T.D. XI - Fonctions de plusieurs variables

I - Extremums libres

Solution de l'exercice 1.

1. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 2y \end{pmatrix}$. Ainsi, le seul point critique est $(0,0)$.

La hessienne de f vaut $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après le résultat de Monge, f atteint un minimum local en $(0,0)$.

Comme $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} H(f)(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \geqslant 0$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction f est convexe et le minimum est un minimum global.

2. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8xy + 6x^2 - 4y + 2 \\ 4x^2 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

* Soit $x = 0$ et $y = 1/2$.
* Soit $x = 1$ et $y = -2$.

De plus,

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 8y + 12x & 8x - 4 \\ 8x - 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

* En $(0,1/2)$, $rt - s^2 = -16 < 0$. Ainsi, $(0,1/2)$ est un point selle.
* En $(1,-2)$, $rt - s^2 = -16 < 0$. Ainsi, $(1,-2)$ est un point selle.

3. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6x \\ -3y^2 - 6y \end{pmatrix}$. Ainsi, (x,y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases} x(x+2) & = 0 \\ y(y+2) & = 0 \end{cases}$.

On obtient ainsi 4 points critiques de coordonnées : $(0,0)$, $(0,-2)$, $(-2,0)$, $(-2,-2)$.

De plus, la hessienne de f vaut

$$H(f)(x,y) = 6\begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & -y-1 \end{pmatrix}.$$

* Si $(x,y) = 0$, la hessienne est vaut $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. Les notations de Monge montrent que f atteint un point selle en $(0,0)$.
* Si $(x,y) = (-2,-2)$, la hessienne vaut $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Les notations de Monge montrent que f atteint un point selle en $(-2,-2)$.
* Si $(x,y) = (0,-2)$, la hessienne vaut $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Comme $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, les notations de Monge assurent que f atteint un minimum local en $(0,-2)$.
* Si $(x,y) = (-2,0)$, la hessienne vaut $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. Comme $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, les notations de Monge assurent que f atteint un maximum local en $(-2,0)$.

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$, alors f n'admet pas de maximum global.
Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$, alors f n'admet pas de minimum global.

□

Solution de l'exercice 2.

1. $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z \\ 2 - 6y \\ 2x - 6z \end{pmatrix}$. Ainsi, le seul point critique est $a_\star = (0,1/3,0)$.

De plus, $H(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} q_{(x,y,z)}(f)(h) &= h^T H(f)(x,y,z)h \\ &= 4h_1h_3 - 6h_2^2 - 6h_3^2 \\ &= -6\left(h_3 - \frac{2}{3}h_1h_3\right) - 6h_2^2 \\ &= -6\left(h_3 - \frac{1}{3}h_1\right)^2 + \frac{2}{3}h_1 - 6h_2^2. \end{aligned}$$

Comme $q_{a_\star}(h,0,h/3)>0$ et $q_{a_\star}(0,h,0)<0$, alors f n'atteint pas d'extremum en $a_\star$.

2. Le gradient vaut $\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}y+z-yz\\ x+z-xz\\ y+x-xy\end{pmatrix}$.
Soit (x,y,z) un point critique. Si $z=1$, la première équation donne $1=0$, ce qui est impossible. Ainsi, $z\neq 1$ et

$$\begin{cases}y & =-\frac{z}{1-z}\\ x & =-\frac{z}{1-z}\\ -2\frac{z}{1-z}-\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 & =0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y & =-\frac{z}{1-z}\\ x & =-\frac{z}{1-z}\\ -\frac{z}{1-z}\left(2+\frac{z}{1-z}\right) & =0\end{cases}$$

Ainsi, si $z=0$, alors $x=y=0$. Sinon, $z=2$, alors $x=y=2$. Il y a donc deux points critiques : $(0,0,0)$ et $(2,2,2)$.
La hessienne de f vaut

$$H(f)(x,y,z)=\begin{pmatrix}0 & 1-z & 1-y\\ 1-z & 0 & 1-x\\ 1-y & 1-x & 0\end{pmatrix}.$$

* Si $a_\star=(0,0,0)$, alors $H(f)(a_\star)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Ainsi, $q_{a_\star}(h)=2(h_1h_2+h_1h_3+h_2h_3)$.
  * $\star$ $q_{a_\star}(h,h,0)=2h^2>0$.
  * $\star$ $q_{a_\star}(-h,h,0)=-2h^2<0$.

  Ainsi, f ne présente pas d'extremum en $(0,0,0)$.
* Si $a_\star=(2,2,2)$. Alors $H(f)(a_\star)=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$. On conclut comme précédemment.

□

Solution de l'exercice 3.

1. a) (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases}2x-6 & =0\\ 2y-14 & =0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x & =3\\ y & =7\end{cases}.$$

Ainsi, $M(3,7)$ est l'unique point critique de f.

b) Comme $H(f)(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, alors $rt-s^2>0$ et $r>0$. Ainsi, f admet un minimum local en $(3,7)$.

