I - Calcul matriciel

I - Matrices

I.1 - Définition

Définition 1 - Matrices

Soit n, p deux entiers naturels non nuls.

- Une *matrice* de *taille* (n,p) est un tableau de nombres réels constitué de n lignes et de p colonnes.
- Le *coefficient* d'indice (i,j) d'une matrice est le coefficient situé à la i^{e} ligne et j^{e} colonne.
- L'ensemble des matrices de réels à n lignes et p colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note généralement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Exemple 1 - Matrices

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Définition 2 - Matrices lignes / colonnes

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Si $n = 1$, alors A est une *matrice ligne*.
- Si $p = 1$, alors A est une *matrice colonne*.

Exemple 2

- Les matrices suivantes sont des matrices lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- Les matrices suivantes sont des matrices colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Définition 3 - Égalité entre matrices

Deux matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ sont *égales* si elles ont même taille et si, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $j \in \{1,\ldots,p\}$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.

I.2 - Opérations

Définition 4 - Somme, Multiplcation par un réel

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'*addition* de matrices de mêmes tailles est obtenue en additionnant les éléments de mêmes indices. Ainsi, la matrice $A+B$ est la matrice de taille (n,p) et de coefficients $(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ définis par

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

- La *multiplication* d'une matrice par un réel est obtenue en multipliant chacun des coefficients de la matrice par ce réel. Ainsi, la matrice αA est la matrice de taille (n,p) et de coefficients $(d_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ définis par

$$d_{i,j} = \alpha a_{i,j}.$$

Exemple 3

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Alors,

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \ 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 3 & -1 \end{pmatrix}, \ 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Définition 5 - Matrice nulle

La matrice de taille (n,p) dont tous les coefficients sont nuls est la *matrice* nulle. Elle est notée $0_{n,p}$.

Proposition 1 - Propiétés de l'addition et de la multiplication par un réel

Soit A, B, $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$.

- *Commutativité*. $A+B = B+A$.
- *Associativité*. $A+(B+C) = (A+B)+C$.
- $\alpha(A+B) = \alpha A + \beta B$.
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $A + (-1)A = 0_{n,p}$.

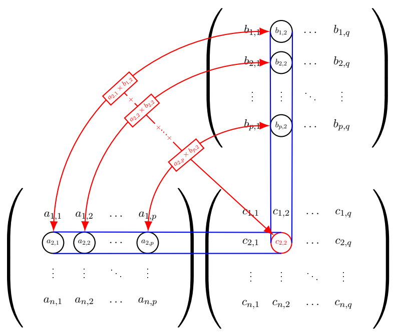
Définition 6 - Produit de matrices de tailles compatibles

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La matrice $C = AB$ est la matrice de taille (n,q) dont le coefficient d'indice (i,j) est donné par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Exemple 4 - Représentation du produit matriciel

Pour effectuer un produit matriciel on représente souvent les matrices sur deux étages :



Exemple 5 - Calculs de produits

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5y+z \\ 3x-2y+z \end{pmatrix}$.

Exercice 1.

1. On considère trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ et

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= z_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la valeur de U_0.

b) Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

2. On considère les matrices $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Comparer ΔN et $N\Delta$.

b) Calculer N^2 puis N^3.

Proposition 2 - Propriétés du produit matriciel

Soit A, B, C trois matrices dont les tailles sont compatibles et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *Associativité*. $(AB)C = A(BC)$.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- *Distributivité*.
  $(A + B)C = AC + BC$ et $A(B + C) = AB + AC$.

II - Matrices carrées

Définition 7 - Matrices carrées

Une *matrice carrée* M d'ordre p est une matrice dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes est égal à p. L'ensemble des matrices carrées d'ordre p est noté $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

Exemple 6 - Matrices carrées

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition 8 - Triangulaires, Diagonales, Identité

- Une matrice est *triangulaire supérieure* si les coefficients en dessous de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *triangulaire inférieure* si les coefficients au dessus de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *diagonale* si les coefficients en dehors de sa diagonale sont nuls.
- La matrice *identité* est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. La matrice identité d'ordre p est notée I_p.
- La matrice *nulle* est la matrice dont tous les éléments valent 0. La matrice nulle d'ordre p est notée 0_p.

Exemple 7

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale.
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3.

Exercice 2. Soients $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Parmi les matrices précédentes, lesquelles sont ...

1. ... triangulaires supérieures ?
2. ... triangulaires inférieures ?
3. ... diagonales ?

