■ Chapitre 3 ■
Algèbre linéaire

Notations.
■ $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
■ I désigne un ensemble non vide.
■ (m, n) désigne un couple d'entiers naturels tels que $m \neq 0$.
■ E, F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I. Espaces vectoriels

I.1 Familles de vecteurs

Définition 1 (Combinaison linéaire).

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. Le vecteur x est une *combinaison linéaire* de la famille $(e_i)_{i \in I}$ s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires presque tous nuls (i.e. $\{i \in I \;;\; \lambda_i \neq 0\}$ est fini, noté $\left\{\lambda_{i_j},\, j \in [\![1, p]\!]\right\}$) telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{i_j} e_{i_j}.$$

Remarque.
On étend, de la même manière, les notions de famille libre, génératrice, base, coordonnées à des familles quelconques de vecteurs de E.

Exercice 1.

1. Soit $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes non nuls et à degrés échelonnés, i.e. pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \deg(P_i) < \deg(P_{i+1})$. Alors, $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille libre.

2. Montrer que la famille $\left(f_a : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\right)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

I.2 Produit d'espaces vectoriels

Propriété 1.

Soit $(E_i)_{i \in [\![1, m]\!]}$ une famille d'espaces vectoriels. Alors, $E_1 \times \cdots \times E_m$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 2. Montrer que $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel.

Propriété 2.

Soit $(E_i)_{i \in [\![1, m]\!]}$ une famille d'espaces vectoriels. Si, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, l'espace vectoriel E_i est de dimension finie, alors $E_1 \times \cdots \times E_m$ est de dimension finie et

$$\dim \left(\bigtimes_{i=1}^{m} E_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \dim(E_i).$$

Exercice 3. Déterminer la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

I.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 2 (Somme & Somme directe).

Soit $(E_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

(i). La *somme* $\sum\limits_{i=1}^{m} E_i$ est l'ensemble

$$\sum_{i=1}^{m} E_i = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i,\ (x_i)_{i\in[\![1,m]\!]} \in \mathop{\times}_{i=1}^{m} E_i \right\}.$$

(ii). La somme $\sum\limits_{i=1}^{m} E_i$ est *directe*, notée $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} E_i$, si la décomposition de tout vecteur $x \in \sum\limits_{i=1}^{m} E_i$ sous la forme $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i$ est unique.

(iii). Si $E = E_i \oplus E_j$, les sous-espaces vectoriels E_i et E_j sont des sous-espaces vectoriels *supplémentaires* de E.

Exercice 4.

1. Montrer que $\mathbb{K}_n[X] = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{Vect}\left\{X^k\right\}$.

2. Représenter graphiquement 3 sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ qui sont en somme directe.

Proposition 3.

La somme $\sum\limits_{i=1}^{m} E_i$ est directe si et seulement si

$$\forall\ (x_i) \in \mathop{\times}_{i=1}^{m} E_i,\ \left(\sum_{i=1}^{m} x_i = 0_E\ \Rightarrow\ \forall\ i \in [\![1,m]\!],\ x_i = 0_E \right)$$

Exercice 5. Montrer que si $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} E_i$, alors pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \{0_E\}$. Montrer que la réciproque est fausse.

Définition 3 (Base adaptée).

On suppose que E est de dimension finie.

(i). Soit F un sous-espace vectoriel de E. La famille (e_i), base de E, est une *base adaptée* à F s'il existe une renumérotation des vecteurs et un entier naturel p non nul tels que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F.

(ii). On suppose que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} E_i$. La famille $(e_{i,j})$ est une *base adaptée* à la décomposition en somme directe de E si, pour tout entier $i \in [\![1,m]\!]$, la famille $(e_{i,j})_{j\in[\![1,m_i]\!]}$ est une base de E_i.

Exercice 6.

1. Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note $E_i = \mathrm{Vect}\{e_i\}$. Montrer que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} E_i$.

2. Si $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$ et, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathscr{B}_i$ est une base de E_i, montrer que la juxtaposition $\bigcup_{i=1}^{m} \mathscr{B}_i$ est une base de E.

Théorème 1 (Somme & Dimension).

Soient $(E_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors, $\sum_{i=1}^{m} E_i$ est de dimension finie et

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{m} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim(E_i).$$

De plus, $\dim\left(\sum_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \dim(E_i)$ si et seulement si la somme est directe.

Exercice 7.

1. On suppose que $\dim(E) \geqslant 3$. Montrer que deux hyperplans de E ne sont jamais en somme directe.

2. En notant $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathscr{T}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Cette somme est-elle directe ?

II. Applications linéaires & Matrices

Exercice 8. (Commutant) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que le commutant $\mathscr{C}(A)$ de A, défini par $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\ ;\ AM = MA\}$ est un espace vectoriel.

II.1 Applications linéaires

Théorème 2 (Somme directe & Applications linéaires).

