Correction
Devoir en temps libre

■ ■ ■

Solution de l'exercice 1. [ENS - 2022 - Problème 1] **Partie I**

1. Comme le dénominateur ne s'annule pas, la fonction est dérivable et

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{e^x(e^x+e^{-x}) - e^x(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} > 0. \end{aligned}$$

Comme $t' > 0$, la fonction t est strictement croissante.

D'une part,

$$t(x) = \frac{e^x\left(1-e^{-2x}\right)}{e^x\left(1+e^{-2x}\right)} = \frac{1+e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} t(x) = 1$.

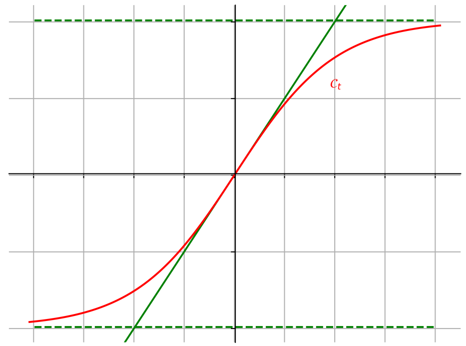
D'autre part, $t(-x) = \frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x} = -t(x)$. Ainsi, la fonction t est impaire et $\lim_{x\to-\infty} t(x) = -1$.

Comme la fonction t' est dérivable, on peut calculer facilement :

$$t''(x) = -8\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^3} = -8\,e^{-x}\,\frac{e^{2x}-1}{(e^x+e^{-x})^3}.$$

Si $x \geqslant 0$, alors $e^{2x} \geqslant 1$ et $t''(x) \leqslant 0$. Ainsi, t est concave sur $[0,+\infty[$.
Si $x \leqslant 0$, alors $e^{2x} \leqslant 1$ et $t''(x) \geqslant 0$. Ainsi, t est concave sur $]-\infty, 0]$.

Remarquons enfin que $t'(0) = 1$ ce qui permet de préciser la tangente de la pente à la courbe représentative de t au point d'abscisse 0.



2. En utilisant la définition,

$$\begin{aligned} \frac{t(x)+t(y)}{1+t(x)t(y)} &= \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} + \frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}}{1+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}} \\ &= \frac{(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^y-e^{-y})(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})} \\ &= \frac{2\,e^{x+y}-2\,e^{-x-y}}{2\,e^{x+y}+2\,e^{-(x+y)}} \\ &= t(x+y). \end{aligned}$$

Partie II Comme $|f| < 1$, alors f ne prend pas la valeur -1 et la fonction f est bien définie.

3. En utilisant l'équation satisfaite par f avec $x = y = 0$,

$$\begin{aligned} f(0+0) &= \frac{f(0)+f(0)}{1+f(0)f(0)} \\ f(0) &= \frac{2f(0)}{1+f(0)^2} \\ f(0)(1+f(0)^2) &= 2f(0) \\ f(0)(f(0)^2-1) &= 0. \end{aligned}$$

Comme $|f(0)| < 1$, alors $f(0)^2 \neq 1$ et $f(0) = 0$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'équation,

$$f(x+h) = \frac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)}.$$

Comme f est continue en 0, alors $\lim_{h\to 0} f(h) = f(0) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \frac{f(x)+0}{1+f(x)\cdot 0} = f(x).$$

La fonction f est donc continue en tout point de $\mathbb{R}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. D'après l'équation,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)} - f(x)}{h}\\ &= \frac{f(x)+f(h)-f(x)-f(x)^2f(h)}{h(1+f(x)f(h))}\\ &= \frac{f(h)}{h}\cdot\frac{1-f(x)^2}{1+f(x)f(h)}\\ &= \frac{f(h)-f(0)}{h}\cdot\frac{1-f(x)^2}{1+f(x)f(h)}, \text{ car } f(0)=0\end{aligned}$$

Comme f est dérivable en 0, alors $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0)$. Ainsi,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(0)(1-f(x)^2).$$

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'équation avec $y = -x$,

$$\begin{aligned}f(x-x) &= \frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}\\ 0 &= \frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}\\ f(-x)+f(x) &= 0\\ f(-x) &= -f(x).\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est impaire.

7. D'après la question **5.**, la fonction, f est dérivable et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'(0)(1-f(x)^2).$$

Comme $|f| < 1$, alors $(1-f^2) \geqslant 0$. Ainsi,

- soit $f'(0) = 0$ et f est constante sur $\mathbb{R}$,
- soit $f'(0) \neq 0$ et f' est de signe constant sur $\mathbb{R}$. La fonction f est alors monotone.