2. a) Soit $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ non nul. Alors,

$$q_{(x,y)}(h_1,h_2)=2h_1^2+2h_2^2>0.$$

Ainsi, f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

b) Comme f est strictement convexe et $(2,7)$ est un point critique de f, alors f atteint un minimum global en $(2,7)$.

3. a) D'après la définition de la distance,

$$\|(x,y)-(2,7)\|^2=(x-2)^2+(y-7)^2=x^2+y^2-2x-14y+58.$$

b) D'après la question précédente, $f(x,y)\geqslant 0$. De plus, $f(x,y)=0$ si et seulement si $(x,y)=(2,7)$. On obtient bien que $(2,7)$ est un minimum global de f. □

II - Extremums sous contraintes

Solution de l'exercice 5.

1. On se ramène à l'étude de $\varphi:x\mapsto(x+1)\ln(x+1)$. Comme $\varphi'(x)=\ln(x+1)+1$, alors φ est décroissante sur $]-1,\mathrm{e}^{-1}-1]$ puis croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}-1,+\infty[$.
Le minimum de f sous contrainte est donc atteint en $\left(\mathrm{e}^{-1}-1,\mathrm{e}^{-1}\right)$.

2. On se ramène à l'étude de $\varphi:x\mapsto 2x\,\mathrm{e}^x$. Comme $\varphi'(x)=2(x+1)\,\mathrm{e}^x$, alors φ est décroissante sur $]-\infty,-1]$ puis croissante sur $[-1,+\infty[$.
Le minimum de f sous contrainte est donc atteint en $(-1,-1)$.

3. Comme $y^2=3-2x^2$, on se ramène à l'étude de $\varphi:x\mapsto\frac{3-y^2}{2}y$ où $y\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$. Comme $\varphi'(x)=3\frac{1-y^2}{2}$, alors φ est décroissante sur $[-\sqrt{3},-1]$, croissante sur $[-1,1]$ puis décroissante sur $[1,\sqrt{3}]$.
De plus, $\varphi(1)=1$ et $\varphi(-1)=-1$.
Comme $\varphi(-\sqrt{3})=\varphi(\sqrt{3})=0$, φ ne possède pas d'extremum global en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

Le minimum de f sous contrainte est donc atteint en $(1,-1)$ et $(-1,-1)$.
Le maximum de f sous contraine est donc atteint en $(1,1)$ et $(1,-1)$.
On pourrait ensuite étudier la présence d'extrema locaux. □

Solution de l'exercice 6.

1. Contrainte de qualification : La jacobienne vaut $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ est de rang 2 car ses deux premières colonnes sont linéairement indépendantes.
Condition du premier ordre : il existe $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} 2x-\lambda_1-2\lambda_2 & =0\\ 2y-\lambda_1+\lambda_2 & =0\\ 2z-\lambda_1-\lambda_2 & =0\\ 2t+\lambda_1-\lambda_2 & =0\\ x+y+z-t & =3\\ 2x-y+z+t & =-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & =-1\\ y & =2\\ z & =0\\ t & =-2\\ \lambda_1 & =2\\ \lambda_2 & =-2 \end{cases}$$

Comme la hessienne réduite du lagrangien est $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, alors $h^T\widetilde{H}h > 0$ pour tout vecteur h non nul et f atteint sous contrainte un minimum en $(-1,2,0)$.

2. Contrainte de qualification : la jacobienne $\begin{pmatrix}2x & 2y\end{pmatrix}$ est de rang 1 sauf en $(0,0)$ qui n'appartient pas au domaine étudié.
Condition du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y}-2\lambda x & =0\\ -\frac{1}{x-y}-2\lambda y & =0\\ x^2+y^2-2 & =0 \end{cases}$$

Ainsi, $2\lambda(x+y)=0$.

* Si $\lambda=0$, alors $\frac{1}{x-y}=0$, ce qui est impossible.
* Si $x=-y$, comme $x^2+y^2=2$, alors $x^2\in\{-1,1\}$. On obtient ainsi les points $(-1,1)$ (avec $\lambda=\frac{1}{4}$) et $(1,-1)$ (avec $\lambda=\frac{1}{4}$). De plus,

$$H_\star = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x-y)^2}-2\lambda & \frac{1}{(x-y)^2}\\ \frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-y)^2}-2\lambda \end{pmatrix}.$$

  ⋆ Si $a_\star=(-1,1)$. Alors, $H_\star=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ et $\operatorname{Ker} J_\star = \operatorname{Vect}\{(-1,1)\}$. Ainsi, si $h^T=(-t,t)^T\in\operatorname{Ker} J_\star$,

$$4h^TH_\star h = -3t^2+2t^2-3t^2<0.$$

  Ainsi, f atteint un maximum sous contrainte en $(-1,1)$.

