

# I - Suites & Fonctions

Dans tout le cours, on note :

- pour  $a < b$  réels,  $[a, b]$  l'ensemble des **réels** compris entre  $a$  et  $b$  :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}.$$

- pour  $0 \leq a < b$  entiers,  $\llbracket a, b \rrbracket$  l'ensemble des **entiers** compris entre  $a$  et  $b$  :

$$\llbracket a, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{N} ; a \leq n \leq b\}.$$

## I - Suites

### I.1 - Suites usuelles

#### Définition 1 - Suite arithmétique

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . La suite  $u$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + a$  est une suite *arithmétique* de *raison*  $a$ .

#### Proposition 1

Soit  $u$  une suite arithmétique de raison  $a$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

- $u_n = u_0 + na$ .
- $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}a$ .

#### Exemple 1 - Une suite arithmétique

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = u_n + 12$ . Soit  $n$  un entier naturel.

D'après les propriétés des suites arithmétiques, pour tout  $n$  entier naturel,

$$u_n = 12n + 3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n (12k + 3) = 12 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 3 \\ &= 12 \frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) \\ &= 3(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

#### Définition 2 - Suite géométrique

Soit  $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ . La suite  $u$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = qu_n$  est une suite *géométrique* de *raison*  $q$ .

#### Proposition 2

Soit  $u$  une suite géométrique de raison  $q$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

- $u_n = q^n u_0$ .
- $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ .

#### Exemple 2 - Une suite géométrique

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = 12 \cdot u_n$ . Soit  $n$  un entier naturel.

D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout  $n$  entier naturel,

$$u_n = 12^n u_0 = 3 \times 12^n.$$

En utilisant le résultat sur la somme des termes d'une suite géo-

métrique dont la raison est différente de 1,

$$\sum_{k=0}^n u_k = 3 \times \frac{12^{n+1} - 1}{12 - 1} = \frac{3}{11} (12^{n+1} - 1).$$

### Définition 3 - Suite arithmético-géométrique

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ . La suite  $u$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = qu_n + a$  est une suite *arithmético-géométrique*.

### Exemple 3 - Étude des suites arithmético-géométriques



Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = 2u_n + 3$ .

- Commençons par chercher une solution  $\ell$  de l'équation  $\ell = 2\ell + 3$ .  
On obtient  $\ell = -3$ .
- Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $v_n = u_n - \ell = u_n + 3$ .  
Montrons que  $(v_n)$  est une suite géométrique. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= (2u_n + 3) + 3 \\ &= 2u_n + 6 \\ &= 2(u_n + 3) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2.

De plus,  $v_0 = u_0 + 3 = 4$ .

- D'après les résultats sur les suites géométriques,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n v_0 = 2^{n+2}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+2} - 3.$$

## I.2 - Études locale & globale

### Définition 4 - Monotonie

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels.

- $(u_n)$  est croissante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ .
- $(u_n)$  est décroissante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ .
- $(u_n)$  est constante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$ .
- $(u_n)$  est stationnaire s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n$ .

### Exemple 4 - Suites arithmétiques & géométriques

- Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ . Alors, pour tout  $n$  entier naturel,

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Ainsi,

- ★ Si  $r > 0$ , alors la suite  $(u_n)$  est croissante.
- ★ Si  $r < 0$ , alors la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- ★ Si  $r = 0$ , alors la suite  $(u_n)$  est constante.
- Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q > 0$  et de premier terme  $u_0 > 0$ . Alors, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_n = q^n u_0 > 0$ . De plus,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

Ainsi,

- ★ Si  $q > 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est croissante.
- ★ Si  $q < 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- ★ Si  $q = 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est constante.

### Définition 5 - Majorée, Minorée

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels.

- La suite  $(u_n)$  est *majorée* s'il existe un réel  $M$  tel que

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .

- La suite  $(u_n)$  est *minorée* s'il existe un réel  $m$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$ .
- La suite  $(u_n)$  est *bornée* si elle est majorée et minorée.

### Exemple 5 - Une suite géométrique

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$ .

