

# T.D. I - Suites & Fonctions

## I - Suites

### I.1 - Suites classiques

**Exercice 1. (Suite arithmétique)** Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique. Sachant que  $u_{80} = 393$  et  $u_{15} = 133$ , calculer  $u_1$ .

**Exercice 2.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$ .

1. Déterminer  $u_1, \dots, u_5$  en écrivant les résultats sous la forme d'une puissance de 2.
2. Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $v_n = \ln(u_n) - \ln(4)$ . Déterminer la nature de la suite  $(v_n)$  et en déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
3. Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis en déduire la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 3. (Une suite arithmético-géométrique)** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 12$ .

1. Déterminer la solution  $\ell$  de l'équation  $\ell = -\frac{\ell}{2} + 12$ .  
Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $v_n = u_n - \ell$ .
2. Déterminer la nature de la suite  $(v_n)$ .
3. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 4. (Une seconde suite arithmético-géométrique)** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = 3u_n + 4$ .

1. Déterminer un réel  $\ell$  tel que  $\ell = 3\ell + 4$ .
2. Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $v_n = u_n - \ell$ . Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique.
3. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis étudier le comportement asymptotique de  $(u_n)$ .

**Exercice 5. (Une suite homographique)** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$ .  
Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ .

1. Déterminer la nature de la suite  $(v_n)$ .
2. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### I.2 - Sommes des termes

**Exercice 6. (Sommes classiques)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer, en fonction de  $n$  les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n 1.$	3. $\sum_{k=0}^n k.$	5. $\sum_{k=0}^n k^3.$
2. $\sum_{k=1}^n 2.$	4. $\sum_{k=0}^n k^2.$	

**Exercice 7. (Série harmonique)** Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Montrer que la suite  $(H_n)$  est monotone. Que peut-on en déduire quant à son comportement lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ .
3. En déduire que  $(H_n)$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 8.** Soit  $q \in ]-1, 1[$ . On note  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in ]-1, 1[$  par  $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ .

1. Rappeler l'expression de  $f$  sans le signe somme. En déduire l'expression de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k$ .
2. Montrer que  $f$  est dérivable et donner deux expressions pour sa dérivée  $f'$ .

3. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kq^{k-1}$ .

**Exercice 9.** Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

1. Montrer que, pour tout  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ .
2. Montrer que  $(S_n)$  est majorée par 2.
3. En déduire que  $(S_n)$  converge.

**Exercice 10. (Constante d'Euler)** Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Pour tout  $x \geq 0$ , montrer les inégalités

$$\ln(1+x) \leq x \text{ et } \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x).$$

2. Montrer que, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

3. En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n.$$

4. En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

Pour tout  $n \geq 2$ , on pose  $c_n = H_{n-1} - \ln(n)$ .

5. Calculer  $c_{n+1} - c_n$  et en déduire le sens de variation de la suite  $(c_n)$ .
6. Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ ,  $c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$ .
7. En déduire que la suite  $(c_n)$  est convergente.

## I.3 - Suites définies par récurrence

**Exercice 11.** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ .

1. Montrer que  $(u_n)$  est croissante.
2. En supposant que  $(u_n)$  est majorée, aboutir à une contradiction.
3. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 12.** On définit la suite définie par récurrence par  $u_0 \geq -1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ . On pose  $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq 0$ .
2. On pose  $g : x \mapsto f(x) - x$ . Étudier les variations puis le signe de  $g$ .
3. On suppose que  $u_0 \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ .
  - a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .
  - b) En utilisant la fonction  $g$ , montrer que  $(u_n)$  est croissante.
  - c) En déduire que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
4. Reprendre les questions précédentes lorsque  $u_0 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

## I.4 - Suites définies implicitement

**Exercice 13.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$ .
2. En déduire qu'il existe un unique réel  $u_n \in \mathbb{R}_+$  tel que  $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ .
3. En étudiant le signe de  $f_{n+1}(u_n)$ , montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée.
4. En déduire que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
5. En utilisant la question précédente, étudier la limite de la suite  $(nu_n)$  et en déduire un équivalent simple de  $u_n$ .
6. On pose  $\varepsilon_n = nu_n - 1$ . Exprimer  $\varepsilon_n$  en fonction de  $n$  et de  $u_n$  et en déduire un équivalent simple de  $\varepsilon_n$ .

7. En déduire qu'il existe une suite  $(\delta_n)$  satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6} \delta_n.$$

**Exercice 14.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x - \ln x$ .

1. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $u_n \in ]0, 1]$  tel que  $f(u_n) = n$ .
3. Montrer que  $(u_n)$  est strictement décroissante et converge vers 0.
4. En utilisant la question précédente, montrer que  $u_n \sim e^{-n}$ .
5. Montrer que  $u_n - e^{-n} = e^{-n}(e^{u_n} - 1)$  et en déduire un équivalent simple de  $(u_n - e^{-n})$ .
6. En déduire qu'il existe une suite  $(\delta_n)$  satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$  et telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{-n} + e^{-2n} + e^{-2n} \delta_n$ .

