# V - Variables aléatoires discrètes finies

Révisions

Probabilités.

Dans tout le cours,  $\Omega$  désigne un univers et  $\mathbf{P}$  est une probabilité.

### I - Variables aléatoires réelles finies

### I.1 - Définition

#### Définition 1 - Variable aléatoire réelle

On suppose que  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  est un ensemble fini. Une *variable aléatoire* est une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Exemple 1 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

Un dé équilibré est lancé successivement 2 fois. On note les résultats obtenus à l'issue de chacun des lancers.

L'univers est  $\Omega = \{(i, j), 1 \le i, j \le 6\} = [1, 6]^2$ .

La somme S des résultats obtenus à l'issue des 2 lancers est une variable aléatoire :

$$S: \quad \Omega \quad \to \quad \mathbb{R}$$
$$(d_1, d_2) \quad \mapsto \quad d_1 + d_2$$

#### **Notations**

Si  $x \leq y$  sont des réels, on notera

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) = x\}$$
$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \leqslant x\}$$
$$[X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \geqslant x\}$$
$$[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega ; x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}$$

### Exemple 2 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.

$$[S = 3] = \{(d_1, d_2) \in \Omega ; d_1 + d_2 = 3\}$$

$$= \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

$$[S \leqslant 4] = \{(d_1, d_2) \in \Omega ; d_1 + d_2 \leqslant 4\}$$

$$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}.$$

### Définition 2 - Système complet

Soit  $\Omega$  un univers fini et X une variable aléatoire. Notons  $x_1, \ldots, x_p$  les valeurs prises par X. Alors,  $\{[X = x_i], i \in [1, p]\}$  est un système complet d'événements. C'est le système complet associé à la variable aléatoire X.

### Exemple 3 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent. Le système complet associé à S est :

$$\left\{[S=2],\,[S=3],\,[S=4],\,[S=5],\,[S=6],\,[S=7],\\[S=8],\,[S=9],\,[S=10],\,[S=11],\,[S=12]\right\}.$$

# I.2 - Loi de probabilité

### Définition 3 - Loi de probabilité

La loi de la variable aléatoire X est la donnée :

- des valeurs  $x_1, \ldots, x_p$  prises par X,
- de la famille de probabilités

$$(\mathbf{P}([X=x_1]),\ldots,\mathbf{P}([X=x_p])).$$

La loi d'une variable aléatoire peut être représentée sous forme d'un tableau.

### Lois usuelles - À connaître par cœur

• Somme de deux dés équilibrés. Nous obtenons successivement :

- Loi certaine. La variable aléatoire X ne prend qu'une seule valeur c et  $\mathbf{P}([X=c])=1$ . L'expérience renvoie toujours le même résultat.
- Loi uniforme sur [1, n]. Notée  $\mathscr{U}([1, n])$ . L'expérience renvoie les résultats  $1, 2, \ldots,$  ou n et chacun de ces résultats a la même probabilité d'apparaître. Les valeurs prises par X sont  $1, \ldots, n$  et

$$\forall i \in [1, n], \mathbf{P}([X = i]) = \frac{1}{n}.$$

Loi de Bernoulli de paramètre p. Notée B(p).
L'expérience (dite expérience de Bernoulli) renvoie le résultat 0 (on parle d'échec) ou 1 (on parle de succès). Le succès apparaît avec probabilité p.
Soit p ∈ [0, 1]. Les valeurs prises par X sont 0 et 1 et

$$\mathbf{P}\left([X=0]\right)=1-p\text{ et }\mathbf{P}\left([X=1]\right)=p.$$

• Loi binomiale de paramètres n et p. Notée  $\mathcal{B}(n,p)$ . La variable aléatoire compte de le nombre de succès dans une succession de n expériences de Bernoulli indépendantes (appelé schéma de Bernoulli) dont la probabilité de succès vaut p.

Soit  $p \in [0,1]$ . Les valeurs prises par X sont  $0, \ldots, n$  et

$$\forall k \in [0, n], \mathbf{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}.$$

#### Définition 4 - Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition de X est la fonction  $F_X$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$ .

### Exemple 4 - Fonctions de répartition

• Si X suit une loi certaine de valeur  $\frac{3}{2}$ .

