

## T.D. IV - Matrices inversibles

### I - Résolution de systèmes

**Exercice 1. (✿)** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{array}{ll}
 1. (S_1) \begin{cases} 5x + y - 2z &= 3 \\ x + 4y + z &= 2 \\ -3x + 2y + 3z &= -2 \end{cases} & 3. (S_3) \begin{cases} x + y - z &= 2 \\ 3x + 5y - z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 1 \end{cases} \\
 2. (S_2) \begin{cases} 2x + 3y - z &= 1 \\ 5x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + y + z &= 5 \end{cases} & 4. (S_4) \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ 3x + 4y - z &= 2 \\ x + 3y + z &= 10 \end{cases}
 \end{array}$$

**Exercice 2.** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{array}{ll}
 1. (S_1) \begin{cases} 2x + y + z + t &= 3 \\ x + y + z + t &= 12 \\ 3x + 2y + 2z + t &= 3 \\ 3x + y + 2z + 3t &= 5 \end{cases} & 2. (S_2) \begin{cases} 2x + 2y + z + t &= 1 \\ x + y + 3z + t &= 2 \\ 3x + y + 2z + 2t &= -1 \\ 3x + y + 2z + 3t &= 5 \end{cases}
 \end{array}$$

### II - Inverses

#### II.1 - Calculs directs

**Exercice 3. (✿)** Dans chacune des questions suivantes, calculer le produit  $AB$ , en déduire que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$ .

$$\begin{array}{ll}
 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} & \\
 2. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} &
 \end{array}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ -4 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** On reprend les matrices de l'exercice précédent. Déterminer l'inverse de  $AB$  lorsque :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### II.2 - Polynômes de matrices

**Exercice 5. (✿)** On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^3 - 2A^2 - 12A + 19I_3$ .


2. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 6. (✿)** On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .


1. Calculer  $A^3 - 2A^2 + 3A + 14I_3$ .

2. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

## II.3 - Non inversibilité

**Exercice 7.** () On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ .


1. Calculer  $A^2$  puis  $A^3$ .
2. En déduire que  $A$  n'est pas inversible.

**Exercice 8.** () On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et


$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $AB$  et  $AC$ .
2. En déduire que  $A$  n'est pas inversible.

## III - Cas particuliers

**Exercice 9.** () Pour chacune des matrices d'ordre 2 suivante, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 2 \\ 4 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>.</li> <li>2. <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 2 \\ -4 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>.</li> <li>3. <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; 0 \\ 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>.</li> </ol> |  | <ol style="list-style-type: none"> <li>4. <math>\begin{pmatrix} -1 &amp; 5 \\ 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>.</li> <li>5. <math>\begin{pmatrix} -1 &amp; 3 \\ 1 &amp; -3 \end{pmatrix}</math>.</li> <li>6. <math>\begin{pmatrix} 5 &amp; -1 \\ 10 &amp; -2 \end{pmatrix}</math>.</li> </ol> |
|--|--|---|

**Exercice 10.** () Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse.

- |  |  |  |
|--|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 2 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 3 \end{pmatrix}</math>.</li> </ol> |  | <ol style="list-style-type: none"> <li>2. <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>.</li> </ol> |
|--|--|--|

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 4. \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11. (✱)** Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & -5 & 75 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 27 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 4. \begin{pmatrix} -3 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

## IV - Pivot de Gauss

**Exercice 12. (✱)** Inverser les matrices suivantes en résolvant le système  $AX = Y$ .

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 4. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 5. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 6. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13.** Inverser les matrices suivantes en utilisant la méthode du pivot sur la matrice identité.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 2. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## V - Calculs de puissances

**Exercice 14.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $PQ$ . En déduire que  $P$  est inversible et expliciter  $P^{-1}$ .
2. Vérifier que  $A = PDP^{-1}$ .
3. Pour tout  $n$  entier naturel, expliciter  $D^n$ .
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on a  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
5. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 0$ ,

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 5^n & 0 & 3^n - 5^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 3^n - 5^n & 0 & 3^n + 5^n \end{pmatrix}.$$

6. La matrice  $D$  est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.
7. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer son inverse.

**Exercice 15.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et  $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**1.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

**2.** Calculer  $PQ$ . En déduire que  $P$  est inversible et déterminer son inverse  $P^{-1}$ .

**3.** Vérifier que  $PMP^{-1} = A$ .

**4.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $M^n = P^{-1}A^nP$ .

En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$