

VII - Applications linéaires

I - Applications linéaires

I.1 - Définitions

Définition 1 - Application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. L'application f est une *application linéaire* si pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

L'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

- Les applications linéaires sont des *morphismes* entre espaces vectoriels.
- Les applications linéaires bijectives sont des *isomorphismes*.
- Si $n = p$, on note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ses éléments sont des *endomorphismes*.
- Les endomorphismes bijectifs sont des *automorphismes*.

Exemple 1 - Applications linéaires

- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (3x + 2y, x + 2z, x + y + z)$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (3x + 2y, x + 2y, x + y)$.
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3x + 2y$.
- $\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x$ est un automorphisme.

Proposition 1

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors $f(\vec{0}_n) = \vec{0}_p$.

Proposition 2 - Opérations sur les applications linéaires

- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\alpha \cdot f : x \mapsto \alpha \cdot f(x)$ est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .
- Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors, $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .
- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)$. $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$ est une application linéaire de \mathbb{R}^q dans \mathbb{R}^p .

Exemple 2 - Opérations sur les applications linéaires

- Si $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, x + y)$ et $g : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z)$, alors
- Si $f : (x, y) \mapsto x + 2y$ et $g : (x, y, z) \mapsto (x + z, y + z)$, alors

$$f + g : (x, y, z) \mapsto (3x + 2y + z, 2x - z).$$

$$f \circ g : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z.$$

I.2 - Noyau & Image

Définition 2 - Noyau, Image

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

- Le *noyau* de f , noté $\text{Ker}(f)$, est l'ensemble

$$\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) = \vec{0}_p\}.$$

- L'*image* de f , notée $\text{Im}(f)$, est l'ensemble

$$\text{Im}(f) = \{f(x), x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Exemple 3 - Calculs de noyau et d'image

Soit $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, 4x + 2y)$.

- $(x, y, z) \in \text{Ker } f$ si et seulement si $f(x, y, z) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{(-\lambda/2, \lambda, \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(-1/2, 1, 0), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

- D'après la définition,

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{(2x + y, 4x + 2y), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(2, 4), (1, 2)\} = \text{Vect}\{(1, 2)\}. \end{aligned}$$

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

- $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p .

Exemple 4

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x + 3y + z = 0\}$.

Posons $f : (x, y, z) \mapsto 2x + 3y + z$. Alors, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, donc $F = \text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Définition 3 - Forme linéaire

Les applications linéaires à valeurs dans \mathbb{R} sont des *formes linéaires*.

Théorème 1 - Caractérisation des applications linéaires injectives

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i). f est injective.

(ii). $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_n\}$.

Exemple 5 - Une preuve d'injectivité

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = \text{Id}$. Alors, f est injective.

En effet, si $x \in \text{Ker } f$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \vec{0}_n \\ f^{p-1}(f(x)) &= f^{p-1}(\vec{0}_n) \\ f^p(x) &= \vec{0}_n \\ x &= \vec{0}_n \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker } f = \{\vec{0}_n\}$. L'application f est donc injective.

Théorème 2 - Théorème du rang (admis)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors,

$$\dim(\text{Ker } f) + \text{Rg } f = \dim(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 6 - Forme linéaire & Hyperplan

Soit f une forme linéaire non nulle. Comme $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} , alors $\dim \text{Im } f \in \{0, 1\}$.

Comme f est non nulle, alors $\text{Im } f \neq \{0\}$. Ainsi, $\dim \text{Im } f = 1$ et $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f = n - 1$ donc $\text{Ker } f$ est un hyperplan de \mathbb{R}^n .

Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est bijective.
- f est injective.
- f est surjective.

Exemple 7 - Un exemple d'isomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = \text{Id}$. D'après l'exemple précédent, f est injective. Ainsi, comme f est un endomorphisme, f est bijective.

II - Matrice d'une application linéaire

Dans toute la suite, F désigne un sous-espace vectoriel de dimension p de \mathbb{R}^n .

II.1 - Vecteurs, Applications linéaires, Matrices**Définition 4 - Matrice d'une famille de vecteurs dans une base**

Soit m un entier naturel non nul, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et v_1, \dots, v_m des vecteurs de F . Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on note $v_i = \sum_{j=1}^p x_{ji} e_j$. La *matrice des vecteurs* (v_1, \dots, v_m) dans la base \mathcal{B} est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_m) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}).$$

Exemple 8 - Matrice de vecteurs

Posons $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, 2)$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y) = ae_1 + be_2$. Alors,

$$\begin{cases} a + b = x \\ a + 2b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x - y \\ b = y - x \end{cases}$$

Soit $v_1 = (0, 1)$, $v_2 = (1, 0)$ et $v_3 = (4, 5)$. Alors,

$$v_1 = -(1, 1) + (1, 2)$$

$$v_2 = 2(1, 1) - (1, 2)$$

$$v_3 = 3(1, 1) + (1, 2)$$

Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 5 - Matrice d'une application linéaire dans deux bases

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de \mathbb{R}^n , $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de \mathbb{R}^p et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. La *matrice de l'application linéaire* f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Si $n = p$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.

Exemple 9 - Matrice d'applications linéaires

- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de \mathbb{R}^n . Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Id}(e_i) = e_i$. Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) = I_n$.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de \mathbb{R}^n et \mathcal{B}' une base de \mathbb{R}^p . En notant f l'application nulle de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = \vec{0}_p$. Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = 0_{p,n}$.
- On pose $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (2, 1)$. On montre aisément que

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 . Soit $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, y - 3z)$.