- Comme  $u_n$  est la somme de termes positifs, alors  $u_n \geq 0$  et la suite  $(u_n)$  est minorée par 0.
- D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique, pour tout  $n$  entier naturel,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2.$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est majorée par 2.

Finalement, la suite  $(u_n)$  est bornée.

## I.3 - Limites

### Proposition 3 - Opérations sur les limites

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$ .

- La somme  $(u_n + v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\times$
$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$-\infty$

- Le produit  $(u_n v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$ab$	$\pm\infty (a \neq 0)$	$\pm\infty (a \neq 0)$
$+\infty$	$\pm\infty (b \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty (b \neq 0)$	$-\infty$	$+\infty$

- Le quotient  $(u_n/v_n)$

	$b \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a/b$	$0$	$0$
$+\infty$	$\pm\infty$	$\times$	$\times$
$-\infty$	$\pm\infty$	$\times$	$\times$

### Exemple 6 - Calculs de limites

- Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $u_n = n^2 + \sqrt{n}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $v_n = n^2 - \sqrt{n}$ . La forme obtenue ainsi est une forme indéterminée. Or, pour  $n > 0$ ,

$$v_n = \sqrt{n} (n^{3/2} - 1).$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} = +\infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

- Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$

**Proposition 4 - Limites classiques**

Soit  $q \in \mathbb{R}$ .

- Si  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .
- Si  $-1 < q < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .

**Exemple 7 - Série géométrique**

Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n x^k$ .  
D'après le résultat sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Comme  $x \in ]-1, 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$ . Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - x}.$$

**Théorème 1 - Théorème d'encadrement**

Soient  $u, v, w$  trois suites réelles et  $\ell \in \mathbb{R}$  telles que, à partir d'un certain rang,

$$v_n \leq u_n \leq w_n.$$

- Si  $(v_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers un même réel  $\ell$ , alors  $(u_n)$  converge également vers  $\ell$ .
- Si  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$ , alors  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .
- Si  $(w_n)$  tend vers  $-\infty$ , alors  $(u_n)$  tend vers  $-\infty$ .

**Exemple 8 - Factorielle vs puissance**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \frac{3^n}{n!}$ .

Pour tout  $n \geq 4$ ,  $\frac{3}{n} \leq \frac{3}{4}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n &= \frac{3 \times 3 \times \cdots \times 3}{1 \times 2 \times \cdots \times n} \\ &\leq \frac{3}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \\ &\leq \frac{9}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}. \end{aligned}$$

Comme  $\frac{3}{4} \in ]0, 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$ . D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

**Théorème 2 - Théorème de la limite monotone**

Soit  $u$  une suite croissante.

- Si  $u$  est majorée, alors elle converge.
- Si  $u$  n'est pas majorée, alors elle tend vers  $+\infty$ .

Soit  $v$  une suite décroissante.

- Si  $v$  est minorée, alors elle converge.
- Si  $v$  n'est pas minorée, alors elle tend vers  $-\infty$ .

**Exemple 9 - Série exponentielle**

Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

- D'une part, pour tout  $n$  entier naturel,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Ainsi, la suite  $(S_n)$  est croissante.

- D'autre part, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} n! &= 1 \times 2 \times \cdots \times n \\ &\geq 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &\leq 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq 3. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(S_n)$  est majorée par 3.

La suite  $(S_n)$  est croissante et majorée, donc elle est convergente.

Pour la culture, il est bon de savoir que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$ .

## II - Fonctions

### II.1 - Régularité

#### Définition 6 - Continuité & Dérivabilité - Définition informelle

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  non vide et  $x_0 \in I$ .

- La fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- La fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe.}$$

Cette limite est le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  et est notée  $f'(x_0)$ .

#### Définition 7 - Classe $\mathcal{C}^n$

Une fonction  $f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^n$  si :

- ses dérivées successives  $f, f', \dots, f^{(n)}$  existent,
- $f^{(n)}$  est continue.

### II.2 - Étude d'extrema

#### Théorème 3 - Régularité & Variations

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  :

- Si  $f'$  est nulle sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .
- Si  $f'$  est strictement positive sur  $I$ , sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $f'$  est strictement négative sur  $I$ , sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

#### Exemple 10

Soit  $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 1$ .

