

T.D. XIV - Nombres complexes

I - Écritures

Solution de l'exercice 1.

1. En développant l'expression,

$$\begin{aligned}(2 + 6i)(6 + i) &= 2(1 + 3i)(6 + i) = 2(6 - 3 + (6 + 3)i) \\ &= 2(3 + 9i) = 6 + 18i.\end{aligned}$$

2. En utilisant une identité remarquable,

$$\begin{aligned}(4 - 3i)^2 &= 4^2 - 2 \times 4 \times 3i + (-3i)^2 \\ &= 16 - 24i - 9 = 7 - 24i.\end{aligned}$$

3. En utilisant une identité remarquable,

$$(1 - 2i)(1 + 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5.$$

4. En utilisant la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2 - 3i)^4 &= 2^4 - 4 \times 2^3 \times 3i + 6 \times 2^2 \times (3i)^2 - 4 \times 2 \times (3i)^3 + (3i)^4 \\ &= 16 - 96i - 216 + 216i + 81 = -119 + 120i.\end{aligned}$$

5. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$\frac{1}{3 - i} = \frac{3 + i}{3^2 + 1} = \frac{3 + i}{10}.$$

6. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$\begin{aligned}\frac{1 - \sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i} &= \frac{(1 - \sqrt{3}i)(-1 + \sqrt{3}i)}{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} \\ &= -\frac{(1 - \sqrt{3}i)^2}{1 + 3} = -\frac{1 - 2\sqrt{3}i - 3}{4} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.\end{aligned}$$

7. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$\begin{aligned}\frac{1 - i}{1 + \sqrt{3}i} &= \frac{(1 - i)(1 - \sqrt{3}i)}{1^2 + \sqrt{3}^2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{3} - \sqrt{3}i - i}{4} \\ &= \frac{1 - \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})i}{4}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 2.

1. $12 = 12e^{0i}.$

2. $\frac{3}{2}i = \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}.$

3. $-3 = 3e^{\pi i}.$

4. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2\pi}{3}i}.$

5. $-2i = e^{\pi i} 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2e^{\frac{3\pi}{2}i}.$

6. $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{i(-i-1)} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}.$

7.

$$\begin{aligned}\left(\frac{i}{1+i}\right)^4 &= \left(\frac{i}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}\right)^4 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{e^{\frac{\pi}{4}i}}\right)^4 \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^4 \\ &= \frac{1}{4} e^{\pi i}.\end{aligned}$$

8.

$$-3(\cos(\theta) + \sin(\theta)i) = e^{\pi i} \times 3 \times e^{\theta i} = 3e^{(\pi+\theta)i}.$$

9. D'après la parité des fonctions cosinus et sinus,

$$2(\cos(2\theta) - \sin(2\theta)i) = 2(\cos(-2\theta) + \sin(-2\theta)i) = 2e^{-2\theta i}.$$

10.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(1-i) &= \left(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}i\right)\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}i\right) \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}i} \times \sqrt{2} \times e^{-\frac{\pi}{4}i} \\ &= \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}. \end{aligned}$$

11. En divisant numérateur et dénominateur par 2,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{3}i} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{e^{-\frac{\pi}{3}i}} \\ &= e^{(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})i} \\ &= e^{\frac{\pi}{12}i}. \end{aligned}$$

12. En utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques,

$$\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \text{ et } \cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Ainsi,

$$\sin(\theta) + \cos(\theta)i = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)i = e^{(\frac{\pi}{2} - \theta)i}.$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. En utilisant la définition du module,

$$|z|^2 = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 1^2}{(1 + \sqrt{2})^2 + (-1)^2} = 1.$$

Ainsi, $|z| = 1$.

2. En utilisant les propriétés de l'inverse,

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 + \sqrt{2} + i)(1 + \sqrt{2} + i)}{(1 + \sqrt{2})^2 + 1^2} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2})i - 1}{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2(1 + \sqrt{2})i - 1}{2(2 + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}(1 + i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i). \end{aligned}$$

