



Certaines questions de ce sujet font intervenir de l'algèbre euclidienne. Toutes les parties sont indépendantes.

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Pour  $n$  entier naturel, on note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré au plus  $n$ . Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , l'opérateur différence est défini par  $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ .

### 1. Opérateur de différence.

a) Déterminer  $\Delta(\mathbb{R}_n[X])$  puis  $\text{Ker } \Delta$ .

b) Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $m$  entier naturel, montrer que  $(\Delta^m P)(X) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} P(X+k)$ .

## Partie I : Polynômes de BERNOULLI

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  et  $f(0) = 1$ .

### 2. Étude de la régularité de la fonction $f$ .

a) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et calculer sa dérivée.

b) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et préciser  $f'(0)$ .

### 3. Variations de la fonction $f$ .

a) Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  et préciser la nature des branches infinies ainsi que leur position par rapport à la courbe représentative de  $f$ .

b) Dresser le tableau des variations de  $f$ , puis tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

### 4. Développement limité. Soit $n$ un entier naturel non nul.

a) Déterminer le développement limité de  $\frac{e^x - 1}{x}$  à l'ordre  $n$  en 0.

b) En déduire (sans le calculer) que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0.

On notera  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n)$  ce développement limité.

c) Déterminer le développement limité de  $f$  à l'ordre 3 en 0. En déduire  $b_0, b_1, b_2, b_3$ .

### 5. Une relation de récurrence sur les $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

a) En remarquant que  $x = f(x)(e^x - 1)$ , montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0.$$

b) En déduire une formule de récurrence permettant le calcul de  $b_n$ .

Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $B_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$ .  $B_n$  est appelé le  $n$ -ème polynôme de BERNOULLI. On utilisera des notations identiques pour polynômes et fonctions polynomiales associées.

6. Déterminer  $B_0, B_1, B_2$  en explicitant les coefficients.

7. Soit  $n \geq 2$ . Montrer les égalités suivantes.

a)  $B_n(0) = B_n(1)$ .

b)  $B'_n(X) = n B_{n-1}(X)$ .

c)  $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$ .

d) Calculer  $\Delta B_1, \Delta B_2$  et en déduire que  $(\Delta B_n)(X) = n X^{n-1}$ .

### 8. Une nouvelle définition.

a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes définie par  $B_0 = 1, \Delta B_n = n X^{n-1}$  et  $\int_0^1 B_n(t) dt = 0$  pour tout  $n$  entier naturel non nul.

b) En déduire que  $B_n(1 - X) = (-1)^n B_n(X)$ .

c) Montrer que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(X) = n X^{n-1}$ .

d) Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$b_{2n+1} = B_n(1) = B_n(0) = B_n(1/2) = 0$$

**Partie II : Polynômes de HILBERT**

On pose  $H_0 = 1$  et pour tout  $n > 0$ ,  $H_n(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$ .

**9.** Montrer que  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forme une base de  $\mathbb{R}[X]$ .

**10.** Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ .

**11.** Pour tout  $n$  entier naturel, calculer  $\Delta H_n$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

**12.** En utilisant les nombres  $(Dg^m P)(0)_{m \in \mathbb{N}}$ , exprimer  $P$  dans la base des  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**13.** En déduire que  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$  si et seulement si les coordonnées de  $P$  dans la base des  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont entières.

**Partie III : Polynômes d'EULER**

Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}[X]$  par  $\varphi(P) = P(X+1) + P(X)$ . Dans toute cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

**14.** Montrer que  $\varphi$  est bijective.

**15.** Montrer qu'il existe un unique polynôme, noté  $E_n$ , satisfaisant la relation  $P(X+1) + P(X) = 2X^n$ .

**16.** Déterminer une relation simple entre  $E'_n$  et  $E_{n-1}$ .

**17.** En déduire que

$$E_n(X+1) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} E_p(X).$$

**18.** À l'aide de la relation précédente, exprimer  $E_n$  en fonction des  $(E_p)_{p \leq n-1}$ .

**19.** Démontrer que  $E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X)$ .

**Partie IV : Polynômes de TCHEBYCHEV**

On définit par récurrence la suite de polynômes

$$T_0 = 1, T_1 = X, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Le polynôme  $T_n$  est le  $n$ ème polynôme de Tchebychev. Dans tout ce T.D., on identifiera polynômes et fonctions polynomiales.

**20.** Expliciter  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$ .

**21.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $T_n$  est un polynôme à coefficients entiers dont vous déterminerez la parité, le degré et le coefficient dominant.

**22.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ .

**23.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**a)** Montrer que, pour tout  $t \in [0, \pi]$ ,  $T_n(\cos t) = \cos(nt)$ .