La fonction  $f$  est dérivable comme fonction polynomiale et pour tout  $x$  réel,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4).$$

De plus, les fonctions polynomiales se comportent en l'infini comme leur terme de plus haut degré, donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$4$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$	$-31$	$\nearrow$	$+\infty$

**Théorème 4 - Dérivation & Extrema**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un ouvert  $I$  et  $x_0 \in I$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .

**Exemple 11**

- Soit  $f : x \mapsto x^3$ . La fonction  $f$  est dérivable et  $f'(x) = x^2$ . Ainsi,  $f'(0) = 0$ . Cependant,

$$f(-1) = -1 < 0 = f(0) < f(1).$$

Ainsi,  $f$  n'atteint pas d'extremum en 0.

- Sur  $[-2, +\infty[$ , on définit  $f(x) = -x^3 + x^2$ . La fonction  $f$  est dérivable et, pour tout  $x$  réel

$$f'(x) = -3x^2 + 2x = x(-3x + 2).$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

$x$	$-2$	$0$	$2/3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-16$	$\searrow$ $0$ $\nearrow$ $4/27$ $\searrow$ $-\infty$			

Ainsi,  $f$  ne possède pas de minimum et son maximum (atteint en  $2/3$ ), vaut  $\frac{4}{27}$ .

**II.3 - Formule de Taylor****Théorème 5 - Théorème de Rolle**

Soient  $a < b$  deux réels et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  telle que  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Définition 8 - Relations de comparaison**

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f, g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$  telles que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ .

- $f$  et  $g$  sont équivalentes en  $a$ , noté  $f \sim_a g$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .
- $f$  est négligeable devant  $g$  en  $a$ , si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

**Proposition 5 - Croissances comparées**

- Au voisinage de  $+\infty$  :

★ Si  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0.$$

★ Si  $\alpha, \beta, \gamma < 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{(\ln x)^\gamma} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = 0.$$

- Au voisinage de 0 : si  $\beta < 0, \gamma > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\ln x|^\gamma}{x^\beta} = 0.$$

**Exemple 12**

- Soit  $f : x \mapsto \sqrt{x} \ln \left( \frac{x^2}{1+x} \right)$ .

On remarque que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} [\ln(x^2) - \ln(1+x)] \\ &= \sqrt{x} [2 \ln(x) - \ln(1+x)]. \end{aligned}$$

D'une part, d'après le théorème des croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} 2 \ln(x) = 0.$$

D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0$ .

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

- Soit  $g : x \mapsto \frac{\ln(x)+x}{x^2+1}$ .  
On remarque que

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{\ln(x)}{x} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{x}} + \frac{1}{x+\frac{1}{x}}.$$

D'après le théorème des croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0. \text{ D'après les opérations sur les limites,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty.$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

### Théorème 6 - Équivalent et dérivation

Si  $f$  est une fonction dérivable en  $a$  et  $f'(a) \neq 0$ , alors

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a) \cdot (x - a).$$

### Exemple 13 - Équivalents classiques en 0

- Comme  $x \mapsto \ln(1+x)$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  de dérivée  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ,

$$\ln(1+x) - \ln(1) \sim_0 \frac{1}{1+0}(x-0)$$

$$\ln(1+x) \sim_0 x.$$

- Comme  $x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $x \mapsto e^x$ ,

$$e^x - e^0 \sim_0 e^0(x-0)$$

$$e^x - 1 \sim_0 x.$$

- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Comme  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  est dérivable sur

$] -1, +\infty[$  de dérivée  $x \mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ ,

$$(1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha \sim_0 \alpha(1+0)^{\alpha-1}(x-0)$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x.$$

### Proposition 6 - Relations de comparaison & Opérations

- $\sim_a$  est une relation d'équivalence.
- Si  $f(x) \sim_a g(x)$ , alors  $f$  et  $g$  sont de même signe sur un voisinage de  $a$ .
- Si  $f_1 \sim g_1$  et  $f_2 \sim g_2$ , alors  $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ .
- Si  $f_1 \sim g_1$ ,  $f_2 \sim g_2$  et  $g_1, g_2$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$ , alors  $\frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2}$ .

