I. Calculs de déterminants

Exercice 1. (✍) Soient a, $b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & a & & & (0) \\ b & a+b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & & b & a+b \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Déterminer $\det(\sin(\alpha_i + \alpha_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 4. Calculer $\det(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où $a_{i,i} = 2$, $a_{i,i+1} = 1$, $a_{i,i-1} = 3$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Exercice 5. **(Déterminant circulant,** ♡**)** Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. On note $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ les racines n-èmes de l'unité. On pose $C_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$ et $W_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \zeta_1^{n-1} & \zeta_2^{n-1} & \cdots & \zeta_n^{n-1} \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit $C_n W_n$.

2. En déduire $\det(C_n)$.

3. En déduire $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 6. Soit Δ le déterminant de $\det(1 + (x_i)^j)_{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2}$. Calculer Δ.

Exercice 7. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que, si A et $S = C - {}^tBA^{-1}B$ sont inversibles, alors M est inversible et calculer M^{-1}.
On pourra chercher M^{-1} sous la forme d'une matrice par blocs.

Exercice 8. Soient A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

2. Montrer que le résultat précédent est faux en général si $AB \neq BA$.

II. Applications

Exercice 9. [IMT]

1. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, si A ou B est inversible, alors $A + tB$ est inversible pour tout réel t, sauf en un nombre fini de valeurs.

2. Soient $\mathscr{F} = (a_1, \ldots, a_n)$ et $\mathscr{F}' = (b_1, \ldots, b_n)$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que, si $\mathscr{F}$ ou $\mathscr{F}'$ est libre, alors la famille $\mathscr{L} = (a_1 + tb_1, \ldots, a_n + tb_n)$ est libre pour tout réel t, sauf un nombre fini de valeurs de t.

Exercice 10. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ tels que $p < n$. Montrer que $\det(AB) = 0$.

Exercice 11. [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $((X - z_k)^n)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 12. [Centrale] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille de formes linéaires sur E. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i). la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre ;

(ii). $\varphi : x \in E \mapsto {}^t(f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ est surjective ;

(iii). $\exists\ (x_1, \dots, x_p) \in E^p\ ;\ \det(f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$.

Exercice 13. [Mines] Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\det(f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$.