I - Analyse réelle

I - Suites

I.1 - Suites usuelles

Définition 1 - Suite arithmétique

Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$ est une suite *arithmétique* de *raison* a.

Proposition 1

Soit u une suite arithmétique de raison a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $u_n = u_0 + na$.
- $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}a$.

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 12$. Soit n un entier naturel.

1. Exprimer u_n en fonction de n.

2. Exprimer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Définition 2 - Suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$ est une suite *géométrique* de *raison* q.

Proposition 2

Soit u une suite géométique de raison q. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $u_n = q^n u_0$.
- $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = u_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 12 \cdot u_n$. Soit n un entier naturel.

1. Exprimer u_n en fonction de n.

2. Exprimer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Définition 3 - Suite arithmético-géométrique

Soient $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + a$ est une suite *arithmético-géométrique*.

Exemple 1 - Étude des suites arithmético-géométriques

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
- Commençons par chercher une solution ℓ de l'équation $\ell = 2\ell + 3$.
  On obtient $\ell = -3$.
- Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - \ell = u_n + 3$.
  Montrons que (v_n) est une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= (2u_n + 3) + 3 \\ &= 2u_n + 6 \\ &= 2(u_n + 3) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$
  Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
  De plus, $v_0 = u_0 + 3 = 4$.
- D'après les résultats sur les suites géométriques,
  $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n v_0 = 2^{n+2}.$$

Ainsi,
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+2} - 3.$$

Exercice 3. Reprendre l'exemple précédent avec la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

I.2 - Études locale & globale

Définition 4 - Monotonie

Soit (u_n) une suite de nombres réels.
- (u_n) est croissante si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
- (u_n) est décroissante si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}$.
- (u_n) est constante si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}$.
- (u_n) est stationnaire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n$.

Exercice 4.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 10. Quelle est la monotonie de cette suite ? Et si la raison vaut -3 ?

2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3. Quelle est la monotonie de cette suite ? Et si la raison vaut 1 ? Et si la raison vaut $\frac{1}{2}$?

Définition 5 - Majorée, Minorée

Soit (u_n) une suite de nombres réels.
- La suite (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.
- La suite (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n$.
- La suite (u_n) est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exercice 5. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}$ est bornée.

I.3 - Limites

Proposition 3 - Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = b$.

- La somme $(u_n + v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\times$
$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$-\infty$

- Le produit $(u_n v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	ab	$\pm\infty\ (a \neq 0)$	$\pm\infty\ (a \neq 0)$
$+\infty$	$\pm\infty\ (b \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty\ (b \neq 0)$	$-\infty$	$+\infty$

- Le quotient (u_n/v_n)

	$b \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	a/b	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$	$\times$	$\times$
$-\infty$	$\pm\infty$	$\times$	$\times$

Exercice 6. Déterminer la limite des suites de terme général :

1. $u_n = n^2 + \sqrt{n}$.

2. $v_n = n^2 - \sqrt{n}$.

3. $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}}$.

Proposition 4 - Limites classiques

Soit $q \in \mathbb{R}$.
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exercice 7. Soit $x \in]-1,1[$. Déterminer la limite de la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

Théorème 1 - Théorème d'encadrement

Soient u, v, w trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$ telles que v et w convergent vers ℓ. Si, à partir d'un certain rang, $v \leqslant u \leqslant w$, alors u est une suite convergente et sa limite vaut ℓ.

Exercice 8.

1. Généraliser ce théorème au cas des suites de limites infinies.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

Théorème 2 - Théorème de la limite monotone - Cas croissant

Soit u une suite croissante.

- Si u est majorée, alors elle converge.
- Si u n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Exercice 9.

1. Écrire l'énoncé du théorème dans le cas de suites décroissantes.
2. Montrer que la suite (S_n) de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente.

II - Fonctions

II.1 - Régularité

Définition 6 - Classe $\mathscr{C}^n$

Une fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^n$ si :

- ses dérivées successives $f, f', \dots, f^{(n)}$ existent,
- $f^{(n)}$ est continue.

Exemple 2

La fonction $f(x) = x^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$. On dit aussi qu'elle est deux fois continûment dérivable.

II.2 - Étude d'extrema

Théorème 3 - Régularité & Variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Exercice 10. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 1$.

