

# IX - Intégrales généralisées

## Révisions

- Calculs de primitives.
- Intégrale sur un segment.
- Calculs de limites.

## I - Intégrales des fonctions continues

### Définition 1 - Intégrale sur $[a, +\infty[$

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction continue sur  $[a, +\infty[$ .

- L'intégrale de  $f$  est *convergente* sur  $[a, +\infty[$  si la fonction  $F(y) = \int_a^y f(t) dt$  admet une limite finie en  $+\infty$ .
- Si l'intégrale est convergente, on note

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f(t) dt.$$

- Si  $F$  n'admet pas de limite finie en  $+\infty$ , l'intégrale de  $f$  sur  $[a, +\infty[$  est *divergente*.

### Exemple 1 - Sur $[a, +\infty[$

- **Étude de**  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ . Soit  $y > 2$ . Alors,

$$F(y) = \int_2^y \frac{1}{t^2} dt = \left[ -\frac{1}{t} \right]_2^y = -\frac{1}{y} + \frac{1}{2}.$$

Ainsi,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = \frac{1}{2}$ . Donc,  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge et

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

- **Étude de**  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ . Soit  $y > 2$ . Alors,

$$F(y) = \int_2^y \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_2^y = \ln(y) - \ln(2).$$

Ainsi,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = +\infty$ . Donc,  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} dt$  diverge.

### Définition 2 - Intégrale sur $] -\infty, a]$

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction continue sur  $] -\infty, a]$ .

- L'intégrale de  $f$  est *convergente* sur  $] -\infty, a]$  si la fonction  $F(y) = \int_y^a f(t) dt$  admet une limite finie en  $-\infty$ .
- Si l'intégrale est convergente, on note

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt = \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^a f(t) dt.$$

- Si  $F$  n'admet pas de limite finie en  $-\infty$ , l'intégrale de  $f$  sur  $] -\infty, a]$  est *divergente*.

**Exemple 2 - Sur  $] - \infty, a]$** 

- **Étude de  $\int_{-\infty}^0 e^t dt$ .** Soit  $y < 0$ . Alors,

$$F(y) = \int_y^0 e^t dt = [e^t]_y^0 = e^0 - e^y = 1 - e^y.$$

Ainsi,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = 1$ . Donc,  $\int_{-\infty}^0 e^t dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^0 e^t dt = 1.$$

- **Étude de  $\int_{-\infty}^{-1} e^{-t} dt$ .** Soit  $y < -1$ . Alors,

$$F(y) = \int_y^{-1} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_y^{-1} = -e^1 + e^{-y}.$$

Ainsi,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = +\infty$ . Donc,  $\int_{-\infty}^{-1} e^{-t} dt$  diverge.

**Définition 3 - Intégrale sur  $] - \infty, +\infty[$** 

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

- L'intégrale de  $f$  est *convergente* sur  $] - \infty, +\infty[$  si  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  et  $\int_{-\infty}^a f(t) dt$  sont convergentes.
- Si l'intégrale est convergente, on note

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

- Si l'une des intégrales  $\int_{-\infty}^a f(t) dt$  ou  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  diverge, l'intégrale de  $f$  sur  $] - \infty, +\infty[$  est *divergente*.

**Exemple 3 - Sur  $] - \infty, +\infty[$** 

- **Étude de  $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ .**

★ D'une part,

$$\int_y^0 t e^{-t^2} dt = \left[ -\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_y^0 = -\frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{2} e^{-y^2}.$$

Ainsi,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^0 t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}$ . Donc,  $\int_{-\infty}^0 t e^{-t^2} dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^0 t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}.$$

★ D'autre part,

$$\int_0^y t e^{-t^2} dt = \left[ -\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^y = -\frac{1}{2} e^{-y^2} + \frac{1}{2} e^0.$$

Ainsi,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$ . Donc,  $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt$  converge et

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Finalement,  $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

- **Étude de  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$ .**

★ D'une part,

$$F(y) = \int_y^0 e^t dt = [e^t]_y^0 = e^0 - e^y$$

Ainsi,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = 1$ . Donc,  $\int_{-\infty}^0 e^t dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^0 e^t dt = 1.$$

★ D'autre part,

$$F(y) = \int_0^y e^t dt = [e^t]_0^y = e^y - e^0$$

Ainsi,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = +\infty$ . Donc,  $\int_0^{+\infty} e^t dt$  diverge.

Finalement,  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$  diverge.

## II - Fonctions continues par morceaux

### Définition 4 - Fonction continue par morceaux

Soient  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . La fonction  $f$  est *continue sauf en un nombre fini de points* si

- $f$  est continue en tout point de  $I$ , sauf en un nombre fini de points  $a_0, \dots, a_n$ ,
- $f$  admet des limites finies à gauche et à droite en chaque point  $a_0, \dots, a_n$ .

### Exemple 4

- Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après les théorèmes généraux, la fonction  $f$  est continue sauf éventuellement en 0.

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ , alors  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.

- Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après les théorèmes généraux, la fonction  $f$  est continue sauf éventuellement en  $-1$  et en  $1$ .

D'une part,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ .

D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ .

Ainsi,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en  $-1$  et  $1$  où elle admet des limites finies à gauche et à droite.

### Définition 5 - Intégrales des fonctions continues par morceaux

Soit  $f$  une fonction continue sauf en un nombre fini de points sur  $I$ . Alors, l'intégrale de  $f$ , si elle converge, est égale à la somme des intégrales de  $f$  sur chacun des intervalles sur lesquels elle est continue.

### Exemple 5

En reprenant les définitions précédentes.

•

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt \\ &= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2} + \int_{-1}^1 0 dt + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \\ &= 1 + 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$