# VI - Calculs de sommes
# Séries numériques

## I - Calculs de sommes

### I.1 - Généralités

**Définition 1 - Le symbole $\sum$**

Le symbole $\sum$ permet de désigner la somme des termes d'une suite de réels. Ainsi, si $(u_k)_{p\leqslant k\leqslant n}$ est une suite de réels,

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

On prononce *somme pour $k$ variant de $p$ à $n$ des $u_k$*.

**Exemple 1 - Quelques sommes**

- Si $u_k = 2$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= u_1 + \cdots + u_n \\ &= \underbrace{2 + \cdots + 2}_{n \text{ termes}} = 2n.\end{aligned}$$

- Si $v_k = 3$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} v_k &= v_0 + \cdots + v_n \\ &= \underbrace{3 + \cdots + 3}_{n+1 \text{ termes}} = 3(n+1).\end{aligned}$$

- Si $w_k = k$ pour tout $k \in [\![0, 5]\!]$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{5} w_k &= w_0 + \cdots + w_5 \\ &= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ &= 15.\end{aligned}$$

**Proposition 1 - Somme de termes constants**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $\sum\limits_{k=1}^{n} a = n \times a$,
- $\sum\limits_{k=0}^{n} a = (n+1) \times a$,
- $\sum\limits_{k=p}^{n} a = (n-p+1) \times a$.

**Exemple 2**

- $\sum\limits_{k=3}^{7} 2 = (7-3+1) \times 2 = 10$.
- $\sum\limits_{k=1}^{12} \mathrm{e} = (12-1+1) \times \mathrm{e} = 12\,\mathrm{e}$.
- Soit $n$ un entier naturel. $\sum\limits_{k=0}^{n} n = (n+1-1)n = n^2$.

**Proposition 2**

Soit $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ une suite de réels. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1}.$$

**Proposition 3 - Sommes classiques**

Soit $q \neq 1$. On prouve par récurrence que :

- $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- $\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

**Exemple 3 - Sommes classiques**

- $\sum_{k=0}^{100} k = \frac{100\times(100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$.
- $\sum_{k=0}^{12} k = \frac{12\times(12+1)}{2} = 6 \times 13 = 78$.
- $\sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{1-2^{10+1}}{1-2} = 2^{11} - 1$.
- $\sum_{k=3}^{12} 3^k = 3^3 \times \frac{1-3^{12-3+1}}{1-3} = 3^3 \times \dfrac{3^{10}-1}{2}$.
- $\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{101}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{101}}\right)$.

**Proposition 4 - Linéarité de la somme**

Soit $(u_k)_{p\leqslant k\leqslant n}$, $(v_k)_{p\leqslant k\leqslant n}$ deux suites de réels et $\alpha$ un réel.

$$\sum_{k=p}^{n} (\alpha \times u_k + v_k) = \alpha \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k=p}^{n} v_k.$$

**Exemple 4 - Un calcul de somme**

Calculons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{10} \left(2 + \frac{3}{5^k}\right) &= \sum_{k=3}^{10} 2 + \sum_{k=3}^{10} \left(3 \times \frac{1}{5^k}\right) \\
&= 2(10-3+1) + 3 \times \sum_{k=3}^{10} \left(\frac{1}{5}\right)^k \\
&= 2 \times 8 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10-3+1}}{1-\frac{1}{5}} \\
&= 16 + \frac{3}{5^3} \times \frac{1-\frac{1}{5^8}}{\frac{4}{5}} = 16 + \frac{3}{5^3} \times \frac{5}{4} \times \left(1 - 5^{-8}\right) \\
&= 16 + \frac{3}{100}\left(1 - 5^{-8}\right).
\end{aligned}$$

## I.2 - Deux méthodes de calcul

**Proposition 5 - Somme télescopique**

Soit $(u_k)_{p\leqslant k\leqslant n+1}$ une suite de réels. Alors,

$$\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

et

$$\sum_{k=p}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{n+1}.$$

**Exemple 5 - Deux sommes télescopiques**

- Lorsque $p = 0$ et $n = 4$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4}(u_{k+1} - u_k) &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots \\ &\quad \cdots + (u_4 - u_3) + (u_5 - u_4) \\ &= u_5 - u_0.\end{aligned}$$

- On remarque que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

**Proposition 6 - Changement d'indice**

Soit $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ une suite de réels.

- $\sum_{k=p}^{k=n} u_{k-1} = \sum_{k-1=p-1}^{k-1=n-1} u_{k-1} = \sum_{\ell=p-1}^{n-1} u_\ell$.
- $\sum_{k=p}^{k=n} u_{k+1} = \sum_{k+1=p+1}^{k+1=n+1} u_{k+1} = \sum_{\ell=p+1}^{n+1} u_\ell$.

**Exemple 6 - Un changement d'indice**

On admet que, pour tout $n$ entier naturel, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 &= \sum_{k+1=1}^{k+1=n+1}(k+1)^2 = \sum_{\ell=1}^{n+1}\ell^2 \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+1}\ell^2 - 0^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

# II - Séries numériques

**Définition 2 - Série**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tout $n$ entier naturel, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la *série de terme général* $u_n$.
- Le réel $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est la *somme partielle* d'ordre $n$.

