

VI - Variables aléatoires discrètes infinies

I - Variables aléatoires discrètes infinies

I.1 - Loi de probabilité

Définition 1 - Variable aléatoire discrète infinie

Une variable aléatoire X est *discrète infinie* si les valeurs prises par X sont en nombre infini et peuvent être indexées par \mathbb{N} . On notera

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\} = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

Dans toute la suite, on se limitera aux variables aléatoires qui ne prennent que des valeurs positives.

Exemple 1

- Un dé est lancé jusqu'à obtenir la valeur 6. On note T le rang du lancer où le premier 6 est obtenu. La variable aléatoire T peut prendre les valeurs :
 - ★ 1 si le 6 apparaît au premier lancer,
 - ★ 2 si le 1^{er} lancer n'est pas un 6 et que le 2^e l'est,
 - ★ 3 si les 1^{er} et 2^e lancers ne sont pas des 6 et que le 3^e l'est,
 - ★ ...
- Une étudiante collectionne les cartes de 23 joueurs de foot de son équipe nationale qui sont distribuées dans des tablettes de chocolat. On note T le nombre de tablettes achetées pour que sa collection soit complète. T peut prendre les valeurs :
 - ★ 23 si elle a obtenu à chaque achat une carte différente,
 - ★ 24 si elle a obtenu exactement une carte en double,
 - ★ ...

Définition 2 - Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *loi de probabilité* de X est la donnée :

- des valeurs x_0, x_1, x_2, \dots prises par X ,
- de la famille de probabilités $(\mathbf{P}([X = x_0]), \mathbf{P}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}([X = x_n]), \dots)$.

Exemple 2 - Instant du premier Pile

On note T le numéro du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

D'une part, $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

D'autre part,

- $[T = 1]$ correspond à obtenir un Pile lors du premier lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}.$$

- $[T = 2]$ correspond à obtenir Face lors du premier lancer et Pile lors du second lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = 2]) = \mathbf{P}(\{(F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$

- $[T = 3]$ correspond à obtenir Face lors des 2 premiers lancers et Pile lors du troisième lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = 3]) = \mathbf{P}(\{(F, F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$

- ...

- $[T = n]$ correspond à obtenir Face lors des $n - 1$ premiers lancers et Pile lors du n^e lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = n]) = \mathbf{P}(\{(F, F, \dots, F, P)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

La loi de T peut être représentée dans un tableau contenant une infinité de colonnes :

x	$= 1$	2	3	\dots	n	\dots
$\mathbf{P}([X = x])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$(\frac{2}{3})^2 \times \frac{1}{3}$	\dots	$(\frac{2}{3})^{n-1} \times \frac{1}{3}$	\dots

Définition 3 - Système complet

Si X est une variable aléatoire discrète infinie, la famille d'événements $([X = x_0], [X = x_1], [X = x_2], \dots)$ est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = x_k]) = 1.$$

Exemple 3 - Instant du premier Pile

En reprenant l'exemple précédent,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

1.2 - Fonction de répartition

Définition 4 - Fonction de répartition

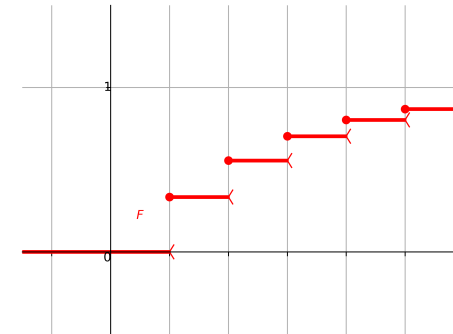
Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *fonction de répartition* de X est la fonction F_X définie pour tout x réel par $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$.

Exemple 4 - Instant du premier Pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

- Si $x < 1$, $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- Si $1 \leq x < 2$, $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}$.
- Si $2 \leq x < 3$,
 $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(T \in \{1, 2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.
- Si $3 \leq x < 4$,
 $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(T \in \{1, 2, 3\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{19}{27}$.
- ...
- Si $n \leq x < n+1$,
 $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(T \in \llbracket 1, n \rrbracket) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- ...

On obtient le graphe suivant :



Proposition 1 - Fonction de répartition

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète infinie et à valeurs positives.

