T.D. XIV - Nombres complexes

I - Écritures

Solution de l'exercice 1.

1. En développant l'expression,

$$(2+6i)(6+i) = 2(1+3i)(6+i) = 2(6-3+(6+3)i)$$

= $2(3+9i) = 6+18i$.

2. En utilisant une identité remarquable,

$$(4-3i)^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times 3i + (-3i)^2$$

= $16-24i-9 = 7-24i$.

3. En utilisant une identité remarquable,

$$(1-2i)(1+2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1+4=5.$$

4. En utilisant la formule du binôme de Newton,

$$(2-3i)^4 = 2^4 - 4 \times 2^3 \times 3i + 6 \times 2^2 \times (3i)^2 - 4 \times 2 \times (3i)^3 + (3i)^4$$

= 16 - 96i - 216 + 216i + 81 = -119 + 120i.

5. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$\frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{3^2+1} = \frac{3+i}{10}.$$

6. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$\frac{1 - \sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i} = \frac{(1 - \sqrt{3}i)(-1 + \sqrt{3}i)}{(-1)^2 + \sqrt{3}^2}$$
$$= -\frac{(1 - \sqrt{3}i)^2}{1 + 3} = -\frac{1 - 2\sqrt{3}i - 3}{4}$$
$$= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

7. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(1-i)(1-\sqrt{3}i)}{1^2+\sqrt{3}^2}$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{3}i-i}{4}$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i}{4}.$$

Solution de l'exercice 2.

1. $12 = 12 e^{0 i}$.

2.
$$\frac{3}{2}i = \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$$
.

3.
$$-3 = 3 e^{\pi i}$$
.

4.
$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$
.

5.
$$-2i = e^{\pi i} 2 e^{\frac{\pi}{2} i} = 2 e^{\frac{3\pi}{2} i}$$
.

6.
$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{i(-i-1)} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$$
.

7.

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4 = \left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)}\right)^4$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}}\right)^4$$
$$= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}\right)^4$$
$$= \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}.$$

8.

$$-3(\cos(\theta) + \sin(\theta)i) = e^{\pi i} \times 3 \times e^{\theta i} = 3 e^{(\pi + \theta)i}.$$

9. D'après la parité des fonctions cosinus et sinus,

$$2(\cos(2\theta) - \sin(2\theta)i) = 2(\cos(-2\theta) + \sin(-2\theta)i) = 2e^{-2\theta i}$$
.

10.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(1-i) = \left(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}i\right)\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}i\right)$$
$$= e^{-\frac{\pi}{4}i} \times \sqrt{2} \times e^{-\frac{\pi}{4}i}$$
$$= \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

11. En divisant numérateur et dénominateur par 2,

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$
$$= \frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{e^{-\frac{\pi}{3}i}}$$
$$= e^{\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)i}$$
$$= e^{\frac{\pi}{12}i}.$$

12. En utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques,

$$\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \text{ et } \cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Ainsi,

$$\sin(\theta) + \cos(\theta) i) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) i = e^{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) i}.$$

Solution de l'exercice 3.

1. En utilisant la définition du module,

$$|z|^2 = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 1^2}{(1+\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = 1.$$

Ainsi, |z|=1.

2. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$z = \frac{(1+\sqrt{2}+i)(1+\sqrt{2}+i)}{(1+\sqrt{2})^2+1^2}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2})^2+2(1+\sqrt{2})i-1}{1+2\sqrt{2}+2+1}$$

$$= \frac{1+2\sqrt{2}+2+2(1+\sqrt{2})i-1}{2(2+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(1+i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

3. En utilisant la question précédente,

$$z = e^{\frac{\pi}{4}i}$$
.

Or,
$$2021 = 4 \times 505 + 1$$
, soit
$$z^{2021} = e^{\frac{2021}{4}\pi i} = (e^{\pi i})^{505} \times e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$= (-1)^{505} e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$= -e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Solution de l'exercice 4. Comme a et b sont de module 1, il existe θ et φ deux réels tels que $a = e^{\theta i}$ et $b = e^{\varphi i}$. Alors,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{e^{\theta i} + e^{\varphi i}}{e^{\theta i} - e^{\varphi i}}$$

$$= \frac{e^{\frac{\theta + \varphi}{2} i}}{e^{\frac{\theta + \varphi}{2} i}} \frac{e^{\frac{\theta - \varphi}{2} i} + e^{-\frac{\theta - \varphi}{2} i}}{e^{\frac{\theta - \varphi}{2} i} - e^{-\frac{\theta - \varphi}{2} i}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\theta - \varphi}{2}}{2i\sin\frac{\theta - \varphi}{2}}$$

$$= -\frac{\cos\frac{\theta - \varphi}{2}}{\sin\frac{\theta - \varphi}{2}}$$

$$\in i \mathbb{R}$$

Solution de l'exercice 5.

