XI - Fonctions de plusieurs variables

- p désigne un entier naturel non nul.
- Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ désigne la norme de x. Si $n = 1$, $\|x\| = |x|$ est la valeur absolue de x. Si $n = 2$, on retrouve la norme usuelle.
- U désigne une partie de $\mathbb{R}^n$ pour laquelle, en tout point x_0, tous les points suffisamment proches de x_0 appartiennent à U. Formellement,

$$\forall\, x_0 \in U, \exists\, \varepsilon > 0\ ;\ \forall\, h \in \mathbb{R}^n,\ \|h\| \leqslant \varepsilon \ \Rightarrow\ x_0 + h \in U.$$

  Cela permet d'approcher les points de x_0 dans toutes les directions et définir les notions de continuité et de dérivabilité.
- Lorsque $n = 2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on peut représenter graphiquement f dans un repère à 3 dimensions : les arguments de f sont les abscisses et ordonnées, la valeur $f(x, y)$ est représentée selon la composante de hauteur. On rencontre de telles surfaces par exemple pour représenter le relief d'un massif montagneux.

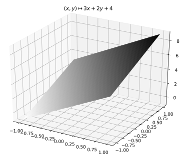
Définition 1 - Continuité (H.P.)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. La fonction f est *continue* en a si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'image par f de tout point suffisamment proche de a est à distance au plus ε de $f(a)$. Formellement,

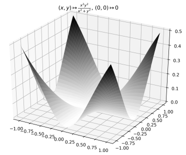
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0\ ;\ \forall\, x \in U,\ \|x - a\| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemple 1 - Continuité des fonctions

- Lorsque $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la notion de continuité coïncide avec celle vue sur $\mathbb{R}$.
- Si f est une fonction constante, alors $f(x) = f(a)$ pour tout $(x, a) \in U^2$ donc l'application f est continue.
- La multiplication par un réel, la somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues est une fonction continue. Ainsi, les fonctions classiques sont continues.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.



- Lorsque f est définie par morceaux, on tente de majorer $|f(x) - f(a)|$ par une constante qui tend vers 0 lorsque x tend vers a. Par exemple, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$ et $f(0, 0) = 0$. Une représentation graphique de cette fonction est la suivante :



  ⋆ D'après les propriétés des fonctions continues, comme $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

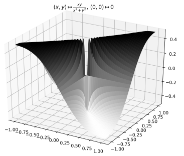
  ⋆ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned}|f(x, y) - f(0, 0)| &= \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{x^2 + y^2} \\ &\leqslant \frac{\|(x, y)\|^2}{4} = \frac{\|(x, y) - (0, 0)\|^2}{4}.\end{aligned}$$

  Ainsi, si (x, y) est suffisamment proche de $(0, 0)$, alors $f(x, y)$ est suffisamment proche de 0. La fonction f est donc continue en $(0, 0)$.

Finalement, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- À titre d'exemple, la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, $f(x,x) = \frac{1}{2}$ donc même si (x,x) est très proche de $(0,0)$ son image sera éloignée de $f(0,0) = 0$. Sa représentation graphique est la suivante :

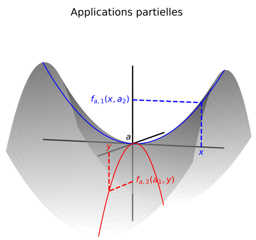


I - Applications partielles

I.1 - Définitions

Définition 2 - Application partielle

Pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ et $i \in [\![1, n]\!]$, l'*application partielle* en a selon la i-ème composante est définie par $f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$. De plus, il existe un intervalle ouvert non trivial $U_{a,i}$ contenant a_i tel que $f_{a,i}$ soit définie sur $U_{a,i}$.



Exemple 2 - Applications partielles

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et elle possède une seule application partielle (elle-même).
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 3x+2y+4$. Au point $a = (2,5)$, la fonction f possède deux applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto 3x + 14 \\ f_{a,2} &: y \mapsto 2y + 10 \end{aligned}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. Au point $a = (4,3)$, la fonction f possède deux applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto f(x,3) = x^2 + 9 - 6x, \\ f_{a,2} &: y \mapsto f(4,y) = 16 + y^2 - 8y. \end{aligned}$$

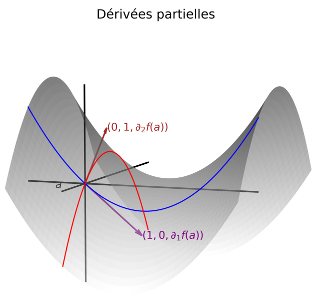
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x + 3y\,\mathrm{e}^z$. Au point $a = (0,4,1)$, la fonction f possède trois applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto f(x,4,1) = \mathrm{e}^x + 12\,\mathrm{e}, \\ f_{a,2} &: y \mapsto f(0,y,1) = 1 + 3\,\mathrm{e}\,y, \\ f_{a,3} &: z \mapsto f(0,4,z) = 1 + 12\,\mathrm{e}^z. \end{aligned}$$

I.2 - Dérivées partielles

Définition 3 - Dérivées partielles

La fonction f admet une *dérivée partielle* en a par rapport à la i-ème variable si l'application partielle $f_{a,i}$ admet une dérivée en a_i. Cette valeur est notée $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.



