

T.D. I - Études de fonctions

I - Inégalités

Solution de l'exercice 1. Comme $\frac{1}{n} \geq 0$, alors

$$0 \leq \frac{1}{n}$$

$$n + 1 \leq n + 1 + \frac{1}{n}.$$

Comme la fonction inverse est décroissante,

$$\frac{1}{n + 1 + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n + 1}.$$

□

Solution de l'exercice 2. D'après les hypothèses,

$$0 \leq x \leq 1$$

$$1 \leq 1 + x \leq 2.$$

Comme la fonction logarithme est croissante,

$$\ln(1) = 0 \leq \ln(1 + x) \leq \ln(2).$$

Comme $x \geq 0$, alors $x^n \geq 0$ et

$$0 \leq x^n \ln(1 + x) \leq x^n \ln(2).$$

□

II - Étude de trinômes

Solution de l'exercice 3. Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$. Ainsi, le discriminant est strictement négatif

et le trinôme est toujours du signe de son coefficient de plus haut degré, soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0.$$

□

Solution de l'exercice 4. Comme un carré est toujours positif, $h(x)$ est du signe de $x^2 - x + 1$.

Le discriminant de $x^2 - x + 1$ vaut $(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Ainsi, le discriminant est strictement négatif et le trinôme est toujours du signe de son coefficient de plus haut degré, soit

$$\forall x > 0, x^2 - x + 1 \geq 0.$$

Finalement,

$$\forall x > 0, h(x) \geq 0.$$

□

Solution de l'exercice 5. Comme un carré est toujours positif, $f(x)$ est du signe de $-2x^2 - 2x + 1$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 4 + 8 = 12$. Ainsi, ses racines sont

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

D'après les propriétés sur les signes des trinômes, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

□

III - Étude de signes

Solution de l'exercice 6.

$$\begin{aligned}
 1 - \ln(x) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow 1 &\geq \ln(x) \\
 \Leftrightarrow \ln(x) &\leq 1 \\
 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} &\leq e^1, \text{ car l'exponentielle est croissante} \\
 \Leftrightarrow x &\leq e
 \end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est croissante.

On obtient ainsi le tableau de signes suivant :

x	0	e	$+\infty$
$g(x)$		+	0 -

□

Solution de l'exercice 7. Comme un carré est toujours positif, $g(x)$ est du signe de $x + 2$. Comme $x \geq -1$, alors $x + 2 \geq 1 \geq 0$ donc g est toujours positive. □

Solution de l'exercice 8. Comme $x \geq 1$, alors $x^3 \geq 0$. Ainsi, $g(x)$ est du signe de $-3 + 2 \ln(x)$. Or,

$$\begin{aligned}
 -3 + 2 \ln(x) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \ln(x) &\geq 3 \\
 \Leftrightarrow \ln(x) &\geq \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} &\geq e^{3/2}, \text{ car l'exponentielle est croissante} \\
 \Leftrightarrow x &\geq e^{3/2},
 \end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est croissante.

On obtient ainsi le tableau de signes suivant :

x	0	$e^{3/2}$	$+\infty$
$g(x)$		-	0 +

□

Solution de l'exercice 9. Comme la fonction exponentielle est à valeurs positives, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^x}{(1 + e^x)^3} \geq 0.$$

Ainsi, $f(x)$ est du signe de $e^x - 1$. Or,

$$\begin{aligned}
 e^x - 1 &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow e^x &\geq 1 \\
 \Leftrightarrow \ln(e^x) &\geq \ln(1), \text{ car } \ln \text{ est croissante} \\
 \Leftrightarrow x &\geq 0
 \end{aligned}$$

car la fonction logarithme est croissante.

On obtient ainsi le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		-	0 +

□

Solution de l'exercice 10. Si $t < 0$, alors $f(t) = 0$.

Si $t \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}
 \frac{t}{2} &\leq t \\
 \Leftrightarrow -t &\leq -\frac{t}{2}, \text{ car } -1 \leq 0 \\
 \Leftrightarrow e^{-t} &\leq e^{-t/2}, \text{ car l'exponentielle est croissante} \\
 \Leftrightarrow e^{t/2} - e^{-t} &\geq 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est à valeurs positives. □

IV - Calculs de dérivées

Solution de l'exercice 11. La dérivée de $\ln(u(x))$ est $\frac{u'(x)}{u(x)}$. Ici, $u(x) = 1 + e^x$ donc $u'(x) = 0 + e^x$. Ainsi,

$$h'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$


□

Solution de l'exercice 12.

