

# VI - Espaces vectoriels

Seuls les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^n$  sont au programme.

## I - Systèmes d'équations linéaires

### Définition 1 - Système linéaire

Soient  $a_{1,1}, \dots, a_{1,p}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,p}, b_1, \dots, b_n$  des réels. Le système  $(\mathcal{S})$

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$$

est un *système linéaire* d'inconnues  $x_1, \dots, x_p$ .

- Un  $p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p)$  est *solution* de  $(\mathcal{S})$  s'il est solution de chacune des lignes du système.
- Deux systèmes sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

### Exemple 1

Les systèmes suivants sont des systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} \bullet \begin{cases} 2x + 3y + z &= 0 \\ x + 5y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= 2 \end{cases} & \quad \bullet \begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ 2x + y &= 3 \\ x + 5y &= 2 \end{cases} \end{aligned}$$

### Géométrie

- Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(a, b) \neq (0, 0)$ . L'ensemble suivant est une droite en dimension 2 :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; ax + by + c = 0\}.$$

Lorsque  $c = 0$ , l'ensemble  $\mathcal{D}$  est un espace vectoriel.

- Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . L'ensemble suivant est un plan en dimension 3 :

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; ax + by + cz + d = 0\}.$$

Lorsque  $d = 0$ , l'ensemble  $\mathcal{P}$  est un espace vectoriel.

### Définition 2 - Opérations élémentaires

Nous noterons  $L_1, \dots, L_n$  les lignes du système et appellerons *opérations élémentaires* sur les lignes du système les transformations suivantes :

- Pour  $i \neq j$ , l'échange des lignes  $L_i$  et  $L_j$ , symbolisé par  $L_i \leftrightarrow L_j$ .
- Pour  $\alpha \neq 0$ , la multiplication de la ligne  $L_i$  par  $\alpha$ , symbolisée par  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ .
- Pour  $i \neq j$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , l'ajout à  $L_i$  de la ligne  $L_j$  multipliée par  $\beta$ , symbolisé par  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ .

### Théorème 1

Le système obtenu par application d'opérations élémentaires sur les lignes est équivalent au système initial.

**Principe de l'algorithme du pivot de Gauss :** On utilise les opérations élémentaires pour transformer le système en un système échelonné.

**Algorithme :**

- On cherche une ligne où le coefficient  $\alpha$  de  $x_1$  est non nul et simple. Notons cette ligne  $L_{i_0}$ .
- On échange les lignes 1 et  $i_0$ ,  $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$ .
- On utilise la nouvelle ligne  $L_1$  pour éliminer les occurrences de  $x_1$  dans les lignes suivantes, c'est la ligne pivot. Par exemple, si à la ligne  $L_2$  le coefficient de  $x_1$  est  $a$ , on effectue  $L_2 \leftarrow \alpha L_2 - aL_1$ .
- On reprend ensuite les étapes de l'algorithme en travaillant sur toutes les lignes sauf la première de manière à éliminer  $x_2$ ...
- Enfin, on exprime les solutions en fonction des variables libres.

### Définition 3 - Rang d'un système linéaire

Le *rang* du système est le nombre d'équations non triviales du système échelonné.

### Théorème 2 - Ensemble de solutions

Soit  $S$  l'ensemble des solutions du système  $(\mathcal{S})$ .

- Soit  $S = \emptyset$ , les équations sont *incompatibles*.
- Soit  $S$  est un singleton, le rang est alors égal au nombre d'inconnues.
- Soit  $S$  est infini, le rang est alors strictement inférieur au nombre d'inconnues.

### Exemple 2 - Résolution de système

- Résolvons le système suivant avec l'algorithme du pivot de Gauss :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  est solution de  $(\mathcal{S})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 5y - 3z = 13 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 4y - 7z = 15 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 5y - 3z = 13 \\ -23z = 23 & L_3 \leftarrow 5L_3 - 4L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Le système  $(\mathcal{S})$  possède une unique solution. L'ensemble des solutions est  $\{(1, 2, -1)\}$ .

- Résolvons le système suivant avec l'algorithme du pivot de Gauss :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est solution de  $(\mathcal{S})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 3y = -3 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Le système  $(\mathcal{S})$  possède une unique solution. L'ensemble des solutions est  $\{(3, -1)\}$ .

- Résolvons le système

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$$

Ce système est déjà échelonné. Ainsi,  $(x, y, z)$  est solution de  $(\mathcal{S})$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = 1 - 2\lambda - 3\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Le système  $(\mathcal{S})$  possède une infinité de solutions. L'ensemble des solutions est

$$\begin{aligned} & \{(1 - 2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(1, 0, 0) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(-3, 0, 1), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

## II - Espaces vectoriels

On note  $\vec{0}_n = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Les lettres  $n$  et  $p$  désignent des entiers naturels non nuls.

### Définition 4 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

On définit sur  $\mathbb{R}^n$  l'addition et la multiplication par un réel de la manière suivante :

**Addition.** Si  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

**Multiplication par un réel.** Si  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

### Exemple 3 - Cas où $n = 2, 3$

- Si  $n = 2$ .

$$(1, 2) + (3, 4) = (4, 6)$$

$$(1, 5) + (-1, 0) = (0, 5)$$

$$3 \cdot (4, 2) = (12, 6)$$

- Si  $n = 3$ .

$$(1, -1, 2) + (4, 5, -5) = (5, 4, -3)$$

$$(1, 0, -1) + (3, 1, 2) = (4, 1, 1)$$

$$2 \cdot (4, 1, -2) = (8, 2, -4)$$

### Proposition 1 - Structure d'espace vectoriel

- Propriétés de l'addition. Soient  $x, y, z$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .
  - ★ Associativité :  $x + (y + z) = (x + y) + z$ .
  - ★ Élément neutre :  $x + \vec{0}_n = \vec{0}_n + x = x$ .
  - ★ Existence d'un opposé :  $x + (-1) \cdot x = (-1) \cdot x + x = \vec{0}_n$ .
  - ★ Commutativité :  $x + y = y + x$ .
- Propriétés de la multiplication par un réel. Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot x) &= (\alpha\beta) \cdot x & (\alpha + \beta) \cdot x &= \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ 1 \cdot x &= x & \alpha \cdot (x + y) &= \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$  est un *espace vectoriel*. Les éléments de  $\mathbb{R}^n$  sont des *vecteurs*.

### Proposition 2

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . Le vecteur  $\alpha x = \vec{0}_n$  si et seulement si ( $\alpha = 0$  ou  $x = \vec{0}_n$ ).

### III - Familles de vecteurs

Dans tout ce chapitre,  $p$  désigne un entier naturel non nul.

#### III.1 - Sous-espace vectoriel

##### Définition 5 - Sous-espace vectoriel

Une partie  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  est un *sous-espace vectoriel* de  $\mathbb{R}^n$  si

- $F \subset \mathbb{R}^n$ ,
- $\vec{0}_n \in F$ ,
- pour tous  $u, v \in F$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha u + v \in F$ .

##### Exemple 4 - Exemples classiques de sous-espaces vectoriels

- $\mathbb{R}^n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
- $\{\vec{0}_n\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
- Géométriquement,
  - ★ les droites sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ .
  - ★ les droites sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
  - ★ les plans sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

##### Exemple 5 - Exemples de sous-espaces vectoriels

- Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0, 2x + 3y + 5z = 0\}$ . Alors,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . En effet,
  - ★  $F \subset \mathbb{R}^3$ ;
  - ★  $0 + 0 + 0 = 0$  et  $2 \times 0 + 3 \times 0 + 5 \times 0 = 0$ . Ainsi,  $\vec{0}_3 \in F$ ;
  - ★ Soient  $u = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $v = (x_2, y_2, z_2)$  deux vecteurs de  $F$  et  $\alpha, \beta$  deux réels. Alors,

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ 2x_1 + 3y_1 + 5z_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_2 + y_2 + z_2 = 0 \\ 2x_2 + 3y_2 + 5z_2 = 0 \end{cases}.$$

De plus,  $\alpha u + \beta v = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$ .

