T.D. III - Matrices inversibles

I - Résolution de systèmes

Exercice 1. (⚙) Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $(S_1)\begin{cases} 5x+y-2z &= 3 \\ x+4y+z &= 2 \\ -3x+2y+3z &= -2 \end{cases}$

2. $(S_2)\begin{cases} 2x+3y-z &= 1 \\ 5x+2y+3z &= 0 \\ -x+y+z &= 5 \end{cases}$

3. $(S_3)\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ 3x+5y-z &= 1 \\ 2x+2y+z &= 1 \end{cases}$

4. $(S_4)\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 3x+4y-z &= 2 \\ x+3y+z &= 10 \end{cases}$

Exercice 2. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $(S_1)\begin{cases} 2x+y+z+t &= 3 \\ x+y+z+t &= 12 \\ 3x+2y+2z+t &= 3 \\ 3x+y+2z+3t &= 5 \end{cases}.$

2. $(S_2)\begin{cases} 2x+2y+z+t &= 1 \\ x+y+3z+t &= 2 \\ 3x+y+2z+2t &= -1 \\ 3x+y+2z+3t &= 5 \end{cases}$

II - Inverses

II.1 - Calculs directs

Exercice 3. (⚙) Dans chacune des questions suivantes, calculer le produit AB, en déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ -4 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. On reprend les matrices de l'exercice précédent. Déterminer l'inverse de AB lorsque :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

II.2 - Polynômes de matrices

Exercice 5. (⚙) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 2A^2 - 12A + 19I_3$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 6. (⚙) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 2A^2 + 3A + 14I_3$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

II.3 - Non inversibilité

Exercice 7. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.

2. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 8. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et AC.

2. En déduire que A n'est pas inversible.

III - Cas particuliers

Exercice 9. Pour chacune des matrices d'ordre 2 suivante, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. **(⚙)** Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 27 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 75 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

IV - Pivot de Gauss

Exercice 12. **(⚙)** Inverser les matrices suivantes en résolvant le système $AX = Y$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. Inverser les matrices suivantes en utilisant la méthode du pivot sur la matrice identité.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

V - Calculs de puissances

Exercice 14. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.

2. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

3. Pour tout n entier naturel, expliciter D^n.

4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$,

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 5^n & 0 & 3^n - 5^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 3^n - 5^n & 0 & 3^n + 5^n \end{pmatrix}.$$

6. La matrice D est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

7. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 15. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

2. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

3. Vérifier que $PMP^{-1} = A$.

4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $M^n = P^{-1}A^nP$.
En déduire que pour tout entier naturel n, on a

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$