# VIII - Probabilités

#### I - L'univers

## À Savoir

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.

# Exemple 1

Les résultats obtenus à l'issue de deux lancers successifs d'un dé.

## À Savoir

L'univers est l'ensemble des résultats possibles pour une expérience. Généralement noté  $\Omega$ .

#### Exemple 2 - 2 lancers d'un dé

$$\Omega = \{(i, j), 1 \leqslant i, j \leqslant 6\} = [1, 6]^2$$

## À Savoir

Un événement est une partie (ou sous-ensemble) de l'univers  $\Omega$ .

## Exemple 3 - 2 lancers d'un dé

 $A: obtenir\ un\ nombre\ pair\ lors\ du\ premier\ lancer.$ 

 $B: la\ somme\ des\ deux\ lancers\ est\ un\ nombre\ pair.$ 

# À Savoir

Deux événements A et B sont **incompatibles** si  $A \cap B = \emptyset$ 

## Exemple 4 - 2 lancers d'un dé

A: obtenir un nombre pair lors du premier lancer.

 $B: la\ somme\ des\ deux\ lancers\ vaut\ 2.$ 

Si on considère l'événement  $A \cap B$ , le premier dé renvoie un nombre pair, donc supérieur ou égal à 2. Comme le second dé renvoie au moins 1, la somme des deux est supérieure ou égale à 3. Ainsi, A et B sont incompatibles.

## À Savoir

L'événement **contraire** de A, noté  $\overline{A}$ , est l'ensemble des expériences de  $\Omega$  qui ne sont pas dans A.

#### Exemple 5 - 2 lancers d'un dé

 $A: obtenir \ un \ nombre \ pair \ lors \ du \ premier \ lancer.$ 

 $\overline{A}$ : obtenir un nombre impair lors du premier lancer.

## À Savoir

Un système complet d'événements est une famille d'événements  $A_1, \ldots, A_n$  tels que

$$\begin{cases} A_i \neq \emptyset & \forall \ 1 \leqslant i \leqslant n \\ A_i \cap A_j = \emptyset & \forall \ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \\ \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \Omega \end{cases}$$

## Exemple 6 - 2 lancers d'un dé

 $A_2$ : la somme des deux résultats vaut 2.  $A_3$ : la somme des deux résultats vaut 3.

37

. . .

 $A_{12}$ : la somme des deux résultats vaut 12.

 $(A_2, \ldots, A_{12})$  est un système complet d'événements.

## II - Probabilité

## À Savoir

Une **probabilité** sur un ensemble fini  $\Omega$  est une application définie sur l'ensemble des événements et à valeurs dans [0,1] telle que

- \*  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ ,
- \* si  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbf{P}(A \sqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ .

#### À Savoir

L'équiprobabilité est la probabilité définie (lorsque  $\Omega$  est fini) par  $\mathbf{P}(A) = \frac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)}$ .

## Exemple 7 - 2 lancers d'un dé équilibré

 $A: le \ r\'esultat \ du \ premier \ lancer \ est \ pair.$ 

$$A = \{(2i, j), 1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 6\}.$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}.$$

#### À Savoir

- \*  $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ .
- \*  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) \mathbf{P}(A \cap B)$ .

#### Exemple 8 - 2 lancers d'un dé équilibré

A : le résultat du premier lancer est pair.

 $C: le\ r\'esultat\ du\ second\ lancer\ est\ pair.$ 

 $A \cup C$ : le résultat d'un des lancers est pair.

$$\begin{split} \mathbf{P}\left(A\right) &= \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}\left(C\right) = \frac{1}{2}, \\ A \cap C &= \left\{ (2i, 2j), \ 1 \leqslant i, j \leqslant 3 \right\}, \\ \mathbf{P}\left(A \cap C\right) &= \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{4}, \\ \mathbf{P}\left(A \cup C\right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{split}$$

#### À Savoir

Si  $\mathbf{P}(A) \neq 0$ , alors la **probabilité conditionnelle de** A sachant B vaut  $\mathbf{P}_{B}(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$ .

