■ ■ ■

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on identifiera les vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à ceux de $\mathbb{K}^n$. On notera I_n la matrice identité d'ordre n.
Si $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices d'ordre n, la série de terme général A_p, notée $\sum A_p$ est la suite des sommes partielles $\left(\sum_{p=0}^{N} A_p\right)_{N\in\mathbb{N}}$. Si cette suite converge, sa limite est la somme de la série et notée $\sum_{p=0}^{+\infty} A_p$.
Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la série exponentielle associée à A est la série de terme général $\frac{A^p}{p!}$. Nous allons prouver que la série exponentielle converge et noterons $\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty}$ sa somme.

1. Deux cas particuliers.

a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Montrer que $\sum \frac{A^p}{p!}$ converge et exprimer $\exp(A)$ en fonction des valeurs propres de A.

b) Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'ordre k, i.e. $N^{k-1} \neq 0_n$ et $N^k = 0_n$. Montrer que $\sum \frac{N^p}{p!}$ converge et exprimer $\exp(N)$ comme combinaison linéaire des matrices $\{I_n, N, \dots, N^{k-1}\}$.

Pour tout vecteur $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\|u\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |u_i|$ et $|||A||| = \sup\{\|AX\|_\infty, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\setminus\{0\}\}$.

2. Prélude. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que la norme subordonnée satisfait $|||A||| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

c) Montrer que $|||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||$.

d) Montrer qu'il existe une constante c (indépendante de la matrice A) strictement positive telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant c \cdot |||A|||$.

3. Convergence de la série exponentielle. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout entier naturel k et tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $a_{i,j}^{(k)}$ le coefficient d'ordre (i,j) de la matrice A^k et $e_{i,j}^{(k)}$ celui de la matrice $\sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!}$.

a) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!],\ \left|a_{i,j}^{(k)}\right| \leqslant c \cdot |||A|||^k.$$

b) En déduire que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la suite $\left(e_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Conclure quant à la convergence de la série exponentielle.

4. Exponentielle d'une somme. Soient A et B deux matrices telles que $AB = BA$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel k, il existe un ensemble $\Delta_k \subset [\![0,k]\!]^2$ tel que

$$\left|\left|\left|\sum_{j=0}^{k} \frac{(A+B)^j}{j!} - \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{B^j}{j!}\right)\right|\right|\right| \leqslant \sum_{(j,\ell)\in\Delta_k} \frac{|||A|||^j\,|||B|||^\ell}{j!\ell!}.$$

b) Montrer que pour tout entier naturel k, avec les notations précédentes,

$$\left|\sum_{j=0}^{k} \frac{(|||A|||+|||B|||)^j}{j!} - \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{|||A|||^j}{j!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{|||B|||^j}{j!}\right)\right| = \sum_{(j,\ell)\in\Delta_k} \frac{|||A|||^j\,|||B|||^\ell}{j!\ell!}.$$

c) En déduire que $\exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B)$.

d) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer $\exp(A+B)$ puis $\exp(A)\cdot\exp(B)$.

5. Applications.

a) Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A)$ est inversible et déterminer son inverse.

b) Soient N et D deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que N soit nilpotente, D soit diagonalisable et $ND = DN$. En posant $A = D + N$, exprimer, pour tout réel t, la matrice $\exp(tA)$.
Cette décomposition de la matrice A est la décomposition de Dunford*. La matrice* $\exp(tA)$ *apparaît naturellement dans la résolution de systèmes différentiels linéaires.*

6. Extension d'un résultat classique. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Pour tout entier naturel k non nul, montrer que

$$\left|\left|\left| \left(I_n + \frac{A}{k}\right)^k - \sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!} \right|\right|\right| \leqslant \left| \left(1 + \frac{|||A|||}{k}\right)^k - \sum_{j=0}^{k} \frac{|||A|||^j}{j} \right|.$$

b) En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(I_n + \frac{A}{k}\right)^k = \exp(A)$.

Mathématiciens

Dunford Nelson (12 déc. 1906 à St Louis-7 sept. 1986 à Sarasota).