

# T.D. X - Variables aléatoires à densité

## I - Densités

### Solution de l'exercice 1.

- \* D'après les théorèmes usuels, la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 0 et en  $2a$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à gauche en 0.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{2a^2} = \frac{0}{2a^2} = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à droite en 0.

En particulier,  $f$  est continue en 0.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 2a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2a^+} 0 = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à droite en  $2a$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow 2a^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2a^-} \frac{t}{2a^2} = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}$ , alors  $f$  admet une limite finie à gauche en  $2a$ .

En particulier,  $f$  n'est pas continue en  $2a$ .

- \* Comme  $x \geq 0$  lorsque  $x \in [0, 2a]$  alors  $f$  est positive sur  $[0, 2a]$ . De plus, elle est positive en dehors de  $[0, 2a]$ , donc  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .
- \* Comme  $f$  est nulle en dehors de  $[0, 2a]$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_0^{2a} f(t) dt = \int_0^{2a} \frac{t}{2a^2} dt \\ &= \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{(2a)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Finalement,  $f$  est bien une densité de probabilité.  $\square$

### Solution de l'exercice 2.

- \* D'après les théorèmes usuels, la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 1.

Comme  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à droite en 1.

Comme  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à gauche en 1.

En particulier,  $f$  est continue en 1.

- \* Comme la fonction  $\ln$  est positive sur  $[1, +\infty[$ , alors  $f$  est positive sur  $[1, +\infty[$ . Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, 1]$ , alors  $f \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ .
- \* Soit  $x \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_{-\infty}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt \\ &= 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(t) dt = 1$  soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Finalement,  $f$  est bien une densité de probabilité.  $\square$

### Solution de l'exercice 3.

- \* D'après les théorèmes généraux,  $f_n$  est continue sauf éventuellement en 0 et 1.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$ , alors  $f_n$  admet une limite finie à gauche en 0.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_n(t) = n0^{n-1} = 0$ , alors  $f_n$  admet une limite finie à droite en 0.

En particulier,  $f_n$  est continue en 0.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 1^+} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 0 = 0$ , alors  $f_n$  admet une limite finie à droite en 1.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} nt^{n-1} = n1^{n-1} = n$ , alors  $f_n$  admet une limite finie à gauche en 1.

En particulier,  $f_n$  est continue en 0.

- \* Comme  $nt^{n-1} \geq 0$  sur  $[0, 1]$  et  $f_n$  est nulle en dehors de  $[0, 1]$ , alors  $f_n$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .
- \* Comme  $f_n$  est nulle en dehors de  $[0, 1]$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt &= \int_0^1 nt^{n-1} dt = n \left[ \frac{t^n}{n} \right]_0^1 \\ &= n \left( \frac{1}{n} - 0 \right) = 1. \end{aligned}$$

Finalement,  $f_n$  est bien une densité de probabilité.  $\square$

#### Solution de l'exercice 4.

- \* D'après les théorèmes généraux, la fonction  $f$  est continue sauf éventuellement en 0,  $a$  et  $2a$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à gauche en 0.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{a^2} = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à droite en 0.

En particulier,  $f$  est continue en 0.

Comme  $\lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^-} \frac{t}{a^2} = \frac{1}{a}$ , alors  $f$  admet une limite finie à gauche en  $a$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{2a-t}{a^2} = \frac{2a-a}{a^2} = \frac{1}{a}$ , alors  $f$  admet une limite finie à droite en  $a$ .

En particulier,  $f$  est continue en  $a$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow 2a^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2a^-} \frac{2a-t}{a^2} = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à gauche en  $2a$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow 2a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2a^+} 0 = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à droite en  $2a$ .

En particulier,  $f$  est continue en  $2a$ .

- \* Comme  $t \geq 0$  sur  $[0, a]$  et  $2a - t \geq 0$  sur  $[a, 2a]$ , alors  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

- \* Comme  $f$  est continue en dehors de  $[0, 2a]$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_0^a \frac{t}{a^2} dt + \int_a^{2a} \frac{2a-t}{a^2} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^a + \frac{2}{a} [t]_a^{2a} - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_a^{2a} \\ &= \frac{1}{2} + 2 - \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Finalement,  $f$  est bien une densité de probabilité.  $\square$

#### Solution de l'exercice 5.

- \* D'après les théorèmes généraux, la fonction  $f$  est continue sauf éventuellement en 0 et 1.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à gauche en 0.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{kt}{1+t} = \frac{k \times 0}{1+0} = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à droite en 0.

En particulier,  $f$  est continue en 0.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{kt}{1+t} = \frac{k}{2}$ , alors  $f$  admet une limite finie à gauche en 1.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 0 = 0$ , alors  $f$  admet une limite finie à droite en 1.

