

# III - Matrices inversibles

## Révisions

Résolution de systèmes par méthode du pivot de Gauss.

**Exercice 1.** On considère le système d'équations

$$(S) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 7y = 6 \end{cases}.$$

1. Résoudre le système  $(S)$  en utilisant la méthode du pivot de Gauss.
2. Écrire matriciellement le système  $(S)$ .

## I - Inversibilité

### Définition 1 - Matrice inversible

Une matrice  $A$  d'ordre  $p$  est *inversible* s'il existe une matrice  $B$  telle que  $AB = I_p$ . La matrice  $B$  est l'*inverse* de  $A$  et notée  $A^{-1}$ .

### Exemple 1 - Matrices inversibles et non inversibles

- On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Comme  $AB = I_2$ , alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Comme  $I_p \times I_p = I_p$ , alors  $I_p$  est inversible et son inverse est  $I_p$ .
- Comme  $0_p \times A = 0_p \neq I_p$  pour toute matrice carrée  $A$ , alors la matrice nulle n'est pas inversible.

**Exercice 2.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $AB$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

### Proposition 1 - Inversibilité et produit

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $p$ .

- Si  $AB = I_p$ , alors  $BA = I_p$ . Ainsi,  $A^{-1} = B$  et  $B^{-1} = A$ .
- Si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont inversibles, alors  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

### Exemple 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

On peut vérifier que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Ainsi,  $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible et son inverse vaut

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercice 3.** (⚙️) Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $M^2 - 2M + I_3$ .
2. En déduire que  $M$  est inversible et déterminer  $M^{-1}$ .

## II - Calculs de puissance

### Théorème 1 - Puissance et relation $PDP^{-1}$

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $p$ . On suppose qu'il existe une matrice  $P$  inversible d'ordre  $p$  et une matrice diagonale  $D$  d'ordre  $p$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . Alors, pour tout  $n$  entier naturel,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

**Exercice 4.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. En notant  $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , calculer le produit  $PQ$ . En déduire que  $P$  est inversible.
2. Vérifier que  $A = PDP^{-1}$ .
3. Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
4. En déduire, pour tout  $n$  entier naturel, une expression des coefficients de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

## III - Critères d'inversibilité

### III.1 - Cas des matrices diagonales

#### Proposition 2 - Inversibilité des matrices diagonales

Soit  $D$  une matrice diagonale.

- Si  $D$  possède au moins un 0 sur la diagonale, alors  $D$  n'est pas inversible.
- Si tous les coefficients diagonaux de  $D$  sont non nuls, alors  $D$  est inversible. Alors,  $D^{-1}$  est la matrice diagonale dont

les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de  $D$ .

### Exemple 3

- Soit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . La matrice  $D$  est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3. Comme ils sont tous non nuls, la matrice  $D$  est inversible et  $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .
- Soit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . La matrice  $D$  est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1 et 0. La matrice  $D$  n'est pas inversible.

**Exercice 5.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

Pour chacune de ces matrices, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, exprimer son inverse.

### III.2 - Cas des matrices triangulaires

#### Proposition 3 - Inversibilité des matrices triangulaires

Soit  $T$  une matrice triangulaire.

- Si  $T$  possède au moins un 0 sur la diagonale, alors  $T$  n'est pas inversible.
- Si tous les coefficients diagonaux de  $T$  sont non nuls, alors  $T$  est inversible.

**Exemple 4**

- Soit  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . La matrice  $T$  est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux  $(1, -1, 2)$  sont non nuls. Ainsi,  $T$  est inversible.
- Soit  $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Les coefficients diagonaux de  $T$  sont 1 et 0. Comme  $T$  est triangulaire supérieure et que 0 est un coefficient diagonal de  $T$ , alors  $T$  n'est pas inversible.

**Exercice 6.** Parmi les matrices suivantes, déterminer lesquelles sont inversibles et lesquelles ne le sont pas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0,01 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

**III.3 - Cas des matrices carrées d'ordre 2****Proposition 4 - Inversibilité des matrices d'ordre 2**

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice d'ordre 2.

- Si  $ad - cb = 0$ , alors la matrice  $A$  n'est pas inversible.
- Si  $ad - cb \neq 0$ , alors la matrice  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Exemple 5 - ⚙️**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Comme  $2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$  est non nul, alors  $A$

est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7.** Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, déterminer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**III.4 - Non inversibilité****Proposition 5**

Soit  $A$  une matrice inversible d'ordre  $p$  et  $B, C$  deux matrices carrées d'ordre  $p$ .

- Si  $AB = AC$ , alors  $B = C$ .
- Si  $BA = CA$ , alors  $B = C$ .

**Exemple 6 - Preuve de non inversibilité ➡**

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

On remarque que  $AB = AC$ . Supposons par l'absurde que  $A$  soit inversible. Alors,  $B = C$ . Cependant,  $B \neq C$ . Ainsi,  $A$  n'est pas inversible.

- Soit  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On remarque que  $N \times N = 0_2$ . Supposons par l'absurde que  $N$  soit inversible. Comme  $N \times N = N \times 0_2$ , alors  $N = 0_2$ . On obtient ainsi une contradiction et  $N$  n'est pas inversible.

**Exercice 8.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2 - 3A$ .
2. En déduire qu'il existe une matrice  $B$  non nulle telle que  $AB = 0_3$ .
3. En déduire que  $A$  n'est pas inversible.

## IV - Systèmes linéaires

### IV.1 - Résolution de systèmes

#### Théorème 2 - Inversibilité & Systèmes linéaires

Soit un système écrit sous forme matricielle  $AX = Y$ . Le système admet une unique solution si et seulement si  $A$  est inversible. Alors,  $X = A^{-1}Y$ .

#### Exemple 7 - ⚙️

Nous cherchons à résoudre le système  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$ .

En posant  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ , le système s'écrit  $AX = Y$ .

Comme  $1 \times 4 - 3 \times 2 = -2 \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible et  $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi, le système possède une unique solution et

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}Y = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 18 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $x = -9$  et  $y = \frac{13}{2}$ .

**Exercice 9.** Utiliser la stratégie précédente pour résoudre le système  $\begin{cases} -x + 3y = 11 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$ .

## IV.2 - Calculs d'inverses

### Théorème 3 - Inverse & Système linéaire

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $p$ . La matrice  $A$  est inversible si et seulement s'il existe une matrice  $B$  telle que pour toutes  $X, Y$  matrices colonnes, le système  $X = AY$  s'écrit  $Y = BX$ . Alors,  $A^{-1} = B$ .

### Exemple 8 - Inverse par résolution de $AX = Y$ , ⚙️

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On pose  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . En utilisant la méthode du pivot de Gauss,

$$AX = Y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ -x + y + z = b \\ x + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ 2y + 2z = a + b & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ y = a - c & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + y = a \\ 2z + 2y = a + b \\ y = a - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ z = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c \\ y = a - c \end{cases}$$

En posant  $B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ , alors  $Y = BX$ . D'où,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10.** Déterminer l'inverse de la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exemple 9 - Inverse par pivot sur $I$ ,

On place les matrices  $A$  et  $I$  côte à côte. On transforme la matrice  $A$  en la matrice  $I$  à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. On effectue les mêmes opérations sur  $I$ .

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\
 \hline
 2 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\
 \hline
 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\
 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\
 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3
 \end{array}$$

On obtient ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$