

I - Analyse réelle

I - Suites

I.1 - Suites usuelles

Définition 1 - Suite arithmétique

Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$ est une suite *arithmétique* de raison a .

Proposition 1

Soit u une suite arithmétique de raison a . Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $u_n = u_0 + na$.
- $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}a$.

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 12$. Soit n un entier naturel.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Exprimer $\sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .

Définition 2 - Suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$ est une suite *géométrique* de raison q .

Proposition 2

Soit u une suite géométrique de raison q . Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $u_n = q^n u_0$.
- $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 12 \cdot u_n$. Soit n un entier naturel.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Exprimer $\sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .

Définition 3 - Suite arithmético-géométrique

Soient $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + a$ est une suite *arithmético-géométrique*.

Exemple 1 - Étude des suites arithmético-géométriques



Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

- Commençons par chercher une solution ℓ de l'équation $\ell = 2\ell + 3$.
On obtient $\ell = -3$.
- Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - \ell = u_n + 3$.
Montrons que (v_n) est une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= (2u_n + 3) + 3 \\ &= 2u_n + 6 \\ &= 2(u_n + 3) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

De plus, $v_0 = u_0 + 3 = 4$.

- D'après les résultats sur les suites géométriques,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n v_0 = 2^{n+2}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+2} - 3.$$

Exercice 3. Reprendre l'exemple précédent avec la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

I.2 - Études locale & globale

Définition 4 - Monotonie

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- (u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- (u_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
- (u_n) est constante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$.
- (u_n) est stationnaire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n$.

Exercice 4.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 10. Quelle est la monotonie de cette suite ? Et si la raison vaut -3 ?
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3. Quelle est la monotonie de cette suite ? Et si la raison vaut 1 ? Et si la raison vaut $\frac{1}{2}$?

Définition 5 - Majorée, Minorée

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- La suite (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- La suite (u_n) est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exercice 5. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$ est bornée.

I.3 - Limites

Proposition 3 - Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$.

- La somme $(u_n + v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	\times
$-\infty$	$-\infty$	\times	$-\infty$

- Le produit $(u_n v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	ab	$\pm\infty$ ($a \neq 0$)	$\pm\infty$ ($a \neq 0$)
$+\infty$	$\pm\infty$ ($b \neq 0$)	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$ ($b \neq 0$)	$-\infty$	$+\infty$

- Le quotient (u_n/v_n)

	$b \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	a/b	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$	\times	\times
$-\infty$	$\pm\infty$	\times	\times

Exercice 6. Déterminer la limite des suites de terme général :

1. $u_n = n^2 + \sqrt{n}$.

3. $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}}$.

2. $v_n = n^2 - \sqrt{n}$.

Proposition 4 - Limites classiques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Exercice 7. Soit $x \in]-1, 1[$. Déterminer la limite de la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n x^k$.

Théorème 1 - Théorème d'encadrement

Soient u, v, w trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$ telles que v et w convergent vers ℓ . Si, à partir d'un certain rang, $v \leq u \leq w$, alors u est une suite convergente et sa limite vaut ℓ .

Exercice 8.

- Généraliser ce théorème au cas des suites de limites infinies.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

Théorème 2 - Théorème de la limite monotone - Cas croissant

Soit u une suite croissante.

- Si u est majorée, alors elle converge.
- Si u n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Exercice 9.

- Écrire l'énoncé du théorème dans le cas de suites décroissantes.
- Montrer que la suite (S_n) de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est convergente.

II - Fonctions

II.1 - Régularité

Définition 6 - Classe \mathcal{C}^n

Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^n si :

- ses dérivées successives $f, f', \dots, f^{(n)}$ existent,
- $f^{(n)}$ est continue.

Exemple 2

La fonction $f(x) = x^2$ est de classe \mathcal{C}^2 . On dit aussi qu'elle est deux fois continûment dérivable.

II.2 - Étude d'extrema

Théorème 3 - Régularité & Variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :


- Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive sur I , sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est strictement négative sur I , sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Exercice 10. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 1$.

