# VIII - Intégration

## I - Primitives

**Définition 1 - Primitive**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Une *primitive* de $f$ est une fonction dérivable $F$ sur $I$ telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

**Exemple 1**

Soit $F$ la fonction définie sur $]0,1]$ par $F(x) = x\ln(x) - x$. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0,1]$, alors $F$ est dérivable et pour tout $x \in ]0,1]$,

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Ainsi, $F$ est une primitive de ln sur $]0,1]$.

**Théorème 1 - Primitives de fonctions continues**

Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet des primitives. Si $F$ et $G$ sont des primitives d'une fonction $f$ continue sur $I$, alors il existe un réel $c$ tel que $\forall\, x \in I$, $F(x) = G(x) + c$.

**Exemple 2**

Si $G$ est une primitive de la fonction ln sur $]0,1]$, alors il existe un réel $c$ tel que

$$\forall\, x \in ]0,1],\ G(x) = x\ln(x) - x + c.$$

**Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles**

| Fonction $f(x)$ | Primitive $F(x)$ | Intervalle |
|---|---|---|
| $c$ | $cx$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^a$, $a \neq -1$ | $\frac{1}{a+1}x^{a+1}$ | $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln(x)$ | $]0,+\infty[$ |
| $\mathrm{e}^{ax}$, $a \neq 0$ | $\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$ | $\mathbb{R}$ |

**Exemple 3**

Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{1/4}$ est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{1/4+1} = \frac{4}{5}x^{5/4}.$$

**Proposition 2 - Primitive de fonctions composées**

Soit $u$ une fonction dérivable telle que $u'$ soit continue.

| Fonction $f(x)$ | Primitive $F(x)$ |
|---|---|
| $\lambda u'(x) + \mu v'(x)$ | $\lambda u(x) + \mu v(x)$ |
| $u'(x)u^a(x)$, $a \neq -1$ | $\frac{1}{a+1}u^{a+1}(x)$ |
| $\frac{u'(x)}{u(x)}$ | $\ln\lvert u(x)\rvert$ |
| $u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ | $\mathrm{e}^{u(x)}$ |
| $u'(x)v'(u(x))$ | $v(u(x))$ |

**Exemple 4**

La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ est de la forme $u'(x)u(x)$ où $u(x) = \ln(x)$. Ainsi, une primitive de $f$ est donnée par $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$.

# II - Intégrale sur un segment

**Définition 2 - Intégrale d'une fonction continue**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ et $F$ une primitive de $f$. L'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ est le réel défini par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

**Exemple 5**

En utilisant les primitives usuelles,

- $\displaystyle\int_1^2 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}$.
- $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^3+4x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^5 - 1$.

**Théorème 2 - Intégrale et Primitive**

Soit $f$ une fonction continue définie sur $I$ et $a \in I$. On note $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors, $F$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$. En particulier, pour tout réel $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

## II.1 - Propriétés de l'intégrale

**Définition 3 - Fonctions continues par morceaux**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I = \bigcup_{k=0}^{n} ]a_k, b_k[$. On suppose que $f$ est continue par morceaux sur $I$, i.e. prolongeable par continuité sur chacun des segments $]a_k, b_k[$. Alors, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**Proposition 3 - Relation de Chasles**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$ et $a$, $b$ et $c$ des réels de $I$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Exemple 6 - Fonction définie par morceaux**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = x - 1$ sinon. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 0\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2 = 0 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**Proposition 4 - Linéarité de l'intégrale**

Soit $f$ et $g$ des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et $\lambda$ un réel. Alors,

$$\int_a^b f(x)+\lambda g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Exemple 7**

En utilisant les primitives usuelles,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{12}{x}+5x^3\,\mathrm{d}x &= 12\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 5\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x\\ &= 12\left[\ln(x)\right]_1^2 + 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2\\ &= 12\left(\ln(2)-\ln(1)\right)+5\left(\frac{2^4}{4}-\frac{1}{4}\right)\\ &= 12\ln(2)+\frac{5}{4}\cdot 15.\end{aligned}$$

**Proposition 5 - Croissance de l'intégrale (I)**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Si $a\leqslant b$ et, pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.