Ainsi,

$$\begin{cases} (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) \\ = \alpha(x_1 + y_1 + z_1) + \beta(x_2 + y_2 + z_2) = 0 \\ 2(\alpha x_1 + \beta x_2) + 3(\alpha y_1 + \beta y_2) + 5(\alpha z_1 + \beta z_2) \\ = \alpha(2x_1 + 3y_1 + 5z_1) + \beta(2x_2 + 3y_2 + 5z_2) = 0 \end{cases}$$

Donc  $\alpha u + \beta v$  appartient à  $F$ .

Finalement,  $F$  contient le vecteur nul et est stable par combinaisons linéaires, donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

- Soit  $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 1, 2x + 3y + 5z = 3\}$ . Alors,  $\mathcal{F}$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . En effet,  $0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$ , donc  $\vec{0}_3$  n'appartient pas à  $\mathcal{F}$ .

##### Définition 6 - Combinaison linéaire

Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

- si  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ , le vecteur  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p$  est une *combinaison linéaire* des vecteurs  $(u_1, \dots, u_p)$ .
- L'ensemble des combinaisons linéaires de  $(u_1, \dots, u_p)$  est noté :

$$\text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\} = \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i, (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \right\}.$$

##### Proposition 3

Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Alors,  $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

##### Exemple 6 - Un peu de géométrie

- $D = \text{Vect}\{(1, 2)\} = \{\alpha(1, 2), \alpha \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . L'ensemble  $D$  est une droite de  $\mathbb{R}^2$ .
- $D = \text{Vect}\{(1, 0)\} = \{\alpha(1, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace

vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . L'ensemble  $D$  est une droite de  $\mathbb{R}^2$ .

- $D = \text{Vect} \{(1, 0, 1)\} = \{\alpha(1, 0, 1), \alpha \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . L'ensemble  $D$  est une droite de  $\mathbb{R}^3$ .
- $P = \text{Vect} \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} = \{(\alpha, 0, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . L'ensemble  $P$  est un plan de  $\mathbb{R}^3$ .

### Exemple 7 - Équation cartésienne $\rightarrow$ Description paramétrique

Cette transformation repose sur la résolution d'un système linéaire via l'algorithme du pivot de Gauss.

Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0 \text{ et } 2x + 3y + 5z = 0\}$ .

Écrivons  $F$  comme un ensemble de combinaisons linéaires.

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ainsi,

$$F = \{\lambda \cdot (2, -3, 1), \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect} \{(2, -3, 1)\}.$$

### Exemple 8 - Description paramétrique $\rightarrow$ Équation cartésienne

Cette transformation repose sur l'existence d'une solution d'un système linéaire via l'algorithme du pivot de Gauss.

Soit  $F = \text{Vect} \{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 2, 4)\}$ .

Déterminons une équation cartésienne de  $F$ .

$(x, y, z) \in F$  si et seulement s'il existe  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 2, 3) + \mu(1, 0, 1) + \nu(2, 2, 4)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = x \\ 2\lambda + 2\nu = y \\ 3\lambda + \mu + 4\nu = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = x \\ -2\mu - 2\nu = y - 2x \\ -2\mu - 2\nu = z - 3x \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = x \\ -2\mu - 2\nu = y - 2x \\ 0 = x + y - z \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

Ainsi, une description de  $F$  via une équation cartésienne est

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - z = 0\}.$$

### Proposition 4

Soient  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(\alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$  et  $\alpha_1 \neq 0$ . Alors,

- $\text{Vect} \{u_1, \dots, u_p\} = \text{Vect} \left\{ \alpha_1 u_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i u_i, u_2, \dots, u_p \right\}$ .
- Si  $u_p \in \text{Vect} \{u_1, \dots, u_{p-1}\}$ , alors

$$\text{Vect} \{u_1, \dots, u_p\} = \text{Vect} \{u_1, \dots, u_{p-1}\}.$$

## III.2 - Bases

Dans cette partie,  $(u_1, \dots, u_p)$  désigne une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

### Définition 7 - Famille libre

La famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est *libre* si, pour tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i = \vec{0}_n \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_i = 0.$$

La famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est une famille de vecteurs *linéairement indépendants*.

