

T.D. IV - Matrices inversibles

I - Résolution de systèmes

Exercice 1. (✳) Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{array}{ll}
 1. (S_1) \begin{cases} 5x + y - 2z &= 3 \\ x + 4y + z &= 2 \\ -3x + 2y + 3z &= -2 \end{cases} & 3. (S_3) \begin{cases} x + y - z &= 2 \\ 3x + 5y - z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 1 \end{cases} \\
 2. (S_2) \begin{cases} 2x + 3y - z &= 1 \\ 5x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + y + z &= 5 \end{cases} & 4. (S_4) \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ 3x + 4y - z &= 2 \\ x + 3y + z &= 10 \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{array}{ll}
 1. (S_1) \begin{cases} 2x + y + z + t &= 3 \\ x + y + z + t &= 12 \\ 3x + 2y + 2z + t &= 3 \\ 3x + y + 2z + 3t &= 5 \end{cases} & 2. (S_2) \begin{cases} 2x + 2y + z + t &= 1 \\ x + y + 3z + t &= 2 \\ 3x + y + 2z + 2t &= -1 \\ 3x + y + 2z + 3t &= 5 \end{cases}
 \end{array}$$

II - Inverses par calculs de produits

Exercice 3. (✳) Dans chacune des questions suivantes, calculer le produit AB , en déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} .

$$\begin{array}{ll}
 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}. \\
 2. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \\
 3. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ -4 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner P^{-1} .
- On pose $A = PMP^{-1}$. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$M^n = P^{-1}A^nP.$$

III - Inverses par polynômes de matrices

Exercice 5. On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer M^2 et en déduire que $M^4 = I$.
- En déduire que M est inversible et donner l'expression de M^{-1} en fonction de M .

Exercice 6. (✳) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^3 - 2A^2 - 12A + 19I_3$.
- En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 7. (✱) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 2A^2 + 3A + 14I_3$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 8. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit matriciel $(M - I)(M + 3I)$.
2. En déduire que M est inversible et déterminer son inverse.

IV - Non inversibilité

Exercice 9. (✱) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer α tel que $A^3 = \alpha A$.
2. Montrer par l'absurde que A n'est pas inversible.

Exercice 10. (✱) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3 .
2. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 11. (✱) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et AC .
2. En déduire que A n'est pas inversible.

V - Inversibilité des matrices de taille 2

Exercice 12. (✱) Pour chacune des matrices d'ordre 2 suivante, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse.

- | | | |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. | 3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. | 5. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. |
| 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. | 4. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. | 6. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$. |

Exercice 13. On considère le système

$$\begin{cases} -x + 3y = 11 \\ x + 2y = 9 \end{cases}.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A telle que $AX = Y$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .
3. Utiliser A^{-1} pour résoudre le système.

VI - Inversibilité des matrices diagonales

Exercice 14. (✱) Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse.

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. | 3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. |
| 2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. | 4. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. |

VII - Inversibilité des matrices triangulaires

Exercice 15. (✱) Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible.

$$\begin{array}{l|l} 1. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} 0 & -5 & 75 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 2. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 27 & -4 & 0 \end{pmatrix} & 4. \begin{pmatrix} -3 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

VIII - Inverses par méthodes du pivot

Exercice 16. (✱) Inverser les matrices suivantes en résolvant le système $AX = Y$.

$$\begin{array}{l|l} 1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ 2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 4. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 17. (✱) Inverser les matrices suivantes en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 et en déduire que $M^4 = I$.
2. Calculer $(M - I)(M^3 + M^2 + M + I)$.
3. Montrer que $M - I$ est inversible.
4. En déduire la valeur de $M^3 + M^2 + M + I$.

IX - Calculs de puissances

Exercice 19. (✱) Soit A, B, P des matrices d'ordre 2 telles que P soit inversible. On suppose que $P^{-1}AP = B$. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel ; $A^n = PB^nP^{-1}$.

Exercice 20. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer PQ . En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1} .
2. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
3. Pour tout n entier naturel, expliciter D^n .
4. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire que pour tout n entier naturel,

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 5^n & 0 & 3^n - 5^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 3^n - 5^n & 0 & 3^n + 5^n \end{pmatrix}.$$

6. La matrice D est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.
7. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 21. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

2. Calculer PQ . En déduire que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} .

3. Vérifier que $PM P^{-1} = A$.

4. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel n , $M^n = P^{-1}A^nP$.

5. En déduire que pour tout n entier naturel,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$