1. La fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + e^x$. Ainsi, $u'(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x e^x}{(1 + e^x)^2} \\ &= \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1 + e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}. \end{aligned}$$

2. Comme la fonction exponentielle est à valeurs positives, alors $f'(x)$ est toujours positive et f est donc strictement croissante.

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	

3. D'après la définition, l'équation de la tangente est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ &= \frac{e^0}{(1 + e^0)^2}x + \frac{e^0}{1 + e^0} \\ &= \frac{x}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. En posant $u(x) = e^x$ et $v(x) = (1 + e^x)^2$, la fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$. De plus, $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 2e^x(1 + e^x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{e^x \cdot (1 + e^x)^2 - e^x 2e^x(1 + e^x)}{(1 + e^x)^4} \\ &= e^x(1 + e^x) \frac{1 + e^x - 2e^x}{(1 + e^x)^4} \\ &= e^x \frac{1 - e^x}{(1 + e^x)^3}. \end{aligned}$$

5. Comme $e^x \geq 0$, alors $f''(x)$ est du signe de $1 - e^x$. Or,

$$\begin{aligned} 1 - e^x &\geq 0 \\ 1 &\geq e^x \\ \ln(1) &\geq \ln(e^x), \text{ car } \ln \text{ est croissante} \\ 0 &\geq x. \end{aligned}$$

Ainsi, f'' est positive sur \mathbb{R}_- et négative sur \mathbb{R}_+ . La courbe représentative de f possède donc un unique point d'inflexion qui est d'abscisse 0. □

Solution de l'exercice 13.

1. La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

Les racines du trinôme f' sont donc 0 et 2.

De plus, $f(0) = -\frac{9}{4}$ et

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 3 \times 2^2 - \frac{9}{4} = 8 - 12 - \frac{9}{4} \\ &= \frac{32 - 48 - 9}{4} = -\frac{25}{4}. \end{aligned}$$

Enfin, comme la limite en l'infini du polynôme f est identique à celle de son terme de plus haut degré x^3 , alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{25}{4}$	$+\infty$	

2. D'après le tableau de variations, f est toujours négative sur $] -\infty, 2]$. Ensuite, f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[2, +\infty[$ dans $[f(2), +\infty[$. Comme $0 \in [f(2), +\infty[$, il existe un unique réel λ tel que $f(\lambda) = 0$. \square

Solution de l'exercice 14.

1. La fonction f est de la forme $\ln(u)$ où $u(x) = x^2 + x + 1$. Ainsi, $u'(x) = 2x + 1$. On obtient ainsi,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

2. La fonction f' est de la forme $\frac{u}{v}$ où $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^2 + x + 1$. Ainsi, $u'(x) = 2$, $v'(x) = 2x + 1$ et

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{2(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2 - 4x^2 - 4x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}. \end{aligned}$$

\square

Solution de l'exercice 15.

1. La fonction f est de la forme uv où $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1 + x)$. Comme $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{1+x}$, alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \ln(1 + x) + x \frac{1}{1 + x}.$$

2. La fonction $g(x) = \frac{x}{1+x}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ où $u(x) = x$ et $v(x) = 1 + x$. Ainsi,

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{1 + x - x}{(1 + x)^2} = \frac{1}{(1 + x)^2}.$$

Finalement,

$$f''(x) = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{(1 + x)^2} = \frac{2 + x}{(1 + x)^2}.$$

\square

Solution de l'exercice 16.