**b)** Montrer que  $T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k} (X^2 - 1)^k$ .

**24.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n$  possède exactement  $n$  racines distinctes.

Pour  $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ , la norme infinie de  $f$ , notée  $\|f\|_\infty$  est le réel  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$ .

**25.** Justifier l'existence de la norme infinie.

**26.** Calculer  $\|T_n\|_\infty$ .

**27.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**a)** Montrer que pour tout réel  $u$ ,  $|\sin(nu)| \leq n |\sin(u)|$ .

**b)** En déduire  $\|T'_n\|_\infty = n^2$ .

**28.** Montrer que pour tout réel strictement positif  $r$ ,  $T_n(\frac{r+r^{-1}}{2}) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}$ .

**29.** Soit  $x \in [1, +\infty[$ .

**a)** Montrer qu'il existe  $r \in \mathbb{R}^*$ , tel que  $x = \frac{r+r^{-1}}{2}$ .

**b)** En déduire que  $1 \leq T_n(x) \leq (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ .

**30.** En dérivant l'égalité  $T_n(\cos t) = \cos nt$  valable pour tout réel  $t \in [0, \pi]$ , trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur  $\mathbb{R}$  par  $T_n$ .

**31.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ . Déduire de la question précédente que  $T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2^k k!}{(2k)!}$ .

**32.** Montrer que  $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k} T_n^{(k)}(1)$ .

### Partie V : Polynômes de **LEGENDRE**

Dans tout cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel,  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ . On identifiera polynômes et fonctions polynomiales associées. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $P^{(k)}$  la dérivée  $k$ -ème du polynôme  $P$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère les polynômes définis par

$$U_n = (X^2 - 1)^n \text{ et } L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}.$$

La famille  $(L_n)$  est la famille des polynômes de Legendre. Pour tout polynôme  $P$ , on note  $\mathcal{L}(P)$  le polynôme

$$\mathcal{L}(P) = [(X^2 - 1)P']'.$$

**33. a)** Calculer  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ .

**b)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer le degré et le coefficient dominant de  $L_n$ .

**c)** En déduire que la famille  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**34.** Montrer que  $L_{2n}$  (resp.  $L_{2n+1}$ ) est une fonction paire (resp. impaire).

**35. a)** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^k (X+1)^{n-k}$ .

**b)** En déduire les valeurs de  $L_n(-1)$  et de  $L_n(1)$ .

**36. a)** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$U'_{n+1} - 2(n+1)X \cdot U_n = 0 \quad (1)$$

$$(X^2 - 1)U'_n - 2nX \cdot U_n = 0 \quad (2)$$

**b)** En dérivant les équations précédentes, montrer que la suite  $(L_n)$  vérifie

$$L'_{n+1} = X \cdot L'_n + (n+1)L_n \quad (3)$$

$$\mathcal{L}(L_n) = n(n+1)L_n \quad (4)$$

**c)** En déduire que la restriction de  $\mathcal{L}$  à  $\mathbb{R}_n[X]$  est un endomorphisme que nous noterons  $\mathcal{L}_n$ . Exprimer la matrice de  $\mathcal{L}_n$  dans la base  $(L_0, \dots, L_n)$ .

Pour tout  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$ .

**37.** Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ . On notera  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.

**38.** Montrer que pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\langle \mathcal{L}(P), Q \rangle = \langle P, \mathcal{L}(Q) \rangle$ . On dit que  $\mathcal{L}$  est un endomorphisme autoadjoint.

**39. a)** Montrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la famille  $(L_n)_{n \in \llbracket 0, m \rrbracket}$  est une famille de polynômes orthogonaux.

**b)** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$ .

**40.** Montrer que  $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ .

**41.** En considérant un polynôme  $Q = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , montrer que  $L_{n+1}$  possède  $n+1$  racines réelles distinctes, toutes dans l'intervalle  $] -1, 1[$ .

Cette propriété est vérifiée par toutes les familles de polynômes orthogonaux.

**42.** Calculer la distance de  $X^{n+1}$  au sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### Mathématiciens

**BERNOULLI** Jacob (6 jan. 1655 à Basel-16 août 1705 à Basel).

**EULER** Leonhard (15 avr. 1707 à Basel-18 sept. 1783 à St Pétersbourg).

**LEGENDRE** Adrien-Marie (18 sept. 1752 à Paris-9 jan. 1833 à Paris).

**TCHEBYCHEV** Pafnouti Lvovitch (16 mai 1821 à Borovsk-8 déc. 1894 à St Pétersbourg).

**HILBERT** David (23 jan. 1862 à Wehlau-14 fév. 1943 à Göttingen).