

IV - Fonctions

I - Fonctions particulières

I.1 - Polynômes

À Savoir

Soit a, b, c des réels tels que $a \neq 0$.

- * Si $f : x \mapsto ax + b$, alors f est un **polynôme de degré 1** et de coefficient dominant égal à a . Il s'annule en $-\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $f(x)$	$-\text{signe de } a$	0	$\text{signe de } a$

- * Si $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, alors f est un **polynôme de degré 2** (appelé également **trinôme**) et de coefficient dominant égal à a . Le discriminant de f est égal à $\Delta = b^2 - 4ac$.

- ★ Si $\Delta > 0$, la fonction f possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Alors, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
signe de $f(x)$	signe de a	0	$-\text{signe de } a$	0	signe de a

- ★ Si $\Delta = 0$, la fonction f possède une unique racine :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

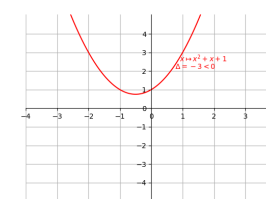
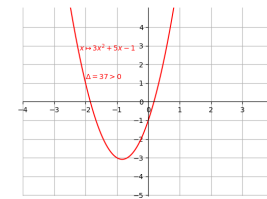
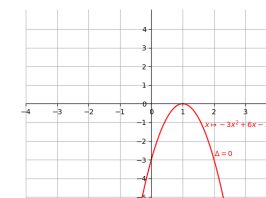
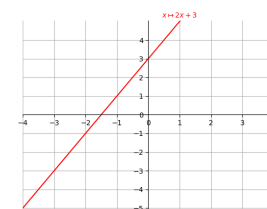
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
signe de $f(x)$	$\text{signe de } a$	0	$\text{signe de } a$

- ★ Si $\Delta < 0$, la fonction f ne possède pas de racine réelle.

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f(x)$	$\text{signe de } a$	$\text{signe de } a$

Représentations graphiques

Il est important de savoir représenter graphiquement ces fonctions.



À Savoir

Si f est un polynôme et si a est une racine de f (c'est-à-dire $f(a) = 0$), alors il existe un polynôme $g(x)$ tel que

$$f(x) = (x - a)g(x).$$

Exemple 1

Posons $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$.

On remarque que

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 6 \times (-2)^2 - (-2) + 30 \\ &= -2^3 - 6 \times 2^2 + 2 + 30 \\ &= -8 - 24 + 2 + 30 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 2)(ax^2 + bx + c) \\ x^3 - 6x^2 - x + 30 &= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de x^3 dans les deux membres :

$$1 = a$$

En identifiant les coefficients constants dans les deux membres :

$$30 = 2c$$

$$c = 15$$

En identifiant les coefficients de x dans les deux membres :

$$-1 = c + 2b$$

$$-1 = 15 + 2b$$

$$2b = -16$$

$$b = -8$$

Ainsi,

$$f(x) = (x + 2)(x^2 - 8x + 15)$$

Le discriminant de $x^2 - 8x + 15$ est

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 15 = 64 - 60 = 4.$$

Ainsi, les racines de $x^2 - 8x + 15$ sont

$$x_1 = \frac{8 - 2}{2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{8 + 2}{2} = 5.$$

Finalement,

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$$

et

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x + 2)(x - 3)(x - 5).$$

I.2 - Valeur absolue

À Savoir

Soit a un réel. La **valeur absolue** de a , notée $|a|$, est égale à

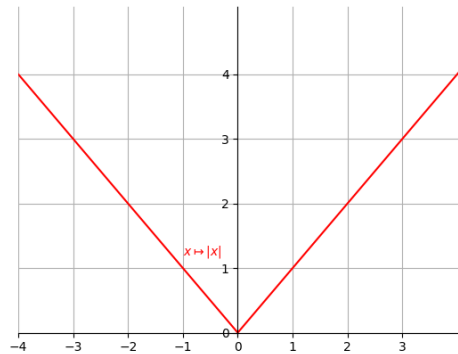
$$\begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty.$$

Graphes de la fonction valeur absolue



Exemple 2

D'après la définition,

$$|0| = 0$$

$$|2| = 2$$

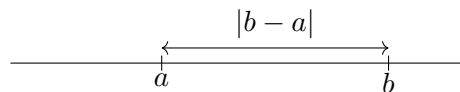
$$|-3| = 3$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

À Savoir

Soit a, b deux réels. La valeur $|a - b|$ est la **distance** entre les réels a et b .

