

T.D. IV - Matrices inversibles

I - Résolution de systèmes

Solution de l'exercice 1.

1. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 5x + y - 2z &= 3 \\ x + 4y + z &= 2 \\ -3x + 2y + 3z &= -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 4y + z &= 2 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 5x + y - 2z &= 3 & L_2 \leftarrow L_1 \\ -3x + 2y + 3z &= -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 4y + z &= 2 \\ 19y + 7z &= 7 & L_2 \leftarrow -L_2 + 5L_1 \\ 14y + 6z &= 4 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 4y + z &= 2 \\ 19y + 7z &= 7 \\ 16z &= -22 & L_3 \leftarrow 19L_3 - 14L_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x &= 2 - 4y - z = 2 - \frac{7}{8} + \frac{11}{8} = \frac{2 \times 8 - 4 \times 7 + 11}{8} = -\frac{1}{8} \\ y &= \frac{7}{19} - \frac{7}{19}z = \frac{7 \times 8 + 7 \times 11}{8 \times 19} = \frac{7 \times 19}{9 \times 19} = \frac{7}{8} \\ z &= -\frac{22}{16} = -\frac{11}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

La solution du système est donc $(x, y, z) = (-1/8, 7/8, -11/8)$.

2. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + 3y - z &= 1 \\ 5x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + y + z &= 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -x + y + z &= 5 & L_1 \leftarrow L_3 \\ 5x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 1 & L_3 \leftarrow L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -x + y + z &= 5 \\ 7y + 8z &= 25 & L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \\ 5y + z &= 11 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -x + y + z &= 5 \\ 7y + 8z &= 25 \\ -33z &= -48 & L_3 \leftarrow 7L_3 - 5L_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x &= -5 + y + z = \frac{-5 \times 11 + 21 + 16}{11} = -\frac{18}{11} \\ y &= \frac{25}{7} - \frac{8}{7}z = \frac{25 \times 11 - 8 \times 16}{7 \times 11} = \frac{275 - 128}{7 \times 11} = \frac{147}{7 \times 11} = \frac{21}{11} \\ z &= \frac{-48}{-33} = \frac{16}{11} \end{cases} \end{aligned}$$

La solution du système est donc $(x, y, z) = (-18/11, 21/11, 16/11)$.

3. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y - z &= 2 \\ 3x + 5y - z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 2 \\ 2y + 2z &= -5 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 3z &= -3 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2 - y + z = 2 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{5}{2} \\ y &= -\frac{5}{2} - z = -\frac{5}{2} + 1 = -\frac{3}{2} \\ z &= -1 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution du système est donc $(x, y, z) = (5/2, -3/2, -1)$.

4. En utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ 3x + 4y - z &= 2 \\ x + 3y + z &= 10 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ -2y + 2z &= 2 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ y + 2z &= 9 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ -2y + 2z &= -1 \\ 6z &= 17 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 - 2y + z = 1 - \frac{20}{3} + \frac{17}{6} = \frac{6-40+17}{6} = -\frac{17}{6} \\ y &= \frac{-1}{-2} - \frac{2}{-2}z = \frac{1}{2} + \frac{17}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \\ z &= \frac{17}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

La solution du système est donc $(x, y, z) = (-17/6, 10/3, 17/6)$. \square

Solution de l'exercice 2.

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + y + z + t &= 3 \\ x + y + z + t &= 12 \\ 3x + 2y + 2z + t &= 3 \\ 3x + y + 2z + 3t &= 5 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t &= 12 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 2x + y + z + t &= 3 & L_2 \leftarrow L_1 \\ 3x + 2y + 2z + t &= 3 \\ 3x + y + 2z + 3t &= 5 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t &= 12 \\ -y - z - t &= -21 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y - z - 2t &= -33 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ -2y - z &= -31 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t &= 12 \\ -y - z - t &= -21 \\ -t &= -12 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ z + 2t &= 11 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 12 - y - z - t = 12 - 22 + 13 - 12 = -9 \\ y &= 21 - z - t = 21 + 13 - 12 = 22 \\ t &= 12 \\ z &= 68 - 2t = 11 - 2 * 12 = -13 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution du système est donc $(x, y, z, t) = (-9, 22, -13, 12)$.

2. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 2x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 3z + t = 2 \\ 3x + y + 2z + 2t = -1 \\ 3x + y + 2z + 3t = 5 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z + t = 2 & L_2 \leftarrow L_1 \\ 2x + 2y + z + t = 1 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 3x + y + 2z + 2t = -1 \\ 3x + y + 2z + 3t = 5 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z + t = 2 \\ -5z - t = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2y - 7z - t = -7 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ -2y - 7z = -1 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z + t = 2 \\ -2y - 7z = -1 & L_2 \leftarrow L_4 \\ -2y - 7z - t = -7 \\ -5z - t = -3 & L_4 \leftarrow L_2 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z + t = 2 \\ -2y - 7z = -1 \\ -t = -6 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ -5z - t = -3 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y - 3z - t = 2 - \frac{13}{5} + 3 \times \frac{3}{5} - 6 = \frac{10-13+9-30}{5} = -\frac{24}{5} \\ y = \frac{1-7z}{2} = \frac{1}{2} + \frac{7 \times 3}{2 \times 5} = \frac{5+21}{10} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5} \\ t = 6 \\ z = \frac{3-t}{5} = \frac{3-6}{5} = -\frac{3}{5} \end{cases}
 \end{aligned}$$

La solution du système est donc $(x, y, z, t) = (-24/5, 13/5, -3/5, 6)$. \square

II - Inverses par calculs de produits

Solution de l'exercice 3.

1. En utilisant la formule du produit matriciel, on obtient

$$AB = I_3.$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = B$.

2. En utilisant la formule du produit matriciel, on obtient

$$AB = I_3.$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = B$.

3. En utilisant la formule du produit matriciel,

$$AB = 2I_3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 AB &= 2I_3 \\
 \frac{1}{2}AB &= I_3 \\
 A \left(\frac{1}{2}B \right) &= I_3.
 \end{aligned}$$

Donc, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}B$.

4. En utilisant la formule du produit matriciel, on obtient

$$AB = 18I_3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 AB &= 18I_3 \\
 \frac{1}{18}AB &= I_3 \\
 A \left(\frac{1}{18}B \right) &= I_3.
 \end{aligned}$$

Donc, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{18}B$. □

Solution de l'exercice 4.

1. En utilisant la définition du produit matriciel, on obtient

$$PQ = I_3.$$

Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = Q$.

2. Montrons par récurrence sur n que $M^n = P^{-1}A^nP$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $M^0 = P^{-1}A^0P$.

* $M^0 = I_3$, par définition.

* $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3$.

Ainsi, $M^0 = P^{-1}A^0P$ et la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $M^n = P^{-1}A^nP$. Montrons que $M^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n M, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= P^{-1}A^n P M, \text{ d'après l'H.R..} \end{aligned}$$

Pour avancer dans le calcul, exprimons M en fonction de A . Or, d'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} A &= P M P^{-1} \\ A P &= P M P^{-1} P, \text{ en multipliant à droite par } P \\ &= P M I_3 \\ &= P M \\ P^{-1} A P &= P^{-1} P M, \text{ en multipliant à gauche par } P \\ &= I_3 M \\ &= M. \end{aligned}$$

Ainsi $M = P^{-1}AP$ et en reprenant le calcul précédent,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= P^{-1}A^n P M \\ &= P^{-1}A^n P P^{-1} A P \\ &= P^{-1}A^n I_3 A P, \text{ car } P^{-1}P = I_3 \\ &= P^{-1}A^n A P \\ &= P^{-1}A^{n+1}P. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc pour tout n entier naturel,

$$M^n = P^{-1}A^nP.$$

□

III - Inverses par polynômes de matrices

Solution de l'exercice 5.

1. D'après la définition du produit matriciel,

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après les propriétés des puissances de matrices,

$$M^4 = M^2 \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} M^4 &= I_3 \\ M \times M^3 &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi, M est inversible et $M^{-1} = I_3$. □

Solution de l'exercice 6.

1. Un calcul fastidieux mais simple permet de montrer que

$$A^3 - 2A^2 - 12A + 19I_3 = 0_3.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
 A^3 - 2A^2 - 12A + 19I_3 &= 0_3 \\
 A^3 - 2A^2 - 12A &= -19I_3 \\
 -\frac{1}{19}(A^3 - 2A^2 - 12A) &= I_3 \\
 -\frac{1}{19}A(A^2 - 2A - 12I_3) &= I_3 \\
 A\left(-\frac{1}{19}(A^2 - 2A - 12I_3)\right) &= I_3.
 \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{19}(A^2 - 2A - 12I_3).$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. Un calcul long mais fastidieux permet de montrer que

$$A^3 - 2A^2 + 3A + 14I_3 = 0_3.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
 A^3 - 2A^2 + 3A + 14I_3 &= 0_3 \\
 A^3 - 2A^2 + 3A &= -14I_3 \\
 -\frac{1}{14}(A^3 - 2A^2 + 3A) &= I_3 \\
 -\frac{1}{14}A(A^2 - 2A + 3I_3) &= I_3 \\
 A\left(-\frac{1}{14}(A^2 - 2A + 3I_3)\right) &= I_3.
 \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{14}(A^2 - 2A + 3I_3).$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. D'après la définition de M ,