1. La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$. Comme $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

2. D'après la définition, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $e^{3/2}$ a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f'(e^{3/2}) \left(x - \frac{3}{2} \right) + f(e^{3/2}) \\ &= \frac{1 - \ln e^{3/2}}{(e^{3/2})^2} \left(x - \frac{3}{2} \right) + \frac{\ln e^{3/2}}{e^{3/2}} \\ &= \frac{1 - \frac{3}{2}}{e^3} \left(x - \frac{3}{2} \right) + \frac{\frac{3}{2}}{e^{3/2}} \\ &= -\frac{e^{-3}}{2} \left(x - \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{2} e^{-3/2} \end{aligned}$$

3. La fonction f' est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 1 - \ln(x)$ et $v(x) = x^2$.

Comme $u'(x) = -\frac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$, alors

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln(x))2x}{x^4} \\ &= \frac{-x - 2x(1 - \ln(x))}{x^4} \\ &= -\frac{1 + 2(1 - \ln(x))}{x^3} \\ &= -\frac{1 + 2 - 2\ln(x)}{x^3} \\ &= -\frac{3 - 2\ln(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

□

V - Calculs de limites

Solution de l'exercice 17.

1. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, d'après les opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0}{1+0} = 0.$$

2. En factorisant le dénominateur par e^x , qui est une quantité non nulle,

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x \left(\frac{1}{e^x} + 1\right)} = \frac{1}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, d'après les opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1+0} = 1. \quad \square$$

Solution de l'exercice 18.

1. Comme f est une fraction rationnelle, elle se comporte comme le rapport des termes de plus haut degré. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+.$$

2. Comme f est une fraction rationnelle, elle se comporte comme le rapport des termes de plus haut degré. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-.$$

□

Solution de l'exercice 19.

1. En utilisant les règles de factorisation,

$$h(x) = \frac{1}{x} (x^2 - x \ln(x) - 1).$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$. D'après les opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x \ln(x) - 1) = 0 - 0 - 1 = -1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty.$$

2. En utilisant les règles de factorisation,

$$h(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. D'après les opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1 - 0 - 0 = 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

□

Solution de l'exercice 20.

1. D'après les propriétés du logarithme,

$$g(1) = 1 - \ln(1) = 1.$$

2. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, alors par addition des limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

3. En factorisant par x ,

$$g(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right).$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1. \text{ Finalement,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

□

Solution de l'exercice 21.

1. Comme un polynôme se comporte en l'infini comme son terme de plus haut degré,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

Comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$, alors par composition des limites,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Comme un polynôme se comporte en l'infini comme son terme de plus haut degré,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

Comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$, alors par composition des limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

□

VI - Limites à droite / à gauche

Solution de l'exercice 22.

1. Si $t < 0$, alors $f(t) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

Si $t \in [0, 1]$, alors $f(t) = nt^{n-1}$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} nt^{n-1} = 0.$$

La fonction f est donc continue en 0.

2. Si $t > 1$, alors $f(t) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 0 = 0.$$

Si $t \in [0, 1]$, alors $f(t) = nt^{n-1}$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} nt^{n-1} = n.$$

Comme $n \neq 0$, la fonction n'est pas continue en 1.

□

Solution de l'exercice 23. Si $x < 0$, alors $f(x) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

Si $x \geq 0$, alors $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

La fonction f est donc continue en 0. \square

Solution de l'exercice 24. Comme f est constante sur $] -\infty, 1[$, alors f est continue sur $] -\infty, 1[$.

D'après les théorèmes usuels, f est continue sur $[1, +\infty[$.

De plus, si $x < 1$, alors $f(x) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0.$$

Si $x \geq 1$, alors $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0.$$

Ainsi, f est continue en 1.

Finalement, f est bien continue sur \mathbb{R} . \square

Solution de l'exercice 25. La fonction f est constante donc continue sur $] -\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$. D'après les propriétés des fonctions usuelles, la fonction f est continue sur $[0, 1]$. Étudions la continuité en 0 et en 1.

* Si $t < 0$, alors $f(t) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

Si $t \in [0, 1]$, alors $f(t) = \frac{kt}{1+t}$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{kt}{1+t} = k \frac{0}{1+0} = 0.$$

De plus, $f(0) = 0$.

Ainsi, $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0)$, donc f est continue en 0.

* Si $t \geq 1$, alors $f(t) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 0 = 0.$$

Si $t \in [0, 1]$, alors $f(t) = \frac{kt}{1+t}$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{kt}{1+t} = k \frac{1}{1+1} = \frac{k}{2}.$$

Comme $k \neq 0$, alors $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t)$, donc f n'est pas continue en 1.

Finalement, f est continue en tout point de \mathbb{R} différent de 1. \square