En particulier,  $f$  est continue en 0 si  $k = 0$  et n'est pas continue en 1 sinon.

- \* Comme  $\frac{t}{1+t} \geq 0$  lorsque  $t \in [0, 1]$ , alors  $\frac{kt}{1+t} \geq 0$  si et seulement si  $k \geq 0$ . De plus,  $f$  est nulle, donc positive, en dehors de  $[0, 1]$ . Ainsi,  $f \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $k \geq 0$ .
- \* Comme  $f$  est nulle en dehors du segment  $[0, 1]$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kt}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{kt}{1+t} dt = k \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = k(1 - \ln(2)).$$

Ainsi,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kt}{1+t} dt = 1$  si et seulement si  $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$ .

Comme  $1 - \ln(2) \geq 0$ , la fonction  $f$  est une densité de probabilité si et seulement si  $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$ .  $\square$

## II - Fonctions de répartition, Espérances, Variations

### Solution de l'exercice 6.

1.

\* D'après les théorèmes généraux,  $f$  est continue sauf éventuellement en 0.

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$ , la fonction  $f$  admet une limite finie à gauche en 0.

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)^2} = 1$ , la fonction  $f$  admet une limite finie à droite en 0.

En particulier, la fonction  $f$  n'est pas continue en 0.

\* Comme  $\frac{1}{(x+1)^2} \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$  et  $f(x)$  est nulle pour  $x < 0$ , alors la fonction  $f$  est à valeurs positives.

\* Soit  $A \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^A f(t) dt &= \int_{-\infty}^A 0 dt + \int_0^A \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[ -\frac{1}{x+1} \right]_0^A \\ &= 1 - \frac{1}{A+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^A f(t) dt = 1 \text{ donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \text{ converge et}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

2. D'après la définition,  $F_T(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .

\* Si  $x \leq 0$ , alors

$$F_T(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

\* Si  $x > 0$ , alors

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= 0 + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt = 1 - \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

### Solution de l'exercice 7.

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

\* Si  $x \leq 0$ , alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

\* Si  $x > 0$ , alors

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x (e^{-t/2} - e^{-t}) dt \\ &= \int_0^x e^{-t/2} dt - \int_0^x e^{-t} dt \\ &= \left[ -2e^{-t/2} \right]_0^x - \left[ -e^{-t} \right]_0^x \\ &= 2 - 2e^{-x/2} - (1 - e^{-x}) \\ &= 1 + e^{-x} - 2e^{-x/2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 + e^{-x} - 2e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

2. Si  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$ , alors sa densité est donnée par

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ ae^{-at} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

En particulier,  $\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{a}$ .

D'après la définition de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y] &= \frac{1}{a} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt &= \frac{1}{a} \\ \int_0^{+\infty} at e^{-at} dt &= \frac{1}{a} \\ \int_0^{+\infty} t e^{-at} dt &= \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

3. Si l'intégrale converge, alors  $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ . Soit  $A \geq 0$ . Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^A t f(t) dt &= \int_0^A t f(t) dt \\ &= \int_0^A t (e^{-t/2} - e^{-t}) dt \\ &= \int_0^A t e^{-t/2} dt - \int_0^A t e^{-t} dt.\end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}& * \int_0^{+\infty} t e^{-t/2} dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 4, \\ & * \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt \text{ converge et vaut } 1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^A t f(t) dt = 4 - 1 = 3.$$

Donc,  $X$  admet une espérance et  $\mathbf{E}[X] = 3$ .  $\square$

### Solution de l'exercice 8. \*

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

\* Si  $x < 1$ , alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

\* Si  $x \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned}G(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &= \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt.\end{aligned}$$

Posons  $u(t) = \ln(t)$  et  $v'(t) = \frac{1}{t^2}$  soit  $u'(t) = \frac{1}{t}$  et  $v(t) = -\frac{1}{t}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[1, x]$ . Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}G(x) &= \left[ \ln(t) \times \left( -\frac{1}{t} \right) \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left( -\frac{1}{t} \right) dt \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \left( -\frac{\ln(1)}{1} \right) + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \left[ -\frac{1}{t} \right]_1^x \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1.\end{aligned}$$

Finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1, \\ 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

2. Sous réserve de convergence,  $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ .

Soit  $x \geq 1$ . Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^x t f(t) dt &= \int_{-\infty}^1 t f(t) dt + \int_1^x t f(t) dt \\ &= 0 + \int_1^x t \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \int_1^x \frac{1}{t} \ln(t) dt \\ &= \left[ \frac{\ln(t)^2}{2} \right]_1^x = \frac{\ln(x)^2}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x t f(t) dt = +\infty$  donc l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$  diverge et  $X$  n'admet pas d'espérance.  $\square$

