■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer. Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet de la « cage à l'écureuil ». Il s'agit d'une structure métallique que l'enfant doit escalader jusqu'à son sommet.
La cage est constituée de trois niveaux. L'enfant part du premier niveau A. Il cherche ensuite à atteindre le deuxième niveau B et enfin le troisième niveau qui est le sommet C.
On décompose l'ascension de l'enfant en une succession d'instants. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau A puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau A alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au niveau B avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau B alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et il atteint le somme C avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- si à un instant donné l'enfant est au sommet C alors il y reste définitivement.

On note pour tout entier naturel n, A_n l'événement : « l'enfant se trouve sur le niveau A à l'instant n », B_n l'événement « l'enfant se trouve sur le niveau B à l'instant n ». On note enfin C_n l'événement : « à l'instant n l'enfant est au sommet ». On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces trois événements.

1. Donner les probabilités a_1, b_1 et c_1.

2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n;\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n.$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $a_n = \frac{1}{3^n}$.

4. Pour tout entier naturel n on pose $v_n = 3^n b_n$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.
Établir, pour tout entier naturel n, que : $b_n = \frac{2n}{3^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$? En déduire une expression de c_n en fonction de l'entier n.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$. Comment interpréter ce résultat ?

6. On note X la variable aléatoire égale à l'instant où l'enfant atteint le sommet.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

b) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on a : $[X = n] = B_{n-1} \cap C_n$.

c) En déduire, pour $n \geqslant 2$, que : $\mathbf{P}([X = n]) = \frac{4(n-1)}{3^n}$.

7. a) On note X_1 la variable aléatoire égale à l'instant où pour la première fois l'enfant quitte le niveau A pour arriver sur le niveau B.
Justifier que X_1 suit une loi usuelle. Donner l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1 et donner $\mathbf{P}([X_1 = k])$ pour tout entier k de $X_1(\Omega)$. Calculer $\mathbf{E}[X_1]$.

b) On note X_2 la variable aléatoire égale au nombre d'instants supplémentaires nécessaires à l'enfant pour atteindre pour la première fois le niveau C une fois qu'il a atteint le niveau B. Justifier que X_2 suit la même loi que X_1.

c) Exprimer la variable aléatoire X en fonction de X_1 et de X_2. En déduire que X admet une espérance et que $\mathbf{E}[X] = 3$.

Exercice 2.
Partie A
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1$$

et $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$.

1. Recopier et compléter les trois lignes incomplètes du script Python ci-dessous pour qu'il calcule u_n pour $n = 20$:

```
n = ...
u = 0
v = 1
for k in ...:
    w = u
    u = ...
    v = ...
print(u)
```

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique de raison 8. En déduire l'expression de s_n en fonction de n.

3. On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = (-1)^n u_n \text{ et } t_n = v_n - v_{n+1}$$

a) Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier naturel n.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, on a $t_n = (-8)^n$.

4. Soit n un entier naturel non nul.

a) Calculer la somme $\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i$.

b) Justifier que : $\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$.

c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis vérifier que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}.$$

Partie B
On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer $M^2 - 7M - 8I_3$.

6. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I.

7. a) On pose : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que : $M^0 = a_0 M + b_0 I$.

b) Déterminer deux réels a_1 et b_1 tels que : $M^1 = a_1 M + b_1 I$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_n M + b_n I$. Prouver alors que :

$$M^{n+1} = a_n(7M + 8I) + b_n M.$$

En déduire deux réels a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n tels que $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$.

d) Montrer par récurrence que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n = u_n$$

où (u_n) est la suite définie dans la **Partie A**.

Partie C
Soient X et Y deux variables aléatoires pour lesquelles on suppose que la loi du couple (X, Y) est donné par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	2β	3β	3β
2	3β	2β	3β
3	3β	3β	2β

8. Déterminer la valeur du réel β pour que ce tableau représente effectivement la loi du couple (X, Y).

9. Reconnaître les lois marginales de X et Y. En déduire les espérances $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{E}[Y]$.

10. a) Vérifier que la covariance de X et Y est donné par : $\mathrm{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{12}$.

b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. On dispose de deux urnes $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$. L'urne $\mathscr{U}_1$ contient 3 boules rouges et 2 boules vertes, tandis que l'urne $\mathscr{U}_2$ contient 1 boule rouge et 4 boules vertes.
On choisit une des deux urnes au hasard (c'est-à-dire que chacune des deux urnes a la même probabilité d'être choisie), puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne.

- si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathscr{U}_1$;
- si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathscr{U}_2$.

Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par :

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte} \end{cases} \text{ et } X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte} \end{cases}$$

On pose $Z = X_1 + X_2$.

1. a) Montrer que $\mathbf{P}([X_1 = 1]) = \frac{2}{5}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?

b) Donner les valeurs de $\mathbf{E}[X_1]$ et $\mathbf{V}(X_1)$.

2. a) Montrer que $\mathbf{P}([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = \frac{12}{25}$.

b) Donner sous forme de tableau, la loi du couple (X_2, Z).

3. a) Déterminer la loi de X_2 ainsi que $\mathbf{E}[X_2]$ et $\mathbf{V}(X_2)$.

b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer la loi de Z.

d) Calculer $\mathbf{E}[Z]$. Montrer que $\mathbf{V}(Z) = \frac{414}{625}$.

4. On considère l'événement : « la première boule tirée est verte ». Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathscr{U}_1$.

5. On se propose dans cette question de calculer $\mathbf{V}(Z)$ par une autre méthode.

a) Calculer $\mathbf{E}[X_2 Z]$.

b) Montrer que $\mathrm{Cov}(X_2, Z) = \frac{204}{625}$.

c) En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

d) Utiliser le résultat précédent pour calculer $\mathbf{V}(Z)$.