

# VII - Applications linéaires

## I - Applications linéaires

### I.1 - Définitions

#### Définition 1 - Application linéaire

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . L'application  $f$  est une *application linéaire* si pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v).$$

L'ensemble des applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  est noté  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ .

- Les applications linéaires sont des *morphismes* entre espaces vectoriels.
- Les applications linéaires bijectives sont des *isomorphismes*.
- Si  $n = p$ , on note  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Ses éléments sont des *endomorphismes*.
- Les endomorphismes bijectifs sont des *automorphismes*.

#### Exemple 1 - Applications linéaires

- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (3x + 2y, x + 2z, x + y + z)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (3x + 2y, x + 2y, x + y)$ .
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3x + 2y$ .
- $\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x$  est un automorphisme.

#### Proposition 1

Si  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ , alors  $f(\vec{0}_n) = \vec{0}_p$ .

#### Proposition 2 - Opérations sur les applications linéaires

- Soient  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors,  $\alpha \cdot f : x \mapsto \alpha \cdot f(x)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ .
- Soit  $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Alors,  $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ .
- Soient  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)$ .  $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^q$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

#### Exemple 2 - Opérations sur les applications linéaires

- Si  $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, x + y)$  et  $g : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z)$ , alors
- Si  $f : (x, y) \mapsto x + 2y$  et  $g : (x, y, z) \mapsto (x + z, y + z)$ , alors

$$f + g : (x, y, z) \mapsto (3x + 2y + z, 2x - z).$$

$$f \circ g : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z.$$

### I.2 - Noyau & Image

#### Définition 2 - Noyau, Image

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ .

- Le *noyau* de  $f$ , noté  $\text{Ker}(f)$ , est l'ensemble

$$\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) = \vec{0}_p\}.$$

- L'*image* de  $f$ , notée  $\text{Im}(f)$ , est l'ensemble

$$\text{Im}(f) = \{f(x), x \in \mathbb{R}^n\}.$$

**Exemple 3 - Calculs de noyau et d'image**

Soit  $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, 4x + 2y)$ .

- $(x, y, z) \in \text{Ker } f$  si et seulement si  $f(x, y, z) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{(-\lambda/2, \lambda, \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(-1/2, 1, 0), (0, 0, 1)\} = \text{Vect}\{(-1, 2, 0), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

- D'après la définition,

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{(2x + y, 4x + 2y), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(2, 4) + y(1, 2), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(2, 4), (1, 2)\} = \text{Vect}\{(1, 2)\}. \end{aligned}$$

**Proposition 3**

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ .

- $\text{Ker } f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
- $\text{Im } f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^p$ . La dimension de  $\text{Im } f$  est le *rang* de  $f$ .

**Exemple 4**

Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x + 3y + z = 0\}$ .

Posons  $f : (x, y, z) \mapsto 2x + 3y + z$ . Alors,  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ , donc  $F = \text{Ker } f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 3 - Forme linéaire**

Les applications linéaires à valeurs dans  $\mathbb{R}$  sont des *formes linéaires*.

**Théorème 1 - Caractérisation des applications linéaires injectives**

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i).  $f$  est injective.

(ii).  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_n\}$ .

**Exemple 5 - Une preuve d'injectivité**

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^p = \text{Id}$ . Alors,  $f$  est injective.

En effet, si  $x \in \text{Ker } f$ , alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \vec{0}_n \\ f^{p-1}(f(x)) &= f^{p-1}(\vec{0}_n) \\ f^p(x) &= \vec{0}_n, \text{ car } f^{p-1} \text{ est linéaire} \\ x &= \vec{0}_n, \text{ car } f^p = \text{Id} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Ker } f = \{\vec{0}_n\}$ . L'application  $f$  est donc injective.

**Théorème 2 - Théorème du rang (admis)**

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Alors,

$$\dim(\text{Ker } f) + \text{Rg } f = \dim(\mathbb{R}^n).$$

**Exemple 6 - Forme linéaire & Hyperplan**

Soit  $f$  une forme linéaire non nulle. Comme  $\text{Im } f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}$ , alors  $\dim(\text{Im } f) \in \{0, 1\}$ .

Comme  $f$  est non nulle, alors  $\text{Im } f \neq \{0\}$ . Ainsi,  $\dim \text{Im } f = 1$  et  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ .

D'après le théorème du rang,  $\dim \text{Ker } f = n - 1$  donc  $\text{Ker } f$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 4**

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est bijective.
- $f$  est injective.
- $f$  est surjective.

**Exemple 7 - Un exemple d'isomorphisme**

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^p = \text{Id}$ . D'après l'exemple précédent,  $f$  est injective. Ainsi, comme  $f$  est un endomorphisme,  $f$  est bijective. On remarque ici que  $f \circ f^{p-1} = \text{Id}$ , donc  $f^{-1} = f^{p-1}$ .

**II - Matrice d'une application linéaire**

Dans toute la suite,  $p$  est un entier naturel non nul et  $F$  désigne un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**II.1 - Vecteurs, Applications linéaires, Matrices****Définition 4 - Matrice d'une famille de vecteurs dans une base**

Soient  $m$  un entier naturel non nul,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$  et  $v_1, \dots, v_m$  des vecteurs de  $F$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on

note  $v_j = \sum_{i=1}^p x_{ij} e_i$ . La *matrice des vecteurs*  $(v_1, \dots, v_m)$  dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_m) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}).$$

**Exemple 8 - Matrice de vecteurs**

Posons  $f_1 = (1, 1)$  et  $f_2 = (1, 2)$ . La famille  $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $(x, y) = af_1 + bf_2$ . Alors,

$$\begin{cases} a + b = x \\ a + 2b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x - y \\ b = y - x \end{cases}$$

Soient  $v_1 = (0, 1)$ ,  $v_2 = (1, 0)$  et  $v_3 = (4, 5)$ . Alors,

$$\begin{aligned} v_1 &= -(1, 1) + f_2 \\ v_2 &= 2(1, 1) - f_2 \\ v_3 &= 3(1, 1) + f_2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Définition 5 - Matrice d'une application linéaire dans deux bases**

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$  une base de  $\mathbb{R}^p$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . La *matrice de l'application linéaire*  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ .

Si  $n = p$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ , on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ .

**Exemple 9 - Matrices d'applications linéaires**

- Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{Id}(e_i) = e_i$ . Ainsi,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) = I_n$ .
- Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $\mathbb{R}^p$ . En notant  $f$  l'application nulle de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ , alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(e_i) = \vec{0}_p$ . Ainsi,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = 0_{p,n}$ .
- On pose  $e_1 = (1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 2, 1)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$ ,  $f_1 = (1, 1)$ ,  $f_2 = (1, 2)$ . On montre aisément que  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, y - 3z)$ . De plus, en utilisant l'exemple précédent,

$$f(e_1) = (3, -2) = 8f_1 - 5f_2$$

$$f(e_2) = (4, -1) = 9f_1 - 5f_2$$

$$f(e_3) = (0, -3) = 3f_1 - 3f_2$$

$$\text{Ainsi, } \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ -5 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

- On note  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$  la base de  $\mathbb{R}^2$  définie à l'exemple précédent. Alors,

$$\text{Id}(\varepsilon_1) = (1, 0) = 2f_1 - f_2$$

$$\text{Id}(\varepsilon_2) = (0, 1) = -f_1 + f_2$$

$$\text{Ainsi, } \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{Id}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**II.2 - Opérations usuelles****Proposition 5 - Évaluation & Produit matriciel**

Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}'$  une base de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $u \in \mathbb{R}^n$ . Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

**Théorème 3 - Addition et multiplication par un réel**

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}'$  une base de  $\mathbb{R}^p$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\alpha f + g) = \alpha \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g).$$

**Proposition 6 - Composition & Produit matriciel**

Soit  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ ) une base de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ ),  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f).$$

**Théorème 4 - Inverse & Matrices**

Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . L'application  $f$  est un isomorphisme si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$  est inversible. Alors  $[\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)]^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f^{-1})$ .

**Définition 6 - Morphisme canoniquement associé**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Notons  $\mathcal{C}_n$  (resp.  $\mathcal{C}_p$ ) la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ). Le morphisme *canoniquement associé* à  $A$  est l'application  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_n}(f) = A$ .