**Solution de l'exercice 9.**

1. Comme  $f$  est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{2a} t f(t) dt \\ &= \int_0^{2a} \frac{t^2}{2a^2} dt \\ &= \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{2a} \\ &= \frac{1}{2a^2} \times \frac{8a^3}{3} = \frac{4}{3}a.\end{aligned}$$

2. Comme  $f$  est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^{2a} t^2 f(t) dt \\ &= \int_0^{2a} \frac{t^3}{2a^2} dt \\ &= \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{t^4}{4} \right]_0^{2a} \\ &= \frac{1}{2a^2} \times \frac{16a^4}{4} = 2a^2.\end{aligned}$$

D'après la définition de la variance,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = 2a^2 - \left(\frac{4}{3}a\right)^2 \\ &= \frac{2}{9}a^2.\end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 10.**

1. Comme  $f$  est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \\ &= \int_0^a t f(t) dt + \int_a^{2a} t f(t) dt \\ &= \int_0^a \frac{t^2}{a^2} dt + \int_a^{2a} t \frac{2a-t}{a^2} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a t^2 dt + \frac{2a}{a^2} \int_a^{2a} t dt - \frac{1}{a^2} \int_a^{2a} t^2 dt \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^a + \frac{2}{a} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_a^{2a} - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_a^{2a} \\ &= \frac{a}{3} + \frac{1}{a} ((2a)^2 - a^2) - \frac{1}{3a^2} ((2a)^3 - a^3) \\ &= a \left( \frac{1}{3} + 4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right) \\ &= a.\end{aligned}$$

2. Comme  $f$  est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \\ &= \int_0^a \frac{t^3}{a^2} dt + \int_a^{2a} t^2 \frac{2a-t}{a^2} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{t^4}{4} \right]_0^a + \frac{2}{a} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_a^{2a} - \frac{1}{a^2} \left[ \frac{t^4}{4} \right]_a^{2a} \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{2}{3a} (8a^3 - a^3) - \frac{1}{4a^2} (16a^4 - a^4) \\ &= a^2 \left( \frac{1}{4} + \frac{14}{3} - \frac{15}{4} \right) \\ &= \frac{7}{6}a^2.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{7}{6}a^2 - a^2 = \frac{a^2}{6}.$$

□

**Solution de l'exercice 11.****1. a)**

\* D'après les théorèmes généraux, la fonction  $f$  est continue sauf éventuellement en 2.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} 0 = 0$ , alors  $f$  admet une limite à gauche en 2.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} a e^{2-t} = a$ , alors  $f$  admet une limite à droite en 2.

Finalement,  $f$  est bien continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 2 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.

\* Comme la fonction exponentielle est positive, la fonction  $f$  est positive si et seulement si  $a \geq 0$ .

\* Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, 2[$ , pour tout  $x \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_2^x a e^{2-t} dt = a e^2 \int_2^x e^{-t} dt \\ &= a e^2 [-e^{-t}]_2^x = a e^2 (-e^{-x} + e^{-2}). \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = a e^2 \times e^{-2} = a.$$

Ainsi,  $f$  est une densité de probabilité si et seulement si  $a = 1$ .

**b) TODO****2. a)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

\* Si  $x \leq 2$ , alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

\* Si  $x \geq 2$ , alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \\ &= e^2 (-e^{-x} + e^{-2}), \text{ d'après 1.a) } \\ &= 1 - e^{2-x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 - e^{2-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

**b) TODO****3. a)** D'après la définition de  $F$ ,

$$\mathbf{P}([X \leq 3]) = F(3) = 1 - e^{2-3} = 1 - e^{-1}.$$

**b)** D'après la définition de  $F$ ,

$$\mathbf{P}([1 < X < 2]) = F(2) - F(1) = 0 - 0 = 0.$$

**c)** D'après la définition de  $F$ ,

$$\mathbf{P}([0 < X < 3]) = F(3) - F(0) = 1 - e^{-1} - 0 = 1 - e^{-1}.$$

**d)** D'après la définition de  $F$ ,

$$\mathbf{P}([X \geq 4]) = 1 - F(4) = 1 - (1 - e^{2-4}) = e^{-2}.$$

**4. a)** Comme  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ , alors

$$\mathbf{E}[Y] = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1.$$

**b)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leq x]) = \mathbf{P}([Y + 2 \leq x]) \\ &= \mathbf{P}([Y \leq x - 2]). \end{aligned}$$

\* Si  $x - 2 \leq 0$ , soit  $x \leq 2$ , alors

$$F_Z(x) = 0.$$

\* Si  $x - 2 \geq 0$ , soit  $x \geq 2$ , alors

$$F_Z(x) = 1 - e^{-(x-2)} = 1 - e^{2-x}.$$

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 - e^{2-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

c) Comme  $X$  et  $Z$  ont même fonction de répartition, alors elles ont même loi. Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[Y + 2] = \mathbf{E}[Y] + 2 = 3.$$

□

### Solution de l'exercice 12.

#### 1. a)

\* D'après les théorèmes généraux, la fonction  $f$  est continue sauf éventuellement en 3.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 3^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} 0 = 0$ , alors  $f$  admet une limite à gauche en 3.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 3^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} a e^{3-t} = a$ , alors  $f$  admet une limite à droite en 3.

