

# I - Puissances

Le nombre  $x^a$  est défini différemment en fonction du type du nombre  $a$ .  
Cependant, les règles de calcul seront toujours les mêmes !

## I - Lorsque $a$ est un entier naturel (positif)

### À Savoir

Si  $a$  est un entier naturel,

$$* x^0 = 1.$$

$$* x^a = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}}$$

$$3^0 = 1,$$

$$3^1 = 3,$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27.$$

### À Savoir

Si  $a, b$  sont des entiers naturels,

$$\begin{aligned} x^a \times x^b &= \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{a \text{ facteurs}} \times \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{b \text{ facteurs}} \\ &= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a+b \text{ facteurs}} \\ &= x^{a+b}. \end{aligned}$$

$$3^2 \times 3^3 = 3^5,$$

$$6^2 \times 3^3 = 3^2 \times 2^2 \times 3^3 = 2^2 \times 3^5,$$

$$3^n \times 3 = 3^{n+1}.$$

### À Savoir

Si  $a, b$  sont des entiers naturels,

$$\begin{aligned} (x^a)^b &= \underbrace{\left( \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}} \right)}_{a \text{ facteurs}}^b = \underbrace{\left( \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}} \right) \times \cdots \times \left( \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}} \right)}_{b \text{ facteurs}} \\ &= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \times b \text{ facteurs}} \\ &= x^{a \times b}. \end{aligned}$$

$$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6,$$

$$81^5 = (3^4)^5 = 3^{4 \times 5} = 3^{20}.$$

## II - Lorsque $a$ est un entier négatif

### À Savoir

Si  $a$  est un entier négatif, alors  $-a$  est un entier positif et

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{-a \text{ facteurs}}}.$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3^{+1}} = \frac{1}{3},$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^{+2}} = \frac{1}{9},$$

$$\frac{1}{3^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{3^3}} = 3^3.$$

**À Savoir**

Si  $a, b$  sont des entiers,

$$x^a \times x^b = x^{a+b}.$$

$$3^{-2} \times 3^5 = 3^{-2+5} = 3^3,$$

$$3^6 \times 3^{-12} = 3^{6-12} = 3^{-6},$$

$$\frac{3^5}{3^7} = 3^5 \times \frac{1}{3^7} = 3^5 \times 3^{-7} = 3^{5-7} = 3^{-2},$$

$$3^5 3^{-5} = 3^{5-5} = 3^0 = 1.$$

**À Savoir**

Si  $a, b$  sont des entiers,

$$(x^a)^b = x^{ab}.$$

$$(5^{-2})^3 = 5^{-2 \times 3} = 5^{-6}$$

$$\left(\frac{1}{81}\right)^5 = \left(\frac{1}{3^4}\right)^5 = (3^{-4})^5 = 3^{-20},$$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{-3} = (5^{-2})^{-3} = 5^{-2 \times (-3)} = 5^6.$$

**III - Lorsque  $a = 1/n$** **À Savoir**

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . La fonction  $f(y) = y^n$  est strictement croissante, continue sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$ . Comme  $x \in [0, +\infty[$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel  $y$  tel que  $y^n = x$ . Ce réel est noté  $x^{\frac{1}{n}}$ .

\* Comme  $2^2 = 4$ , alors  $2 = 4^{1/2}$ .

\* Si  $x \geq 0$ , alors  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ .

**Attention.** Dans ce cas, le nombre  $x$  doit être positif.

**À Savoir**

Si  $a$  est un entier,  $b$  est un entier naturel non nul et  $x$  est un réel positif,

$$(x^{1/b})^a = x^{a/b}$$

$$(2^{1/3})^9 = 2^{9/3} = 2^3.$$

**IV - Lorsque  $a$  est un réel****À Savoir**

Si  $a$  est un réel et  $x$  est un réel strictement positif,

$$x^a = e^{a \ln(x)}.$$

Cette notion généralise les définitions précédentes.

$$3^{1.5} = e^{\frac{3}{2} \ln(3)}$$

**Attention.** Dans ce cas, le nombre  $x$  doit être strictement positif.

**À Savoir**

Si  $a, b$  sont deux réels et  $x, y$  sont deux réels strictement positifs,

$$(x \times y)^a = x^a \times y^a,$$

$$x^a \times x^b = x^{a+b},$$

$$(x^a)^b = x^{a \times b}.$$

Déterminons les réels  $x$  tels que  $3^{-x} = \frac{3}{2}$ . Alors,

$$e^{-x \ln(3)} = \frac{3}{2}$$

$$\ln(e^{-x \ln(3)}) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$-x \ln(3) = \ln(3) - \ln(2)$$

$$x = \frac{\ln(2) - \ln(3)}{\ln(3)}.$$