

## I. Suites de fonctions

**Exercice 1.** (♣) Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions  $(f_n)$  :

1.  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{n(1+x^n)}$
2.  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n^a}{n^2+1} x e^{-nx}$
3.  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-nx} \sin(nx)$
4.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{(1-i)nx}$
5.  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \sqrt{x + 4n^2\pi^2}$
6.  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \mathbb{1}_{[0,n]}$

**Exercice 2.** (♣) [CCP] Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \cos \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)x \right]$ .

**Exercice 3.** [CCP] Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $u_n : x \mapsto \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2}$ .

1. Étudier la convergence simple de  $(u_n)$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Y-a-t-il convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$  ? sur  $[a, +\infty[$  pour  $a > 0$  ?

**Exercice 4.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  et à valeurs réelles. On suppose que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $f$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$ .

1. Montrer que  $(g_n)$  converge simplement sur  $I$ .
2. Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(1 + xy) \leq (1 + x^2)(1 + y^2)$ .
3. Montrer que  $(g_n)$  converge uniformément sur  $I$ .

**Exercice 5.** (♥) [Centrale] Soit la suite de fonctions définie pour tout  $x \in [0, 1]$  par

$$P_0(x) = 0$$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$$

1. Montrer que  $(P_n)$  est une suite de restrictions de polynômes dont on précisera le degré.

2. Montrer que cette suite converge simplement vers une fonction  $f$  à préciser.

3. Montrer que, pour tout  $x$  dans  $[0, 1]$  et pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$0 \leq f(x) - P_n(x) \leq 2 \frac{f(x)}{2 + n f(x)}.$$

4. Montrer que  $(P_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 6.** Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes de  $\mathbb{C}_p[X]$ . On suppose que  $(P_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$ .

1. Montrer qu'il existe des polynômes  $(L_i)_{0 \leq i \leq p}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n = \sum_{k=0}^p P_n(k) L_k$ .
2. En déduire que  $f$  est un polynôme de degré au plus  $p$ .
3. Montrer que  $(P_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}$  vers  $f$ .

**Exercice 7.** [CCP] On lance un dé à 6 faces. Les lancers sont indépendants et le dé n'est pas pipé. On note  $X_k$  la variable aléatoire égale à la valeur obtenue au  $k$ ème lancer.

1. Déterminer la loi de  $X_k$  et la fonction de répartition  $F$  associée à  $X_k$ .
2. On note  $Z_n$  la valeur maximale obtenue au bout de  $n$  lancers. Déterminer la fonction de répartition  $F_n$  de  $Z_n$  en fonction de  $F$ .
3. Déterminer la limite de  $(F_n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. La convergence est-elle uniforme ?
4. On note  $Y_n$  la valeur minimale obtenue au bout de  $n$  lancers. Déterminer  $G_n$ , sa fonction de répartition. Étudier les convergences simple et uniforme de  $(G_n)$ .

**Exercice 8.** (♣) [CCP] Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit sur  $[0, 1]$  la fonction  $G_n : t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$ .

1. Montrer que pour tout  $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$ ,  $|G'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$ .
2. En déduire que pour tout  $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$ ,  $|G_n(t) - 1| \leq \frac{te^t}{n}$ .

3. On définit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ ,  $I_n(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t dt$ .

Montrer que la suite de fonctions  $(I_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$ .

4. Converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$  ?

**Exercice 9.** [Centrale] On note  $(f_n)$  la suite de fonctions définie pour tout réel  $x$  par  $f_0(x) = \sin(x)$  et  $f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t) dt$ .

1. a) Calculer  $f_1$  et  $f_2$ .

b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $f_{n+1}(x) = (2n + 1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x)$ .

c) Montrer qu'il existe  $P_n$  et  $Q_n$  des polynômes à coefficients entiers de degrés inférieurs à  $n$  tels que

$$f_n(x) = Q_n(x^2) \sin(x) + x P_n(x^2) \cos(x)$$

2. a) Montrer que  $|f_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n}}{2^n n!}$ .

b) La suite  $(f_n)$  converge-t-elle simplement ? uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}$  ?

3. Montrer que  $\pi^2$  est irrationnel.

**Exercice 10.** (Approximation polynomiale de **BERNSTEIN**, ♡) Soit  $f$  une fonction  $k$ -lipschitzienne sur  $[0, 1]$ . Le polynôme de Bernstein d'ordre  $n$  associé à  $f$  est le polynôme

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_n}$  une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de moyenne  $x$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

1. Exprimer  $B_n(x)$  en fonction de  $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ .

2. Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe  $(M, \delta) \in \mathbb{R}_+^*$  tels que

$$\left| \mathbb{E} \left[ f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right] \right| \leq \varepsilon \mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - x \right| < \delta \right) + 2M \mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \delta \right)$$

3. En déduire que  $(B_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

## II. Séries de fonctions

**Exercice 11.** [CCP] Soit  $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$ .

1. Donner le domaine de définition  $D$  de  $F$ .

2. La fonction  $F$  est-elle continue sur  $D$  ?

3. Déterminer  $F(D)$ .

**Exercice 12.** [IMT] Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $u_n : x \mapsto a^n \frac{\cos(nx)}{n!}$ .

1. Étudier les convergences simple et uniforme de la série  $\sum u_n$ .

2. Déterminer la somme  $S$  de cette série de fonctions.

3. Calculer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{2\pi} S(x) \cos(px) dx$  et  $\int_0^{2\pi} S(x) \sin(px) dx$ .

**Exercice 13.** (♡) On définit  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$  et  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $F$ .

2. Trouver une relation entre  $F$  et  $\zeta$ .

3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\zeta(x)$ .

4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  ainsi qu'un équivalent de  $\zeta$  en  $+\infty$ .

**Exercice 14.** On définit la suite de fonctions  $(u_n)$  par

$$u_0(x) = \cos(x) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) = \sin(x)^n \cos(x)$$

Étudier le mode de convergence et éventuellement la somme de  $\sum u_n$ .

**Exercice 15.** [Mines] Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .

2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$ .

3. Déterminer un équivalent simple de  $f$  en  $(-1)^+$ .

4. Exprimer  $f'$  à l'aide d'une intégrale.

**Exercice 16.** [Centrale] Soit  $a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow [1, +\infty[$  une fonction continue telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(x)}{\ln(x)} = +\infty$ . On pose  $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-a(n)t}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Trouver un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .
3. Soit  $b > 0$ . On suppose que  $a(x) = x^b$ . Déterminer un équivalent de  $f$  en 0.

**Exercice 17.** [Mines] Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x$  réel, on pose  $u_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ , puis étudier sa continuité.
2. Déterminer un équivalent de  $S$  en 0.

### III. Avec Python

**Exercice 18.** [Centrale] Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+\dots+x^n}$ .

1. Déterminer le domaine de définition commun  $D$  des fonctions  $f_n$  et le domaine de convergence  $E$  de la suite  $(f_n)$ .
2. Avec Python, tracer les courbes des  $f_n$  sur  $[-5, 5] \cap E$  pour  $0 \leq n \leq 10$ .
3. Conjecturer le domaine de convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  puis prouver la conjecture.
4. Étudier la convergence uniforme de la série  $\sum f_n$ .
5. Tracer la somme de la série sur l'intersection de  $\mathbb{R}_+$  et de son domaine de convergence.

### Mathématiciens

**BERNSTEIN** Sergei Natanovich (5 mar. 1880 à Odessa-26 oct. 1968 à Moscou).