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

De manière analogue,

$$M + 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$(M - I_3)(M + 3I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
 (M - I_3)(M + 3I_3) &= 0_3 \\
 M \times M + 3MI_3 - I_3M + 3I_3 \times I_3 &= 0_3 \\
 M^2 + 3M - M + 3I_3 &= 0_3 \\
 M^2 + 2M &= -3I_3 \\
 -\frac{1}{3}(M^2 + 2M) &= I_3 \\
 -\frac{1}{3}M(M + 2I_3) &= I_3 \\
 M\left(-\frac{1}{3}(M + 2I_3)\right) &= I_3.
 \end{aligned}$$

Ainsi, M est inversible et

$$M^{-1} = -\frac{1}{3}(M + 2I_3).$$

□

IV - Non inversibilité

Solution de l'exercice 9.

1. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \times A = 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 8 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 16A. \end{aligned}$$

2. Supposons par l'absurde que A soit inversible. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^3 &= 16A \\ A^{-1}A^3 &= A^{-1}(16A), \text{ en multipliant à gauche par } A^{-1} \\ A^{-1}AA^2 &= 16A^{-1}A \\ A^2 &= 16I_3. \end{aligned}$$

Or, le calcul de la question précédente a montré que $A^2 \neq 16I_3$. On obtient ainsi une contradiction et la matrice A n'est pas inversible. \square

Solution de l'exercice 10.

1. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$A^2 = A \times A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Supposons par l'absurde que A soit inversible. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^3 &= 0_3 \\ A^{-1}A^3 &= A^{-1}0_3, \text{ en multipliant à gauche par } A^{-1} \\ A^{-1}AA^2 &= 0_3 \\ A^2 &= 0_3. \end{aligned}$$

Or, le calcul de la question précédente montre que $A^2 \neq 0_3$. On obtient ainsi une contradiction et A n'est donc pas inversible. \square

Solution de l'exercice 11.

1. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Supposons par l'absurde que A soit inversible. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} AB &= AC \\ A^{-1}AB &= A^{-1}AC, \text{ en multipliant à gauche par } A^{-1} \\ B &= C \end{aligned}$$

Or, B et C sont deux matrices différentes. On obtient ainsi une contradiction et A n'est donc pas inversible. \square

V - Inversibilité des matrices de taille 2

Solution de l'exercice 12.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $1 \times 1 - 4 \times 2 = -5 \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $1 \times 1 - (-4) \times 2 = 9 \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $3 \times 1 - 1 \times 0 = 3 \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $-1 \times 1 - 1 \times 5 = -6 \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Comme $-1 \times (-3) - 1 \times 3 = 0$, alors la matrice A n'est pas inversible.

6. On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$. Comme $5 \times (-2) - 10 \times (-1) = 0$, alors la matrice A n'est pas inversible. \square

Solution de l'exercice 13.

1. On remarque que

$$\begin{aligned} Y &= \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3y \\ x + 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, en notant $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a bien $AX = Y$.

2. La matrice A est de taille 2 et $-1 \times 2 - 1 \times 3 = -5 \neq 0$. Ainsi, la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} AX &= Y \\ A^{-1}AX &= A^{-1}Y, \text{ en multipliant à gauche par } A^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \times 11 + 3 \times 9 \\ 1 \times 11 + 1 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du système est $(1, 4)$. \square

VI - Inversibilité des matrices diagonales

Solution de l'exercice 14.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3. Comme A est diagonale et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 3 et 0. Comme A est diagonale et qu'un de ses coefficients diagonaux est nul, alors A n'est pas inversible.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 0 et 1. Comme A est diagonale et qu'un de ses coefficients diagonaux est nul, alors A n'est pas inversible.

