II - Tirages

Combinaisons, arrangements, factorielles, puissances,... comment choisir ? Nous allons présenter ces différentes méthodes de dénombrement dans le cadre d'un tirage dans une urne.
Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire p boules dans cette urne. La manière de dénombrer le nombre de tirages possibles dépend de la manière dont les tirages sont effectués.

I - Successivement, Avec remise

Proposition 1 - Nombre d'applications

Le nombre d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est égal à n^p.

Exemple 1 - Urne

On suppose que les p tirages sont effectués successivement et avec remise dans l'urne, après chaque tirage, de la boule tirée.

On distingue ce qui se passe à chacun des tirages :
- au 1^{er} tirage, l'urne contient n boules. La boule tirée porte un numéro compris entre 1 et n : n possibilités,
- au 2^{e} tirage, l'urne contient n boules. La boule tirée porte un numéro compris entre 1 et n : n possibilités,
- ...
- au p^{e} tirage, l'urne contient n boules. La boule tirée porte un numéro compris entre 1 et n : n possibilités,

Au final, il y a

$$n \times n \times \cdots \times n = n^p \text{ possibilités.}$$

Ici, un tirage peut être représenté par une application de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ qui donne le numéro de la boule obtenue au i^{e} tirage.

II - Successivement, Sans remise

Proposition 2 - Nombre d'injections

Le nombre d'injections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est égal à

$$\begin{cases} 0 & \text{si } n > p, \\ \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } n \leqslant p. \end{cases}$$

Exemple 2 - Urne

On suppose que les p tirages sont effectués successivement et sans remise dans l'urne, après chaque tirage, de la boule tirée.

Si $p > n$, le nombre de boules à tirer est strictement plus grand que le nombre de boules dans l'urne. Comme les tirages s'effectuent sans remise, il n'est pas possible d'effectuer un tel tirage ! Le nombre de tirages possibles est donc nul.

Si $p \leqslant n$, on distingue ce qui se passe à chacun des tirages :
- au 1^{er} tirage, l'urne contient n boules. La boule tirée porte un numéro compris entre 1 et n : n possibilités,
- au 2^{e} tirage, l'urne contient $n-1$ boules. La boule tirée porte un numéro compris entre 1 et n à l'exception du numéro de la première boule : $n-1$ possibilités,
- au 3^{e} tirage, l'urne contient $n-2$ boules. La boule tirée porte un numéro compris entre 1 et n à l'exception des numéros des deux premières boules : $n-2$ possibilités,
- ...
- au p^{e} tirage, l'urne contient $n-p+1$ boules. La boule tirée porte un numéro compris entre 1 et n à l'exception des numéros des $p-1$ premières boules : $n-p+1$ possibilités,

Au final, il y a

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n \times \cdots \times (n-p+1) \times (n-p) \times \cdots \times 1}{(n-p) \times \cdots \times 1}$$
$$= \frac{n!}{(n-p)!} \text{ possibilités.}$$

Ici, un tirage peut être représenté par une application injective de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ qui donne le numéro de la boule obtenue au i^{e} tirage. L'application est injective car une même boule ne peut pas être tirée plusieurs fois donc son numéro apparaît au plus une fois dans l'ensemble image de l'application.

III - Simultanément

Proposition 3 - Parties

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n, \\ \frac{n!}{(n-p)!p!} & \text{si } p \leqslant n. \end{cases}$$

III.1 - La version simultanée

Exemple 3 - Urne

On suppose que les p tirages sont effectués simultanément (on peut imaginer une pince qui descend dans l'urne et remonte en ayant attrapé exactement p boules).

Un tirage est alors une partie, contenant p boules, des n boules de l'urne. Ainsi, le nombre de tirages possibles est égal à $\binom{n}{p}$.

III.2 - La version séquentielle

Exemple 4 - Urne

On suppose que les p tirages sont effectués simultanément.

On s'intéresse uniquement au cas où $p \leqslant n$, i.e. le nombre de tirages est inférieur au nombre de boules tirées.

Pour effectuer un tirage de p boules simultanément, on peut tirer les boules sucessivement puis oublier l'ordre dans lequel on les a tirées.

En reprenant les parties précédentes, le nombre de tirages successifs et sans remises possibles est égal à :

$$\frac{n!}{(n-p)!}.$$

Un tirage est alors un p-uplet $(n_1, \dots, n_p)$ de numéros deux à deux distincts et ordonnés.

Pour *oublier* l'ordre des boules, il faut compter le nombre de tirages successifs qui correspondent à un même tirage simultané. Par exemple, le tirage simultané $\{1, 2, 3\}$ correspond aux tirages successifs $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.
En général, étant données p boules portant des numéros différents, il y a :

- p manières de choisir la 1^{re},
- $p-1$ manières de choisir la 2^{e},
- ...
- 1 manière de choisir la p^{e},

soit $p!$ manières de les ordonner.

Ainsi, il y a $p!$ tirages successifs qui donnent un même résultat de tirage de boules simultanées. Ainsi, le nombre de tirages simultanés possibles est égal à

$$\frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

Un tirage est alors un ensemble $\{n_1, \dots, n_p\}$.