

# T.D. II - Intégrale sur un segment

## I - Calcul de primitives

**Exercice 1. (Fonctions polynomiales, ⚙️)** Déterminer des primitives des fonctions suivantes

- |                     |   |
|---------------------|---|
| 1. $x^2 + x + 1.$   | 3. $4x^3 + 2x^2 - 1.$                       |
| 2. $2x^3 + 4x + 2.$ | 4. $x^{10} + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}.$ |

**Exercice 2. (Fonctions puissances, ⚙️)**

- |                          |                               |
|--------------------------|-------------------------------|
| 1. $x^{3/2}.$            | 4. $\frac{4}{x^5}.$           |
| 2. $\frac{1}{\sqrt{x}}.$ | 5. $(2x + 1)(x^2 + x)^5.$     |
| 3. $\frac{1}{3x^2}.$     | 6. $(x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4).$ |

**Exercice 3. (Logarithmes & Exponentielles, ⚙️)**

- |                                  |                               |
|----------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\frac{3}{x}.$                | 4. $\frac{1}{e^{12x}}.$       |
| 2. $\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}.$ | 5. $(e^x + 1)(e^x + x)^{22}.$ |
| 3. $e^{2x}.$                     | 6. $\frac{e^x+1}{e^x+x}.$     |

**Exercice 4. (Calculs d'intégrales, ⚙️)** Calculer les intégrales suivantes :

- |                                  |                               |
|----------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\int_0^1 (x^2 + 3x + 1) dx.$ | 3. $\int_1^{-1} e^3 dx.$      |
| 2. $\int_{-2}^1 e^{3x} dx.$      | 4. $\int_2^1 \frac{1}{x} dx.$ |

## II - Propriétés de l'intégrale

**Exercice 5. (Loi uniforme)** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 0$  si  $x \notin [1, 3]$  et  $f(x) = \frac{1}{2}$  sinon.

- Représenter graphiquement la fonction  $f$ .
- Déterminer les intégrales suivantes :

- |                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| a) $\int_{-2}^0 f(x) dx.$     | d) $\int_{-4}^3 f(x) dx.$    |
| b) $\int_{-1}^{3/2} f(x) dx.$ | e) $\int_{-5}^{10} f(x) dx.$ |
| c) $\int_{-1}^2 f(x) dx.$     |                              |

3. Si  $x \in [1, 3]$ , déterminer  $\int_1^x f(t) dt.$

**Exercice 6. (Loi exponentielle)** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $f(x) = 2e^{-2x}$  sinon.

- Représenter graphiquement la fonction  $f$ .
- Déterminer les intégrales suivantes :

- |                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| a) $\int_{-2}^0 f(x) dx.$     | d) $\int_{-4}^3 f(x) dx.$    |
| b) $\int_{-1}^{3/2} f(x) dx.$ | e) $\int_{-5}^{10} f(x) dx.$ |
| c) $\int_{-1}^2 f(x) dx.$     |                              |

3. Si  $x \geq 0$ , déterminer  $\int_0^x f(t) dt$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt.$

**Exercice 7.** Calculer  $\int_{-1}^5 |x - 2| dx.$

**Exercice 8. (⚙️)** Soit  $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$  et  $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx.$

- Calculer  $I$ .
- Calculer  $I + J$ .
- En déduire la valeur de  $J$ .

**Exercice 9. (⚙️)** Soit  $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$  et  $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx.$

1. Calculer  $I$ .
2. Calculer  $I + J$ .
3. En déduire la valeur de  $J$ .

**Exercice 10.** ( $\rightarrow$ ) Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2} dx$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
2. Montrer que  $(u_n)$  est minorée par 0.
3. En minorant  $1 - x^2$ , montrer que  $u_n \leq \frac{4}{3(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ .
4. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 11.** ( $\rightarrow$ ) Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ .

1. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $0 \leq I_n \leq \ln(2)$ .
2. Étudier les variations de la suite  $(I_n)$ .
3. En déduire que la suite  $(I_n)$  converge.

### III - Intégrations par parties

**Exercice 12.** ( $\rightarrow$ ) À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

- |  |  |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\int_0^1 x e^x dx</math>.</li> <li>2. <math>\int_1^2 x e^{2x} dx</math>.</li> <li>3. <math>\int_1^e x \ln(x) dx</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>4. <math>\int_1^2 x^2 \ln(x) dx</math>.</li> <li>5. <math>\int_1^e (\ln(t))^2 dt</math>.</li> <li>6. <math>\int_1^e t^2 e^t dt</math>.</li> </ol> |
|--|--|

**Exercice 13.** ( $\rightarrow$ ) Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$ .

1. Calculer  $u_0$ .
2. Montrer que  $f(t) = (2-t)e^t$  est une primitive de la fonction  $g(t) = (1-t)e^t$ .
3. Déterminer la valeur de  $u_1$ .
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ .
5. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
6. Déterminer la limite de  $(nu_n)$ .

**Exercice 14.** ( $\rightarrow$ ) Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $u_n = \int_1^e t(\ln(t))^n dt$ .

1. Calculer  $u_0$ .
2. a) Montrer que, pour tout  $t \in [1, e]$ ,  $0 \leq \ln(t) \leq 1$ .  
b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n$ .
4. En déduire  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .