

# IV - Variables aléatoires discrètes

Dans tout le cours,  $\Omega$  désigne un univers muni d'une tribu  $\mathcal{F}$  et  $\mathbf{P}$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Lorsque  $\Omega$  est un ensemble fini, on choisira  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ .

## I - Variables aléatoires réelles finies

### I.1 - Définition

#### Définition 1 - Variable aléatoire réelle

On suppose que  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  est un ensemble fini. Une *variable aléatoire réelle* est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### Exemple 1 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

Un dé équilibré est lancé successivement 2 fois. On note les résultats obtenus à l'issue de chacun des lancers.

L'univers est  $\Omega = \{(i, j), 1 \leq i, j \leq 6\} = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ .

La somme  $S$  des résultats obtenus à l'issue des 2 lancers est une variable aléatoire :

$$\begin{aligned} S : \quad \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (d_1, d_2) &\mapsto d_1 + d_2 \end{aligned}$$

#### Définition 2 - Notations

Si  $x \leq y$  sont des réels, on notera

$$\begin{aligned} [X = x] &= \{\omega \in \Omega ; X(\omega) = x\} \\ [X \leq x] &= \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \leq x\} \\ [X \geq x] &= \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \geq x\} \\ [x \leq X \leq y] &= \{\omega \in \Omega ; x \leq X(\omega) \leq y\} \end{aligned}$$

#### Exemple 2 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.

$$\begin{aligned} [S = 3] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega ; d_1 + d_2 = 3\} \\ &= \{(1, 2), (2, 1)\} . \\ [S \leq 4] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega ; d_1 + d_2 \leq 4\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\} . \end{aligned}$$

#### Définition 3 - Système complet

Soit  $\Omega$  un univers fini et  $X$  une variable aléatoire. Notons  $x_1, \dots, x_p$  les valeurs prises par  $X$ . Alors,  $\{[X = x_i], i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$  est un système complet d'événements. C'est le *système complet* associé à la variable aléatoire  $X$ .

#### Exemple 3 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent. Le système complet associé à  $S$  est :

$$\begin{aligned} \{[S = 2], [S = 3], [S = 4], [S = 5], [S = 6], [S = 7], \\ [S = 8], [S = 9], [S = 10], [S = 11], [S = 12]\} . \end{aligned}$$

## I.2 - Loi de probabilité

### Définition 4 - Loi de probabilité

La *loi* de la variable aléatoire  $X$  est la donnée :

- des valeurs  $x_1, \dots, x_p$  prises par  $X$ ,
- de la famille de probabilités

$$(\mathbf{P}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}([X = x_p])).$$

### Exemple 4 - Somme de 2 dés équilibrés

On reprend les notations de l'exemple précédent. Nous obtenons successivement :

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([S = k])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

### Définition 5 - Fonction de répartition

Soit  $X$  une variable aléatoire. La *fonction de répartition* de  $X$  est la fonction  $F_X$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$ .

### Exemple 5 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.

- Si  $x < 2$ . Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leq x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

- Si  $2 \leq x < 3$ . Alors,

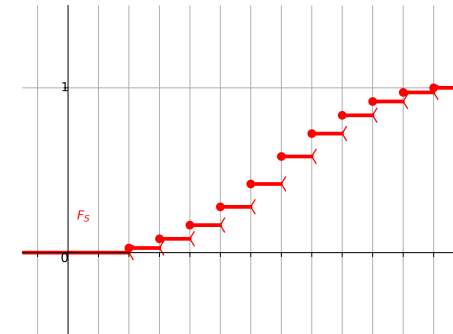
$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leq x]) = \mathbf{P}([S = 2]) = \frac{1}{36}.$$

• ...

- Si  $x \geq 12$ . Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leq x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

On obtient le graphe suivant :



### Proposition 1

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont de même loi si et seulement si elles ont mêmes fonctions de répartition.

