T.D. XIV - Nombres complexes

I - Écritures

Exercice 1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $(2+6\,\mathrm{i})(6+\mathrm{i})$.
2. $(4-3\,\mathrm{i})^2$.
3. $(1-2\,\mathrm{i})(1+2\,\mathrm{i})$.
4. $(2-3\,\mathrm{i})^4$.
5. $\frac{1}{3-\mathrm{i}}$.
6. $\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$.
7. $\frac{1-\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$.

Exercice 2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. 12.
2. $\frac{3}{2}\,\mathrm{i}$.
3. -3.
4. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$.
5. $-2\,\mathrm{i}$.
6. $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.
7. $\left(\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4$.
8. $-3(\cos(\theta)+\sin(\theta)\,\mathrm{i})$.
9. $2(\cos(2\theta)-\mathrm{i}\sin(2\theta))$.
10. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right)(1-\mathrm{i})$.
11. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$.

Exercice 3. Soit $z=\frac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}}$.

1. Calculer $|z|$.
2. Mettre z sous forme algébrique.
3. Calculer z^{2021}.

Exercice 4. (Angle moitié) Soit $a, b\in\mathbb{C}$ de modules 1 tels que $a\neq b$. Montrer que $\frac{a+b}{a-b}$ est un nombre imaginaire pur.

On pourra écrire $a=\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}$ et $b=\mathrm{e}^{\varphi\,\mathrm{i}}$ sous forme trigonométrique puis factoriser par $\mathrm{e}^{\frac{\theta+\varphi}{2}\,\mathrm{i}}$.

Exercice 5. Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{kx\,\mathrm{i}}$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.

II - Résolution d'équations

Exercice 6. Déterminer les nombres complexes z solutions des équations suivantes :

1. $z^2+9=0$
2. $z^2-z+1=0$.
3. $z^2+z+1=0$.
4. $3z^2-6z+6=0$.
5. $z^4+z^2+1=0$.
6. $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$.

Exercice 7. Soit $n\geqslant 2$ un entier naturel. Soit z un nombre complexe tel que $z^n=1$.

1. Montrer que $|z|=1$. On pose dans la suite $z=\mathrm{e}^{\theta\,\mathrm{i}}$.
2. Déterminer les valeurs possibles pour θ.
3. Représenter graphiquement les solutions des équations :
   - **a)** $z^2=1$.
   - **b)** $z^3=1$.
   - **c)** $z^4=1$.
   - **d)** $z^5=1$.

III - Géométrie

Exercice 8. Soit z un nombre complexe de module 1.

a) Calculer $|1+z|^2+|1-z|^2$.

b) Représenter géométriquement les points d'affixes 1, z, $1-z$ et $1+z$ puis interprétez le résultat obtenu.

Exercice 9. Décrire les transformations du plan complexe définies par :

1. $z\mapsto \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\,\mathrm{i}}(z-(1+\mathrm{i}))+1+\mathrm{i}$.
2. $z\mapsto z+12+16\,\mathrm{i}$.
3. $z\mapsto \mathrm{i}\,z+1$.

Exercice 10. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$ tels que $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ soit réel.