

II - Récurrences

À Savoir

Le raisonnement par récurrence se déroule en 3 étapes principales.

- * On énonce clairement la propriété à démontrer. Cette propriété doit dépendre d'un entier naturel noté n .
- * **L'initialisation.** On montre la propriété précédente lorsque $n = 0$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel) ou lorsque $n = 1$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul).

Généralement, la propriété est une égalité. On montre alors que les deux membres de l'égalité sont égaux à une même valeur.

- * **L'hérédité.** On fixe un entier naturel n . On suppose la propriété vraie à l'ordre n (c'est l'hypothèse de récurrence). On montre que la propriété est vraie lorsque n est remplacé par $(n + 1)$ (ne pas oublier le parenthésage).

Généralement, on part d'un côté de l'égalité et on arrive à l'autre côté. Une des étapes du calcul utilise l'hypothèse de récurrence.

- * **Conclusion.** On conclut clairement en citant l'initialisation, l'hérédité et le principe de récurrence.

I - Les classiques : Sommes d'entiers

Solution de l'exercice 1. On note $P_n : \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^0 k = \frac{0(0+1)}{2}$. Or,

$$\sum_{k=0}^0 k = 0$$
$$\frac{0(0+1)}{2} = 0$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \text{ Or,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k &= 0 + 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\ &= [0 + 1 + \cdots + n] + (n+1), \text{ d'après les propriétés des sommes} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 2. On note $P_n : \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^0 k^2 = \frac{0(0+1)(2 \times 0+1)}{6}$. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 k^2 &= 0^2 = 0 \\ \frac{0(0+1)(2 \times 0+1)}{6} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 \\ &= [0^2 + 1^2 + \cdots + n^2] + (n+1)^2, \text{ d'après les propriétés des sommes} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{n+1}{6} [n(2n+1) + 6(n+1)] \\ &= \frac{n+1}{6} [2n^2 + n + 6n + 6] \\ &= \frac{n+1}{6} [2n^2 + 7n + 6] \\ &= \frac{n+1}{6} (n+2)(2n+3), \text{ car } (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6 \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier

naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□

Solution de l'exercice 3. On note $P_n : \sum_{k=0}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^0 k^3 = \left[\frac{0(0+1)}{2} \right]^2$. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 k^3 &= 0 \\ \left[\frac{0(0+1)}{2} \right]^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$. Montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2. \text{ Or,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \\ &= [0^3 + 1^3 + \cdots + n^3] + (n+1)^3, \text{ d'après les propriétés des sommes} \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2^2} [n^2 + 4(n+1)] \\ &= \frac{(n+1)^2}{2^2} [n^2 + 4n + 4] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \times (n+2)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier

naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

□

II - Formules de sommes

Solution de l'exercice 4. On note $P_n : \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^0 q^k = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 q^k &= q^0 = 1 \\ \frac{1-q^{0+1}}{1-q} &= \frac{1-q}{1-q} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$
 Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \\ &= [q^0 + q^1 + \cdots + q^n] + q^{n+1}, \text{ d'après les propriétés des sommes} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - \underbrace{q \cdot q^{n+1}}_{q^{n+2}}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

□

Solution de l'exercice 5. Notons $P_n : (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$.

Or,

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1 \\ \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} &= \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Mon-

trons que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$. Or,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b), \text{ d'après la définition des puissances} \\
&= \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right] (a+b), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \text{ par distributivité} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}, \text{ par distributivité} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n-(\ell-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}, \text{ en posant } \ell = k+1 \\
&= \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n-(\ell-1)} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \dots \\
&\quad \dots + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}, \text{ d'après le triangle de Pascal} \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier

naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

□

III - Inégalités

Solution de l'exercice 6. On note $P_n : (1+x)^n \geq 1+nx$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $(1+x)^0 \geq 1+0x$. Or,

$$\begin{aligned}
(1+x)^0 &= 1 \\
1+0x &= 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(1+x)^n \geq 1+nx$. Montrons que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. En effet,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \times (1+x), \text{ d'après la définition des puissances} \\
&\geq (1+nx) \times (1+x), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&\geq 1+x+nx+nx^2 \\
&\geq 1+(n+1)x+nx^2 \\
&\geq 1+(n+1)x, \text{ car } nx^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx.$$

□

Solution de l'exercice 7. On note $P_n : u_n \leq 3$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 \leq 3$.

