

# IV - Matrices inversibles

## Révisions

Résolution de systèmes par méthode du pivot de Gauss.

### Exemple 1

On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 7y = 6 \end{cases}.$$

On remarque que ce système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

La résolution du système s'effectue en suivant la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 7y = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 17y = 17 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{5-3y}{2} = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du système est égale à (1, 1).

## I - Inversibilité

### Définition 1 - Matrice inversible

Une matrice  $A$  d'ordre  $p$  est *inversible* s'il existe une matrice  $B$  telle que  $AB = I_p$ . La matrice  $B$  est l'*inverse* de  $A$  et notée  $A^{-1}$ .

### Exemple 2 - Matrices inversibles et non inversibles

- On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Comme  $AB = I_2$ , alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Comme  $I_p \times I_p = I_p$ , alors  $I_p$  est inversible et son inverse est  $I_p$ .
- Comme  $0_p \times A = 0_p \neq I_p$  pour toute matrice carrée  $A$ , alors la matrice nulle n'est pas inversible.
- Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ . En utilisant la définition du produit matriciel, on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B$ .

### Proposition 1 - Inversibilité et produit

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $p$ .

- Si  $AB = I_p$ , alors  $BA = I_p$ . Ainsi,  $A^{-1} = B$  et  $B^{-1} = A$ .
- Si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}$  est inversible et

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

- Si  $A$  et  $B$  sont inversibles, alors  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

### Exemple 3

- Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

En utilisant la définition du produit matriciel, on remarque que

$$M^2 - 2M + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} M^2 - 2M &= -I_3 \\ -(M^2 - 2M) &= I_3 \\ 2M - M^2 &= I_3 \\ M(2I_3 - M) &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi,  $M$  est inversible et  $M^{-1} = 2I_3 - M$ .

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

★ D'une part,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

★ D'autre part,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } B \text{ est inversible et } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc,  $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible et son inverse vaut

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

## II - Calculs de puissances

### Théorème 1 - Puissance et relation $PDP^{-1}$ ⚙️

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $p$ . On suppose qu'il existe une matrice  $P$  inversible d'ordre  $p$  et une matrice diagonale  $D$  d'ordre  $p$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . Alors, pour tout  $n$  entier naturel,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

### Exemple 4

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche les coefficients de  $A^n$  pour tout  $n$  entier naturel.

- On pose  $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . En utilisant la définition du produit matriciel,

$$PQ = I_3.$$

Ainsi,  $P$  est inversible et  $P^{-1} = Q$ .

- On calcule aisément

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, PD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$AP = PD$$

$$APP^{-1} = PDP^{-1}$$

$$AI_3 = PDP^{-1}$$

$$A = PDP^{-1}.$$

- Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

**Initialisation.** Lorsque  $n = 0$ .

★ D'une part,  $A^0 = I_3$ .

★ D'autre part,  $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ .

Ainsi,  $A^0 = PD^0P^{-1}$  et la propriété est vraie à l'ordre 0.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $A^n = PD^nP^{-1}$ . On veut montrer que  $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ . En effet,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= PD^nP^{-1}A, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \text{ d'après le point précédent} \\ &= PD^nI_3DP^{-1}, \text{ car } PP^{-1} = I_3 \\ &= PD^nDP^{-1}, \text{ car } I_3D = D \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre  $n + 1$ .

**Conclusion.** Finalement, l'a propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.$$

- D'après le résultat précédent,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n & 1 - 3^n \\ 0 & 3^n & 1 - 3^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### III - Critères d'inversibilité

#### III.1 - Cas des matrices diagonales

##### Proposition 2 - Inversibilité des matrices diagonales

Soit  $D$  une matrice diagonale.

- Si  $D$  possède au moins un 0 sur la diagonale, alors  $D$  n'est pas inversible.
- Si tous les coefficients diagonaux de  $D$  sont non nuls, alors  $D$  est inversible. Alors,  $D^{-1}$  est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de  $D$ .

##### Exemple 5

- Soit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . La matrice  $D$  est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3. Comme ils sont tous non nuls, la matrice  $D$  est inversible et  $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .
- Soit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . La matrice  $D$  est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1 et 0. Comme l'un des coefficients diagonaux est non nul, la matrice  $D$  n'est pas inversible.
- Soit  $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  est diagonale et ses coefficients diagonaux sont  $-3$ ,  $3$  et  $10$ . Comme ils sont tous non nuls, la matrice  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ .

- Soit  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ . La matrice  $B$  est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1, 0 et  $-2$ . Comme un des coefficients diagonaux est nul, la matrice  $B$  n'est pas inversible.

### III.2 - Cas des matrices triangulaires

#### Proposition 3 - Inversibilité des matrices triangulaires

Soit  $T$  une matrice triangulaire.

- Si  $T$  possède au moins un 0 sur la diagonale, alors  $T$  n'est pas inversible.
- Si tous les coefficients diagonaux de  $T$  sont non nuls, alors  $T$  est inversible.