Exemple 3 - Calculs de dérivées partielles

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et la notion de dérivée partielle correspond à la notion de dérivée.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$. En tout point (x, y), la fonction f possède deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f \ : x \mapsto 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f \ : y \mapsto 2$$

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. En tout point (x, y), la fonction f possède deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f \ : (x, y) \mapsto 2x - 2y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f \ : (x, y) \mapsto 2y - 2x.$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^x + 3y\,\mathrm{e}^z$. En tout point (x, y), la fonction f possède trois dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f \ : (x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f \ : (x, y, z) \mapsto 3\,\mathrm{e}^z,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \partial_3 f \ : (x, y, z) \mapsto 3y\,\mathrm{e}^z.$$

Définition 4 - Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (H.P.)

Soit f une fonction définie sur U. La fonction f est de *classe* $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles sont définies et continues sur U.

Théorème 1 - Développement limité d'ordre 1

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $a \in U$. Alors, il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x \to (0,\dots,0)} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in U$,

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a) + \|h\|\, \varepsilon(h).$$

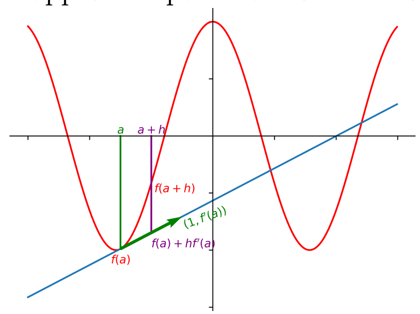
La fonction f admet un *développement limité* d'ordre 1 en a.

Exemple 4 - Développement limité d'ordre 1

- Ce théorème est hors programme mais permettra ensuite de mieux comprendre la recherche d'extremums.
  Lorsque $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le théorème s'écrit

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + |h|\, \varepsilon(h).$$

  On retrouve la formule de Taylor-Young à l'ordre 1. La fonction f est approchée par une droite au voisinage de a.

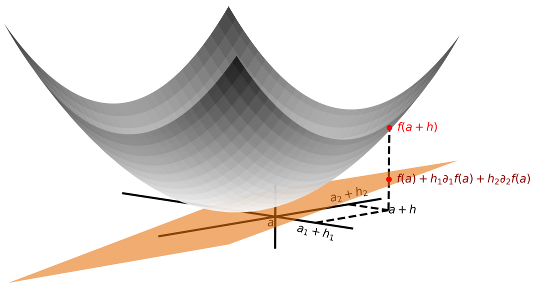


- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$. Le développement limité d'ordre 1 s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + h_1\partial_1 f(a) + \partial_2 f(a) + \|h\|\,\varepsilon(h)$$
$$3(a_1+h_1) + 2(a_2+h_2) + 4 = 3a_1 + 2a_2 + 4 + \cdots$$
$$\cdots + 3h_1 + 2h_2 + |h|\,\varepsilon(h).$$

Dans ce cas, on constate que $\varepsilon(h) = 0$.

- Le théorème signifie que si h est petit, alors $f(a+h)$ est environ égal à $f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i\partial_i f(a)$.
Lorsque $n = 2$, la surface représentant la fonction $g : (h_1, h_2) \mapsto f(a) + h_1\partial_1 f(a) + h_2\partial_2 f(a)$ est celle d'un plan. La fonction f est approchée par un plan au voisinage du point a.



II - Calcul différentiel d'ordre 2

II.1 - Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 5 - Dérivées partielles d'ordre 2

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. La fonction $\partial_i f$ est une fonction définie sur U et à valeurs réelles. On peut donc lui appliquer les définitions de la partie précédente.
Si $\partial_i f$ admet une dérivée partielle en a selon la j-ème variable, on note

$$\partial_j\left(\partial_i f\right) = \partial_{j,i}^2 f.$$

Lorsque $i = j$, on note $\partial_i^2 f$ cette dérivée.
Si toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont continues, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Exemple 5 - Calculs de dérivées partielles d'ordre 2

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La dérivée partielle d'ordre 2 correspond à la dérivée seconde de f.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 3x+2y+4$. En tout point (x,y), la fonction f possède des dérivées partielles d'ordre 2 qui sont toutes nulles.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. En tout point (x,y), la fonction f possède des dérivées partielles d'ordre 2.
  - ⋆ Comme $\partial_1 f : (x,y) \mapsto 2x - 2y$, alors

$$\partial_{1,1}^2 f = \partial_1(\partial_1 f) \ : (x,y) \mapsto 2$$
$$\partial_{2,1}^2 f = \partial_2(\partial_1 f) \ : (x,y) \mapsto -2$$

  - ⋆ Comme $\partial_2 f : (x,y) \mapsto 2y - 2x$, alors

$$\partial_{1,2}^2 f = \partial_1(\partial_2 f) \ : (x,y) \mapsto -2$$
$$\partial_{2,2}^2 f = \partial_2(\partial_2 f) \ : (x,y) \mapsto 2$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x + 3y\,\mathrm{e}^z$. En tout point (x, y), la fonction f possède des dérivées partielles d'ordre 2.

