■ ■ ■

Exercice 1. *Ce problème comporte deux parties, indépendantes entre elles.*
Soit a, b, ε trois réels strictement positifs. On définit la fonction $J : \Omega = (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$:

$$J(x,y) = ax + by + \varepsilon h(x) + \varepsilon h(y)$$

avec h définie de la façon suivante :

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) - x \end{array}$$

Partie I

1. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto ax + \varepsilon h(x)$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Faire un tableau de variations de la fonction f. Préciser les limites de f en 0 et $+\infty$.

3. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Déterminer son minimum global en justifiant son existence et son unicité.

Partie II

5. Montrer que J est strictement convexe sur Ω. Calculer le minimum de J sur Ω.

6. On cherche maintenant à résoudre le problème sous contraintes :

$$\begin{cases} \min\limits_{(x,y)\in\Omega} J(x,y) \\ x + y = 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

On définir le lagrangien $\mathscr{L}(x,y,\lambda)$ du problème (1.1), où λ est le multiplicateur de Lagrange :

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto J(x,y) - \lambda(x+y-1).$$

a) Écrire les équations du premier ordre associées au lagrangien.

b) On note $(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$ l'éventuelle solution du problème (1.1). Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_\varepsilon^* &= \mathrm{e}^{(\lambda - a)/\varepsilon} \\ y_\varepsilon^* &= \mathrm{e}^{(\lambda - b)/\varepsilon} \end{cases}$$

c) Expliciter λ. En déduire $(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$ en fonction de a, b, ε.

d) Montrer que $(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$ est bien solution du problème (1.1).

e) **Bonus.** Calculer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(x_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*)$. On pourra distinguer les cas $a \geqslant b$ ou $b \geqslant a$.