Finalement,  $f$  est bien continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 3 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.

\* Comme la fonction exponentielle est positive, la fonction  $f$  est positive si et seulement si  $a \geq 0$ .

\* Comme  $f$  est nulle sur  $] -\infty, 3[$ , pour tout  $x \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_3^x a e^{3-t} dt = a e^3 \int_3^x e^{-t} dt \\ &= a e^3 [-e^{-t}]_3^x = a e^3 (-e^{-x} + e^{-3}). \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = a e^3 \times e^{-3} = a.$$

Ainsi,  $f$  est une densité de probabilité si et seulement si  $a = 1$ .

#### b) TODO

#### 2. a) Soit $x \in \mathbb{R}$ .

\* Si  $x \leq 3$ , alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

\* Si  $x \geq 3$ , alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^3 f(t) dt + \int_3^x f(t) dt \\ &= e^3 (-e^{-x} + e^{-3}), \text{ d'après 1.a) } \\ &= 1 - e^{3-x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - e^{3-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

#### b) TODO

#### 3. a) D'après la définition de $F$ ,

$$\mathbf{P}([X \leq 3]) = F(3) = 0.$$

#### b) D'après la définition de $F$ ,

$$\mathbf{P}([1 < X < 2]) = F(2) - F(1) = 0 - 0 = 0.$$

#### c) D'après la définition de $F$ ,

$$\mathbf{P}([0 < X < 5]) = F(5) - F(0) = 1 - e^{3-5} - 0 = 1 - e^{-2}.$$

#### d) D'après la définition de $F$ ,

$$\mathbf{P}([X \geq 4]) = 1 - F(4) = 1 - (1 - e^{3-4}) = e^{-1}.$$

#### 4. a) Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ , alors

$$\mathbf{E}[Y] = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1.$$

#### b) Soit $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leq x]) = \mathbf{P}([Y + 3 \leq x]) \\ &= \mathbf{P}([Y \leq x - 3]). \end{aligned}$$

\* Si  $x - 3 \leq 0$ , soit  $x \leq 3$ , alors

$$F_Z(x) = 0.$$

\* Si  $x - 3 \geq 0$ , soit  $x \geq 3$ , alors

$$F_Z(x) = 1 - e^{-(x-3)} = 1 - e^{3-x}.$$

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - e^{3-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

c) Comme  $X$  et  $Z$  ont même fonction de répartition, alors elles ont même loi. Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[Y + 3] = \mathbf{E}[Y] + 3 = 4.$$

□

### III - Transformation de variables aléatoires

**Solution de l'exercice 13.** Rappelons que

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}([3U \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[U \leq \frac{x}{3}\right]\right) \\ &= F_U\left(\frac{x}{3}\right). \end{aligned}$$

\* Si  $\frac{x}{3} \leq 0$ , c'est-à-dire  $x \leq 0$ , alors  $F_X(x) = 0$ .

\* Si  $0 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ , c'est-à-dire  $0 \leq x \leq 3$ , alors  $F_X(x) = \frac{x}{3}$ .

\* Si  $\frac{x}{3} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 3$ , alors  $F_X(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{3} & \text{si } x \in [0, 3] \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

Une densité  $f_X$  de  $X$  est donnée par la dérivée de  $F_X$  en les points où  $F_X$  est dérivable, soit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x \in [0, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 3])$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leq x]) = \mathbf{P}([U + 1 \leq x]) = \mathbf{P}([U \leq x - 1]) \\ &= F_U(x - 1). \end{aligned}$$

\* Si  $x - 1 \leq 0$ , c'est-à-dire  $x \leq 1$ , alors  $F_Y(x) = 0$ .

\* Si  $0 \leq x - 1 \leq 1$ , c'est-à-dire  $1 \leq x \leq 2$ , alors  $F_Y(x) = x - 1$ .