**Exemple 9**

- La famille  $((1, 2), (3, 4))$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^2$ .  
En effet, soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha(1, 2) + \beta(3, 4) = (0, 0)$ .  
Alors,

$$(\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0)$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ -2\beta = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

- La famille  $((1, 2, -1), (2, 1, 1))$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .  
En effet, soit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tels que

$$\alpha(1, 2, -1) + \beta(2, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Alors,

$$(\alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta, -\alpha + \beta) = (0, 0, 0).$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -3\beta = 0 \\ 3\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

**Définition 8 - Vecteurs colinéaires**

Soient  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Les vecteurs  $u$  et  $v$  sont colinéaires s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$u = \lambda v \text{ ou } v = \lambda u.$$

**Proposition 5 - Colinéarité et liberté**

Soient  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . La famille  $(u, v)$  est liée si et seulement si les vecteurs  $u$  et  $v$  sont colinéaires.

**Définition 9 - Famille génératrice**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . La famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est une famille *génératrice* de  $F$  si, pour tout  $x \in F$ , il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$  tels que  $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$ .

**Exemple 10 - Famille génératrice**

La famille  $((1, 2), (3, 4))$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .  
Soit  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Recherchons  $\alpha, \beta$  réels tels que

$$u = \alpha(1, 2) + \beta(3, 4).$$

Alors,

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha + 4\beta = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ -2\beta = y - 2x \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2x + \frac{3}{2}y \\ \beta = x - \frac{1}{2}y \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(x, y) = \left(-2x + \frac{3}{2}y\right)(1, 2) + \left(x - \frac{1}{2}y\right)(3, 4).$$

**Définition 10 - Base**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . La famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est une *base* de  $F$  si elle est génératrice et libre.

**Exemple 11 - Bases canoniques**

- $((1, 0), (0, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
- $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition 6 - Dimension**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $(u_1, \dots, u_p)$  et  $(v_1, \dots, v_q)$  sont des bases de  $F$ , alors  $p = q$ . L'entier  $p$  est la *dimension* de l'espace vectoriel  $F$ , notée  $\dim F$ . Par convention,  $\dim \{\vec{0}_n\} = 0$ .

**Exemple 12 - Dimensions**

- Comme  $((1, 0), (0, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ .
- Comme  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ .
- Plus généralement,  $\dim \mathbb{R}^n = n$ .
- Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + 2y + z = 0\}$ .  
Alors,  $(x, y, z) \in F$  si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ x = -2\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} ; \left\{ \begin{array}{l} x = -2\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Vect} \{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

Ainsi,  $((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$  est une base de  $F$  et  $\dim F = 2$ .

**Définition 11 - Un peu de géométrie**

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors,  $F$  est de dimension finie.

- Si  $\dim F = 1$ , alors  $F$  est une *droite*.
- Si  $\dim F = 2$ , alors  $F$  est un *plan*.
- Si  $\dim F = n - 1$ , alors  $F$  est un *hyperplan*.

De plus,  $F = E$  si et seulement si  $\dim F = \dim E$ .

**Proposition 7 - Caractérisation des bases**

Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $q$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $F$ . Il y a équivalence entre :

- (i).  $(u_1, \dots, u_p)$  est une base de  $F$ .
- (ii).  $(u_1, \dots, u_p)$  est une famille de vecteurs linéairement indépendants et  $p = q$ .
- (iii).  $(u_1, \dots, u_p)$  est une famille génératrice de  $F$  et  $p = q$ .

**Exemple 13**

La liberté d'une famille est souvent plus facile à montrer que le caractère générateur. Si la dimension de l'espace vectoriel est connue, on montrera généralement qu'une famille est une base en étudiant sa liberté et son nombre d'éléments.

Montrons que la famille  $\mathcal{B} = ((1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, -1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- La famille  $\mathcal{B}$  est une famille de 3 vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , espace vectoriel de dimension 3.
- Montrons que  $\mathcal{B}$  est une famille libre. Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tels que

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(0, 1, -1) = (0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta + \gamma = 0 \\ -2\beta - \gamma = 0 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta + \gamma = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

soit  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

Finalement,  $\mathcal{B}$  est une famille libre constituée 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, donc  $\mathcal{B}$  est une base.

