T.D. VII - Variables aléatoires discrètes infinies

I - Modélisation & Lois géométriques

Exercice 1. (⚙) Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires indistinguables au toucher. On effectue avec remise des tirages dans l'urne jusqu'à obtenir une boule rouge. On note T le numéro du premier tirage où une boule rouge apparaît.
Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 2. (⚙) Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires indistinguables au toucher. On effectue avec remise des tirages dans l'urne jusqu'à obtenir une boule noire. On note T le numéro du premier tirage où une boule noire apparaît.
Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 3. (⚙) Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note S la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

1. Quelle est la loi de S ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note T la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 4. (⚙) On dispose d'une pièce qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$. On lance la pièce successivement 4 fois et on note X le nombre de piles obtenus.

1. Quelle est la loi de X ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir au moins 2 piles lors d'une manche. On note T la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 5. (⚙) On dispose d'une urne numérotée 1 et contenant 2 boules rouges et 3 boules noires et d'une urne numérotée 2 contenant 1 boule rouge et 4 boules noires. On dispose également d'une pièce équilibrée.
On appelle *partie* l'expérience suivante : *on lance la pièce de monnaie ; si elle renvoie Pile, on tire une boule de l'urne numértoée* 1 *; sinon, on tire une boule de l'urne numérotée* 2.

1. On note R l'événement « la boule tirée est rouge ». Déterminer $\mathbf{P}(R)$.

Un joueur répète des parties en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne une boule rouge. On note T le rang de la partie où il s'arrête.

2. Déterminer la loi de T. Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 6. (⚙) On dispose de 3 urnes numérotées de 1 à 3. Pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, l'urne numéro k contient k boules rouges et $4 - k$ boules noires.
L'expérience consiste à choisir une urne « au hasard » puis à y tirer une boule.

1. On note N l'événement « la boule tirée est noire ». Déterminer $\mathbf{P}(N)$.

Un joueur répète des expériences en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne une boule noire. On note T le rang de la partie où il s'arrête.

2. Déterminer la loi de T. Préciser l'espérance et la variance de T.

II - Autour de la loi géométrique

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire telle que

$$\forall\, n \geqslant 1,\, \mathbf{P}\left([X = n]\right) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

1. Reconnaître la loi de X. En déduire son espérance et sa variance.

2. Soit $n \geqslant 1$. Déterminer $\mathbf{P}\left([X \leqslant n]\right)$.

Exercice 8. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\, \mathbf{P}\left([T = k]\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k}.$$

On pose $Y = T + 1$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$, puis, pour tout $k \in Y(\Omega)$, exprimer $\mathbf{P}\left([Y = k]\right)$ en fonction de $\mathbf{P}\left([T = k - 1]\right)$.

2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y. Préciser son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de T.

Exercice 9. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\, \mathbf{P}\left([T = k]\right) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k}.$$

On pose $Y = T + 1$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$, puis, pour tout $k \in Y(\Omega)$, exprimer $\mathbf{P}\left([Y = k]\right)$ en fonction de $\mathbf{P}\left([T = k - 1]\right)$.

2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y. Préciser son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de T.

Exercice 10. (Loi sans mémoire,) On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall\, n \geqslant 1,\, \mathbf{P}_{[X > n-1]}\left([X = n]\right) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathbf{P}\left([X > n]\right)$. Soit $n \geqslant 1$.

1. Justifier que

$$[X > n - 1] = [X = n] \cup [X > n].$$

2. En déduire que $u_{n-1} - u_n = \mathbf{P}\left([X = n]\right)$.

3. Montrer que $\mathbf{P}_{[X>n-1]}\left([X > n]\right) = \frac{u_n}{u_{n-1}}$.

4. Montrer par ailleurs que

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}\left([X > n]\right) = 1 - \mathbf{P}_{[X>n-1]}\left([X = n]\right).$$

5. En déduire que $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$.

6. Exprimer la valeur de u_n en fonction de n puis reconnaître la loi de X.

7. Exprimer $\mathbf{P}\left([X \leqslant n]\right)$ en fonction de n.

Exercice 11. () Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$. On note Z la variable aléatoire égale au maximum de X_1 et de X_2.