## II - Fonctions

### II.1 - Calculs de développements limités

**Exercice 15.** Déterminer un équivalent simple en  $+\infty$  de chacune des fonctions suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $f_1(x) = \frac{x^5 + 4x^4 + 2}{2x^3 + x + 1}.$  | 9. $f_9(x) = \frac{(3x+12) \ln(1+\frac{1}{x})}{5x^4 + 2}.$ |
| 2. $f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$               | 10. $f_{10}(x) = \frac{x}{e^x + e^{-x}}.$                  |
| 3. $f_3(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$    | 11. $f_{11}(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}.$                |
| 4. $f_4(x) = \ln(1 + x^2).$                         | 12. $f_{12}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2(e^x - e^{-x})}.$  |
| 5. $f_5(x) = \frac{e^{-x} + 3x + 2}{x^2 + 1}.$      | 13. $f_{13}(x) = \frac{x^4(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}.$  |
| 6. $f_6(x) = \frac{(x^5 + 3x + 1)e^{-x}}{12x + 3}.$ | 14. $f_{14}(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x - e^{-x}}.$           |
| 7. $f_7(x) = \frac{(x+25) \ln(x)}{e^x + e^{-x}}.$   | 15. $f_{15}(x) = \frac{x^3 e^{-2\sqrt{x}}}{1+x^3+x^4}.$    |
| 8. $f_8(x) = \frac{\ln(x+1)e^x}{2x+5}.$             |  |

**Exercice 16.** Déterminer un équivalent simple en 0 de chacune des fonctions suivantes :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $f_1(x) = \frac{(x^5 + 3x + 1)e^{-x}}{12x + 3}.$        | 6. $f_6(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}.$               |
| 2. $f_2(x) = \frac{(x+25) \ln(x)}{e^x + e^{-x}}.$          | 7. $f_7(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2(e^x - e^{-x})}.$ |
| 3. $f_3(x) = \frac{\ln(x+1)e^x}{2x+5}.$                    | 8. $f_8(x) = \frac{x^4(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}.$ |
| 4. $f_4(x) = \frac{(3x+12) \ln(1+\frac{1}{x})}{5x^4 + 2}.$ | 9. $f_9(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x - e^{-x}}.$          |
| 5. $f_5(x) = \frac{x}{e^x + e^{-x}}.$                      |   |

**Exercice 17. (Calculs de limites en 0)** Déterminer les limites 0 des fonctions suivantes :

- |                                      |                                       |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}-1}.$   | 4. $\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+2x}-1}.$ |
| 2. $\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-1}.$ | 5. $\frac{e^{3x}-1-3x}{x^2}.$         |
| 3. $\frac{e^x-1}{x}.$                |                                       |

**Exercice 18.** Déterminer un équivalent en 1 de chacune des fonctions suivantes :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$        | 4. $f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}.$ |
| 2. $f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2-1}}.$ | 5. $f_5(x) = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x^2-1}}.$    |
| 3. $f_3(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}.$   |   |

**Exercice 19. (Calculs de limites en  $+\infty$ )** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminer

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{\alpha}{n})^n.$ | 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{3/x} - 1).$ |
|---|---|

**Exercice 20. (Calculs de développements limités)** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, en 0 de :

- |                       |                            |
|-----------------------|----------------------------|
| 1. $\frac{e^x-1}{x}.$ | 2. $\frac{1}{1+\ln(1+x)}.$ |
|-----------------------|----------------------------|

## II.2 - Étude de courbes

### Exercice 21. (Inégalités classiques)

1. Démontrer puis représenter graphiquement les inégalités suivantes :

a)  $\forall u \in ]-1, +\infty[, \ln(1+u) \leq u.$

b)  $\forall u \in \mathbb{R}, 1+u \leq e^u.$

2. Montrer que  $\forall u \geq 0, u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u).$

### Exercice 22. ( $e^\pi$ ou $\pi^e$ ?)

1. Étudier la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$

2. Sans calculatrice, parmi les réels  $e^\pi$  et  $\pi^e$ , lequel est le plus petit ?

**Exercice 23.** Déterminer l'équation de la tangente ainsi que la position (locale) de la courbe représentative par rapport à cette tangente aux points précisés :

1.  $e^x$  en 0.

2.  $e^x$  en 2.

3.  $\ln(x)$  en 1.

4.  $x e^x$  en 0.

5.  $\frac{e^x-1}{x}$  en 0.

**Exercice 24.** On considère la fonction  $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1}.$

1. Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de  $f.$

2. Étudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty.$

3. Montrer que, pour tout  $x \in D \setminus \{-1, 1\}, f'(x)$  et  $f(x)$  sont de même signe.

4. Déterminer les variations de  $f$  sur  $[1, +\infty[.$

5. Montrer que, pour tout  $x \in D, f(x)f(-x) = -1$  et en déduire les variations de  $f$  sur  $] -\infty, -1].$

6. On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f.$  Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty.$

7. Tracer  $\mathcal{C}_f$  et  $\Delta.$

## II.3 - Équations fonctionnelles

**Exercice 25. (Isométries de  $\mathbb{R}$ )** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

1. Montrer qu'il existe une fonction  $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \varepsilon(x) \cdot x + f(0).$$

2. Soit  $x$  un réel non nul. En calculant de deux manières  $(f(x) - f(1))^2$ , montrer que  $\varepsilon(x)\varepsilon(1) = 1.$  En déduire que  $\varepsilon(x) = \varepsilon(1).$

3. En déduire l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui satisfont la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

**Exercice 26.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que  $f(0) \in \{0, 2\}.$

2. Si  $f(0) = 0$ , montrer que  $f$  est la fonction nulle.

3. Si  $f(0) = 2$ , montrer que  $f$  est la fonction constante égale à 2.

4. En déduire l'ensemble des fonctions  $f$  qui satisfont la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(x) + f(y).$$

**Exercice 27.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que  $f(0) = 0.$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(nx) = nf(x)$ .
3. En déduire que, si  $f$  est une fonction bornée, alors  $f$  est la fonction nulle.
4. Montrer que  $f$  est une fonction impaire.
5. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,

$$f(n) = nf(1) \text{ et } f(-n) = -nf(1).$$

6. Montrer que, pour tout  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ,  $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1)$ .
7. On suppose que, pour tout  $x$  réel, il existe deux suites d'entiers  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$ .  
Montrer que, si  $f$  est une fonction continue, alors  $f(x) = xf(1)$ .