# VIII - Intégration

## I - Primitives

#### Définition 1 - Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une primitive de f est une fonction dérivable F sur I telle que, pour tout  $x \in [a, b]$ , F'(x) = f(x).

#### Exemple 1

Soit  $F(x) = x \ln(x) - x$  définie sur ]0,1]. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur ]0,1], alors F est dérivable et pour tout  $x \in ]0,1]$ ,

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Ainsi, F est une primitive de ln sur [0,1].

**Exercice 1.** Déterminer la fonction dont  $F(x) = \frac{x^3}{12} + 4x^2 + 1$  est une primitive.

#### Théorème 1 - Primitives de fonctions continues

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives. Si F et G sont des primitives d'une fonction f continue sur I, alors il existe un réel c tel que  $\forall x \in I$ , F(x) = G(x) + c.

Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles 😋				
	Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Intervalle	
	c	cx	$\mathbb{R}$	
	$x^a, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\mathbb{R}_{+}^{*}$ ou $\mathbb{R}^{*}$ ou $\mathbb{R}$	
	$\frac{1}{x}$	ln(x)	$]0,+\infty[$	
	$e^{ax}, a \neq 0$	$\frac{1}{a} e^{ax}$	$\mathbb{R}$	

Exercice 2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- 1.  $x^5$ .
- 2.  $\frac{3}{x}$ .

- **3.**  $e^{3x}$
- **4.**  $\frac{1}{x^5}$

# Proposition 2 - Primitive de fonctions composées $\mathfrak{C}^{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{o}}$

Soit u une fonction dérivable telle que u' soit continue.

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$\lambda u'(x) + \mu v'(x)$	$\lambda u(x) + \mu v(x)$
$u'(x)u^a(x), a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1}(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln  u(x) $
$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
u'(x)v'(u(x))	v(u(x))

Exercice 3. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. 
$$\frac{1}{x} \ln(x)$$
.

3. 
$$(3x^2+4)e^{x^3+4x}$$
.  
4.  $\frac{2x+1}{x^2+x}$ .

**2.** 
$$\frac{1}{x} \ln^4(x)$$
.

**4.** 
$$\frac{2x+1}{x^2+x}$$
.

# II - Intégrale sur un segment

#### Définition 2 - Intégrale sur un segment

L'intégrale, sur le segment [a, b], d'une fonction f positive, est l'aire, délimitée par les abscisses a et b, et comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses. Cette quantité est notée  $\int f(t) dt$ .

## Proposition 3 - Intégrale d'une fonction continue 🥰

Soit f une fonction continue sur [a,b] et F une primitive de f. L'intégrale de f sur [a,b] est le réel défini par

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = [F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a).$$

#### Exemple 2

En utilisant les primitives usuelles,

• 
$$\int_1^2 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}.$$

• 
$$\int_0^1 (3x^2 + 4) e^{x^3 + 4x} dx = \left[ e^{x^3 + 4x} \right]_0^1 = e^5 - 1.$$

Exercice 4. Exprimer simplement les intégrales suivantes :

1. 
$$\int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x$$

3. 
$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx$$
.

**1.** 
$$\int_0^1 x^3 dx$$
. **3.**  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ . **4.**  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4} dx$ .

**2.** 
$$\int_3^4 e^{2x} dx$$
.

#### Théorème 2 - Intégrale et Primitive

Soit f une fonction continue sur  $[a, +\infty[$ . On note  $F(x) = \int_{a}^{x} f(t) dt$ . Alors, F est l'unique primitive de f qui s'annule en a. En particulier, pour tout réel x > a, F'(x) = f(x).

#### Exemple 3

Soit F la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $F(x) = \int_0^x e^t dt$ . La fonction F est dérivable et  $F'(x) = e^x$ . Ainsi, F' est positive et F est croissante.