### Exemple 14

- On remarque que

$$1+x \sim_0 1 \text{ et } 1+2x \sim_0 1.$$

Cependant,

$$\ln(1+x) \sim_0 x \text{ et } \ln(1+2x) \sim_0 2x.$$

Ainsi, il **ne** faut **pas** composer des équivalents.

- On remarque que

$$\frac{1}{1+2x} \sim_0 1 \text{ et } 1-2x \sim_0 1.$$

Cependant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2x} - 1 + 2x &= \frac{1+2x-2x}{1+2x} - 1 + 2x \\ &= 1 - 2 \frac{x}{1+2x} - 1 + 2x \\ &= 2x \left( 1 - \frac{1}{1+2x} \right) \\ &= 2x \frac{2x}{1+2x} \\ &\sim_0 4x^2. \end{aligned}$$

Ainsi, il **ne** faut **pas** additionner des équivalents.

### Définition 9 - Développement limité à l'ordre 1 ou 2

Soit  $a$  un réel et  $f$  une fonction définie sur un voisinage de  $a$ .

- $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 s'il existe  $a_0$  et  $a_1$  réels et  $\varepsilon$  une fonction satisfaisant  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

- $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 s'il existe  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  réels et  $\varepsilon$  une fonction satisfaisant  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + (x - a)^2\varepsilon(x).$$

### Exemple 15 - Polynômes et Inverse

- Soit  $f : x \mapsto 3 + 2x + 4x^2 + 3x^5 + 25x^{72}$ . Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 2x + 4x^2 + x^2(3x^3 + 25x^{70}) \\ &= 3 + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . Ainsi,  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

- Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ . En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 &= \frac{1 - x^3}{1 - x} \\ \frac{1}{1 - x} &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1 - x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^2 \frac{x}{1 - x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . Ainsi,  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

- Soit  $f : x \mapsto 4x^3 + 2x^2 + x + 1$ . On remarque que

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + x^2 \times x = 1 + x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

où  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . Ainsi,  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

- Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ . On remarque que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x}{1+x} \\ &= 1 - x \frac{1}{1+x} = 1 - x \frac{1+x-x}{1+x} \\ &= 1 - x + x^2 \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \frac{1+x-x}{1+x} \\ &= 1 - x + x^2 - x^2 \frac{x}{1+x} \\ &= 1 - x + x^2 - x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . Ainsi,  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

### Proposition 7 - Développement limité & Régularité

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

- $f$  admet un développement limité à l'ordre 0 en  $a$  si et seulement si  $f$  est continue en  $a$ .

En particulier, si  $f(x) = a_0 + \varepsilon(x)$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = a_0$ .

- $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $a$ .

En particulier, si  $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$ , alors  $a_0 = f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $a_1 = f'(a)$ . La tangente en  $f$  à  $a$  a donc pour équation  $a_0 + a_1(x - a)$ .



### Théorème 7 - Formule de Taylor-Young

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ . Pour tout  $a \in I$ , il existe une fonction  $\varepsilon_a$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_a(x) = 0$  et

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

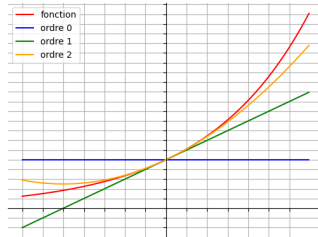
### Exemple 16 - Développement limités classiques en 0

- La fonction  $f : x \mapsto e^x$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto e^x, \\ f'' : x &\mapsto e^x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + e^0(x-0) + \frac{e^0}{2}(x-0)^2 + x^2 \varepsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x). \end{aligned}$$



- La fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] -1, +\infty[$  et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto \frac{1}{1+x}, \\ f'' : x &\mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(1+0) + \frac{1}{1+0}x - \frac{1}{2(1+0)^2}x^2 + x^2 \varepsilon(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] -1, +\infty[$  et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f'' : x &\mapsto \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ln(1+x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x).$$

- On considère la fonction  $f : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$ . On utilise les développements limités classiques et on note  $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots$  des fonctions qui tendent vers 0 en 0 mais dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\sqrt{1+x}) \\ &= \exp\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right) \\ &= e \exp\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right) \\ &= e \left(1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right) + \dots\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right)^2 + \dots\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right) \varepsilon_1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)\right) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en factorisant par  $x^2$  et en regroupant les termes

qui tendent vers 0, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= e \left( 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x) \right) \\ &= e \left( 1 + \frac{1}{2}x + x^2\varepsilon(x) \right) \\ &= e + \frac{e}{2}x + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

### Proposition 8 - Développement limité & Comportement local

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I$  contenant  $a$ .