Théorème 4 - Dérivation & Extrema

Soit f une fonction dérivable sur un ouvert I et $x_0 \in I$. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Exercice 11.

1. Montrer que la réciproque de ce théorème est fausse.
2. Étudier les extrema sur $[-2, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto -x^3 + x^2$.

II.3 - Formule de Taylor

Théorème 5 - Théorème de Rolle

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 12. Montrer que ces hypothèses sont optimales.

Définition 7 - Relations de comparaison

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a.

- f et g sont équivalentes en a, noté $f \sim_a g$ si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- f est négligeable devant g en a, noté $f = o_a(g)$ si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Proposition 5 - Croissances comparées

- Au voisinage de $+\infty$:
  - ⋆ Si α, β, $\gamma > 0$,
  $$(\ln x)^\gamma = o(x^\beta),\ x^\beta = o(e^{\alpha x}).$$
  - ⋆ Si α, β, $\gamma < 0$,
  $$x^\beta = o((\ln x)^\gamma),\ e^{\alpha x} = o(x^\beta).$$
- Au voisinage de 0 : si $\beta < 0$, $\gamma > 0$,
$$|\ln x|^\gamma = o(x^\beta).$$

Exercice 13.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)+x}{x^2+1}$.

Théorème 6 - Équivalent et dérivation

Si f est une fonction dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a) \cdot (x - a).$$

Exemple 3 - Équivalents classiques en 0

- Comme $x \mapsto \ln(1 + x)$ est dérivable sur $] - 1, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x}$,
$$\ln(1 + x) - \ln(1) \sim_0 \frac{1}{1 + 0}(x - 0)$$
$$\ln(1 + x) \sim_0 x.$$
- Comme $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto e^x$,
$$e^x - e^0 \sim_0 e^0(x - 0)$$
$$e^x - 1 \sim_0 x.$$
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ est dérivable sur $] - 1, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \alpha(1 + x)^{\alpha-1}$,
$$(1 + x)^\alpha - (1 + 0)^\alpha \sim_0 \alpha(1 + 0)^{\alpha-1}(x - 0)$$
$$(1 + x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x.$$

Proposition 6 - Relations de comparaison & Opérations

- $\sim_a$ est une relation d'équivalence.
- Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors f et g sont de même signe sur un voisinage de a.
- $f \sim g$ si et seulement si $f - g = o(g)$.
- Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $f_1 + f_2 = o(g)$.
- Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
  Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.
- Si $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ et g_1, g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a, alors $\frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2}$.

- Si $f=o(g)$ et $g=o(h)$, alors $f=o(h)$.

Exercice 14.

1. Ne pas composer des équivalents.
Déterminer une fonction f telle que $f(x)$ et $f(2x)$ ne soient pas équivalentes en $+\infty$.

2. Ne pas additionner des équivalents.
Déterminer un équivalent en 0 de $x\mapsto \frac{1}{1+2x}-1+2x$.

Définition 8 - Développement limité à l'ordre 1 ou 2

Soit a un réel et f une fonction définie sur un voisinage de a.

- f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 s'il existe a_0 et a_1 réels tels que
$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+o_a(x-a).$$
- f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 s'il existe a_0, a_1 et a_2 réels tels que
$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+o_a\left((x-a)^2\right).$$

Exemple 4 - Polynômes et Inverse

- Soit $f:x\mapsto 3+2x+4x^2+3x^5+25x^{72}$. Alors,
$$\begin{aligned} f(x) &= 3+2x+4x^2+x^2\left(3x^3+25x^{70}\right)\\ &= 3+2x+4x^2+x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$
où $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
- Soit $f:x\mapsto \frac{1}{1-x}$. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique,
$$\begin{aligned} 1+x+x^2 &= \frac{1-x^3}{1-x}\\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x}\\ &= 1+x+x^2+x^2\frac{x}{1-x}\\ &= 1+x+x^2+x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$
où $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Exercice 15. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Déterminer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions

1. $x\mapsto 4x^3+2x^2+x+1$.

2. $x\mapsto \frac{1}{1+x}$.

Proposition 7 - Développement limité & Régularité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a\in I$.

- f admet un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si f est continue en a. En particulier, si $f(x)=a_0+o_a(1)$, alors $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)=a_0$.
- f ademt un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a. En particulier, si $f(x)=a_0+a_1(x-a)+o_a(x-a)$, alors $a_0=f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$ et $a_1=f'(a)$. La tangente en f à a a donc pour équation $a_0+a_1(x-a)$.

