

# XI - Convergence Estimation

## I - Inégalités

### Théorème 1 - Inégalité de Markov

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs positives admettant une espérance et  $a > 0$ . Alors,

$$\mathbf{P}([X \geq a]) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}.$$

### Exemple 1 - Survie d'un composant

- On suppose que la durée de vie  $X$  (en mois) d'un composant électronique suit une loi de exponentielle de paramètre  $1/2$ . On peut estimer la probabilité que le composant fonctionne durant une année :

$$\mathbf{P}([X \geq 12]) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \simeq 0,17.$$

Ainsi, avec probabilité égale à au plus 17%, le composant électronique fonctionnera durant au moins 1 an.

- Cette inégalité peut être appliquée en utilisant au préalable une fonction croissante. En effet, en reprenant l'exemple du composant, la fonction carré étant croissante et bijective sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$X(\omega) \geq 12 \Leftrightarrow X(\omega)^2 \geq 12^2.$$

Ainsi, en rappelant que lorsque  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1/2)$ , alors  $\mathbf{E}[X^2] = 8$ ,

$$\mathbf{P}([X \geq 12]) = \mathbf{P}([X^2 \geq 144]) \leq \frac{\mathbf{E}[X^2]}{144} = \frac{8}{144} \simeq 0,05.$$

On peut donc être plus précis que dans le point précédent et estimer qu'avec probabilité au plus égale à 5,6%, le composant électronique fonctionnera au moins 1 an.

Dans ce cas très précis, cette probabilité peut être calculée exactement :

$$\mathbf{P}([X \geq 12]) = \int_{12}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = e^{-6} \simeq 0,0025.$$

### Théorème 2 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une variance et  $\varepsilon > 0$ . Alors,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

### Exemple 2 - Survie d'un composant

En reprenant l'exemple précédent, comme  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1/2)$ , alors  $\mathbf{E}[X] = 2$  et  $\mathbf{V}(X) = 4$ . Ainsi,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| \geq 12) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{144} = \frac{4}{144} = \frac{1}{36} \simeq 0,028.$$

Pour interpréter ce résultat, on remarque que

$$|X - \mathbf{E}[X]| \geq 12 \Leftrightarrow |X - 2| \geq 12 \Leftrightarrow \begin{cases} X - 2 \geq 12 \\ \text{ou} \\ X - 2 \leq -12 \end{cases}$$

Comme  $X \geq 0$ ,  $|X - \mathbf{E}[X]| \geq 12$  est équivalent à  $X \geq 14$ . Ainsi, la probabilité que le composant fonctionne au moins 10 mois est au plus égale à  $\frac{1}{36}$ .

## II - Suites de variables aléatoires discrètes finies

### Théorème 3 - Espérance d'une somme

Soit  $n \geq 1$ ,  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires admettant une espérance. Alors,

$$\mathbf{E}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbf{E}[X_1] + \dots + \mathbf{E}[X_n].$$

### Exemple 3

Soit  $n \geq 1$ ,  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Alors,

$$\mathbf{E}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbf{E}[X_1] + \dots + \mathbf{E}[X_n] = np.$$

### Définition 1 - Indépendance mutuelle d'une famille finie

Soit  $n \geq 1$ ,  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires. Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont *mutuellement indépendantes* si pour toute famille  $I_1, \dots, I_n$  d'intervalles, les événements  $[X_1 \in I_1], \dots, [X_n \in I_n]$  sont mutuellement indépendants.

### Exemple 4 - Urnes, Pièces, ...

Lors de lancers successifs d'une pièce de monnaie ou de tirages avec remise dans une urne, les résultats successifs sont généralement modélisés par une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

### Proposition 1 - Variance d'une somme de v.a. indépendantes

Soit  $n \geq 1$ ,  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes et admettant des variances. Alors,

$$\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \dots + \mathbf{V}(X_n).$$

### Exemple 5 - Lois de Bernoulli

Soit  $n \geq 1$ ,  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Alors,

$$\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \dots + \mathbf{V}(X_n) = np(1-p).$$

On retrouve ainsi la variance d'une loi  $\mathcal{B}(n, p)$ . En effet, si  $X_1, \dots, X_n$  suivent des lois de Bernoulli, la somme  $Y = X_1 + \dots + X_n$  compte le nombre de succès (c'est-à-dire le nombre de 1) dans la suite d'expériences de Bernoulli indépendantes  $X_1, \dots, X_n$ . Ainsi,  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

### Définition 2 - Indépendance mutuelle d'une suite

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes. La suite de variables aléatoires est dite *indépendante* si, pour tout  $n$  entier naturel non nul, les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes.

## III - Loi faible des grands nombres

### Théorème 4 - Loi faible des grands nombres

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance  $m$  et une même variance  $\sigma^2$ . Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([\bar{X}_n - m] \geq \varepsilon) = 0.$$

### Exemple 6 - Illustration de la loi des grands nombres

On considère une pièce équilibrée qui renvoie Pile avec probabilité  $p$  et Face avec probabilité  $1-p$ . On lance cette pièce une infinité de fois et on note  $X_i = 1$  si la pièce tombe sur pile au  $i^{\text{e}}$  lancer

et  $X_i = 0$  sinon. Ainsi,  $\mathbf{E}[X_i] = p$ .

