T.D. III - Intégrale sur un segment

I - Calculs d'intégrales par primitives

Exercice 1. (Fonctions polynomiales, ⚙) Déterminer des primitives des fonctions suivantes puis calculer la valeur de l'intégrale :

1. x^2+x+1.
$\displaystyle\int_1^2 (x^2+x+1)\,\mathrm{d}x$.

2. $2x^3+4x+2$.
$\displaystyle\int_0^2 (2x^3+4x+2)\,\mathrm{d}x$.

3. $4x^3+2x^2-1$.
$\displaystyle\int_1^2 (4x^3+2x^2-1)\,\mathrm{d}x$.

4. $x^{10}+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{2}$.
$\displaystyle\int_0^1 \left(x^{10}+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2. (Fonctions puissances, ⚙) Déterminer des primitives des fonctions suivantes puis calculer la valeur de l'intégrale :

1. $x^{3/2}$.
$\displaystyle\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x$.

2. $\frac{1}{\sqrt{x}}$.
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

3. $\frac{1}{3x^2}$.
$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3x^2}\,\mathrm{d}x$.

4. $\frac{4}{x^5}$.
$\displaystyle\int_1^2 \frac{4}{x^5}\,\mathrm{d}x$.

5. $(2x+1)(x^2+x)^5$.
$\displaystyle\int_{-1}^0 (2x+1)(x^2+x)^5\,\mathrm{d}x$.

6. $(x^2+1)(x^3+3x+4)$.
$\displaystyle\int_{-1}^0 (x^2+1)(x^3+3x+4)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. (Logarithmes & Exponentielles, ⚙) Déterminer des primitives des fonctions suivantes puis calculer la valeur de l'intégrale :

1. $\frac{3}{x}$.
$\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$.

2. $\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}$.
$\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

3. e^{2x}.
$\displaystyle\int_{-2}^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

4. $\frac{1}{\mathrm{e}^{12x}}$.
$\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{12x}}\,\mathrm{d}x$.

5. $(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+x)^{22}$.
$\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+x)^{22}\,\mathrm{d}x$.

6. $\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}$.
$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4. (Calculs d'intégrales, ⚙) Calculer les valeurs des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+3x+1)\,\mathrm{d}x$.

2. $\displaystyle\int_{-2}^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

3. $\displaystyle\int_1^{-1} \mathrm{e}^3\,\mathrm{d}x$.

4. $\displaystyle\int_2^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

5. $\displaystyle\int_0^1 2\,\mathrm{e}^x+3x^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5. Soit $A \geqslant 1$. Déterminer $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

II - Fonctions définies par morceaux

Exercice 6. (Loi uniforme) Soit f la fonction définie par $f(x)=0$ si $x \notin [1,3]$ et $f(x)=\frac{1}{2}$ sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction f.

2. Déterminer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{3/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{-4}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

e) $\displaystyle\int_{-5}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Si $x \in [1,3]$, déterminer $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7. (Loi exponentielle) Soit f la fonction définie par $f(x)=0$ si $x<0$ et $f(x)=2\,\mathrm{e}^{-2x}$ sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction f.

2. Déterminer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{3/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{-4}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

e) $\displaystyle\int_{-5}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Si $x \geqslant 0$, déterminer $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8. (✎) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{5} |x-2|\,\mathrm{d}x$.

III - Linéarité de l'intégrale

Exercice 9. (⚙)

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10. (⚙) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 11. (⚙) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I.

2. Calculer $I + J$.

3. En déduire la valeur de J.

Exercice 12. (⚙) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I.

2. Calculer $I + J$.

3. En déduire la valeur de J.

IV - Dérivation par rapport aux bornes

Exercice 13. (✎) Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_3^x (t^2-2t+1)\,\mathrm{d}t$ est croissante.

Exercice 14. Soit f la fonction définie pour tout $x \geqslant 1$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la dérivée f' de f.

2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

3. Déterminer la dérivée seconde f'' de f.

V - Inégalités

Exercice 15. Soit g la fonction définie pour tout $x \geqslant 1$ par $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}$.

1. Déterminer la dérivée g' de g.

2. En déduire le tableau de variations de g.

3. En déduire l'encadrement : $0 \leqslant \displaystyle\int_1^3 g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\,\mathrm{e}$.

Exercice 16. Soit f la fonction définie pour tout $x \geqslant 1$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Minorer $\frac{1}{t}$ pour tout $t \in [1,x]$ et en déduire que $f(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x}$.

2. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 17. (✎) Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. Montrer que (u_n) est minorée par 0.

3. En minorant $1-x^2$, montrer que $u_n \leqslant \frac{4}{3(n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 18. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.

2. Étudier les variations de la suite (I_n).

3. En déduire que la suite (I_n) converge.

VI - Intégrations par parties

Exercice 19. À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

2. $\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

3. $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

4. $\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

5. $\int_1^2 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

6. $\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(t))^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 20. Soit $A \geqslant 1$. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 21. Soit f la fonction définie pour tout $x \geqslant 1$ par $f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. À l'aide d'une seconde intégration par parties, montrer que

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 2\,\mathrm{e} + 2\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 22. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_0.

2. Montrer que $f(t) = (2-t)\,\mathrm{e}^t$ est une primitive de la fonction $g(t) = (1-t)\,\mathrm{e}^t$.

3. Déterminer la valeur de u_1.

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

5. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

6. Déterminer la limite de (nu_n).

Exercice 23. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_0.

2. a) Montrer que, pour tout $t \in [1,\mathrm{e}]$, $0 \leqslant \ln(t) \leqslant 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

3. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n$.

4. En déduire u_1, u_2 et u_3.