### Théorème 3 - Théorème de la base incomplète

Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille libre de  $F$ . Il existe une famille  $(v_{p+1}, \dots, v_q)$  telle que  $(u_1, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots, v_q)$  soit une base de  $F$ .

### Définition 12 - Coordonnées

Soient  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(u_1, \dots, u_p)$  une base de  $F$  et  $u \in F$ . Il existe un unique  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$  tel que  $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$ .

### Exemple 14 - Calcul de coordonnées

Déterminons les coordonnées de  $(3, 1, 2)$  dans la base  $((1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, -1))$ .  
On cherche  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$(3, 2, 1) = \lambda(1, 2, 3) + \mu(1, 0, 1) + \nu(0, 1, -1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3 \\ 2\lambda + \nu &= 2 \\ 3\lambda + \mu - \nu &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3 \\ -2\mu + \nu &= -4 \\ -2\mu - \nu &= -8 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3 \\ -2\mu + \nu &= -4 \\ -4\mu &= -12 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= 0 \\ \nu &= 2 \\ \mu &= 3 \end{cases}$$

Ainsi,

$$(3, 2, 1) = 0 \cdot (1, 2, 3) + 3 \cdot (1, 0, 1) + 2 \cdot (0, 1, -1).$$

## IV - Matrices

L'ensemble des matrices est un espace vectoriel. Aborder les matrices sous cet angle est hors programme.

### IV.1 - Définitions

#### Définition 13 - Matrices

Soient  $n, p$  deux entiers naturels non nuls.

- Une *matrice* de *taille*  $(n, p)$  est un tableau de nombres réels constitué de  $n$  lignes et  $p$  colonnes.
- Le *coefficient* d'indice  $(i, j)$  d'une matrice est le coefficient situé à la  $i^e$  ligne et  $j^e$  colonne.
- L'ensemble des matrices de réels à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est noté  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On note généralement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

#### Exemple 15 - Matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

#### Définition 14 - Matrices lignes / colonnes

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

- Si  $n = 1$ , alors  $A$  est une *matrice ligne* (ou *vecteur ligne*).
- Si  $p = 1$ , alors  $A$  est une *matrice colonne* (ou *vecteur colonne*).



**Définition 15 - Égalité entre matrices**

Deux matrices  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  sont *égales* si elles ont même taille et si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $a_{i,j} = b_{i,j}$ .

**IV.2 - Opérations****Définition 16 - Somme, Multiplication par un réel**

Soient  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ,  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- L'*addition* de matrices de mêmes tailles est obtenue en additionnant les éléments de mêmes indices. Ainsi, la matrice  $A + B$  est la matrice de taille  $(n, p)$  et de coefficients  $(c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  définis par  $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ .
- La *multiplication* d'une matrice par un réel est obtenue en multipliant chacun des coefficients de la matrice par ce réel. Ainsi, la matrice  $\alpha A$  est la matrice de taille  $(n, p)$  et de coefficients  $(d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  définis par  $d_{i,j} = \alpha a_{i,j}$ .

**Exemple 16 - Opérations sur les matrices**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Définition 17 - Matrice nulle**

La matrice de taille  $(n, p)$  dont tous les coefficients sont nuls est la *matrice nulle*. Elle est notée  $0_{n,p}$ .

**Proposition 8 - Propriétés de l'addition et de la multiplication par un réel**

Soient  $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- *Commutativité*.  $A + B = B + A$ .
- *Associativité*.  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ .
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ .
- $A + (-1)A = 0_{n,p}$ .

L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.

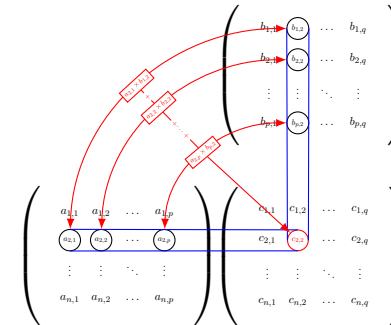
**Définition 18 - Produit de matrices de tailles compatibles**

Soient  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ . La matrice  $C = A \times B$  est la matrice de taille  $(n, q)$  dont le coefficient d'indice  $(i, j)$  est donné par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

