

## T.D. VIII - Réduction des matrices carrées

### I - Valeurs propres / Vecteurs propres

**Exercice 1.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $X_1$  est un vecteur propre de  $A$  et préciser la valeur propre associée.

**Exercice 2.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $X_1$  est un vecteur propre de  $A$  et préciser la valeur propre associée.

**Exercice 3.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $X_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $X_1$  et  $X_2$  sont des vecteurs propres de  $A$  et préciser les valeurs propres associées.

**Exercice 4.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $X_1$  et  $X_2$  sont des vecteurs propres de  $A$  et préciser les valeurs propres associées.

**Exercice 5.** Soit  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 6 \\ -5 & -3 & 6 \\ -6 & -6 & 10 \end{pmatrix}$ ,  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont des vecteurs propres de  $A$  et préciser les valeurs propres associées.

**Exercice 6.** Soit  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & -7 & 6 \\ -7 & 9 & 6 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont des vecteurs propres de  $A$  et préciser les valeurs propres associées.

### II - Polynômes annulateurs

**Exercice 7.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Exprimer  $A^2$  en fonction de  $A$ . En déduire un polynôme annulateur de  $A$ .

2. En déduire les valeurs propres possibles de  $A$ .

On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

3. Montrer que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .

4. Calculer  $P^{-1}AP$  et en déduire que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 8.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Exprimer  $A^2$  en fonction de  $A$ . En déduire un polynôme annulateur de  $A$ .

2. En déduire les valeurs propres possibles de  $A$ .

On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

3. Montrer que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .

4. Calculer  $P^{-1}AP$  et en déduire que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 9.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $R(X) = X^3 + X^2 - 4X - 4$ .

1. Montrer que  $R$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

2. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

3. Déterminer  $R(2)$  et en déduire qu'il existe un polynôme  $Q$ , dont on précisera le degré, tel que  $R(X) = (X - 2)Q(X)$ .

4. Effectuer la division euclidienne de  $R(X)$  par  $(X - 2)$  et en déduire la valeur de  $Q(X)$ .

5. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice  $A$ .

On pose  $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

6. Vérifier que  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont des vecteurs propres de  $A$  et préciser les valeurs propres associées.

On pose  $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

7. Vérifier que  $AP = PD$  et en déduire que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 10.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $R(X) = X^3 + 3X^2 - 4X - 12$ .

1. Montrer que  $R$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

2. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

3. Déterminer  $R(2)$  et en déduire qu'il existe un polynôme  $Q$ , dont on précisera le degré, tel que  $R(X) = (X - 2)Q(X)$ .

4. Effectuer la division euclidienne de  $R(X)$  par  $(X - 2)$  et en déduire la valeur de  $Q(X)$ .

5. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice  $A$ .

On pose  $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

6. Vérifier que  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont des vecteurs propres de  $A$  et préciser les valeurs propres associées.

On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

7. Vérifier que  $AP = PD$  et en déduire que  $A$  est diagonalisable.

### III - Calculs de puissances

**Exercice 11.** Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites définies par  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = -1$ ,  $w_0 = 2$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= -3u_n + 4v_n - w_n \\ v_{n+1} &= 2v_n \\ w_{n+1} &= -4v_n + 2w_n \end{cases}.$$

1. Déterminer les valeurs de  $u_1$ ,  $v_1$  et  $w_1$ .

2. Pour tout  $n$  entier naturel, exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

On pose  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

3. Vérifier que  $PA = DP$  et en déduire que  $A$  est diagonalisable.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

4. En déduire par récurrence que, une expression de  $A^n$  en fonction de  $D^n$ ,  $P^{-1}$  et  $P$ .

5. Déterminer  $D^n$  et en déduire les 9 coefficients de  $A^n$ .

Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ .

6. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $U_{n+1} = AU_n$ .

7. Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,  $U_n = A^n U_0$ .

8. En déduire les expressions de  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$ .

**Exercice 12.** Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites définies par  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = -1$ ,  $w_0 = 2$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + w_n \\ v_{n+1} &= 2v_n - 4w_n \\ w_{n+1} &= -2w_n \end{cases}.$$

1. Déterminer les valeurs de  $u_1$ ,  $v_1$  et  $w_1$ .

2. Pour tout  $n$  entier naturel, exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .

On pose  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**3.** Vérifier que  $PA = DP$  et en déduire que  $A$  est diagonalisable.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**4.** En déduire par récurrence que, une expression de  $A^n$  en fonction de  $D^n$ ,  $P^{-1}$  et  $P$ .

**5.** Déterminer  $D^n$  et en déduire les 9 coefficients de  $A^n$ .

Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ .

**6.** Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $U_{n+1} = AU_n$ .

**7.** Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,  $U_n = A^n U_0$ .

**8.** En déduire les expressions de  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$ .