■ ■ ■

Partie I : Normes subordonnées & Normes matricielles

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $|||A||| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. La norme $|||\cdot|||$ est la *norme subordonnée* associée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$.

1. Montrer que $|||I_n||| = 1$ et

$$|||A||| = \sup_{0<\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

2. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui satisfait :

$$\forall\ (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2,\ |||A\cdot B||| \leqslant |||A|||\cdot|||B||| .$$

La norme $|||\cdot|||$ est une *norme matricielle*.

3. Montrer que $M \mapsto \sqrt{\operatorname{Tr}({}^tA\cdot A)}$ est une norme matricielle qui n'est pas une norme subordonnée.

4. Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 & \vdots & x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

a) si $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, alors $|||A|||_1 = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$.

b) si $\|x\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$, alors $|||A|||_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

Partie II : Normes & Rayon spectral

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le *rayon spectral* de A, est le réel $\rho(A) = \max_{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)} |\lambda|$.

5. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, x un vecteur propre associé à une valeur propre λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et N une norme matricielle sur A. En remarquant que x^tx est une matrice non nulle, montrer que

$$\rho(A) \leqslant N(A).$$

6. Soit A une matrice symétrique. En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de A, montrer que $\rho(A) = |||A|||_2$.

7. En général, montrer que $|||A|||_2 = \rho({}^tAA)$.

Partie III : Conditionnement

Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle associée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$. Pour toute matrice $A \in \mathscr{G}\ell_n(\mathbb{R})$, son *conditionnement* est le réel $\operatorname{Cond}(()\,A) = |||A|||\cdot|||A^{-1}|||$. On notera I_n la matrice identité d'ordre n.

8. Montrer que si $|||I_n||| = 1$, alors pour toute matrice A inversible, $\operatorname{Cond}(()\,A) \geqslant 1$.

9. Donner des exemples de normes telles que $|||I_n||| = 1$.

10. On note $\operatorname{Cond}_2(\cdot)$ le conditionnement associé à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.

a) Montrer que, pour toute matrice orthogonale Q (i.e. $Q^tQ = I_n$), alors $\operatorname{Cond}_2(Q) = 1$.

b) En notant $0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots |\lambda_n|$ les valeurs propres d'une matrice symétrique inversible A, montrer que $\operatorname{Cond}_2(A) = \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right|$.

Soient $A \in \mathscr{G}\ell_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et $\delta b \in \mathbb{R}^n$. Soit x la solution du système linéaire $Ax = b$. Le système $Ax = b$ est dit *bien conditionné* si $\operatorname{Cond}(A)$ est proche de 1 et *mal conditionné* sinon. Plus le réel $\operatorname{Cond}(A)$ est proche de 1, mieux le système est conditionné. En pratique, avant de résoudre un système, on transforme sa matrice (on la préconditionne) de manière à obtenir une matrice avec un conditionnement proche de 1.

11. a) Perturbation du second membre. Soit y la solution du système $Ay = b + \delta b$. On pose $\delta x = y - x$. Montrer que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \operatorname{Cond}(A)\,\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

b) On pose $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.25\end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1\end{pmatrix}$. Donner une estimation de $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ lorsque $\delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-4}\end{pmatrix}$.

Soit $\delta A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + \delta A \in \mathscr{G}\ell_n(\mathbb{R})$.

12. Perturbation de la matrice. On note y la solution du système $(A + \delta A)y = b$ et on pose $\delta x = y - x$.

a) Montrer que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leqslant \operatorname{Cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

b) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 10^3 \\ 10^3 & 10^6 + 10^3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner une estimation de $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x+\delta x\|_\infty}$ lorsque $\delta A = \begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Soit $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\widetilde{x}\| = 1$ et $\left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| = \|\widetilde{x}\|$. On suppose par l'absurde qu'il existe $c < \operatorname{Cond}(A)$ telle que pour toute matrice δA telle que $A + \delta A$ soit inversible, $\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} < c\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$. En posant $\delta A = 1$, montrer que l'on obtient une contradiction.