

## T.D. IX - Intégrales généralisées

### I - Fonctions continues

#### Solution de l'exercice 1.

1. En utilisant les primitives classiques, pour  $x \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{t^4} dt &= \int_1^x t^{-4} dt = \left[ \frac{t^{-3}}{-3} \right]_1^x \\ &= \frac{x^{-3}}{-3} - \frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{x^3} \right). \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ , alors  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt$  converge et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt = \frac{1}{3}.$$

2. En utilisant les primitives classiques, pour  $x \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{1}{t^3} dt &= \int_2^x t^{-3} dt = \left[ \frac{t^{-2}}{-2} \right]_2^x \\ &= \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{2^{-2}}{-2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2x^2}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ , alors  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$  converge et

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{8}.$$

3. En utilisant les primitives classiques, pour  $x \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{5}{t^3} dt &= \int_2^x 5t^{-3} dt = \left[ \frac{5t^{-2}}{-2} \right]_2^x \\ &= \frac{5x^{-2}}{-2} - \frac{5 \times 2^{-2}}{-2} = \frac{5}{8} - \frac{5}{2x^2}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$ , alors  $\int_2^{+\infty} \frac{5}{t^3} dt$  converge et

$$\int_2^{+\infty} \frac{5}{t^3} dt = \frac{5}{8}.$$

4. En utilisant les primitives classiques, pour  $x \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{2}{t^4} dt &= \int_1^x 2t^{-4} dt = \left[ \frac{2t^{-3}}{-3} \right]_1^x \\ &= \frac{2x^{-3}}{-3} - \frac{2}{-3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3x^3}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ , alors  $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^4} dt$  converge et

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^4} dt = \frac{2}{3}.$$

5. En utilisant les primitives classiques, pour  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-5t} dt &= \left[ \frac{e^{-5t}}{-5} \right]_0^x = \frac{e^{-5x}}{-5} - \frac{e^{-5 \times 0}}{-5} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{e^{-5x}}{5}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-5x} = 0$ , alors  $\int_0^{+\infty} e^{-5t} dt$  converge et

$$\int_0^{+\infty} e^{-5t} dt = \frac{1}{5}.$$

6. En utilisant les primitives classiques, pour  $x \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_1^x e^{-3t} dt &= \left[ \frac{e^{-3t}}{-3} \right]_1^x = \frac{e^{-3x}}{-3} - \frac{e^{-3 \times 1}}{-3} \\ &= \frac{1}{3e^3} - \frac{e^{-3x}}{3}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$ , alors  $\int_0^{+\infty} e^{-3t} dt$  converge et

$$\int_1^{+\infty} e^{-3t} dt = \frac{1}{3e^3}.$$

7. En utilisant les primitives classiques, pour  $x \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \int_2^x 3e^{-5t} dt &= 3 \left[ \frac{e^{-5t}}{-5} \right]_2^x = 3 \left( \frac{e^{-5x}}{-5} - \frac{e^{-5 \times 2}}{-5} \right) \\ &= \frac{3}{5} (e^{-10} - e^{-5x}). \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-5x} = 0$ , alors  $\int_2^{+\infty} 3e^{-5t} dt$  converge et

$$\int_2^{+\infty} e^{-5t} dt = \frac{3}{5e^{10}}.$$

8. En utilisant les primitives classiques, pour  $x \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \int_3^x 2e^{-t} dt &= [-2e^{-t}]_3^x = -2e^{-x} + 2e^{-3} \\ &= \frac{2}{e^3} - 2e^{-x}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , alors  $\int_3^{+\infty} 2e^{-t} dt$  converge et

$$\int_3^{+\infty} 2e^{-t} dt = \frac{2}{e^3}.$$

□

### Solution de l'exercice 2.

1. D'après les primitives classiques, pour  $x \leq 2$ ,

$$\begin{aligned} \int_x^2 e^{3t} dt &= \left[ \frac{e^{3t}}{3} \right]_x^2 = \frac{e^{3 \times 2}}{3} - \frac{e^{3x}}{3} \\ &= \frac{e^6}{3} - \frac{e^{3x}}{3}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0$ , alors  $\int_{-\infty}^2 e^{3t} dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^2 e^{3t} dt = \frac{e^6}{3}.$$

