

## T.D. VI - Espaces vectoriels

### I - Systèmes linéaires

**Solution de l'exercice 1.** On utilise l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ 3x + 4y - z &= 2 \\ x + 3y + z &= 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ -2y + 2z &= -1 \\ y + 2z &= 9 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ -2y + 2z &= -1 \\ 6z &= 17 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -\frac{17}{6} \\ y &= \frac{10}{3} \\ z &= \frac{17}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est  $\left\{-\frac{17}{6}, \frac{10}{3}, \frac{17}{6}\right\}$ .

**1.** On utilise l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y + z &= 7 \\ x - y + 2z &= -3 \\ 3x + y - z &= 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z &= -3 \\ 2x + 3y + z &= 7 \\ 3x + y - z &= 6 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z &= -3 \\ 5y - 3z &= 13 \\ 4y - 7z &= 15 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z &= -3 \\ 5y - 3z &= 13 \\ 23z &= -23 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow -5L_3 + 4L_2 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{S}_1$  possède une unique solution et l'ensemble des solutions est  $\{(1, 2, -1)\}$ .

**2.** On utilise l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - y + 4z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 6 \\ 4x + 3y - 2z &= 14 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z &= 6 \\ 2x - y + 4z &= 2 \\ 4x + 3y - 2z &= 14 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z &= 6 \\ -5y + 10z &= -10 \\ -5y + 10z &= -10 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z &= 6 \\ -5y + 10z &= -10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x &= 2 - \lambda \\ y &= 2 + 2\lambda \\ z &= \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Le système  $(\mathcal{S}_2)$  possède une infinité de solutions et l'ensemble des solutions est

$$\{(2 - \lambda, 2 + 2\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2, 2, 0) + \lambda(-1, 2, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

**3.** Le système est déjà échelonné et possède deux variables libres. Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\begin{aligned} &\{(5 - \lambda - \mu, \lambda, \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(5, 0, 0) + \lambda(-1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{4.} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ est solution de } (\mathcal{S}_4) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z &= -1 \\ -7y + 11z &= 10 \\ -7y + 11z &= 7 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix}.$$

Les deuxième et troisième lignes sont incompatibles, le système ne possède aucune solution. L'ensemble des solutions est  $\emptyset$ .

5. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -x + 2y + 4z &= -11 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 2x - 3y + 5z &= 8 & L_2 \leftarrow L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -x + 2y + 4z &= -11 \\ y + 13z &= -14 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x &= -17 - 22\lambda \\ y &= -14 - 13\lambda \\ z &= \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système ( $\mathcal{S}_5$ ) est infini et est donné par

$$\begin{aligned} & \{(-17 - 22\lambda, -14 - 13\lambda, \lambda) ; \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-17, -14, 0) + \lambda(-22, -13, 1)\}. \end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 2.** On raisonne par équivalences

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 & L_2 \leftarrow L_1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 & L_1 \leftarrow L_2 \\ -5x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 5x_2 - 3x_3 + 7x_4 &= \lambda - 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 & L_1 \leftarrow L_2 \\ -5x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 &= \lambda - 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $\lambda = 5$ , le système possède une infinité de solution. Si  $\lambda \neq 5$ , l'ensemble des solutions est l'ensemble vide. Finalement, l'unique solution est  $\lambda = 5$ . □

## II - Familles de vecteurs

### Solution de l'exercice 3.

1. D'une part,  $E_1$  est inclus dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\vec{0}_n \in E_1$ .

D'autre part, si  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sont deux vecteurs de  $E_1$  et  $\alpha$  est un réel, alors

$$\alpha u + v = (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \dots, \alpha x_n + y_n).$$

Comme  $u \in E_1$ , alors  $x_1 = x_2 = 0$ . De même,  $y_1 = y_2 = 0$ . Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha x_1 + y_1 &= 0 \\ \alpha x_2 + y_2 &= 0 \end{cases}$$

Les deux composantes de  $\alpha u + v$  sont nulles, donc  $\alpha u + v \in E_1$ .