# II.1 - Propriétés de l'intégrale

#### Définition 3 - Intégrale des fonctions continues par morceaux

Soit f une fonction définie sur un segment  $I = \bigcup [a_k, b_k]$ . On suppose que f est continue par morceaux sur [a,b], i.e. prolongeable par continuité sur chacun des segments  $[a_k, b_k]$ . Alors,  $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x) \, \mathrm{d}x.$ 

## Proposition 4 - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et a, b et c des réels de I. Alors,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Chapitre VIII - Intégration D 2

#### Exemple 4 - Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie par f(x) = 0 si  $x \le 1$  et f(x) = x - 1 sinon. Alors,

$$\int_{-1}^{2} f(x) dx = \int_{-1}^{1} f(x) dx + \int_{1}^{2} f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 0 dx + \int_{1}^{2} (x - 1) dx$$

$$= 0 + \left[ \frac{(x - 1)^{2}}{2} \right]_{1}^{2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}.$$

#### Proposition 5 - Linéarité de l'intégrale

Soit f et g des fonctions continues sur [a, b] et  $\lambda$  un réel. Alors,

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx.$$

#### Exemple 5

En utilisant les primitives usuelles,

$$\int_{1}^{2} \frac{12}{x} + 5x^{3} dx = 12 \int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx + 5 \int_{1}^{2} x^{3} dx$$

$$= 12 \left[\ln(x)\right]_{1}^{2} + 5 \left[\frac{x^{4}}{4}\right]_{1}^{2}$$

$$= 12 \left(\ln(2) - \ln(1)\right) + 5 \left(\frac{2^{4}}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 12 \ln(2) + \frac{5}{4} \cdot 15.$$

**Exercice 5.** Calculer  $\int_0^1 2 e^x + 3x^2 dx$ .

#### Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (I)

Soit f une fonction continue sur [a, b]. Si  $a \leq b$  et, pour tout  $x \in [a, b], f(x) \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

#### Exemple 6

Soit 
$$F(x) = \int_0^x e^t dt$$
 et  $0 \le x \le y$ . Alors,

$$F(y) = \int_0^y e^t dt$$

$$= \int_0^x e^t dt + \int_x^y e^t dt, \text{ d'après la relation de Chasles}$$

$$= F(x) + \int_x^y e^t dt$$

Or,  $e^t \ge 0$  pour tout  $t \in [x, y]$  et  $x \le y$ , donc  $\int_x^y e^t dt \ge 0$ . Ainsi,  $F(x) \le F(y)$  et F est croissante.

Ce raisonnement reste valable dès que l'intégrande est positif.

**Exercice 6.** Montrer que  $F(x) = \int_3^x x^2 - 2x + 1 \, dx$  est croissante sur  $[3, +\infty[$ .

#### Proposition 7 - Croissance de l'intégrale (II)

Soit f et g deux fonctions continues sur [a, b]. Si, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

Chapitre VIII - Intégration

#### Exemple 7

Pour tout  $x \in [0, 1], x^3 \le x^2$ . Ainsi,  $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x} dx \le \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$ .

## Proposition 8 - Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur [a, b]. Alors,

$$\left| \int_{a}^{b} f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{a}^{b} |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

#### Exemple 8

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \ge 0$ . Alors.

$$\left| \int_0^x \frac{(-t)^n}{n!} e^t dt \right| \le \int_0^x |(-t)^n| \frac{e^t}{n!} dt \le \frac{e^x}{n!} \int_0^x t^n dt \le \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}.$$

## Proposition 9 - Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur [a, b]. Si f est à valeurs positives, alors  $f \equiv 0$  si et seulement si  $\int_a^b f(t) dt = 0$ .