$\star$ Comme $\partial_1 f \ : \ (x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x$,

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1} f &= \partial_1(\partial_1 f) \ : (x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x \\
\partial^2_{2,1} f &= \partial_2(\partial_1 f) \ : (x,y,z) \mapsto 0 \\
\partial^2_{3,1} f &= \partial_3(\partial_1 f) \ : (x,y,z) \mapsto 0
\end{aligned}$$

$\star$ Comme $\partial_2 f \ : \ (x,y,z) \mapsto 3\,\mathrm{e}^z$,

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,2} f &= \partial_1(\partial_2 f) \ : (x,y,z) \mapsto 0 \\
\partial^2_{2,2} f &= \partial_2(\partial_2 f) \ : (x,y,z) \mapsto 0 \\
\partial^2_{3,2} f &= \partial_3(\partial_2 f) \ : (x,y,z) \mapsto 3\,\mathrm{e}^z
\end{aligned}$$

$\star$ Comme $\partial_3 f \ : \ (z,y,z) \mapsto 3y\,\mathrm{e}^z$,

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,3} f &= \partial_1(\partial_3 f) \ : (x,y,z) \mapsto 0 \\
\partial^2_{2,3} f &= \partial_2(\partial_3 f) \ : (x,y,z) \mapsto 3\,\mathrm{e}^z \\
\partial^2_{3,3} f &= \partial_3(\partial_3 f) \ : (x,y,z) \mapsto 3y\,\mathrm{e}^z
\end{aligned}$$

Théorème 2 - Théorème de Schwarz (H.P.)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\partial^2_{i,j} f = \partial^2_{j,i} f$. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut donc effectuer les dérivées partielles dans l'ordre que l'on souhaite.

II.2 - Matrice hessienne

Définition 6 - Matrice hessienne

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$. La *hessienne* de f en a est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$H(f)(a) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(a) & \partial^2_{1,2} f(a) & \cdots & \partial^2_{1,n} f(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial^2_{n,1} f(a) & \partial^2_{n,2} f(a) & \cdots & \partial^2_{n,n} f(a) \end{pmatrix}$$

Exemple 6 - Calculs de hessiennes

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La hessienne est une matrice d'ordre 1 et $H(f)(a) = f''(a)$.
- Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, le théorème de Schwarz assure que la hessienne est une matrice réelle symétrique.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$ et $a \in \mathbb{R}^2$. D'après les calculs précédents,

$$H(f)(a) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(a) & \partial^2_{1,2} f(a) \\ \partial^2_{2,1} f(a) & \partial^2_{2,2} f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x + 3y\,\mathrm{e}^z$ et $a = (0,4,1)$. D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned}
H(f)(a) &= \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(a) & \partial^2_{1,2} f(a) & \partial^2_{1,3} f(a) \\ \partial^2_{2,1} f(a) & \partial^2_{2,2} f(a) & \partial^2_{2,3} f(a) \\ \partial^2_{3,1} f(a) & \partial^2_{3,2} f(a) & \partial^2_{3,3} f(a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\,\mathrm{e}^1 \\ 0 & 3\,\mathrm{e}^1 & 3 \cdot 4 \cdot \mathrm{e}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\,\mathrm{e} \\ 0 & 3\,\mathrm{e} & 12\,\mathrm{e} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Théorème 3 - Développement limité d'ordre 2

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$. Il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x \to (0,\dots,0)} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout

$h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $a+h\in U$,

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^n h_i\partial_i f(a)+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n h_ih_j\partial^2_{i,j}f(a)}_{q_a(f)(h)}+\|h\|^2\varepsilon(h).$$

La fonction f admet un *développement limité* d'ordre 2 en a.

