

I - Diagonalisation

II - Réduction & Application

Solution de l'exercice 9.

1. D'après la définition, pour tout n entier naturel, $v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = -1$. Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme -1 . Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2^n.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible, i.e. $\text{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$. Or,

$$\begin{aligned} \text{Rg}(A - \lambda I_3) &= \text{Rg} \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 4 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} -3 - \lambda & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \\ 0 & -2 - \lambda & -4 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_3 \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} -3 - \lambda & -1 & 4 \\ 0 & -2 - \lambda & -4 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$ si et seulement si $\lambda \in \{-3, -2, 2\}$.

3. D'après la question précédente, A possède trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.

En résolvant des systèmes linéaires, on obtient

$$\begin{aligned} E_{-3}(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_{-2}(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_2(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors

$$A = PDP^{-1}.$$

4. Montrons par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout n entier naturel.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. D'une part, $A^0 = I_3$. D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= PD^nP^{-1}A, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \text{ d'après la question 3.} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.$$

5. Comme la matrice D est diagonale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour tout n entier naturel,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

6. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3u_n + 4v_n - w_n \\ 2v_n \\ -4v_n + 2w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= AU_n. \end{aligned}$$

7. Montrons par récurrence que $U_n = A^n$ pour tout n entier naturel.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Comme $A^0 = I_3$, alors $A^0U_0 = I_3U_0 = U_0$.

La propriété est donc vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = A^nU_0$. Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n, \text{ d'après la question 6} \\ &= AA^nU_0, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= A^{n+1}U_0, \text{ d'après la définition des puissances} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^nU_0.$$

8. En reprenant le résultat de la question 5.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= A^nU_0 \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n - 2^n + (-2)^n + 2(-3)^n - 2(-2)^n \\ -2^n \\ -(-2)^n + 2^n + 2(-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout n entier naturel,

$$\begin{cases} u_n &= -2^n - (-2)^n - (-3)^{n+1} \\ v_n &= -2^n \\ w_n &= 2^n + (-2)^n \end{cases}$$

□