Théorème 7 - Formule de Taylor-Young

Soit $f:I\to\mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. Alors, pour tout $a\in I$,
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n).$$

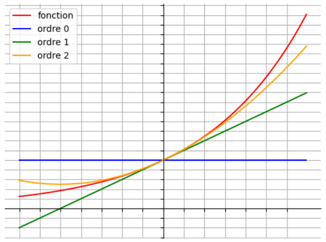
Exemple 5 - Développements limités classiques en 0

- La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f' : x \mapsto \mathrm{e}^x,$$
$$f'' : x \mapsto \mathrm{e}^x.$$

Ainsi,

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0(x-0) + \frac{\mathrm{e}^0}{2}(x-0)^2 + o(x^2)$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$



- La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$ et

$$f' : x \mapsto \frac{1}{1+x},$$
$$f'' : x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Ainsi,

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + \frac{1}{1+0}x - \frac{\frac{1}{(1+0)^2}}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$ et

$$f' : x \mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$
$$f'' : x \mapsto \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}.$$

Ainsi,

$$\ln(1+x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Exercice 16. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$.

Proposition 8 - Développement limité & Comportement local

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I contenant a.

- Si $f''(a) > 0$, alors f se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.
- Si $f''(a) < 0$, alors f se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.

Exemple 6

Comportement au voisinage de 1 de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ et

$$f' : x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}},$$
$$f'' : x \mapsto \frac{\sqrt{x}+1}{4x^{3/2}}\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}.$$

D'après la formule de Taylor-Young,

$$\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2).$$

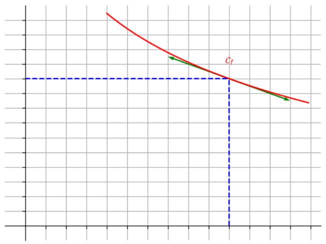
En particulier, il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0 telle que

$$e^{1-\sqrt{x}} - \underbrace{\left[1 - \frac{1}{2}(x-1)\right]}_{\text{éq. de la tangente}} = \frac{1}{4}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2)$$

$$= \frac{(x-1)^2}{4} + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$$

$$= \frac{1}{4}(x-1)^2(1+\varepsilon(x-1)).$$

Ainsi, lorsque x est proche de 1, alors $1+\varepsilon(x-1) > 0$ et $(x-1)^2 \geqslant 0$. Donc $f(x) - \left[1 - \frac{1}{2}(x-1)\right] \geqslant 0$ et la courbe représentative de f se trouve au-dessus de la tangente.



II.4 - Fonctions convexes

Définition 9 - Convexité pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Soit $f \in \mathscr{C}^2(I)$. f est une fonction *convexe* si $f'' \geqslant 0$.

Proposition 9 - Convexité & Tangentes

Soit f une fonction convexe et dérivable sur I. Alors,

$$\forall\ x, a \in I,\ f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a).$$

Exercice 17. Montrer les inégalités suivantes.

1. $\forall\ u \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+u) \leqslant u$.
2. $\forall\ u \in \mathbb{R},\ 1+u \leqslant e^u$.

II.5 - Plan d'étude de fonction

(i). Ensemble de définition.
(ii). Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
(iii). Dérivabilité, Variations.
(iv). Branches infinies.
(v). Représentation graphique avec les tangentes remarquables.

Exemple 7 - Étude de fonction

Soit $f : x \mapsto x - 1 + \frac{1}{x-2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(i). f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

(ii). f est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$. Sur chacun de ces intervalles,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est deux fois dérivable et $f''(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$. Ainsi, $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 2$ et f est convexe sur $]2, +\infty[$. Comme $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \leqslant 2$, alors f est concave sur $]-\infty, 2[$.

(iii). Étude des branches infinies.

- Comme $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote verticale à la courbe.
- Comme $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote verticale à la courbe.
- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -1$, alors la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. De plus, $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \geqslant 0$ pour tout $x > 2$. Ainsi, $\mathcal{C}_f f$ se trouve au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
- Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = -1$, alors la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. De plus, $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \leqslant 0$ pour tout $x < 2$. Ainsi, f se trouve au-dessous de son asymptote.

(iv). Tracé.