Si $h=\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$, on note

$$q_a(f)(h_1,\dots,h_n)=h^T H(f)(a)h.$$

Exemple 7 - Cas particuliers de développements limités

- Si $n=1$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$, la formule précédente s'écrit

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+h^2\varepsilon(h).$$

  On retrouve le théorème de Taylor-Young à l'ordre 2.
- Le développement limité à l'ordre 2 permet d'évaluer la distance entre $f(a+h)$ et $f(a)+\sum\limits_{i=1}^n h_i\partial_i f(a)$ lorsque h est petit.
- Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x^2+y^2-2xy$. D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned}f(a+h)&=f(a)+h_1(2a_1-2a_2)+h_2(2a_2-2a_1)+\cdots\\&\quad\cdots+\frac{h_1^2}{2}\cdot 2+\frac{h_1h_2}{2}\cdot(-2)+\cdots\\&\quad\cdots+\frac{h_2h_1}{2}\cdot(-2)+\frac{h_2^2}{2}\cdot 2+\|h\|^2\varepsilon(h)\\&=f(a)+2(a_1-a_2)(h_1-h_2)+\cdots\\&\quad\cdots+h_1^2-2h_1h_2+h_2^2+\|h\|^2\varepsilon(h)\\&=f(a)+2(a_1-a_2)(h_1-h_2)+(h_1-h_2)^2+\cdots\\&\quad\cdots+\|h\|^2\varepsilon(h).\end{aligned}$$

- Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(x,y,z)\mapsto \mathrm{e}^x+3y\,\mathrm{e}^z$ et $a=(0,4,1)$. D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned}f(a+h)&=f(a)+h_1\,\mathrm{e}^0+h_2\cdot 3\cdot\mathrm{e}^1+h_3\cdot 3\cdot 4\cdot\mathrm{e}^1+\cdots\\&\quad\cdots+\frac{h_1^2}{2}\cdot 1+\frac{h_2h_3}{2}\cdot 3\,\mathrm{e}+\frac{h_3h_2}{2}\cdot 3\,\mathrm{e}+\cdots\\&\quad\cdots+\frac{h_3^2}{2}12\,\mathrm{e}+\|h\|^2\varepsilon(h)\\&=f(a)+h_1+3\,\mathrm{e}\,h_2+12\,\mathrm{e}\,h_3+\cdots\\&\quad\cdots+\frac{h_1^2}{2}+3\,\mathrm{e}\,h_2h_3+6\,\mathrm{e}\,h_2^2+\|h\|^2\varepsilon(h).\end{aligned}$$

II.3 - Convexité

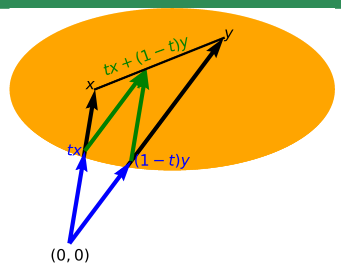
Définition 7 - Ensemble convexe

L'ensemble $U\subset\mathbb{R}^n$ est *convexe* si

$$\forall\,(x,y)\in U^2,\ \forall\,t\in[0,1],\ tx+(1-t)y\in U.$$

Exemple 8 - Représentation d'un ensemble convexe

U est convexe si, pour tous points x, y de U, le segment reliant ces points est également inclus dans U.



On peut montrer que les ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Définition 8 - Convexité / Concavité

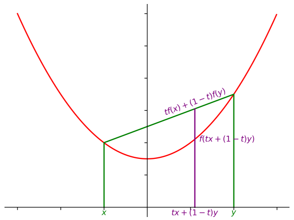
Soit U un ensemble convexe et $f : U \to \mathbb{R}$.

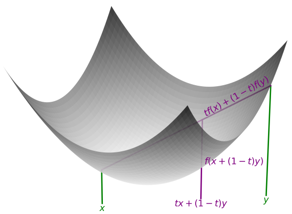
- La fonction f est *convexe* si
$$\forall\, x,\, y \in U, \forall\, t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y).$$
- La fonction f est *concave* si
$$\forall\, x,\, y \in U, \forall\, t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y).$$

On remarque que f est convexe si et seulement si $-f$ est concave.

Exemple 9 - Exemples de fonction convexe

- La convexité signifie que l'épigraphe de f, i.e. l'ensemble des points qui sont au-dessus du graphe de f est un ensemble convexe.





- Les fonctions linéaires sont à la fois convexes et concaves.

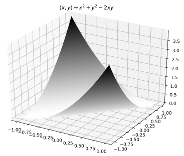
Théorème 4 - Conditions sur la hessienne

Soit U un ensemble convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

- La fonction f est concave si et seulement si
$$\forall\, a \in U, \forall\, h \in \mathbb{R}^n,\ q_a(f)(h) \leqslant 0.$$
- La fonction f est convexe si et seulement si
$$\forall\, a \in U, \forall\, h \in \mathbb{R}^n,\ q_a(f)(h) \geqslant 0.$$

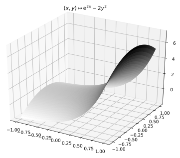
Exemple 10 - Études de convexité

- Si $n=1$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. D'après les calculs précédents, $q_a(f)(h) = f''(a)h^2$. Ainsi,
  - ⋆ Si $f'' \leqslant 0$, la fonction f est concave.
  - ⋆ Si $f'' \geqslant 0$, la fonction f est convexe.
- Soient f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Si f et g sont convexes (resp. convaves), alors $f+g$ est convexe (resp. concave).
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^2-2xy$. D'après les calculs précédents,
$$\begin{aligned} q_a(f)(h) &= 2h_1^2 - 2h_1h_2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 \\ &= 2(h_1-h_2)^2. \end{aligned}$$
La fonction f est donc convexe.



- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2y^2$ et $a=(x,y,z)$. Alors, $H(f)(a) = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et
$$q_{(x,y,z)}(f)(h) = h_1^2 4\,\mathrm{e}^{2x} - 4h_2^2.$$
Ainsi, $q_a(f)(0,1) = -4$ et $q_a(f)(1,0) = 4\,\mathrm{e}^{2x}$. Cette quantité n'est donc pas de signe constant et la fonction f n'est

donc ni convexe ni concave.



III - Recherche d'extremums

III.1 - Conditions d'existence

Définition 9 - Extremum local / global

Soit f une fonction définie sur U et $a \in U$.

(i). f présente un *maximum local* en $a_\star$ s'il existe $V \subset U$ contenant a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \leqslant f(a_\star)$.

(ii). f présente un *minimum local* en $a_\star$ s'il existe $V \subset U$ contenant a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \geqslant f(a_\star)$.

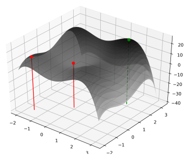
(iii). f présente un *maximum global* en a si pour tout $x \in U$, $f(x) \leqslant f(a_\star)$.

(iv). f présente un *minimum global* en a si pour tout $x \in U$, $f(x) \geqslant f(a_\star)$.

(v). Un *extremum* est un maximum ou un minimum.

Exemple 11 - Représentation graphique d'extremums

Sur le schema suivant, des extremums locaux sont matérialisés par des traits pleins et un maximum global est matérialisé par un trait pointillé.



Définition 10 - Point critique

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in U$. Le point a est un *point critique* de f si

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \partial_i f(a) = 0.$$

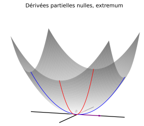
Le vecteur $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix}$ est le *gradient* de f en a.

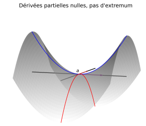
Théorème 5 - Extremum : condition nécessaire

Soit f une application admettant des dérivées partielles selon chacune de ses variables. Si f présente un extremum local en a, alors a est un point critique de f, i.e. $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 12 - Calculs de points critiques

- Soit $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Si f admet un extremum en $a_\star$, alors $f'(a_\star) = 0$. Cependant, la fonction $f : x \mapsto x^3$ montre que $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum en 0 : la réciproque du théorème est fausse.
- La démonstration de ce théorème est très simple : si f admet un extremum local en $a_\star$, alors chacune de ses applications partielles admet un extremum. Nous sommes ramenés au cas où $n = 1$. La réciproque est à nouveau fausse :





- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$.

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) &= 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1 &= 0 \\ x+2y-1 &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3y+3 &= 0 \\ x+2y-1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 1 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique point critique de f est $(-1,1)$. Nous devons maintenant étudier ce point pour savoir si f atteint un extremum en $(-1,1)$.

De plus, si $(h,k) \neq (0,0)$, alors

$$\begin{aligned} & f(-1+h,1+k) - f(-1,1) \\ &= (-1+h)^2 + (-1+h)(1+k) + (1+k)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1+h) - (1+k) + 3 - f(-1,1) \\ &= h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{4}k^2 + k^2 \\ &= \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, f possède un maximum en $(-1,1)$. Cette dernière méthode de factorisation est fastidieuse. On introduit la hessienne pour gagner en efficacité.

Théorème 6 - Conditions locales sur la hessienne

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $a_\star$ un point critique de f. D'après le développement limité à l'ordre 2 en $a_\star$,

- Si $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q_{a_\star}(f)(h) > 0$, alors f admet en $a_\star$ un minimum local.
- Si $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q_{a_\star}(f)(h) < 0$, alors f admet en $a_\star$ un maximum local.
- S'il existe h_1 et h_2 tels que $q_{a_\star}(f)(h_1) > 0$ et $q_{a_\star}(f)(h_2) < 0$, alors f n'admet pas d'extremum en $a_\star$.

Exemple 13 - Calculs de hessiennes

- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$ et $a_\star = (-1,1)$. On vérifie que $\nabla(f)(a_\star) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$H(f)(a_\star) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et pour $(h_1,h_2) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} q_{a_\star}(f)(h) &= h_1^2 \cdot 2 + h_1 h_2 \cdot 1 + h_2 h_1 \cdot 1 + h_2^2 \cdot 2 \\ &= 2(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) = 2\left[\left(h_1 + \frac{1}{2}h_2\right)^2 + \frac{3}{4}h_2^2\right] \\ &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi, f possède un minimum local en $(-1,1)$.

