

T.D. V - Estimation

I - Construction d'estimateurs

Solution de l'exercice 1.

1. TODO

2.

3. En utilisant la variance empirique, $\bar{X}_n - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ est un estimateur sans biais de $p - p(1-p) = p^2$
De plus, comme $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$, alors $X_i^2 = X_i$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{2}{n-1} \bar{X}_n \sum_{i=1}^n X_i + \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2 \\ &= \frac{n}{n-1} \bar{X}_n - \frac{2n}{n-1} \bar{X}_n^2 + \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2 \\ &= \frac{n}{n-1} \bar{X}_n - \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2. \end{aligned}$$

2^e méthode. En utilisant la question précédente, \bar{X}_n^2 est un estimateur sans biais de $\frac{p(1+(n-1)p)}{n}$.
 $\frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2$ est un estimateur sans biais de $\frac{p}{n-1} - p^2$.
 $\frac{n}{n-1} \bar{X}_n - \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2$ est un estimateur sans biais de p^2 .

□

II - Comparaison d'estimateurs

Solution de l'exercice 6.

1. TODO

2. $\mathbf{E}[Y_n] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \theta$. Ainsi, Y_n est un estimateur sans biais si et seulement si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

3. En utilisant la bilinéarité de la covariance,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\bar{X}_n, Y_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\mathbf{V}(X_i)}_{=1}, \text{ d'après l'indépendance} \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la positivité de la variance,

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbf{V}(\bar{X}_n - Y_n) &= \mathbf{V}(\bar{X}_n) + \mathbf{V}(Y_n) - 2\text{Cov}(\bar{X}_n, Y_n) \\ &= \frac{1}{n} + \mathbf{V}(Y_n) - 2\frac{1}{n} = \mathbf{V}(Y_n) - \mathbf{V}(\bar{X}_n). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{V}(\bar{X}_n) \leq \mathbf{V}(Y_n)$ avec égalité si et seulement si $\mathbf{V}(\bar{X}_n - Y_n) = 0$, i.e. $\bar{X}_n - Y_n = c$ presque sûrement. Comme $\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mathbf{E}[Y_n] = \theta$, alors $c = 0$ et $\bar{X}_n = Y_n$ presque sûrement. □