Finalement,  $E_1$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

**2<sup>e</sup> méthode.** En posant  $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2)$ , alors  $f$  est linéaire et  $E_1 = \text{Ker } f$ . Ainsi,  $E_1$  est un espace vectoriel.

2. D'une part,  $E_2$  est inclus dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\vec{0}_n \in E_2$ .

D'autre part, si  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sont deux vecteurs de  $E_2$  et  $\alpha$  est un réel, alors

$$\alpha u + v = (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \dots, \alpha x_n + y_n).$$

Comme  $u \in E_2$ , alors  $x_1 + x_2 = 0$ . De même,  $y_1 + y_2 = 0$ .

Ainsi,

$$\{(\alpha x_1 + y_1) + (\alpha x_2 + y_2) = \alpha(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0.$$

Donc,  $\alpha u + v \in E_2$ .

Finalement,  $E_2$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

**2<sup>e</sup> méthode.** En posant  $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + x_2$ , alors  $f$  est linéaire et  $E_2 = \text{Ker } f$ . Ainsi,  $E_2$  est un espace vectoriel.

3. Comme  $(0, \dots, 0) \notin E_3$ , alors  $E_3$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

4. D'une part,  $E_4$  est inclus dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\vec{0}_n \in E_4$ .

D'autre part, si  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sont deux vecteurs de  $E_4$  et  $\alpha$  est un réel, alors

$$\alpha u + v = (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \dots, \alpha x_n + y_n).$$

Comme  $u \in E_4$ , alors  $x_1 = x_2$ . De même,  $y_1 = y_2$ .

Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha x_1 + y_1 &= \alpha x_2 + y_2. \end{cases}$$

Donc,  $\alpha u + v \in E_4$ .

Finalement,  $E_4$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

**2<sup>e</sup> méthode.** En posant  $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 - x_2$ , alors  $f$  est linéaire et  $E_4 = \text{Ker } f$ . Ainsi,  $E_4$  est un espace vectoriel.

5. On remarque que

$$\begin{aligned} u &= (1, 0, 0, \dots, 0) \in E_5 \\ v &= (0, 1, 0, \dots, 0) \in E_5 \end{aligned}$$

Cependant,  $u + v = (1, 1, 0, \dots)$  donc  $u + v \notin E_5$ .

Ainsi,  $E_5$  n'est pas un espace vectoriel. □

#### Solution de l'exercice 4.

1. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$a(-1, -1, 1, 2) + b(1, -1, 1, 5) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} -a + b &= 0 \\ -a - b &= 0 \\ a + b &= 0 \\ 2a + 5b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b &= 0 \\ a + 2b &= 0 \\ a + b &= 0 \\ 2a + 5b &= 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2$$

Ainsi,  $a = b = 0$  et la famille est libre.

**2<sup>e</sup> méthode.** Comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, alors ils forment une famille libre.

2. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$a(8, 4, 1, -2) + b(1, 3, 0, 5) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} 8a + b &= 0 \\ 4a + 3b &= 0 \\ a &= 0 \\ -2a + 5b &= 0 \end{cases}$$

Ainsi,  $a = b = 0$  et la famille est libre.

**2<sup>e</sup> méthode.** Comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, alors ils forment une famille libre.

3. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$a(1, 1, 3, 2) + b(1, -1, 1, 3) + c(0, 1, 5, 2) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} a + b &= 0 \\ a - b + c &= 0 \\ 3a + b + 5c &= 0 \\ 2a + 3b + 2c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + a - b &= 0 \\ a + b &= 0 \\ 5c + 3a + b &= 0 \\ 2c + 2a + 3b &= 0 \end{cases} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c + a - b &= 0 \\ a + b &= 0 \\ -2a + 6b &= 0 \\ 5b &= 0 \end{cases} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$$

Ainsi,  $a = b = c = 0$  et la famille est libre.

4. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$a(1, 2, 3, 4) + b(-1, 3, 2, 1) + c(2, 1, -1, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \\ 3a + 2b - c = 0 \\ 4a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 5b - 3c = 0 \\ 5b - 7c = 0 \\ 5b - 7c = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 5b - 3c = 0 \\ 4c = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

Ainsi,  $a = b = c = 0$  et la famille est libre.  $\square$

### Solution de l'exercice 5.

1. Comme  $F_1 = \text{Vect}\{(2, -1, -3)\}$ , alors  $((2, -1, -3))$  est une famille génératrice de  $F_1$ .

2. Comme  $F_2 = \text{Vect}\{(2, 0, -3)\}$ , alors  $((2, 0, -3))$  est une famille génératrice de  $F_2$ .

3. Comme  $F_3 = \text{Vect}\{(2, 0, 3), (1, 2, -1)\}$ , alors  $((2, 0, 3), (1, 2, -1))$  est une famille génératrice de  $F_3$ .

4. Comme  $F_4 = \text{Vect}\{(2, 5, 3), (1, 2, -1)\}$ , alors  $((2, 5, 3), (1, 2, -1))$  est une famille génératrice de  $F_4$ .  $\square$

### Solution de l'exercice 6.

1.  $(x, y, z) \in F_1$  si et seulement si  $2x - 3y + z = 0$  si et seulement s'il existe  $\lambda, \mu$  réels tels que

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -2\lambda + 3\mu \end{cases}.$$

Ainsi,  $F_1 = \text{Vect}\{(1, 0, -2), (0, 1, 3)\}$ .

La famille  $((1, 0, -2), (0, 1, 3))$  est une famille génératrice de  $F_1$  et elle est libre, donc c'est une base de  $F_1$ .

**Remarque.**  $\dim F_1 = 2$ , donc  $F_1$  est un plan de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Le système étant déjà échelonné,

$$(x, y, z) \in F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

Ainsi,  $F_2 = \text{Vect}\{(1, -1, -3)\}$ . Comme  $(1, -1, -3)$  est non nul, alors la famille  $((1, -1, -3))$  est une famille libre de  $F_2$ . De plus, c'est une famille génératrice de  $F_2$ , donc c'est une base de  $F_2$ .

**Remarque.**  $\dim F_2 = 1$  donc  $F_2$  est une droite de  $\mathbb{R}^3$ .

3. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss,

$$(x, y, z, t) \in F_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 5x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 5y + 3z = 0 \\ 10y + 6z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 5y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

Ainsi,  $F_3 = \text{Vect}\{(2, -3, 5)\}$ . Comme  $((2, -3, 5))$  est une famille génératrice de  $F_3$  composée d'un seul vecteur non nul, alors c'est une base de  $F_3$ .

**Remarque.** Comme  $\dim F_3 = 1$ , alors  $F_3$  est une droite de  $\mathbb{R}^3$ .

4. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss,

$$(x, y, z, t) \in F_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ x + y - t = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ y + 3z + 2t = 0 \\ y + 4z + 2t = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ y + 3z + 2t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3} \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ y + 3z + 2t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 0 \\ t = \lambda \end{cases}$$

Ainsi,  $F_4 = \text{Vect}\{(3, -2, 0, 1)\}$ . Comme  $((3, -2, 0, 1))$  est une famille génératrice de  $F_4$  composée d'un seul vecteur non nul, alors c'est une base de  $F_4$ .

**Remarque.** Comme  $\dim F_4 = 1$ , alors  $F_4$  est une droite de  $\mathbb{R}^4$ .  $\square$

### Solution de l'exercice 7.

1.  $(x, y, z) \in F_1$  si et seulement s'il existe  $\lambda, \mu$  réels tels que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 2) + \mu(1, 0, 1)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \lambda = y \\ 2\lambda + \mu = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu + \lambda = x \\ \lambda = y \\ \lambda = z - x \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} \mu + \lambda = x \\ \lambda = y \\ 0 = z - x - y \end{cases}$$

Ainsi, le système possède une solution si et seulement si  $z - x - y = 0$ . Une équation cartésienne de  $F_1$  est donc  $x + y - z = 0$ .

2.  $(x, y) \in F_2$  si et seulement s'il existe  $\lambda, \mu$  réels tels que

$$(x, y) = \lambda(1, 2) + \mu(4, 6)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda + 4\mu = x \\ 2\lambda + 6\mu = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 4\mu = x \\ -2\mu = y - 2x \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}$$

Ainsi, le système possède toujours une solution et  $F_2 = \mathbb{R}^2$ .

3.  $(x, y, z) \in F_3$  si et seulement s'il existe  $\lambda, \mu$  réels tels que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 3, 1)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 3\mu = y \\ \lambda + \mu = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 3\mu = y \\ \mu = x - z \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_1 - L_3} \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 3\mu = y \\ 0 = 3x - 3z - y \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2}$$

Ainsi, le système possède une solution si et seulement si  $3x - 3z - y = 0$ .

Une équation cartésienne de  $F_3$  est donc  $3x - y - 3z = 0$ .

4.  $(x, y, z) \in F_4$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1)$$

si et seulement si le système suivant possède une solution :

$$\begin{cases} \lambda = x \\ \lambda = y \\ \lambda = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x \\ 0 = x - y \\ 0 = x - z \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{cases} \lambda = x \\ 0 = x - y \\ 0 = x - z \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_1 - L_3}$$

Ainsi, le système possède une solution si et seulement si  $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

et une équation cartésienne de  $F_4$  est donc  $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ .  $\square$

**Solution de l'exercice 8.**

**1.** Comme nous devons déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base  $\mathcal{B}_1$ , montrons que  $\mathcal{B}_1$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  en montrant que tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$  se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{B}_1$ .

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et  $a, b, c$  des réels tels que

$$(x, y, z) = a(-1, 1, 1) + b(1, -1, 1) + c(1, 1, -1).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x &= -a + b + c \\ y &= a - b + c \\ z &= a + b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b + c &= x \\ 2c &= x + y \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2b &= x + z \quad L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{y+z}{2} \\ b &= \frac{x+z}{2} \\ c &= \frac{x+y}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$  se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_1$  est bien une base de  $\mathbb{R}^3$ .

De plus,

$$(x, y, z) = \frac{y+z}{2}(-1, 1, 1) + \frac{x+z}{2}(1, -1, 1) + \frac{x+y}{2}(1, 1, -1)$$

soit ici

$$(8, 4, 2) = 3(-1, 1, 1) + 5(1, -1, 1) + 6(1, 1, -1).$$

Les coordonnées de  $(8, 4, 2)$  dans la base  $\mathcal{B}_1$  sont donc  $(3, 5, 6)$ .

**2.** Comme nous devons déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base  $\mathcal{B}_2$ , montrons que  $\mathcal{B}_2$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  en montrant que tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$  se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{B}_2$ .

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et  $a, b, c$  des réels tels que

$$(x, y, z) = a(-1, -1, 1) + b(1, -1, 1) + c(2, 2, -1).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x &= -a + b + 2c \\ y &= -a - b + 2c \\ z &= a + b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b + 2c &= x \\ 2b &= x - y \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 2b + c &= x + z \quad L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2c + b &= x \\ c + 2b &= x + z \quad L_3 \leftarrow L_2 \\ 2b &= x - y \quad L_2 \leftarrow L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{-x+3y+4z}{2} \\ b &= \frac{x-y}{2} \\ c &= y+z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$  se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_2$  est bien une base de  $\mathbb{R}^3$ .

De plus,

$$(x, y, z) = \frac{-x+3y+4z}{2}(-1, -1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1, 1) + (y+z)(2, 2, -1)$$

soit ici

$$(8, 4, 2) = 6(-1, -1, 1) + 2(1, -1, 1) + 6(2, 2, -1).$$

Les coordonnées de  $(8, 4, 2)$  dans la base  $\mathcal{B}_2$  sont donc  $(6, 2, 6)$ .

