Stanislas
Exercices

# Réduction des endomorphismes

Chapitre XI

**PSI**
2019-2020

■ ■ ■

## I. Spectres

**Indications pour l'exercice 1.** Pour montrer que les matrices sont semblables, On pourra utiliser un changement de bases sur les endomorphismes canoniquement associés, ou penser en termes d'opérations élémentaires sur les lignes / colonnes.
Pour les valeurs / sous-espaces propres un simple calcul suffira ! □

**Indications pour l'exercice 2.** Commencer par déterminer le degré des valeurs propres.
On pourra ensuite déterminer la matrice de l'endomorphisme dans $\mathbb{R}_2[X]$ puis les valeurs et vecteurs propres. □

**Indications pour l'exercice 3.**

**1.** Considérer un vecteur propre $X$ et considérer l'indice $i_0$ pour lequel la coordonnée de $X$ est maximale en valeur absolue.

**2.** Se rappeler que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$. □

**Indications pour l'exercice 4.**

**1.** Ne pas oublier de vérifier que $T$ est bien définie.

**2.** Remarquer que $f(x_0 + n) = \lambda^n f(x_0)$ et choisir un $x_0$ adéquat.

**3.** Identifier des vecteurs propres en cherchant des solutions constantes, ou à l'aide de fonctions élémentaires. □

**Indications pour l'exercice 5.**

**1.** Identifier un vecteur propre très simple.

**2.** Choisir $v \in E_1$ et $i_0$ tel que $v_{i_0} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |v_i|$. En exploitant la $i_0$-ème ligne de la relation $Pv = v$, montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire puis conclure.

**3.** Reprendre la stratégie de la question précédente.

**4. a)** On pourra normer un vecteur propre.

**b)** Remarquer que, à la question précédente, on utilise la norme infinie.

**c)** Montrer que $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i_0,j}\left(x_j\,\mathrm{e}^{-i\theta} - 1\right) = 0$, prendre la partie réelle de cette relation et remarquer que les termes sont positifs.

**d)** Déduire de la question précédente que $\mathrm{Im}\, x_j = 0$ puis que $x = \mathrm{e}^{i\theta}\begin{pmatrix}1\\ =\vdots\\ 1\end{pmatrix}$. □

## II. Diagonalisation

**Indications pour l'exercice 6.**

**1.** On obtient par le calcul que $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 4, 6\}$. Les sous-espaces propres suivent...

**2.** Écrire la relation sous forme matricielle puis utiliser les formules de changement de base et la question précédente pour calculer $A^n$. □

**Indications pour l'exercice 7.** L'ensemble des racines du polynôme caractéristique dépend du corps ainsi que de la valeur de $\theta$. Il suffit d'effectuer des disjonctions de cas. □

**Indications pour l'exercice 8.** En calculant le rang de la matrice, on peut en déduire la dimension puis une base du noyau.
De plus, en recherchant un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda$ non nulle, on montre que $\lambda(\lambda-1)-(n-1) = 0$. On en déduit les valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres. □

**Indications pour l'exercice 9.**

**1.** Question de cours.

**2.** Travailler sur les colonnes pour montrer que le rang de la matrice vaut 2.

**3.** Commencer par exhiber, grâce à la question précédente, une base de $\mathrm{Ker}(A_n)$.

Remarquer ensuite que $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A_n$.

Pour identifier la dernière des valeurs propres, utiliser la trace. □

**Indications pour l'exercice 10.**

**1.** Montrer que $g = f_{|E}$ est diagonalisable puis compléter une base de diagonalisation de $g$ à l'aide de vecteurs propres de $f$.

**2.** Montrer que, sur $\mathbb{C}$, $\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ ne possède pas de supplémentaire stable par $f$ non trivial.

