

VII - Réduction des matrices carrées

I - Matrices diagonalisables

I.1 - Diagonalisabilité

Définition 1 - Matrices diagonalisables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La matrice A est *diagonalisable* s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exemple 1 - Matrice diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- D'une part,

$$AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- D'autre part,

$$PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- De plus, en utilisant la méthode de Gauss-Jordan,

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & L_3 \leftarrow -L_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}$$

Ainsi, P est inversible.

D'où,

$$\begin{aligned} AP &= PD \\ APP^{-1} &= PDP^{-1} \\ AI &= PDP^{-1} \\ A &= PDP^{-1} \end{aligned}$$

I.2 - Valeurs propres, Vecteurs propres

Définition 2 - Valeurs propres, Vecteurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Le réel λ est une *valeur propre* de la matrice A s'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

- X soit non nul,
- $AX = \lambda X$.

Le vecteur colonne X est un *vecteur propre* associé à la valeur propre λ .

Exemple 2 - Valeurs / Vecteurs propres

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ 1 + 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} \\ &= 2X. \end{aligned}$$

Ainsi, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

Proposition 1 - Vecteurs propres / Diagonalisation

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que A possède 3 valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ associées aux vecteurs propres X_1, X_2, X_3 . En notant P la matrice dont les colonnes sont X_1, X_2, X_3 et D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, alors

$$A = PDP^{-1}.$$

Exemple 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- D'après la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} AX_1 &= \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 4 - 4 \\ 3 - 1 - 3 \\ 5 - 4 - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_1. \end{aligned}$$

Ainsi, X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1 .

- D'après la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} AX_2 &= \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 4 \\ -1 + 3 \\ -4 + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2X_2. \end{aligned}$$

Ainsi, X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

- D'après la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} AX_3 &= \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 4 \\ 3 - 3 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3X_3. \end{aligned}$$

Ainsi, X_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

Proposition 2 - Diagonalisabilité et Valeurs propres (H.P.)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, P une matrice inversible dont les colonnes sont notées X_1, X_2, X_3 et $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$.
Si $A = PDP^{-1}$, alors $AX_1 = d_1X_1$, $AX_2 = d_2X_2$ et $AX_3 = d_3X_3$.

II - Polynômes annulateurs

II.1 - Définition

Définition 3 - Polynôme annulateur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $Q(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ un polynôme non nul. Le polynôme Q est un *polynôme annulateur* de A si

$$Q(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_pA^p = 0.$$

Exemple 4 - Polynôme annulateur

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $Q(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$. Alors,

$$\begin{aligned} Q(A) &= A^3 - 4A^2 + A + 6I \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}^3 - 4 \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}^2 + \dots \\ &\quad \dots + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 55 & -28 & -28 \\ 9 & -1 & -9 \\ 47 & -28 & -20 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 17 & -8 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 13 & -8 & -4 \end{pmatrix} + \dots \\ &\quad \dots + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, Q est un polynôme annulateur de A .

En particulier, on obtient alors

$$\begin{aligned} A^3 - 4A^2 + A + 6I &= 0 \\ A(A^2 - 4A + I) &= -6I \end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I)$.

Proposition 3 - Taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Q(X) = X^2 - (a + d)X + (ad - cb)$. Alors, $Q(A) = 0$.

Exemple 5 - Matrice de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. On pose

$$\begin{aligned} Q(X) &= X^2 - (1 + 5)X + (1 \times 5 - (-1) \times 2) \\ &= X^2 - 6X + 7. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} Q(A) &= A^2 - 6A + 7I \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -6 & 23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, Q est un polynôme annulateur de A .

En particulier,

$$\begin{aligned} A^2 - 6A + 7I &= 0 \\ A(A - 6I) &= -7I. \end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{7}(A - 6I)$.

II.2 - Polynômes annulateurs et Valeurs propres**Proposition 4 - Valeurs propres & Racines de polynômes annulateurs**

Soit A une matrice et Q un polynôme annulateur de A . Si λ est une valeur propre de A , alors λ est une racine de Q (c'est-à-dire $Q(\lambda) = 0$).

Exemple 6

Soit $R(X) = (X - 4)(X + 1)(X - 2)(X - 3)$. En développant,

$$\begin{aligned} R(X) &= (X - 4)(X + 1)(X^2 - 5X + 6) \\ &= (X - 4)(X^3 - 5X^2 + 6X + X^2 - 5X + 6) \\ &= (X - 4)(X^3 - 4X^2 + X + 6). \end{aligned}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $Q(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$, alors $R = (X - 4)Q$. Ainsi,

$$\begin{aligned} R(A) &= (A - 4I)(A^3 - 4A^2 + A + 6I) \\ &= (A - 4I)Q(A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc incluses dans l'ensemble des racines de R . Ainsi, les valeurs propres de A sont incluses dans l'ensemble $\{4, -1, 2, 3\}$. Nous avons prouvé que les valeurs propres de A étaient $-1, 2, 3$. On constate donc que cette inclusion peut être stricte !

II.3 - Recherche de valeurs / vecteurs propres

Proposition 5 - Recherche de vecteurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour montrer que λ est une valeur propre de A il faut déterminer les vecteurs X solutions du système linéaire $AX = \lambda X$ et montrer qu'il existe une solution non nulle.

Exemple 7 - Recherche de valeurs / vecteurs propres

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q(X) = (X - 5)(X + 1)(X + 2)$.

- **Un polynôme annulateur.** En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} Q(A) &= (A - 5I)(A + I)(A + 2I) \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 & 28 \\ 14 & 14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, Q est un polynôme annulateur de A .

- **Recherche des valeurs propres éventuelles.** Comme les racines de Q sont 5, -1 , -2 , les valeurs propres possible sont 5, -1 , -2 .

- **Recherche des vecteurs propres.**

★ Résolvons le système $AX = 5X$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 5x \\ 2x + y = 5y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{aligned}$$

Ainsi, $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ satisfait $AX_1 = 5X_1$. Donc 5 est

valeur propre de A et X_1 est un vecteur propre associé.

★ Résolvons le système $AX = -X$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{aligned}$$

Ainsi, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ satisfait $AX_2 = -X_2$. Donc -1 est valeur propre de A et X_2 est un vecteur propre associé.

★ Résolvons le système $AX = -2X$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -2x \\ 2x + y = -2y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ 7y = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 5L_2 - 2L_1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du système $AX = -2X$ est le vecteur nul. Le réel -2 n'est donc pas une valeur propre de A .

Finalement, les valeurs propres de A sont -1 et 5.

- **Diagonalisation.** On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Comme $2 \times (-1) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$, alors P est inversible et $P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En posant $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= D \\ PP^{-1}AP &= PD \\ IAPP^{-1} &= PDP^{-1} \\ A &= PDP^{-1}. \end{aligned}$$

- **Application.** Une récurrence classique permet alors de montrer que pour tout n entier naturel,

$$A^n = PD^nP^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si (u_n) et (v_n) sont les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 0, \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

On peut définir le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, puis

- (i). Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
- (ii). À l'aide d'une récurrence, montrer que pour tout n entier naturel, $X_n = A^n X_0$.
- (iii). En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n .