Remarque. Si f n'est pas supposée dérivable, on peut encore conclure. En effet, si $y \leqslant x$, alors $x - y \geqslant 0$. En appliquant la relation,

$$f(x-y) = \frac{f(x)+f(-y)}{1+f(x)f(-y)} = \frac{f(x)-f(y)}{1-f(x)f(y)}.$$

Comme $|f(x)f(-y)| < 1$, alors $f(x)-f(y)$ est du signe de $f(x-y)$ qui est du signe de $f(1)$ car $x-y \geqslant 0$. La fonction f est donc croissante si $f(1) \geqslant 0$ et décroissante si $f(1) \leqslant 0$.

8. Comme $|f| < 1$, la fonction g bien définie. En utilisant la relation satisfaite par f,

$$\begin{aligned}g(x+a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} &= \frac{1+\frac{f(x)+f(a)}{1+f(x)f(a)}}{1-\frac{f(x)+f(a)}{1+f(x)f(a)}}\\ &= \frac{1+f(x)f(a)+f(x)+f(a)}{1+f(x)f(a)-f(x)-f(a)}\\ &= \frac{1+f(a)+f(x)(1+f(a))}{1-f(a)+f(x)(1-f(a))}\\ &= \frac{(1+f(x))(1+f(a))}{(1-f(x))(1-f(a))} = g(x)g(a).\end{aligned}$$

Ainsi, le rapport $\frac{g(x+a)}{g(x)} = g(a)$ est indépendant de a.

9. Comme la fonction f est supposée dérivable, alors g est dérivable et, en utilisant la question **5.**,

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{f'(x)(1-f(x))-(1+f(x))(-f'(x))}{(1-f(x))^2}\\ &= \frac{2f'(x)}{(1-f(x))^2} = 2\frac{f'(0)(1-f(x)^2)}{(1-f(x))^2}\\ &= 2f'(0)\frac{1+f(x)}{1-f(x)} = 2f'(0)g(x).\end{aligned}$$

Comme g ne s'annule pas, alors $\frac{g'}{g}$ est constante égale à un réel que nous noterons k. De plus, comme $|f| < 1$, alors g est à valeurs positives. Comme ces fonctions sont continues,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x k\,\mathrm{d}t\\ [\ln(g(t))]_0^x &= kx\\ \ln(g(x)) - \ln(g(0)) &= kx.\end{aligned}$$

Comme $f(0) = 0$, alors $g(0) = 1$ et $g(x) = \mathrm{e}^{kx}$.

On obtient ainsi, pour la fonction f :

$$\begin{aligned}\frac{1+f(x)}{1-f(x)} &= \mathrm{e}^{kx}\\ 1+f(x) &= \mathrm{e}^{kx}(1-f(x))\\ \left(1+\mathrm{e}^{kx}\right) f(x) &= \mathrm{e}^{kx} - 1\\ f(x) &= \frac{\mathrm{e}^{kx}-1}{\mathrm{e}^{kx}+1}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{k/2x}\left(\mathrm{e}^{k/2x} - \mathrm{e}^{-k/2x}\right)}{\mathrm{e}^{-k/2x}\left(\mathrm{e}^{k/2x} + \mathrm{e}^{-k/2x}\right)}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{k'x} - \mathrm{e}^{-k'x}}{\mathrm{e}^{k'x} + \mathrm{e}^{-k'x}}.\end{aligned}$$

Finalement, si f est une fonction dérivable en 0 et solution de l'équation, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto t(kx)$. La réciproque est triviale.

Remarque. La fonction t est la fonction *tangente hyperbolique*.

2e méthode. On peut éviter de dériver g et utiliser la question précédente. En effet, comme g est à valeurs strictement positives, la fonction $h : x \mapsto \ln(g(x))$ est bien définie et

$$\begin{aligned}g(x+a) &= g(x)g(a)\\ \ln(g(x+a)) &= \ln(g(x)) + \ln(g(a))\\ h(x+a) &= h(x) + h(a)\\ h(x+a) - h(x) &= h(a)\\ \int_x^{x+a} h'(t)\,\mathrm{d}t &= h(a),\end{aligned}$$

car g est dérivable donc h l'est également. Ainsi,

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \int_x^{x+a} h'(t)\,\mathrm{d}t = h(a).$$

En dérivant cette relation par rapport à a, on obtient ainsi $h'(x+a) = h'(a)$ donc h' est égale à une constante k soit $h : x \mapsto kx$ car $h(0) = 0$ et enfin $g : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$. □