

# VII - Variables aléatoires discrètes infinies

## I - Variables aléatoires discrètes infinies

### I.1 - Loi de probabilité

#### Définition 1 - Variable aléatoire discrète infinie

Une variable aléatoire  $X$  est *discrète infinie* si les valeurs prises par  $X$  sont en nombre infini et peuvent être indexées par  $\mathbb{N}$ . On notera

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\} = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

Dans toute la suite, on se limitera aux variables aléatoires qui ne prennent que des valeurs positives.

#### Exemple 1

- Un dé est lancé jusqu'à obtenir la valeur 6. On note  $T$  le rang du lancer où le premier 6 est obtenu. La variable aléatoire  $T$  peut prendre les valeurs :
  - ★ 1 si le 6 apparaît au premier lancer,
  - ★ 2 si le 1<sup>er</sup> lancer n'est pas un 6 et que le 2<sup>e</sup> l'est,
  - ★ 3 si les 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> lancers ne sont pas des 6 et que le 3<sup>e</sup> l'est,
  - ★ ...
- Une étudiante collectionne les cartes de 23 joueurs de foot de son équipe nationale qui sont distribuées dans des tablettes de chocolat. On note  $T$  le nombre de tablettes achetées pour que sa collection soit complète. La variable aléatoire  $T$  peut prendre les valeurs :
  - ★ 23 si elle a obtenu à chaque achat une carte différente,
  - ★ 24 si elle a obtenu exactement une carte en double,
  - ★ ...

#### Définition 2 - Loi de probabilité

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie. La *loi de probabilité* de  $X$  est la donnée :

- des valeurs  $x_0, x_1, x_2, \dots$  prises par  $X$ ,
- de la famille infinie de probabilités  $(\mathbf{P}([X = x_0]), \mathbf{P}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}([X = x_n]), \dots)$ .

#### Exemple 2 - Instant du premier Pile

On note  $T$  le numéro du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$  et Face avec probabilité  $\frac{2}{3}$ .

D'une part,  $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

D'autre part,

- $[T = 1]$  correspond à obtenir un Pile lors du premier lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}.$$

- $[T = 2]$  correspond à obtenir Face lors du premier lancer et Pile lors du second lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = 2]) = \mathbf{P}(\{(F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$

- $[T = 3]$  correspond à obtenir Face lors des 2 premiers lancers et Pile lors du troisième lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = 3]) = \mathbf{P}(\{(F, F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$

- ...

- $[T = n]$  correspond à obtenir Face lors des  $n - 1$  premiers lancers et Pile lors du  $n^e$  lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = n]) = \mathbf{P}(\{(F, F, \dots, F, P)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

La loi de  $T$  peut être représentée dans un tableau contenant une infinité de colonnes :

$x$	$= 1$	$2$	$3$	$\dots$	$n$	$\dots$
$\mathbf{P}([X = x])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$(\frac{2}{3})^2 \times \frac{1}{3}$	$\dots$	$(\frac{2}{3})^{n-1} \times \frac{1}{3}$	$\dots$

Si on n'obtient Pile à aucun des lancers, on peut noter  $T = +\infty$ . Cependant, la propriété suivante montre que cet événement est de probabilité nulle.

### Définition 3 - Système complet

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète infinie, la famille d'événements  $([X = x_0], [X = x_1], [X = x_2], \dots)$  est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = x_k]) = 1.$$

### Exemple 3 - Instant du premier Pile

En reprenant l'exemple précédent,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

## I.2 - Fonction de répartition

### Définition 4 - Fonction de répartition

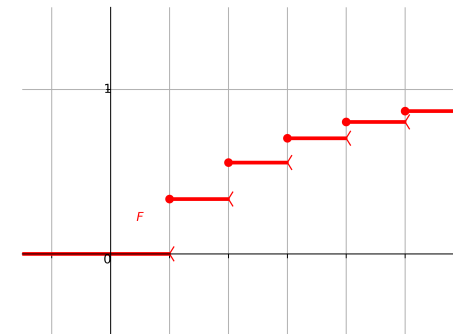
Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie. La *fonction de répartition* de  $X$  est la fonction  $F_X$  définie pour tout  $x$  réel par  $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$ .

### Exemple 4 - Instant du premier Pile

On note  $T$  le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$  et Face avec probabilité  $\frac{2}{3}$ .

- Si  $x < 1$ ,  $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$ .
- Si  $1 \leq x < 2$ ,  $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}$ .
- Si  $2 \leq x < 3$ ,  
 $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(T \in \{1, 2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$ .
- Si  $3 \leq x < 4$ ,  
 $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(T \in \{1, 2, 3\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{19}{27}$ .
- ...
- Si  $n \leq x < n+1$ ,  
 $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(T \in \llbracket 1, n \rrbracket) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .
- ...

On obtient le graphe suivant :



**Proposition 1 - Fonction de répartition**

Soit  $F$  la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète infinie et à valeurs positives.

- $F$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ .
- $\forall x < 0, F(x) = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .

**I.3 - Espérance et Variance****Définition 5 - Espérance**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives. Notons  $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ .

La variable aléatoire  $X$  admet une espérance si la série  $\sum x_i \mathbf{P}([X = x_i])$  est convergente. L'espérance de  $X$  est alors :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}([X = x_i]).$$

**Exemple 5 - Instant du premier pile**

On note  $T$  le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$  et Face avec probabilité  $\frac{2}{3}$ .

On admet que pour tout  $x \in [0, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ . Alors, comme  $\frac{2}{3} \in [0, 1[, \sum n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$  converge et

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 3.$$

**Proposition 2 - Linéarité de l'espérance**

Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires discrètes infinies admettant une espérance et  $a$  un réel. Alors,

$$\mathbf{E}[aX + Y] = a\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y].$$

**Exemple 6 - Instant du premier pile**

Un joueur joue à Pile ou Face, avec une pièce qui renvoie Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$ , contre son banquier qui lui propose le contrat suivant :

- le joueur paye 40 euros pour jouer,
- la pièce de monnaie est lancée successivement jusqu'à obtenir Pile. Il gagne 10 euros lors de chacun de ces lancers.

En notant  $G$  le gain du joueur et  $T$  le nombre de lancers effectués, alors  $G = 10 \times T - 40$ . En utilisant les propriétés précédentes,

$$\mathbf{E}[G] = 10 \times \mathbf{E}[T] - 40 = 10 \times 3 - 40 = -10.$$

**Théorème 1 - Théorème de transfert**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives et  $f$  une fonction réelle à valeurs positives. Notons  $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ . Si  $\sum f(x_i) \mathbf{P}([X = x_i])$  converge, alors

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i) \mathbf{P}([X = x_i]).$$

**Définition 6 - Variance, Écart-type**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie. Notons  $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ . Si  $\sum x_i^2 \mathbf{P}([X = x_i])$  converge, alors  $X$  admet une variance et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2].$$

L'écart-type de  $X$  est la quantité  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ .

**Proposition 3 - Propriétés de la variance**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète infinie qui admet une variance et  $a, b$  deux réels.

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$ .
- $\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$ .

**Exemple 7 - Pile/Face contre le banquier**

On reprend l'exemple précédent et on admet que  $\mathbf{V}(T) = 6$ . Alors,

$$\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(10T - 40) = 10^2 \mathbf{V}(T) = 600$$

et  $\sigma(G) \simeq 24,5$ .

**II - Lois usuelles****II.1 - Loi géométrique****Définition 7 - Loi géométrique**

Soit  $p \in ]0, 1[$ . La variable aléatoire  $T$  suit une loi *géométrique* de paramètre  $p$  si

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(T = k) = p(1 - p)^{k-1}$ .

On note  $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

$X$  est le rang du premier succès dans un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut  $p$ .

**Proposition 4 - Espérance, Variance**

Soit  $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ . On admet que

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1-p}{p^2}.$$

**Exemple 8 - Instant du premier pile**

Reprendre les exemples de la partie précédente.

**II.2 - Loi de Poisson****Définition 8 - Loi de Poisson**

Soit  $\lambda > 0$ . La variable aléatoire  $Z$  suit une loi de *Poisson* de paramètre  $\lambda$  si

- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ ,
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

On note  $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ .

Étant donnée une suite de  $N$  épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à  $p$ . Si  $N$  est grand et  $p$  est petit, la variable aléatoire égale au *nombre de succès* suit approximativement une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = Np$ .

**Proposition 5 - Espérance, Variance**

Soit  $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ . On admet que

$$\mathbf{E}[Z] = \lambda \text{ et } \mathbf{V}(Z) = \lambda.$$

**Exemple 9 - Accidentés**

Une banque accorde quotidiennement des crédits. Étant donné un crédit, la probabilité qu'il revienne au service contentieux dans un laps de temps d'un an est égale à 4%. On suppose que 100 crédits ont été accordés au mois de janvier.

On note  $X$  le nombre de ces crédits qui sont revenus au service contentieux un an plus tard. Comme  $X$  compte le nombre de succès (contentieux) lors d'une suite de 100 épreuves de Bernoulli de probabilité de succès 4%, alors  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, \frac{4}{100})$ . Ainsi,  $\mathbf{E}[X] = 4$ .

On suppose que  $X$  peut être approchée par une variable aléatoire  $Z$  suivant une loi de Poisson de paramètre  $\mathbf{E}[X]$ . On donne la table d'une loi de Poisson de paramètre 4 ci-dessous :

$z$	0	1	2	3	4	5	...
$\mathbf{P}([Z = z])$	0,018	0,073	0,147	0,195	0,195	0,156	...

Alors,

- $\mathbf{P}(X = 0) \simeq \mathbf{P}(Z = 0) \simeq 0,018$ .
- $\mathbf{P}(X \leq 3) \simeq \mathbf{P}(Z \leq 3) \simeq 0,018 + 0,073 + 0,147 + 0,195 \simeq 0,433$ .
- $\mathbf{P}(X > 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 3) \simeq 1 - 0,433 \simeq 0,567$ .