I - Puissances

Le nombre x^a est défini différemment en fonction du type du nombre a. Cependant, les règles de calcul seront toujours les mêmes !

I - Lorsque a est un entier naturel (positif)

À Savoir

Si a est un entier naturel,
- $x^0 = 1$.
- $x^a = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}}$.

$$\begin{aligned} 3^0 &= 1, \\ 3^1 &= 3, \\ 3^3 &= 3 \times 3 \times 3 = 27. \end{aligned}$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers naturels,

$$\begin{aligned} x^a \times x^b &= \underbrace{\overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{a \text{ facteurs}} \times \overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{b \text{ facteurs}}}_{a+b \text{ facteurs}} \\ &= x^{a+b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^2 \times 3^3 &= 3^5, \\ 6^2 \times 3^3 &= 3^2 \times 2^2 \times 3^3 = 2^2 \times 3^5, \\ 3^n \times 3 &= 3^{n+1}. \end{aligned}$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers naturels,

$$\begin{aligned} (x^a)^b &= \left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}} \right)^b = \underbrace{\overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{a \text{ facteurs}} \times \cdots \times \overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{a \text{ facteurs}}}_{b \text{ facteurs}} \\ &= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \times b \text{ facteurs}} \\ &= x^{a \times b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(5^2\right)^3 &= 5^{2\times 3} = 5^6, \\ 81^5 &= \left(3^4\right)^5 = 3^{4\times 5} = 3^{20}. \end{aligned}$$

II - Lorsque a est un entier négatif

À Savoir

Si a est un entier négatif, alors $-a$ est un entier positif et

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{-a \text{ facteurs}}}.$$

$$3^{-1}=\frac{1}{3^{+1}}=\frac{1}{3},$$
$$3^{-2}=\frac{1}{3^{+2}}=\frac{1}{9},$$
$$\frac{1}{3^{-3}}=\frac{1}{\frac{1}{3^3}}=3^3.$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers,

$$x^a\times x^b=x^{a+b}.$$

$$3^{-2}\times 3^5=3^{-2+5}=3^3,$$
$$3^6\times 3^{-12}=3^{6-12}=3^{-6},$$
$$\frac{3^5}{3^7}=3^5\times\frac{1}{3^7}=3^5\times 3^{-7}=3^{5-7}=3^{-2},$$
$$3^53^{-5}=3^{5-5}=3^0=1.$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers,

$$(x^a)^b=x^{ab}.$$

$$\left(5^{-2}\right)^3=5^{-2\times 3}=5^{-6}$$
$$\left(\frac{1}{81}\right)^5=\left(\frac{1}{3^4}\right)^5=\left(3^{-4}\right)^5=3^{-20},$$
$$\left(\frac{1}{25}\right)^{-3}=\left(5^{-2}\right)^{-3}=5^{-2\times(-3)}=5^6.$$

III - Lorsque $a=1/n$

À Savoir

Soit $x\in\mathbb{R}_+$. La fonction $f(y)=y^n$ est strictement croissante, continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0)=0$, $\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=+\infty$. Comme $x\in[0,+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel y tel que $y^n=x$. Ce réel est noté $x^{\frac{1}{n}}$.

* Comme $2^2=4$, alors $2=4^{1/2}$.
* Si $x\geqslant 0$, alors $\sqrt{x}=x^{1/2}$.

Attention. Dans ce cas, le nombre x doit être positif.

À Savoir

Si a est un entier, b est un entier naturel non nul et x est un réel positif,

$$\left(x^{1/b}\right)^a=x^{a/b}$$

$$\left(2^{1/3}\right)^9=2^{9/3}=2^3.$$

IV - Lorsque a est un réel

À Savoir

Si a est un réel et x est un réel strictement positif,

$$x^a=\mathrm{e}^{a\ln(x)}.$$

Cette notion généralise les définitions précédentes.

$$3^{1.5}=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\ln(3)}$$

Attention. Dans ce cas, le nombre x doit être strictement positif.

À Savoir

Si a, b sont deux réels et x, y sont deux réels strictement positifs,

$$\begin{aligned}(x \times y)^a &= x^a \times y^a,\\ x^a \times x^b &= x^{a+b},\\ (x^a)^b &= x^{a \times b}.\end{aligned}$$

Déterminons les réels x tels que $3^{-x} = \frac{3}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-x\ln(3)} &= \frac{3}{2}\\ \ln\left(\mathrm{e}^{-x\ln(3)}\right) &= \ln\left(\frac{3}{2}\right)\\ -x\ln(3) &= \ln(3) - \ln(2)\\ x &= \frac{\ln(2) - \ln(3)}{\ln(3)}.\end{aligned}$$