# T.D. VI - Variables aléatoires discrètes infinies

# I - Modélisation & Lois géométriques

**Exercice 1.** Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires indistinguables au toucher. On effectue avec remise des tirages dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. On note T le premier instant où une boule blanche est tirée.

Quelle est la loi de T? Préciser l'espérance et la variance de T.

**Exercice 2.** Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires indistinguables au toucher. On effectue avec remise des tirages dans l'urne jusqu'à obtenir une boule noire. On note T le premier instant où une boule noire est tirée.

Quelle est la loi de T? Préciser l'espérance et la variance de T.

**Exercice 3.** Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note S la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

**1.** Quelle est la loi de S?

On appelle manche l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note T la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

**2.** Quelle est la loi de T? Préciser l'espérance et la variance de T.

**Exercice 4.** On dispose d'une pièce qui renvoie Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$  et Face avec probabilité  $\frac{2}{3}$ . On lance la pièce successivement 4 fois et on note X le nombre de faces obtenus.

**1.** Quelle est la loi de X?

On appelle manche l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir au moins 2 piles lors d'une manche. On note T la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

**2.** Quelle est la loi suivie par T? Préciser l'espérance et la variance de T.

**Exercice 5.** On dispose d'une urne  $U_1$  contenant 2 boules rouges et 3 boules noires et d'une urne  $U_2$  contenant 1 boule rouge et 4 boules noires. On dispose également d'une pièce équilibrée.

On appelle partie l'expérience suivante : on lance la pièce de monnaie ; si elle renvoie Pile, on tire une boule de l'urne  $U_1$ ; sinon, on tire une boule de l'urne  $U_2$ .

- 1. On note R l'événement « la boule tirée est rouge ». Déterminer  $\mathbf{P}(R)$ . Un joueur répète des parties en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne une boule rouge. On note T le rang de la partie où il s'arrête.
- **2.** Déterminer la loi de T. Préciser l'espérance et la variance de T.

**Exercice 6.** On dispose de 3 urnes numérotées de 1 à 3. Pour tout  $k \in [1,3]$ , l'urne numéro k contient k boules rouges et 4-k boules noires.

L'expérience consiste à choisir une urne « au hasard » puis à y tirer une boule.

- 1. On note N l'événement « la boule tirée est noire ». Déterminer  $\mathbf{P}(N)$ . Un joueur répète des expériences en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne une boule noire. On note T le rang de la partie où il s'arrête.
- **2.** Déterminer la loi de T. Préciser l'espérance et la variance de T.

# II - Autour de la loi géométrique

**Exercice 7.** Soit T une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(T=k) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

On pose Y = T + 1.

**1.** Déterminer  $Y(\Omega)$ , puis, pour tout  $k \in Y(\Omega)$ , exprimer  $\mathbf{P}(Y = k)$  en fonction de  $\mathbf{P}(T = k - 1)$ .

**2.** Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y. Préciser son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de T.

**Exercice 8.** Soit T une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb N$  telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(T=k) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^k.$$

On pose Y = T + 1.

**1.** Déterminer  $Y(\Omega)$ , puis, pour tout  $k \in Y(\Omega)$ , exprimer  $\mathbf{P}(Y = k)$  en fonction de  $\mathbf{P}(T = k - 1)$ .

**2.** Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y. Préciser son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de T.

**Exercice 9.** ( $\mathscr{D}$ ) On considère une variable aléatoire X à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que

$$\forall n \ge 1, \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X = n]) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \mathbf{P}([X > n])$ .

1. Justifier que

$$[X > n - 1] = [X = n] \cup [X > n].$$

- **2.** En déduire que  $u_{n-1} u_n = \mathbf{P}([X = n])$ .
- **3.** Montrer que, pour tout n entier naturel non nul,

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X>n]) = 1 - \mathbf{P}_{[X>n-1]}([X=n]).$$

**4.** En déduire que pour tout n entier naturel non nul,  $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ .

**5.** Exprimer, pour tout n entier naturel la valeur de  $u_n$  en fonction de n puis reconnaître la loi de X.

**6.** Exprimer  $\mathbf{P}([X \leq n])$  en fonction de n.

**Exercice 10.** ( $\mathscr{D}$ ) Soit  $X_1$ ,  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité géométrique de paramètre  $\frac{2}{3}$ . On note Z la variable aléatoire égale au maximum de  $X_1$  et de  $X_2$ .

- **1.** Montrer que  $[Z \leqslant n] = [X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n]$ .
- **2.** En déduire la valeur de  $\mathbf{P}([Z \leq n])$
- **3.** Pour tout n entier naturel non nul, en remarquant que  $\mathbf{P}([Z=n]) = \mathbf{P}([Z\leqslant n]) \mathbf{P}([Z\leqslant n-1])$ , déterminer  $\mathbf{P}([Z=n])$ .
- **4.** Vérifier que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([Z=n]) = 1$ .

