XIII - Relations binaires

I - Relations binaires

Définition 1 - Relation binaire

Soit E un ensemble et $G \subset E \times E$. Le couple $\mathscr{R} = (E, G)$ est une *relation binaire* sur E.
Soit $(x, y) \in E \times E$. Si $(x, y) \in G$, l'élément x est *en relation avec* y, noté $x\mathscr{R}y$.
L'ensemble G est le *graphe* de la relation binaire.

Exemple 1 - Exemples de relations

- Si E est l'ensemble des élèves d'un lycée et G est l'ensemble des couples d'élèves qui sont dans une même classe. On notera alors $x\mathscr{R}y$ si et x et y sont dans la même classe (par ex. en $2D2$).
- Si E est l'ensemble des mots et G est l'ensemble des couples de mots où le premier mot est classé avant dans l'alphabet. On note alors $x \preceq y$ si x est avant y dans l'alphabet. Par exemple, (chat $\preceq$ chien) ou (chien $\preceq$ fourmi).
- Si E est l'ensemble des réels, vous connaissez les relations :
  - ⋆ d'égalité, noté $x = y$.
  - ⋆ d'infériorité, noté $x \leqslant y$.
  - ⋆ d'infériorité stricte, noté $x < y$.
  - ⋆ ...
- Si E est l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La matrice A est *équivalente* à la matrice B s'il existe deux matrices P, Q inversibles telle que $A = PBQ$.
- Si E est l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre n. La matrice A est *semblable* à la matrice B s'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
- En microéconomie, les *relations de préférence* et les *relations d'indifférences* sont des relations binaires sur l'ensemble des options disponibles dans le cadre d'une prise de décision.

Définition 2 - Réflexivité, (Anti)symétrie, Transitivité

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. La relation $\mathscr{R}$ est

(i). *réflexive* si pour tout $x \in E$, $x\mathscr{R}x$.

(ii). *symétrique* si pour tous x, $y \in E$, si $x\mathscr{R}y$, alors $y\mathscr{R}x$.

(iii). *antisymétrique* si pour tous $x, y \in E$, si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$, alors $x = y$.

(iv). *transitive* si pour tous x, y, $z \in E$, si $[x\mathscr{R}y$ ET $y\mathscr{R}z]$, alors $x\mathscr{R}z$.

II - Relations d'ordre

Définition 3 - Relation d'ordre

Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est une *relation d'ordre* sur E si elle est réflexive, antisymétrique, transitive.

Exemple 2 - Relations d'ordre

- Soit l'ensemble des réels muni de la relation binaire $\leqslant$.
  - ⋆ Pour tout x réel, $x \leqslant x$ donc la relation est réflexive.
  - ⋆ Pour tous x, y réels, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$. Ainsi, la relation est antisymétrique.
  - ⋆ Pour tous x, y, z réels, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$. Ainsi, la relation est transitive.

  La relation *inférieur ou égal* est donc une relation d'ordre.

- La relation *être avant dans l'ordre alphabétique* est également une relation d'ordre sur l'ensemble des mots.
- Les *relations de préférence* sont également des relations d'ordre.

Définition 4 - Majorant, Minorant

(i). L'élément x est *un majorant* de A si $\forall\ a \in A,\ a \preccurlyeq x$. La partie A est *majorée*.
Un majorant de A est un élément qui est plus grand que tous les éléments de A.

(ii). L'élément x est *un minorant* de A si $\forall\ a \in A,\ x \preccurlyeq a$. La partie A est *minorée*.
Un minorant de A est un élément qui est plus petit que tous les éléments de A.

(iii). Si A possède un majorant et un minorant, la partie A est *bornée*.

Exemple 3 - Exemples de majorants

On munit $\mathbb{R}$ de la relation binaire $\leqslant$.
- 3, 10, 100 sont des majorants de l'ensemble $]-\infty, 3]$.
- 1, $\sqrt{2}$, 12 sont des majorants de l'ensemble $]-1, 1[$.

Définition 5 - Plus grand / petit élément

(i). L'élément x est *le plus grand élément* de A si $\forall\ a \in A,\ a \preccurlyeq x$ ET $x \in A$.
S'il existe, le plus grand élément de A est l'unique élément qui est plus grand que tous les éléments de A et qui appartient à A.

