

# VIII - Probabilités

## I - Univers

### À Savoir

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.

### Exemple 1

Les résultats obtenus à l'issue de deux lancers successifs d'un dé.

### À Savoir

L'**univers** est l'ensemble des résultats possibles pour une expérience. Généralement noté  $\Omega$ .

### Exemple 2 - 2 lancers d'un dé

$$\Omega = \{(i, j), 1 \leq i, j \leq 6\} = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$$

### À Savoir

Un **événement** est une partie (ou sous-ensemble) de l'univers  $\Omega$ .

### Exemple 3 - 2 lancers d'un dé

$A$  : obtenir un nombre pair lors du premier lancer.  
 $B$  : la somme des deux lancers est un nombre pair.

### À Savoir

Deux événements  $A$  et  $B$  sont **incompatibles** si  $A \cap B = \emptyset$

### Exemple 4 - 2 lancers d'un dé

$A$  : obtenir un nombre pair lors du premier lancer.

$B$  : la somme des deux lancers vaut 2.

Si on considère l'événement  $A \cap B$ , le premier dé renvoie un nombre pair, donc supérieur ou égal à 2. Comme le second dé renvoie au moins 1, la somme des deux est supérieure ou égale à 3. Ainsi,  $A$  et  $B$  sont incompatibles.

### À Savoir

L'événement **contraire** de  $A$ , noté  $\overline{A}$ , est l'ensemble des expériences de  $\Omega$  qui ne sont pas dans  $A$ .

### Exemple 5 - 2 lancers d'un dé

$A$  : obtenir un nombre pair lors du premier lancer.

$\overline{A}$  : obtenir un nombre impair lors du premier lancer.

### À Savoir

Un **système complet d'événements** est une famille d'événements  $A_1, \dots, A_n$  tels que

$$\begin{cases} A_i \neq \emptyset & \forall 1 \leq i \leq n \\ A_i \cap A_j = \emptyset & \forall 1 \leq i \neq j \leq n \\ \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \Omega \end{cases}$$

**Exemple 6 - 2 lancers d'un dé**

$A_2$  : la somme des deux résultats vaut 2.

$A_3$  : la somme des deux résultats vaut 3.

$\vdots$

$A_{12}$  : la somme des deux résultats vaut 12.

$(A_2, \dots, A_{12})$  est un système complet d'événements.

**II - Probabilités****À Savoir**

Une **probabilité** sur un ensemble fini  $\Omega$  est une application définie sur l'ensemble des événements et à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que

\*  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ ,

\* si  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ .

**À Savoir**

L'**équiprobabilité** est la probabilité définie (lorsque  $\Omega$  est fini) par

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

**Exemple 7 - 2 lancers d'un dé équilibré**

$A$  : le résultat du premier lancer est pair.

$$A = \{(2i, j), 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 6\} = \{2, 4, 6\} \times [1, 6].$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}.$$

**À Savoir**

\*  $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ .

\*  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ .

**Exemple 8 - 2 lancers d'un dé équilibré**

$A$  : le résultat du premier lancer est pair.

$C$  : le résultat du second lancer est pair.

$A \cup C$  : le résultat d'un des lancers est pair.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2},$$

$$A \cap C = \{(2i, 2j), 1 \leq i, j \leq 3\} = \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\},$$

$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}(A \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

**À Savoir**

Si  $\mathbf{P}(B) \neq 0$ , alors la **probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$**  vaut  $\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$ .

**Exemple 9 - 2 lancers d'un dé équilibré**

$A$  : le résultat du premier lancer est un 2.

$B$  : le résultat du premier lancer est pair.

On a vu précédemment que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

Si le résultat du premier lancer est 2, alors le résultat est pair.

Ainsi,  $A \cap B = A$  et

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}.$$

Finalement, la probabilité que le résultat du premier lancer soit égal à 2 sachant qu'il est pair est égale à

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

### À Savoir

**Formule des probabilités composées.** Si  $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ ,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Cette formule est utile lorsque l'expérience est une succession d'étapes qui ont une influence les unes sur les autres.