Théorème 4 - Dérivation & Extrema

Soit f une fonction dérivable sur un ouvert I et $x_0 \in I$. Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Exercice 11.

-  Montrer que la réciproque de ce théorème est fausse.
- Étudier les extrema sur $[-2, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto -x^3 + x^2$.

II.3 - Formule de Taylor

Théorème 5 - Théorème de Rolle

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 12. Montrer que ces hypothèses sont optimales.

Définition 7 - Relations de comparaison

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a .

- f et g sont équivalentes en a , noté $f \sim_a g$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- f est négligeable devant g en a , noté $f = o_a(g)$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Proposition 5 - Croissances comparées

- Au voisinage de $+\infty$:
★ Si $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

$$(\ln x)^\gamma = o(x^\beta), x^\beta = o(e^{\alpha x}).$$

- ★ Si $\alpha, \beta, \gamma < 0$,

$$x^\beta = o((\ln x)^\gamma), e^{\alpha x} = o(x^\beta).$$

- Au voisinage de 0 : si $\beta < 0, \gamma > 0$,

$$|\ln x|^\gamma = o(x^\beta).$$

Exercice 13.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln \left(\frac{x^2}{1+x} \right)$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)+x}{x^2+1}$.

Théorème 6 - Équivalent et dérivation

Si f est une fonction dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a) \cdot (x - a).$$

Exemple 3 - Équivalents classiques en 0

- Comme $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x}$,

$$\ln(1+x) - \ln(1) \sim_0 \frac{1}{1+0}(x-0)$$

$$\ln(1+x) \sim_0 x.$$

- Comme $x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $x \mapsto e^x$,

$$e^x - e^0 \sim_0 e^0(x-0)$$

$$e^x - 1 \sim_0 x.$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}$,

$$(1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha \sim_0 \alpha(1+0)^{\alpha-1}(x-0)$$



$$(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x.$$

Proposition 6 - Relations de comparaison & Opérations

- \sim_a est une relation d'équivalence.
- Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors f et g sont de même signe sur un voisinage de a .
- $f \sim g$ si et seulement si $f - g = o(g)$.
- Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $f_1 + f_2 = o(g)$.
- Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.
- Si $f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2$ et g_1, g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a , alors $\frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2}$.

- Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.

Exercice 14.

1.  Ne pas composer des équivalents.
Déterminer une fonction f telle que $f(x)$ et $f(2x)$ ne soient pas équivalentes en $+\infty$.
2.  Ne pas additionner des équivalents.
Déterminer un équivalent en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+2x} - 1 + 2x$.

Définition 8 - Développement limité à l'ordre 1 ou 2

Soit a un réel et f une fonction définie sur un voisinage de a .

- f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 s'il existe a_0 et a_1 réels tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o_a(x - a).$$

- f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 s'il existe a_0, a_1 et a_2 réels tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + o_a((x - a)^2).$$

Exemple 4 - Polynômes et Inverse

- Soit $f : x \mapsto 3 + 2x + 4x^2 + 3x^5 + 25x^{72}$. Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 2x + 4x^2 + x^2(3x^3 + 25x^{70}) \\ &= 3 + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

- Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. En utilisant la somme des termes d'une

suite géométrique,

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 &= \frac{1 - x^3}{1 - x} \\ \frac{1}{1 - x} &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1 - x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^2 \frac{x}{1 - x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Exercice 15. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions

1. $x \mapsto 4x^3 + 2x^2 + x + 1$.
2. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Proposition 7 - Développement limité & Régularité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- f admet un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si f est continue en a . En particulier, si $f(x) = a_0 + o_a(1)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = a_0$.
- f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a . En particulier, si $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o_a(x - a)$, alors $a_0 = f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $a_1 = f'(a)$. La tangente en f à a a donc pour équation $a_0 + a_1(x - a)$.