Valeur absolue et Distance à 0



I.3 - Logarithme

À Savoir

La fonction **logarithme népérien**, notée \ln , définie sur \mathbb{R}_+^* , est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 :

$$\forall x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

La fonction logarithme est croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty,$$

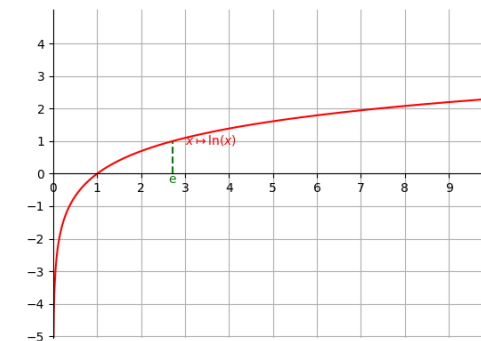
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Ses valeurs remarquables sont :

$$\ln(1) = 0,$$

$$\ln(e) = 1.$$

Graphes de la fonction logarithme



À Savoir

La fonction logarithme est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Exemple 3

Soit $f(x) = x \ln(x) - x + 10$. En utilisant les règles de dérivation, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \ln'(x) - 1 + 0 \\ &= \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln(x). \end{aligned}$$

À Savoir

Pour tous $a, b > 0$ et x réel,

$$\begin{aligned} \ln(ab) &= \ln(a) + \ln(b), \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b), \\ \ln(a^x) &= x \ln(a). \end{aligned}$$

Exemple 4

$$\begin{aligned} \ln(e^4) &= 4 \ln(e) = 4, \\ \ln(8) &= \ln(2^3) = 3 \ln(2). \end{aligned}$$

I.4 - Exponentielle**À Savoir**

La fonction **exponentielle**, notée \exp , définie sur \mathbb{R} , est la fonction réciproque de la fonction logarithme. On note $e^x = \exp(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x,$$

$$\forall x > 0, e^{\ln(x)} = x.$$

La fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} .

Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

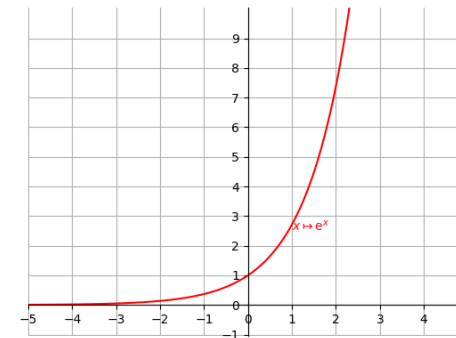
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Ses valeurs remarquables sont :

$$e^0 = 1,$$

$$e^1 = e.$$

Graphes de la fonction exponentielle

À Savoir

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x).$$

Exemple 5

Soit $f(x) = 4x e^x + x^2$. La fonction f est dérivable pour tout x réel et

$$f'(x) = 4 \times 1 \times e^x + 4x e^x + 2x = 4(1+x)e^x + 2x.$$

À Savoir

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b,$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}.$$

Exemple 6

$$e^3 \times e^2 = e^5, e^{\ln(8)} = 8 \text{ et } e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

II - Généralités**À Savoir**

* Si f est **croissante** sur I et $x, y \in I$. Alors,

$$\begin{aligned} x &\leq y \\ \Rightarrow f(x) &\leq f(y) \end{aligned}$$

* Si f est **décroissante** sur I et $x, y \in I$. Alors,

$$\begin{aligned} x &\leq y \\ \Rightarrow f(y) &\leq f(x) \end{aligned}$$

Exemple 7

Comme la fonction exponentielle est croissante, et $2 \leq 3$, alors $e^2 \leq e^3$.

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ et $2 \leq 3$, alors $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}$.

À Savoir

* La fonction f est paire si $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.

