T.D. VII - Variables aléatoires discrètes infinies

I - Modélisation & Lois géométriques

Exercice 1. Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires indistinguables au toucher. On effectue avec remise des tirages dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. On note T le premier instant où une boule blanche est tirée.
Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 2. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires indistinguables au toucher. On effectue avec remise des tirages dans l'urne jusqu'à obtenir une boule noire. On note T le premier instant où une boule noire est tirée.
Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 3. Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note S la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

1. Quelle est la loi de S ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note T la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 4. On dispose d'une pièce qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$. On lance la pièce successivement 4 fois et on note X le nombre de faces obtenus.

1. Quelle est la loi de X ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir au moins 2 piles lors d'une manche. On note T la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi suivie par T ? Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 5. On dispose d'une urne U_1 contenant 2 boules rouges et 3 boules noires et d'une urne U_2 contenant 1 boule rouge et 4 boules noires. On dispose également d'une pièce équilibrée.
On appelle *partie* l'expérience suivante : *on lance la pièce de monnaie ; si elle renvoie Pile, on tire une boule de l'urne U_1 ; sinon, on tire une boule de l'urne U_2.*

1. On note R l'événement « la boule tirée est rouge ». Déterminer $\mathbf{P}(R)$.

Un joueur répète des parties en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne une boule rouge. On note T le rang de la partie où il s'arrête.

2. Déterminer la loi de T. Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 6. On dispose de 3 urnes numérotées de 1 à 3. Pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, l'urne numéro k contient k boules rouges et $4 - k$ boules noires.
L'expérience consiste à choisir une urne « au hasard » puis à y tirer une boule.

1. On note N l'événement « la boule tirée est noire ». Déterminer $\mathbf{P}(N)$.

Un joueur répète des expériences en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne une boule noire. On note T le rang de la partie où il s'arrête.

2. Déterminer la loi de T. Préciser l'espérance et la variance de T.

II - Autour de la loi géométrique

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire telle que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \mathbf{P}([X = n]) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

1. Reconnaître la loi de X. En déduire son espérance et sa variance.

2. Déterminer $\mathbf{P}([X \leqslant n])$.

Exercice 8. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\, \mathbf{P}(T = k) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

On pose $Y = T + 1$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$, puis, pour tout $k \in Y(\Omega)$, exprimer $\mathbf{P}(Y = k)$ en fonction de $\mathbf{P}(T = k - 1)$.

2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y. Préciser son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de T.

Exercice 9. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\, \mathbf{P}(T = k) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^k.$$

On pose $Y = T + 1$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$, puis, pour tout $k \in Y(\Omega)$, exprimer $\mathbf{P}(Y = k)$ en fonction de $\mathbf{P}(T = k - 1)$.

2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y. Préciser son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de T.

Exercice 10. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall\, n \geqslant 1,\, \mathbf{P}_{[X>n-1]}([X = n]) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathbf{P}([X > n])$.

1. Justifier que

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n].$$

2. En déduire que $u_{n-1} - u_n = \mathbf{P}([X = n])$.

3. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul,

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) = 1 - \mathbf{P}_{[X>n-1]}([X = n]).$$

4. En déduire que pour tout n entier naturel non nul, $u_n = \frac{1}{3} u_{n-1}$.

5. Exprimer, pour tout n entier naturel la valeur de u_n en fonction de n puis reconnaître la loi de X.

6. Exprimer $\mathbf{P}([X \leqslant n])$ en fonction de n.

Exercice 11. Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$. On note Z la variable aléatoire égale au maximum de X_1 et de X_2.

1. Montrer que $[Z \leqslant n] = [X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n]$.

2. En déduire la valeur de $\mathbf{P}([Z \leqslant n])$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, en remarquant que $\mathbf{P}([Z = n]) = \mathbf{P}([Z \leqslant n]) - \mathbf{P}([Z \leqslant n-1])$, déterminer $\mathbf{P}([Z = n])$.

4. Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([Z = n]) = 1$.

Exercice 12. Soit Y une variable aléatoire telle que,

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\, \mathbf{P}(Y = k) = \mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-(k+1)}.$$

On pose $Z = Y + 1$.

1. Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) = 1$.

2. Reconnaître la loi de Z puis en déduire son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de Y.

4. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 13. Soit X et Y deux variables éaléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

1. En utilisant le système complet d'événements $([Y=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$, montrer que
$$\mathbf{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k)\times\mathbf{P}(Y=k).$$

2. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2}$.

3. En déduire $\mathbf{P}(X=Y)$.

III - Autour de la loi de Poisson

Exercice 14. Un serveur téléphonique ouvre sa ligne chaque minute. Chaque minute, la probabilité qu'il prenne un client est constante et égale à $\frac{1}{12}$. On note X le nombre d'appels auxquels le serveur a répondu en 1 heure.

1. Déterminer la loi de X, son espérance $\mathbf{E}[X]$ et sa variance $\mathbf{V}(X)$.
On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X. On considère la table de la loi de Poisson de paramètre 5 suivante :

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}([Y=k])$	0,006	0,034	0,084	0,140	0,175	0,175	0,146

2. Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.

3. Déterminer des valeurs approchées de $\mathbf{P}(X\leqslant 3)$ puis $\mathbf{P}(X\geqslant 4)$.

Exercice 15. Une entreprise produit 100 ampoules par seconde. On suppose que chaque ampoule a une probabilité de 5% d'être défectueuse. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défecteuses par seconde.

1. Déterminer la loi de X puis préciser son espérance et sa variance.

On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X.

2. Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.

3. À l'aide de la table de valeurs ci-dessous, calculer une valeur approchée de $\mathbf{P}([X\geqslant 10])$.

Fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre λ.

Par exemple, si U suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=3$, alors $\mathbf{P}([U\leqslant 4])=0{,}815$.

k \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,135	0,05	0,018	0,007	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,736	0,406	0,199	0,092	0,040	0,017	0,007	0,003	0,001	0,000
2	0,920	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,030	0,014	0,006	0,003
3	0,981	0,857	0,647	0,433	0,265	0,151	0,082	0,042	0,021	0,010
4	0,996	0,947	0,815	0,629	0,440	0,285	0,173	0,100	0,055	0,030
5	0,999	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,301	0,191	0,116	0,067
6	1	0,995	0,966	0,889	0,762	0,606	0,450	0,313	0,207	0,130
7	1	0,999	0,988	0,949	0,867	0,744	0,599	0,453	0,324	0,220
8	1	1	0,996	0,979	0,932	0,847	0,729	0,593	0,456	0,333
9	1	1	0,999	0,992	0,968	0,916	0,930	0,717	0,587	0,458
10	1	1	1	0,997	0,986	0,957	0,901	0,816	0,706	0,583

IV - Autres lois

Exercice 16. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que
$$\begin{cases}\mathbf{P}(X=0) &= \frac{1}{2},\\ \mathbf{P}(X=j) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j,\ \forall\, j\geqslant 1.\end{cases}$$

On rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$.
Déterminer l'espérance de X.

Exercice 17. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que,
$$\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(X=k)=\frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Simplifier $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

2. Vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k) = 1$.

3. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(X=0)$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X>n) = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire telle que

$$\forall\ n \geqslant 2,\ \mathbf{P}(X=n) = \frac{4(n-1)}{3^n}.$$

On admet que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} k^2x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

1. Vérifier que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4(n-1)}{3^n} = 1$.

2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 19. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ telle que

$$\forall\ n \geqslant 2,\ \mathbf{P}(Y=n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

1. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n)$.

2. Calculer $\mathbf{E}[Y]$.