II - Récurrences

À Savoir

Le raisonnement par récurrence se déroule en 3 étapes principales.

- On énonce clairement la propriété à démontrer. Cette propriété doit dépendre d'un entier naturel noté n.
- **L'initialisation.** On montre la propriété précédente lorsque $n = 0$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel) ou lorsque $n = 1$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul).
  Généralement, la propriété est une égalité. On montre alors que les deux membres de l'égalité sont égaux à une même valeur.
- **L'hérédité.** On fixe un entier naturel n. On suppose la propriété vraie à l'ordre n (c'est l'hypothèse de récurrence). On montre que la propriété est vraie lorsque n est remplacé par $(n+1)$ (ne pas oublier le parenthésage).
  Généralement, on part d'un côté de l'égalité et on arrive à l'autre côté. Une des étapes du calcul utilise l'hypothèse de récurrence.
- **Conclusion.** On conclut clairement en citant l'initialisation, l'hérédité et le principe de récurrence.

I - Les classiques : Sommes d'entiers

Exercice 1. (Somme des n premiers entiers non nuls) Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2. (Somme des n premiers carrés) Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 3. (Somme des n premiers cubes) Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

II - Formules de sommes

Exercice 4. (Somme des termes d'une suite géométrique) Soit $q \neq 1$. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exercice 5. (Formule du binôme de Newton,) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

III - Inégalités

Exercice 6. (Inégalité de Bernoulli) Soit $x > 0$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Exercice 7. (Suite & Encadrement) Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n \leqslant 3$.

Exercice 8. (Suite & Encadrement) Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n \leqslant 5$.

Exercice 9. (Suite & Encadrement) Soit (u_n) définie par $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $4 \leqslant u_n \leqslant 10$.

IV - Suites définies par récurrence

Exercice 10. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 3$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = 5 + 3n$.

Exercice 11. (Suite géométrique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 5 \times u_n$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = 3 \times 5^n$.

Exercice 12. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + n + 1$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 13. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $u_n = \sqrt{n+9}$.

Exercice 14. (Suite & Terme général) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.