

L'énigme des ampoules

Résolution d'une énigme arithmétique

CM2
45'+



Prérequis

- * Matériel : imprimer l'énoncé de l'énigme et la feuille réponse, crayon pour colorier.

Apports

- * Application d'un algorithme.
- * Expérimentation, élaboration d'hypothèse, retour sur l'hypothèse.
- * Discussion.

Déroulement

1. Distribuer l'énoncé de l'énigme, la lire avec l'ensemble des élèves et vérifier sa bonne compréhension :

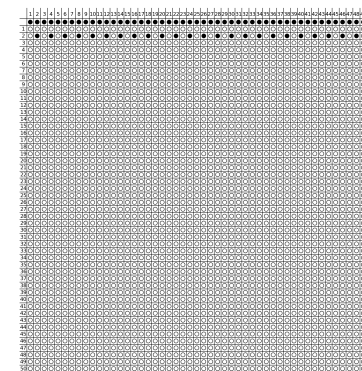
Chambre 1 ♀	Chambre 2 ♀	Chambre 3 ♀	Chambre 100 ♀
----------------	----------------	----------------	------------------

Dans le collège de Poudmath, les 100 élèves sont pensionnaires et leurs chambres sont toutes du même côté d'un long couloir. À l'extérieur de chaque chambre, un bouton poussoir permet d'allumer ou d'éteindre l'ampoule à l'intérieur de la chambre. À 8h du matin, tous les élèves sont sortis de leur chambre et toutes les lumières des chambres sont éteintes. Les élèves passent ensuite 1 par 1 dans le couloir sans entrer dans les chambres.

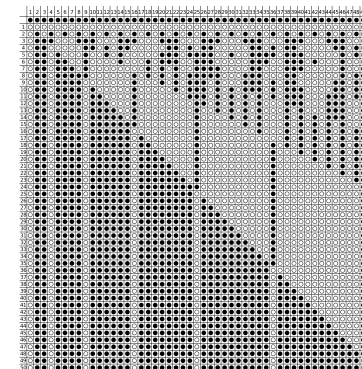
- * Le 1er élève appuie sur tous les interrupteurs.
- * le 2ème élève appuie sur un interrupteur sur 2, en commençant par le second.
- * le 3ème élève appuie sur un interrupteur sur 3, en commençant par le troisième.
- * ...

Une fois que tous les élèves sont passés, quels sont les numéros des chambres dont la lumière est allumée ?

2. *Réflexions en groupe* sur comment mener la recherche : réduire le nombre d'élèves et d'ampoules.
3. Suggérer une expérimentation en dessinant l'évolution de l'état des ampoules.
4. Passer sur une *phase de recherche individuelle*, soit sans support, soit en utilisant le support fourni. Possibilité de commencer avec moins de 50 ampoules. . .



5. Reprendre au *tableau* les résultats obtenus.



On peut effectuer les *constatations* suivantes :

- * Après le passage de l'élève n°2, l'ampoule n°2 n'est plus touchée.
 - * Après le passage de l'élève n°3, l'ampoule n°3 n'est plus touchée.
 - * On peut donc remplir rapidement le triangle inférieur gauche du tableau.
 - * Les numéros des ampoules allumées sont : 1, 4, 9, 16, 25, . . .
 - * Tenter de *deviner* le numéro de l'ampoule allumée suivante? *Reconnaître* des carrés parfaits.
6. *Comprendre* la validation de l'hypothèse :
 - * L'ampoule n°*i* est allumée après le passage du *i*^e élève si un *nombre impair* d'élèves a appuyé sur l'interrupteur.
 - * L'élève n°*n* appuie sur l'interrupteur de l'ampoule n°*i* si *n* est un *diviseur* de *i*.
 - * En recherchant les diviseurs des entiers, on s'aperçoit qu'ils vont

généralement par 2. Par exemple,

$$36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 6 \times 6.$$

- * Le nombre de diviseurs est *impair* si un des couples est constitué de deux fois le même nombre. Il s'agit alors d'un *carré parfait*.