(ii). L'élément x est *le plus petit élément* de A si $\forall\ a \in A,\ x \preccurlyeq a$ ET $x \in A$. S'il existe, le plus petit élément de A est l'unique élément qui est plus petit que tous les éléments de A et qui appartient à A.

Exemple 4 - Exemples de plus petits/grands éléments

- Si $\mathbb{R}$ est muni de la relation d'ordre $\leqslant$.
  - ⋆ -1 est le plus petit élément de $[-1, 100]$.
  - ⋆ 3 est le plus petit élément de $[3, \sqrt{13}]$.
  - ⋆ $]-\infty, \sqrt{2}]$ ne possède pas de plus petit élément (il ne possède pas de minorant).
  - ⋆ $]-1, 1]$ ne possède pas de plus petit élement (aucun des minorants de $]-1, 1]$ n'appartient à $]-1, 1]$).
- Le mot *a* est le premier mot du dictionnaire. C'est le plus petit élément pour l'ordre alphabétique.
  Il n'y a pas de plus grand élément car, par exemple, le mot *zzzzzz* est plus petit que le mot *zzzzzzz*.

III - Relations d'équivalence

Définition 6 - Relation d'équivalence

Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est une *relation d'équivalence* sur E si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 5 - Relations d'équivalence

- La relation *être dans la même classe* est une relation d'équivalence sur l'ensemble des élèves.
  - ⋆ Un élève est dans la même classe que lui-même. Donc la relation est réflexive.
  - ⋆ Si *Alice* est dans la même classe que *Bob*, alors *Bob* est dans la même classe qu'Alice. Donc la relation est symétrique.
  - ⋆ Si *Alice* est dans la même classe que *Bob* et *Bob* est dans la même classe que *Claire*, alors *Alice* est dans la même classe que *Claire*. Donc la relation est transitive.
- La relation *être équivalente* est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. En effet, pour A, B, $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

- ⋆ $A = I_n A I_p$ et I_n, I_p sont inversibles donc A est équivalente à A. La relation est réflexive.
- ⋆ Si A est équivalente à B, il existe P, Q inversibles telles que $A = PBQ$. Alors, $B = P^{-1}AQ^{-1}$. Comme P^{-1} et Q^{-1} sont inversibles, alors B est équivalente à A. La relation est donc symétrique.
- ⋆ Si A est équivalente à B et B est équivalente à C, il existe P, Q, R, S inversibles telles que $A = PBQ$ et $B = RCS$. Alors, $A = PRCSQ$. Comme PR et SQ sont inversibles, alors A est équivalente à C. La relation est donc transitive.

- La relation *être semblable* est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, pour A, B, $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
  - ⋆ $A = I_n A I_n$ et I_n est inversible donc A est équivalente à A. La relation est réflexive.
  - ⋆ Si A est équivalente à B, il existe P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Alors, $B = P^{-1}AP$. Comme $Q = P^{-1}$ est inversible et $B = QAQ^{-1}$, alors B est équivalente à A. La relation est donc symétrique.
  - ⋆ Si A est équivalente à B et B est équivalente à C, il existe P, Q inversibles telles que $A = PBP^{-1}$ et $B = QCQ^{-1}$. Alors, $A = (PQ)C(PQ)^{-1}$ et A est équivalente à C. La relation est donc transitive.
- La *relation d'indifférence* est une relation d'équivalence.

Définition 7 - Classe d'équivalence

Soient $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$. La *classe d'équivalence* de l'élément x, notée $\overline{x}$ ou $\mathrm{cl}(x)$, est l'ensemble $\{y \in E\ ;\ x\mathscr{R}y\}$.

Exemple 6 - Classe d'équivalence

- Si *Alice* est une élève, la classe d'équivalence d'Alice est l'ensemble des élèves qui sont dans la même classe qu'Alice.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = \lambda I_n$. La matrice B est semblable à A s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda I_n$. Ainsi, la classe d'équivalence de A est réduite à A elle-même.

Théorème 1 - Partition

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. L'ensemble des classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ forme une partition de E.

Exemple 7

Les classes d'un lycée forment une partition de l'ensemble des élèves :

- deux classes distinctes n'ont aucun élève en commun. Autrement dit, deux classes distinctes sont disjointes.
- tout élève appartient à une classe. Autrement dit, la réunion des classes est égale à l'ensemble des élèves.