- Soit $f : (x,y,z) \mapsto \frac{x^3}{3} - xy - 4y + \frac{5}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2$. Alors,

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y,z) &= 0 \\ \partial_2 f(x,y,z) &= 0 \\ \partial_3 f(x,y,z) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y &= 0 \\ -x-4+5y &= 0 \\ 3z &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= x^2 \\ 5x^2 - x - 4 &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= -\frac{4}{5} \\ y &= \frac{16}{25} \\ z &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, les points critiques de f sont $(1,1,0)$ et $\left(-\frac{4}{5}, \frac{16}{25}, 0\right)$. De plus,

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- ⋆ Si $a_\star = (1,1,0)$, alors pour $(h_1,h_2) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} q_{a_\star}(f)(h) &= 2h_1^2 - 2h_1h_2 + 5h_2^2 + 3h_3^2 \\ &= 2\left(h_1^2 - h_1h_2\right) + 5h_2^2 + 3h_3^2 \\ &= 2\left(h_1 - \frac{1}{2}h_2\right)^2 + \frac{9}{2}h_2^2 + 3h_3^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

  Ainsi, f admet un minimum local en $(1,1,0)$.
- ⋆ Si $a_\star = \left(-\frac{4}{5}, \frac{16}{25}, 0\right)$, alors

$$q_{a_\star}(f)(h) = -\frac{8}{5}h_1^2 - 2h_1h_2 + 5h_2^2 + 3h_3^2.$$

  Comme $q_{a_\star}(f)(1,0,0) = -\frac{8}{5}$ et $q_{a_\star}(f)(0,0,1) = 3$, alors f n'admet pas d'extremum en $a_\star = (1,1,0)$.

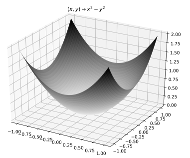
Théorème 7 - Notations de Monge (cas $n=2$)

Soit $n=2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a_\star$ un point critique de f. On note $H(f)(a_\star) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

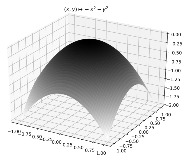
- Si $rt - s^2 > 0$, alors f possède un extremum local en $a_\star$.
  - ⋆ Si $r > 0$, il s'agit d'un minimum local.
  - ⋆ Si $r < 0$, il s'agit d'un maximum local.
- Si $rt - s^2 < 0$, alors f ne possède pas d'extremum en $a_\star$. Il s'agit d'un *point col* (ou *point selle*).
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas pas conclure.

Exemple 14 - La dimension 2

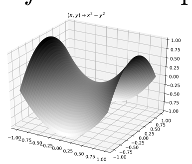
- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$ et $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $2 \times 2 - 0 > 0$ et $2 > 0$, alors f admet un minimum local en $(0,0)$.



- Soit $f : (x,y) \mapsto -x^2 - y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$ et $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Comme $-2 \times (-2) - 0 > 0$ et $-2 < 0$, alors f admet un maximum local en $(0,0)$.



- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$ et $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Comme $2 \times (-2) - 0 < 0$, alors f admet un point col en $(0,0)$.

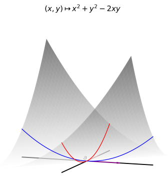


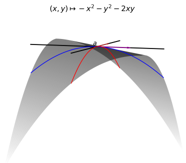
- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$ et $a_\star = (-1,1)$. On a vu que $a_\star$ est un point critique de f et que

$$H(f)(a_\star) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  Comme $2 \times 2 - 1 \times 1 > 0$ et $2 > 0$, alors f possède un minimum local en $(-1,1)$.
- Si $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$, alors $(0,0)$ est un point critique et $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ soit $rt - s^2 = 0$. Cependant, $f(x,y) = (x-y)^2 \geqslant 0$ donc f admet un minimum en $(0,0)$.
  Si $f : (x,y) \mapsto -x^2 - y^2 - 2xy$, alors $(0,0)$ est un point cri-

tique et $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ soit $rt - s^2 = 0$. Cependant, $f(x,y) = -(x+y)^2 \leqslant 0$ donc f admet un maximum en $(0,0)$. Lorsque $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure de manière générale.





Théorème 8 - Condition globale

Soit U un ensemble convexe, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a_\star \in U$ un point critique de f.

- Si f est convexe sur U, alors f admet en $a_\star$ un minimum global.
- Si f est concave sur U, alors f admet en $a_\star$ un maximum global.

Exemple 15 - Extremums & Convexité

- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$ et c'est un minimum local. De plus, $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $q_{(x,y)}(f)(h) = 2(h_1^2 + h_2^2) > 0$ pour $(h_1,h_2) \neq (0,0)$. Ainsi, f est convexe. Donc $(0,0)$ est le minimum global de f.
- Soit $f : (x,y) \mapsto -x^2 - y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$ et c'est un maximum local. De plus, $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $q_{(x,y)}(f)(h) = -2(h_1^2 + h_2^2) < 0$ pour $(h_1,h_2) \neq (0,0)$. Ainsi, f est concave. Donc $(0,0)$ est le maximum global de f.
- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$ et $a_\star = (-1,1)$. On a vu que $a_\star$ est un minimum local de f. De plus, $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et pour $(h_1,h_2) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} q_{(x,y)}(f)(h) &= 2h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_2^2 \\ &= 2\left(h_1 + \frac{1}{2}h_2\right)^2 + \frac{3}{2}h_2^2 > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, f est convexe. Donc $(-1,1)$ est le minimum global de f.