**3.** Comme  $F = \text{Vect } \mathcal{B}$ , alors  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $F$ . Montrons que  $\mathcal{B}$  est une famille libre. Soit  $a, b$  réels tels que

$$a(-1, -1, 1) + b(2, 2, -1) = (0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} -a + 2b &= 0 \\ -a + 2b &= 0 \\ a - b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b &= 0 \\ 0 &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$$

Ainsi,  $a = b = 0$  et  $\mathcal{B}$  est bien une famille libre.

Finalement,  $\mathcal{B}$  est bien une base de  $F$ .

**Remarque.** On aurait pu montrer la liberté en utilisant la non colinéarité des deux vecteurs. De plus, on a montré que  $\dim F = 2$ , donc que  $F$  est un plan.

Soit  $\lambda, \mu$  des réels tels que

$$(3, 3, -1) = \lambda(-1, -1, 1) + \mu(2, 2, -1).$$

Alors,

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = 3 \\ -\lambda + 2\mu = 3 \\ \lambda - \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\mu = 3 \\ 0 = 0 \\ \mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$(3, 3, -1) = (-1, -1, 1) + 2(2, 2, -1)$$

et les coordonnées de  $(3, 3, -1)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $(1, 2)$ .  $\square$

### III - Questions plus théoriques

#### Solution de l'exercice 9.

1. D'une part,  $F \cap G \subset \mathbb{R}^n$ .

Comme  $\vec{0}_n \in F$  et  $\vec{0}_n \in G$ , alors  $\vec{0}_n \in F \cap G$ .

Soit  $u, v \in F \cap G$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

\* Comme  $u, v \in F$  et  $F$  est un espace vectoriel, alors  $\lambda u + v \in F$ .

\* Comme  $u, v \in G$  et  $G$  est un espace vectoriel, alors  $\lambda u + v \in G$ .

Ainsi,  $\lambda u + v \in F \cap G$ .

Finalement,  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

2. Comme  $\vec{0}_n \in F$  et  $\vec{0}_n \in G$ , alors

$$\vec{0}_n + \vec{0}_n = \vec{0}_n \in F + G.$$

Soit  $u, v \in F + G$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

\* Comme  $u \in F + G$ , il existe  $f_1 \in F$  et  $g_1 \in G$  tels que  $u = f_1 + g_1$ .

\* Comme  $v \in F + G$ , il existe  $f_2 \in F$  et  $g_2 \in G$  tels que  $v = f_2 + g_2$ .

Comme  $F$  est un espace vectoriel, alors  $\lambda f_1 + f_2 \in F$ .

Comme  $G$  est un espace vectoriel, alors  $\lambda g_1 + g_2 \in G$ .

Finalement,

$$\lambda u + v = \underbrace{(\lambda f_1 + f_2)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda g_1 + g_2)}_{\in G} \in F + G.$$

Ainsi,  $F + G$  est bien un espace vectoriel.

3. D'une part,  $D_1 = \text{Vect} \{(1, 0)\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

D'autre part,  $D_2 = \text{Vect} \{(0, 1)\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

Ainsi,

\*  $(1, 0) \in D_1$  donc  $(1, 0) \in D_1 \cup D_2$ ,

\*  $(0, 1) \in D_2$  donc  $(0, 1) \in D_1 \cup D_2$ .

Cependant,  $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$  n'appartient ni à  $D_1$ , ni à  $D_2$ . Ainsi,  $(1, 1) \notin D_1 \cup D_2$ .

Ainsi,  $D_1 \cup D_2$  n'est pas un espace vectoriel.  $\square$

**Solution de l'exercice 10.** L'équation cartésienne de  $F$  est

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système échelonné de rang 1, donc il possède  $n - 1$  variables libres. Ainsi,  $\dim F = n - 1$  et une base de  $F$  est

$$((1, -1, 0, \dots, 0), (1, 0, -1, 0, \dots, 0), \dots, (1, 0, \dots, 0, -1)).$$

$\square$

### IV - Calcul matriciel

**Solution de l'exercice 11.** On décompose,

$$A = (a - b)I_3 + bJ.$$

De plus, on remarque que  $J^2 = 3J$ , puis on montre par récurrence que pour tout  $k \geq 1$ ,  $J^k = 3^{k-1}J$ .