**3.** Penser aux rotations. □

**Indications pour l'exercice 11.** Distinguer les cas en fonction de $i \in \mathrm{Sp}(B)$ ou $i \notin \mathrm{Sp}(B)$. □

**Indications pour l'exercice 12.**

**1. a)** C'est le noyau d'une application linéaire bien choisie.

**b)** Écrire le calcul.

**2. a)** Étudier les coefficients $[MD]_{i,j}$ et $[DM]_{i,j}$ pour montrer que $M$ est diagonale.

**b)** Une inclusion est triviale. Pour l'autre, parler de dimension et faire intervenir Vandermonde.

**3. a)** Utiliser les propriétés $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ pour en déduire que $A$ est scalaire.

**b)** Exhiber une famille libre à deux éléments de $C(A)$.

**c)** Montrer que $F \cap C(A) \neq \{0\}$ et en déduire que $a_{2,1} = 0$. Travailler de même avec $G$ pour en déduire que $A$ est diagonale, puis scalaire.

**d)** Reprendre les résultats montrés aux questions précédentes. □

**Indications pour l'exercice 13.**

**1.** Utiliser l'inversibilité de $A$.

**2.** Écrire la définition des vecteurs propres.

**3.** Utiliser l'inversibilité de $f$ et de $g$.

**4.** Montrer que $\mathrm{Sp}(f\circ g) = \mathrm{Sp}(g\circ f)$ puis utiliser les dimensions des sous-espaces propres.

**5.** Exhiber deux matrices $X$ et $Y$ simples de taille 2. □

## III. Polynômes annulateurs

**Indications pour l'exercice 14.**

**1.** Utiliser l'inversibilité pour déterminer un polynôme annulateur de $A$ scindé à racines simples.

**2.** Montrer que $\mathrm{Sp}(A)$ est inclus dans un ensemble à 2 éléments.

**3.** On note $n_1 = \dim E_1(A)$ et $n_2 = \dim E_2(A)$. En utilisant la trace et la diagonalisabilité, montrer que $n_2 = 2$ et $n_1 = 4$.

**4.** Montrer que l'ensemble des polynômes annulateurs est $\{(X-1)(X-2)P,\ P\in\mathbb{R}[X]\}$. □

**Indications pour l'exercice 15.** Commencer par montrer que $A$ est diagonalisable et déterminer un ensemble simple contenant son spectre. □

**Indications pour l'exercice 16.**

**1.** En utilisant la formule de Taylor polynomiale, montrer que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}\left\{(A-aI_n)^k,\ k\in[\![0,p-1]\!]\right\}$.

**2.** L'étude du spectre de $A$ permet de montrer son inversibilité.
La formule du binôme de Newton permet de montrer que $A^{-1}\in\mathbb{R}[A]$.

**3.** Le théorème de Cayley-Hamilton (par exemple) permet de montrer que $P(A)^{-1}\in\mathbb{R}[P(A)]$. Le résultat s'obtient alors aisément. □

**Indications pour l'exercice 17.** Diagonaliser $A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Utiliser ensuite que $A$ est à coefficients réels pour montrer que son rang est pair. □

**Indications pour l'exercice 18.** Noter $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ et, si $\lambda_i\neq 0$, noter $\{\delta_i,-\delta_i\} = \left\{z\in\mathbb{C}\ ;\ z^2=\lambda_i\right\}$.

($\Rightarrow$) Montrer que, si $\lambda_i\neq 0$, alors $\mathrm{Ker}(M^2-\lambda_i I_n) = \mathrm{Ker}(M-\delta_i I_n)\oplus\mathrm{Ker}(M+\delta_i I_n)$. On peut ensuite utiliser un argument de dimensions pour montrer que $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^2)$.

($\Leftarrow$) Si $0 \notin \mathrm{Sp}(M^2)$, montrer que $\prod_{i=1}^{p}(X-\delta_i)(X+\delta_i)$ est un polynôme annulateur de $M$.
Si $\lambda_1 = 0 \in \mathrm{Sp}(M)$, montrer que, pour tout $X$ vecteur, $M\left(\prod_{i=2}^{p}(A^2-\lambda_i I_n)X\right) = 0$ et en déduire un polynôme annulateur de $M$ scindé à racines simples.