\* Si  $x - 1 \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 2$ , alors  $F_Y(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

Une densité  $f_Y$  de  $Y$  est donnée par la dérivée de  $F_Y$  en les points où  $F_Y$  est dérivable, soit

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 2])$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{2}X + 1 \leq x\right]\right) = \mathbf{P}([X \leq 2(x - 1)]) \\ &= F_X(2(x - 1)). \end{aligned}$$



- \* Si  $2(x-1) \leq 0$ , c'est-à-dire  $x \leq 1$ , alors  $F_Z(x) = 0$ .
- \* Si  $0 \leq 2(x-1) \leq 3$ , c'est-à-dire  $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$ , alors  $F_Z(x) = \frac{2(x-1)}{3}$ .
- \* Si  $2(x-1) \geq 3$ , c'est-à-dire  $x \geq \frac{5}{2}$ , alors  $F_Z(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{3}(x-1) & \text{si } x \in [1, \frac{5}{2}] \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Une densité  $f_Z$  de  $Z$  est donnée par la dérivée de  $F_Z$  en les points où  $F_Z$  est dérivable, soit

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } x \in [1, \frac{5}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que  $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([1, \frac{5}{2}])$ .

**4.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([W \leq x]) = \mathbf{P}([X^2 \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[U^2 \leq \frac{x}{9}\right]\right).$$

- \* Si  $\frac{x}{9} \leq 0$ , alors  $[W^2 \leq x/9]$  est l'événement impossible et  $F_W(x) = 0$ .
- \* Si  $\frac{x}{9} \geq 0$ , comme la fonction racine carrée est croissante et bijective,

$$F_W(x) = \mathbf{P}\left(\left[U \leq \frac{\sqrt{x}}{3}\right]\right) = F_U\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right).$$

★ Si  $0 \leq \frac{\sqrt{x}}{3} \leq 1$  c'est-à-dire  $0 \leq x \leq 9$ , alors  $F_W(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}$ .

★ Si  $\frac{\sqrt{x}}{3} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 9$ , alors  $F_W(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{3} & \text{si } x \in [0, 9] \\ 1 & \text{si } x \geq 9 \end{cases}.$$

Une densité  $f_W$  de  $W$  est donnée par la dérivée de  $F_W$  en les points où  $F_W$  est dérivable, soit

$$f_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0, 9] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**5.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_H(x) &= \mathbf{P}([H \leq x]) = \mathbf{P}([\ln(3U) \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[U \leq \frac{e^x}{3}\right]\right) \\ &= F_U\left(\frac{e^x}{3}\right). \end{aligned}$$

- \*  $e^x$  est une quantité toujours strictement positive.
- \* Si  $0 \leq \frac{e^x}{3} \leq 1$ , c'est-à-dire  $x \leq \ln(3)$ , alors  $F_H(x) = \frac{e^x}{3}$ .
- \* Si  $\frac{e^x}{3} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq \ln(3)$ , alors  $F_H(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_H(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{3} & \text{si } x \leq \ln(3) \\ 1 & \text{si } x \geq \ln(3) \end{cases}.$$

Une densité  $f_H$  de  $H$  est donnée par la dérivée de  $F_H$  en les points où  $F_H$  est dérivable, soit

$$f_H(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{3} & \text{si } x \leq \ln(3) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**6.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_E(x) &= \mathbf{P}([E \leq x]) = \mathbf{P}([-\ln(3U) \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[U \geq \frac{e^{-x}}{3}\right]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\left[U \leq \frac{e^{-x}}{3}\right]\right) \\ &= 1 - F_U\left(\frac{e^{-x}}{3}\right). \end{aligned}$$

- \*  $e^{-x}$  est une quantité toujours strictement positive.
- \* Si  $0 \leq \frac{e^{-x}}{3} \leq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq -\ln(3)$ , alors  $F_E(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{3}$ .
- \* Si  $\frac{e^{-x}}{3} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \leq -\ln(3)$ , alors  $F_E(x) = 0$ .

Finalement,

$$F_E(x) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{-x}}{3} & \text{si } x \geq -\ln(3) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité  $f_E$  de  $E$  est donnée par la dérivée de  $F_E$  en les points où  $F_E$  est dérivable, soit

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{3} & \text{si } x \geq -\ln(3) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

□

**Solution de l'exercice 14.** Rappelons que

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}([4U \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[U \leq \frac{x}{4}\right]\right) \\ &= F_U\left(\frac{x}{4}\right). \end{aligned}$$

- \* Si  $\frac{x}{4} \leq 0$ , c'est-à-dire  $x \leq 0$ , alors  $F_X(x) = 0$ .
- \* Si  $0 \leq \frac{x}{4} \leq 1$ , c'est-à-dire  $0 \leq x \leq 4$ , alors  $F_X(x) = \frac{x}{4}$ .
- \* Si  $\frac{x}{4} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 4$ , alors  $F_X(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } x \in [0, 4] \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}.$$

Une densité  $f_X$  de  $X$  est donnée par la dérivée de  $F_X$  en les points où  $F_X$  est dérivable, soit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [0, 4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 4])$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leq x]) = \mathbf{P}([U + 2 \leq x]) = \mathbf{P}([U \leq x - 2]) \\ &= F_U(x - 2). \end{aligned}$$