Comme  $I_3 J = J I_3 = J$ , les matrices  $(a - b)I_3$  et  $J$  commutent. Ainsi,

d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
 A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((a-b)I_3)^{n-k} (bJ)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} b^k J^k \\
 &= \binom{n}{0} (a-b)^n b^0 J^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} b^k 3^{k-1} J \\
 &= (a-b)^n I_3 + \left( \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (3b)^k \right) J \\
 &= (a-b)^n I_3 + \frac{1}{3} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (3b)^k - \binom{n}{0} (a-b)^n \right) J \\
 &= (a-b)^n I_3 + \frac{(a-b+3b)^n - (a-b)^n}{3} J \\
 &= (a-b)^n I_3 + \frac{(a+2b)^n - (a-b)^n}{3} J.
 \end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 12.** D'après les notations,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 B^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Alors, pour tout  $k \geq 3$ ,

$$B^k = B^{k-3} \times B^3 = 0_3.$$

De plus,  $I_3 B = B I_3 = B$ . Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned}
 A^n &= (B + I_3)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} \\
 &= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + 0_3 \\
 &= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2.
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi les coefficients de  $A^n$  :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & n\beta + \frac{n(n-1)}{2}\alpha\gamma \\ 0 & 1 & n\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que cette formule reste valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$ . □

## V - Matrices & Espaces vectoriels

**Solution de l'exercice 13.**

**1.** Comme  $AI_n = A$  et  $I_n A = A$ , alors  $I_n \in \mathcal{C}(A)$ .

Comme  $A0_n = 0_n$  et  $0_n A = 0_n$ , alors  $0_n \in \mathcal{C}(A)$ .

Comme  $A \times A = A \times A$ , alors  $A \in \mathcal{C}(A)$ .

Plus généralement, tout polynôme en  $A$  appartient à  $\mathcal{C}(A)$ .

**2.** On montre que  $\mathcal{C}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

\* Comme  $0_n A = A0_n$ , alors  $0_n \in \mathcal{C}(A)$ .

\* Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $M, M' \in \mathcal{C}(A)$ . Montrer que  $\lambda M + M' \in \mathcal{C}(A)$ , i.e.  $A(\lambda M + M') = (\lambda M + M')A$ . En effet,

$$\begin{aligned}
 A(\lambda M + M') &= \lambda AM + AM', \text{ par distributivité du produit matriciel} \\
 &= \lambda MA + M'A, \text{ car } M, M' \in \mathcal{C}(A) \\
 &= (\lambda M + M')A.
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{C}(A)$  est un espace vectoriel.



**2<sup>e</sup> méthode.** On pose  $\varphi : M \mapsto AM - MA$ . D'après la distributivité du produit matriciel, l'application  $\varphi$  est une application linéaire. Comme  $\mathcal{C}(A) = \text{Ker } \varphi$ , alors  $\mathcal{C}(A)$  est un espace vectoriel.  $\square$

### Solution de l'exercice 14.

1. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$aI_2 + bA = 0.$$

Alors,

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b & = 0 \\ 4a & = 0 \\ -3a + 2b & = 0 \\ 2a & = 0 \end{cases}$$

Ainsi,  $a = b = 0$  et la famille  $(I_2, A)$  est libre.

**2<sup>e</sup> méthode.** Comme  $A$  et  $I_2$  ne sont pas colinéaires, alors la famille  $(I_2, A)$  est libre.

2. D'après la définition du produit matriciel,

$$A^2 = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}.$$

Comme  $12 = 3 \times 4$  et  $-9 = 3 \times (-3)$ , on étudie

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^2 = 3A - 14I_2.$$

3. Comme  $A^2 = 3A - 14I_2$ , alors  $\text{Vect} \{I_2, A, A^2\} = \text{Vect} \{I_2, A\}$ .

Ainsi,  $(I_2, A)$  est une famille génératrice de  $F$ .

D'après la question 1.,  $(I_2, A)$  est une famille libre.