## I.3 - Lois usuelles

### Définition 6 - Loi certaine

Soit  $c \in \mathbb{R}$ . La variable aléatoire  $X$  suit une *loi certaine* de valeur  $c$  si  $\mathbf{P}([X = c]) = 1$ .

### Définition 7 - Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

La variable aléatoire  $X$  suit une *loi uniforme* sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , noté  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ , si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}([X = i]) = \frac{1}{n}.$$

**Exemple 6 - Modélisation**

La loi uniforme modélise une expérience où  $n$  résultats distincts sont possibles et équiprobables.

**Définition 8 - Loi de Bernoulli de paramètre  $p$** 

Soit  $p \in [0, 1]$ . La variable aléatoire  $X$  suit une *loi de Bernoulli* de paramètre  $p$ , noté  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , si

$$\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - p \text{ et } \mathbf{P}([X = 1]) = p.$$

**Exemple 7 - Modélisation**

La loi de Bernoulli modélise le nombre de succès d'une seule expérience qui a une probabilité de succès égale à  $p$ .

**Définition 9 - Expérience de Bernoulli**

Une *expérience de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui n'admet que deux issues, appelées généralement succès et échec.

**Définition 10 - Loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$** 

Soit  $p \in [0, 1]$ . La variable aléatoire  $X$  suit une *loi binomiale* de paramètres  $n$  et  $p$ , noté  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , si

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

**Exemple 8 - Modélisation**

La loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la réalisation de  $n$  expériences de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès égale à  $p$ .

**Définition 11 - Loi hypergéométrique de paramètres  $n, N$  et  $b$** 

Soit  $N \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq n, b \leq N$ . La variable aléatoire  $X$  suit une loi hypergéométrique de paramètres  $n, N, b$ , noté  $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, N, b/N)$ , si

$$\forall k \in \llbracket 0, b \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{b}{k} \binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

**Exemple 9 - Modélisation**

La loi hypergéométrique modélise, dans une urne contenant  $N$  boules dont  $b$  sont blanches, le nombre de boules blanches tirées lors d'un tirage simultané de  $n$  boules.

**II - Espérance & Variance****II.1 - Espérance****Définition 12 - Espérance**

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $x_1, \dots, x_p$  les valeurs prises par  $X$ . L'*espérance* de  $X$ , notée  $\mathbf{E}[X]$ , est le réel

$$\mathbf{E}[X] = x_1 \mathbf{P}([X = x_1]) + \dots + x_p \mathbf{P}([X = x_p]).$$

**Proposition 2 - Lois usuelles**

- Si  $X$  suit une loi certaine de paramètre  $c$ , alors  $\mathbf{E}[X] = c$ .
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ , alors  $\mathbf{E}[X] = \frac{n+1}{2}$ .
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , alors  $\mathbf{E}[X] = p$ .
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $\mathbf{E}[X] = np$ .
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, N, b/N)$ , alors  $\mathbf{E}[X] = \frac{nb}{N}$ .

**Proposition 3 - Linéarité**

Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires et  $a, b$  deux réels. Alors,

$$\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y].$$

**Exemple 10 - Somme de deux dés**

Notons  $X_1$  le résultat du premier lancer et  $X_2$  le résultat du second. Alors,  $X_1$  et  $X_2$  suivent une loi uniforme sur  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$  et  $S = X_1 + X_2$ . Ainsi,

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] = \frac{6+1}{2} + \frac{6+1}{2} = 7.$$

**Proposition 4 - Théorème de transfert**

Soit  $X$  une variable aléatoire,  $x_1, \dots, x_p$  les valeurs prises par  $X$  et  $g$  une fonction à valeurs réelles. On note  $Y = g(X)$  la variable aléatoire définie par

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Alors,

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^p g(x_k) \mathbf{P}([X = x_k]).$$

**Exemple 11 - Carré de la somme**

On reprend les notations de l'exemple précédent. Posons  $Y = S^2$ . Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= 2^2 \frac{1}{36} + 3^2 \frac{2}{36} + 4^2 \frac{3}{36} + 5^2 \frac{4}{36} + 6^2 \frac{5}{36} + 7^2 \frac{6}{36} + \dots \\ &\quad \dots + 8^2 \frac{5}{36} + 9^2 \frac{4}{36} + 10^2 \frac{3}{36} + 11^2 \frac{2}{36} + 12^2 \frac{1}{36} \end{aligned}$$

**II.2 - Variance****Définition 13 - Variance, Écart-type**

Soit  $X$  une variable aléatoire. La *variance* de  $X$ , notée  $\mathbf{V}(X)$ , est le réel :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2].$$

L'*écart-type* est  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ .

**Théorème 1 - Formule de Kœnig-Huygens**

Soit  $X$  une variable aléatoire. Alors,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$

**Proposition 5 - Lois usuelles**

- Si  $X$  suit une loi presque certaine, alors  $\mathbf{V}(X) = 0$ .
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ , alors  $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$ .
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , alors  $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$ .
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$ .
- Si  $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, N, b/N)$ , alors  $\mathbf{V}(X) = n \frac{b}{N} \frac{N-b}{N} \frac{N-n}{N-1}$ .

**Proposition 6**

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $a, b$  deux réels. Alors,

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X).$$

**Exemple 12**

Soit  $Y$  une variable suivant une loi uniforme sur  $\llbracket 2, 12 \rrbracket$ . On pose  $X = Y - 1$ .

Déterminons la loi de  $X$ .

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([Y = k])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Comme  $X = Y - 1$ ,

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{P}([X = j])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi,  $X \sim \mathcal{U}([1, 11])$ .

Déterminons l'espérance et la variance de  $Y$ .

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X + 1] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[1] = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7,$$

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X + 1) = \mathbf{V}(X) = \frac{11^2 - 1}{2} = 60.$$

#### Définition 14 - Variable centrée, réduite

Soit  $X$  une variable aléatoire.

- $X$  est une variable aléatoire *centrée* si  $\mathbf{E}[X] = 0$ .
- $X$  est une variable aléatoire *réduite* si  $\mathbf{V}(X) = 1$ .

#### Proposition 7

Soit  $X$  une variable aléatoire qui ne soit pas de loi certaine. La variable  $X^* = \frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sigma(X)}$  est une variable aléatoire centrée réduite.

### III - Couples de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire  $X$  qui prend les valeurs  $x_1, \dots, x_p$  et une variable aléatoire  $Y$  qui prend les valeurs  $y_1, \dots, y_q$ .

### III.1 - Loi du couple

#### Définition 15 - Loi du couple

La *loi du couple*  $(X, Y)$  est la donnée :

- des valeurs  $(x_i, y_j)$  prises par le couple  $(X, Y)$ ,
- des probabilités  $\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ .

#### Exemple 13 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On dispose d'un bureau à 2 tiroirs et de 2 feuilles de papier. On dispose aléatoirement chacune des feuilles de papier dans l'un des tiroirs.

On note  $X$  le nombre de feuilles dans le premier tiroir et  $Y$  le nombre de tiroirs vides.

Le nombre de feuilles de papier dans le premier tiroir peut être égal à 0, 1 ou 2.

Le nombre de tiroirs vides peut être égal à 0 (il y a 1 feuille dans chaque tiroir) ou 1 (les 2 feuilles sont dans le même tiroir).

De plus,

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0, \mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 0]) = 0, \mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4}$$

On peut représenter ces résultats dans un tableau : à chaque ligne correspond une valeur  $x$  que peut prendre  $X$  ; à chaque colonne correspond une valeur  $y$  que peut prendre  $Y$  ; à l'intersection d'une ligne et d'une colonne se lit la probabilité  $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$  :

$x \backslash y$	0	1
0	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$

**Définition 16 - Marginales**

Les lois de  $X$  et de  $Y$  sont les *marginales* du couple  $(X, Y)$ .  
En utilisant le système complet associé à la variable aléatoire  $Y$  (resp.  $X$ ), on obtient

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \mathbf{P}([X = x_i]) = \sum_{j=1}^q \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \mathbf{P}([Y = y_j]) = \sum_{i=1}^p \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

**Exemple 14 - 2 feuilles et 2 tiroirs**

En reprenant les notations de l'exemple précédent, les marginales s'obtiennent en sommant les lignes / les colonnes du tableau.