### Exemple 10 - Une urne

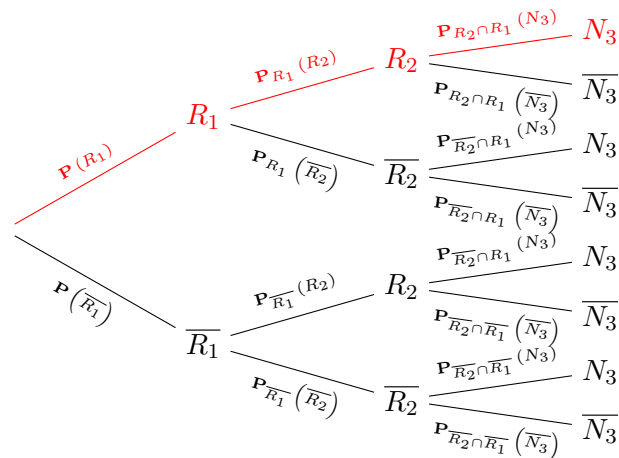
Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules noires. On effectue 4 tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 2 boules rouges puis 1 boule noire ?

On note :

$R_1$  : la première boule tirée est rouge.

$R_2$  : la seconde boule tirée est rouge.

$N_3$  : la troisième boule tirée est noire.



Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap N_3) &= \mathbf{P}(R_1) \times \mathbf{P}_{R_1}(R_2) \times \cdots \\ &\quad \cdots \times \mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(N_3) \times \mathbf{P}_{R_1 \cap R_2 \cap N_3}(A_4) \\ &= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{4}{12} \\ &= \frac{5}{13 \times 7}. \end{aligned}$$

### À Savoir

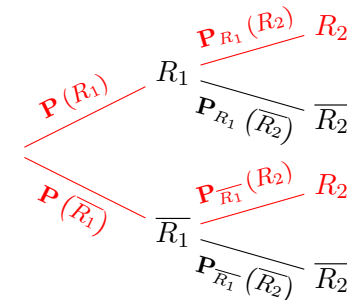
**Formule des probabilités totales.** Si  $(A_1, \dots, A_n)$  est un système complet d'événements,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{A_i}(A) \mathbf{P}(A_i).$$

Cette formule est utile lorsque le résultat d'une expérience peut être plus facile à décrire lorsqu'on le décompose selon différents cas possibles.

### Exemple 11 - La même urne

Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge ? On distingue les cas où la première boule tirée est rouge (événement  $R_1$ ) et les cas où la première boule tirée est noire (événement  $\overline{R_1}$ ).



Comme  $(R_1, \overline{R_1})$  est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R_2) &= \mathbf{P}(R_2 \cap R_1) + \mathbf{P}(R_2 \cap \overline{R_1}) \\ &= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \times \frac{10}{14} \\ &= \frac{10 \times 9}{15 \times 14} + \frac{5 \times 2 \times 10}{5 \times 3 \times 14} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

### À Savoir

**Formule de Bayes.** Si  $\mathbf{P}(A) \neq 0$  et  $\mathbf{P}(B) \neq 0$ , alors

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}_B(A) \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

### Exemple 12 - La même urne

L'expérimentateur tire successivement 2 boules et cache le résultat de son premier tirage. Sachant que le second tirage est une boule rouge, quelle est la probabilité que le premier tirage soit une boule rouge ?

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{R_2}(R_1) &= \frac{\mathbf{P}_{R_1}(R_2) \times \mathbf{P}(R_1)}{\mathbf{P}(R_2)} \\ &= \frac{\frac{9}{14} \times \frac{10}{15}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{9}{14}. \end{aligned}$$

## III - Indépendance

### À Savoir

$A$  et  $B$  sont **indépendants** si  $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$ .

### Exemple 13 - 2 lancers d'un dé équilibré

$A$  : le résultat du premier lancer est pair.

$C$  : le résultat du premier lancer est un multiple de 3.

$$C = \{(3i, j), 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 6\} = \{3, 6\} \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{2 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{3}$$

$$A \cap C = \{(6, j), 1 \leq j \leq 6\}$$

$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi,  $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(C)$ . Les événements  $A$  et  $C$  sont indépendants.

### À Savoir

Les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont **mutuellement indépendants** si pour tout  $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$ .

Peut être utilisé entre les différents lancers d'une pièce, d'un dé, d'un tirage avec remise,...