I. Séries entières

I.1 Rayons de convergence, Calculs de sommes

Indications pour l'exercice 1.

1. Règle d'Alembert. On peut calculer la valeur de la somme grâce à un produit de Cauchy.

2. Règle d'Alembert. On peut calculer la somme en reconnaissant un développement en série entière classique. Attention toutefois au signe.

3. Règle d'Alembert. On peut décomposer $1/(n(n+1))$ comme une différence puis utiliser les développements en séries en entières classiques.

4. Règle d'Alembert. Remarquer ensuite que $\frac{n^2+4n-1}{n+4} = n - \frac{1}{n+4}$. On utilise ensuite les développements en séries entières classiques.

5. Comparer au rayon de convergence de $\sum \sin(n) z^n$. Remarquer que cette dernière série diverge grossièrement en 1.

6. Étudier la suite $\left(\left|a_{2n}x^{2n}\right|\right)_{n\in\geqslant 2}$.

7. Règle d'Alembert. □

Indications pour l'exercice 2. Penser que ces séries sont lacunaires.

1. On obtient $R = 1$. On peut calculer la somme de la série en dérivant $\sum x^{4n-2}$.

2. On obtient $R = 1/\sqrt{3}$.

3. On obtient $R = 1$.

4. On obtient $R = 1/2$. □

Indications pour l'exercice 3. Encadrer largement $d(n)$. □

Indications pour l'exercice 4. Un encadrement du terme général permet de montrer que $R \geqslant 1/4$. L'étude de $\left(a_{2n}x^{2n}\right)$ permet de conclure. □

Indications pour l'exercice 5. Utiliser le développement en série entière du cosinus hyperbolique. □

Indications pour l'exercice 6.

1. Compenser par vérifier la convergence de l'intégrale en utilisant une comparaison aux intégrales de Riemann.
Utiliser un développement limité pour obtenir la majoration.

2. La règle d'Alembert permet d'identifier le rayon de convergence.
En $x = 1$, l'équivalent obtenu précédemment permet d'étudier la nature de la série en fonction des valeurs de α.
En $x = -1$, on pourra utiliser le théorème des séries alternées en vérifiant les hypothèses pour $\alpha > -1$. □

Indications pour l'exercice 7. Utiliser les résultats sur les suites récurrentes doubles. □

Indications pour l'exercice 8.

1. Utiliser la règle d'Alembert.

2. En R, utiliser un théorème de comparaison des séries à termes positifs.
En $-R$, se tourner vers le théorème des séries alternées.

3. Utiliser le signe des coefficients pour en déduire la monotonie de la fonction. Montrer alors, en minorant par les sommes partielles, que $\lim_{R^-} f = +\infty$.
Écrire $(1-x)f(x)$ comme une série entière et montrer la convergence normale de cette série sur $[0,1]$ pour pouvoir appliquer le théorème de la double limite. □

Indications pour l'exercice 9.

1. Utiliser la règle d'Alembert.

2. Pour l'étude en -1, montrer la convergence uniforme sur $]-1,0[$.
Pour l'étude en 1, comparer séries / intégrales en montrant la monotonie de $t \mapsto \frac{x^t}{\sqrt{t}}$. □

I.2 Équations différentielles

Indications pour l'exercice 10. Diviser la relation de récurrence par $n!$. On obtient ainsi une relation de récurrence sur f qu'il suffit de résoudre... □

Indications pour l'exercice 11. Montrer par récurrence que (u_n) est majorée par une suite géométrique. Obtenir ensuite une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants satisfaite par la somme de la série. □

Indications pour l'exercice 12.

1. La relation s'écrit $(n+2)(n+1)a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

2. Remarquer que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$. On reconnaît ensuite les développements en séries entières de logarithmes, en n'oubliant pas les premiers termes. . . □

Indications pour l'exercice 13. On obtient $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$. On peut alors reconnaître des fonctions de trigonométrie. □

I.3 Développements en série entière

Indications pour l'exercice 14.

1. En utilisant les propriétés du logarithme, faire apparaître une somme de termes de la forme $\ln(1+u)$.

2. Utiliser le développement en série entière de la fonction arctangente.

3. Utiliser le développement en série entière du logarithme, intervertir précautionneusement la série et l'intégrale puis reconnaître éventuellement une intégrale de Wallis.

4. Déterminer une équation différentielle satisfaite par cette fonction. □

Indications pour l'exercice 15.

1. On pourra raisonner par récurrence en déterminant une relation de récurrence satisfaite par les suites (u_n) et (v_n) telles que $f^{(n)}(x) = a^{u_n} f(a^{v_n} x)$.

2. Raisonner par l'absurde en supposant que $f(0) \neq 0$ et en déterminant le rayon de convergence de la série de Taylor.

3. Pour le développement en série entière, contrôler le reste intégral.
Pour les cas $a \in \{-1, 1\}$, résoudre les équations différentielles. □

Indications pour l'exercice 16.

1. En passant par le logarithme, montrer que le produit $\left(\prod_{k=1}^{N} (1 + q^k x)\right)_N$ converge.

2. Supposer que f est développable en série entière et utiliser la relation fonctionnelle pour identifier les coefficients. □

II. Dénombrement & Probabilités

Indications pour l'exercice 17.

1. Commencer par dénombrer D_{n-k} en choisissant les éléments qui ne sont pas fixes.

2. Utiliser une majoration du terme général.

3. Commencer par le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, utiliser la relation de récurrence précédente, puis utiliser un produit de Cauchy. On obtient ainsi $D_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. □

Indications pour l'exercice 18.

1. Utiliser la somme des termes d'une suite géométrique.

2. Remarquer que $\omega^n = 1$.

3. Utiliser la somme des termes d'une suite géométrique.

4. Utiliser l'indépendance des lancers.

5. Calculer $1 + \delta_n$ en utilisant les questions précédentes.

6. Remarquer que $q_n = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{5j}$. □

Indications pour l'exercice 19.

1. Utiliser l'indépendance des positionnements.

2. Utiliser la formule des probabilités totales, multiplier par x^i puis sommer.

3. L'espérance est égale à la dérivée de la fonction génératrice évaluée en 1. On retrouve ensuite la série harmonique.
Pour la variance, on dérive deux fois et on remarque que $\sum \frac{1}{i^2}$ converge.

4. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

5. K_n est une somme de Bernoulli indépendantes. On retrouve sans peine l'espérance et la variance.

6. ... □

Indications pour l'exercice 20.

1. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, éventuellement sur $\mathbb{R}^N$ puis en passant à la limite.

2. On retrouve le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

III. Avec Python

Indications pour l'exercice 21.

1. Utiliser une boucle pour faire apparaître plusieurs courbes sur un même graphique.

2. Le calcul s'effectue à l'aide du dénombrement. L'équivalent s'obtient grâce à la formule de Stirling.

3. Comparer à $\sum x^n$.

4. Pour le calcul de P, on utilise l'expression de p_{2n} ainsi que les développements en série entière classiques.

Pour la relation, remarquer que $p_{2n} = \sum_{k=1}^{n} q_{2k} p_{2n-2k}$ et utiliser un produit de Cauchy.

5. Reprendre les questions précédentes.

6. Utiliser les développements en série entière classiques. □