$x \backslash y$	0	1	$\mathbf{P}([X = x])$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}([Y = y])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

La somme des cases de l'intérieur du tableau vaut 1.

**Définition 17 - Loi conditionnelle**

La *loi conditionnelle* de  $X$  sachant  $[Y = y_j]$  est la donnée :

- des valeurs  $x_1, \dots, x_p$  prises par  $X$ ,
- des probabilités  $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_p])$ .

**Exemple 15 - 2 feuilles et 2 tiroirs**

On reprend les notations de l'exercice précédent. La loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = 0]$  est égale à

$i$	0	1	2
$\mathbf{P}_{[Y=0]}([X = i])$	0	1	0

C'est une loi presque certaine : *sachant qu'aucun des tiroirs n'est vide, on est certain qu'il y a une feuille dans le premier tiroir.*

La loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = 1]$  est égale à

$i$	0	1	2
$\mathbf{P}_{[Y=1]}([X = i])$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

*Sachant qu'un des deux tiroirs est vide, il y a une chance sur deux que le premier tiroir contienne 0 feuille et une chance sur deux qu'il contienne les 2 feuilles.*

**III.2 - Indépendance****Définition 18 - Indépendance**

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont *indépendantes* si pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ ,

$$\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \mathbf{P}([X = x_i]) \times \mathbf{P}([Y = y_j]).$$

**Exemple 16**

- On considère le couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  dont la loi est définie par

$y \backslash x$	0	1	$\mathbf{P}([X = x])$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{P}([Y = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

On étudie le comportement de **tous** les couples de valeurs possibles :

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 0])$$

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 1])$$

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{P}([X = 1]) \times \mathbf{P}([Y = 0])$$

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{P}([X = 1]) \times \mathbf{P}([Y = 1])$$

Ainsi, les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

- **2 feuilles et 2 tiroirs.** En reprenant la loi du couple,

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0 \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 0]).$$

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  **ne** sont **pas** indépendantes.

### Définition 19 - Schéma de Bernoulli

Un *schéma de Bernoulli* est la succession d'un nombre fini d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

### Proposition 8 - Loi certaine

Si  $Y$  est une variable aléatoire certaine, alors  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

### Théorème 2 - Stabilité de la loi binomiale

Soit  $m, n$  deux entiers naturels,  $p \in [0, 1]$ ,  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p).$$

## III.3 - Covariance

### Proposition 9 - Espérance d'un produit

En utilisant la loi du couple,

$$\mathbf{E}[X \times Y] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q x_i \times y_j \times \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

### Exemple 17 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant l'exemple des feuilles et des tiroirs,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[XY] &= 0 \times 0 \times 0 + 0 \times 1 \times \frac{1}{4} + \dots \\ &\quad \dots + 1 \times 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 \times 0 + \dots \\ &\quad \dots + 2 \times 0 \times 0 + 2 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### Théorème 3 - Espérance et Indépendance

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors

$$\mathbf{E}[X \times Y] = \mathbf{E}[X] \times \mathbf{E}[Y].$$

### Définition 20 - Covariance

La *covariance* de  $X$  et  $Y$ , notée  $\text{Cov}(X, Y)$ , est le réel

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X]) \times (Y - \mathbf{E}[Y])].$$

**Proposition 10 - Propriétés de la covariance**

Soit  $a, b, c$  trois réels et  $X, Y, Z$  trois variables aléatoires.

- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[X \times Y] - \mathbf{E}[X] \times \mathbf{E}[Y]$ .
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ .
- $\text{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$ .
- $\text{Cov}(X, c) = 0$ .
- $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z)$ .