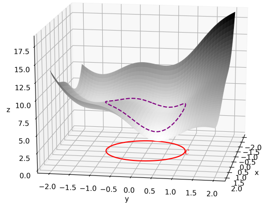
III.2 - Extremums sous contraintes

Définition 11 - Optimisation sous contraintes

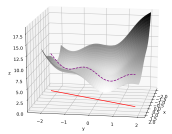
Soit $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions définies sur U et à valeurs réelles. Optimiser f sous les *contraintes* $g_1, \dots, g_p$ consiste à déterminer les extremums de la restriction de f à l'ensemble $\mathscr{C} = \{u \in U \ ; \ g_1(u) = \cdots = g_p(u) = 0\}$.

Exemple 16 - Exemples de contraintes

- On a représenté ci-dessous la surface d'une fonction f sous l'unique contrainte $x^2 + y^2 = 1$. L'ensemble $\mathscr{C}$ des points satisfaisant cette contrainte est représenté par un trait plein. La fonction à minimiser est représentée par un trait en pointillés.



- On a représenté ci-dessous la surface d'une fonction f sous la contrainte $y - 2x + \frac{1}{4} = 0$. L'ensemble $\mathscr{C}$ des points satisfaisants cette contrainte est représenté par un trait plein. La fonction à minimiser est représentée par un trait en pointillés.



- Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x$ sous la contrainte $x - y = 1$. Une des variables s'exprime en fonction de l'autre. Il s'agit donc d'optimiser la fonction

$$g(y) = f(y+1, y) = (y+1)\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^{y+1}.$$

La fonction g est dérivable et

$$g'(y) = \mathrm{e}^y(1 + y + 1 + \mathrm{e} + \mathrm{e}\,y) = \mathrm{e}^y((1+\mathrm{e})y + 2 + \mathrm{e}).$$

La fonction g admet donc un minimum en $y_\star = -\frac{2+\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$. La fonction f, sous la contrainte $x - y = 1$, admet donc un minimum en $\left(-\frac{1}{1+\mathrm{e}}, -\frac{2+\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right)$.

Définition 12 - Jacobienne

Soit $g_1, \dots, g_p$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur U et à valeurs réelles. La matrice *jacobienne* des contraintes est la matrice

$$J(g_1, \dots, g_p)(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x) & \cdots & \partial_n g_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_p(x) & \cdots & \partial_n g_p(x) \end{pmatrix}.$$

Exemple 17 - Exemples de jacobiennes

- Matrice jacobienne lorsque $p = 1$, $g_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$:

$$J(g_1)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x, y) & \partial_2 g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

- Si $p = 2$, $g_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ et $g_2 : (x, y) \mapsto y - 2x + \frac{1}{4}$,

$$J(g_1, g_2)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x, y) & \partial_2 g_1(x, y) \\ \partial_1 g_2(x, y) & \partial_2 g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 13 - Lagrangien

Soit f une fonction définie sur U et $g_1, \dots, g_p$ des contraintes. Le *lagrangien* du problème d'optimisation est la fonction :

$$L : \begin{array}{rcl} U \times \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x, \lambda_1, \dots, \lambda_p) & \mapsto & f(x) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x). \end{array}$$

Théorème 9 - Conditions du premier ordre

Soit $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Si f admet un extremum local en un point $a_\star \in U$ sous les contraintes $g_1(a_\star) = \cdots = g_p(a_\star) = 0$ et $\operatorname{Rg} J(g_1, \dots, g_p)(a_\star) = p$ (contrainte de *qualification*), alors il existe $\lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\ i \in [\![1, p+n]\!],\ \partial_i L(a_\star, \lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star}) = 0.$$

Les réels $\lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star}$ sont les *multiplicateurs de Lagrange*.

Théorème 10 - Condition suffisante d'extrémalité

Soit $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Notons $(a_\star, \lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star})$ un point qui satisfait aux conditions du théorème précédent.
On note $H_\star$ la matrice hessienne du lagrangien par rapport aux seules variables x, évaluée en $(a_\star, \lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star})$:

$$H_\star = \left(\partial^2_{i,j} L(a_\star, \lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

- Si, pour tout $h \in \operatorname{Ker} J(g_1, \dots, g_p)(a_\star)$ non nul,
  - $\star$ $h^T H_\star h > 0$, alors f admet un minimum sous contraintes en $a_\star$.
  - $\star$ $h^T H_\star h < 0$, alors f admet un maximum sous contraintes en $a_\star$.
- S'il existe h_1, $h_2 \in \operatorname{Ker} J(g)(a_\star)$ tels que $h_1^T H_\star h_1 < 0$ et $h_2^T H_\star h_2 > 0$, alors f n'admet ni maximum ni minimum en $a_\star$.