La quantité  $\bar{X}_n$  représente le nombre moyen de Piles obtenus lors des  $n$  premiers lancers.

Le théorème assure que lorsque  $n$  est grand, la probabilité que  $\bar{X}_n$  soit *loin* de  $p$  est très faible. Autrement dit, on peut approcher  $p$  par  $\bar{X}_n$ .

## IV - Estimation

### IV.1 - Définitions

#### Définition 3 - Échantillon

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $X$  une variable aléatoire. Un *n-échantillon* de  $X$  est une famille  $X_1, \dots, X_n$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que  $X$ .

#### Exemple 7 - Sondage

On souhaite connaître la proportion de français favorables à une réforme donnée. On modélise le problème en considérant une variable aléatoire  $X$  suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . On interroge  $n$  français choisis indépendamment dans la population. On note  $X_i$  la réponse donnée par l'individu numéro  $i$  : 1 si l'individu est favorable et 0 sinon. On suppose que  $X_i$  suit la même loi que  $X$ .

#### Définition 4 - Estimateur

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de probabilité dépendant d'un paramètre  $\theta$ ,  $n \geq 1$  et  $(X_1, \dots, X_n)$  un *n-échantillon* de  $X$ . Un *estimateur* de  $\theta$  est une variable aléatoire  $\varphi(X_1, \dots, X_n)$  où  $\varphi$  est une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### Exemple 8 - Sondage

Pour estimer  $p$ , on va utiliser la quantité  $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ .

D'après la loi faible des grands nombres, lorsque  $n$  est grand,  $\bar{X}_n$  est proche de  $\mathbf{E}[X_1] = p$ .

## IV.2 - Estimation ponctuelle

#### Théorème 5 - Estimation ponctuelle

Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une moyenne  $m$ ,  $\geq 1$  et  $(X_1, \dots, X_n)$  un *n-échantillon* de  $X$ . Alors,  $\bar{X}_n$  est une estimation de  $\mathbf{E}[X_1] = m$ .

#### Exemple 9 - Estimateurs du paramètre

Estimation ponctuelle signifie qu'on estime le paramètre  $p$  par une unique valeur, un *point* dans l'ensemble des réels.

- Si  $X_1, \dots, X_n$  est un *n-échantillon* d'une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , alors  $\bar{X}_n$  est un estimateur de  $p$ .
- Si  $X_1, \dots, X_n$  est un *n-échantillon* d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , alors  $\bar{X}_n$  est un estimateur de  $\lambda$ .

## IV.3 - Estimation par intervalle de confiance

#### Théorème 6 - Intervalle de confiance

Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une moyenne  $m$  et une variance  $\sigma^2$ ,  $n \geq 1$ ,  $(X_1, \dots, X_n)$  un *n-échantillon* de  $X$  et  $a$  un réel strictement positif. La probabilité que  $m$  appartienne à l'intervalle  $\left[ \bar{X}_n - \sqrt{\frac{\sigma^2}{na}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\sigma^2}{na}} \right]$  est supérieure à  $1 - a$ .

### Exemple 10 - Intervalles de confiance

Plus on travaille sur un échantillon grand, c'est-à-dire plus  $n$  est grand, plus l'intervalle sera petit et notre estimation sera précise.

- Si  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , la probabilité que  $p$  appartienne à  $\left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{p(1-p)}{na}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{p(1-p)}{na}}\right]$  est supérieure ou égale à  $a$ .

Comme  $p$  est inconnu, la quantité  $p(1-p)$  est inconnue et l'intervalle de confiance ne peut pas être déterminé explicitement. On pourra remarquer que, comme  $p \in [0, 1]$ , alors  $0 \leq p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ .

Ainsi, la probabilité que  $p$  appartienne à  $\left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{1}{4na}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{1}{4na}}\right]$  est supérieure ou égale à  $a$ .

Par exemple, si on a interrogé  $n = 1000$  français et que 10% ont répondu être favorables à la réforme, le paramètre  $p$  appartient avec probabilité 0,95 à l'intervalle

$$\left[0,1 - \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 1000 \cdot 0,95}}, 0,1 + \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 1000 \cdot 0,95}}\right] \simeq [0,084, 0,116]$$

Autrement dit,

$$\mathbf{P}(p \in [8,4\%, 11,6\%]) \simeq 95\%.$$

- Si  $X$  suit une loi normale de paramètres  $m$  et  $\sigma^2$ , la probabilité que  $m$  appartienne à  $\left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\sigma^2}{na}}, \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\sigma^2}{na}}\right]$  est supérieure ou égale à  $a$ .  
Comme  $\sigma^2$  est inconnu, on peut estimer  $\sigma^2$  par la variance empirique  $s_n^2$  définie par :  $s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ .