



Théorème de réordonnement

Soit σ une bijection sur \mathbb{N} et (a_n) une suite de scalaires absolument convergente. Alors, $\sum a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

1. Cas $a_n \geq 0$. On note $N_n = \max \sigma([0, n])$. Alors,

$$\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=0}^{N_n} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Ainsi $\sum a_{\sigma(k)}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. En appliquant ce dernier résultat avec la série $(a_{\sigma(k)})$ et la bijection σ^{-1} , on obtient l'autre inégalité puis l'égalité.

2. Si $a_n \in \mathbb{R}$, on décompose $a_n = a_n^+ + a_n^-$.

3. Si $a_n \in \mathbb{C}$, on décompose $a_n = \Re(a_n) + \Im(a_n)$.

Sommation par paquets

Soient I un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$. La famille (a_i) est **sommable** si $\left\{ \sum_{j \in J} a_j, J \subset I \text{ fini} \right\}$ est majoré. La borne supérieure de cet ensemble sera notée $\sum_{i \in I} a_i$. On suppose que $I = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$. Si (a_i) est sommable, alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\sum_{i \in I_\lambda} a_i$ converge et

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in I_\lambda} a_i \right)$$

On remarque que, si (a_n) est absolument convergente, alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

4. Le caractère convergent de $\sum_{i \in I_\lambda} a_i$ s'obtient par croissance et majoration.

5. Soit $\Gamma \subset \Lambda$ fini. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Gamma} \left(\underbrace{\sum_{i \in I_\lambda} a_i}_{\sigma_\lambda} \right) &\leq \sum_{i \in I} a_i \\ \sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda &\leq \sum_{i \in I} a_i \end{aligned}$$

6. Soit $J \subset I$ fini et $\{\lambda \in \Lambda ; J \cap I_\lambda \neq \emptyset\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} a_i &\leq \sum_{i=1}^p \sigma_{\lambda_i} \\ &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda \\ \sum_{i \in I} a_i &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda \end{aligned}$$