- \* Si  $x - 2 \leq 0$ , c'est-à-dire  $x \leq 2$ , alors  $F_Y(x) = 0$ .
- \* Si  $0 \leq x - 2 \leq 1$ , c'est-à-dire  $2 \leq x \leq 3$ , alors  $F_Y(x) = x - 2$ .
- \* Si  $x - 2 \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 3$ , alors  $F_Y(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si } x \in [2, 3] \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

Une densité  $f_Y$  de  $Y$  est donnée par la dérivée de  $F_Y$  en les points où  $F_Y$  est dérivable, soit

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [2, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([2, 3])$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{2}X + 1 \leq x\right]\right) = \mathbf{P}([X \leq 2(x - 1)]) \\ &= F_X(2(x - 1)). \end{aligned}$$

- \* Si  $2(x - 1) \leq 0$ , c'est-à-dire  $x \leq 1$ , alors  $F_Z(x) = 0$ .
- \* Si  $0 \leq 2(x - 1) \leq 4$ , c'est-à-dire  $1 \leq x \leq 3$ , alors  $F_Z(x) = \frac{2(x-1)}{4}$ .
- \* Si  $2(x - 1) \geq 4$ , c'est-à-dire  $x \geq 3$ , alors  $F_Z(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x - 1) & \text{si } x \in [1, 3] \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

Une densité  $f_Z$  de  $Z$  est donnée par la dérivée de  $F_Z$  en les points où  $F_Z$  est dérivable, soit

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que  $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 3])$ .

4. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([W \leq x]) = \mathbf{P}([X^2 \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[U^2 \leq \frac{x}{16}\right]\right).$$

- \* Si  $\frac{x}{16} < 0$ , alors  $[W^2 \leq x/16]$  est l'événement impossible et  $F_W(x) = 0$ .

- \* Si  $\frac{x}{16} \geq 0$ , comme la fonction racine carrée est croissante et bijective,

$$F_W(x) = \mathbf{P} \left( \left[ U \leq \frac{\sqrt{x}}{4} \right] \right) = F_U \left( \frac{\sqrt{x}}{4} \right).$$

- ★ Si  $0 \leq \frac{\sqrt{x}}{4} \leq 1$  c'est-à-dire  $0 \leq x \leq 16$ , alors  $F_W(x) = \frac{\sqrt{x}}{4}$ .
- ★ Si  $\frac{\sqrt{x}}{4} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 16$ , alors  $F_W(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{4} & \text{si } x \in [0, 16] \\ 1 & \text{si } x \geq 16 \end{cases}.$$

Une densité  $f_W$  de  $W$  est donnée par la dérivée de  $F_W$  en les points où  $F_W$  est dérivable, soit

$$f_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{8\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0, 16] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**5.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_H(x) &= \mathbf{P}([H \leq x]) = \mathbf{P}(\ln(4U) \leq x) = \mathbf{P} \left( \left[ U \leq \frac{e^x}{4} \right] \right) \\ &= F_U \left( \frac{e^x}{4} \right). \end{aligned}$$

- \*  $e^x$  est une quantité toujours strictement positive.
- \* Si  $0 \leq \frac{e^x}{4} \leq 1$ , c'est-à-dire  $x \leq \ln(4)$ , alors  $F_H(x) = \frac{e^x}{4}$ .
- \* Si  $\frac{e^x}{4} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq \ln(4)$ , alors  $F_H(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_H(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{4} & \text{si } x \leq 2\ln(2) \\ 1 & \text{si } x \geq 2\ln(2) \end{cases}.$$

Une densité  $f_H$  de  $H$  est donnée par la dérivée de  $F_H$  en les points où  $F_H$  est dérivable, soit

$$f_H(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{4} & \text{si } x \leq 2\ln(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**6.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_E(x) &= \mathbf{P}([E \leq x]) = \mathbf{P}([-\ln(4U) \leq x]) = \mathbf{P} \left( \left[ U \geq \frac{e^{-x}}{4} \right] \right) \\ &= 1 - \mathbf{P} \left( \left[ U \leq \frac{e^{-x}}{4} \right] \right) \\ &= 1 - F_U \left( \frac{e^{-x}}{4} \right). \end{aligned}$$

\*  $e^{-x}$  est une quantité toujours strictement positive.

\* Si  $0 \leq \frac{e^{-x}}{4} \leq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq -\ln(4)$ , alors  $F_E(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{4}$ .

\* Si  $\frac{e^{-x}}{4} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \leq -\ln(4)$ , alors  $F_E(x) = 0$ .

