

# IX - Suites numériques

## I - Suites usuelles

### À Savoir

La suite  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr.$$

### Exemple 1 - Une suite arithmétique

Soit  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + 3$ .  
Alors,  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison 3. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 3n.$$

### À Savoir

La suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n.$$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0.$$

### Exemple 2 - Une suite géométrique

Soit  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 2u_n$ . Alors,  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison 2. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n.$$

### À Savoir

La suite  $(u_n)$  est une suite arithmético-géométrique si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n + r.$$

### Exemple 3 - Une suite arithmético-géométrique

L'étude d'une suite arithmético-géométrique suit toujours le schéma suivant.

Soit  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 7$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 3$ .

\* Recherche du réel  $\ell$  tel que  $\ell = 2\ell + 3$  :

$$\ell = 2\ell + 3$$

$$0 = 2\ell - \ell + 3$$

$$\ell = -3.$$

\* Étude de la suite définie par  $v_n = u_n - \ell$ . Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$$

$$= (2u_n + 3) - (2\ell + 3)$$

$$= 2u_n + 3 - 2\ell - 3$$

$$= 2(u_n - \ell)$$

$$= 2v_n.$$

De plus,  $v_0 = u_0 - \ell = 7 - (-3) = 10$ .

Ainsi,  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 10 \times 2^n.$$

\* Retour sur  $u_n$ . D'après la définition,

$$u_n - \ell = v_n$$

$$u_n = v_n + \ell$$

$$= 10 \times 2^n - 3 = 5 \times 2^{n+1} - 3.$$

## II - Comportement des suites

### À Savoir

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels.

\* La suite  $(u_n)$  est croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

\* La suite  $(u_n)$  est décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

### Exemple 4 - Études de monotonie

\* On définit  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est croissante.

\* Soit  $t \in ]0, 1[$ . On définit  $v_n = \ln(1 + t^n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $t \in ]0, 1[$ ,

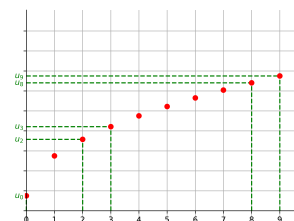
$$\begin{aligned} t &\leq 1 \\ t^n \times t &\leq t^n \times 1, \text{ car } t^n \geq 0 \\ 1 + t^{n+1} &\leq 1 + t^n \\ \ln(1 + t^{n+1}) &\leq \ln(1 + t^n), \text{ car } \ln \text{ est croissante} \\ v_{n+1} &\leq v_n \\ v_{n+1} - v_n &\leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(v_n)$  est croissante.

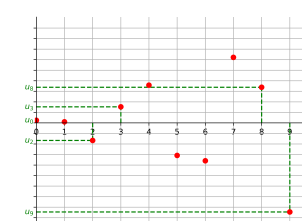
**Attention !** Il convient de travailler avec un entier naturel  $n$  **quelconque**. Montrer que  $u_1 - u_0 \geq 0$  ou  $u_2 - u_1 \geq 0$  n'est d'aucune utilité pour étudier la monotonie d'une suite.

### Exemple 5 - Représentations graphiques

**Suite croissante.**



**Suite non monotone.**



### À Savoir

Soit  $(u_n)$  une suite de réels.

- \* La suite  $(u_n)$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq M$ .
- \* La suite  $(u_n)$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq m$ .