Exercice 11. Soit Y une variable aléatoire telle que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(Y = k) = e^{-k} - e^{-(k+1)}.$$

On pose Z = Y + 1.

- 1. Vérifier que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=k) = 1.$
- **2.** Reconnaître la loi de Z puis en déduire son espérance et sa variance.
- **3.** En déduire l'espérance et la variance de Y.
- **4.** On considère la matrice  $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ . Calculer la probabilité que M soit inversible.

**Exercice 12.** ( $\mathscr{D}$ ) Soit X et Y deux variables éaléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{3}$ .

1. En utilisant le système complet d'événements  $([Y=k])_{k\in\mathbb{N}^*},$  montrer que

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \times \mathbf{P}(Y = k).$$

- **2.** Calculer  $\sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^{2k-2}$ .
- **3.** En déduire  $\mathbf{P}(X = Y)$ .

## III - Autour de la loi de Poisson

**Exercice 13.** Un serveur téléphonique ouvre sa ligne chaque minute. Chaque minute, la probabilité qu'il prenne un client est constante et égale à  $\frac{1}{12}$ . On note X le nombre d'appels auxquels le serveur a répondu en 1 heure.

**1.** Déterminer la loi de X, son espérance  $\mathbf{E}[X]$  et sa variance  $\mathbf{V}(X)$ . On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X. On considère la table de la loi de Poisson de paramètre S suivante :

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}\left([Y=k]\right)$	0.006	0.034	0.084	0.140	0.175	0.175	0.146

- 2. Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.
- **3.** Déterminer des valeurs approchées de  $P(X \le 3)$  puis  $P(X \ge 4)$ .

**Exercice 14.** Une entreprise produit 100 ampoules par seconde. On suppose que chaque ampoule a une probabilité de 5% d'être défectueuse. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défecteuses par seconde.

1. Déterminer la loi de X puis préciser son espérance et sa variance.

On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X.

- 2. Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.
- **3.** À l'aide de la table de valeurs ci-dessous, calculer une valeur approchée de  $\mathbf{P}([X\geqslant 10])$ .

#### Fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ .

Par exemple, si U suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda=3$ , alors  $\mathbf{P}\left([U\leqslant 4]\right)=0.815$ .

$k$ $\lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.135	0.05	0.018	0.007	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.736	0.406	0.199	0.092	0.040	0.017	0.007	0.003	0.001	0.000
2	0.920	0.677	0.423	0.238	0.125	0.062	0.030	0.014	0.006	0.003
3	0.981	0.857	0.647	0.433	0.265	0.151	0.082	0.042	0.021	0.010
4	0.996	0.947	0.815	0.629	0.440	0.285	0.173	0.100	0.055	0.030
5	0.999	0.983	0.916	0.785	0.616	0.446	0.301	0.191	0.116	0.067
6	1	0.995	0.966	0.889	0.762	0.606	0.450	0.313	0.207	0.130
7	1	0.999	0.988	0.949	0.867	0.744	0.599	0.453	0.324	0.220
- 8	1	1	0.996	0.979	0.932	0.847	0.729	0.593	0.456	0.333
9	1	1	0.999	0.992	0.968	0.916	0.930	0.717	0.587	0.458
10	1	1	1	0.997	0.986	0.957	0.901	0.816	0.706	0.583

### IV - Autres lois

**Exercice 15.** On considère une variable aléatoire X à valeurs dans  $\mathbb N$  telle que

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X=0) &= \frac{1}{2}, \\ \mathbf{P}(X=j) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^j, \forall j \geqslant 1. \end{cases}$$

On rappelle que  $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

Déterminer l'espérance de X.

**Exercice 16.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb N$  telle que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

- 1. Simplifier  $\frac{1}{k} \frac{1}{k+1}$ .
- **2.** Vérifier que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k) = 1$ .
- **3.** En déduire la valeur de  $\mathbf{P}(X=0)$ .
- **4.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{P}(X > n) = \frac{1}{n+1}$ .

**Exercice 17.** Soit X une variable aléatoire telle que

$$\forall n \geqslant 2, \mathbf{P}(X = n) = \frac{4(n-1)}{3^n}.$$

On admet que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} k^2 x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

- **1.** Vérifier que  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4(n-1)}{3^n} = 1$ .
- **2.** Calculer l'espérance de X.

**Exercice 18.** Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  telle que

$$\forall n \geqslant 2, \mathbf{P}(Y = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

- 1. Calculer  $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n)$ .
- **2.** Calculer  $\mathbf{E}[Y]$ .