1. Comme $x \notin \pi \mathbb{Z}$, alors $e^{xi} \neq 0$. Ainsi, d'après la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kx i} = \frac{1 - e^{(n+1)x i}}{1 - e^{x i}}$$

$$= \frac{e^{\frac{n+1}{2}x i}}{e^{\frac{x}{2}i}} \times \frac{e^{-\frac{n+1}{2}x i} - e^{\frac{n+1}{2}x i}}{e^{-\frac{x}{2}i} - e^{\frac{x}{2}i}}$$

$$= e^{\frac{n}{2}x i} \frac{-2i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{\frac{n}{2}x i}.$$

2. En utilisant l'expression précédente,

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)\right)i = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{n}{2}x\right) + \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\right).$$

Ainsi, en identifiant les parties réelles et imaginaires.

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{n}{2}x\right),$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{n}{2}x\right).$$

II - Résolution d'équations

Solution de l'exercice 6.

1. Le discriminant vaut $-9 = -3^2$. Ainsi, les solutions sont

$$-3i$$
 et $3i$.

2. Le discriminant vaut $(-1)^2 - 4 = -3$. Ainsi, les solutions sont

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{ et } \frac{1+\sqrt{3}i}{2}.$$

3. Le discriminant vaut $1^2 - 4 = -3$. Ainsi, les solutions sont

$$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
 et $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

4. On écrit $3z^2-6z+6=3(z^2-2z+2)$. Le discriminant vaut $(-2)^2-4\times 2=-4$. Ainsi, les solutions sont

$$\frac{2-2i}{2} = 1-i$$
 et $\frac{2+2i}{2} = 1+i$.

5. On pose $x=z^2$. Alors, $x^2+x+1=0$. Le discriminant vaut $1^2-4=-3$ donc les solutions sont

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$
 et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

On remarque que

$$x_1 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{32}}{i}\right) = e^{\pi i} e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{4\pi}{3}i}.$$

Donc,
$$x_2 = \overline{x_1} = e^{-\frac{4\pi}{3}i}$$
.
Ainsi, $z^2 \in \left\{ e^{\frac{4\pi}{3}i}, e^{-\frac{4\pi}{3}i} \right\}$.
* Si $z^2 = x_1 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$, alors

$$z \in \left\{ e^{\frac{4\pi}{6}i}, -e^{\frac{4\pi}{6}i} \right\}.$$

* Si
$$z^2 = x_2 = e^{\frac{-4\pi}{3}i}$$
, alors
$$z \in \left\{ e^{\frac{-4\pi}{6}i}, -e^{\frac{-4\pi}{6}i} \right\}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ e^{\frac{4\pi}{6}\,\mathrm{i}},\, -e^{\frac{4\pi}{6}\,\mathrm{i}},\, e^{\frac{-4\pi}{6}\,\mathrm{i}},\, -e^{\frac{-4\pi}{6}\,\mathrm{i}} \right\}.$$

6. En posant $x_1 = e^{\theta i}$ et $x_2 = e^{-\theta i}$, on constate que

$$x_1 + x_2 = 2\cos(\theta),$$

$$x_1 \times x_2 = 1.$$

Ainsi, d'après les relations coefficients / racines, x_1 et x_2 sont racines du trinôme $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. Finalement, l'ensemble des solutions recherchées est donc

 $\left\{ e^{\theta i}, e^{-\theta i} \right\}.$

Solution de l'exercice 7.