**Exemple 18 - 2 feuilles et 2 tiroirs**

En reprenant les calculs précédents,

$$\mathbf{E}[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1,$$

$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X] \mathbf{E}[Y] \\ &= \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

**Proposition 11 - Covariance et Somme**

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

**Exemple 19 - Variance d'une somme**

On considère le couple  $(X_1, X_2)$  dont la loi est définie par :

$x_1 \backslash x_2$	0	1	$\mathbf{P}([X_1 = x_1])$
	0	1	
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\mathbf{P}([X_2 = x_2])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

$X_1$  et  $X_2$  ont même loi, donc ils ont même espérance et même

variance. De plus,

$$\mathbf{E}[X_1] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \mathbf{E}[X_1^2],$$

$$\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{E}[X_1^2] - \mathbf{E}[X_1]^2 = \frac{3}{16},$$

$$\mathbf{E}[X_1 X_2] = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= \mathbf{E}[X_1 X_2] - \mathbf{E}[X_1] \mathbf{E}[X_2] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X_1 + X_2) &= \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2) \\ &= \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Proposition 12 - Covariance et Indépendance**

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Exemple 20 - 2 feuilles et 2 tiroirs**

L'exemple des feuilles et des tiroirs montre que la covariance peut être nulle alors que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

**Définition 21 - Coefficient de corrélation linéaire**

Le *coefficient de corrélation linéaire* de  $X$  et  $Y$ , noté  $\rho(X, Y)$ , est défini par

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$



**Exemple 21**

En reprenant l'exemple précédent,

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{V}(X_1)\mathbf{V}(X_2)}} = \frac{\frac{-1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{3}{16}}} = -\frac{1}{3}.$$

**Proposition 13**

- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ .
- $|\rho(X, Y)| = 1$  signifie qu'il existe des réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $\mathbf{P}(aX + bY + c = 0) = 1$ .

**III.4 - Vecteurs de variables aléatoires discrètes****Définition 22 - Vecteur aléatoire**

$X$  est un *vecteur de variables aléatoires* s'il existe  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes telles que :

$$X : \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

Les définitions de loi, loi marginale s'étendent au cas des vecteurs aléatoires. De manière analogue, on définit l'indépendance de  $n$  variables aléatoires indépendantes.

**IV - Variables aléatoires discrètes infinies****IV.1 - Loi de probabilité****Définition 23 - Variable aléatoire discrète infinie**

Une variable aléatoire  $X$  est *discrète infinie* si les valeurs prises par  $X$  sont en nombre infini et peuvent être indexées par  $\mathbb{N}$ . On

notera

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\} = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

Dans toute la suite, on se limitera aux variables aléatoires qui ne prennent que des valeurs positives.

**Exemple 22 - Variables aléatoires discrètes infinies**

- Un dé est lancé jusqu'à obtenir la valeur 6. On note  $T$  le rang du lancer où le premier 6 est obtenu. La variable aléatoire  $T$  peut prendre les valeurs :
  - ★ 1 si le 6 apparaît au premier lancer,
  - ★ 2 si le 1<sup>er</sup> lancer n'est pas un 6 et que le 2<sup>e</sup> l'est,
  - ★ 3 si les 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> lancers ne sont pas des 6 et que le 3<sup>e</sup> l'est,
  - ★ ...
- Une étudiante collectionne les cartes de 23 joueurs de foot de son équipe nationale qui sont distribuées dans des tablettes de chocolat. On note  $T$  le nombre de tablettes achetées pour que sa collection soit complète.  $T$  peut prendre les valeurs :
  - ★ 23 si elle a obtenu à chaque achat une carte différente,
  - ★ 24 si elle a obtenu exactement une carte en double,
  - ★ ...

**Définition 24 - Loi de probabilité**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie. La *loi de probabilité* de  $X$  est la donnée :

- des valeurs  $x_0, x_1, x_2, \dots$  prises par  $X$ ,
- de la famille de probabilités  $(\mathbf{P}([X = x_0]), \mathbf{P}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}([X = x_n]), \dots)$ .

