

T.D. IX - Variables aléatoires à densité

Exercice 1. Soit λ, μ deux réels strictement positifs, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$. On suppose que X et Y sont indépendantes. On pose $Z = \min\{X, Y\}$.

1. Exprimer la fonction de répartition de Z en fonction des fonctions de répartition de X et de Y .
2. En déduire que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda + \mu)$.

I - Lois usuelles

Exercice 2. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier la loi des variables aléatoires suivantes :

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $X = 3U$. 2. $Y = U + 1$. 3. $Z = \frac{1}{2}X + 1$. | <ol style="list-style-type: none"> 4. $W = X^2$. 5. $H = \ln(X)$. 6. $E = -\ln(X)$. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Exercice 3. Un archer lance deux flèches en direction d'une cible de rayon d'un mètre. On suppose qu'il l'atteint systématiquement et que ses lancers sont indépendants. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on note R_i la variable aléatoire égale à la distance (en mètres) de la flèche numéro i au centre de la cible et on suppose que $R_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. On note $R = \min\{R_1, R_2\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([R > x]) = \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x])$.
2. En déduire l'expression de la fonction de répartition F de R .
3. Calculer la probabilité que la flèche la mieux lancée par l'archer soit située à moins de 50cm de la cible.

Exercice 4. Un appareil électronique possède un compartiment accueillant deux piles dont les durées de vie (en mois) respectives sont T_1 et T_2 . On suppose que T_1 et T_2 sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre 1. L'appareil cesse de fonctionner lorsque les deux piles sont vides, i.e. au bout d'un temps $T = \max\{T_1, T_2\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}([T_1 \leq x] \cap [T_2 \leq x])$.

2. En déduire l'expression de la fonction de répartition F de T .

3. Calculer la probabilité que l'appareil cesse de fonctionner, à cause de ses piles, au bout de 6 mois.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Déterminer la loi de Y .

2. On pose $Z = \sqrt{X}$. Déterminer la loi de Z , son espérance et sa variance.

3. On pose $W = X^2$. Déterminer une densité de W .

Exercice 6. On note Φ la fonction définie pour tout x réel par

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

1. Montrer que Φ réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0, 1[$.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Montrer qu'il existe un unique réel t_0 strictement positif tel que $\mathbf{P}(-t_0 < X < t_0) = 0,95$.
3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8, 4)$. En utilisant la table de la loi normale, déterminer des valeurs approchées de :

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> a) $\mathbf{P}(X < 7,5)$. b) $\mathbf{P}(X > 8,5)$. | <ol style="list-style-type: none"> c) $\mathbf{P}(6,5 < X < 10)$. d) $\mathbf{P}_{[X > 5]}(X > 6)$. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

II - Densités

Exercice 7. On définit la fonction f pour tout t réel positif par

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . Montrer que X admet une espérance et une variance et les déterminer.

Exercice 8. Soit f la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f .

2. Déterminer la fonction de répartition de X .

Soit φ la fonction définie pour tout x réel par $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

3. Montrer que φ réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$.
4. Déterminer l'expression de φ^{-1} .
5. On pose $Y = \varphi(X)$. Montrer que Y est une variable aléatoire dont on précisera la densité.

Exercice 9. (Lois de Pareto) Soit $\alpha > 0$ et f_α la fonction définie pour tout t réel par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{C}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante C telle que f soit une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire de densité f_α .
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Déterminer l'espérance et la variance de X en discutant selon les valeurs de α .
4. Soit $Y = X^2$. Déterminer une densité puis l'espérance (si elle existe) de Y .
5. Soit $T = \sqrt{X}$. Déterminer une densité puis l'espérance (si elle existe) de Y .

III - Estimation

Exercice 10. Soit $\theta > 0$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$. Pour estimer θ , on considère un 4-échantillon (X_1, X_2, X_3, X_4) de X et on propose les estimateurs suivants :

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} \text{ et } T_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4}{10}.$$

1. Calculer l'espérance de chacun de ces estimateurs.
2. Calculer le risque quadratique de chacun de ces estimateurs.
3. Lequel de ces deux estimateurs vous semble préférable ?

Exercice 11. Soit $\theta > 0$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\theta]$. Soit $n \geq 1$ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de X . On pose $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

1. Déterminer la loi de M_n , calculer son espérance et sa variance.
2. En déduire que $U_n = \frac{n+1}{2n} M_n$ est un estimateur sans biais de θ .
3. On pose $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Montrer que \bar{X}_n est un estimateur sans biais de θ .
4. Quel estimateur choisir entre U_n et \bar{X}_n ?

Exercice 12. Soit θ un réel strictement positif et f la fonction définie par $f(t) = e^{-(t-\theta)}$ lorsque $\theta \leq t$ et $f(t) = 0$ sinon.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
- Soit T une variable aléatoire de densité f , $n \geq 2$ et (T_1, \dots, T_n) un n -échantillon de T .
2. Calculer l'espérance et la variance de T .

On pose $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$.

3. Montrer que Y_n admet une espérance et une variance et les déterminer.
4. Montrer que $\hat{Y}_n = Y_n - 1$ est un estimateur sans biais de θ .
5. Déterminer le risque quadratique de \hat{Y}_n .

On pose $Z_n = \min_{1 \leq i \leq n} T_i$.

6. Exprimer la fonction de répartition F_n de Z_n en fonction de celle, notée F , de T .
7. En déduire que Z_n est une variable à densité.
8. Déterminer l'espérance et la variance de Z_n .
9. En déduire que $\hat{Z}_n = Z_n - \frac{1}{n}$ est un estimateur sans biais de θ .
10. Déterminer le risque quadratique de \hat{Z}_n .
11. Comparer les risques quadratiques de \hat{Y}_n et \hat{Z}_n .