III - Opérations sur les matrices carrées

Proposition 3

Si A et B sont des matrices carrées d'ordre p, alors
- $A+B$ et AB sont bien définies et appartiennent à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- $AI_p = I_pA = A$.
- $A0_p = 0_pA = 0_p$.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer :

1. $A+B$.
2. AB.
3. BA.
4. AI_3 et I_3A.

IV - Calculs de puissances

Exemple 8 - Pourquoi calculer des puissances de matrices ?

On considère les suites définies par $x_0 = y_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= x_n - y_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Alors,

$$\begin{aligned} U_1 &= A \times U_0 \\ U_2 &= A \times U_1 \\ &= \underbrace{A \times A}_{\text{2 facteurs}} \times U_0 \\ U_3 &= A \times U_2 \\ &= A \times A \times U_1 \\ &= \underbrace{A \times A \times A}_{\text{3 facteurs}} U_0 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Définition 9 - Puissance d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre p et n un entier naturel. Alors,
- $A^0 = I_p$.
- $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$.

Exemple 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors,

- $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
- $A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^0, A^1, A^2 et A^3.

IV.1 - Matrices diagonales

Proposition 4 - Puissance d'une matrice diagonale

Soit D une matrice diagonale d'ordre p et n un entier naturel. La matrice D^n est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de D élevés à la puissance n.

Exemple 10 - Puissances & Diagonales

Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.
Cette propriété se prouve par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a bien $D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n, c'est-à-dire $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D^n \times D \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 5.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour tout n entier naturel, exprimer A^n.

2. Pour tout n entier naturel, exprimer I_3^n et 0_3^n.

IV.2 - Formule du binôme de Newton

Exercice 6.

1. Soit a et b deux réels.

a) À l'aide de la formule du triangle de Pascal, déterminer les valeurs de $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ et $\binom{4}{4}$.

b) Développer la formule $(a+b)^4$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 10 - Matrices qui commutent

Soit A et B deux matrices d'ordre p. Les matrices A et B *commutent* si $AB = BA$.

Exemple 11 - Commutativité

- I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ commutent.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ ne commutent pas.

Théorème 1 - Formule du binôme de Newton

Soient A et B deux matrices d'ordre p qui commutent. Alors, pour tout n entier naturel,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Exemple 12 - Application de la formule du binôme

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- D'une part, $A = I_2 + N$.
- D'autre part, $I_2 N = N I_2 = N$. Ainsi, I_2 et N commutent.
- On remarque ensuite que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_2^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k, \quad \text{car } I_2^{n-k} = I_2 \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + 0_2 + \cdots + 0_2 \\ &= I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $2I_3 + N$, N^2 puis N^3.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n en utilisant la formule du binôme de Newton.

V - Du côté de Python

Informatique

Pour utiliser le calcul matriciel, on importe la bibliothèque `numpy` :

`import numpy as np`

On peut ensuite créer des matrices de plusieurs façons différentes :

- Crée la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
  `A = np.array([[1, 2, 3], [4, 3, 2]])`
- Crée la matrice ne contenant que des 0 : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:
  `O = np.zeros((1, 3))`
- Crée la matrice ne contenant que des 1 : $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:
  `U = np.ones((4, 2))`
- Crée la matrice identité d'ordre 5 :
  `I = np.eye(5)`
- Crée la matrice ligne des nombres compris entre $1,1$ (inclus) et $3,2$ (exclu) avec un pas de $0,4$, i.e. $C = \begin{pmatrix} 1,1 & 1,5 & 1,9 & 2,3 & 2,7 & 3,1 \end{pmatrix}$:
  `C = np.arange(1.1, 3.2, 0.4)`
- Crée la matrice ligne commençant à $1,1$, terminant à $3,2$ et contenant 5 nombres, i.e. $D = \begin{pmatrix} 1,1 & 1,625 & 2,15 & 2,675 & 3,2 \end{pmatrix}$:
  `D = np.linspace(1.1, 3.2, 5)`

L'accès à l'élément de la $i+1^{\text{e}}$ ligne et $j+1^{\text{e}}$ colonne ss'effectue via la commande :

`A[i, j]`

Les opérations sur les matrices s'effectuent de la manière suivante :

- Additionner des matrices de même taille :
  `G + H`
- Multiplier des matrices de tailles compatibles :
  `np.dot(G, H)`
- Obtenir le nombre de lignes `n` et le nombre de colonnes `p` d'une matrice `A` :
  `n, p = np.shape(A)`