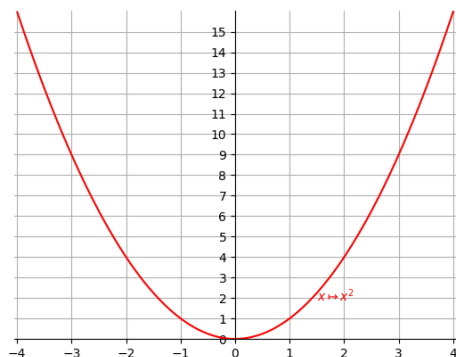
Sa courbe représentative présente alors une symétrie axiale dont l'axe est l'axe des ordonnées.

* La fonction f est impaire si $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

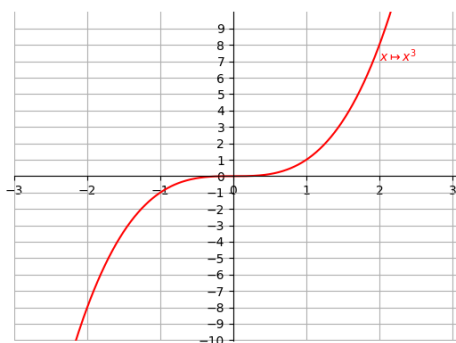
Sa courbe représentative présente alors une symétrie centrale centrée en l'origine du repère.

Graphes et Parité

La fonction carré est paire :



La fonction cube est impaire :



II.1 - Limites

À Savoir

- * La **limite à droite** de f en a est la valeur que prend $f(x)$ lorsque x tend vers a tout en restant supérieur à a . On la note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- * La **limite à gauche** de f en a est la valeur que prend $f(x)$

lorsque x tend vers a tout en restant inférieur à a . On la note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Exemple 8

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

À Savoir

- * La limite en $-\infty$ ou en $+\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- * La limite en $-\infty$ ou en $+\infty$ d'un quotient de polynômes est égale à la limite du quotient de leurs termes de plus haut degré.

Exemple 9

- * Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 100x^2 - 12 = +\infty.$$

- * Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 + 300x^3 - 12 = -\infty.$$

- * Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 = +\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 - 300x^2 - 12 = +\infty.$$

- * Comme $\frac{5x^4}{12x^6} = \frac{5}{12x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{12x^2} = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + 2x^2 - x + 1}{12x^6 + 26x^5} = 0.$$

* Comme $\frac{4x^3}{3x^3} = \frac{4}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 12x^2 + x + 1}{3x^3 - 5x^2 + 12} = \frac{4}{3}.$$

À Savoir

Si la case indique ??, la limite est indéterminée. Il faut transformer l'expression (factorisation, expression conjuguée, croissances comparées, ...) pour pouvoir la déterminer.

* **Multiplication** par une constante.

$\lim f =$	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	
$\lim kf =$	$k\ell$	$-\infty$	$+\infty$	si $k > 0$
	$k\ell$	$+\infty$	$-\infty$	si $k < 0$
	0	0	0	si $k = 0$

* **Addition** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim(f + g)$.

$\lim g \backslash \lim f$	ℓ_1	$-\infty$	$+\infty$
ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$??
$+\infty$	$+\infty$??	$+\infty$

* **Multiplication** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim(f \times g)$.

$\lim g \backslash \lim f$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 > 0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	??	??
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$??	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$??	$-\infty$	$+\infty$

* **Quotient** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim \frac{f}{g}$.

$\lim f \backslash \lim g$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 > 0$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 < 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
0^-	$+\infty$	$-\infty$??	??	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	??	??
$+\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	??	??

À Savoir

Théorème des **croissances comparées**. Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^\alpha \ln(x)) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Exemple 10

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

* Soit $f(x) = x \ln(x) - x$. D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$. D'après les limites classiques,

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x) - x) = 0.$$

* Soit $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{e^x}{15x^{100}}$. D'après les propriétés classiques, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} + \frac{e^x}{15x^{100}} = +\infty.$$

* Soit $f(x) = x \ln(x) - x = x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 \right)$. D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} - 1 = -1$. Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) - x = -\infty.$$

À Savoir

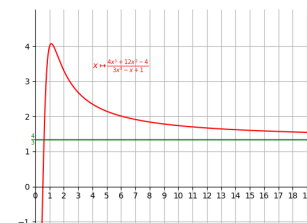
- * Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f .
- * Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une **droite asymptote** à la courbe représentative de f .
- * Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f .