**Exemple 8**

Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ et $0\leqslant x\leqslant y$. Alors,

$$\begin{aligned}F(y) &= \int_0^y \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^y \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= F(x)+\int_x^y \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, $\frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\geqslant 0$ pour tout $t\in[x,y]$ et $x\leqslant y$, donc $\displaystyle\int_x^y \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t\geqslant 0$. Ainsi, $F(x)\leqslant F(y)$ et $F$ est croissante.

**Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (II)**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. Si, pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

**Exemple 9**

Pour tout $x\in[0,1]$, $x+1\geqslant 1$. Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{x^n n}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}.$$

**Proposition 7 - Inégalité triangulaire**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**Exemple 10**

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\geqslant 0$. Alors,

$$\left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x |(-t)^n|\frac{\mathrm{e}^t}{n!}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\mathrm{e}^x}{n!}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^x}{(n+1)!}.$$

**Proposition 8 - Positivité de l'intégrale des fonctions continues**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$. Si $f$ est à valeurs positives, alors $f \equiv 0$ si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

**Exemple 11 - Contre-exemple**

La propriété précédente est fausse si $f$ est seulement continue par morceaux. Par exemple, si $f(x) = 0$ sur $]0,1]$ et $f(1) = 1$. Alors, $f$ est non nulle et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

## II.2 - Calculs d'intégrales

**Théorème 3 - Intégration par parties**

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que $u'$ et $v'$ soient continues sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Exemple 12 -**

- Calculons $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
  Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Alors, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$. Comme $u$, $v$ sont dérivables et $u'$, $v'$ sont continues sur $[0,1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{e}^4}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_1^2 \\ &= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{4} = \frac{3\,\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}.\end{aligned}$$

- Calculons $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.
  Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. Alors, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$. Comme $u$, $v$ sont dérivables et $u'$, $v'$ sont continues sur $[1,2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - [x]_1^2 = 2\ln(2) - 2 + 1 = 2\ln(2) - 1.\end{aligned}$$

**Théorème 4 - Changement de variable**

Soit $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ et $\varphi$ une fonction de $[a,b]$ dans $I$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exemple 13 -**

Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$ à l'aide du changement de variable $t = \ln(u)$.
La fonction $\varphi : [1,\mathrm{e}] \to [0,1]$, $u \mapsto \ln(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u+1}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right]\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = [\ln(u)]_1^{\mathrm{e}} - [\ln(1+u)]_1^{\mathrm{e}} \\ &= 1 - \ln(1+\mathrm{e}) + \ln(2).\end{aligned}$$

## II.3 - Formule de Taylor avec reste intégral

**Théorème 5 - Formule de Taylor avec reste intégral**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors, pour tout $(a, x) \in I^2$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exemple 14**

- La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1, +\infty[$. De plus, pour tout $x > -1$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x > -1$,

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{1+0} + \int_0^x \frac{(x-t)}{1!} \times \left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right) \mathrm{d}t$$

$$\ln(1+x) - x = -\int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Si $x \geqslant 0$ et $t \in [0, x]$, alors $\frac{x-t}{(1+t)^2} \geqslant 0$ et $\ln(1+x) - x \leqslant 0$.
Si $x \leqslant 0$ et $t \in [x, 0]$, alors $\frac{x-t}{(1+t)^2} \leqslant 0$ et $\ln(1+x) - x \leqslant 0$.
Finalement,

$$\forall\, x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x.$$

**1.** Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $x$ réel,

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Si $x \geqslant 0$ et $t \in [0, x]$, alors

$$0 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x$$

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t$$

$$0 \leqslant \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.
Si $x \leqslant 0$ et $t \in [x, 0]$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On conclut comme précédemment que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$.