**Exemple 23 - Instant du premier Pile**

On note  $T$  le numéro du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$  et Face avec probabilité  $\frac{2}{3}$ .

D'une part,  $T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ .

D'autre part,

- $[T = 1]$  correspond à obtenir un Pile lors du premier lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}.$$

- $[T = 2]$  correspond à obtenir Face lors du premier lancer et Pile lors du second lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = 2]) = \mathbf{P}(\{(F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$

- ...
- $[T = n]$  correspond à obtenir Face lors des  $n - 1$  premiers lancers et Pile lors du  $n^e$  lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = n]) = \mathbf{P}(\{(F, F, \dots, F, P)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

Comme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = n]) = 1$ , alors  $\mathbf{P}([T = +\infty]) = 0$ . La loi de  $T$  peut être représentée dans un tableau contenant une infinité de colonnes :

$x$	1	2	3	...	$n$	...
$\mathbf{P}([X = x])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3}$	...	$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}$	...

**Définition 25 - Système complet**

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète infinie, la famille d'événements  $([X = x_0], [X = x_1], [X = x_2], \dots)$  est un système complet

d'événements. En particulier,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = x_k]) = 1.$$

**Exemple 24 - Instant du premier Pile**

En reprenant l'exemple précédent,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

**IV.2 - Fonction de répartition****Définition 26 - Fonction de répartition**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie. La *fonction de répartition* de  $X$  est la fonction  $F_X$  définie pour tout  $x$  réel par  $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$ .

**Exemple 25 - Instant du premier Pile**

On note  $T$  le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$  et Face avec probabilité  $\frac{2}{3}$ .

- Si  $x < 1$ ,  $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$ .
- Si  $1 \leq x < 2$ ,  $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}$ .
- Si  $2 \leq x < 3$ ,

$$\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(T \in \{1, 2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}.$$

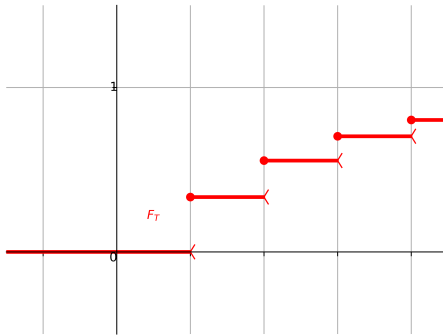
• ...

• Si  $n \leq x < n+1$ ,

$$\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(T \in \llbracket 1, n \rrbracket) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

• ...

On obtient le graphe suivant :



### Proposition 14 - Fonction de répartition

Soit  $F$  la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète infinie.

- $F$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ .
- $F$  est croissante.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .

## IV.3 - Espérance et Variance

### Définition 27 - Espérance

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives. Notons  $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ .

La variable aléatoire  $X$  admet une espérance si la série  $\sum x_i \mathbf{P}([X = x_i])$  est convergente. L'espérance de  $X$  est alors :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}([X = x_i]).$$

### Exemple 26 - Instant du premier pile

On note  $T$  le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$  et Face avec probabilité  $\frac{2}{3}$ .

On admet que pour tout  $x \in [0, 1[$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ . Alors, comme  $\frac{2}{3} \in [0, 1[$ ,  $\sum n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$  converge et

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 3.$$

### Proposition 15 - Propriétés de l'espérance

Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes infinies admettant une espérance et  $a$  un réel. Alors,

- $\mathbf{E}[a] = a$ .
- $\mathbf{E}[aX + Y] = a\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$ .

