T.D. VI - Calculs de sommes
Séries numériques

I - Calculs de sommes

Solution de l'exercice 1.

1. Le terme général de la somme est constant, donc

$$\sum_{k=0}^{5} = 3 = (5+1)\times 3 = 18.$$

2. Le terme général de la somme est constant, donc

$$\sum_{n=3}^{5} 10 = (5-3+1)\times 10 = 30.$$

3. D'après les résultats sur la somme des premiers entiers,

$$\sum_{\ell=1}^{7} \ell = \frac{7(7+1)}{2} = 28.$$

4. En développant le signe somme,

$$\sum_{\ell=2}^{5} \ell^2 = 2^2+3^2+4^2+5^2 = 54.$$

On pourra éventuellement retenir les formules :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

5. On utilise le résultat concernant la somme des premiers entiers :

$$\sum_{k=12}^{27} k = 12+13+\cdots+27 = 1+\cdots+11+12+\cdots+27-(1+\cdots+11)$$
$$= \frac{27(27+1)}{2} - \frac{11(11+1)}{2} = 312.$$

$\square$

Solution de l'exercice 2.

1. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique, $\sum_{k=5}^{12} 2^k = 2^5\frac{1-2^{12-5+1}}{1-2} = 2^5\left(2^8-1\right)$.

2. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique, $\sum_{n=3}^{10}(-1)^n = (-1)^3\frac{1-(-1)^{10-3+1}}{1-(-1)} = 0$.

3. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2^{2n}} = \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{2^2}\right)^n = \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1-4^{-5}}{\frac{3}{4}} = 3\left(1-4^{-5}\right).$$

4. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\sum_{n=1}^{4}\frac{3^{2n+1}}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{4}\frac{9^n\times 3}{4^n} = 3\sum_{n=1}^{4}\left(\frac{9}{4}\right)^n$$
$$= 3\left(\frac{9}{4}\right)\frac{1-\left(\frac{9}{4}\right)^4}{1-\frac{9}{4}}$$
$$= \frac{27}{4}\frac{1-\left(\frac{9}{4}\right)^4}{-\frac{5}{4}}$$
$$= -\frac{27}{5}\left(1-\left(\frac{9}{4}\right)^4\right)$$
$$= \frac{27}{5}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^4-1\right).$$

5. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{5}(3^\ell - 2) &= \sum_{\ell=1}^{5} 3^\ell - \sum_{\ell=1}^{5} 2\\ &= 3\frac{1-3^5}{1-3} - 5\times 2 = \frac{3}{2}(3^5-1) - 10.\end{aligned}$$

6. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k}{5^k}+\frac{1}{4^k}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k\\ &= \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\\ &= \frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) + \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\\ &= \frac{5}{3} - \frac{2^{n+1}}{3\times 5^n} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3\times 4^n}\\ &= \frac{9}{3} - \frac{2^{n+1}}{3\times 5^n} - \frac{1}{3\times 4^n}.\end{aligned}$$

7. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k+4^k}{5^k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^k + \left(\frac{4}{5}\right)^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k\\ &= \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}} + \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}}\\ &= \frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) + 5\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)\\ &= \frac{5}{2} - \frac{3^{n+1}}{2\times 5^n} + 5 - \frac{4^{n+1}}{5^n}\\ &= \frac{15}{2} - \frac{3^{n+1}-2\times 4^{n+1}}{5^n}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. D'après les propriétés sur les suites arithmétiques,

$$u_n = n\times 4 + u_0 = 4n+1.$$

2. D'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{10} u_k = \sum_{k=0}^{10}(4k+1) = 4\sum_{k=0}^{10} k + \sum_{k=0}^{10} 1 = 4\frac{10(10+1)}{2} + 11 = 4\times 5\times 11 + 11 = 220$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. D'après les résultats sur les suites géométriques,

$$w_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n w_0 = 4\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

2. En utilisant les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{21} w_k &= \sum_{k=5}^{21} 4\left(\frac{1}{5}\right)^k\\ &= 4\left(\frac{1}{5}\right)^5 \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{21-5+1}}{1-\frac{1}{5}}\\ &= \frac{4}{5^5}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{21-5+1}}{\frac{4}{5}}\\ &= \frac{1}{5^4}\left(1-\frac{1}{5^{17}}\right).\end{aligned}$$

