

■ Chapitre 14 ■

Endomorphismes d'un espace euclidien

Notation.

■ E désigne un espace vectoriel euclidien (i.e. un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire) de dimension n .

I. Endomorphismes symétriques

I.1 Définition

Définition 1 (Endomorphisme symétrique).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme u est *symétrique* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

L'ensemble des endomorphismes symétriques est noté $\mathcal{S}(E)$.

Exercice 1. Montrer que les homothéties, les projections orthogonales et les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux.

Théorème 1 (Structure).

$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Propriété 1 (Caractérisation matricielle).

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E . L'endomorphisme u est symétrique si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n sera noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

1. Exprimer $\dim \mathcal{S}(E)$ en fonction de $n = \dim(E)$.
2. Soient u et v deux endomorphismes symétriques. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $u \circ v$ soit symétrique.

I.2 Réduction

Exercice 3.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.
2. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Montrer que F^\perp est stable par u .

Théorème 2 (Théorème spectral).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors, u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Théorème 3 (Théorème spectral matriciel).

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice P telles que ${}^tPP = I_n$ et $M = PD{}^tP$.

Exercice 4.

1. Appliquer le théorème précédent à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.



2. Que dire de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. (Z) Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

II. Isométries vectorielles**II.1 Définition****Définition 2 (Endomorphisme orthogonal).**

Un endomorphisme f est *orthogonal* s'il préserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux. Ses éléments sont également appelées *isométries vectorielles*.

Exercice 6. Montrer que l'identité, les symétries orthogonales, les rotations en dimension 2 sont des endomorphismes orthogonaux.

Propriété 2 (Caractérisation en termes de norme).

Les endomorphismes orthogonaux sont les endomorphismes qui préservent la norme.

$$\mathcal{O}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) ; \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|\}.$$

Exercice 7.

- Montrer qu'il existe des fonctions non linéaires telles que $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.
- Quelles sont les valeurs propres possibles d'une isométrie vectorielle ?

Propriété 3 (Structure).

Soit $(f, g) \in \mathcal{O}(E)^2$. Alors,

<p>(i). $\text{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$.</p> <p>(ii). $f \in \mathcal{G}(E)$.</p>	<p>(iii). $f \circ g^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.</p>
--	---

Propriété 4.

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f . Alors, F^\perp est stable par f .

Propriété 5 (Caractérisation en termes de b.o.n.)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- (i). Si f est un automorphisme orthogonal, alors l'image de toute base orthonormée par f est une base orthonormée.
- (ii). S'il existe une base orthonormée dont l'image par f est une base orthonormée, alors f est un automorphisme orthogonal.

Propriété 6.

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et M sa matrice dans une base orthonormée. Alors, $M^t M = {}^t M M = I_n$ et $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

Définition 3 (Groupe spécial orthogonal).

Le *groupe spécial orthogonal* est l'ensemble des automorphismes orthogonaux de déterminant 1, i.e.

$$SO(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) ; \det f = 1\}.$$

Les éléments de $SO(E)$ sont les *rotations vectorielles*.

Propriété 7.

$SO(E)$ est une partie non vide de $\mathcal{O}(E)$ stable par composition et passage à l'inverse.

Définition 4 (Réflexion).

Une *réflexion* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Exercice 8. Soit s une réflexion. Montrer que $\det(s) = -1$.

II.2 Matrices orthogonales**Définition 5 (\mathcal{O}_n).**

L'ensemble des matrices *orthogonales* est l'ensemble

$$\mathcal{O}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; {}^t M M = I_n\}.$$

Exercice 9. Montrer que \mathcal{O}_n est une partie fermée bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriétés 8.

- (i). \mathcal{O}_n est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par multiplication et passage à l'inverse.
- (ii). Si $M \in \mathcal{O}_n$ et f est l'endomorphisme canoniquement associé à M , alors $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.
- (iii). Si $M \in \mathcal{O}_n$, alors $\det(M) \in \{-1, +1\}$.

Propriété 9.

Soit $M = [C_1, \dots, C_n]$. Alors, (C_1, \dots, C_n) est une base orthonormée de \mathbb{R}^n si et seulement si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 4 (Changement de base orthonormée).

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées de E et $Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Alors, Q est orthogonale, soit ${}^t Q = Q^{-1}$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = {}^t Q \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) Q$.

Définition 6 (Groupe spécial orthogonal).

Le *groupe spécial orthogonal* est l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1, i.e.

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n ; \det M = 1\}.$$

Les éléments de SO_n sont les matrices de *rotations vectorielles*.

Propriété 10.

SO_n est une partie non vide de \mathcal{O}_n stable par multiplication et passage à l'inverse.

III. Dimensions 2 et 3

III.1 Orientation

Dans cette partie, on se limite aux cas où E est de dimension 2 ou 3.

Définition 7 (Orientation).

- (i). La relation binaire \mathcal{R} sur l'ensemble des bases de E définie par $\mathcal{B}_1 \mathcal{R} \mathcal{B}_2$ si et seulement si $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$ est une relation d'équivalence.
- (ii). E est *orienté* si on choisit une des deux classes d'équivalences. Les bases de cette classe sont orientées dans le sens *positif* (ou *direct*), les autres le sont dans le sens *négatif* (ou *indirect*).
- (iii). Un espace vectoriel euclidien *orienté* est un espace vectoriel euclidien muni d'une orientation.

Exercice 10. Illustrer ces définitions.