Théorème 7 - Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n . Alors, pour tout $a \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

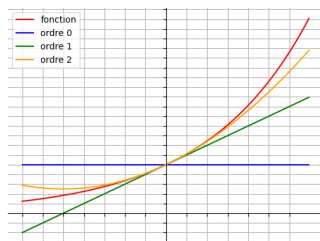
Exemple 5 - Développement limités classiques en 0

- La fonction $f : x \mapsto e^x$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto e^x, \\ f'' : x &\mapsto e^x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + e^0(x-0) + \frac{e^0}{2}(x-0)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$



- La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -1, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto \frac{1}{1+x}, \\ f'' : x &\mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(1+0) + \frac{1}{1+0}x - \frac{1}{(1+0)^2}x^2 + o(x^2) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe \mathcal{C}^2

sur $] -1, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f'' : x &\mapsto \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ln(1+x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Exercice 16. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$.

Proposition 8 - Développement limité & Comportement local

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I contenant a .

- Si $f''(a) > 0$, alors f se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.
- Si $f''(a) < 0$, alors f se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.

Exemple 6

Comportement au voisinage de 1 de $f : x \mapsto e^{1-\sqrt{x}}$. La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto -\frac{e^{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, \\ f'' : x &\mapsto \frac{\sqrt{x}+1}{4x^{3/2}} e^{1-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Young,

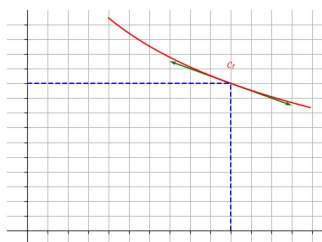
$$e^{1-\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2).$$

En particulier, il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0 telle

que

$$\begin{aligned}
 e^{1-\sqrt{x}} - \underbrace{\left[1 - \frac{1}{2}(x-1)\right]}_{\text{éq. de la tangente}} &= \frac{1}{4}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2) \\
 &= \frac{(x-1)^2}{4} + (x-1)^2\varepsilon(x-1) \\
 &= \frac{1}{4}(x-1)^2(1 + \varepsilon(x-1)).
 \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque x est proche de 1, alors $1 + \varepsilon(x-1) > 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$. Donc $f(x) - [1 - \frac{1}{2}(x-1)] \geq 0$ et la courbe représentative de f se trouve au-dessus de la tangente.



II.4 - Fonctions convexes

Définition 9 - Convexité pour les fonctions de classe \mathcal{C}^2

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$. f est une fonction *convexe* si $f'' \geq 0$.

Proposition 9 - Convexité & Tangentes

Soit f une fonction convexe et dérivable sur I . Alors,

$$\forall x, a \in I, f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a).$$

Exercice 17. Montrer les inégalités suivantes.

$$1. \forall u \in]-1, +\infty[, \ln(1+u) \leq u.$$

$$2. \forall u \in \mathbb{R}, 1+u \leq e^u.$$

II.5 - Plan d'étude de fonction

- (i). Ensemble de définition.
- (ii). Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
- (iii). Dérivabilité, Variations.
- (iv). Branches infinies.
- (v). Représentation graphique avec les tangentes remarquables.

Exemple 7 - Étude de fonction

Soit $f : x \mapsto x - 1 + \frac{1}{x-2}$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- (i). f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- (ii). f est dérivable sur $] -\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$. Sur chacun de ces intervalles,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$

La fonction f est deux fois dérivable et $f''(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$. Ainsi, $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 2$ et f est convexe sur $]2, +\infty[$. Comme $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \leq 2$, alors f est concave sur $] -\infty, 2[$.

- (iii). Étude des branches infinies.

- Comme $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote verticale à la courbe.
- Comme $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote verticale à la courbe.
- Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -1$, alors la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$. De plus, $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \geq 0$ pour tout $x > 2$. Ainsi, \mathcal{C}_f se trouve au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
- Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = -1$, alors la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$. De plus, $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \leq 0$ pour tout $x < 2$. Ainsi, f se trouve au-dessous de son asymptote.

(iv). Tracé.