3. En utilisant la question précédente,

$$z = e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Or, $2021 = 4 \times 505 + 1$, soit

$$\begin{aligned} z^{2021} &= e^{\frac{2021}{4}\pi i} = e^{(505 + \frac{1}{4})\pi i} \\ &= (e^{\pi i})^{505} \times e^{\frac{\pi}{4}i} \\ &= (-1)^{505} e^{\frac{\pi}{4}i} \\ &= -e^{\frac{\pi}{4}i}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4. Comme a et b sont de module 1, il existe θ et φ deux réels tels que $a = e^{\theta i}$ et $b = e^{\varphi i}$. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{e^{\theta i} + e^{\varphi i}}{e^{\theta i} - e^{\varphi i}} \\ &= \frac{e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i} e^{\frac{\theta-\varphi}{2}i} + e^{-\frac{\theta-\varphi}{2}i}}{e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i} e^{\frac{\theta-\varphi}{2}i} - e^{-\frac{\theta-\varphi}{2}i}} \\ &= \frac{2 \cos \frac{\theta-\varphi}{2}}{2i \sin \frac{\theta-\varphi}{2}} \\ &= -\frac{\cos \frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin \frac{\theta-\varphi}{2}} i \\ &\in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. Comme $x \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $e^{xi} \neq 0$. Ainsi, d'après la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{kxi} &= \frac{1 - e^{(n+1)xi}}{1 - e^{xi}} \\ &= \frac{e^{\frac{n+1}{2}xi}}{e^{\frac{x}{2}i}} \times \frac{e^{-\frac{n+1}{2}xi} - e^{\frac{n+1}{2}xi}}{e^{-\frac{x}{2}i} - e^{\frac{x}{2}i}} \\ &= e^{\frac{n}{2}xi} \frac{-2i \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{\frac{n}{2}xi}. \end{aligned}$$

2. En utilisant l'expression précédente,

$$\left(\sum_{k=0}^n \cos(kx)\right) + \left(\sum_{k=0}^n \sin(kx)\right)i = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\cos\left(\frac{n}{2}x\right) + \sin\left(\frac{n}{2}x\right)i\right).$$

Ainsi, en identifiant les parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(kx) &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{n}{2}x\right), \\ \sum_{k=0}^n \sin(kx) &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{n}{2}x\right). \end{aligned}$$

□

II - Résolution d'équations**Solution de l'exercice 6.**

1. Le discriminant vaut $-9 = -3^2$. Ainsi, les solutions sont

$$-3i \text{ et } 3i.$$

2. Le discriminant vaut $(-1)^2 - 4 = -3$. Ainsi, les solutions sont

$$\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ et } \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

3. Le discriminant vaut $1^2 - 4 = -3$. Ainsi, les solutions sont

$$\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ et } \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

4. On écrit $3z^2 - 6z + 6 = 3(z^2 - 2z + 2)$. Le discriminant vaut $(-2)^2 - 4 \times 2 = -4$. Ainsi, les solutions sont

$$\frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \text{ et } \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i.$$

5. On pose $x = z^2$. Alors, $x^2 + x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $1^2 - 4 = -3$ donc les solutions sont

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

On remarque que

$$x_1 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) = e^{\pi i} e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{4\pi}{3}i}.$$

Donc, $x_2 = \overline{x_1} = e^{-\frac{4\pi}{3}i}$.

Ainsi, $z^2 \in \left\{e^{\frac{4\pi}{3}i}, e^{-\frac{4\pi}{3}i}\right\}$.

* Si $z^2 = x_1 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$, alors

$$z \in \left\{e^{\frac{4\pi}{6}i}, -e^{\frac{4\pi}{6}i}\right\}.$$

* Si $z^2 = x_2 = e^{-\frac{4\pi}{3}i}$, alors

$$z \in \left\{e^{-\frac{4\pi}{6}i}, -e^{-\frac{4\pi}{6}i}\right\}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ e^{\frac{4\pi}{6}i}, -e^{\frac{4\pi}{6}i}, e^{\frac{-4\pi}{6}i}, -e^{\frac{-4\pi}{6}i} \right\}.$$

6. En posant $x_1 = e^{\theta i}$ et $x_2 = e^{-\theta i}$, on constate que

$$x_1 + x_2 = 2 \cos(\theta),$$

$$x_1 \times x_2 = 1.$$

Ainsi, d'après les relations coefficients / racines, x_1 et x_2 sont racines du trinôme $X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1$. Finalement, l'ensemble des solutions recherchées est donc

$$\left\{ e^{\theta i}, e^{-\theta i} \right\}.$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. D'après les propriétés du module, $|z|^n = |1| = 1$. Comme $|z|$ est un réel strictement positif, alors $|z| = 1$.