1. Montrer que $[Z \leqslant n] = [X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n]$.

2. En déduire la valeur de $\mathbf{P}\left([Z \leqslant n]\right)$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, en remarquant que $\mathbf{P}\left([Z = n]\right) = \mathbf{P}\left([Z \leqslant n]\right) - \mathbf{P}\left([Z \leqslant n - 1]\right)$, déterminer $\mathbf{P}\left([Z = n]\right)$.

4. Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left([Z = n]\right) = 1$.

Exercice 12. Soit Y une variable aléatoire telle que,

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}\left([Y = k]\right) = \mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-(k+1)}.$$

On pose $Z = Y + 1$.

1. Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left([Y = k]\right) = 1$.

2. Reconnaître la loi de Z puis en déduire son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de Y.

4. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 13. Soit X et Y deux variables éaléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

1. En utilisant le système complet d'événements $\left([Y = k]\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$, montrer que

$$\mathbf{P}\left([X = Y]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left([X = k]\right) \times \mathbf{P}\left([Y = k]\right).$$

2. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2}$.

3. En déduire $\mathbf{P}\left([X = Y]\right)$.

III - Autour de la loi de Poisson

Exercice 14. Un serveur téléphonique ouvre sa ligne chaque minute. Chaque minute, la probabilité qu'il prenne un client est constante et égale à $\frac{1}{12}$. On note X le nombre d'appels auxquels le serveur a répondu en 1 heure.

1. Déterminer la loi de X, son espérance $\mathbf{E}[X]$ et sa variance $\mathbf{V}(X)$.

On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X. On considère la table de la loi de Poisson de paramètre 5 suivante :

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}([Y = k])$	0,006	0,034	0,084	0,140	0,175	0,175	0,146

2. Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.

3. Déterminer des valeurs approchées de $\mathbf{P}\left([X \leqslant 3]\right)$ puis $\mathbf{P}\left([X \geqslant 4]\right)$.

Exercice 15. Une entreprise produit 100 ampoules par seconde. On suppose que chaque ampoule a une probabilité de 5% d'être défectueuse. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défecteuses par seconde.

1. Déterminer la loi de X puis préciser son espérance et sa variance.

On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X.

2. Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.

3. À l'aide de la table de valeurs ci-dessous, calculer une valeur approchée de $\mathbf{P}\left([X \geqslant 10]\right)$.

Fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre λ.

Par exemple, si U suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$, alors $\mathbf{P}\left([U \leqslant 4]\right) = 0{,}815$.

$k \backslash \lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,135	0,05	0,018	0,007	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,736	0,406	0,199	0,092	0,040	0,017	0,007	0,003	0,001	0,000
2	0,920	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,030	0,014	0,006	0,003
3	0,981	0,857	0,647	0,433	0,265	0,151	0,082	0,042	0,021	0,010
4	0,996	0,947	0,815	0,629	0,440	0,285	0,173	0,100	0,055	0,030
5	0,999	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,301	0,191	0,116	0,067
6	1	0,995	0,966	0,889	0,762	0,606	0,450	0,313	0,207	0,130
7	1	0,999	0,988	0,949	0,867	0,744	0,599	0,453	0,324	0,220
8	1	1	0,996	0,979	0,932	0,847	0,729	0,593	0,456	0,333
9	1	1	0,999	0,992	0,968	0,916	0,930	0,717	0,587	0,458
10	1	1	1	0,997	0,986	0,957	0,901	0,816	0,706	0,583

IV - Autres lois

Exercice 16. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{P}([X=0]) & = \frac{1}{2}, \\ \mathbf{P}([X=j]) & = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j, \forall\, j \geqslant 1. \end{cases}$$

On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
Déterminer l'espérance de X.

Exercice 17. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}([X=k]) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2. Vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X=k]) = 1$.

3. En déduire la valeur de $\mathbf{P}([X=0])$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([X>n]) = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire telle que

$$\forall\, n \geqslant 2, \mathbf{P}([X=n]) = \frac{4(n-1)}{3^n}.$$

On admet que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} k^2x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

1. Vérifier que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4(n-1)}{3^n} = 1$.

2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 19. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ telle que

$$\forall\, n \geqslant 2, \mathbf{P}([Y=n]) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

On admet que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

1. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}([Y=n])$.

2. Calculer $\mathbf{E}[Y]$.