2. D'après les primitives classiques, pour  $x \leq -5$ ,

$$\int_x^{-5} 2e^t dt = 2 [e^t]_x^{-5} = 2(e^{-5} - e^x).$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , alors  $\int_{-\infty}^{-5} 2e^t dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^{-5} 2e^t dt = 2e^{-5}.$$

3. D'après les primitives classiques, pour  $x \leq -1$ ,

$$\begin{aligned} \int_x^{-1} \frac{1}{t^2} dt &= \left[ -\frac{1}{t} \right]_x^{-1} = -\frac{1}{-1} - \left( -\frac{1}{x} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ , alors  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt = 1.$$

4. On remarque que

$$\frac{1}{(1-t)^2} = (1-t)^{-2} = -(-1) \times (1-t)^{-2}$$

est de la forme  $-u'(t)u(t)^{-2}$ , où  $u(t) = 1-t$ . Ainsi, pour  $x \leq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_x^0 \frac{1}{(1-t)^2} dt &= - \left[ \frac{(1-t)^{-1}}{-1} \right]_0^x = \left[ \frac{1}{1-t} \right]_x^0 \\ &= 1 - \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = 0$ , alors  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-t)^2} dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-t)^2} dt = 1.$$

□

### Solution de l'exercice 3.

1. Comme  $h(x) = \ln(u(x))$  où  $u(x) = 1 + e^x$  et  $u'(x) = e^x$ , alors

$$h'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

2. D'après la question précédente,  $h$  est une primitive de  $f$ . Ainsi, pour  $x \leq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_x^0 f(t) dt &= [h(t)]_x^0 = h(0) - h(x) \\ &= \ln(1 + e^0) - \ln(1 + e^x) = \ln(2) - \ln(1 + e^x). \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = \ln(1 + 0) = 0$ .

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f(t) dt = \ln(2)$ . Finalement,  $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^0 f(t) dt = \ln(2).$$

□

## II - Fonctions discontinues

### Solution de l'exercice 4.

1. a) Soit  $x < 5$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, x]$ , alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

b) Soit  $x \in ]5, 10[$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, 5[$ , alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^5 f(t) dt + \int_5^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^5 0 dt + \int_5^x \frac{1}{5} dt \\ &= 0 + \left[ \frac{t}{5} \right]_5^x = \frac{x}{5} - \frac{5}{5} \\ &= \frac{x-5}{5}. \end{aligned}$$

c) Soit  $x > 10$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, 5[$  et sur  $]10, x[$ , alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^5 f(t) dt + \int_5^{10} f(t) dt + \int_{10}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^5 0 dt + \int_5^{10} \frac{1}{5} dt + \int_{10}^x 0 dt \\ &= 0 + \left[ \frac{t}{5} \right]_5^{10} + 0 = \frac{10}{5} - \frac{5}{5} \\ &= 1. \end{aligned}$$

d) D'après la question précédente, pour tout  $x > 10$ ,  $F(x) = 1$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

2. a) Soit  $x < 5$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, x]$ , alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x t f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

**b)** Soit  $x \in ]5, 10[$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, 5[$ , alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x t f(t) dt = \int_{-\infty}^5 t f(t) dt + \int_5^x t f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^5 0 dt + \int_5^x \frac{t}{5} dt \\ &= 0 + \left[ \frac{t^2}{10} \right]_5^x = \frac{x^2}{10} - \frac{5^2}{10} \\ &= \frac{x^2 - 25}{10}. \end{aligned}$$

**c)** Soit  $x > 10$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, 5[$  et sur  $]10, x[$ , alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x t f(t) dt = \int_{-\infty}^5 t f(t) dt + \int_5^{10} t f(t) dt + \int_{10}^x t f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^5 0 dt + \int_5^{10} \frac{1}{5} dt + \int_{10}^x 0 dt \\ &= 0 + \left[ \frac{t^2}{10} \right]_5^{10} + 0 = \frac{10^2}{10} - \frac{5^2}{10} \\ &= 10 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

**d)** D'après la question précédente, pour tout  $x > 10$ ,  $G(x) = \frac{15}{2}$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{15}{2}$ .