1. D'après les propriétés du module, $|z|^n = |1| = 1$. Comme |z| est un réel strictement positif, alors |z| = 1.

2. Comme $z^n = e^{\theta i} = 1 = e^{0 i}$, alors

$$n\theta \equiv 0 \ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \exists \ k \in \mathbb{Z} \ ; \ n\theta = 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists \ k \in \mathbb{Z} \ ; \ \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

3. a) L'ensemble des solutions de $z^2 = 1$ est $\{-1, 1\}$.

b) D'après la question précédente, si $z^3=1$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $z=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{3}\,\mathrm{i}}$. En utilisant la $2\pi\,\mathrm{i}$ -périodicité de l'exponentielle, l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{1, e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{\frac{4\pi}{3}i}\right\}.$$

Les images sont les sommets d'un triangle équilatéral.

c) D'après la question précédente, si $z^4=1$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $z=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{4}}$ i. En utilisant la 2π i-périodicité de l'exponentielle, l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{1,\,e^{\frac{2\pi}{4}\,i},\,e^{\frac{4\pi}{4}\,i},\,e^{\frac{6\pi}{4}\,i}\right\} = \left\{1,\,i,\,-1,\,-\,i\right\}.$$

Les images sont les sommets d'un carré.

d) D'après la question précédente, si $z^5=1$, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $z=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}}$ i. En utilisant la 2π i-périodicité de l'exponentielle, l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{1, e^{\frac{2\pi}{5}i}, e^{\frac{4\pi}{5}i}, e^{\frac{6\pi}{5}i}, e^{\frac{8\pi}{5}i}\right\}.$$

Les images sont les sommets d'un pentagone régulier.

III - Géométrie

Solution de l'exercice 8.

a) On utilise la définition du module puis l'hypothèse :

$$|1+z|^{2} + |1-z|^{2} = (1+z) \cdot (1+\overline{z}) + (1-z) \cdot (1-\overline{z})$$

$$= 1+z+\overline{z}+|z|^{2}+1-\overline{z}-z+|z|^{2}$$

$$= 4.$$

b) Il s'agit du théorème de Pythagore! En effet, les points d'affixes A, B et C d'affixes 1, z et -1 sont disposés sur le cercle unité et forment un triangle rectangle en le point d'affixe z. De plus, les points A et C sont les extrémités du diamètre de longeur 2. Le théorème de Pythagore assure donc que

$$BA^{2} + BC^{2} = AC^{2}$$
$$|z - 1|^{2} + |-1 - z|^{2} = 2^{2}$$
$$|1 - z|^{2} + |1 + z|^{2} = 4.$$

On remarque qu'il s'agit également d'un cas particulier de l'identité du parallélogramme. Si on note A(1+z), B(z-1), C(-1-z) et D(1-z), alors ABCD forme un losange de côté 2. L'identité du parallélogramme assure que la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés, soit

$$AD^{2} + BC^{2} = AB^{2} + BC^{2} + CD^{2} + DA^{2}$$
$$(2|1-z|)^{2} + (2|1+z|)^{2} = 4 \times 2^{2}$$
$$|1-z|^{2} + |1+z|^{2} = 4.$$

D 2

T.D. XIV - Nombres complexes

Solution de l'exercice 9.

1. La transformation associée à f est donc la rotation de centre d'affixe $1+\mathrm{i}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. f est la translation d'affixe 12 + 16i.

3. Comme $f(z) = e^{\frac{\pi}{2}i}z + 1$. Si $f(\omega) = \omega$, alors $\omega = \frac{1+i}{2}$. Ainsi,

$$f(z) = i(z - \omega) + \omega = e^{\frac{\pi}{2}i}(z - \omega) + \omega.$$

Ainsi, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont le centre est d'affixe $\frac{1+i}{2}$.

Solution de l'exercice 10. Un nombre complexe est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué. Ainsi, en raisonnant par équivalences,

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2} \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2} = \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2}}$$

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2} = \left(\overline{\frac{z+1}{z-1}}\right)^{2}$$

$$(z+1)^{2}(\overline{z}-1)^{2} = (\overline{z}+1)^{2}(z-1)^{2}$$

$$(z^{2}+2z+1)(\overline{z}^{2}-2\overline{z}+1) = (\overline{z}^{2}+2\overline{z}+1)(z^{2}-2z+1)$$

$$-2z^{2}\overline{z}+2z\overline{z}^{2}+2z-2\overline{z}=-2z\overline{z}^{2}+2\overline{z}z^{2}+2\overline{z}-2z$$

$$z\overline{z}^{2}-z^{2}\overline{z}+z-\overline{z}=0$$

$$|z|^{2}(\overline{z}-z)+(z-\overline{z})=0$$

$$(z-\overline{z})(1-|z|^{2})=0.$$

Ainsi,

* soit $z - \overline{z} = 0$, i.e. $z = \overline{z}$ et z est réel,

* soit $1 - |z|^2 = 0$ soit |z| = 1.

Comme $z \neq 1$, l'ensemble des solutions est donc

$$(\mathbb{R} \cup \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}) \setminus \{1\}.$$