# XII - Statistique descriptive

## I - Description statistique d'une population

### I.1 - Statistique

**Définition 1 - Population, Taille, Individus**

- Une *étude statistique* est une étude visant à recueillir et analyser des informations sur un ensemble fini, généralement noté $\Omega$, appelé *population*.
- Les élements de la population $\Omega$ sont des *individus*.
- La *taille* de la population est le cardinal de l'ensemble $\Omega$.

**Exemple 1 - Populations**

- L'ensemble des individus constituant la population française est une population.
- L'ensemble des élèves d'une classe est une population.

**Définition 2 - Caractères, Modalités**

Soit $\Omega$ une population.

- Un *caractère* sur $\Omega$ est une application définie sur $\Omega$.
- Si $X$ est une application, un élément $x \in X(\Omega)$ est une *modalité* du caractère.

**Exemple 2**

- Si $\Omega$ est la population française, on peut considérer les caractères :
  - ⋆ la taille en cm ; dont 150, 172.45, 190 sont des caractères.
  - ⋆ la couleur des yeux ; dont bleu, marron, vert sont des caractères.
- Si $\Omega$ est l'ensemble des élèves de la classe, la note obtenue lors du dernier devoir de mathématiques est un caractère.

**Définition 3 - Quantitatif, Qualitatif**

Soit $\Omega$ une population et $X$ un caractère sur $\Omega$.

- Si $X$ est à valeurs réelles, $X$ est un caractère *quantitatif*.
- Si $X$ est à valeurs dans un ensemble quelconque non inclus dans $\mathbb{R}$, $X$ est un caractère *qualitatif*.
- Si $X(\Omega)$ est dénombrable, le caractère est *discret*. Sinon, il est continu.

**Exemple 3**

- La taille des individus est un caractère quantitatif continu. La couleur des yeux est un caractère qualitatif discret.
- La note obtenue au dernier devoir de mathématiques est un caractère quantitatif discret (la note est généralement arrondie à une décimale).

### I.2 - Statistiques univariées

**Définition 4 - Effectif, Fréquence, Série**

Soit $\Omega$ une population de cardinal $N$ et $X$ un caractère sur $\Omega$. Posons

$$n_x = |\{\omega \in \Omega \ ; \ X(\omega) = x\}| .$$

- L'entier $n_x$ est l'*effectif* de la modalité $x$. Il s'agit du nombre d'individus de la population qui présentent la modalité $x$.

- Le réel $f_x = \frac{n_x}{N}$ est la *fréquence* de la modalité $x$. Les fréquences sont souvent exprimées sous forme de pourcentages.
- Si l'effectif est discret, en notant $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, la *série statistique* des effectifs associée à $\Omega$ est l'ensemble des couples $\{(x_i, n_i),\ i \in [\![1, n]\!]\}$.

### Exemple 4 - Notes au devoir

Supposons que la liste des notes au devoir est la suivante : 8.2, 5.5, 10, 4.7, 15.7, 12.1, 4.7, 12.1, 9.3, 4.7, 9.6, 14.5, 10, 18.9, 19.5, 7.5, 8.2, 18.9, 10, 11.1.

- Représentation sous forme de tableau des effectifs :

| 4.7 | 5.5 | 7.5 | 8.2 | 9.3 | 9.6 | 10 | 11.1 | 12.1 | 14.5 | 15.7 | 18.9 | 19.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |

- Représentation sous forme de tableau des fréquences :

| 4.7 | 5.5 | 7.5 | 8.2 | 9.3 | 9.6 | 10 | 11.1 | 12.1 | 14.5 | 15.7 | 18.9 | 19.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |

### Proposition 1 - Somme des fréquences

Soit $\Omega$ une population et $X$ un caractère sur $\Omega$. Pour toute modalité $x$ de $X$, on note $f_x$ sa fréquence. Alors,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f_x = 1.$$

### Définition 5 - Fréquences cumulées d'une modalité

Soit $\Omega$ une population de taille $N$ et $X$ un caractère discret dont les modalités peuvent être ordonnées. Posons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
La *fréquence cumulée* de la modalité $x_i$ est l'entier

$$F_i = \frac{|\{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \leqslant x_i\}|}{N}.$$

Le réel $F_i$ est la proportion d'individus qui ont une modalité au plus égale à $x_i$.

### Exemple 5 - Notes au devoir

Reprenons les données de l'exemple précédent.