**Exercice 7.** Montrer que ce résultat est faux en général si la fonction est continue par morceaux.

# II.2 - Calculs d'intégrales

## Théorème 3 - Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur [a,b] telles que u' et v' soient continues sur [a,b]. Alors,

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'(x)v(x) dx.$$

## Exemple 9 - 🚓

• Calculons  $\int_0^1 x e^{2x} dx$ . Posons u(x) = x et  $v'(x) = e^{2x}$ . Alors, u'(x) = 1 et  $v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$ . Comme u, v sont dérivables et u', v' sont continues sur [0,1], d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \left[ x \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} dx$$
$$= \frac{2e^4}{2} - \frac{e^2}{2} - \left[ \frac{e^{2x}}{4} \right]_1^2$$
$$= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4}$$
$$= \frac{3e^4}{4} - \frac{e^2}{4}.$$

• Calculons  $\int_1^2 \ln(x) dx$ . Posons  $u(x) = \ln(x)$  et v'(x) = 1. Alors,  $u'(x) = \frac{1}{x}$  et v(x) = x. Comme u, v sont dérivables et u', v' sont continues sur [1, 2], d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_{1}^{2} \ln(x) dx = [\ln(x)x]_{1}^{2} - \int_{1}^{2} \frac{1}{x} \cdot x dx$$

$$= 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_{1}^{2} 1 dx$$

$$= 2\ln(2) - [x]_{1}^{2}$$

$$= 2\ln(2) - 2 + 1$$

$$= 2\ln(2) - 1.$$

**Exercice 8.** Calculer  $\int_0^1 x e^x dx$ .

Chapitre VIII - Intégration

#### Théorème 4 - Changement de variable

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  et  $\varphi$  une fonction de [a, b] dans I de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

# Exemple 10 - 🗱

Calculons  $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x + 1}$  à l'aide du changement de variable  $t = \ln(u)$ .

La fonction  $\varphi: [1, e] \to [0, 1], u \mapsto \ln(u)$  est de classe  $\mathscr{C}^1$ . Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u + 1} \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \left[ \frac{1}{u} - \frac{1}{1 + u} \right] \, \mathrm{d}u$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u}$$

$$= [\ln(u)]_1^{\mathrm{e}} - [\ln(1 + u)]_1^{\mathrm{e}}$$

$$= 1 - \ln(1 + \mathrm{e}) + \ln(2).$$

**Exercice 9.** Calculer  $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$  à l'aide du changement de variable  $u=\sqrt{x}$ .

# III - Intégrales généralisées

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de  $\mathbb R$  d'extrémités a et b, où  $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ .

## III.1 - Définition

#### Définition 4 - Convergence

Soit f une fonction continue par morceaux sur I.

- Si I = [a, b[ et f est continue sur [a, b[. L'intégrale généralisée  $\int_a^b f(t) dt$  converge si  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  possède une limite finie lorsque x tend vers b.
- Si I = ]a, b] et f est continue sur ]a, b]. L'intégrale généralisée  $\int_a^b f(t) dt$  converge si  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  possède une limite finie lorsque x tend vers a.
- Si I = ]a, b[ et f est continue sur ]a, b[. L'intégrale généralisée  $\int_a^b f(t) dt$  converge s'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_a^b f(t) dt$  soient convergentes.

Dans tous les cas, si l'intégrale ne converge pas, elle diverge.

#### Exemple 11

La fonction ln est continue sur [0,1]. De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\int_{\varepsilon}^{1} \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_{\varepsilon}^{1} = -1 - \varepsilon \ln(\varepsilon) + \varepsilon.$$

Ainsi,  $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \ln(t) dt = -1$  et  $\int_{0}^{1} \ln(t) dt$  converge.

#### Théorème 5 - Intégrales de référence

(i). Intégrales de Riemann sur  $[1, +\infty[$ .

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1. \text{ Alors,}$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Chapitre VIII - Intégration D 2

(ii). Intégrales de Riemann sur [0,1].

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1. \text{ Alors,}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

(iii). Fonction exponentielle.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0. \text{ Alors,}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

(iv). Fonction logarithme.

$$\int_0^1 \ln(t) dt \text{ converge. De plus, } \int_0^1 \ln(t) dt = -1.$$

# III.2 - Propriétés

#### Proposition 10 - Linéarité

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  convergent. Alors,  $\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt$  converge et

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt.$$

#### Proposition 11 - Relation de Chasles

On suppose que  $\int_a^b f(t) dt$  converge et  $c \in ]a, b[$ . Alors,  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_a^b f(t) dt$  convergent et

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_a^b f(t) dt.$$

#### Proposition 12 - Croissance de l'intégrale

On suppose que  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  convergent.