Propriété 11 (Caractérisation).

Les endomorphismes de $SO(E)$ transforment les bases orthonormées directes en bases orthonormées directes.

Théorème 5 (Hyperplan & Orientation).

Soient E un espace vectoriel orienté et H un hyperplan de E . On note $D = H^\perp = \text{Vect}\{a\}$, où a est un vecteur unitaire. Il existe une unique orientation de H telle que pour toute base orthonormée directe (e_1, \dots, e_{n-1}) de H , la base (e_1, \dots, e_{n-1}, a) soit directe. L'hyperplan H est orienté par le vecteur normal a .

Exercice 11. Illustrer ce théorème.

Définition 8 (Produit mixte).

Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n , \mathcal{B} une base orthonormée directe de E et (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E . Le réel $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est indépendant du choix de la base orthonormée directe \mathcal{B} . C'est le *produit mixte* de (u_1, \dots, u_n) , noté $[u_1, \dots, u_n]$.

Exercice 12.

1. Montrer que $[u_1, \dots, u_n] \neq 0$ si et seulement si (u_1, \dots, u_n) est une base de E .
2. Soit (u_1, u_2) une base de \mathbb{R}^2 . Interpréter $[u_1, u_2]$ en terme d'aire.

Définition 9 (Produit vectoriel).

On suppose que $\dim E = 3$. Soient $(u, v) \in E^2$. Il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que pour tout $w \in E$, $[u, v, w] = \langle a, w \rangle$. Le vecteur a , noté $u \wedge v$, est le *produit vectoriel* de u et v .

Propriété 12.

Soient (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale directe et u, v deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . On note (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) les coordonnées de u et de v dans cette base. Alors, les coordonnées de $u \wedge v$ sont

$$\begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Montrer que $a \wedge (b \wedge c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$.

III.2 Automorphismes orthogonaux du plan

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et f un automorphisme orthogonal de E . On note (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée de E .

Théorème 6 (Décomposition).

Les automorphismes orthogonaux du plan sont soit des réflexions, soit des rotations (composées de deux réflexions).

Théorème 7 (Rotations).

Soit r une rotation. Sa matrice dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$, où $a^2 + c^2 = 1$. Ainsi, si r_1 et r_2 sont des rotations, r_1 et r_2 commutent.

Propriété 13 (Angle).

Soit $f \in SO(E)$. Il existe un réel θ défini modulo 2π tel que quelle que soit la base orthonormée directe \mathcal{B} de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Le réel θ est une *mesure de l'angle* de la rotation vectorielle f . Dans le plan complexe, la transformation f s'écrit $z \mapsto e^{i\theta} z$.

Propriété 14 (Composition).

Soient f et g deux rotations d'angles de mesures respectives θ et φ . Alors, f et g commutent et $f \circ g$ est la rotation d'angle $\theta + \varphi$.

Propriété 15 (Détermination pratique).

Pour tout vecteur u non nul de E , $\cos \theta = \frac{\langle u, f(u) \rangle}{\|u\|^2}$ et $\sin \theta = \frac{[u, f(u)]}{\|u\|^2}$.

III.3 Automorphismes orthogonaux de l'espace

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, f un automorphisme orthogonal de E et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E .

Théorème 8.

Soit f une rotation. Il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \text{ Ainsi, } f \text{ est une rotation d'angle } \theta \text{ autour du vecteur } u.$$

Si $f \neq \text{Id}_E$, alors $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Vect}\{u\}$, est appelé *axe* de la rotation.

La restriction de f au plan $\text{Vect}\{u\}^\perp$ orienté par u est la rotation d'angle θ .

Exercice 14.

1. Montrer que, si f est une rotation en dimension 3, alors ses valeurs propres sont 1, $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$.

2. Soit f la rotation dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les caractéristiques de cette rotation.



3. En considérant la rotation d'axe orienté par \vec{i} et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et celle d'axe orienté par \vec{j} et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que $SO(E)$ n'est pas commutatif.

Propriété 16 (Détermination pratique).

Soit r une rotation d'angle θ et d'axe $\text{Vect}\{u\}$, où $\|u\| = 1$.

(i). Si $x \perp u$, alors $r(x) = \cos \theta x + \sin \theta \cdot u \wedge x$.

(ii). Si $x \perp u$ et $\|x\| = 1$, alors $\cos \theta = \langle x, r(x) \rangle$ et $\sin \theta = [x, r(x), u]$.

**Détermination matricielle de l'axe et de l'angle d'une rotation**

Exercice 15. Soit f une rotation vectorielle de matrice M dans une base orthonormée.

1. On suppose que ${}^tM = M$.

a) Lorsque $M = I_3$, identifier f .

b) Lorsque $M \neq I_3$, décrire géométriquement l'endomorphisme f .

2. On suppose que ${}^tM \neq M$ et on note g l'endomorphisme associé à $M - {}^tM$.

a) Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $g : x \mapsto u \wedge x$.

b) En déduire que f est la rotation d'axe u et d'angle déterminé par $\cos \theta = \frac{\text{Tr}(M)-1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\|u\|}{2}$.

3. Applications.

a) Déterminer les caractéristiques de la composée entre les rotations d'axes dirigés par \vec{i} et \vec{j} et d'angles $\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de l'endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormée est $M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigé par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Programme officiel (PSI)

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens - B - Isométries et endomorphismes symétriques d'un espace euclidien (p. 10, 11)