Finalement,

$$F_E(x) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{-x}}{4} & \text{si } x \geq -\ln(4) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité  $f_E$  de  $E$  est donnée par la dérivée de  $F_E$  en les points où  $F_E$  est dérivable, soit

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{4} & \text{si } x \geq -2\ln(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

□

### Solution de l'exercice 15.

**1.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- \* Si  $x \leq 0$ , alors

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbf{P}([X_n \leq x]) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^x 0 dt = 0. \end{aligned}$$

\* Si  $0 \leq x \leq 1$ , alors

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbf{P}([X_n \leq x]) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f_n(t) dt + \int_0^x f_n(t) dt \\ &= 0 + \int_0^x nt^{n-1} dt = n \left[ \frac{t^n}{n} \right]_0^x \\ &= x^n. \end{aligned}$$

\* Si  $x \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbf{P}([X_n \leq x]) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f_n(t) dt + \int_0^1 f_n(t) dt + \int_1^x f_n(t) dt \\ &= 0 + \int_0^1 nt^{n-1} dt + 0 = n \left[ \frac{t^n}{n} \right]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

**2.** Comme  $f_n$  est nulle en dehors d'un segment,  $X_n$  admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = \int_0^1 t \times nt^{n-1} dt \\ &= n \int_0^1 t^n dt = n \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

**3.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En utilisant les définitions,

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbf{P}([Y_n \leq x]) = \mathbf{P}([-\ln(X_n) \leq x]) = \mathbf{P}([X_n \geq e^{-x}]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X_n \leq e^{-x}]) \\ &= 1 - F_n(e^{-x}). \end{aligned}$$

\* La quantité  $e^{-x}$  est toujours strictement positive.

\* Si  $0 \leq e^{-x} \leq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 0$ , alors

$$G_n(x) = 1 - (e^{-x})^n = 1 - e^{-nx}.$$

\* Si  $e^{-x} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \leq 0$ , alors

$$G_n(x) = 1 - 1 = 0.$$

Finalement,

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-nx} & \text{sinon} \end{cases}.$$

**4.** D'après la question précédente,  $Y_n$  est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $n$ .

**5.** D'après les propriétés des lois exponentielles,

$$\mathbf{E}[Y_n] = \frac{1}{n} \text{ et } \mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}.$$

□

### Solution de l'exercice 16.

**1.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

\* Si  $x < a$ , alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0.$$

\* Si  $x \geq a$ , alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt \\ &= 0 + \int_a^x 2e^{2a} e^{-2t} dt \\ &= 2e^{2a} \left[ \frac{1}{-2} e^{-2t} \right]_a^x \\ &= 2e^{2a} \left( \frac{e^{-2a}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} \right) \\ &= 1 - e^{2a-2x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - e^{2(a-x)} & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après les définitions,

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbf{P}([Y \leq x]) = \mathbf{P}([X \leq x + a]) \\ &= F(x + a). \end{aligned}$$

\* Si  $x + a \leq a$ , c'est-à-dire  $x \leq 0$ , alors  $G(x) = 0$ .

\* Si  $x + a \geq a$ , c'est-à-dire  $x \geq 0$ , alors

$$G(x) = 1 - e^{2(a-(x+a))} = 1 - e^{-2x}.$$

Finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. D'après la question précédente,  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$ . Ainsi,

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{1}{4}.$$

4. En utilisant les définitions,

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y + a] = \mathbf{E}[Y] + a = \frac{1}{2} + a.$$

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y + a) = \mathbf{V}(Y) = \frac{1}{4}.$$

□

## IV - Lois usuelles

### Solution de l'exercice 17.

1. Comme  $X$  suit une loi normale centrée réduite,  $\mathbf{P}([X \leq 2]) \simeq 0,9772$ .

2. D'après les propriétés des probabilités,

$$\mathbf{P}([X > 2,51]) = 1 - \mathbf{P}([X \leq 2,51]).$$

Comme  $X$  suit une loi normale centrée réduite,

$$\mathbf{P}([X > 2,51]) \simeq 1 - 0,9940 \simeq 0,006.$$

3. Comme  $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 4)$ , alors  $\frac{Y-5}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y < 1]) &= \mathbf{P}([Y - 5 < -4]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y-5}{2} < -2\right]\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y-5}{2} < -2\right]\right) \\ &= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \simeq 1 - 0,9772 \\ &\simeq 0,0228. \end{aligned}$$

4. Comme  $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 4)$ , alors  $\frac{Y-5}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([3 < Y \leq 6]) &= \mathbf{P}([-2 < Y - 5 \leq 1]) = \mathbf{P}\left(\left[-1 < \frac{Y-5}{2} \leq \frac{1}{2}\right]\right) \\ &= \Phi(0,5) - \Phi(-1) = \Phi(0,5) - (1 - \Phi(1)) \\ &\simeq 0,6915 - 1 + 0,8413 \\ &\simeq 0,5328. \end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 18.

