagonales

**Exercice 14. (✱)** Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse.

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . | 3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  |
| 2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . | 4. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . |

## VII - Inversibilité des matrices triangulaires

**Exercice 15. (✳)** Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible.

$$\begin{array}{l|l} 1. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. & 3. \begin{pmatrix} 0 & -5 & 75 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ 2. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 27 & -4 & 0 \end{pmatrix}. & 4. \begin{pmatrix} -3 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

## VIII - Inverses par méthodes du pivot

**Exercice 16. (✳)** Inverser les matrices suivantes en résolvant le système  $AX = Y$ .

$$\begin{array}{l|l} 1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. & 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \\ 2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. & 4. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

**Exercice 17. (✳)** Inverser les matrices suivantes en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 3. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 18.** On pose  $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $M^2$  et en déduire que  $M^4 = I$ .
2. Calculer  $(M - I)(M^3 + M^2 + M + I)$ .
3. Montrer que  $M - I$  est inversible.
4. En déduire la valeur de  $M^3 + M^2 + M + I$ .

## IX - Calculs de puissances

**Exercice 19. (✳)** Soit  $A, B, P$  des matrices d'ordre 2 telles que  $P$  soit inversible. On suppose que  $P^{-1}AP = B$ . Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel ;  $A^n = PB^nP^{-1}$ .

**Exercice 20.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $PQ$ . En déduire que  $P$  est inversible et expliciter  $P^{-1}$ .
2. Vérifier que  $A = PDP^{-1}$ .
3. Pour tout  $n$  entier naturel, expliciter  $D^n$ .
4. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
5. En déduire que pour tout  $n$  entier naturel,

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 5^n & 0 & 3^n - 5^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 3^n - 5^n & 0 & 3^n + 5^n \end{pmatrix}.$$

6. La matrice  $D$  est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.
7. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.

**Exercice 21.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

2. Calculer  $PQ$ . En déduire que  $P$  est inversible et déterminer son inverse  $P^{-1}$ .

3. Vérifier que  $PM P^{-1} = A$ .

4. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel  $n$ ,  $M^n = P^{-1}A^n P$ .

5. En déduire que pour tout  $n$  entier naturel,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$