Devoir en temps libre

Optionnel

■ ■ ■

Problème. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue à droite en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que f est dérivable à droite en 0 et donner le nombre dérivé à droite de f en 0, noté $f'_d(0)$.

2. a) Déterminer, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, l'expression de $f'(x)$ en fonction de x, où f' désgine la fonction dérivée de f.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis donner les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

c) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de f.

d) Vérifier que, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a $f''(x) = \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{-1/x}$. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}_+$?

3. a) Calculer $\lim\limits_{u\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-u} - 1}{u}$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$.

c) On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Donner l'équation de la droite asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$ et tracer l'allure de $(\mathscr{C})$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

4. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

5. a) Montrer que, pour tout n entier naturel, on a la relation $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1})$.

b) En déduire que la suite de terme général $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$ est divergente.

Exercice 1. (Dénombrement de surjections) Soient q, k, p trois entiers tels que $0 \leqslant q \leqslant k \leqslant p$.

1. Montrer que $\binom{p}{k} \cdot \binom{k}{q} = \binom{p}{q} \cdot \binom{p-q}{p-k}$.

2. En déduire $\sum\limits_{\ell=q}^{p} (-1)^{p-\ell}\binom{p}{\ell}\binom{\ell}{q} = \delta_{p,q}$, où $\delta_{p,q} = 0$ si et seulement si $p \neq q$.

3. Soient n un entier naturel, $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ deux familles de réels. On suppose que pour tout entier $p \in [\![0,n]\!]$, $\sum\limits_{q=0}^{p} \binom{p}{q} a_q = b_p$. Pour tout entier $p \in [\![0,n]\!]$, exprimer $\sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k} b_k$ en fonction de a_p.

Nombre de surjections Pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, on note S_n^p le nombre d'applications surjectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$. Par convention, on pose $S_n^0 = S_0^n = 0$ et $S_0^0 = 1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Déterminer S_n^1, S_n^2, S_n^n.

b) Soit $p > n$. Déterminer S_n^p.

c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $p^n = \sum\limits_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_n^k$.

d) On suppose n différent de 0. En déduire que

$$\forall\, p \in [\![1, n]\!],\ S_n^p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

5. a) On suppose que $2 \leqslant p \leqslant n$. En considérant la restriction à $[\![1, n-1]\!]$ d'une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$, montrer que

$$S_n^p = p\left(S_{n-1}^p + S_{n-1}^{p-1}\right).$$

b) Cette relation est-elle encore vraie lorsque $1 \leqslant p \leqslant n$?

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $S_{n+1}^n = \frac{n}{2}(n+1)!$.