

V - Estimation

I - Définitions

Définition 1 - Échantillon

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire. Un n -échantillon de X est un n -uplet (X_1, \dots, X_n) tel que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n soient mutuellement indépendantes et de même loi que X .

Définition 2 - Estimateur

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité dépendant d'un paramètre θ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de X . Un *estimateur* de θ est une variable aléatoire $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ où φ est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

Exemple 1 - Estimateurs

- Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon d'une variable aléatoire X . Les quantités suivantes sont des estimateurs de $\mathbf{E}[X]$:

$$\star T_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

$$\star T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_k.$$

$$\star T_3 = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

$$\star T_4 = \frac{X_1 X_2}{2}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, on peut chercher à estimer son paramètre p (qui est égal à son espérance), sa variance $\sigma^2 = p(1-p), \dots$
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on peut chercher à estimer son paramètre λ (qui est égal à son espérance), la quantité $\mathbf{P}([X = 0]) = e^{-\lambda}, \dots$
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$, on peut chercher à estimer son paramètre n . Par exemple, si on a accès aux résultats d'un dé, on peut chercher à estimer son nombre de faces.

Définition 3 - Biais

Soit T un estimateur de θ . Le *biais* de T est le réel $b_\theta(T) = \mathbf{E}[T] - \theta$. Si $b_\theta(T) = 0$, l'estimateur T est un estimateur *sans biais* de θ .

Exemple 2 - Calculs de biais

Reprenons l'exemple précédent en notant $m = \mathbf{E}[X]$.

- Soit $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Alors,

$$\mathbf{E}[T_1] - m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k] - m = \frac{nm}{n} - m = 0.$$

Ainsi, T_1 est un estimateur sans biais de m .

- Soit $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_k$. Alors,

$$\mathbf{E}[T_2] - m = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k] - m = \frac{nm}{n-1} - m = \frac{m}{n(n-1)}.$$

Ainsi, T_2 est un estimateur de m de biais $\frac{m}{n(n-1)}$.

- Soit $T_3 = \frac{X_1 + X_2}{2}$. Alors,

$$\mathbf{E}[T_3] - m = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]}{2} - m = 0.$$

Ainsi, T_3 est un estimateur sans biais de m .

- Soit $T_4 = \frac{X_1 X_2}{2}$. Les variables aléatoires étant indépendantes,

$$\mathbf{E}[T_4] - m = \frac{\mathbf{E}[X_1] \mathbf{E}[X_2]}{2} - m = \frac{m^2}{2} - m = \frac{m(m-2)}{2}.$$

Ainsi, T_4 est un estimateur de m de biais $\frac{m(m-2)}{2}$.

Définition 4 - Risque quadratique

Soit T un estimateur de θ . Le *risque quadratique* de T est défini par

$$R_\theta(T) = \mathbf{E} [(T - \theta)^2].$$

En particulier,

$$R_\theta(T) = b(T, \theta)^2 + \mathbf{V}(T).$$

Si T est un estimateur sans biais de θ , alors $R_\theta(T) = \mathbf{V}(T)$.

Exemple 3 - Calculs de risques quadratiques

Reprenons les exemples précédents, pour les estimateurs sans biais. On suppose que X admet une variance.

- Comme T_1 est un estimateur sans biais de m , alors les variables aléatoires étant indépendantes,

$$\begin{aligned} R_m(T_1) &= \mathbf{V}(T_1) = \mathbf{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) \\ &= \frac{\mathbf{V}(X)}{n}. \end{aligned}$$

- Comme T_3 est sans biais et X_1 et X_2 sont indépendantes,

$$R_m(T_3) = \mathbf{V}(T_3) = \frac{\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2)}{4} = \frac{\mathbf{V}(X)}{2}.$$

Définition 5 - Meilleur estimateur

L'estimateur T_1 est un *meilleur estimateur* que T_2 si

$$\forall \theta \in I, R_\theta(T_1) \leq R_\theta(T_2).$$

Exemple 4 - Comparaison d'estimateurs

En reprenant l'exemple précédent, T_1 est un meilleur estimateur que T_3 dès que $n \geq 2$.

II - Estimation d'une proportion

Théorème 1 - Loi faible des grands nombres

Soit X une variable aléatoire admettant une moyenne m et une variance σ^2 . Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Définition 6 - Estimateur convergent

Soit T_n un estimateur de θ . L'estimateur T_n est *convergent* si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$.

Théorème 2 - Estimation ponctuelle d'une proportion

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p . Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de X et $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Alors, \bar{X}_n est un estimateur sans biais et convergent de p .

Exemple 5 - Sondage

On souhaite connaître la proportion de français favorables à une réforme donnée. On modélise le problème en considérant une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . On interroge n français choisis indépendamment dans la population. On note X_i la réponse donnée par l'individu numéro i : 1 si l'individu est favorable et 0 sinon. On suppose que X_i suit la même loi que X . Pour estimer p , on va donc utiliser la quantité $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.