On note $\sum u_n$ la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exemple 7 - Des sommes partielles**

- La somme partielle d'ordre 100 de la série de terme général $\frac{1}{n}$ est :

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}.$$

- La somme partielle d'ordre 10 de la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est :

$$S_{100} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right).$$

## II.1 - Nature des séries

**Définition 3 - Série convergente, Série divergente**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

- Si $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la série de terme général $u_n$ *converge*. Sinon, la série de terme général $u_n$ *diverge*.
- Si la série de terme général $u_n$ converge, la limite de $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la *somme* de cette série. On note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

**Exemple 8 - Une série convergente / Une série divergente**

- On a vu que pour tout $n$ entier naturel non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Donc la série de terme général $\frac{1}{k(k+1)}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

- Soit $\sum u_n$ la série de terme général $4^n$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 4^k &= \frac{1-4^{n+1}}{1-4}\\ &= 3\left(4^{n+1}-1\right)\\ &\to +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général $4^n$ diverge.

**Théorème 1 - Condition nécessaire de convergence**

- Si la série de terme général $u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors la série de terme général $u_n$ diverge.

**Exemple 9 - Divergence grossière**

- Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n} = +\infty$, alors la série de terme général $\frac{n^2+1}{n}$ diverge.
- Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-n+1}{2n(n+1)} = \frac{3}{2}$, alors la série de terme général $\frac{3n^2-n+1}{2n(n+1)}$ diverge.

## II.2 - Série géométrique

**Théorème 2 - Série géométrique**

- Si $q \in ]-1,1[$, alors la série de terme général $q^n$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$
- Si $q \geqslant 1$ ou $q \leqslant -1$, alors la série de terme général $q^n$ diverge.

**Exemple 10 - Une série géométrique**

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $\frac{1}{2^n}$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} &= \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\\ &\to 2.\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum \frac{1}{2^n}$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

## III - 3 exemples de raisonnements

**Théorème 3 - Une série de Riemmann [H.P.]**

$$\sum \frac{1}{k^2} \text{ converge.}$$

**Exemple 11**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

- Montrons que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. D'après les propriétés de la somme,
$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0.\end{aligned}$$
Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $S_{n+1} \geqslant S_n$ et $(S_n)$ est croissante.
- En utilisant un changement de variable,
$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}\\ &= \sum_{k-1=0}^{k-1=n-1} \frac{1}{(k-1+1)^2}\\ &= \sum_{\ell=0}^{\ell=n-1} \frac{1}{(\ell+1)^2}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2}.\end{aligned}$$

- Montrons que $(S_n)$ est majorée.

$$\begin{aligned}
k &\leqslant k+1\\
\frac{1}{k+1} &\leqslant \frac{1}{k}\\
\frac{1}{(k+1)^2} &\leqslant \frac{1}{k(k+1)}\\
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2} &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}\\
\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2}-1 &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-1 &\leqslant 1-\frac{1}{n}\\
S_n &\leqslant 1-\frac{1}{n}+1\\
&\leqslant 2.
\end{aligned}$$

  Ainsi, $(S_n)$ est majorée par 2.
- Finalement, $(S_n)$ est croissante et majorée donc convergente et $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. On peut montrer que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

**Théorème 4 - Série exponentielle [H.P.]**

$$\sum \frac{1}{k!} \text{ converge.}$$

**Exemple 12**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

- D'après les propriétés de la somme,

$$\begin{aligned}
T_{n+1}-T_n &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\
&= \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

  Ainsi, pour tout $n \geqslant 0$, $T_{n+1} \geqslant T_n$ et $(T_n)$ est croissante.
- De plus, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
k &\geqslant 2\\
k(k-1)(k-2)\cdots 2 &\geqslant 2\times 2\times 2\times\cdots\times 2\\
k! &\geqslant 2^{k-1}\\
\frac{1}{k!} &\leqslant \frac{1}{2^{k-1}}\\
\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} &\leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\\
T_n-2 &\leqslant \sum_{k-1=1}^{k-1=n-1}\frac{1}{2^{k-1}}\\
T_n &\leqslant \sum_{\ell=1}^{n-1}\frac{1}{2^\ell}+2\\
&\leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+2\\
&\leqslant 1-\frac{1}{2^n}+2\\
&\leqslant 3.
\end{aligned}$$

  Donc $(T_n)$ est majorée par 3.
- Ainsi, $(T_n)$ est croissante et majorée donc convergente. On peut montrer que sa limite vaut $\mathrm{e}^1$. On peut généraliser ce résultat en montrant que pour tout réel $x$, la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge et sa somme vaut $\mathrm{e}^x$.

### Théorème 5 - Série géométrique dérivée [H.P.]

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Alors,

$$\sum kx^{k-1} \text{ converge.}$$

### Exemple 13

On considère la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

La fonction $f_n$ est dérivable et $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

Or, $f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Ainsi,

$$f_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} (n+1)x^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Donc $\sum kx^{k-1}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$