**Exemple 10 - Morphisme canoniquement associé**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . Alors,

$$f(1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0) + (-1) \cdot (0, 1) = (1, -1)$$

$$f(0, 1, 0) = 2 \cdot (1, 0) + 4 \cdot (0, 1) = (2, 4)$$

$$f(0, 0, 1) = 3 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) = (3, 0)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= (x + 2y + 3z, -x + 4y). \end{aligned}$$

**Corollaire 5 - Caractérisation des matrices inversibles**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $AB = I_n$ , alors  $BA = I_n$ .

**Exemple 11 - Une autre preuve d'inversibilité**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

Si  $AX = 0_{n,1}$ , alors

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \quad \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en notant  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $f(x) = \vec{0}_3$ . Donc  $\text{Ker } f = \{\vec{0}_3\}$ . L'endomorphisme  $f$  est injectif et donc bijectif. Ainsi,  $A$  est inversible.

**Corollaire 6 - Caractérisation des bases**

Soient  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{R}^n$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . La famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n)$  est inversible.

**Exemple 12 - Une base**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On pose  $v_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$ ,  $v_2 = -e_2 - e_3$  et  $v_3 = e_3$  et  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ .

D'après la définition,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . La matrice est

triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont non nuls. Ainsi, la matrice est inversible et  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**II.3 - Formules de changement de base****Définition 7 - Matrice de passage**

Soient  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$ . La *matrice de passage* de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$  est la matrice  $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{Id}_E)$ .

**Exemple 13 - Suite de l'exemple précédent**

La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 7 - Inversibilité**

Soit  $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$  une matrice de changement de base. Alors,  $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$  est inversible et  $\left(P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ .

**Exemple 14 - Suite de l'exemple précédent**

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan,

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array}$$

Ainsi,  $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 8 - Changement de base d'un vecteur**

Soient  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$ .

Alors,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \left(P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ , soit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u).$$

2

**Remarque 1 - C**

est la matrice de passage de l'ancienne base  $\mathcal{B}_1$  à la nouvelle base  $\mathcal{B}_2$  qui est facile à obtenir, mais c'est celle de  $\mathcal{B}_2$  à  $\mathcal{B}_1$  (donc son inverse) qui est utile pour calculer les nouvelles coordonnées du vecteur. On n'échappe donc pas au calcul de l'inverse !

**Exemple 15 - Suite de l'exemple précédent**

Soit  $u = (1, 4, 3) \in \mathbb{R}^3$ . Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ainsi,  $u = v_1 - 6v_2 - 4v_3$ .

**Théorème 7 - Formules de changement de base**

Soient  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1'$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2'$  deux bases de  $\mathbb{R}^p$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2'}(f) = P_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \cdot P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}.$$

En particulier, lorsque  $n = p$ ,  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{B}_1' = \mathcal{B}_2'$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1'}(f) = \left(P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}\right)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}.$$

**Remarque 2 - C**

rtains, comme moyen mnémotechnique, pourront voir une forme de relation de Chasles, surtout en notant  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$ .

**Exemple 16 - Suite de l'exemple précédent**

On pose  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme canonique-

ment associé à  $A$ . Alors,

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) &= \left(P_{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On remarque alors qu'on peut écrire  $A = PCP^{-1}$ , soit  $A^n = PC^nP^{-1}$ . De plus, la matrice  $C^n$  est aisée à calculer à l'aide de la formule du binôme de Newton.

## II.4 - Rang des matrices

### Définition 8 - Noyau, Image & Rang d'une matrice

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

- (i). L'image de  $M$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  engendré par ses vecteurs colonnes.
- (ii). Le rang de  $M$ , noté  $\text{Rg } M$ , est le rang des vecteurs colonnes de  $M$ .
- (iii). Le noyau de  $M$  est le sous-espace de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  engendré par les vecteurs  $X$  tels que  $MX = 0_{p,1}$ .

### Proposition 9 - Rang des matrices & Applications linéaires

Soient  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}_2$ ) une base de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ) et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Alors,  $\text{Rg } f = \text{Rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f))$ .

### Proposition 10 - Rang et Inversibilité

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La matrice  $A$  est inversible si et seulement si  $\text{Rg } A = n$ .

### Exemple 17 - Calcul de rang

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ . En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss,

$$\begin{aligned}\text{Rg}(A) &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 \\ 0 & 11 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \end{matrix} \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix}\end{aligned}$$

La matrice ainsi obtenue est échelonnée donc  $\text{Rg}(A) = 2$ . La matrice  $A$  n'est donc pas inversible.