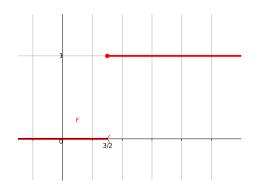
$$\star$$
 Si  $x < \frac{3}{2}$ , alors

$$\mathbf{P}\left(\left[X\leqslant x\right]\right) = \mathbf{P}\left(\emptyset\right) = 0.$$

$$\star \text{ Si } x \geqslant \frac{3}{2}, \text{ alors}$$

$$P([X \le x]) = P([X = 3/2]) = 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de X est :



- Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{3}{4}$ . \* Si x < 0, alors
  - ,

$$\mathbf{P}\left(\left[X\leqslant x\right]\right) = \mathbf{P}\left(\emptyset\right) = 0.$$

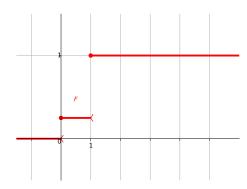
 $\star$  Si  $0 \leqslant x < 1$ , alors

$$\mathbf{P}([X \le x]) = \mathbf{P}([X = 0]) = \frac{1}{4}.$$

 $\star$  Si  $x \ge 1$ , alors

$$\mathbf{P}\left(\left[X\leqslant x\right]\right) = \mathbf{P}\left(\Omega\right) = 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de X est :



- Si X suit une loi uniforme sur [1, 4].
  - $\star$  Si x < 1, alors

$$\mathbf{P}\left(\left[X\leqslant x\right]\right) = \mathbf{P}\left(\emptyset\right) = 0.$$

 $\star$  Si  $1 \leqslant x < 2$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}([X = 1]) = \frac{1}{4}.$$

 $\star$  Si  $2 \leqslant x < 3$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}([X = 1] \sqcup [X = 2]) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

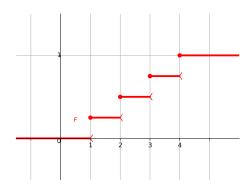
 $\star$  Si  $3 \leqslant x < 4$ , alors

$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}([X = 1] \sqcup [X = 2] \sqcup [X = 3]) = \frac{3}{4}.$$

 $\star$  Si  $x \geqslant 4$ , alors

$$\mathbf{P}\left(\left[X \leqslant x\right]\right) = \mathbf{P}\left(\Omega\right) = 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de X est :



- $\bullet\,$  Si S est la somme des résultats de 2 lancers successifs d'un dé équilibré à 6 faces.
  - $\star$  Si x < 2. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

 $\star$  Si  $2 \leqslant x < 3$ . Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}([S = 2]) = \frac{1}{36}.$$

 $\star$  Si  $3 \leqslant x < 4$ . Alors,

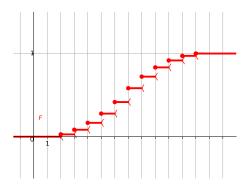
$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}([S=2] \sqcup [S=3]) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36}.$$

\* ..

 $\star$  Si  $x \geqslant 12$ . Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de S est :



### Proposition 1

Les variables aléatoires X et Y sont de même loi si et seulement si elles ont mêmes fonctions de répartition.

# II - Espérance & Variance

# II.1 - Espérance

### Définition 5 - Espérance

Soit X une variable aléatoire et  $x_1, \ldots, x_p$  les valeurs prises par X. L'espérance de X, notée  $\mathbf{E}[X]$ , est le réel

$$\mathbf{E}[X] = x_1 \mathbf{P}([X = x_1]) + \dots + x_p \mathbf{P}([X = x_p]).$$

Exemple 5 - Lois usuelles - À connaître par cœur

• Loi certaine de valeur c.

$$\mathbf{E}[X] = c\mathbf{P}([X = c]) = c.$$

• Loi uniforme sur  $[\![1,n]\!]$ .

$$\mathbf{E}[X] = 1\mathbf{P}([X = 1]) + 2\mathbf{P}([X = 2]) + \dots + n\mathbf{P}([X = n])$$

$$= 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + \dots + n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + n)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

• Loi de Bernoulli de paramètre p.

$$\mathbf{E}[X] = 0 \times \mathbf{P}([X = 0]) + 1 \times \mathbf{P}([X = 1])$$
  
=  $0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$ .

• Loi binomiale de paramètres n et p.

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n \times p.$$

### Proposition 2 - Linéarité

Soit X, Y deux variables aléatoires et a, b deux réels. Alors,  $\mathbf{E}\left[aX+bY\right]=a\mathbf{E}\left[X\right]+b\mathbf{E}\left[Y\right].$ 

### Exemple 6 - Somme de deux dés

Notons  $X_1$  le résultat du premier lancer et  $X_2$  le résultat du second. Alors,  $X_1$  et  $X_2$  suivent une loi uniforme sur [1,6] et  $S = X_1 + X_2$ . Ainsi,

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] = \frac{6+1}{2} + \frac{6+1}{2} = 7.$$

23

A. Camanes

### Proposition 3 - Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire,  $x_1, \ldots, x_p$  les valeurs prises par X et g une fonction à valeurs réelles. On note Y = g(X) la variable aléatoire définie par

$$\forall \ \omega \in \Omega, \ Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Alors,

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^{p} g(x_k) \mathbf{P}([X = x_k]).$$

### Exemple 7 - Carré de la somme

On reprend les notations de l'exemple précédent. Posons  $Y=S^2$ . Alors,

$$\mathbf{E}[Y] = 2^{2} \frac{1}{36} + 3^{2} \frac{2}{36} + 4^{2} \frac{3}{36} + 5^{2} \frac{4}{36} + 6^{2} \frac{5}{36} + 7^{2} \frac{6}{36} + \cdots$$
$$\cdots + 8^{2} \frac{5}{36} + 9^{2} \frac{4}{36} + 10^{2} \frac{3}{36} + 11^{2} \frac{2}{36} + 12^{2} \frac{1}{36}$$

### II.2 - Variance

### Définition 6 - Variance, Écart-type

Soit X une variable aléatoire. La variance de X, notée  $\mathbf{V}\left(X\right)$ , est le réel :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[ (X - \mathbf{E}[X])^2 \right].$$

L'écart-type est  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$ .

#### Variance

Comme l'espérance s'interprète comme une moyenne, la variance est la moyenne des écarts quadratiques (c'est-à-dire au carré) à la moyenne.

### Exemple 8 - Lois usuelles - À connaître par cœur

• Loi certaine de valeur c.

$$\mathbf{V}\left( X\right) =0.$$

• Loi uniforme sur [1, n].

$$\mathbf{V}\left(X\right) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

• Loi de Bernoulli de paramètre p.

$$\mathbf{V}(X) = p(1-p).$$

• Loi binomiale de paramètres n et p.

$$\mathbf{V}(X) = np(1-p).$$

### Proposition 4

Soit X une variable aléatoire et a, b deux réels. Alors,

$$\mathbf{V}\left(aX+b\right) = a^2\mathbf{V}\left(X\right).$$

#### Exemple 9

Soit Y une variable suivant une loi uniforme sur [2, 12]. On pose X = Y - 1.

Déterminons la loi de X.

Comme X = Y - 1,

Ainsi,  $X \sim \mathcal{U}([1, 11])$ .

Déterminons l'espérance et la variance de Y.

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X+1] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[1] = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7,$$
 $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X+1) = \mathbf{V}(X) = \frac{11^2 - 1}{2} = 60.$ 

### Théorème 1 - Formule de Kœnig-Huygens

Soit X une variable aléatoire. Alors,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}\left[X\right]^2.$$

#### Définition 7 - Variable centrée, réduite

Soit X une variable aléatoire.

- X est une variable centrée si  $\mathbf{E}[X] = 0$ .
- X est une variable réduite si  $\mathbf{V}(X) = 1$ .

### Proposition 5

Soit X une variable aléatoire qui ne soit pas de loi certaine. La variable  $X^* = \frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sigma(X)}$  est une variable centrée réduite.

### III - Couple de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire X qui prend les valeurs  $x_1, \ldots, x_p$  et une variable aléatoire Y qui prend les valeurs  $y_1, \ldots, y_q$ .