**Exemple 17 - Représentation du produit matriciel**

Pour effectuer un produit matriciel on représente souvent les matrices sur deux étages :



**Exemple 18 - Calculs de produits**

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y + z \\ 3x - 2y + z \end{pmatrix}.$

**Exemple 19 - Systèmes linéaires**

On considère trois suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $z_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$

D'une part,  $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

D'autre part,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + y_n - z_n \\ -2x_n + 2z_n \\ z_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

On montre ensuite par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,  $U_n = A^n U_0.$

**Proposition 9 - Propriétés du produit matriciel**

Soient  $A, B, C$  trois matrices dont les tailles sont compatibles et  $\alpha \in \mathbb{R}.$

- *Associativité.*  $(AB)C = A(BC).$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$
- *Distributivité.*  
 $(A + B)C = AC + BC$  et  $A(B + C) = AB + AC.$

**Définition 19 - Transposée**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$  La *transposée* de la matrice  $M$ , notée  $M^T$ , est la matrice  $M^T = (\tilde{m}_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  définie par :

$$\tilde{m}_{i,j} = m_{j,i}.$$

**Exemple 20 - Une transposition**

Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , alors  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

**Proposition 10 - Transposée et opérations**

Soient  $A, B, C$  trois matrices de tailles compatibles et  $\alpha \in \mathbb{R}.$  Alors,

- *Linéarité.*  $(\alpha A + B)^T = \alpha A^T + B^T.$
- $(AB)^T = B^T A^T.$

## IV.3 - Matrices carrées

### Définition 20 - Matrices carrées

Une *matrice carrée*  $M$  d'ordre  $p$  est une matrice dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes est égal à  $p$ . L'ensemble des matrices carrées d'ordre  $p$  est noté  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

### Définition 21 - Triangulaires, Diagonales, Identité, Symétriques

- Une matrice est *triangulaire supérieure* si les coefficients en dessous de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *triangulaire inférieure* si les coefficients au-dessus de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *diagonale* si les coefficients en dehors de sa diagonale sont nuls.
- La matrice *identité* est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. La matrice identité d'ordre  $p$  est notée  $I_p$ .
- La matrice *nulle* est la matrice dont tous les éléments valent 0. La matrice nulle d'ordre  $p$  est notée  $0_p$ .
- La matrice  $M$  est *symétrique* si  $M^T = M$ .

## IV.4 - Opérations sur les matrices carrées

### Proposition 11

Si  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $p$ , alors

- $AI_p = I_p A = A$ .
- $A0_p = 0_p A = 0_p$ .

### Définition 22 - Puissance d'une matrice

Soient  $A$  une matrice carrée d'ordre  $p$  et  $n$  un entier naturel. Alors,

- $A^0 = I_p$ ,
- $A^{n+1} = A \times A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n+1 \text{ fois}}$ .

### Remarque 1

Nous avons vu précédemment que le calcul de puissances peut être utile pour étudier les suites récurrentes linéaires.

### Proposition 12 - Puissance d'une matrice diagonale

Soient  $D$  une matrice diagonale d'ordre  $p$  et  $n$  un entier naturel. La matrice  $D^n$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de  $D$  élevés à la puissance  $n$ .

### Exemple 21 - Matrices diagonales

- $(I_p)^n = I_p$ .
- $(0_p)^n = 0_p$ .
- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ .

### Définition 23 - Matrices qui commutent

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $p$ . Les matrices  $A$  et  $B$  *commutent* si  $AB = BA$ .

### Exemple 22 - Commutativité



- $I_2$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  commutent.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$  ne commutent pas.

#### Théorème 4 - Formule du binôme de Newton

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $p$ . Si  $A$  et  $B$  commutent, i.e.  $AB = BA$ , alors, pour tout  $n$  entier naturel,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

#### Exemple 23 - Application de la formule du binôme

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- D'une part,  $A = I_2 + N$ .
- D'autre part,  $I_2 N = N I_2 = N$ . Ainsi,  $I_2$  et  $N$  commutent.
- On remarque ensuite que  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_2^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k, \text{ car } I_2^{n-k} = I_2 \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + 0_2 + \cdots + 0_2 \\ &= I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## IV.5 - Matrices inversibles

### Définition 24 - Matrice inversible

Une matrice  $A$  carrée d'ordre  $p$  est *inversible* s'il existe une matrice  $B$  telle que  $AB = I_p$ . La matrice  $B$  est l'*inverse* de  $A$  et notée  $A^{-1}$ .