2. Comme $z^n = e^{\theta i} = 1 = e^{0i}$, alors

$$n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; n\theta = 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

3. a) L'ensemble des solutions de $z^2 = 1$ est $\{-1, 1\}$.

b) D'après la question précédente, si $z^3 = 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2k\pi}{3}i}$. En utilisant la 2π -périodicité de l'exponentielle, l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ 1, e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{\frac{4\pi}{3}i} \right\}.$$

Les images sont les sommets d'un triangle équilatéral.

c) D'après la question précédente, si $z^4 = 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2k\pi}{4}i}$. En utilisant la 2π -périodicité de l'exponentielle, l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ 1, e^{\frac{2\pi}{4}i}, e^{\frac{4\pi}{4}i}, e^{\frac{6\pi}{4}i} \right\} = \{1, i, -1, -i\}.$$

Les images sont les sommets d'un carré.

d) D'après la question précédente, si $z^5 = 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2k\pi}{5}i}$. En utilisant la 2π -périodicité de l'exponentielle, l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ 1, e^{\frac{2\pi}{5}i}, e^{\frac{4\pi}{5}i}, e^{\frac{6\pi}{5}i}, e^{\frac{8\pi}{5}i} \right\}.$$

Les images sont les sommets d'un pentagone régulier. □

III - Géométrie

Solution de l'exercice 8.

a) On utilise la définition du module puis l'hypothèse :

$$\begin{aligned} |1+z|^2 + |1-z|^2 &= (1+z) \cdot (1+\bar{z}) + (1-z) \cdot (1-\bar{z}) \\ &= 1+z+\bar{z}+|z|^2 + 1-\bar{z}-z+|z|^2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

b) Il s'agit du théorème de Pythagore! En effet, les points d'affixes A , B et C d'affixes 1 , z et -1 sont disposés sur le cercle unité et forment un triangle rectangle en le point d'affixe z . De plus, les points A et C sont les extrémités du diamètre de longueur 2. Le théorème de Pythagore assure donc que

$$\begin{aligned} BA^2 + BC^2 &= AC^2 \\ |z-1|^2 + |-1-z|^2 &= 2^2 \\ |1-z|^2 + |1+z|^2 &= 4. \end{aligned}$$

On remarque qu'il s'agit également d'un cas particulier de l'identité du parallélogramme. Si on note $A(1+z)$, $B(z-1)$, $C(-1-z)$ et $D(1-z)$, alors $ABCD$ forme un losange de côté 2. L'identité du parallélogramme assure que la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés, soit

$$\begin{aligned} AD^2 + BC^2 &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \\ (2|1-z|)^2 + (2|1+z|)^2 &= 4 \times 2^2 \\ |1-z|^2 + |1+z|^2 &= 4. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. La transformation associée à f est donc la rotation de centre d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
2. f est la translation d'affixe $12 + 16i$.
3. Comme $f(z) = e^{\frac{\pi}{2}i}z + 1$. Si $f(\omega) = \omega$, alors $\omega = \frac{1+i}{2}$. Ainsi,

$$f(z) = i(z - \omega) + \omega = e^{\frac{\pi}{2}i}(z - \omega) + \omega.$$

Ainsi, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont le centre est d'affixe $\frac{1+i}{2}$. □

Solution de l'exercice 10. Un nombre complexe est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué. Ainsi, en raisonnant par équivalences,

$$\begin{aligned} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 &\in \mathbb{R} \\ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 &= \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2} \\ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 &= \left(\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}\right)^2 \\ (z+1)^2(\bar{z}-1)^2 &= (\bar{z}+1)^2(z-1)^2 \\ (z^2 + 2z + 1)(\bar{z}^2 - 2\bar{z} + 1) &= (\bar{z}^2 + 2\bar{z} + 1)(z^2 - 2z + 1) \\ -2z^2\bar{z} + 2z\bar{z}^2 + 2z - 2\bar{z} &= -2z\bar{z}^2 + 2\bar{z}z^2 + 2\bar{z} - 2z \\ z\bar{z}^2 - z^2\bar{z} + z - \bar{z} &= 0 \\ |z|^2(\bar{z} - z) + (z - \bar{z}) &= 0 \\ (z - \bar{z})(1 - |z|^2) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

- * soit $z - \bar{z} = 0$, i.e. $z = \bar{z}$ et z est réel,
- * soit $1 - |z|^2 = 0$ soit $|z| = 1$.

Comme $z \neq 1$, l'ensemble des solutions est donc

$$(\mathbb{R} \cup \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}) \setminus \{1\}.$$

□