# II - Calcul matriciel

## I - Matrices

### I.1 - Définition

**Définition 1 - Matrices**

Soit $n$, $p$ deux entiers naturels non nuls.

- Une *matrice* de *taille* $(n,p)$ est un tableau de nombres réels constitué de $n$ lignes et de $p$ colonnes.
- Le *coefficient* d'indice $(i,j)$ d'une matrice est le coefficient situé à la $i^{\text{e}}$ ligne et $j^{\text{e}}$ colonne.
- L'ensemble des matrices de réels à $n$ lignes et $p$ colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note généralement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

**Exemple 1 - Matrices**

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

**Définition 2 - Matrices lignes / colonnes**

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Si $n = 1$, alors $A$ est une *matrice ligne* (ou *vecteur ligne*).
- Si $p = 1$, alors $A$ est une *matrice colonne* (ou *vecteur colonne*).

**Exemple 2**

- Les matrices suivantes sont des matrices lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- Les matrices suivantes sont des matrices colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

**Définition 3 - Égalité entre matrices**

Deux matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ sont *égales* si elles ont même taille et si, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et $j \in \{1,\dots,p\}$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.

### I.2 - Opérations

**Définition 4 - Somme, Multiplcation par un réel**

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'*addition* de matrices de mêmes tailles est obtenue en additionnant les éléments de mêmes indices. Ainsi, la matrice $A+B$ est la matrice de taille $(n,p)$ et de coefficients $(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ définis par

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

- La *multiplication* d'une matrice par un réel est obtenue en multipliant chacun des coefficients de la matrice par ce

réel. Ainsi, la matrice $\alpha A$ est la matrice de taille $(n,p)$ et de coefficients $(d_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ définis par

$$d_{i,j} = \alpha a_{i,j}.$$

**Exemple 3**

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Alors,

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 3 & -1 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Définition 5 - Matrice nulle**

La matrice de taille $(n,p)$ dont tous les coefficients sont nuls est la *matrice* nulle. Elle est notée $0_{n,p}$.

**Proposition 1 - Propiétés de l'addition et de la multiplication par un réel**

Soit $A$, $B$, $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$.

- *Commutativité.* $A+B = B+A$.
- *Associativité.* $A+(B+C) = (A+B)+C$.
- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $A + (-1)A = 0_{n,p}$.

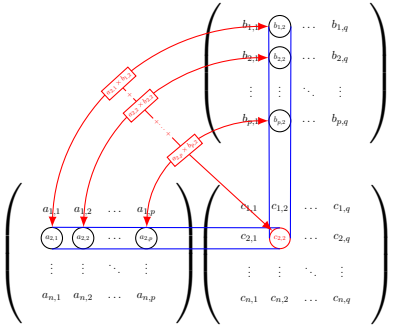
**Définition 6 - Produit de matrices de tailles compatibles**

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. La matrice $C = A \times B$ est la matrice de taille $(n,q)$ dont le coefficient d'indice $(i,j)$ est donné par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

**Représentation du produit matriciel**

Pour effectuer un produit matriciel on représente souvent les matrices sur deux étages :



**Exemple 4 - Calculs de produits**

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5y+z \\ 3x-2y+z \end{pmatrix}$.
- On considère trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défi-

nies par $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= z_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

En notant $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n.$$

**Proposition 2 - Propriétés du produit matriciel**

Soit $A$, $B$, $C$ trois matrices dont les tailles sont compatibles et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *Associativité.* $(AB)C = A(BC)$.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- *Distributivité.*
  $(A+B)C = AC + BC$ et $A(B+C) = AB + AC$.

# II - Matrices carrées

**Définition 7 - Matrices carrées**

Une *matrice carrée* $M$ d'ordre $p$ est une matrice dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes est égal à $p$. L'ensemble des matrices carrées d'ordre $p$ est noté $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

**Exemple 5 - Matrices carrées**

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

**Définition 8 - Triangulaires, Diagonales, Identité**

- Une matrice est *triangulaire supérieure* si les coefficients en dessous de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *triangulaire inférieure* si les coefficients au dessus de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *diagonale* si les coefficients en dehors de sa diagonale sont nuls.
- La matrice *identité* est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. La matrice identité d'ordre $p$ est notée $I_p$.
- La matrice *nulle* est la matrice dont tous les éléments valent 0. La matrice nulle d'ordre $p$ est notée $0_p$.

**Exemple 6**

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale.
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3.

# III - Opérations sur les matrices carrées

**Proposition 3**

Si $A$ et $B$ sont des matrices carrées d'ordre $p$, alors
- $A+B$ et $AB$ sont bien définies et appartiennent à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- $AI_p = I_pA = A$.
- $A0_p = 0_pA = 0_p$.

**Exemple 7**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

- $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 10 & 10 & -2 \end{pmatrix}$.
- $AB = \begin{pmatrix} 2 & 60 & 16 \\ 13 & 20 & -1 \\ -13 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
- $BA = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 5 \\ -5 & -19 & -3 \\ 0 & 87 & 44 \end{pmatrix}$.

# IV - Calculs de puissances

**Exemple 8 - Pourquoi calculer des puissances de matrices ?**

On considère les suites définies par $x_0 = y_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= x_n - y_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Alors,

$$\begin{aligned} U_1 &= A \times U_0 \\ U_2 &= A \times U_1 \\ &= \underbrace{A \times A}_{\text{2 facteurs}} \times U_0 \\ U_3 &= A \times U_2 \\ &= A \times A \times U_1 \\ &= \underbrace{A \times A \times A}_{\text{3 facteurs}} U_0 \\ \vdots &= \vdots \\ U_n &= \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}} U_0 \end{aligned}$$

**Définition 9 - Puissance d'une matrice**

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $p$ et $n$ un entier naturel. Alors,
- $A^0 = I_p$.
- $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$.

**Exemple 9**

- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors,
  - ⋆ $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  - ⋆ $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
  - ⋆ $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
  - ⋆ $A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors,
  - ⋆ $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  - ⋆ $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  - ⋆ $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  - ⋆ $A^3 = A \times A^2 = A \times I_2 = A$.

## IV.1 - Matrices diagonales

**Proposition 4 - Puissance d'une matrice diagonale**

Soit $D$ une matrice diagonale d'ordre $p$ et $n$ un entier naturel. La matrice $D^n$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de $D$ élevés à la puissance $n$.

**Exemple 10 - Puissances & Diagonales**

Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.
Cette propriété se prouve par récurrence.

**Initialisation.** Pour $n = 0$, on a bien $D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie à l'ordre $n$, c'est-à-dire $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D^n \times D \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
**Conclusion.** Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n$.

## IV.2 - Formule du binôme de Newton

**Binôme de Newton**

Les coefficients binomiaux s'obtiennent rapidement à l'aide du triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

Ce tableau correspond aux coefficients binomiaux suivants :

$$\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}$$

**Proposition 5 - Coefficients binomiaux**

Soit $n$ un entier naturel non nul et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors,

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$,
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$,
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

**Théorème 1 - Formule du binôme de Newton**

Soit $a$ et $b$ deux réels et $n$ un entier naturel. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Exemple 11**

- $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

**Définition 10 - Matrices qui commutent**

Soit $A$ et $B$ deux matrices d'ordre $p$. Les matrices $A$ et $B$ *commutent* si $AB = BA$.

**Exemple 12 - Commutativité**

- $I_2$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ commutent.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ ne commutent pas.

**Théorème 2 - Formule du binôme de Newton**

Soient $A$ et $B$ deux matrices d'ordre $p$ qui commutent. Alors, pour tout $n$ entier naturel,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

**Exemple 13 - Application de la formule du binôme**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- D'une part, $A = I_2 + N$.
- D'autre part, $I_2 N = N I_2 = N$. Ainsi, $I_2$ et $N$ commutent.
- On remarque ensuite que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_2^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k, \text{ car } I_2^{n-k} = I_2 \\
&= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + 0_2 + \cdots + 0_2 \\
&= I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$