Ainsi,  $(I_2, A)$  est une base de  $F$  et  $\dim F = 2$ .  $\square$

### Solution de l'exercice 15.

1. D'après la définition du produit matriciel,  $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

Soit  $a, b, c$  des réels tels que  $aI_2 + bA + cA^2 = 0_3$ . Alors,

$$\begin{pmatrix} a + 3b + 12c & b + 5c & 2b + 7c \\ -b - c & a & b - 2c \\ 2b + 5c & b + 2c & a + 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b + 12c & = 0 \\ b + 5c & = 0 \\ 2b + 7c & = 0 \\ -b - c & = 0 \\ a & = 0 \\ b - 2c & = 0 \\ 2b + 5c & = 0 \\ b + 2c & = 0 \\ a + 5c & = 0 \end{cases}$$

Ainsi,  $a = 0$  puis la dernière ligne fournit  $c = 0$  puis  $b = 0$ . La famille  $(I_3, A, A^2)$  est donc libre.

Comme  $(I_3, A, A^2)$  est une famille génératrice de  $F$ , alors  $\dim F = 3$ .

2. D'après la définition du produit matriciel,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 45 & 19 & 29 \\ -7 & -3 & -2 \\ 23 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^3 - 3A^2 + 4A - I_3 = 0_3.$$

3. En utilisant la relation précédente,

$$A^3 - 3A^2 + 4A - I_3 = 0$$

$$A^3 - 3A^2 + 4A = I_3$$

$$A(A^2 - 3A + 4I_3) = I_3.$$

Ainsi,  $A$  est inversible et  $A^{-1} = A^2 - 3A + 4I_3$ .

4. On raisonne par récurrence.

**Initialisation.** Pour  $n = 0$ ,  $A^0 = 1I_3 + 0A + 0A^2 \in F$ .

**Hérédité.** Soit  $n \geq 3$ . On suppose que  $A^{n-1} \in F$ . Alors, il existe  $a, b, c$  tels que

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= aI_3 + bA + cA^2 \\ A \times A^{n-1} &= A(aI_3 + bA + cA^2) \\ A^n &= aA + bA^2 + cA^3 \\ &= aA + bA^2 + c(3A^2 - 4A + 3I_3) \\ &= (3c + b)A^2 + (a - 4)A + 3cI_3 \\ &\in F. \end{aligned}$$

5. D'après la question précédente,

$$\text{Vect} \{A^k, k \in \mathbb{N}\} = \text{Vect} \{I_3, A, A^2\} = F.$$

Ainsi,

$$\dim \text{Vect} \{A^k, k \in \mathbb{N}\} = \dim F = 3.$$

□

### Solution de l'exercice 16.

1. D'une part,  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et la matrice nulle est une matrice symétrique.

D'autre part, soit  $A, B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors,  $A^T = A$  et  $B^T = B$ . Ainsi, comme la transposée est une application linéaire,

$$(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T = \lambda A + B.$$

La matrice  $\lambda A + B$  est donc symétrique.

Finalement,  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

2. L'ensemble des matrices symétriques de taille 3 est

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

On vérifie très rapidement que  $\mathcal{B}$  est une famille libre. De plus, il s'agit d'une famille génératrice de  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ , donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  et  $\dim \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) = 6$ .

3. On vérifie comme pour la question 1. que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On montre ensuite que

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect} \{E_{i,j} + E_{j,i}, E_{\ell,\ell}, 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq \ell \leq n\}$$

Comme cette famille est libre et génératrice de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , son nombre d'éléments est égal à la dimension de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Or,

$$\begin{aligned} |\{\ell ; 1 \leq \ell \leq n\}| &= n \\ |\{(i, j) ; 1 \leq i < j \leq n\}| &= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

**Solution de l'exercice 17.** La matrice  $A$  appartient à  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui est un espace vectoriel de dimension  $3^2 = 9$ .  
Comme la famille  $(I_3, A, \dots, A^9)$  est une famille de 10 vecteurs appartenant à un espace vectoriel de dimension 9, alors cette famille est liée.  $\square$