Or, $u_0 = 0 \leq 3$, donc P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leq 3$. Montrons que $u_{n+1} \leq 3$.
En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{u_n + 6}, \text{ d'après la définition de } (u_n) \\ &\leq \sqrt{3 + 6}, \text{ d'après l'H.R. et la croissance de la fonction racine} \\ &\leq \sqrt{9} \\ &\leq 3. \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3.$$

□

Solution de l'exercice 8. On note $P_n : 0 \leq u_n \leq 5$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $0 \leq u_0 \leq 5$.

$u_0 = 3 \in [0, 5]$, donc P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leq u_n \leq 5$. Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 5$. En effet,

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_n \leq 5, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ 15 &\leq u_n + 15 \leq 20 \\ \sqrt{15} &\leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{20}, \text{ la fonction racine étant croissante} \\ 0 &\leq \sqrt{15} \leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{20} \leq \sqrt{25}, \text{ la fonction racine étant croissante} \\ 0 &\leq u_{n+1} \leq 5, \text{ d'après la définition de } u_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 5.$$

□

Solution de l'exercice 9. On note $P_n : 4 \leq u_n \leq 10$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $4 \leq u_0 \leq 10$.

$u_0 = 6 \in [4, 10]$, donc P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $4 \leq u_n \leq 10$. Montrons que $4 \leq u_{n+1} \leq 10$. En effet,

$$\begin{aligned} 4 &\leq u_n \leq 10, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ 19 &\leq u_n + 15 \leq 25 \\ \sqrt{19} &\leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{25}, \text{ la fonction racine étant croissante} \\ \sqrt{16} &\leq \sqrt{19} \leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{25} \leq \sqrt{100}, \text{ la fonction racine étant croissante} \\ 4 &\leq u_{n+1} \leq 10, \text{ d'après la définition de } u_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4 \leq u_n \leq 10.$$

□

IV - Suites définies par récurrence

Solution de l'exercice 10. On note $P_n : u_n = 5 + 3n$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = 5 + 3 \times 0$. Or,

$$\begin{aligned} u_0 &= 5, \text{ d'après la définition} \\ 5 + 3 \times 0 &= 5 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 5 + 3n$. Montrons que $u_{n+1} = 5 + 3(n+1)$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 3, \text{ d'après la définition} \\ &= 5 + 3n + 3, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 5 + 3(n+1). \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5 + 3n.$$

□

Solution de l'exercice 11. On note $P_n : u_n = 3 \times 5^n$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = 3 \times 5^0$. Or,

$$\begin{aligned} u_0 &= 3, \text{ d'après la définition} \\ 3 \times 5^0 &= 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 3 \times 5^n$. Montrons que $u_{n+1} = 3 \times 5^{n+1}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5 \times u_n, \text{ d'après la définition} \\ &= 5 \times 3 \times 5^n, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 3 \times 5^{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 5^n.$$

□

Solution de l'exercice 12. On note $P_n : u_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Or,

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \text{ d'après la définition} \\ \frac{0(0+1)}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (n+1), \text{ d'après la définition} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right] \\ &= (n+1) \frac{n+2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 13. On note $P_n : u_n = \sqrt{n+9}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \sqrt{0+9}$. Or,

$$\begin{aligned} u_0 &= 3, \text{ d'après la définition} \\ \sqrt{0+9} &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \sqrt{9+n}$. Montrons que $u_{n+1} = \sqrt{9+(n+1)}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n^2}, \text{ d'après la définition} \\ &= \sqrt{1+n+9}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \sqrt{9+(n+1)} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{9+n}.$$

□

Solution de l'exercice 14. On note $P_n : u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1}$. Or,

$$u_0 = 2, \text{ d'après la définition}$$

$$\frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \frac{2}{2n+1}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n + 1}, \text{ d'après la définition} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2}{2n+1} + 1}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{2}{2 + 2n + 1} \\ &= \frac{2}{2(n+1) + 1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}.$$

□