- F est à valeurs dans $[0, 1]$.
- $\forall x < 0, F(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

I.3 - Espérance et Variance**Définition 5 - Espérance**

Soit X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$.

La variable aléatoire X admet une espérance si la série $\sum x_i \mathbf{P}([X = x_i])$ est convergente. L'espérance de X est alors :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}([X = x_i]).$$

Exemple 5 - Instant du premier pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

On admet que pour tout $x \in [0, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Alors, comme $\frac{2}{3} \in [0, 1[, \sum n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ converge et

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 3.$$

Proposition 2 - Linéarité de l'espérance

Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes infinies admettant une espérance et a un réel. Alors,

$$\mathbf{E}[aX + Y] = a\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y].$$

Exemple 6 - Instant du premier pile

Un joueur joue à Pile ou Face, avec une pièce qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$, contre son banquier qui lui propose le contrat suivant :

- le joueur paye 40 euros pour jouer,
- la pièce de monnaie est lancée successivement jusqu'à obtenir Pile. Il gagne 10 euros lors de chacun de ces lancers.

En notant G le gain du joueur et T le nombre de lancers effectués, alors $G = 10 \times T - 40$. En utilisant les propriétés précédentes,

$$\mathbf{E}[G] = 10\mathbf{E}[T] - 40 = 10 \times 3 - 40 = -10.$$

Théorème 1 - Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives et f une fonction réelle à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum f(x_i) \mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i) \mathbf{P}([X = x_i]).$$

Définition 6 - Variance, Écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. Notons $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum x_i^2 \mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors X admet une variance et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2].$$

L'écart-type de X est la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Proposition 3 - Propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire discrète infinie qui admet une variance.

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$.
- $\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$.

Exemple 7 - Pile/Face contre le banquier

On reprend l'exemple précédent et on admet que $\mathbf{V}(T) = 6$. Alors,

$$\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(10T - 40) = 10^2 \mathbf{V}(T) = 600$$

et $\sigma(G) \simeq 24.5$.

II - Lois usuelles**II.1 - Loi géométrique****Définition 7 - Loi géométrique**

Soit $p \in [0, 1]$. La variable aléatoire T suit une loi *géométrique* de paramètre p si

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(T = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

On note $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Étant donnée une suite d'épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à p , la variable aléatoire égale au *rang du premier succès* suit une loi géométrique de paramètre p .

Proposition 4 - Espérance, Variance

Soit $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On admet que

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Exemple 8 - Instant du premier pile

Reprendre les exemples de la partie précédente.

II.2 - Loi de Poisson**Définition 8 - Loi de Poisson**

Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire Z suit une loi de *Poisson* de paramètre λ si

- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

On note $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Étant donnée une suite de N épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à p . Si N est grand et p est petit, la variable aléatoire égale au *nombre de succès* suit approximativement une loi de Poisson de paramètre λ .

Proposition 5 - Espérance, Variance

Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On admet que

$$\mathbf{E}[Z] = \lambda \text{ et } \mathbf{V}(Z) = \lambda.$$

Exemple 9 - Accidentés

Une banque accorde quotidiennement des crédits. Étant donné un crédit, la probabilité qu'il revienne au service contentieux dans un laps de temps d'un an est égale à 4%. On suppose que 100 crédits ont été accordés au mois de janvier.

On note X le nombre de crédits qui sont revenus au service contentieux un an plus tard. X compte le nombre de succès (contentieux) lors d'une suite d'épreuves de Bernoulli de probabilité de succès 4%. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, 0.04)$ et $\mathbf{E}[X] = 4$.

On suppose que X peut être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de paramètre $\mathbf{E}[X]$. On donne la table d'une loi de Poisson de paramètre 4 ci-dessous :

z	0	1	2	3	4	5	...
$\mathbf{P}([Z = z])$	0.018	0.147	0.195	0.195	0.156	...	

Alors,

- $\mathbf{P}(X = 0) \simeq \mathbf{P}(Z = 0) \simeq 0.018$.
- $\mathbf{P}(X \leq 3) \simeq \mathbf{P}(Z \leq 3) \simeq 0.018 + 0.147 + 0.195 \simeq 0.36$.
- $\mathbf{P}(X > 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 3) \simeq 1 - 0.36 \simeq 0.64$.