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont -3 , 1 et 2 . Comme A est diagonale et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

VII - Inversibilité des matrices triangulaires

Solution de l'exercice 15.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3. Comme A est triangulaire et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible. Il faudra utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour connaître son inverse.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 27 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont 0 et 3. Comme A est triangulaire et qu'un de ses coefficients diagonaux est nul, alors A n'est pas inversible. Il faudra utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour connaître son inverse.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 75 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont 0 et 1. Comme A est triangulaire et qu'un de ses coefficients diagonaux est nul, alors A n'est pas inversible.

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont -3 , 1 et 2 . Comme A est triangulaire et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible. Il faudra utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour connaître son inverse. □

VIII - Inverses par méthodes du pivot

Solution de l'exercice 16.

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} AX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z &= a \\ y &= b \\ z &= c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= a - z = a - c \\ y &= b \\ z &= c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} AX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= a \\ -x + y &= b \\ x + z &= c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= a \\ y &= b + x = a + b \\ z &= c - x = -a + c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} AX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z &= a \\ 2x + y + z &= b \\ x - y + z &= c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z &= a \\ y - z &= b - 2a & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y &= c - a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= a - z = a - 3a + b + c = -2a + b + c \\ z &= y - b + 2a = a - c - b + 2a = 3a - b - c \\ y &= a - c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= -2a + b + c \\ y &= a - c & L_2 \leftarrow L_3 \\ z &= 3a - b - c & L_3 \leftarrow L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned}
 AX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z &= a \\ 2x + 3z &= b \\ -2x - y + z &= c \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z &= a \\ z &= b - 2a & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y + 3z &= c + 2a & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= a - z = a - b + 2a = 3a - b \\ z &= -2a + b \\ y &= -c - 2a + 3z = -c - 2a + 3b - 6a = -8a + 3b - c \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 3a - b \\ y &= -8a + 3b - c & L_2 \leftarrow L_3 \\ z &= -2a + b & L_3 \leftarrow L_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 17.

1. On utilise la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On utilise la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
-2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
\hline
3 & 3 & 0 & 3 & -2 & 1 & L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & L_2 \leftarrow L_3 + L_2 \\
0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 1 \\
\hline
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & L_1 \leftarrow 1/3 L_1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & L_3 \leftarrow -1/3 L_3
\end{array}$$

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On utilise la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
-2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
\hline
2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & L_2 \leftarrow L_3 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & L_3 \leftarrow L_2 \\
\hline
6 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\
0 & 3 & 0 & 1 & -4 & 3 & L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & L_1 \leftarrow 1/6 L_1 \\
0 & 1 & 0 & 1/3 & -4/3 & 3/3 & L_2 \leftarrow 1/3 L_2 \\
0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & L_3 \leftarrow 1/3 L_3
\end{array}$$

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. D'après la définition du produit matriciel,

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après les propriétés des puissances de matrices,

$$M^4 = M^2 \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

2. En développant cette expression,

$$\begin{aligned} (M - I_3)(M^3 + M^2 + M + I_3) &= M^4 + M^3 + M^2 + M - M^3 - M^2 - M - I_3 \\ &= M^4 - I_3 \\ &= 0_3. \end{aligned}$$

3. D'après la définition de M ,

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer l'inversibilité de M , on utilise la méthode de Gauss-

Jordan,

$$\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline -8 & -4 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -12 & 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline -24 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ 0 & -12 & 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1/4 & 2/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -2/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -2/4 & -3/4 \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -2L_2 + L_1 \\ \\ L_3 \leftarrow -3L_3 + L_2 \\ L_1 \leftarrow -4L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow -4L_2 - L_3 \\ \\ L_1 \leftarrow -3L_1 - L_2 \\ \\ L_1 \leftarrow -1/24L_1 \\ L_2 \leftarrow -1/12L_2 \\ L_3 \leftarrow -1/4L_3 \end{array}$$

Ainsi, $M - I_3$ est inversible et son inverse est

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Notons B l'inverse de $M - I_3$. Alors, d'après la question **2.**,

$$\begin{aligned} (M - I_3)(M^3 + M^2 + M + I_3) &= 0_3 \\ B(M - I_3)(M^3 + M^2 + M + I_3) &= B0_3, \text{ en multipliant à gauche par } B \\ M^3 + M^2 + M + I_3 &= 0_3, \text{ car } B(M - I_3) = I_3 \text{ et } B0_3 = 0_3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$M^3 + M^2 + M + I_3 = 0_3.$$

□

IX - Calculs de puissances

Solution de l'exercice 19. Montrons par récurrence que $A^n = PB^nP^{-1}$ pour tout n entier naturel.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $A^0 = PB^0P^{-1}$.

$$* A^0 = I,$$

$$* PB^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I.$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PB^nP^{-1}$. Montrons que $A^{n+1} = PB^{n+1}P^{-1}$. En effet,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= PB^nP^{-1}A, \text{ d'après l'H.R.} \end{aligned}$$

Pour avancer dans le calcul, exprimons A en fonction de B . D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= B \\ PP^{-1}AP &= PB, \text{ en multipliant à gauche par } P \\ AP &= PB, \text{ car } PP^{-1} = I \\ APP^{-1} &= PBP^{-1}, \text{ en multipliant à droite par } P^{-1} \\ A &= PBP^{-1}. \end{aligned}$$

En reprenant le calcul précédent,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= PB^nP^{-1}PBP^{-1} \\ &= PB^nIBP^{-1} \\ &= PB^nBP^{-1} \\ &= PB^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PB^nP^{-1}.$$

□

Solution de l'exercice 20.

1. En utilisant la définition du produit matriciel, on obtient

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} PQ &= 2I \\ \frac{1}{2}PQ &= I \\ P\left(\frac{1}{2}Q\right) &= I. \end{aligned}$$

Ainsi, P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2}Q.$$

2. En effectuant les produits matriciels,

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= PD\left(\frac{1}{2}Q\right) \\ &= \frac{1}{2}PDQ \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

3. Comme la matrice D est diagonale, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

4. Montrons par récurrence sur n que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $A^0 = PD^0P^{-1}$.

$$* A^0 = I,$$

$$* PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I.$$

Ainsi, $A^0 = PD^0P^{-1}$ et la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$. Montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$. En effet,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= PD^nP^{-1}A, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \text{ d'après la question 2.} \\ &= PD^nIDP^{-1}, \text{ car } PP^{-1} = I \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.$$

5. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= PD^n \left(\frac{1}{2}Q \right) \\ &= \frac{1}{2}PD^nQ \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 5^n \\ 0 & -2^n & 0 \\ 3^n & 0 & -5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 5^n & 0 & 3^n - 5^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 3^n - 5^n & 0 & 3^n + 5^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. La matrice D est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 3, 2 et 5. Comme D est diagonale et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors D est inversible et

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

7. En utilisant les propriétés de l'inverse d'un produit de matrices in-

versibles, A est inversible et

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= (PDP^{-1})^{-1} \\
 &= ((PD)P^{-1})^{-1} \\
 &= (P^{-1})^{-1}(PD)^{-1} \\
 &= PD^{-1}P^{-1} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 21.

1. Montrons par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $A^0 = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix}$.

* D'après les définitions des puissances de matrices, $A^0 = I$.

* D'après les définitions des puissances de réels,

$$\begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Montrons que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^{n+1-1} \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 A^{n+1} &= A^n A \\
 &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ d'après l'H.R.} \\
 &= \begin{pmatrix} 2^n \times 2 & 3^n \times 3 & 2^n + (3^n - 2^n) \times 3 \\ 0 & 3^n \times 3 & 3^n + n3^{n-1} \times 3 \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} & 2^n + 3^{n+1} - 3 \times 2^n \\ 0 & 3^{n+1} & 3^n + n3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} & 3^{n+1} + 2^n(1 - 3) \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

2. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = Q$.

3. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} PMP^{-1} &= PMQ \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

4. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} PMP^{-1} &= A \\ P^{-1}PMP^{-1} &= P^{-1}A, \text{ en multipliant à gauche par } P^{-1} \\ IMP^{-1} &= P^{-1}A \\ MP^{-1}P &= P^{-1}AP, \text{ en multipliant à droite par } P \\ MI &= P^{-1}AP \\ M &= P^{-1}AP. \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que pour tout n entier naturel, $M^n = P^{-1}A^nP$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $M^0 = P^{-1}A^0P$.

- * $M^0 = I$,
- * $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $M^n = P^{-1}A^nP$. Montrons que $M^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P$. En effet,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= P^{-1}A^nPM, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= P^{-1}A^nPP^{-1}AP, \text{ d'après le calcul précédent} \\ &= P^{-1}A^nIAP \\ &= P^{-1}A^nAP \\ &= P^{-1}A^{n+1}P. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = P^{-1}A^nP.$$

5. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} M^n &= P^{-1}A^nP \\ &= QA^nP \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & -3^n + 2^n - 3^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & -3^n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & -2 \times 3^n + 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & -3^n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2^n - 2 \times 3^n + 2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^n - 3^n + 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□