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$  est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \frac{15}{2}.$$

□

### Solution de l'exercice 5.

**1. a)** Soit  $x < 2$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, x]$ , alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

**b)** Soit  $x \in ]2, 4[$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, 2[$ , alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^2 0 dt + \int_2^x \frac{1}{2} dt \\ &= 0 + \left[ \frac{t}{2} \right]_2^x = \frac{x}{2} - \frac{2}{2} \\ &= \frac{x - 2}{2}. \end{aligned}$$

**c)** Soit  $x > 4$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, 2[$  et sur  $]4, x[$ , alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^2 f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt + \int_4^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^2 0 dt + \int_2^4 \frac{1}{5} dt + \int_4^x 0 dt \\ &= 0 + \left[ \frac{t}{2} \right]_2^4 + 0 = \frac{4}{2} - \frac{2}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

**d)** D'après la question précédente, pour tout  $x > 4$ ,  $F(x) = 1$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

**2. a)** Soit  $x < 2$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, x]$ , alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x t f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

**b)** Soit  $x \in ]2, 4[$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, 2[$ , alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^2 tf(t) dt + \int_2^x tf(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^2 0 dt + \int_2^x \frac{t}{2} dt \\ &= 0 + \left[ \frac{t^2}{4} \right]_2^x = \frac{x^2}{4} - \frac{2^2}{4} \\ &= \frac{x^2 - 4}{4}. \end{aligned}$$

**c)** Soit  $x > 4$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, 2[$  et sur  $]4, x[$ , alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^2 tf(t) dt + \int_2^4 tf(t) dt + \int_4^x tf(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^2 0 dt + \int_2^4 \frac{1}{2} dt + \int_4^x 0 dt \\ &= 0 + \left[ \frac{t^2}{4} \right]_2^4 + 0 = \frac{4^2}{4} - \frac{2^2}{4} \\ &= 4 - 1 = 3. \end{aligned}$$

**d)** D'après la question précédente, pour tout  $x > 4$ ,  $G(x) = 3$ . Ainsi,  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 3$ .

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = 3.$$

□

### Solution de l'exercice 6.

**1. a)** Soit  $x < 0$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, x]$ , alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

**b)** Soit  $x > 0$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, x[$ , alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 2e^{-2t} dt \\ &= 0 + [-e^{-2t}]_0^x = -e^{-2x} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= 1 - e^{-2x}. \end{aligned}$$

**c)** D'après la question précédente, pour tout  $x > 0$ ,  $F(x) = 1 - e^{-2x}$ .  
 Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

**2. a)** Soit  $x < 0$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, x]$ , alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

**b)** Soit  $x > 0$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] - \infty, 0[$ , alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^0 tf(t) dt + \int_0^x tf(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x t(2e^{-2t}) dt \\ &= \int_0^x t(2e^{-2t}) dt. \end{aligned}$$

Posons  $u(t) = t$  et  $v'(t) = 2e^{-2t}$  soit  $u'(t) = 1$  et  $v(t) = -e^{-2t}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[0, x]$  donc

d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} G(x) &= [-te^{-2t}]_0^x - \int_0^x 1(-e^{-2t}) dt \\ &= -xe^{-2x} - 0 + \left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^x \\ &= -xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2} + e^{-2 \times 0} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-2x}. \end{aligned}$$

**c)** D'après la question précédente, pour tout  $x > 0$ ,  $G(x) = \frac{1}{2} - xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2}$ .

D'après les croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0$  et d'après les propriétés de la fonction exponentielle,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ .

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{1}{2}$ .