### Exemple 24 - Matrices inversibles et non inversibles

- On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Comme  $AB = I_2$ , alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Comme  $I_p \times I_p = I_p$ , alors  $I_p$  est inversible et son inverse est  $I_p$ .
- Comme  $0_p \times A = 0_p \neq I_p$  pour toute matrice carrée  $A$ , alors la matrice nulle n'est pas inversible.
- Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Un simple calcul montre que  $M^2 - 2M + I_3 = 0_3$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} M^2 - 2M &= -I_3 \\ -M(M - 2I_3) &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi,  $M$  est inversible et  $M^{-1} = 2I_3 - M$ .

### Proposition 13 - Inversibilité et produit

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $p$ .

- Si  $AB = I_p$ , alors  $BA = I_p$ .
- Si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont inversibles, alors  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

## IV.6 - Critères d'inversibilité

### Proposition 14 - Inversibilité des matrices diagonales

Soit  $D$  une matrice diagonale. La matrice  $D$  est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Alors,  $D^{-1}$  est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de  $D$ .

### Exemple 25 - Matrices diagonales

- Soit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . La matrice  $D$  est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3. Comme ils sont tous non nuls, la matrice  $D$  est inversible et  $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .
- Soit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . La matrice  $D$  est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1 et 0. La matrice  $D$  n'est pas inversible.

### Proposition 15 - Inversibilité des matrices triangulaires

Soit  $T$  une matrice triangulaire. La matrice  $T$  est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

### Proposition 16 - Inversibilité des matrices d'ordre 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice d'ordre 2. La matrice  $A$  est inversible si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ . Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

### Exemple 26 - Matrices d'ordre 2, ⚙️

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Comme  $2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$  est non nul, alors  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

### Proposition 17

Soient  $A$  une matrice inversible d'ordre  $p$  et  $B, C$  deux matrices carrées d'ordre  $p$ .

- Si  $AB = AC$ , alors  $B = C$ .
- Si  $BA = CA$ , alors  $B = C$ .

### Exemple 27 - Preuve de non inversibilité ⚙️

- Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .  
On remarque que  $AB = AC$ . Supposons par l'absurde que  $A$  soit inversible. Alors,  $B = C$ . Cependant,  $B \neq C$ . Ainsi,  $A$  n'est pas inversible.
- Soit  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On remarque que  $N \times N = 0_2$ .  
Supposons par l'absurde que  $N$  soit inversible. Comme  $N \times N = N \times 0_2$ , alors  $N = 0_2$ . On obtient ainsi une contradiction et  $N$  n'est pas inversible.

## IV.7 - Inversion par résolution de systèmes

### Théorème 5 - Inverse & Système linéaire

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $p$ . La matrice  $A$  est inversible si et seulement s'il existe une matrice  $B$  telle que pour toutes  $X, Y$  matrices colonnes, le système  $X = AY$  s'écrit  $Y = BX$ . Alors,  $A^{-1} = B$ .

**Exemple 28 - Inverse par résolution de  $AX = Y$  ⚙️**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On pose  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . En utilisant la méthode du pivot de Gauss,

$$AX = Y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ -x + y + z = b \\ x + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ 2y + 2z = a + b & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ y = a - c & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + y = a \\ 2z + 2y = a + b \\ y = a - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ z = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c \\ y = a - c \end{cases}$$

En posant  $B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ , alors  $X = BY$ . D'où,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 29 - Inverse par pivot sur  $I_n$  ⚙️**

On place les matrices  $A$  et  $I_n$  côte à côte. On transforme la matrice  $A$  en la matrice  $I_n$  à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. On effectue les mêmes opérations sur  $I_n$ .

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

On obtient ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette méthode, on peut effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes. Cependant, on ne peut pas mixer, dans un même calcul d'inverse, opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes.