T.P. I - Suites et Graphiques

Exercice 1. (Variables) Pour chacune des questions suivantes, déterminer le contenu des variables après interprétation de la suite d'instructions :

1.

```
a = 12
b = 10
c = a
a = b
b = c
```

2.

```
a = 12
b = 10
a = b
b = a
```

3.

```
a = 2
b = 4
c = a
b = a
c = b - a
```

4.

```
a = 4
b = 2
c = b
b = a
```

5.

```
a = 4
b = 2
c = b
b = a
a = c
```

6.

```
x = 5
y = 2 * x + 3
x = 100
```

7.

```
a = 3
b = 4
x = a
a = b
b = x
```

Exercice 2. Indiquer le nom des variables créées ainsi que leur contenu après interprétation de la suite d'instructions suivante :

```
a1 = 1
i = 1
ai = 3
i = 3
ai = 6
```

Exercice 3. (Boucle itérative) Donner le contenu de la variable `u` à l'issue de la suite d'instructions suivantes :

```
n = 5
u = 10
for i in range(1, n):
    u = u + 3
```

Exercice 4. (Boucle conditionnelle) Déterminer le contenu des variables après interprétation de la suite d'instructions suivante :

```
a, b, i = 1, 1, 0
while i <= 10:
    i = 2 * i
    a = a + b
    b = 2 * a + i
b = 3 * b
```

Exercice 5. (Fonctions) Pour chacune des questions suivantes, déterminer le contenu des variables après interprétation de la suite d'instructions.

1.

```
x = 5
def fct1(y) :
    return 3 * y + 25

x = fct1(x)
```

2.

```
x = 5
def fct1(x) :
    return 3 * x + 25

x = fct1(x)
```

Exercice 6. (Fonctions & Instruction conditionnelle) Pour chacune des fonctions `f` suivantes, déterminer la valeur de `f(4)`.

1.

```
def f(x) :
    a = 0
    if x % 2 == 0 :
        a = 0
    elif x % 4 == 0 :
        a = 1
    else :
        a = 3
    return a
```

2.

```
def f(x) :
    a = 0
    if x % 2 == 0 :
        a = 0
    if x % 4 == 0 :
        a = 1
    return a
```

3.

```
def f(x) :
    if x % 2 == 0 :
        return 0
    if x % 4 == 0 :
        return 1
```

I - Suites

Exercice 7. (Suite arithmético-géométrique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. a) Compléter le code suivant qui permet de calculer puis afficher la représentatation graphique des 20 premiers termes de la suite (u_n).

```
import matplotlib.pyplot as plt
n = 20
u = [1]
for i in range(1, n+1):
  u.append(u[...]/2 ...)

plt.plot(range(n+1), u)
...
```

b) Quelle conjecture pouvez vous effectuer sur le comportement de la suite ?

2. On note ℓ la solution de l'équation $\ell = \frac{\ell}{2} + 3$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son terme général $v_n = u_n - \ell$.

a) Déterminer la valeur de ℓ.

b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

c) Exprimer le terme général v_n en fonction de n puis en déduire la valeur de u_n en fonction de n.

d) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3. On souhaite déterminer puis afficher le plus petit entier naturel n_0 tel que $n_0 \geqslant 5$. Compléter le code suivant :

```
n = 0
u = 1
while u <= ...:
   u = ...
   n = ...

print(...)
```

Exercice 8. (Série géométrique) Soit $q \in \mathbb{R}$. On souhaite étudier les suites définies par $v_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, $v_{n+1} = qv_n$.

1. a) Compléter le code suivant qui permet définir une fonction `suite_geom` tel que l'appel `suite_geom(n, q)` renvoie le terme v_n :

```
def suite_geom(n, q):
    v = 1
    for i in range(..., ...):
        v = ...
    return ...
```

b) Préciser les commandes à utiliser pour calculer v_n lorsque :

* $n = 10$ et $q = 0,1$.
* $n = 100$ et $q = 2$.
* $n = 110$ et $q = 0,5$.

2. On souhaite maintenant cacluler les termes successifs de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 0$ et $w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ pour tout entier naturel n.

a) Compléter le code de la fonction suivante qui renvoie le terme w_n :

```
def serie_geom(n, q):
    s = ...
    for i in range(..., ...):
        s = s + ...
    return s
```

b) On souhaite afficher les 100 premiers termes de cette suite. Compléter le code suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
n = ...
s = [0]
for i in range(n+1):
    s.append(...)

plt.plot(range(...), ...)
...
```

c) Tester votre fonction avec $q = 0,1$ puis $q = 1,2$. Que conjecturez-vous ? Savez-vous le démontrer ?

Exercice 9. (Système de suites récurrentes) On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$ par

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + z_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} &= y_n - 3z_n \end{cases}.$$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A d'ordre 3 telle que, pour tout n entier naturel, $X_{n+1} = AX_n$.

2. Compléter le programme suivant qui permet d'afficher la valeur de y_{100}.

```
import numpy as np

X = np.array([[1.], [2.], [0.]])
A = np.array([[3., 0., 1.], [2., 1., 1.], [ ... ]])
n = ...
for k in range(..., ...):
    X = np.dot(..., ...)

print(X[...])
```

3. Compléter le code suivant qui permet d'afficher les valeurs de $z_1, z_2, \ldots, z_{150}$ dans un graphique.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = ...
A = ...
n = ...
z = []
for k in range(..., ...):
    X = np.dot(..., ...)
    z = z.append(...)

plt.plot(..., ...)
plt.show()
```