Exemple 18 - Optimisation sous contrainte

- Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^2$ et les fonctions $g_1, \dots, g_p$ sont linéaires, la hessienne du lagrangien par rapport à la variable x est égale à la hessienne de f et il suffit que f soit convexe (resp. concave) pour que f atteigne, sous contrainte, en le point critique obtenu un minimum (resp. maximum).
- Optimisons la fonction $f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes $\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ 2x - y - 3z &= 4 \end{cases}$. On introduit le lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + 2y + z - 1) + \cdots$$
$$\cdots - \lambda_2(2x - y - 3z - 4).$$

  - $\star$ Contrainte de qualification :

$$J(g_1, g_2)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

  est de rang 2 car $(1,2)$ et $(2,-1)$ ne sont pas colinéaires.
  - $\star$ Conditions du premier ordre : si (x,y,z) est un extremum local de f sous les contraintes g_1, g_2, il existe λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \partial_1 L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ \partial_2 L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ \partial_3 L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ \partial_4 L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ \partial_5 L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0 \\ 2y - 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2z - \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ x + 2y + z - 1 &= 0 \\ 2x - y - 3z - 4 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0 \\ 2y - 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2z - \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ -6\lambda_1 + \lambda_2 &= -2 \\ -25\lambda_2 &= -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{16}{15} \\ y &= \frac{1}{3} \\ z &= -\frac{11}{15} \\ \lambda_1 &= \frac{52}{75} \\ \lambda_2 &= \frac{18}{25} \end{cases}$$

  - $\star$ Étude de la hessienne : Comme les contraintes sont linéaires, $H_\star$ est la hessienne de f qui vaut $2I_3$. Ainsi, $h^T H_\star h = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 > 0$ et f admet sous contrainte un minimum en $\left(\frac{16}{15}, \frac{1}{3}, -\frac{11}{15}\right)$.

  Géométriquement, ce point est le point de la droite définie par $\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ 2x - y - 3z &= 4 \end{cases}$ qui soit le plus proche de l'origine.
- Optimisons la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 y$ sous la contrainte $g_1(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3 = 0$. On introduit le lagrangien :

$$L : (x,y,\lambda) \mapsto x^2 y - \lambda(2x^2 + y^2 - 3).$$

  - $\star$ Contrainte de qualification :

$$J(g_1)(x,y) = \begin{pmatrix} 4x & 2y \end{pmatrix}$$

est de rang 1 (elle est de rang 0 en $(0,0)$ qui est un point qui ne satisfait pas la contrainte).

⋆ Condition du premier ordre : si (x,y) est un extremum local de f sous la contrainte g_1, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \partial_1 L(x,y,\lambda) & = 2xy - 4\lambda x = 0 \\ \partial_2 L(x,y,\lambda) & = x^2 - 2\lambda y = 0 \\ \partial_3 L(x,y,\lambda) & = 2x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ 2\lambda y & = 0 \\ y^2 & = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y & = 2\lambda \\ x^2 & = 4\lambda^2 \\ 2x^2 + y^2 & = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & \in \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\} \\ \lambda & = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y & \in \{-1,1\} \\ x & \in \{-1,1\} \\ \lambda & = \frac{y}{2} \end{cases}$$

Les 6 candidats pour des extremums sont donc : $(0,-\sqrt{3},0)$, $(0,\sqrt{3},0)$, $(1,1,1/2)$, $(1,-1,-1/2)$, $(-1,1,1/2)$, $(-1,-1,-1/2)$.

⋆ Étude de la hessienne. D'après la définition de L,

$$H_\star = \begin{pmatrix} 2y_\star - 4\lambda_\star & 2x_\star \\ 2x_\star & -2\lambda_\star \end{pmatrix} \text{ et } J_\star = \begin{pmatrix} 4x_\star & 2y_\star \end{pmatrix}.$$

◇ Si $(x_\star, y_\star, \lambda_\star) = (0, -\sqrt{3}, 0)$, alors

$$H_\star = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{Ker} J_\star = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Ainsi, pour tout $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} J_\star$ non nul,

$$h^T H_\star h = -2\sqrt{3} h_1^2 < 0.$$

La fonction f admet donc un maximum sous contrainte en $(0, -\sqrt{3})$.

◇ On montre de même que f admet un minimum sous contrainte en $(0, \sqrt{3})$.

◇ Si $(x_\star, y_\star, \lambda_\star) = (-1, -1, -1/2)$, alors

$$H_\star = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{Ker} J_\star = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Ainsi, si $h = h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} J_\star$ non nul,

$$h^T H_\star h = 12 h_1^2 > 0.$$

Ainsi, la fonction f admet un minimum sous contrainte en $(-1,-1)$.

◇ Les autres cas se traitent de manière analogue.