□

**Indications pour l'exercice 19.**

**1.** Remarquer que $\beta$ est également une valeur propre de ${}^tB$. Effectuer ensuite le produit matriciel entre un vecteur propre de $A$ et la transposée d'un vecteur propre de $B$.

**2.** Montrer par récurrence que $A^kM = M(B+\lambda I_n)^k$ puis conclure.

**3.** Choisir $P = \chi_A$ puis montrer que $\chi_A(B+\lambda I_n)$ n'est pas inversible et que $\mathrm{Sp}(B+\lambda I_n) = \{\beta+\lambda,\ \beta \in \mathrm{Sp}(B)\}$.

**Remarque.** Sur $\mathbb{R}$, on remarque que, en choisissant $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{2\}$ et $L\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 0_3$. Ainsi, $0 \in \mathrm{Sp}(L)$ et on obtient une contradiction. □

## IV. Trigonalisation

**Indications pour l'exercice 20.** Commencer par calculer $\varphi(I_2)$, $\varphi(0_2)$ puis, lorsque $A$ est inversible, en exprimer $\varphi(A^{-1})$ en fonction de $\varphi(A)$.
En déduire que $\varphi$ est un invariant de similitude.
Traiter ensuite le cas où $A$ est diagonalisable.
Sinon, trigonaliser $A$ et montrer que $A$ est semblable à $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$.
Traiter ensuite le cas où $\alpha = 0$.
Lorsque $\alpha \neq 0$, utiliser l'égalité $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \beta\alpha^{-1}\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$. □

**Indications pour l'exercice 21.** Noter $\mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Utiliser l'égalité des traces et les déterminants de Vandermonde pour montrer que les multiplicités des valeurs propres de $A$ et de $B$ sont égales. Conclure. □

**Indications pour l'exercice 22.**

**1.** Pour $H$, utiliser la linéarité de la trace. Pour $N$, on pourra montrer qu'il n'est pas stable par addition.

**2.** Utiliser la trigonalisabilité pour montrer que $N \subset H$.

**3.** Déterminer une base de $H$. Remarquer ensuite que, en dimension 2, $E_{1,1} - E_{2,2} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\, N$. □

**Indications pour l'exercice 23.** Trier les valeurs propres par valeur absolue croissante, puis utiliser la trigonalisabilité de $A$ pour calculer la trace des puissances successives. □

## V. Avec Python

**Indications pour l'exercice 24.**

**1. a)** On peut utiliser la fonction `randint`.

**b)** Utiliser la fonction `plot`.

**2. a)** On peut utiliser la formule des probabilités totales.

**b)** Utiliser `numpy` pour déterminer les valeurs propres de $A$ puis évaluer ses puissances successives.

Après un simple calcul,

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \lambda^4 - \frac{\lambda^3}{4} - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{4}\\ &= (\lambda-1)\underbrace{\left(\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\right)}_{Q(\lambda)}\end{aligned}$$

De plus, $Q'(\lambda) = 3\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}$. Le discriminant de $Q'$ vaut $\frac{9}{4} - 6 < 0$. Comme $Q$ est de degré impair, il possède une racine réelle. Comme $Q'$

garde un signe constant, $Q$ est monotone et il possède une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées.
Notons $\lambda_0$ la racine réelle et $\lambda$, $\overline{\lambda}$ les racines complexes conjuguées.

* D'après les relations coefficients/racines,

$$\lambda_0 \left|\lambda\right|^2 = -\frac{1}{4}$$

Ainsi, $\lambda_0 < 0$.
* Comme $Q(-1) = 1 - 3/2 < 0$, alors $\lambda_0 > -1$.
* Comme $Q(-1/4) = 2/4^3 + 1/8 > 0$, alors $\lambda_0 < -1/4$.

Ainsi, $-1 < \lambda_0 < -1/4$ soit $\left|\lambda\right|^2 = -\frac{1}{4\lambda_0} < 1$.
Finalement, toutes les racines de $Q$ sont dans $]-1,1[$.

**3. a)** On pourra utiliser la fonction `position`.

**b)** On pourra calculer une moyenne empirique. Pour la justification, on pourra penser au lemme de Cesaro. $\square$