### III.1 - Loi du couple

### Définition 8 - Loi du couple

La loi du couple (X, Y) est la donnée :

- des valeurs  $(x_i, y_i)$  prises par le couple (X, Y),
- des probabilités  $\mathbf{P}([X=x_i] \cap [Y=y_j])$ .

### Exemple 10 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On dispose d'un bureau à 2 tiroirs et de 2 feuilles de papier. On dispose aléatoirement chacune des feuilles de papier dans l'un des tiroirs.

On note X le nombre de feuilles dans le premier tiroir et Y le nombre de tiroirs vides.

Le nombre de feuilles de papier dans le premier tiroir peut être égal à 0, 1 ou 2.

Le nombre de tiroirs vides peut être égal à 0 (il y a 1 feuille dans chaque tiroir) ou 1 (les 2 feuilles sont dans le même tiroir). De plus,

$$\mathbf{P}([X=0] \cap [Y=0]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X=0] \cap [Y=1]) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=0]) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X=2] \cap [Y=0]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X=2] \cap [Y=1]) = \frac{1}{4}$$

On peut représenter ces résultats dans un tableau : à chaque ligne correspond une valeur x que peut prendre X; à chaque colonne correspond une valeur y que peut prendre Y; à l'intersection d'une ligne et d'une colonne se lit la probabilité  $\mathbf{P}([X=x] \cap [Y=y])$ :

x	0	1
0	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$

### Définition 9 - Marginales

Les lois de X et de Y sont les marginales du couple (X,Y). En utilisant le système complet associé à la variable aléatoire Y (resp. X), on obtient

$$\forall i \in [1, p], \mathbf{P}([X = x_i]) = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

$$\forall j \in [1, q], \mathbf{P}([Y = y_j]) = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

### Exemple 11 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les notations de l'exemple précédent, les marginales s'obtiennent en sommant les lignes / les colonnes du tableau.

y	0	1	$\mathbf{P}\left([X=x]\right)$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}\left([Y=y]\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

#### Définition 10 - Loi conditionnelle

La loi conditionnelle de X sa chant  $[Y=y_j]$  est la donnée :

• des valeurs  $x_1, \ldots, x_p$  prises par X,

• des probabilités  $\mathbf{P}_{[Y=y_i]}([X=x_1]), \dots, \mathbf{P}_{[Y=y_i]}([X=x_p]).$ 

#### Exemple 12 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On reprend les notations de l'exercice précédent. La loi conditionnelle de X sachant [Y=0] est égale à

$$\begin{array}{c|cccc} i & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbf{P}_{[Y=0]}\left([X=i]\right) & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

C'est une loi presque certaine : sachant qu'aucun des tiroirs n'est vide, on est certain qu'il y a une feuille dans le premier tiroir. La loi conditionnelle de X sachant [Y=1] est égale à

$$\frac{i}{\mathbf{P}_{[Y=0]}([X=i]) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{2}}$$

Sachant qu'un des deux tiroirs est vide, il y a une chance sur deux que le premier tiroir contienne 0 feuille et une chance sur deux qu'il contienne les 2 feuilles.

### III.2 - Indépendance

### Définition 11 - Indépendance

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout  $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!],$ 

$$\mathbf{P}\left(\left[X=x_{i}\right]\cap\left[Y=y_{j}\right]\right)=\mathbf{P}\left(\left[X=x_{i}\right]\right)\times\mathbf{P}\left(\left[Y=y_{j}\right]\right).$$

#### Exemple 13

 $\bullet$  On considère le couple de variables aléatoires (X,Y) dont la loi est définie par

y	0	1	$   \mathbf{P}\left([X=x]\right) $
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{P}\left([Y=y]\right)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

On étudie le comportement de **tous** les couples de valeurs possibles :

$$\mathbf{P}([X=0] \cap [Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{P}([X=0]) \times \mathbf{P}([Y=0])$$

$$\mathbf{P}([X=0] \cap [Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{P}([X=0]) \times \mathbf{P}([Y=1])$$

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{P}([X=1]) \times \mathbf{P}([Y=0])$$

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{P}([X=1]) \times \mathbf{P}([Y=1])$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