- Le tableau des effectifs cumulés est le suivant :

| 4.7 | 5.5 | 7.5 | 8.2 | 9.3 | 9.6 | 10 | 11.1 | 12.1 | 14.5 | 15.7 | 18.9 | 19.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 |

- Le tableau des fréquences est le suivant :

| 4.7 | 5.5 | 7.5 | 8.2 | 9.3 | 9.6 | 10 | 11.1 | 12.1 | 14.5 | 15.7 | 18.9 | 19.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{20}$ | $\frac{4}{20}$ | $\frac{5}{20}$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{8}{20}$ | $\frac{9}{20}$ | $\frac{12}{20}$ | $\frac{13}{20}$ | $\frac{15}{20}$ | $\frac{16}{20}$ | $\frac{17}{20}$ | $\frac{19}{20}$ | $\frac{20}{20}$ |

### Définition 6 - Classe

Les valeurs prises par le caractère $X$ peuvent être regroupées en sous-ensembles de $X(\Omega)$ appelées *classes*. On étend les notions d'effectifs et de fréquences aux classes.

### Exemple 6 - Notes au devoir

Reprenons les données de l'exemple précédent. Les modalités peuvent être regroupées selon les classes suivantes :

| $[0,1[$ | $[1,2[$ | $[2,3[$ | $[3,4[$ | $[4,5[$ | $[5,6[$ | $[6,7[$ | $[7,8[$ | $[8,9[$ | $[9,10[$ | $[10,11[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 |

| $[11,12[$ | $[12,13[$ | $[13,14[$ | $[14,15[$ | $[15,16[$ | $[16,17[$ | $[17,18[$ | $[18,19[$ | $[19,20]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 |

## I.3 - Représentations graphiques

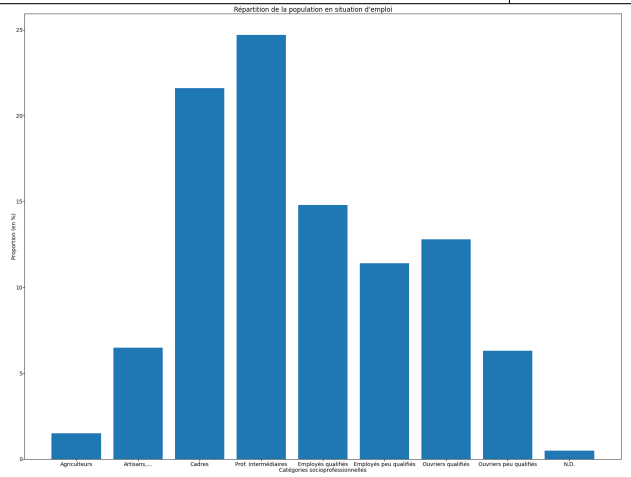
### Définition 7 - Diagramme en bâtons

Dans un *diagramme en bâtons*, les modalités du caractère discret étudié sont indiquées en abscisses (il peut s'agir d'un caractère qualitatif). Les effectifs ou fréquences sont indiquées en ordonnées.

## Exemple 7 - Catégories socioprofessionnelles

En 2021, la répartition (en pourcentages) de la population en situation d'emploi selon la catégorie socioprofessionnelle était la suivante (source INSEE) :

| Catégorie socioprofessionnelle | Proportion |
|---|---|
| Agriculteurs | 1.5 |
| Artisans, commerçants, chefs d'entreprise | 6.5 |
| Cadres | 21.6 |
| Professions intermédiaires | 24.7 |
| Employés qualifiés | 14.8 |
| Employés peu qualifiés | 11.4 |
| Ouvriers qualifiés | 12.8 |
| Ouvriers peu qualifiés | 6.3 |
| Non déterminé | 0.5 |

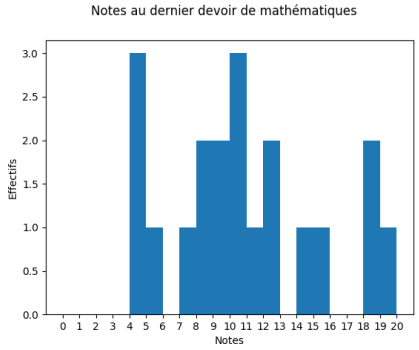



## Définition 8 - Histogramme

Dans un *histogramme*, le caractère étudié est regroupé en classes. Les valeurs des classes sont indiquées en abscisses. Les effectifs ou fréquences sont indiquées en ordonnées.

## Exemple 8 - Notes au devoir

En reprenant les notes obtenues lors du dernier devoir de mathématiques :

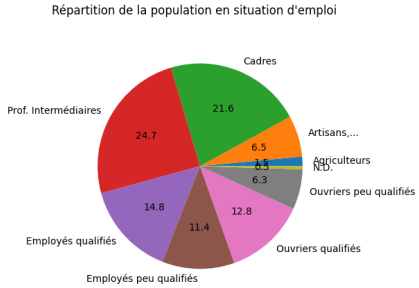



## Définition 9 - Diagramme circulaire

Dans un *diagramme circulaire*, à chaque modalité du caractère (discret) ou chaque classe est dévolue une partie d'un disque dont l'aire est proportionnelle à sa fréquence.

## Exemple 9 - Catégories socioprofessionnelles

En reprenant les données précédentes :



# I.4 - Caractéristiques de position et de dispersion

## Définition 10 - Mode

Soit $\Omega$ une population et $X$ un caractère discret sur $\Omega$. Un *mode* est une modalité $x \in X(\Omega)$ dont l'effectif est maximal.

## Exemple 10 - Notes au devoir

En reprenant les notes au devoir, les modes sont 4.7 et 10.

## Définition 11 - Médiane

Soit $\Omega$ une population de taille $N$ et $X$ un caractère discret ordonné sur $\Omega$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
La modalité $x_i$ est la *médiane* de $X$ si

$$|\{\omega \in \Omega \ ; \ X(\omega) < x_i\}| < \frac{N}{2} \text{ et } |\{\omega \in \Omega \ ; \ X(\omega) > x_i\}| < \frac{N}{2}.$$

La médiane est une modalité qui partage la population en deux parties contenant sensiblement les mêmes effectifs.

Plus généralement, les *quantiles* sont les modalités qui permettent de diviser la population en intervalles consécutifs contenant sensiblement les mêmes effectifs.

## Exemple 11 - Notes au devoir

Rappelons que $N = 20$ soit $N/2 = 10$. En utilisant le tableau des effectifs cumulés,

- Le nombre d'étudiants ayant une note strictement inférieure à 10 vaut 9.
- Le nombre d'étudiants ayant une note strictement supérieure à 10 vaut $20 - 12 = 8$.

Ainsi, la médiane vaut 10.

## Définition 12 - Moyenne

Soit $\Omega$ une population de taille $N$ et $X$ un caractère sur $\Omega$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Pour toute modalité $x_i$, on note $n_i$ son effectif et $f_i$ sa fréquence. La moyenne $\overline{X}$ du caractère $X$ est le réel

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i.$$

## Exemple 12 - Notes au devoir

En utilisant un logiciel de calcul, la moyenne vaut

$$\frac{3\cdot 4.7+5.5+7.5+2\cdot 8.2+9.3+9.6+3\cdot 10+11.1+2\cdot 12.1+14.5+15.7+2\cdot 18.9+19.5}{20} = 10.76$$

## Définition 13 - Étendue

Soit $\Omega$ une population de taille $N$ et $X$ un caractère discret sur $\Omega$ à valeurs réelles. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

- L'*étendue* est la différence entre la plus grande et la plus petite modalité du caractère $X$.
- Si $\overline{X}$ est la moyenne du caractère $x$, la *variance* du caractère $X$ est le réel :

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X}\right)^2.$$

- L'*écart-type* est le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- Si $x_p < x_q < x_r$ sont trois modalités qui divisent la population en 4 intervalles successifs ayant sensiblement les

mêmes effectifs :

$$|\{\omega \in \Omega \ ; \ X(\omega) < x_p\}| < \frac{N}{4},$$
$$|\{\omega \in \Omega \ ; \ x_p < X(\omega) < x_q\}| < \frac{N}{4},$$
$$|\{\omega \in \Omega \ ; \ x_q < X(\omega) < x_r\}| < \frac{N}{4}$$
$$\text{et } |\{\omega \in \Omega \ ; \ x_r < X(\omega)\}| < \frac{N}{4},$$

La modalité $x_p$ est le premier *quartile*, la modalité $x_q$ est le second *quartile* et la modalité $x_r$ est le troisième *quartile*. La différence $x_r - x_p$ entre le plus grand et le plus petit quartile est l'*écart interquartile*.

- Le *coefficient de variation* de $X$ est égal au rapport $\frac{\sigma(X)}{\overline{X}}$.

**Exemple 13 - Notes au devoir**

En utilisant un logiciel de calcul,

- l'étendue vaut $19.5 - 4.7 = 14.8$.
- la variance vaut environ 20.9.
- l'écart-type vaut environ 4.6.

L'avantage de l'écart-type est qu'il s'exprime dans la même unité que les données initiales (contrairement à la variance qui s'exprime en fonction de cette unité au carré). Le coefficient de variation est un nombre sans dimension.