#### Exemple 9 - 2 lancers d'un dé équilibré

A : le résultat du premier lancer est un 2.

B : le résultat du premier lancer est pair.

On a vu précédemment que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

Si le résultat du premier lancer est 2, alors le résultat est pair. Ainsi,  $A \cap B = A$  et

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}.$$

Finalement, la probabilité que le résultat du premier lancer soit égal à 2 sachant qu'il est pair est égale à

$$\mathbf{P}_{B}\left(A\right) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Chapitre VIII - Probabilités ECT 2

## À Savoir

Formule des probabilités composées. Si  $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ ,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{i}\right) = \mathbf{P}\left(A_{1}\right) \mathbf{P}_{A_{1}}\left(A_{2}\right) \mathbf{P}_{A_{1} \cap A_{2}}\left(A_{3}\right) \cdots \mathbf{P}_{A_{1} \cap \cdots \cap A_{n-1}}\left(A_{n}\right).$$

Cette formule est utile lorsque l'expérience est une succession d'étapes qui ont une influence les unes sur les autres.

## Exemple 10 - Une urne

Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules noires. On effectue 4 tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 2 boules rouges puis 2 boules noires?

On note:

 $A_1$ : la première boule tirée est rouge.

 $A_2$ : la seconde boule tirée est rouge.

 $A_3$ : la troisième boule tirée est noire.

 $A_4$ : la quatrième boule tirée est noire.

Alors,

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots$$

$$\cdots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4)$$

$$= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{4}{12}$$

$$= \frac{5}{13 \times 7}.$$

## À Savoir

Formule des probabilités totales. Si  $(A_1, \ldots, A_n)$  est un système complet d'événements,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{A_i}(A) \mathbf{P}(A_i).$$

Cette formule est utile lorsque le résultat d'une expérience peut

être plus facile à décrire lorsqu'on le décompose selon différents cas possibles.

#### Exemple 11 - La même urne

Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge? On distingue les cas où la première boule tirée est rouge (événement  $A_1$ ) et les cas où la première boule tirée est noire (événement  $\overline{A_1}$ ). Comme  $(A_1, \overline{A_1})$  est un système complet d'événements,

$$\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_2 \cap A_1) + \mathbf{P}(A_2 \cap \overline{A_1})$$

$$= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \times \frac{10}{14}$$

$$= \frac{10 \times 14}{15 \times 14} = \frac{5 \times 2 \times 14}{5 \times 3 \times 14} = \frac{2}{3}.$$

## À Savoir

Formule de Bayes. Si  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ ,

$$\mathbf{P}_{A}(B) = \frac{\mathbf{P}_{B}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

#### Exemple 12 - La même urne

L'expérimentateur tire successivement 2 boules et cache le résultat de son premier tirage. Sachant que le second tirage est une boule rouge, quelle est la probabilité que le premier tirage soit une boule rouge?

$$\mathbf{P}_{A_2}(A_1) = \frac{\mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(A_2)}$$
$$= \frac{\frac{9}{14} \times \frac{10}{15}}{\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{9}{14}.$$

Chapitre VIII - Probabilités ECT 2

# III - Indépendance

# À Savoir

A et B sont indépendants si  $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$ .

#### Exemple 13 - 2 lancers d'un dé équilibré

 $A: le \ r\'esultat \ du \ premier \ lancer \ est \ pair.$ 

C: le résultat du premier lancer est un multiple de 3.

$$C = \{(3i, j), 1 \le i \le 2, 1 \le j \le 6\}$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(C) = \frac{2 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{3}$$

$$A \cap C = \{(6, j), 1 \le j \le 6\}$$

$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi,  $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(C)$ . Les événements A et C sont indépendants.

## À Savoir

Les événements  $A_1, \ldots, A_n$  sont **mutuellement indépendants** si

pour tout 
$$J \subset [1, n]$$
,  $\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$ .

Peut être utilisé entre les différents lancers d'une pièce, d'un dé, d'un tirage avec remise,...