On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$. Pour tout indice $i \in [\![1, m]\!]$, on considère une application linéaire φ_i de E_i dans F. Alors, il existe une unique application linéaire φ de E dans F telle que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, la restriction de φ à E_i soit égale à φ_i.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E. On pose $\varphi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$, $f \mapsto u \circ f \circ v$. Montrer que $\varphi = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))}$ si et seulement si $u = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ou $v = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 10. On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on note p_i l'application qui à tout vecteur $x = \sum_{j=1}^{m} x_j$ associe le vecteur x_i.

1. Montrer que p_i est un projecteur puis que, si $i \neq j$, alors $p_i p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2. Déterminer $\sum_{i=1}^{m} p_i$.

Réciproquement, soit (p_i) une famille d'applications linéaires telles que pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, $p_i p_j = \delta_{i,j} p_i$ et $\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{m} p_i$. Pour tout entier $i \in [\![1, m]\!]$, on pose $E_i = p_i(E)$.

3. Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$.

Théorème 3 (Théorème du rang).

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. L'application linéaire φ définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker}\varphi$ dans $\operatorname{Im}\varphi$.
En particulier, si E et $\operatorname{Im}\varphi$ sont de dimension finie, alors

$$\dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \operatorname{Rg}(\varphi) = \dim E.$$

Exercice 11. (Matrices équivalentes) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Montrer qu'il existe $P \in \mathscr{G}\ell_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathscr{G}\ell_p(\mathbb{K})$ telles que $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$.

Définition 4 (Stabilité, Endomorphisme induit).

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. L'espace vectoriel F est *stable* par φ si $\varphi(F) \subset F$.
La restriction de φ à F, i.e. l'endomorphisme u de F dans F, défini pour tout vecteur $x \in F$ par $u(x) = \varphi(x)$ est l'endomorphisme *induit* par φ sur F.

Exercice 12. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par dérivation polynomiale.

Théorème 4 (Commutativité & Stabilité).

Soient φ et ψ deux endomorphismes qui commutent. Alors, $\operatorname{Im}\varphi$ et $\operatorname{Ker}\varphi$ sont stables par ψ.

Propriété 4.

Soient $(E_1, \dots, E_m)$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$ et φ un endomorphisme de E. L'endomorphisme φ stabilise tous les espaces E_i si et seulement si pour toute base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition de E, il existe des matrices $A_1, \dots, A_m$ telles que

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.

1. Déterminer la matrice d'un projecteur p dans une base adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.

2. Reprendre la question précédente dans le cadre d'une symétrie.

II.2 Opérations sur les matrices définies par blocs

Notations.

■ Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On notera $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_p \end{bmatrix}$.

Si $B \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, alors $BA = \begin{bmatrix} BC_1 & \cdots & BC_p \end{bmatrix}$.

■ Plus généralement, $A_{i,j} \in \mathscr{M}_{n_i,p_j}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$ et $\sum\limits_{j=1}^{q} p_j = p$, on peut décomposer une matrice A en blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,q} \end{pmatrix}.$$

Propriété 5.

Soient $A = (A_{i,j})$ et $B = (B_{i,j})$ deux matrices décomposées en blocs et $\lambda \in \mathbb{K}$. Sous réserve de compatibilité des tailles des blocs,

(i). $A + \lambda B = (A_{i,j} + \lambda B_{i,j})$.

(ii). $AB = (C_{i,j})$ se décompose en blocs, où $C_{i,j} = \sum A_{i,k} B_{k,j}$.

II.3 Classes de similitude

Définition 5 (Trace d'un matrice carrée).

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La *trace* de A, notée $\text{Tr}(a)$, est définie par

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Exercice 14. Déterminer $\text{Tr}(0_n)$ et $\text{Tr}(I_n)$.

Propriété 6 (Propriétés de la trace).

Soient A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i). $\text{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

(ii). $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

(iii). Pour tout entier naturel m, $\text{Tr}((AB)^m) = \text{Tr}((BA)^m)$.

(iv). Pour toute matrice $P \in \mathscr{G}\ell_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$.

Exercice 15. Déterminer la dimension ainsi qu'une base du noyau de l'application linéaire trace.

Définition 6 (Matrices semblables).

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Les matrices A et B sont *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{G}\ell_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

Exercice 16. Soit A une matrice scalaire. Déterminer l'ensemble des matrices semblables à A.

Propriétés 7 (Classe de similitude).

(i). La relation binaire être *semblable* est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence associée à une matrice A est sa *classe de similitude*.

(ii). Si A et B sont semblables, alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

Exercice 17.

1. Montrer que la réciproque au (ii) est fausse.

2. Montrer que la trace est un invariant de similitude.

3. Montrer que le rang est un invariant de similitude.

Théorème 5 (Interprétation géométrique).
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et B sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme φ sur un espace vectoriel de dimension n.

Définition 7.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. La *trace* de φ est la trace de la matrice de φ dans une base $\mathscr{B}$ de E.

Exercice 18. Montrer que pour tout projecteur p, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Rg}(p)$.