• 2 feuilles et 2 tiroirs. En reprenant la loi du couple,

$$\mathbf{P}([X=0] \cap [Y=0]) = 0 \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \mathbf{P}([X=0]) \times \mathbf{P}([Y=0]).$$

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

### Indépendance en pratique

ullet Pour montrer que X et Y **ne** sont **pas** indépendantes, il suffit de trouver une case du tableau telle que

$$\mathbf{P}\left(\left[X=x_{k}\right]\cap\left[Y=y_{j}\right]\right)\neq\mathbf{P}\left(\left[X=x_{k}\right]\right)\times\mathbf{P}\left(\left[Y=y_{j}\right]\right).$$

• Pour montrer que X et Y sont indépendantes, il faut montrer que cette égalité est vraie **pour toutes** les cases du tableau.

### Proposition 6 - Loi certaine

Si Y est une variable aléatoire certaine, alors X et Y sont indépendantes.

### III.3 - Covariance

### Proposition 7 - Espérance d'un produit

En utilisant la loi du couple,

$$\mathbf{E}[X \times Y] = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} x_i \times y_j \times \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

### Exemple 14 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant l'exemple des feuilles et des tiroirs,

$$\mathbf{E}[XY] = 0 \times 0 \times 0 + 0 \times 1 \times \frac{1}{4} + \cdots$$

$$\cdots + 1 \times 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 \times 0 + \cdots$$

$$\cdots + 2 \times 0 \times 0 + 2 \times 1 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

#### Théorème 2 - Espérance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbf{E}\left[X \times Y\right] = \mathbf{E}\left[X\right] \times \mathbf{E}\left[Y\right].$$

#### Définition 12 - Covariance

La covariance de X et Y, notée Cov(X,Y), est le réel

$$Cov(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X]) \times (Y - \mathbf{E}[Y])].$$

### Proposition 8 - Propriétés de la covariance

Soit a, b, c trois réels et X, Y, Z trois variables aléatoires.

- $Cov(X, Y) = \mathbf{E}[X \times Y] \mathbf{E}[X] \times \mathbf{E}[Y]$ .
- Cov(X, Y) = Cov(Y, X).
- $Cov(X, X) = \mathbf{V}(X)$ .
- Cov(X, c) = 0.
- Cov(aX + bY, Z) = aCov(X, Z) + bCov(Y, Z).

### Exemple 15 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les calculs précédents,

$$\mathbf{E}[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1,$$

$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$Cov(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0.$$

### Proposition 9 - Covariance et Somme

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y).$$

### Exemple 16 - Variance d'une somme

On considère le couple  $(X_1, X_2)$  dont la loi est définie par :

$x_2$	0	1	$   \mathbf{P}\left([X_1 = x_1]\right) $
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\mathbf{P}\left(\left[X_{2}=x_{2}\right]\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

 $X_1$  et  $X_2$  ont même loi, donc ils ont même espérance et même

variance. De plus,

$$\mathbf{E}[X_1] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \mathbf{E}[X_1^2],$$

$$\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{E}[X_1^2] - \mathbf{E}[X_1]^2 = \frac{3}{16},$$

$$\mathbf{E}[X_1 X_2] = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi.

$$\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}[X_1 X_2] - \mathbf{E}[X_1] \mathbf{E}[X_2] = \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{16}.$$

Finalement,

$$\mathbf{V}(X_1 + X_2) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 2\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$$
$$= \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{1}{4}.$$

### Proposition 10 - Convariance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors Cov(X,Y) = 0.

### Exemple 17 - 2 feuilles et 2 tiroirs



L'exemple des feuilles et des tiroirs montre que la covariance peut être nulle alors que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

#### Définition 13 - Coefficient de corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y, noté  $\rho(X,Y)$ , est défini par

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}}$$

### Exemple 18

En reprenant l'exemple précédent,

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{V}(X_1)\mathbf{V}(X_2)}} = \frac{\frac{-1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{3}{16}}} = -\frac{1}{3}.$$

### Proposition 11

- $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$ .
- $|\rho(X,Y)| = 1$  signifie qu'il existe trois réels a, b et c tels que  $\mathbf{P}(aX + bY + c = 0) = 1$ . Les variables X et Y sont reliées presque sûrement par une relation affine.