En reprenant le tableau des effectifs,

- le nombre de notes strictement inférieures à 7.5 vaut 4,
- le nombre de notes strictement comprises entre 7.5 et 10 vaut 4,
- le nombre de notes strictement comprises entre 10 et 14.5 vaut 4,
- le nombre de notes strictement supérieures à 14.5 vaut 4.

Nous avons ainsi déterminé les quatre quartiles.

# II - Statistiques bivariées

**Définition 14 - Effectifs, Marginales**

Soit $X$, $Y$ deux caractères définis sur une population $\Omega$ de taille $N$. On note $x_1, \dots, x_n$ les modalités de $X$ et $y_1, \dots, y_p$ les modalités de $Y$.

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, on note $n_{i,j}$ l'*effectif* du couple de modalités $(x_i, y_j)$ et $f_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{N}$ sa fréquence.
- Les *effectifs marginaux* en $X$ sont, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les entiers $n_i = \sum_{j=1}^{p} n_{i,j}$.
- Les *effectifs marginaux* en $Y$ sont, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, les entiers $m_j = \sum_{i=1}^{n} n_{i,j}$.

On définit de manière analogue les fréquences et fréquences marginales. Ces quantités peuvent être représentées dans un tableau.
On définit, comme dans le cadre des variables aléatoires, les valeurs de $X$ conditionnellement à $Y = y_j$ ainsi que les valeurs de $Y$ conditionnellement à $X = x_i$.

**Exemple 14 - Mesures d'arbres**

On liste ci-dessous la circonférence $X$ (en cm) et le volume $Y$ (en $cm^3$) de différents arbres : $(9, 10)$, $(9, 10)$, $(9, 10)$, $(11, 15)$, $(11, 20)$, $(11, 20)$, $(11, 15)$, $(11, 15)$, $(11, 20)$, $(11, 20)$, $(11, 25)$, $(11, 20)$, $(11, 20)$, $(11, 20)$, $(13, 15)$, $(13, 20)$, $(13, 35)$, $(13, 20)$, $(15, 30)$, $(15, 30)$, $(15, 35)$, $(15, 35)$, $(15, 35)$, $(15, 40)$, $(15, 45)$, $(19, 55)$, $(19, 55)$, $(19, 60)$, $(19, 50)$, $(19, 50)$, $(21, 60)$.
Les marginales selon $Y$ (resp. $X$) sont indiquées dans la dernière colonne (resp. ligne)

| $Y$ \ $X$ | 9 | 11 | 13 | 15 | 19 | 21 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 15 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 20 | 0 | 7 | 2 | 0 | 0 | 0 | 9 |
| 25 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 30 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| 35 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 4 |
| 40 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 45 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 55 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 60 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| | 3 | 11 | 4 | 7 | 5 | 1 | 31 |

## Définition 15 - Covariance, Coefficient de corrélation

On reprend les notations de la définition précédente.

- La *covariance* de $X$ et de $Y$ est le réel

$$\sigma_{X,Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} n_{i,j}(x_i - \overline{X})(y_j - \overline{Y}).$$

- Le *coefficient de corrélation* de $X$ et $Y$ est le réel

$$r = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

## Exemple 15 - Mesures d'arbres

Un logiciel de calcul permet d'obtenir

$$\overline{X} = 13.6 \qquad \sigma_Y \simeq 15.3$$
$$\overline{Y} = 29.4 \qquad \sigma_{X,Y} \simeq 51.8$$
$$\sigma_X \simeq 3.4 \qquad r \simeq 0.95$$

## Théorème 1 - Méthode des moindres carrés

On reprend les notations des questions précédentes. La *droite de régression linéaire* de $Y$ par rapport à $X$ a pour équation :

$$y = ax + b = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X^2}\left(x - \overline{X}\right) + \overline{Y}.$$

Si le coefficient de correlation $r^2$ est proche de 1, l'approximation du nuage de points par la droite de régression est bonne. Les caractères $X$ et $Y$ sont *corrélés*. On peut alors effectuer une prédiction sur la valeur de $y$ connaissant une valeur de $y$.

## Exemple 16 - Mesures d'arbres

Un logiciel de calcul permet d'obtenir

$$a \simeq 4.3 \text{ et } b \simeq -29.5$$

On peut représenter le nuage de points ainsi que la droite de régression sur un même graphique. On a mis également en évidence le point de coordonnées $(\overline{X}, \overline{Y})$. Comme $r$ est proche de 1, l'approximation par une droite de régression est bonne.