### Exemple 6 - Étude de majorant

Soit  $t \in ]0, 1[$ . On définit  $v_n = \ln(1 + t^n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

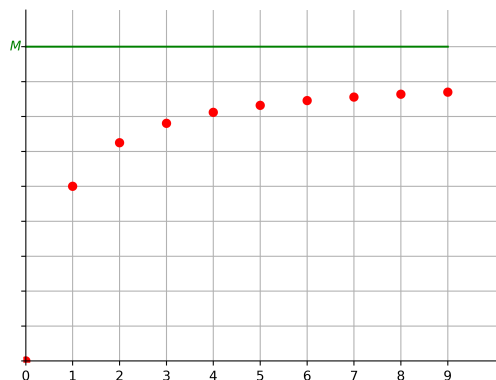
Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $t \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} t &\leq 1 \\ t^n &\leq 1^n, \text{ car les puissances sont croissantes sur } \mathbb{R}_+ \\ 1 + t^n &\leq 2 \\ \ln(1 + t^n) &\leq \ln(2), \text{ car } \ln \text{ est croissante} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(v_n)$  est majorée par  $\ln(2)$ .

**Attention!** Le minorant ou le majorant **ne** doit **pas** dépendre de l'indice  $n$ .

### Exemple 7 - Représentation graphique



### À Savoir

La suite  $(u_n)$  est convergente s'il existe un réel  $\ell$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ . Sinon, la suite  $(u_n)$  est dite divergente.

### À Savoir

#### Limites classiques

Soit  $a > 0$ . Les limites suivantes sont à connaître :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^a} = 0, \text{ si } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty, \text{ si } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t^n = 0, \text{ si } t \in ]-1, 1[$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty, \text{ si } a > 1$$

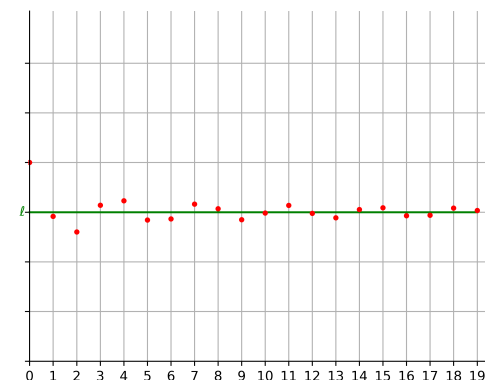
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n^5 + 3n + 1}{n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n^5}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -4n^3 = -\infty$$

Les limites des polynômes ou des fractions rationnelles sont données par les limites des monômes de plus haut degré ou de leur quotient.

### Exemple 8 - Représentation graphique



### III - Opérations sur les limites

#### À Savoir

Si la case indique ??, la limite est indéterminée. Il faut transformer l'expression (factorisation, expression conjuguée,...) pour pouvoir la déterminer.

\* **Multiplication** par une constante.

|                                       |         |           |           |            |
|---------------------------------------|---------|-----------|-----------|------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$  | $\ell$  | $-\infty$ | $+\infty$ |            |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} ku_n =$ | $k\ell$ | $-\infty$ | $+\infty$ | si $k > 0$ |
|                                       | $k\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | si $k < 0$ |
|                                       | 0       | 0         | 0         | si $k = 0$ |

\* **Addition** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ .

| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ | $\ell_1$          | $-\infty$ | $+\infty$ |
|--|-------------------|-----------|-----------|
| $\ell_2$   | $\ell_1 + \ell_2$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$  | $-\infty$         | $-\infty$ | ??        |
| $+\infty$  | $+\infty$         | ??        | $+\infty$ |

\* **Multiplication** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$ .

| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ | $\ell_1 < 0$    | $\ell_1 > 0$    | 0  | $-\infty$ | $+\infty$ |
|--|-----------------|-----------------|----|-----------|-----------|
| $\ell_2 < 0$   | $\ell_1 \ell_2$ | $\ell_1 \ell_2$ | 0  | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell_2 > 0$   | $\ell_1 \ell_2$ | $\ell_1 \ell_2$ | 0  | $-\infty$ | $+\infty$ |
| 0  | 0               | 0               | 0  | ??        | ??        |
| $-\infty$  | $+\infty$       | $-\infty$       | ?? | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$  | $-\infty$       | $+\infty$       | ?? | $-\infty$ | $+\infty$ |

\* **Quotient** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$ .

| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ | $\ell_1 < 0$            | $\ell_1 > 0$            | $0^-$     | $0^+$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
|--|-------------------------|-------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\ell_2 < 0$   | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$     | $0^-$     |
| $\ell_2 > 0$   | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0^-$     | $0^+$     |
| $0^-$  | $0^+$                   | $0^-$                   | ??        | ??        | $0^+$     | $0^-$     |
| $-\infty$  | $+\infty$               | $-\infty$               | $+\infty$ | $-\infty$ | ??        | ??        |
| $+\infty$  | $-\infty$               | $+\infty$               | $-\infty$ | $+\infty$ | ??        | ??        |

#### Exemple 9 - Opérations sur les limites

- \* Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} - 5 \ln(n) \right) = -\infty$ .
- \* Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{n^2} = 0$ .
- \* Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - n^5$  est une forme indéterminée. On va utiliser une factorisation pour lever l'indétermination :

$$n^3 - n^5 = n^5 \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right).$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) = -1$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 = +\infty$ . Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) = -\infty.$$

**À Savoir**

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de réels telles que, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_n \leq v_n$ .

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

**À Savoir****Théorème d'encadrement.**

Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites de réels tels que pour tout  $n$  entier naturel,

$$v_n \leq u_n \leq w_n.$$

- \* Si  $(v_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers une même limite  $\ell$ , alors  $(u_n)$  converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

- \* Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- \* Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**Exemple 10 - Théorème d'encadrement**

- \* Soit  $(u_n)$  une suite de réels telle que pour tout  $n$  entier naturel non nul,

$$\frac{n^5 + n^3 + 1}{2n(1 + n^4)} \leq u_n \leq \frac{n^5 + n^4 + 1}{2n(1 + n^4)}.$$

Comme la limite d'une fraction rationnelle est égale au rapport de ses monômes de plus hauts degrés,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5 + n^3 + 1}{2n(1 + n^4)} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5 + n^4 + 1}{2n(1 + n^4)} = \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème d'encadrement,  $(u_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ .

- \* Soit  $(u_n)$  une suite de réels telle que pour tout  $n$  entier naturel,

$$\frac{n^4 + n^3 + 1}{n^2} \leq u_n.$$

Comme la limite d'une fraction rationnelle est égale au rapport de ses monômes de plus hauts degrés,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + n^3 + 1}{n^2} = +\infty.$$

D'après le théorème d'encadrement,  $(u_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**IV - Existence de limites****À Savoir****Théorème de la limite monotone.**

Soit  $(u_n)$  une suite de réels.

- \* Si  $(u_n)$  est croissante et majorée, alors  $(u_n)$  converge.
- \* Si  $(u_n)$  est décroissante et minorée, alors  $(u_n)$  converge.

**Attention!** Ce théorème **ne** fournit **pas** la valeur de la limite. Pour cela, il faudra se reporter à une des techniques précédentes.

**Exemple 11 - Limite monotone**

Soit  $(u_n)$  une suite telle que

$$u_0 = -2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3.$$

- \* Montrons par récurrence que  $(u_n)$  est majorée par 6.  
**Initialisation.** Pour  $n = 0$ ,  $u_0 = -2 \leq 6$  donc la propriété est vraie à l'ordre 0.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $u_n \leq 6$ . Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + 3 \\ &\leq \frac{6}{2} + 3, \text{ d'après l'H.R.} \\ &\leq 6. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre  $n + 1$ .

**Conclusion.** La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 6.$$

\* Étudions la monotonie de  $(u_n)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{2} + 3 - u_n \\ &= 3 - \frac{1}{2}u_n \\ &\geq 3 - \frac{1}{2}6, \text{ car } u_n \leq 6 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est croissante.

\* La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 6. D'après le théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge.

\* Notons  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$  et en passant à la limite dans l'égalité,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + 3 \\ \ell &= \frac{\ell}{2} + 3 \\ \frac{\ell}{2} &= 3 \\ \ell &= 6. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$ .