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \frac{1}{2}.$$

□

### Solution de l'exercice 7.

**1. a)** Soit  $x < 0$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, x]$ , alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

**b)** Soit  $x > 0$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, x[$ , alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= 0 + [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} - (-e^0) \\ &= 1 - e^{-x}. \end{aligned}$$

**c)** D'après la question précédente, pour tout  $x > 0$ ,  $F(x) = 1 - e^{-x}$ .  
Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

**2. a)** Soit  $x < 0$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, x]$ , alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

**b)** Soit  $x > 0$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, 0[$ , alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^0 tf(t) dt + \int_0^x tf(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x te^{-t} dt \\ &= \int_0^x te^{-t} dt. \end{aligned}$$

Posons  $u(t) = t$  et  $v'(t) = e^{-t}$  soit  $u'(t) = 1$  et  $v(t) = -e^{-t}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[0, x]$  donc d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} G(x) &= [-te^{-t}]_0^x - \int_0^x 1(-e^{-t}) dt \\ &= -xe^{-x} - 0 + [-e^{-t}]_0^x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + e^{-0} \\ &= 1 - (x+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

**c)** D'après la question précédente, pour tout  $x > 0$ ,  $G(x) = 1 - xe^{-x} - e^{-x}$ .

D'après les croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$  et d'après les propriétés de la fonction exponentielle,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ .

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$ .

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$  est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = 1.$$

□

### Solution de l'exercice 8.

1. La fonction  $g(t) = -\frac{1}{1+t^2}$  est de la forme  $-u(t)^{-1}$  où  $u(t) = 1+t^2$ , soit  $u'(t) = 2t$ .

Ainsi,

$$g'(t) = -(-1) \times (2t)(1+t^2)^{-1-1} = \frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

2. Soit  $x \geq 0$ . En utilisant la définition de la fonction  $f$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= 0 + \left[ -\frac{1}{1+t^2} \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{1+x^2} - \left( -\frac{1}{1+0^2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, pour tout  $x > 0$ ,

$$\int_{-\infty}^x \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

D'après les limites classiques,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$ . Ainsi,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt = 1.$$

□

### Solution de l'exercice 9.

1. Soit  $A \geq 1$ . D'après la définition de  $f$ ,

$$\begin{aligned} I(A) &= \int_{-\infty}^A \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{-\infty}^1 \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^A \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx \\ &= 0 + \int_1^A \frac{1}{x} \ln(x) dx. \end{aligned}$$

On reconnaît une forme  $u'(x)u(x)$  où  $u(x) = \ln(x)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} I(A) &= \left[ \frac{\ln(x)^2}{2} \right]_1^A = \frac{\ln(A)^2}{2} - \frac{\ln(1)^2}{2} \\ &= \frac{\ln(A)^2}{2}. \end{aligned}$$

2. Comme  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(A)^2 = +\infty$ , alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  diverge.

3. Soit  $A \geq 1$ . D'après la définition de  $f$ ,

$$\begin{aligned} J(A) &= \int_{-\infty}^A \frac{f(x)}{x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^1 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^A \frac{f(x)}{x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx \\ &= 0 + \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

On pose  $\begin{cases} u(x) &= \ln(x) \\ u'(x) &= \frac{1}{x} \end{cases}$  et  $\begin{cases} v'(x) &= \frac{1}{x^2} \\ v(x) &= -\frac{1}{x} \end{cases}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[1, A]$ . Ainsi, d'après la formule

d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
 J(A) &= \left[ \ln(x) \times \left( -\frac{1}{x} \right) \right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x} \times \left( -\frac{1}{x} \right) dx \\
 &= -\frac{\ln(A)}{A} - \left( -\frac{\ln(1)}{1} \right) + \int_1^A \frac{1}{x^2} dx \\
 &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^A \\
 &= -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.
 \end{aligned}$$

**4.** D'après les croissances comparées,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln(A)}{A} = 0$ . De plus,

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} = 0$ . Ainsi,  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$  converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx = 1.$$

□