Suites numériques, Fonctions de la variables réelle

Chapitre I

■ ■ ■

I. Suites numériques

Exercice 1. (Sommation des relations de comparaison, ♡) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites à valeurs positives telles que $a_n \sim b_n$.

1. Si $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ diverge, montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \sum_{k=1}^{n} b_k$.

2. En déduire que, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif ℓ, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \ell$.

3. En déduire la limite de la suite de terme général $\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3}{k}\right)^k\right]^{1/n}$.

Exercice 2. (Suites sous-additives, ♡) [CCP] Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle vérifiant pour tout $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $u_{n+m}\leqslant u_n+u_m$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n=\min_{k\in[\![1,n]\!]}\frac{u_k}{k}$.

1. Exemples.

a) Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $t_n=n^\alpha$. Montrer que (t_n) est sous-additive si et seulement si $\alpha\leqslant 1$. Déterminer alors la limite de la suite (t_n/n).

b) Soit (w_n) une suite réelle telle que pour tout $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $w_{n+m}=w_n+w_m$. Montrer que (w_n) est sous-additive et calculer la limite de la suite (w_n/n).

2. Montrer qu'il existe $\ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n=\ell$.

3. Montrer que pour tout $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $u_{nm}\leqslant m u_n$.

4. On suppose que $\ell\neq-\infty$. Soit $\varepsilon>0$.

a) Montrer qu'il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{u_m}{m}\leqslant \ell+\varepsilon$.

b) En utilisant le théorème de la division euclidienne, montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ.

Exercice 3. (✍) Soit u une suite réelle ou complexe telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes. Montrer que la suite u est convergente.

Exercice 4. [X] Soient $p\in\mathbb{N}$ tel que $p\geqslant 2$ et $a_1,\dots,a_p$ des réels strictement positifs. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n=\left(\sum_{i=1}^{p} a_i i^n\right)^{1/n}$.

II. Suites définies implicitement

Exercice 5. [Mines] Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n\in\mathbb{R}_+$ tel que $u_n^5+nu_n-1=0$.

2. Prouver que (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. Déterminer le développement asymptotique à 2 termes de u_n.

Exercice 6. [Mines] Soit $f_n(x)=x^n+\cdots+x^2+x-1$. On considère a_n l'unique racine réelle positive de f_n.

1. Montrer que la suite (a_n) converge vers un réel ℓ à déterminer.

2. Déterminer un équivalent de $(a_n-\ell)$.

III. Fonctions de la variable réelle

Exercice 7. (✍) Pour tout réel x, on note sa partie entière $\lfloor x\rfloor$ et sa partie fractionnaire $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$. Déterminer les points de discontinuité des fonctions $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ et $x\mapsto\{x\}$.

Exercice 8. (✍) Soit f définie pour tout $x\in]0,1]$ par $f(x)=(1-x)\sin\frac{\pi}{x}$.

1. Montrer que f est bornée et déterminer ses bornes supérieure et inférieure.

2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 9. (♡) [Mines] Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Étudier la suite de terme général $u_n=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n}$.

Exercice 10. (Équation fonctionnelle) [CCEM] Déterminer les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, $xf(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11. [X-ENS] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $P^2 + a^2$ ne possède que des racines simples non réelles.

Exercice 12. (✍) Soit $b > 0$ et f définie sur $[-1, 1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = |x|^{5/2}\sin(|x|^{-b})$ sinon. Montrer que $f''(0)$ existe si et seulement si $b < \frac{1}{2}$.

IV. Relations de comparaison

Exercice 13. (✍) Déterminer les développements limités suivants :

1. $e^x - \cos x$, à l'ordre 2 en 0.

2. $\sqrt{1-x^2}$, à l'ordre 4 en 0.

3. $\frac{\sin x}{1+x}$, à l'ordre 3 en 0.

4. $\ln(\cos x)$ à l'ordre 4 en 0.

5. $\sqrt{x}$ à l'ordre 2 en 2.

6. $\sin x$ à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{6}$.

7. $\ln x$ à l'ordre 2 en $\frac{1}{2}$.

8. $\ln(\sin x)$ à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{6}$.

9. $(x - \ln(1+x))(e^x - \cos x)$ à l'ordre 4 en 0.

10. $\frac{x}{e^x-1}$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 14. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de x. Montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Montrer que cette limite peut exister sans que f admette de dérivée seconde en x.

Exercice 15. Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Montrer que $\displaystyle\int_2^n x^p \ln^q(x)\,\mathrm{d}x \sim_{n\to+\infty} \frac{n^{p+1}\ln^q(n)}{p+1}$.

Exercice 16. Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 6, en $+\infty$ de la fonction arctan.

Exercice 17. (✍) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^2-8x+2}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Dresser le tableau de variations de f.

2. a) Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.

b) En déduire l'équation de sa tangente en 0 puis leurs positions relatives au voisinage de 0.

3. a) Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on déterminera l'équation.

b) Quelle est la position relative de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$?

V. Suites récurrentes

Exercice 18. (✍) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1+2u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 19. Soit $x \in [0, 1]$. On définit $f_1 = \sqrt{2+2x}$ puis pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = \sqrt{2+f_n}$. Montrer que la suite (f_n) converge et en déterminer un encadrement.

VI. Avec Python

Exercice 20. [Centrale] Soit $f_n = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ avec $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ et $a_k \geqslant 0$ pour $k \in [\![2, n]\!]$.

1. Montrer qu'une telle fonction f_n s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^\star$. On note u_n son zéro.

2. On pose $f_n : x \mapsto -1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)x^k$.

a) Représenter les graphes sur $[0, 1]$ des f_n pour $n \in [\![1, 7]\!]$. Conjecture sur la suite (u_n) ?

b) Donner une expression simple de f_n et en déduire le résultat.

3. Lorsque, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = (k+1)!$, déterminer la limite de (u_n).