Devoir en temps libre

À rendre le lundi 05/02/2024

■ ■ ■

Exercice 1. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Montrer que $A^3 - 3A^2$ est proportionnelle à I.

b) En déduire que A est inversible, puis exprimer la matrice A^{-1} en fonction de A et de A^2.

c) On suppose importé le module Numpy via l'instruction `import numpy as np`. Écrire une instruction Python permettant de saisir la matrice A.

d) En utilisant la question **1.b)**, proposer une instruction Python qui permet de calculer A^{-1}.

2. On rappelle que, par convention, $A^0 = I$. Justifier que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}$, puis compléter le script suivant afin qu'il permette de saisir A puis de calculer et d'afficher A^{50}.

```
import numpy as np
I = np.array([[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]])
A = np.array([[...], [...], [...]])
B = np.dot(A, A)
for k in range(3, 51):
    C = 3 * B + (9/4) * I
    I = ...
    A = ...
    B = ...
print(B)
```

3. *On admet* que la matrice A possède au moins une valeur propre.

a) Montrer que, si λ est une valeur propre de A, alors on a : $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \frac{9}{4} = 0$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}.$$

c) En déduire que A ne possède qu'une seule valeur propre, notée λ_0, et la placer entre deux entiers consécutifs.

4. On souhaite démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que A n'est pas diagonalisable. On suppose donc que A est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

a) Montrer que $D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}I = 0$, puis en déduire la matrice D.

b) Conclure.