  ⋆ Si $a_\star=(1,-1)$. Alors, $H_\star=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ et on obtient le même calcul que précédemment. Ainsi, f atteint un maximum sous contrainte en $(-1,1)$.

□

Solution de l'exercice 7.

1. $P(x,y)=x+3y-C(x,y)$. La hessienne vaut $\begin{pmatrix}-10 & 2\\ 2 & -10\end{pmatrix}$. Comme $q_a(P)(h) = -10h_1^2+4h_1h_2-10h_2^2 = -10\left(h_1-\frac{1}{5}h_2\right)^2-\frac{24}{25}h_2^2\leqslant 0$, le profit est une fonction concave.

2. La condition est $x+y=20$.
Condition de qualification : la jacobienne est égale à $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$ est de rang 1.
Conditions du premier ordre :

$$\begin{cases} -10x+2y+3-\lambda & =0\\ -10y+2x+3-\lambda & =0\\ x+y & =20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & =10\\ y & =10\\ \lambda & =-77 \end{cases}$$

Comme la contrainte est linéaire, $H_\star=H(P)$. Comme P est concave, alors P atteint un maximum sous contrainte en $(10,10)$. □

Solution de l'exercice 8.

1. Comme U_1, U_2 et U_3 sont sans biais,

$$\mathbf{E}[T_1]=\frac{c+c+c}{3}=c,$$
$$\mathbf{E}[T_2]=c,$$
$$\mathbf{E}[T_3]=\frac{3c+c+c}{5}=c.$$

Ainsi, T_1, T_2 et T_3 sont sans biais.

2. D'après les hypothèses, en notant σ_1^2 la variance de l'estimateur U_1, alors $\sigma_2^2 = 4\sigma_1^2$ et $\sigma_3^2 = 9\sigma_1^2$. Comme les estimateurs sont indépendants,

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(T_1) &= \frac{\sigma_1^1 + 4\sigma_1^2 + 9\sigma_1^2}{9} = \frac{14}{9}\sigma_1^2,\\
\mathbf{V}(T_2) &= \sigma_1^2,\\
\mathbf{V}(T_2) &= \frac{9+4+9}{25}\sigma_1^2 = \frac{22}{25}\sigma_1^2.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{22}{25} < 1 < \frac{14}{9}$, c'est le troisième estimateur qui est le meilleur.

3. Comme T est sans biais, alors $a+b+c=1$. De plus, $\mathbf{V}(T) = a^2 + 4b^2 + 9c^2$. On cherche donc à optimiser $f(a,b,c) = a^2 + 4b^2 + 9c^2$ sous la contrainte $a+b+c=1$.
Condition de qualification : la jacobienne vaut

$$J(g)(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix},$$

qui est bien de rang 1.
Conditions du premier ordre : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} 2a - \lambda &= 0\\ 8b - \lambda &= 0\\ 18c - \lambda &= 0\\ a+b+c &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - \lambda &= 0\\ 8b - \lambda &= 0\\ 18c - \lambda &= 0\\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{18}\right)\lambda &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{36}{49}\\ b &= \frac{9}{49}\\ c &= \frac{4}{49}\\ \lambda &= \frac{72}{49} \end{cases}$$

On montre sans difficulté que f est convexe et la contrainte est linéaire donc f atteint un minimum sous contrainte en (a,b,c).
L'estimateur linéaire sans biais de variance minimale est donc :

$$T = \frac{36U_1 + 9U_2 + 4U_3}{49}.$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. La condition de qualification est triviale car la jacobienne est une matrice ne contenant que des 1.
Les premières conditions de premier ordre donnent $x_i = \frac{\lambda}{2}$. Or, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, donc $\lambda = \frac{2}{n}$. Ainsi, $x_i = \frac{1}{n}$.
Comme f est convexe et la contrainte est linéaire, f atteint un minimum.

2. L'estimateur T est de la forme $\sum_{i=1}^n x_i X_i$. Comme T est sans biais, alors $\sum_{i=1}^n x_i\lambda = \lambda$.
Comme les variables sont indépendantes, $\mathbf{V}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i^2$. Ainsi, détermienr l'estimateur de variance minimale revient à optimiser $\sum_{i=1}^n x_i^2$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.
L'estimateur recherché est donc $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. C'est l'estimateur usuel de la moyenne. □

Solution de l'exercice 10.

1. Comme $x^3 = y^2$, alors x est à valeurs positives. Ainsi, le minimum de f est atteint pour $x=0$ et vaut 0.

2. Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda x^2 &= 0\\ -2\lambda y &= 0\\ x^3 - y^2 &= 0 \end{cases}$$

* Soit $y = 0$ et $x = 0$ et la première équation est impossible.
* Soit $\lambda = 0$ et la première équation est impossible.

3. Il n'y a pas de solution aux conditions du premier ordre et pourtant le problème d'optimisation admet une solution.
On constate que la jacobienne vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ au point $(0,0)$. La condition de qualification n'est pas satisfaite et le théorème ne s'applique pas. □