De plus, en utilisant l'exemple précédent,

$$f(e_1) = (3, -2) = 8(1, 1) - 5(1, 2)$$

$$f(e_2) = (4, -2) = 10(1, 1) - 6(1, 2)$$

$$f(e_3) = (0, -3) = 3(1, 1) - 3(1, 2)$$

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 3 \\ -5 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

- On note $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 et $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ la base de \mathbb{R}^2 définie à l'exemple précédent. Alors,

$$\text{Id}(\varepsilon_1) = (1, 0) = 2(1, 1) - (1, 2)$$

$$\text{Id}(\varepsilon_2) = (0, 1) = -(1, 1) + (1, 2)$$

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{Id}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

II.2 - Opérations usuelles

Proposition 5 - Évaluation

Soit \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^n , \mathcal{B}' une base de \mathbb{R}^p , $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $u \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

Théorème 3 - Addition et multiplication par un réel

Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^n , \mathcal{B}' une base de \mathbb{R}^p et $a \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(af + g) = a\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g).$$

Proposition 6 - Composition & Produit matriciel

Soit \mathcal{B}_1 (resp. $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$) une base de \mathbb{R}^n (resp. $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$), $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f).$$

Théorème 4 - Inverse & Matrices

Soit \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de \mathbb{R}^n et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. L'application f est un isomorphisme si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$ est inversible. Alors $[\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)]^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f^{-1})$.

Définition 6 - Morphisme canoniquement associé

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Notons \mathcal{C}_n (resp. \mathcal{C}_p) la base canonique de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^p). Le morphisme *canoniquement associé* à A est l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_n}(f) = A$.

Exemple 10 - Endomorphisme canoniquement associé

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée à A . Alors,

$$f(1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0) + (-1) \cdot (0, 1) = (1, -1)$$

$$f(0, 1, 0) = 2 \cdot (1, 0) + 4 \cdot (0, 1) = (2, 4)$$

$$f(0, 0, 1) = 3 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) = (3, 0)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= (x + 2y + 3z, -x + 4y). \end{aligned}$$

Corollaire 5 - Caractérisation des matrices inversibles

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$, alors $BA = I_n$.

Exemple 11 - Une autre preuve d'inversibilité

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si $AX = 0_{n,1}$, alors

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en notant f l'endomorphisme canoniquement associé à A , alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = \vec{0}_3$. Donc $\text{Ker } f = \{\vec{0}_3\}$. L'endomorphisme f est injectif et donc bijectif. Ainsi, A est inversible.

Corollaire 6 - Caractérisation des bases

Soit \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^n et (f_1, \dots, f_n) une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . La famille (f_1, \dots, f_n) est une base de \mathbb{R}^n si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n)$ est inversible.

Exemple 12 - Une base

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On pose $v_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $v_2 = -e_2 - e_3$ et $v_3 = e_3$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$.

D'après la définition, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice

est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont non nuls. Ainsi, la matrice est inversible et \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .

II.3 - Formules de changement de base**Définition 7 - Matrice de passage**

Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de \mathbb{R}^n . La *matrice de passage* de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}_2 est la matrice $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{Id}_E)$.

Exemple 13 - Suite de l'exemple précédent

$$\text{La matrice } P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 7 - Inversibilité

Soit $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ une matrice de changement de base. Alors, $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2})^{-1} = P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

Exemple 14 - Suite de l'exemple précédent

En utilisant une des techniques précédentes,

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array}$$

$$\text{Ainsi, } P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 8 - Changement de base d'un vecteur

Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de \mathbb{R}^n .

Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \left(P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$, soit

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u).$$

Remarque. C'est la matrice de passage de l'ancienne base \mathcal{B}_1 à la nouvelle base \mathcal{B}_2 qui est facile à obtenir, mais c'est celle de \mathcal{B}_2 à \mathcal{B}_1 (donc son inverse) qui est utile pour calculer les nouvelles coordonnées du vecteur. On n'échappe donc pas au calcul de l'inverse !

Exemple 15 - Suite de l'exemple précédent

Soit $u = (1, 4, 3) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $u = v_1 - 6v_2 - 4v_3$.

Théorème 7 - Formules de changement de base

Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1'$ deux bases de \mathbb{R}^n , $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2'$ deux bases de \mathbb{R}^p et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2'}(f) = P_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \cdot P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}.$$

En particulier, lorsque $n = p$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1' = \mathcal{B}_2'$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1'}(f) = \left(P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}\right)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}.$$

Remarque. Certains, comme moyen mnémotechnique, pourront voir dans la dernière formule une sorte de relation de Chasles.

Exemple 16 - Suite de l'exemple précédent

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A . Alors,

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) &= \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarque alors qu'on peut écrire $A = PCP^{-1}$, soit $A^n = PC^nP^{-1}$. De plus, la matrice C^n est aisée à calculer à l'aide de la formule du binôme de Newton.

II.4 - Rang des matrices**Définition 8 - Noyau, Image & Rang d'une matrice**

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- (i). L'*image* de M est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par ses vecteurs colonnes.
- (ii). Le *rang* de M , noté $\text{Rg } M$, est le rang des vecteurs colonnes de M .
- (iii). Le *noyau* de M est le sous-espace de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ engendré par les vecteurs X tels que $MX = 0_{p,1}$.

Proposition 9 - Rang des matrices & Applications linéaires

Soit \mathcal{B}_1 (resp. \mathcal{B}_2) une base de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^p) et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors, $\text{Rg } f = \text{Rg Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$.

Proposition 10 - Rang et Inversibilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\text{Rg } A = n$.

Exemple 17 - Calcul de rang

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss,

$$\begin{aligned} \text{Rg}(A) &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 \\ 0 & 11 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \end{matrix} \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{aligned}$$

La famille ainsi obtenue est échelonnée donc $\text{Rg}(A) = 2$.