

## T.D. IV - Variables aléatoires discrètes

=====

### I - Loix usuelles finies

**Exercice 1.** Soit  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de moyenne  $p$ . On note  $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$ . Déterminer la loi de  $Y$ .

**Exercice 2.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètres respectifs  $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$ . On note  $N$  la variable aléatoire qui vaut 0 si  $X_1 = \dots = X_n = 1$  et  $\min \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket ; X_k = 0\}$  sinon. Déterminer la loi de  $N$  ?

### II - Variables aléatoires finies

**Exercice 3.** On considère la variable aléatoire  $X$  dont la loi est donnée par :

$k$	-1	0	1	2	3
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

On pose  $Y = |X - 1|$ .

- Déterminer la loi de  $Y$  puis l'espérance de  $Y$ .
- Calculer directement l'espérance de  $Y$  à l'aide du théorème de transfert.

**Exercice 4.** Un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 est lancé une fois. La probabilité d'apparition de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre obtenu.

- Déterminer la loi de  $X$ .
- Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .

- Déterminer  $\mathbf{E} \left[ \frac{1}{X} \right]$ .

**Exercice 5.** Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à vider l'urne. On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

- Déterminer la loi de  $X$ .
- Calculer  $\mathbf{E}[X]$  et  $\mathbf{V}(X)$ .

**Exercice 6.** On tire sans remise  $2n$  boules numérotées de 1 à  $2n$ .

- Calculer la probabilité d'obtenir  $1, 3, \dots, 2n - 1$  dans cet ordre et consécutivement.
- Déterminer la probabilité de tirer  $1, 3, \dots, 2n - 1$  dans cet ordre mais pas forcément consécutivement.
- On note  $X$  la variable aléatoire associée au rang de la dernière boule impaire tirée. Calculer  $\mathbf{E}[X]$ .

**Exercice 7.**

- Soient  $p, q \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$ .
- Une urne contient  $b$  boules blanches et  $n$  boules noires. On retire une à une et sans remise les boules de l'urne. Soit  $X$  la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages effectués jusqu'au retrait de toutes les boules blanches. Déterminer la loi de  $X$ . Calculer  $\mathbf{E}[X]$  et  $\mathbf{V}(X)$ .

### III - Loix usuelles infinies

**Exercice 8.** Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

- Déterminer la loi de  $X$ .

2. Calculer  $\mathbf{E}[X]$  et  $\mathbf{V}(X)$ .

**Exercice 9.** Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note  $S$  la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

1. Quelle est la loi de  $S$  ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi de  $T$  ? Préciser l'espérance et la variance de  $T$ .

**Exercice 10.** Soit  $Y$  une variable aléatoire telle que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(Y = k) = e^{-k} - e^{-(k+1)}.$$

On pose  $Z = Y + 1$ .

1. Vérifier que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) = 1$ .

2. Reconnaître la loi de  $Z$  puis en déduire son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de  $Y$ .

4. On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit inversible.

**Exercice 11.** ( $\rightarrow$ ) On considère une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que

$$\forall n \geq 1, \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X = n]) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \mathbf{P}([X > n])$ .

1. Justifier que

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n].$$

2. En déduire que  $u_{n-1} - u_n = \mathbf{P}([X = n])$ .

3. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,

$$\mathbf{P}_{[X > n-1]}([X > n]) = 1 - \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X = n]).$$

4. En déduire que pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ .

5. Exprimer, pour tout  $n$  entier naturel la valeur de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis reconnaître la loi de  $X$ .

6. Exprimer  $\mathbf{P}([X \leq n])$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 12.** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi géométrique sur  $\mathbb{N}^*$  de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On note  $A = [X \text{ est paire}]$  et  $B = [X \text{ est impaire}]$ . Montrer que  $\mathbf{P}(A) < \mathbf{P}(B)$ .

**Exercice 13.** Soient  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur  $[[1, n]]$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et tout  $i \in [[1, n]]$ , on pose  $X_{i,m} = |\{k \in [[1, m]] ; U_k = i\}|$ .

1. Déterminer la loi de  $X_{i,m}$ .

2. Soit  $N$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  indépendante de la famille  $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ . Pour tout  $i \in [[1, n]]$ , on pose  $Y_i = X_{i,N}$ . Déterminer la loi de  $Y_i$ .

**Exercice 14.** Un serveur téléphonique ouvre sa ligne chaque minute. Chaque minute, la probabilité qu'il prenne un client est constante et égale à  $\frac{1}{12}$ . On note  $X$  le nombre d'appels auxquels le serveur a répondu en 1 heure.

1. Déterminer la loi de  $X$ , son espérance  $\mathbf{E}[X]$  et sa variance  $\mathbf{V}(X)$ . On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire  $X$  par la loi d'une variable aléatoire  $Z$  suivant une loi de Poisson de même espérance que  $X$ . On considère la table de la loi de Poisson de paramètre 5 suivante :

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}([Y = k])$	0,006	0,034	0,084	0,140	0,175	0,175	0,146

2. Déterminer des valeurs approchées de  $\mathbf{P}(X \leq 3)$  puis  $\mathbf{P}(X \geq 4)$ .

## IV - Variables aléatoires infinies

**Exercice 15.** Un sauteur tente de franchir successivement les hauteurs numérotées 1, 2, 3, ...,  $n$ , ... On suppose que les sauts sont mutuellement indépendants et que la probabilité de franchir la hauteur numéro

$n$  vaut  $\frac{1}{n}$ . Le sauteur est éliminé à son premier échec et on note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Calculer la loi de  $X$  et vérifier que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1$ .
2. Calculer l'espérance de  $X$ .

**Exercice 16.** Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à obtention de tous les numéros. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir tous les numéros. On note  $E_{i,j}$  l'événement « La boule  $i$  n'a pas été obtenue au cours des  $n$  premiers tirages. » Soit  $n \geq 3$ .

1. Exprimer  $[X > n]$  en fonction des  $E_{i,n}$ .
2. Montrer que  $\mathbf{P}(X > n) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$ .
3. En déduire la loi de  $X$ .

**Exercice 17.** Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel  $N$  non nul selon la loi de probabilité :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}$ . Le joueur gagne  $N$  jetons si  $N$  est pair ; il perd  $N$  jetons si  $N$  est impair.

1. Quelle est la probabilité de gagner une partie ?
2. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire  $G$  égale au gain algébrique du joueur.

**Exercice 18.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Simplifier  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .
2. Vérifier que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$ .
3. En déduire la valeur de  $\mathbf{P}(X = 0)$ .
4. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{P}(X > n) = \frac{1}{n+1}$ .

## V - Lois jointes

**Exercice 19.** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

$x \backslash y$	1	2	3	4
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1		0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Compléter la case vide.
2. Déterminer les lois marginales du couple  $(X, Y)$ . En déduire  $\mathbf{E}[X]$  et  $\mathbf{E}[Y]$ .
3. Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = 1]$ .
4. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
5. Calculer  $\mathbf{P}([X = 0] \cup [Y = 1])$ .
6. Calculer la covariance de  $X$  et de  $Y$ .
7. Calculer  $\mathbf{V}(X)$  et  $\mathbf{V}(Y)$ . En déduire  $\rho(X, Y)$ .
8. Calculer  $\text{Cov}(X + Y, X)$ ,  $\text{Cov}(X, X + Y)$  et  $\text{Cov}(2X, X)$ .

**Exercice 20.** On lance 2 fois un dé équilibré à 6 faces. On note  $X$  le plus grand des résultats obtenus et  $Y$  le plus petit.

1. Décrire l'ensemble des valeurs prises par  $(X, Y)$ .
2. Décrire l'événement  $[X = 1]$  puis calculer  $\mathbf{P}([X = 1])$ .
3. Décrire l'événement  $[Y = 1]$  puis calculer  $\mathbf{P}([Y = 1])$ .
4. Décrire l'événement  $[X = 1] \cap [Y = 1]$  puis calculer  $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$ .
5. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 21. (Excursions)** Une pièce biaisée dont face apparaît avec probabilité  $p$  est lancée  $n$  fois. Une *excursion* est une série de lancers qui renvoient le même résultat. Par exemple, dans la séquence FFPFPF, il y a 5 excursions. On note  $R$  le nombre d'excursions. Montrer que  $\mathbf{E}[R] = 1 + 2(n-1)p(1-p)$  puis calculer  $\mathbf{V}(R)$ .

*Indication : Exprimer  $R$  en fonction de  $I_j$  : le  $(j+1)$ -ème lancer est différent du  $j$ -ème.*