T.P. XI -
Exercice d'annales

Exercice 1. Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0. À partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

* elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec probabilité $\frac{1}{2}$;
* elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$;
* elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Les différents sauts sont supposés indépendants.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit les variables aléatoires suivantes :

* X_n est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des n premiers sauts ;
* Y_n est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des n premiers sauts ;
* Z_n égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des n premiers sauts ;
* A_n est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n^{e} saut.

1. Donner la loi de la variable aléartoire A_1. Calculer $\mathbf{E}[A_1]$ et $\mathbf{V}(A_1)$.

2. a) Justifier que $A_2(\Omega) = [\![2, 6]\!]$. Montrer que la loi de A_2 est donnée par :

$$\mathbf{P}([A_2 = 2]) = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}([A_2 = 3]) = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}([A_2 = 4]) = \frac{5}{16},$$
$$\mathbf{P}([A_2 = 5]) = \frac{1}{8},\ \mathbf{P}([A_2 = 6]) = \frac{1}{16}.$$

b) Calculer $\mathbf{E}[A_2]$.

3. a) Présenter dans un tableau la loi du couple (A_2, Z_2). En déduire la loi de Z_2 ainsi que l'espérance de Z_2.

b) Calculer la covariance $\text{Cov}(A_2, Z_2)$ de A_2 et Z_2. Les variables aléatoires A_2 et Z_2 sont-elles indépendantes ?

4. On rappelle que, lorsque le module `numpy.random` est importé via l'instruction `import numpy.random as rd`, l'appel `rd.randint(1, 5)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur $[\![1, 4]\!]$. Compléter le programme suivant pour qu'il simule les 100 premiers déplacements de la puce.

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

A = np.zeros((1, 100))
for k in range(1, 101):
    t = rd.randint(1, 5)
    if t <= ...:
        A[k] = 1
    elif t == ...:
        A[k] = 2
    elif t == ...:
        A[k] = 3

print(A)
```

5. Reconnaître les lois de X_n, Y_n et Z_n. Justifier que $X_n + Y_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$.

6. a) Justifier la relation : $X_n + Y_n + Z_n = n$. Calculer $\text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n)$.

b) En utilisant les valeurs de $\mathbf{V}(X_n)$, $\mathbf{V}(Y_n)$ et $\mathbf{V}(X_n + Y_n)$, montrer que $\text{Cov}(X_n, Y_n) = -\frac{n}{8}$.

c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_n, Y_n)$ de X_n et Y_n.

7. a) Exprimer A_n en fonction de X_n, Y_n et Z_n. Montrer que $\mathbf{E}[A_n] = \frac{7n}{4}$.

b) Exprimer A_n en fonction de X_n et Y_n. Calculer $\mathbf{V}(A_n)$ et $\text{Cov}(A_n, X_n)$.

8. On importe le module `matplotlib.pyplot` via l'instruction `import matplotlib.pyplot as plt`. On rappelle que si `x`$= (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et `y`$= (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux listes de réels de même taille, la commande `plt.plot(x, y)` permet de tracer la ligne brisée joignant les point $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,..., $M_n(x_n, y_n)$. On complète le programme de la question **4** en y ajoutant les trois commandes suivantes :

```
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.range(1, 102)
y = np.cumsum(A)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

Quelle sortie graphique obtient-on ?