Stanislas
Exercices

Algèbre linéaire

Chapitre III

PSI
2021-2022

I. Familles de vecteurs

Exercice 1. [Mines] Calculer la dimension de l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, où $f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 2. (✍) Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, pour tout réel x, $S_x = (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la famille $(S_x)_{x>0}$ est une famille libre de E.

Exercice 3. [Mines] Soient, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \cos(nx)$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : x \mapsto \sin(nx)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(f_0, f_1, g_1, \dots, f_n, g_n)$ est libre.

Exercice 4. [Mines] Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la famille (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, où f_i est la fonction $x \mapsto \cos(x + a_i)$.

II. Matrices & Applications linéaires

Exercice 5. (✍) Soient $n \geqslant 2$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de **Kronecker**. Calculer A^{-1}.

Exercice 6. [Centrale 1] Soient n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}^n$.

1. Déterminer les endomorphismes de E tels que, pour tout $x \in E$, la famille $(u(x), x)$ soit liée.

2. Déterminer les endomorphismes de E tels que, pour tout $x \in E$, la famille $(u^2(x), x)$ soit liée.

3. Soit $y \in E \setminus \{0\}$. Déterminer les endomorphismes de E tels que, pour tout $x \in E$, la famille $(u(x), x, y)$ soit liée.

Exercice 7. [Mines] Soit $k \in [\![1, n-2]\!]$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ qui laisse stable tout sous-espace vectoriel de dimension k.

1. Montrer que u laisse stable tout sous-espace vectoriel de dimension $k+1$.

2. En déduire que u laisse stable tout hyperplan de E.

3. En déduire u.

Exercice 8. [Mines] Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Déterminer $\mathrm{Im}\, g \cap \mathrm{Ker}\, f$.

2. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, g \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

3. Comparer $\mathrm{Rg}(f)$ et $\mathrm{Rg}(g)$.

4. On suppose que $\dim E = \dim F = \mathrm{Rg}(f) = n$. Que dire de f et g ?

5. On suppose que $E = F$. Déterminer f et g telles que $f \circ g \neq \mathrm{Id}_E$.

Exercice 9. [Mines] Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On note $\mathscr{H} = \{g \in \mathscr{L}(F, E)\ ;\ f \circ g \circ f = 0\}$. Déterminer la dimension de $\mathscr{H}$ en fonction de $\dim E$, $\dim F$ et $\dim \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 10. [Mines] Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Trouver l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f.

III. Géométrie

Exercice 11. (✍) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B}$. On note P le plan d'équation $x + y + z = 0$, D la droite d'équations $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ et p la projection sur P parallèlement à D.

1. Montrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathscr{B}$. Calculer $p(u)$ et déterminer la matrice de p dans $\mathscr{B}$.

Exercice 12. (✍) [IMT] Soient E un espace vectoriel de dimension finie, p et q des projecteurs de E. Montrer que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$ si et seulement si $(p \circ q = p$ et $q \circ p = q)$.

Exercice 13. Soient $n,\ N \in \mathbb{N}^\star$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^N)$ tels que $u^n = \mathrm{Id}$. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^N$ stable par u et p une projection sur E. On définit l'endomorphisme

$$q = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}.$$

1. Montrer que q est un projecteur.

2. En déduire que $\mathbb{C}^N = E \oplus \operatorname{Ker} q$.

Exercice 14. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \dots, p_k$ des projecteurs de E. On suppose que $q = \sum_{i=1}^{k} p_i$ est un projecteur.

1. Montrer que $\operatorname{Rg}(q) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Rg}(p_i)$ et en déduire que $\operatorname{Im} q = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Im} p_i$.

2. En déduire que pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$, $p_j \circ p_i = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

IV. Formes linéaires & Hyperplans

Exercice 15. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P^{(k)}(0)$. Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

Exercice 16. Soient $a < b$ et $c \in]a, b[$. Discuter, en fonction des valeurs de c, l'indépendance des formes linéaires définies sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $f_a : P \mapsto P(a)$, $f_b : P \mapsto P(b)$, $f_c : P \mapsto P(c)$ et $f_4 : P \mapsto \displaystyle\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur l'espace vectoriel E de dimension n. On suppose qu'il existe un vecteur $v \neq 0_E$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_i(v) = 0$. Montrer que la famille de formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée.

Exercice 18. (Polynômes de Hilbert) Soit Δ l'application linéaire définie pour tout polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$. Pour tout entier naturel $k \in [\![0, n]\!]$, on pose φ_k la forme linéaire qui, à un polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ associe le nombre complexe $\Delta^k(P)(0)$ et $H_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$, $H_0 = 1$.

1. Déterminer $\Delta(H_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

2. En déduire que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]^*$.

V. Avec Python

Exercice 19. [Centrale] À tout polynôme P, on associe $S(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)}{k!}$.

1. Justifier l'existence de $S(P)$ et montrer que $S(P)$ est une forme linéaire.

2. Avec Python, calculer $\sum_{k=0}^{50} \frac{P(k)}{k!}$ pour $P = X^d$ avec $d \in [\![0, 10]\!]$; puis pour un polynôme de degré 9 de votre choix. Que remarque-t-on ?

3. On pose $H_0 = 1$, puis pour tout entier n, $H_{n+1} = (X - n)H_n$. Montrer que $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Calculer $S(H_n)$ pour tout n entier naturel. En déduire une méthode pour calculer $S(P)$ pour P quelconque.

5. Avec Python, écrire un programme permettant de calculer les coefficients de H_n.