- Si  $f''(a) > 0$ , alors  $f$  se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.
- Si  $f''(a) < 0$ , alors  $f$  se situe au-dessous de sa tangente sur un voisinage de 0.

### Exemple 17

Comportement au voisinage de 1 de  $f : x \mapsto e^{1-\sqrt{x}}$ . La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto -\frac{e^{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, \\ f'' : x &\mapsto \frac{\sqrt{x} + 1}{4x^{3/2}} e^{1-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Young,

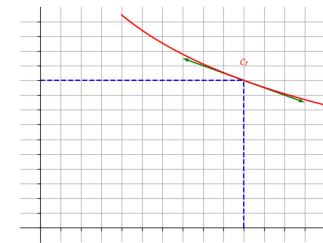
$$e^{1-\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1).$$

En particulier, il existe une fonction  $\varepsilon$  qui tend vers 0 en 0 telle

que

$$\begin{aligned} e^{1-\sqrt{x}} - \underbrace{\left[ 1 - \frac{1}{2}(x-1) \right]}_{\text{éq. de la tangente}} &= \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1) \\ &= \frac{(x-1)^2}{4} + (x-1)^2\varepsilon(x-1) \\ &= \frac{1}{4}(x-1)^2(1 + \varepsilon(x-1)). \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque  $x$  est proche de 1, alors  $1 + \varepsilon(x-1) > 0$  et  $(x-1)^2 \geq 0$ . Donc  $f(x) - [1 - \frac{1}{2}(x-1)] \geq 0$  et la courbe représentative de  $f$  se trouve au-dessus de la tangente.



## II.4 - Fonctions convexes

### Définition 10 - Convexité pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(I)$ .  $f$  est une fonction *convexe* si  $f'' \geq 0$ .

### Proposition 9 - Convexité & Tangentes

Soit  $f$  une fonction convexe et dérivable sur  $I$ . Alors,

$$\forall x, a \in I, f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a).$$

## II.5 - Plan d'étude de fonction

- (i). Ensemble de définition.
- (ii). Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
- (iii). Dérivabilité, Variations.
- (iv). Branches infinies.
- (v). Représentation graphique avec les tangentes remarquables.

### Exemple 18 - Étude de fonction

Soit  $f : x \mapsto x - 1 + \frac{1}{x-2}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- (i).  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .
- (ii).  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 2[$  et sur  $]2, +\infty[$ . Sur chacun de ces intervalles,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow -1 \searrow -\infty$				$+\infty \searrow 3 \nearrow +\infty$		

La fonction  $f$  est deux fois dérivable et  $f''(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$ . Ainsi,  $f''(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 2$  et  $f$  est convexe sur  $]2, +\infty[$ . Comme  $f''(x) \leq 0$  pour tout  $x \leq 2$ , alors  $f$  est concave sur  $] -\infty, 2[$ .

- (iii). Étude des branches infinies.
  - Comme  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ , alors la droite d'équation  $y = 2$  est une asymptote verticale à la courbe.
  - Comme  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ , alors la droite d'équation  $y = 2$  est une asymptote verticale à la courbe.

- Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -1$ , alors la droite d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ . De plus,  $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \geq 0$  pour tout  $x > 2$ . Ainsi,  $\mathcal{C}_f$  se trouve au-dessus de son asymptote au voisinage de  $+\infty$ .
- Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = -1$ , alors la droite d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$ . De plus,  $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \leq 0$  pour tout  $x < 2$ . Ainsi,  $f$  se trouve au-dessous de son asymptote.

(iv). Tracé.

