

T.P. V - Fonctions

Code Capytale : a656-2028011

I - Définition & Tracé

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x^x.$$

1. Compléter le script Python suivant pour que la fonction `f` prenne en entrée un réel x et renvoie la valeur de $f(x)$.

```
def f(x):  
    return ...
```

2. Compléter le code suivant pour qu'il affiche le graphe de f sur l'intervalle $[0,01;3]$.

```
import matplotlib.pyplot as plt  
import numpy as np  
  
X = np.arange(..., ..., 0.01)  
Y = [ ... for x in X]  
  
plt.figure()  
plt.plot(..., ..., 'r')  
  
....
```

3. On rappelle que $x^x = e^{x \ln(x)}$. Définir une fonction g telle que l'appel $g(x)$ retourne la valeur de $g(x) = e^{x \ln(x)}$.

```
import numpy as np  
  
def g(x):  
    return ...
```

4. Compléter le script suivant pour qu'on puisse constater la superposition entre les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[0,01;3]$.

```
import matplotlib.pyplot as plt  
  
X = np.arange(..., ..., 0.01)  
Yf = [ ... for x in X]  
Yg = [ ... for x in X]  
  
plt.figure()  
plt.plot(..., ..., 'r')  
plt.plot(..., ..., 'g--')  
....
```

Exercice 2. Pour tout n entier naturel, on pose

$$u_n = \frac{e^n}{2e^n + n^2}.$$

1. Compléter le script suivant pour que l'appel `u(n)` renvoie la valeur de u_n .

```
def u(n):  
    y = ...  
    return y
```

2. Compléter le code suivant pour qu'il affiche les valeurs de u_{10} et u_{50} :

```
print("La valeur de u_10 est :", ...)  
print("La valeur de u_50 est :", ...)
```

3. Compléter le script suivant pour qu'il trace la suite de points de coordonnées $((n, u_n))_{n \in \llbracket 0, 100 \rrbracket}$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

X = range(..., ...)
Y = [... for n in X]

plt.figure()
plt.plot(..., ...)

plt.show()
```

4. Que conjecturez-vous sur le comportement de la suite (u_n) ?

II - Fonction définie par morceaux

Exercice 3. [Inspiré d'Ecricome - 2021 - Exercice 2] On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Compléter le script Python suivant pour que la fonction g prenne en entrée un réel x et calcule $g(x)$.

```
import numpy as np

def g(x):
    if x < 0:
        ....
    else:
        ....
```

2. Utilisez le script précédent pour afficher les valeurs de $g(-1)$ et $g(\ln(2))$.

```
print(...)
print(...)
```

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Compléter le script Python suivant pour que la fonction f prenne en entrée un réel x et renvoie la valeur de $f(x)$.

```
def f(x):
    if x <= 3 and ... :
        ....
    else:
        ....
```

2. Compléter le code suivant pour qu'il affiche le graphe de f sur l'intervalle $[-5, 5]$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

X = np.arange(..., ..., 0.01)
Y = [... for x in X]

plt.figure()
plt.plot(..., ..., 'r')

....
```

III - Fonction avec paramètres

Exercice 5. Pour tout n entier naturel, on définit la fonction

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Compléter le code suivant pour que l'appel `f(n, x)` renvoie la valeur de $f_n(x)$:

```
def f(n, x):
    if x >= 0 and ...:
        return ...
    else:
        return ...
```

2. Compléter le code suivant pour qu'il affiche la superposition, sur un même graphique, des courbes représentatives de f_n pour $n \in \{0, 2, 5, 10\}$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

X = np.arange(0, 1.001, 0.001)

plt.figure()
for n in [...]:
    Yn = [... for x in X]
    plt.plot(X, Yn, label="Graphe de f_"+str(n))

plt.legend()
plt.show()
```

Exercice 6. (Une suite d'intégrales) [Inspiré d'Ecricome - 2022 - Exercice 2]

Pour tout n entier naturel, on note $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Compléter le code suivant pour qu'il affiche les représentations graphiques des fonctions f_1 , f_5 , f_{10} , f_{20} et f_{50} sur l'intervalle $[0, 1]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return ...

X = np.linspace(0, 1, 100)

plt.figure()
for n in [...]:
    Y = [... for ... in X]
    plt.plot(..., ..., "--", label=r"fn pour n="+str(n))

plt.legend()
...
```

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, interpréter géométriquement l'intégrale I_n .

3. En utilisant le graphique ci-dessus, conjecturer la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.