□

II - Sommes télescopiques

Solution de l'exercice 5. En utilisant une somme télescopique puis la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}
u_{k+1} - u_k &= \frac{1}{2} w_k = \frac{1}{2^{k+1}} \\
\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \\
u_{n-1+1} - u_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
u_n - 0 &= \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\
u_n &= 1 - \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 6. En utilisant une somme télescopique puis la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4} w_{k-1} \\
u_n - u_0 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \\
u_n - 0 &= \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} \times \frac{2}{5} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} \\
&= \frac{1}{4} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}} \\
&= \frac{5}{12} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 7. En utilisant une somme télescopique puis la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
u_n - u_0 &= 2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
u_n - 0 &= 2 \times \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 8. En utilisant une somme télescopique puis la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} (-8)^{k-1} \\
v_n - v_0 &= \frac{1}{-8} \sum_{k=1}^{n} (-8)^k \\
v_n - 0 &= -\frac{1}{8} (-8)^1 \frac{1 - (-8)^n}{1 - (-8)} \\
&= \frac{1 - (-8)^n}{9}.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. En utilisant la définition de b_n,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n - 3^n &= (n+1)3^{n+1-1} - n3^{n-1} - 3^n \\ &= (n+1)3^n - n3^{n-1} - 3^n \\ &= (n+1)3 \times 3^{n-1} - n3^{n-1} - 3 \times 3^{n-1} \\ &= (3n+3-n-3)3^{n-1} = 2n3^{n-1} = 2b_n. \end{aligned}$$

2. En utilisant la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

3. En utilisant une somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0 = b_{n+1}.$$

4. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} b_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(b_{k+1} - b_k - 3^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}(b_{k+1}-b_k) - \sum_{k=0}^{n} 3^k\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(b_{n+1} - \frac{3^{n+1}-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((n+1)3^n - \frac{3^{n+1}-1}{2}\right) \\ &= \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 10.

1. D'après les propriétés du logarithme,

$$u_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

2. En utilisant les sommes télescopiques,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

3. Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, d'après la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = +\infty.$$

Ainsi, $\sum u_k$ diverge. □

Solution de l'exercice 11.

1. En utilisant la définition de la suite,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k\, \mathrm{e}^{-1/u_k} \\ \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \mathrm{e}^{-1/u_k} \\ \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \ln \mathrm{e}^{-1/u_k} \\ \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) &= -\frac{1}{u_k} \\ \sum_{k=0}^{n} [\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)] &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \\ \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} &= -\ln(u_{n+1}). \end{aligned}$$

□

III - Séries géométriques... et plus

Solution de l'exercice 12.

1. On remarque que $\frac{1}{5^k} = \left(\frac{1}{5}\right)^k$. Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}.$$

2. On remarque que $\frac{3^k}{5^k} = \left(\frac{3}{5}\right)^k$. Comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{5^k} = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}.$$

3. On remarque que $\frac{1}{2^{2k}} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$. Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

4. On remarque que

$$\frac{3^{2\ell+1}}{10^\ell} = \frac{3^{2\ell}\times 3}{10^\ell} = 3 \times \frac{9^\ell}{10^\ell} = 3\left(\frac{9}{10}\right)^\ell.$$

Comme $-1 < \frac{9}{10} < 1$, alors

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{3^{2\ell+1}}{10^\ell} = 3\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^\ell = 3\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = \frac{3}{\frac{1}{10}} = 30.$$

□

Solution de l'exercice 13.

1. Si $\sum(\alpha - u_n)$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha-u_n) = 0$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.
Ainsi, $\alpha = \frac{2}{3}$.
Réciproquement, si $\alpha = \frac{2}{3}$, alors $\alpha - u_n = -5\left(\frac{1}{7}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{7} < 1$, alors $\sum(\alpha-u_n)$ converge.
Ainsi, $\alpha_0 = \frac{2}{3}$.

2. En utilisant la propriété précéedente,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_0 - u_n) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-5\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)\\ &= -5\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = -5\frac{1}{1-\frac{1}{7}} = -\frac{5}{\frac{6}{7}} = -\frac{35}{6}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 14. Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{4}$. Ainsi, $\alpha = \frac{1}{4}$.
Réciproquement, si $\alpha = \frac{1}{4}$, alors $u_n = -\frac{1}{4\times 3^n} = -\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, alors $\sum u_n$ converge. □

Solution de l'exercice 15.

1. Comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}.$$

Comme $-1 < \frac{9}{25} < 1$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{9}{25}\right)^n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{9}{25}} = \frac{1}{\frac{16}{25}} = \frac{25}{16}.$$

2. En utilisant les calculs précédents,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} p_n &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\\ &= \frac{4}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\\ &= \frac{4}{5}\times\frac{5}{2} - \frac{16}{25}\times\frac{25}{16}\\ &= 2-1 = 1.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n} k\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\left(k\frac{3}{4}\right)^{k-1}-k\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k}.\end{aligned}$$

2. En effectuant un changement de variable,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} &= \sum_{k=1}^{k=n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{k-1=0}^{k-1=n-1}(k-1+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\ell=n-1}(\ell+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}.\end{aligned}$$

3. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}-\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}\ell\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}+\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}-\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}-\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k}-n\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}-n\left(\frac{3}{4}\right)^{n}.\end{aligned}$$

4. D'après les théorèmes sur les croissances comparées,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=0.$$

En utilisant les résultats sur les séries géométriques, comme $-1<\frac{3}{4}<1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}=4-0=4.$$

□