



Exercice 1. On observe un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n indépendant et identiquement distribué de loi uniforme sur $[0, 2a]$ où a est un réel strictement positif, de densité

$$f_a(x) = \frac{1}{2a} \text{ pour } x \in [0, 2a].$$

Dans ce problème, on étudie deux estimateurs de a .

1. Soit $\hat{a} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, la moyenne des observations.
 - a) Calculez l'espérance d'une variable aléatoire de densité f_a .
 - b) Montrez que \hat{a} est un estimateur sans biais de a .
 - c) Calculez la variance de \hat{a} .
2. Soit $M = \max \{X_1, \dots, X_n\}$ l'observation maximale.
 - a) i. Calculez la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité f_a .
 - ii. Pour tout $t \geq 0$, calculez $\mathbf{P}(M \leq t)$.
 - iii. En déduire la densité de M .
 - b) i. Pour tout réel c , calculez l'espérance de cM .
 - ii. En déduire un estimateur sans biais de a , que l'on notera \tilde{a} .
 - iii. Calculez la variance de \tilde{a} .
3. Conclure : quel est le meilleur estimateur ?