#### Exemple 6

- Soit  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . La matrice  $T$  est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont 1,  $-1$  et 2. Comme  $T$  est triangulaire inférieure et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors  $T$  est inversible.
- Soit  $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . La matrice  $T$  est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont 0 et 1. Comme  $T$  est triangulaire supérieure et que 0 est un coefficient diagonal de  $T$ , alors  $T$  n'est pas inversible.
- Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1. Comme  $A$  est triangulaire supérieure et que tous ses coef-

ficients diagonaux sont non nuls, alors  $A$  est inversible.

- Soit  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $B$  est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont 1, 0 et  $-1$ . Comme  $B$  est triangulaire inférieure et qu'un de ses coefficients diagonaux est nul, alors  $B$  n'est pas inversible.
- Soit  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0,01 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $C$  est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont 1, 0,01 et  $-1$ . Comme  $C$  est triangulaire inférieure et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors  $C$  est inversible.

### III.3 - Cas des matrices carrées d'ordre 2

#### Proposition 4 - Inversibilité des matrices d'ordre 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice d'ordre 2.

- Si  $ad - cb = 0$ , alors la matrice  $A$  n'est pas inversible.
- Si  $ad - cb \neq 0$ , alors la matrice  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

#### Exemple 7 - ⚙️

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Comme  $2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$  est non nul, alors  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Comme  $1 \times 4 - 3 \times 2 = -2$  est non nul,

alors  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Soit  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Comme  $1 \times 1 - 2 \times 2 = -3$  est non nul, alors  $B$  est inversible et

$$B^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Soit  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Comme  $1 \times 2 - 2 \times 1 = 0$ , alors  $C$  n'est pas inversible.

### III.4 - Non inversibilité

#### Proposition 5

Soit  $A$  une matrice inversible d'ordre  $p$  et  $B, C$  deux matrices carrées d'ordre  $p$ .

- Si  $AB = AC$ , alors  $B = C$ .
- Si  $BA = CA$ , alors  $B = C$ .

#### Exemple 8 - Preuve de non inversibilité

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .  
On remarque que  $AB = AC$ . Supposons par l'absurde que  $A$  soit inversible. Alors,  $B = C$ . Cependant,  $B \neq C$ . Ainsi,  $A$  n'est pas inversible.
- Soit  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On remarque que  $N \times N = 0_2$ .  
Supposons par l'absurde que  $N$  soit inversible. Comme  $N \times N = N \times 0_2$ , alors  $N = 0_2$ . On obtient ainsi une

contradiction et  $N$  n'est pas inversible.

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . À l'aide de la définition du produit matriciel, on remarque que

$$A^2 - 3A = 0_3.$$

Ainsi,  $A(A - 3I_3) = 0_3$ .

Supposons par l'absurde que  $A$  soit inversible. Alors, il existe une matrice  $A^{-1}$  telle que  $A^{-1}A = I_3$ . Ainsi, en reprenant l'équation précédente,

$$\begin{aligned} A(A - 3I_3) &= 0_3 \\ A^{-1}A(A - 3I_3) &= A^{-1}0_3 \\ I_3(A - 3I_3) &= 0_3 \\ A - 3I_3 &= 0_3 \\ A &= 3I_3 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une contradiction et la matrice  $A$  n'est donc pas inversible.

## IV - Systèmes linéaires & Calculs d'inverses

### IV.1 - Résolution de systèmes

#### Théorème 2 - Inversibilité & Systèmes linéaires

Soit un système écrit sous forme matricielle  $AX = Y$ . Le système admet une unique solution si et seulement si  $A$  est inversible. Alors,  $X = A^{-1}Y$ .

**Exemple 9 - ⚙️**

Nous cherchons à résoudre le système  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$ .

En posant  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ , le système s'écrit  $AX = Y$ .

Comme  $1 \times 4 - 3 \times 2 = -2 \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible et  $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi, le système possède une unique solution et

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}Y = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 18 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $x = -9$  et  $y = \frac{13}{2}$ .

**IV.2 - Calculs d'inverses****Théorème 3 - Inverse & Système linéaire**

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $p$ . La matrice  $A$  est inversible si et seulement s'il existe une matrice  $B$  telle que pour toutes  $X, Y$  matrices colonnes, le système  $AX = Y$  s'écrit  $X = BY$ . Alors,  $A^{-1} = B$ .

**Exemple 10 - Inverse par résolution de  $AX = Y$ , ⚙️**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On pose  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . En

utilisant la méthode du pivot de Gauss,

$$AX = Y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ -x + y + z = b \\ x + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ 2y + 2z = a + b & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ y = a - c & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + y = a \\ 2z + 2y = a + b \\ y = a - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ z = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c \\ y = a - c \end{cases}$$

En posant  $B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ , alors  $X = BY$ . D'où,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 11 - Méthode de Gauss-Jordan, ⚙️**

On place les matrices  $A$  et  $I$  côte à côte. On transforme la matrice  $A$  en la matrice  $I$  à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

On effectue les mêmes opérations sur  $I$ .

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\
 \hline
 2 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\
 \hline
 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\
 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\
 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3
 \end{array}$$

On obtient ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$