Exemple 11

* Soit $f(x) = \frac{4x^3 + 12x^2 - 4}{3x^3 - x + 1}$. Comme $\frac{4x^3}{3x^3} = \frac{4}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{4}{3}.$$

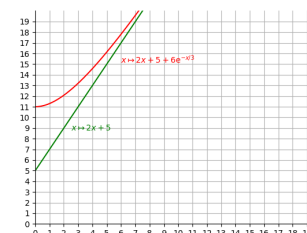
Ainsi, la courbe représentative de f possède une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{4}{3}$.



* Soit $f(x) = 2x + 5 + 6e^{-x/3}$. Alors,

$$f(x) - (2x + 5) = 6e^{-x/3}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x/3} = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 5) = 0$. Ainsi, la courbe représentative de f possède une droite asymptote d'équation $y = 2x + 5$.



* Soit $f(x) = \ln|x - 1|$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 1} \ln|x - 1| = -\infty$. Ainsi, la courbe représentative de f possède une asymptote verticale d'équation $x = 1$.



II.2 - Continuité

À Savoir

* La fonction f est **continue** au point a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

* Si f, g sont continues en a et $k \in \mathbb{R}$, alors

- * $f + kg$ est continue en a ,
- * $f \times g$ est continue en a ,
- * $\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$,
- * $x \mapsto f(g(x))$ est continue en a si elle est définie.

Exemple 12

Soit $k \neq 0$ et f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = \begin{cases} k \frac{t}{1+t} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pourra représenter les valeurs prises par f dans un tableau :

t	0	1
$f(t)$	0	$k \frac{t}{1+t}$
		0

D'après les propriétés des fonctions usuelles, f est continue sur $] -\infty, 0[$, $[0, 1]$ et $]1, +\infty[$. Il suffit donc d'étudier la continuité de f en 0 et en 1.

* Comme f est constante égale à 0 sur $] -\infty, 0[$, alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

* Comme f est continue sur $[0, 1]$, alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0) = k \frac{0}{1+0} = 0.$$

Ainsi, $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ et la fonction f est continue en 0.

* Comme f est constante égale à 0 sur $]1, +\infty[$, alors

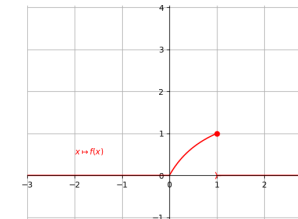
$$\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 0 = 0.$$

* Comme f est continue sur $[0, 1]$,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = f(1) = \frac{k}{2}.$$

Comme $k \neq 0$, alors $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t)$ et la fonction f n'est pas continue en 1.

Lorsque $k = 2$, la représentation graphique de f est la suivante :



À Savoir

Théorème des valeurs intermédiaires. Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \leq y \leq f(b)$ ou $f(b) \leq y \leq f(a)$, alors il **existe** $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

À Savoir

Théorème de la bijection monotone. Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et $f(a) \leq y \leq f(b)$ ou $f(b) \leq y \leq f(a)$, alors il **existe un unique** $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Exemple 13

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x - \ln(x)}.$$

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $]0; +\infty[$.
D'après la définition de f ,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{x - \ln(x)} = x \\ &\Leftrightarrow 1 = x(x - \ln(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x - \ln(x) \\ &\Leftrightarrow x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

On pose ainsi $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$.

Continuité. La fonction h est continue sur $]0, +\infty[$ car somme de fonctions continues sur cet intervalle.

Stricte monotonie. La fonction h est dérivable et, en utilisant la dérivée d'une somme de fonctions,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}.$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - x + 1$ vaut $1 - 4 = -3$. Ainsi, le trinôme ne s'annule jamais et est du signe de son coefficient dominant qui vaut 1. Ainsi, h' est à valeurs strictement positives et h est strictement croissante.

Intervalle image. Comme $h(x) = x - \frac{1}{x}(x \ln(x) + 1)$. D'après le théorème des croissances comparées et le produit des limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty.$$

Comme $h(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$, d'après le théorème de croissances comparées ainsi que le produit des limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Le tableau de variations de h est donc le suivant :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	\parallel	+
$h(x)$	\parallel	$+\infty$

$-\infty \nearrow$

D'après le théorème de la bijection monotone, il existe un unique réel α tel que $h(\alpha) = 0$.