### Exemple 27 - Instant du premier pile

Un joueur joue à Pile ou Face, avec une pièce qui renvoie Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$ , contre son banquier qui lui propose le contrat suivant :

- le joueur paye 40 euros pour jouer,
  - la pièce de monnaie est lancée successivement jusqu'à obtenir Pile. Il gagne 10 euros lors de chacun de ces lancers.
- En notant  $G$  le gain du joueur et  $T$  le nombre de lancers effectués, alors  $G = 10 \times T - 40$ . En utilisant les propriétés précédentes,

$$\mathbf{E}[G] = 10\mathbf{E}[T] - 40 = 10 \times 3 - 40 = -10.$$

#### Théorème 4 - Théorème de transfert

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives et  $f$  une fonction réelle à valeurs positives. Notons  $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ . Si  $\sum f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i])$  converge, alors

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i]).$$

#### Définition 28 - Variance, Écart-type

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie. Notons  $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ . Si  $\sum x_i^2\mathbf{P}([X = x_i])$  converge, alors  $X$  admet une *variance* et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2].$$

L'*écart-type* de  $X$  est la quantité  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ .

#### Proposition 16 - Propriétés de la variance

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie qui admet une variance.

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$ .
- $\mathbf{V}(a) = 0$ .
- $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$ .

#### Exemple 28 - Pile/Face contre le banquier

On reprend l'exemple précédent et on admet que  $\mathbf{V}(T) = 6$ . Alors,

$$\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(10T - 40) = 10^2\mathbf{V}(T) = 600.$$

### IV.4 - Lois usuelles

#### Définition 29 - Loi géométrique

Soit  $p \in [0, 1]$ . La variable aléatoire  $T$  suit une loi *géométrique* de paramètre  $p$ , noté  $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ , si

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(T = k) = p(1 - p)^{k-1}$ .

#### Exemple 29 - Modélisation

Étant donné un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès de chaque expérience est égale à  $p$ , la variable aléatoire égale au *rang du premier succès* suit une loi géométrique de paramètre  $p$ .

#### Proposition 17 - Espérance, Variance

Soit  $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ . On admet que

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

#### Définition 30 - Loi de Poisson

Soit  $\lambda > 0$ . La variable aléatoire  $Z$  suit une loi de *Poisson* de paramètre  $\lambda$ , noté  $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ , si

- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ ,
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

**Exemple 30 - Modélisation**

Étant donnée une suite de  $N$  épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à  $p$ . Si  $N$  est grand et  $p$  est petit, la variable aléatoire égale au *nombre de succès* suit approximativement une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

**Proposition 18 - Espérance, Variance**

Soit  $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ . On admet que

$$\mathbf{E}[Z] = \lambda \text{ et } \mathbf{V}(Z) = \lambda.$$

**Exemple 31 - Accidentés**

Une banque accorde quotidiennement des crédits. Étant donné un crédit, la probabilité qu'il revienne au service contentieux dans un laps de temps d'un an est égale à 4%. On suppose que 100 crédits ont été accordés au mois de janvier.

On note  $X$  le nombre de crédits qui sont revenus au service contentieux un an plus tard.  $X$  compte le nombre de succès (contentieux) lors d'une suite de 100 épreuves de Bernoulli de probabilité de succès 4%. Ainsi,  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, \frac{4}{100})$  et  $\mathbf{E}[X] = 4$ .

On suppose que  $X$  peut être approchée par une variable aléatoire  $Z$  suivant une loi de Poisson de paramètre  $\mathbf{E}[X]$ . On donne la table d'une loi de Poisson de paramètre 4 ci-dessous :

$z$	0	1	2	3	4	5	...
$\mathbf{P}([Z = z])$	0,018	0,073	0,147	0,195	0,195	0,156	...

Alors,

- $\mathbf{P}(X = 0) \simeq \mathbf{P}(Z = 0) \simeq 0,018$ .
- $\mathbf{P}(X \leq 3) \simeq \mathbf{P}(Z \leq 3) \simeq 0,018 + 0,073 + 0,147 + 0,195 \simeq 0,433$ .
- $\mathbf{P}(X > 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 3) \simeq 1 - 0,433 \simeq 0,567$ .

**Théorème 5 - Stabilité de la loi de Poisson**

Soit  $\lambda, \mu$  deux réels strictement positifs,  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

**IV.5 - Vecteurs de variables aléatoires**

Les notions vues dans le cadre fini se généralisent aux variables aléatoires discrètes infinies.