II.4 Polynômes d'endomorphismes

Définition 8 (Polynômes & Matrices).
Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

(*i*). Le *polynôme de la matrice* M, noté $P(M)$, est la matrice définie par
$$P(M) = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{d} a_k M^k.$$

(*ii*). Le *polynôme de l'endomorphisme* φ, noté $P(\varphi)$, est l'endomorphisme défini par
$$P(\varphi) = a_0 \,\mathrm{Id}_E + \sum_{k=1}^{d} a_k \varphi^k.$$

Exercice 19.

1. Soit $P = X^2 - 3X + 2$. Calculer $P(0_2)$, $P(I_2)$, $P\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$, $P\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$, $P\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

2. Proposer un algorithme permettant d'évaluer un polynôme de matrices.

3. Soient $D = \mathrm{Diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ une matrice diagonale et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer $P(D)$.

4. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. Exprimer $P(QMQ^{-1})$ en fonction de $P(M)$.

Propriété 8.
Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Alors,

(*i*). $(P + Q)(\varphi) = P(\varphi) + Q(\varphi)$.

(*ii*). $(PQ)(\varphi) = P(\varphi) \circ Q(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi)$.

(*iii*). $(P \circ Q)(\varphi) = P(Q(\varphi))$.

Exercice 20. Énoncer la propriété analogue pour les polynômes de matrices.

Définition 9 (Polynôme annulateur).
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Le polynôme P est un polynôme *annulateur* de la matrice M (resp. de l'endomorphisme φ) si $P \neq 0$ et $P(M) = 0_n$ (resp. $P(\varphi) = 0_{\mathscr{L}(E)}$).

Exercice 21.

1. Montrer que toute matrice carrée d'ordre n possède un polynôme annulateur de degré au plus n^2.

2. Montrer que, si A est une matrice inversible, alors A^{-1} est un polynôme en A. En déduire que, si A et B commutent, alors A^{-1} et B commutent.

Propriété 9.

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(M) = 0$. Si le coefficient constant de P est non nul, alors M est inversible.

Exercice 22.

1. En utilisant le polynôme $P = X^3 - 2X^2 - 1$, montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 15 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 7A - 98I_3$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des réels u_n, v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$.

III. Formes linéaires & Hyperplans

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Définition 10 (Forme linéaire).

Une *forme linéaire* est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exercice 23. Donner des exemples de formes linéaires.

Propriété 10 (Applications linéaires coordonnées).

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\varphi_i : E \to \mathbb{K}$, $\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mapsto x_i$. Alors, la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Ces applications linéaires sont les *applications linéaires coordonnées* associées à la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer les applications linéaires coordonnées associées à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 11 (Hyperplan).

Un sous-espace vectoriel H de E est un *hyperplan* de E si $\dim(H) = n - 1$.

Exercice 25. Décrire un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ déjà rencontré.

Théorème 6 (Hyperplan & Formes linéaires).

(i). Si φ est une forme linéaire sur E non nulle, alors $\operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E.

(ii). Soit H un hyperplan de E. Il existe une forme linéaire φ_0 telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi_0$. De plus, si φ est une forme linéaire telle que $\operatorname{Ker}\varphi = H$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda\varphi_0$.

Exercice 26. Illustrer ce théorème en dimensions 2 et 3.

Corollaire 7 (Hyperplans & Équations).

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'espace vectoriel H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe un n-uplet non nul $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $H = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \ ; \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$.

L'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ est une *équation cartésienne* de l'hyperplan H.

Exercice 27.

1. Illustrer ce théorème en dimensions 2 et 3.

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que deux hyperplans d'équations respectives $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} b_k x_k = 0$ soient égaux.

Quelques propriétés des endomorphismes nilpotents

Exercice 28. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n non nulle et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent, i.e. il existe un entier naturel m non nul tel que $\varphi^m = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe un unique entier naturel p tel que $\varphi^{p-1} \neq 0$ et $\varphi^p = 0$. Cet entier est l'indice de nilpotence de φ.

2. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un endomorphisme nilpotent. Proposer d'autres matrices d'endomorphismes nilpotents.

3. L'ensemble des endomorphismes nilpotents est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$?

Dans toute la suite, φ désigne un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à p.

4. Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathscr{L} = (x_0, \varphi(x_0), \ldots, \varphi^{p-1}(x_0))$ soit une famille libre.

5. En déduire que $p \leqslant n$.

6. Lorsque $p = n$, déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{L}}(\varphi)$.

7. Montrer que $\{0\} \subset \operatorname{Ker} \varphi \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} \varphi^{p-1} \subset E$, où toutes les inclusions sont strictes. En déduire qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que pour tout entier k appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\varphi(\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\}) \subset \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est triangulaire stricte.

On s'intéresse maintenant à la réciproque du dernier résultat.

8. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $V_k = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\}$ et $V_0 = \{0\}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(V_k) \subset V_{k-1}$. Montrer que f est nilpotent.

Programme officiel (PCSI)

Systèmes linéaires et calcul matriciel (p. 17)
Polynômes (p. 21)
Espaces vectoriels et applications linéaires (p. 22)
Matrices et déterminants - A - Matrices (p. 25)

Programme officiel (PSI)

Algèbre linéaire
A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices (p. 6) ; sauf c) Déterminants