Ainsi, d'après la question **3.a**), il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Enfin, $f(1) = 1$ donc 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

À Savoir

Si f est continue et strictement croissante sur $[a, b]$, alors il existe une unique fonction h telle que

$$\forall y \in [f(a), f(b)], f(h(y)) = y$$

et

$$\forall x \in [a, b], h(f(x)) = x.$$

La fonction h est la **bijection réciproque** de f .

À Savoir

Algorithme de **dichotomie**. Soit f telle que $f(a)f(b) \leq 0$. Pour trouver une valeur approchée à ε près d'un réel c tel que $f(c) = 0$, on procède itérativement comme suit :

- * si $b - a \leq \varepsilon$, on renvoie la valeur a .
- * sinon on pose $m = \frac{a+b}{2}$.
 - ★ Si $f(a)f(m) \leq 0$, on recommence en remplaçant b par m .

★ Sinon on recommence en remplaçant a par m .

II.3 - Dérivabilité

À Savoir

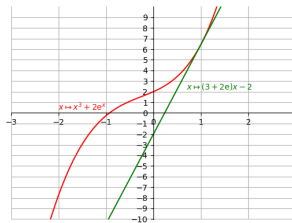
Si f est une fonction dérivable en a et \mathcal{C}_f est sa courbe représentative dans un repère orthonormé, l'équation de la **tangente** à \mathcal{C}_f au point a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple 14

Soit $f(x) = x^3 + 2e^x$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 3x^2 + 2e^x$. Ainsi, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= (3 + 2e)(x - 1) + (1 + 2e) \\ &= (3 + 2e)x - (3 + 2e) + (1 + 2e) \\ &= (3 + 2e)x - 2. \end{aligned}$$



À Savoir

Soit I un intervalle de f .

* Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

- * Si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- * Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I .
- * Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple 15

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$.

D'après les propriétés du logarithme,

$$g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, d'après les propriétés d'addition des limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

En factorisant par x , on obtient $g(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$.

D'une part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

D'autre part, d'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$,

soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$.

Ainsi, d'après les propriétés de multiplication des limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

La fonction identité et la fonction logarithme népérien sont dérivables sur $]0, +\infty[$. De plus, en utilisant la dérivée d'une somme de fonctions, pour $x \in]0, +\infty[$, la fonction g est dérivable et

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}.$$

Comme $x > 0$, le réel $g'(x)$ est du signe de $x - 1$. On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	<div> <div> </div> <div> $+\infty$ </div> <div> \searrow </div> <div> 1 </div> <div> \nearrow </div> <div> $+\infty$ </div> </div>			

À Savoir

Si f admet un **maximum** ou un **minimum** en a , alors $f'(a) = 0$.

II.4 - Convexité

À Savoir

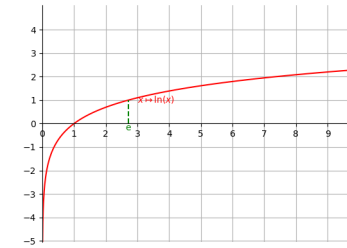
La fonction f est **convexe** si sa courbe représentative se situe au-dessous de chacune de ses cordes.

Si f est deux fois dérivable :

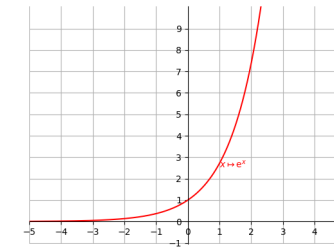
- * f est **convexe** si et seulement si $f'' \geq 0$.
- * f est **concave** si et seulement si $f'' \leq 0$.

Exemple 16

En posant $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$ et $f''(x) = e^x$. Ainsi, $f'' \geq 0$ et la fonction exponentielle est convexe. Si on se déplace en vélo le long d'une route qui a une forme convexe, on va toujours pencher à gauche.



En posant $f(x) = \ln(x)$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ainsi, $f'' \leq 0$ et la fonction logarithme est concave. Si on se déplace en vélo le long d'une route qui a une forme concave, on va toujours pencher à droite.



À Savoir

La courbe représentative de f admet un **point d'inflexion** en a si $f''(a) = 0$ et si f'' change de signe en a .