- (i). Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \ge 0$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \ge 0$ .
- (ii). Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \in g(x)$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \leqslant \int_a^b g(t) dt.$

## Théorème 6 - Inégalité triangulaire

Si  $\int_a^b |f(t)| dt$  est absolument convergente, alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge et

$$\left| \int_{a}^{b} f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{a}^{b} |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

#### Théorème 7 - Positivité

Soit  $f: I \to \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\int_I |f(t)| dt$  converge. Si  $\int_I |f(t)| dt = 0$ , alors f est nulle sur I.

## III.3 - Preuves d'existences

# Proposition 13 - Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue sur le segment [a, b]. Alors, les intégrales de f sur [a, b], [a, b], [a, b] et [a, b] sont égales.

D 2 Chapitre VIII - Intégration

## Exemple 12

Montrons que  $\int_0^1 t \ln(t) dt$  est convergente. On pose  $f: t \mapsto$  $t \ln(t)$ .

- La fonction f est continue sur [0,1].
- $\bullet$  D'après les croissances comparées,  $\lim_{t\to 0}f(t)=0.$  Ainsi, fest prolongeable par continuité en 0.

Finalement, l'intégrale de f sur [0,1] est bien définie.

#### Proposition 14 - Fonctions à valeurs positives

Si f est valeurs positives sur [a, b[, alors  $\int_{a}^{b} f(t) dt$  converge si et seulement si  $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$  est majorée sur [a, b[.

#### Théorème 8 - Domination locale

Soient f, g deux fonctions continues de [a, b] dans  $\mathbb{R}_+$ .

- S'il existe un réel c tel que  $\forall x \in [c, b], 0 \leq f(x) \leq g(x)$  et  $\int_a^b g(t) dt \text{ converge, alors } \int_a^b f(t) dt \text{ converge.}$
- Si  $f(x) \sim_b g(x)$ , alors  $\int_0^b f(x) dx$  converge si et seulement si  $\int_{0}^{b} g(x) dx$  converge.

## Exemple 13

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étudions  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ .
  - $\star x \mapsto x^n e^{-x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
  - $\star$  Comme  $\lim_{x\to +\infty} x^{n+2} \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d} x = 0,$ il existe un réel c tel

que, pour tout  $x \ge c$ ,

$$x^n e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

D'après les intégrales de référence,  $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$  converge.

Ainsi, 
$$\int_{c}^{+\infty} x^{n} e^{-x} dx$$
 converge.

Comme  $x \mapsto x^n e^{-x}$  est continue sur [0, c], son intégrale sur ce segment est bien définie.

Finalement,  $\int_{0}^{+\infty} x^n e^{-x} dx$  converge.

- Étudions  $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$ .

Or,  $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x) \to +\infty$  quand  $x \to 1$ .

Ainsi,  $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$  n'est pas convergente.

## III.4 - Méthodes de calculs

Utiliser les méthodes de calcul sur un segment (primitivation, intégration par parties, changement de variable), puis étudier la limite.

#### Exemple 14

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculons  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ .

- Si n = 0, alors  $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$ . Si  $n \ge 1$ . Soit  $M \ge 0$ . Les fonctions  $u : x \mapsto x^n$  et
- $v: x \mapsto -e^{-x}$  sont de classe  $\mathscr{C}^1$  sur [0, M]. D'après la

Chapitre VIII - Intégration

formule d'intégration par parties,

$$\int_0^M x^n e^{-x} dx = \left[ -x^n e^{-x} \right]_0^M + \int_0^M nx^{n-1} e^{-x} dx$$
$$= -M^n e^{-M} + n \int_0^M x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Ainsi, lorsque  $M \to +\infty$ , on obtient la relation :

$$I_n = nI_{n-1}.$$

• On montre alors par récurrence que, pour tout n entier naturel,  $I_n = n!$ .