



I. Suites numériques

Indications pour l'exercice 1.

1. Se rappeler que $a_n \sim b_n$ si et seulement si $a_n - b_n = o(b_n)$.
Revenir aux ε et utiliser que, à p.c.r., $(1 - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon)b_n$.
Sommer ensuite cette relation puis utiliser la divergence de la série.
2. C'est un cas particulier de la question précédente.
3. Montrer que $\ln(u_n) \rightarrow 3$ puis utiliser la continuité de la fonction exponentielle. \square

Indications pour l'exercice 2.

1. a) Étudier les variations de $f : x \mapsto (x + m)^\alpha - x^\alpha - m^\alpha$.
b) (w_n) est une suite arithmétique.
2. Penser au théorème de la limite monotone.
3. Récurrence.
4. a) Revenir à la définition de la notion de limite.
b) Décomposer $n = mq + r$, où l a été choisi précédemment et r ne prend qu'un nombre fini de valeurs. \square

Indications pour l'exercice 4. Passer à la forme exponentielle puis factoriser par p^n . \square

II. Suites définies implicitement

Indications pour l'exercice 5.

1. Étudier les variations de $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.
2. En étudiant le signe $f_{n+1}(u_n)$, montrer que (u_n) est décroissante et minorée.

3. Étudier dans un premier temps la limite de la suite (nu_n) .
En notant $\varepsilon_n = nu_n - 1$, en déduire la limite de $(n\varepsilon_n)$.
Conclure. \square

Indications pour l'exercice 6.

1. Étudier les variations de f_n pour montrer que $a_n \in \left[0, \sqrt[n]{\frac{2}{n+1}}\right]$.
En étudiant le signe de $f_{n+1}(a_n)$, montrer ensuite que (a_n) est décroissante et minorée.
Après avoir montré que (u_n^{n+1}) converge, en déduire que $\ell = 1/2$.
2. En notant $u_n = a_n - \frac{1}{2}$, montrer que $2^n u_n \rightarrow 1$. \square

III. Fonctions de la variable réelle

Indications pour l'exercice 7. Étudier les limites à droite et à gauche en distinguant les points entiers. \square

Indications pour l'exercice 8.

1. Faire un dessin puis utiliser des caractérisations séquentielles.
2. Utiliser la question précédente. \square

Indications pour l'exercice 9. Montrer que $u_n \rightarrow \sup_{[a,b]} |f| = M$.

Pour cela, montrer que $u_n \leq M$.

Ensuite, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $u_n^n \geq \eta(M - \varepsilon)^n$. \square

Indications pour l'exercice 10. En justifiant, dériver puis vérifier l'ensemble des solutions. \square

Indications pour l'exercice 11.

1. Utiliser la définition des racines multiples, puis utiliser le théorème de Rolle entre les racines.
2. Remarquer que $P^2 + a^2$ est à racines complexes alors que Q' est à racines réelles. \square

Indications pour l'exercice 12. Étudier de manière pédestre la régularité de f en 0 : continuité, dérivabilité (théorème de prolongement dérivable), limite du taux d'accroissement de la dérivée. \square

IV. Relations de comparaison

Indications pour l'exercice 14. Penser à la formule de Taylor-Young.
Choisir comme contre-exemple une fonction paire non dérivable. \square

Indications pour l'exercice 15. Effectuer une intégration par parties puis majorer l'intégrale restante. \square

Indications pour l'exercice 16. Pour $x > 0$, relier $\arctan(x)$ et $\arctan(1/x)$. Utiliser ensuite le développement limité de la fonction arc-tangente. \square

Indications pour l'exercice 17.

1. Étudier le signe de la dérivée.

2. a) Utiliser les développements limités classiques.

b) Déterminer un équivalent de $f - t$ où t est l'équation de la tangente.

3. a) Effectuer un développement asymptotique de f en $+\infty$ en considérant $u \mapsto f(1/u)$.

b) Pousser, si ce n'est déjà fait, le développement précédent à l'ordre suivant. \square

V. Suites récurrentes

Indications pour l'exercice 18. Étudier les points fixes de f .
Montrer que f est décroissante et dresser le tableau de variations de $f \circ f$.

Distinguer enfin les cas $u_0 \in [0, 1/\sqrt{2}]$ et $u_0 \in [1/\sqrt{2}, +\infty[$. \square

Indications pour l'exercice 19. Étudier les variations de $t \mapsto \sqrt{2+2t}$ et chercher les points fixes.

Comparer $f_2 - f_1$ puis conclure. \square

VI. Avec Python

Indications pour l'exercice 20.

1. Étudier les variations de f_n .

2. a) On peut utiliser le module `numpy.polynomial`.

b) En étudiant le signe de $f_{n+1}(u_n)$, on montre que (u_n) est décroissante et minorée.

En montrant que $u_n^n \rightarrow 0$, montrer que (u_n) converge vers 0.

c) \square
gb