1. Comme  $X$  suit une loi normale centrée réduite,  $\mathbf{P}([X \leq 2,5]) \simeq 0,9938$ .

2. D'après les propriétés des probabilités,

$$\mathbf{P}([X > 1,49]) = 1 - \mathbf{P}([X \leq 1,49]).$$

Comme  $X$  suit une loi normale centrée réduite,

$$\mathbf{P}([X > 1,49]) \simeq 1 - 0,9319 \simeq 0,0681.$$

3. Comme  $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 9)$ , alors  $\frac{Y-2}{3} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y < 1]) &= \mathbf{P}([Y - 2 < -1]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y-2}{3} < -\frac{1}{3}\right]\right) \\ &\simeq \Phi(-0,33) \simeq 1 - \Phi(0,33) \simeq 1 - 0,6293 \\ &\simeq 0,3707.\end{aligned}$$

4. Comme  $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 9)$ , alors  $\frac{Y-2}{3} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([3 < Y \leq 6]) &= \mathbf{P}([1 < Y - 2 \leq 4]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{3} < \frac{Y-2}{3} \leq \frac{4}{3}\right]\right) \simeq \Phi(1,33) - \Phi(0,33) \\ &\simeq 0,9082 - 0,6293 \\ &\simeq 0,2789.\end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 19.

1.  $R(\omega)$  est le plus petit des réels  $R_1(\omega)$  et  $R_2(\omega)$ . Ainsi,  $R(\omega) > x$  si et seulement si  $R_1(\omega)$  et  $R_2(\omega)$  sont strictement supérieurs à  $x$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}[R > x] &= [R_1 > x] \cap [R_2 > x] \\ \mathbf{P}([R > x]) &= \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]).\end{aligned}$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En utilisant les propriétés de la fonction de répartition et la question précédente,

$$\begin{aligned}F(x) &= \mathbf{P}([R \leq x]) = 1 - \mathbf{P}([R > x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]), \text{ d'après 1.} \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x]) \times \mathbf{P}([R_2 > x]), \text{ par indépendance} \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x])^2, \text{ car } R_1 \text{ et } R_2 \text{ ont même loi} \\ &= 1 - (1 - \mathbf{P}([R_1 \leq x]))^2.\end{aligned}$$

Comme  $R_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ , sa fonction de répartition satisfait :

$$\mathbf{P}([R_1 \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Ainsi,

\* Si  $x \leq 0$ , alors

$$F(x) = 1 - (1 - 0)^2 = 0.$$

\* Si  $0 \leq x \leq 1$ , alors

$$F(x) = 1 - (1 - x)^2 = x(2 - x).$$

\* Si  $x \geq 1$ , alors

$$F(x) = 1 - (1 - 1)^2 = 1.$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x(2 - x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. On cherche la probabilité que le minimum des deux distances soit inférieur à 50cm, soit

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([R \leq 0,5]) &= 1 - \mathbf{P}([R > 0,5]) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 20.

1.  $T(\omega)$  est le plus grand des réels  $T_1(\omega)$  et  $T_2(\omega)$ . Ainsi,  $T(\omega) \leq x$  si et seulement si  $T_1(\omega)$  et  $T_2(\omega)$  sont inférieurs à  $x$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}[T \leq x] &= [T_1 \leq x] \cap [T_2 \leq x] \\ \mathbf{P}([T \leq x]) &= \mathbf{P}([T_1 \leq x] \cap [T_2 \leq x]).\end{aligned}$$

**2.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En utilisant les propriétés de la fonction de répartition et la question précédente,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}([T_1 \leq x] \cap [T_2 \leq x]), \text{ d'après 1.} \\ &= \mathbf{P}([T_1 \leq x]) \times \mathbf{P}([T_2 \leq x]), \text{ par indépendance} \\ &= \mathbf{P}([T_1 \leq x])^2, \text{ car } T_1 \text{ et } T_2 \text{ ont même loi} \end{aligned}$$

Comme  $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ , sa fonction de répartition satisfait :

$$\mathbf{P}([T_1 \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Ainsi,

\* Si  $x \leq 0$ , alors

$$F(x) = 0^2 = 0.$$

\* Si  $x \geq 0$ , alors

$$F(x) = (1 - e^{-x})^2.$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (1 - e^{-x})^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**3.** On cherche la probabilité que le maximum de la durée de vie des piles soit supérieur à 6 mois, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([T \geq 0,5]) &= 1 - \mathbf{P}([T \leq 0,5]) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-1/2}\right)^2 \\ &= 2e^{-1/2} - e^{-1} \simeq 0,845. \end{aligned}$$

□