# III - Intégrales généralisées

Dans tout ce paragraphe, $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

## III.1 - Définition

**Définition 4 - Convergence**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$.

- Si $I = [a, b[$ et $f$ est continue sur $[a, b[$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $x$ tend vers $b$.
- Si $I = ]a, b]$ et $f$ est continue sur $]a, b]$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $x$ tend vers $a$.
- Si $I = ]a, b[$ et $f$ est continue sur $]a, b[$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge* s'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

Dans tous les cas, si l'intégrale ne converge pas, elle *diverge*.

**Exemple 15**

La fonction ln est continue sur $]0, 1]$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

**Théorème 6 - Intégrales de référence**

($i$). **Intégrales de Riemann sur** $[1, +\infty[$**.**
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Alors, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.

($ii$). **Intégrales de Riemann sur** $]0, 1]$**.**
$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Alors, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$.

($iii$). **Fonction exponentielle.**
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$. Alors, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

($iv$). **Fonction logarithme.**
$\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$.

## III.2 - Propriétés

**Proposition 9 - Linéarité**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Alors, $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Proposition 10 - Relation de Chasles**

On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $c \in ]a,b[$. Alors, $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Proposition 11 - Croissance de l'intégrale**

On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

(*i*). Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(*ii*). Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Théorème 7 - Inégalité triangulaire**

Si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**Théorème 8 - Positivité**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f$ est nulle sur $I$.

## III.3 - Preuves d'existences

**Proposition 12 - Intégrale faussement impropre**

Soit $f$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Alors, les intégrales de $f$ sur $[a,b]$, $]a,b]$, $]a,b[$ et $[a,b[$ sont égales.

**Exemple 16**

Montrons que $\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. On note $f$ la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(t) = t\ln(t)$.

- La fonction $f$ est continue sur $]0,1]$.
- D'après les croissances comparées, $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$. Ainsi, $f$ est prolongeable par continuité en 0.

Finalement, l'intégrale de $f$ sur $]0,1]$ est bien définie.

**Proposition 13 - Fonctions à valeurs positives**

Si $f$ est valeurs positives sur $[a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

**Théorème 9 - Domination locale**

Soient $f$, $g$ deux fonctions continues de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}_+$.

- S'il existe un réel $c$ tel que $\forall\, x \in [c,b[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et $\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si $f(x) \sim_b g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

**Exemple 17**

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
  - ⋆ $x \mapsto x^n \,\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  - ⋆ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-x} = 0$, il existe un réel $c$ tel que, pour tout $x \geqslant c$,
  $$x^n \,\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}.$$
  D'après les intégrales de référence, $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.
  Ainsi, $\displaystyle\int_c^{+\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.
  Comme $x \mapsto x^n \,\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0, c]$, son intégrale sur ce segment est bien définie.

  Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.
- Étudions $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$.
  - ⋆ $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est continue sur $[0, 1[$.
  - ⋆ $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)} \sim_1 \frac{1}{2(1-t)}$.
  Or, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x) \to +\infty$ quand $x \to 1$.

  Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$ n'est pas convergente.

## III.4 - Méthodes de calculs

Utiliser les méthodes de calcul sur un segment (primitivation, intégration par parties, changement de variable), puis étudier la limite.

**Exemple 18**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

- Si $n = 0$, alors $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$.
- Si $n \geqslant 1$. Soit $M \geqslant 0$. Les fonctions $u : x \mapsto x^n$ et $v : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, M]$. D'après la formule d'intégration par parties,
$$\begin{aligned}\int_0^M x^n \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-x^n \,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^M + \int_0^M nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -M^n \,\mathrm{e}^{-M} + n\int_0^M x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Ainsi, lorsque $M \to +\infty$, on obtient la relation :
$$I_n = nI_{n-1}.$$
- On montre alors par récurrence que, pour tout $n$ entier naturel, $I_n = n!$.