

T.D. VIII - Intégration

Exercice 1. (Une deuxième équation fonctionnelle) On note \mathcal{E} l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

Dans toute la suite, f désigne une fonction de \mathcal{E} .

1. a) Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.

b) Démontrer que la fonction f est impaire.

2. On suppose que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer que f est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle

$$xf'(x) - f(x) = kx,$$

où k est une constante réelle dépendant de f que l'on précisera.

b) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle précédente.

c) En déduire, en fonction de la constante k , la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

e) En supposant que $f'(1) = 1$, donner l'allure du graphe de f_1 dans un repère orthonormal direct.

3. On note F la primitive de f qui s'annule en 0.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(xy) = x^2 F(y) + \frac{xy^2}{2} f(x).$$

b) En déduire que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

4. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} .

I - Primitives & Intégrales

Exercice 2. (✳) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}$. 2. $\frac{8x^2}{(x^3+2)^3}$. 3. $x\sqrt{1-2x^2}$. 4. $(e^x + 1)^3 e^x$. | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. 6. $\frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}$. 7. $\frac{\ln(x)}{x}$. 8. $\frac{\ln^{27}(x)}{x}$. |
|---|--|

Exercice 3. (Changements de variables, ✳) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{1}{e^x+1}$.
 $\varphi : u \mapsto \ln(u), \frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}$. 2. $\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$.
 $\varphi : u \mapsto u^2$. | <ol style="list-style-type: none"> 3. $\frac{1}{2t \ln(t)+t}$.
 $\varphi : u \mapsto e^u$. 4. $\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}$.
 $\varphi : u \mapsto \sqrt{u-2}$. |
|---|--|

Exercice 4. (Intégrations par parties, ✳) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\ln(x)$. 2. $x e^x$. 3. $x^2 e^x$. | <ol style="list-style-type: none"> 4. $x^2 \ln(x)$. 5. $\sqrt{1+x} \ln(x)$.
 $\varphi : u \mapsto \sqrt{u-2}$. |
|---|---|

Exercice 5.

1. Montrer qu'il existe a, b réels tels que pour tout $x \in [0, 1]$,
 $\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$.

Exercice 6. (✳) Montrer que $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} \leq 1$.

Exercice 7. (Loi exponentielle, ✳) Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 2e^{-2x}$ sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction f .

2. Déterminer les intégrales suivantes :

Exercice 11. Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 12. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

1. a) Calculer J_1 .

b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire que (J_n) converge et déterminer sa limite.

2. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \geq 1, I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

b) Montrer que la suite (I_n) converge.

c) Montrer que la suite (nI_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 13. (Fonction bêta) Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx.$$

1. Déterminer une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.

2. Exprimer la valeur de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

III - Calculs d'intégrales généralisées

Exercice 14. (✱) Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 x \ln^2(x) dx.$

2. $\int_0^1 \ln^2(t) dt.$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$

4. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt.$

a) $\int_{-2}^0 f(x) dx.$

b) $\int_{-1}^{3/2} f(x) dx.$

3. Si $x \geq 0$, déterminer $\int_0^x f(t) dt$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt.$

Exercice 8. (→)

1. Montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt.$$

2. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln(t) dt + \ln(n).$$

3. En utilisant une primitive de \ln , en déduire la limite de la suite de terme général $\frac{\ln(n!)}{n \ln(n)}.$

Exercice 9. (→) Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$

1. En utilisant la concavité du logarithme, montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, \forall t \in]x^2, 1[, \frac{2 \ln(x)}{x^2 - 1} (t - 1) \leq \ln(t) \leq t - 1.$$

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.

3. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1[$ et calculer sa dérivée.

II - Suites d'intégrales

Exercice 10. (✳) Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$

1. Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.

2. Calculer $I_n + I_{n+1}.$

3. En déduire la limite de la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}.$

5. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}.$
 $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$

6. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt.$

7. $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^2}.$

Exercice 15. (Loi uniforme, ✳) Soit $a < b$ et f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Déterminer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$

Exercice 16. (Loi exponentielle, ✳) Soit $\lambda > 0$ et f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Déterminer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$

Exercice 17. (✳) Montrer que les intégrales suivantes convergent :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$

$\forall t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}.$

2. $\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt.$

$\forall t \geq a, \sqrt{t} e^{-t} \leq 1/t^2.$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^4} dt.$

4. $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^4} dt.$

5. $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}-1}{t^2-1} dt.$

6. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t} dt.$

3. En déduire, pour tout n entier naturel, la valeur de $\Gamma(n+1)$.

Exercice 20. On pose $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.

1. Existence. On pose $f : x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$.

a) Montrer que f admet un prolongement continu en 0.

b) Montrer que f admet un prolongement continu en 1.

c) En déduire que l'intégrale I converge.

2. On pose $J_{\varepsilon, M} = \int_{\varepsilon}^M \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.

a) Effectuer le changement de variable $\varphi : u \mapsto e^{-u}$ dans $J_{\varepsilon, M}$.

b) En utilisant la linéarité de l'intégrale, calculer $J_{\varepsilon, M}$.

c) En faisant tendre successivement M vers $+\infty$, puis ε vers 0, en déduire la valeur de I .

V - Calculs d'équivalents

Exercice 21. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer un équivalent en $+\infty$ et déterminer si l'intégrale de la fonction sur $[1, +\infty[$ converge.

- | | |
|--|--|
| <p>1. $f_1(x) = \frac{(x^5+3x+1)e^{-x}}{12x+3}$.</p> <p>2. $f_2(x) = \frac{(x+25)\ln(x)}{e^x + e^{-x}}$.</p> <p>3. $f_3(x) = \frac{\ln(x+1)e^x}{2x+5}$.</p> <p>4. $f_4(x) = \frac{(3x+12)\ln(1+\frac{1}{x})}{5x^4+2}$.</p> <p>5. $f_5(x) = \frac{x}{e^x + e^{-x}}$.</p> | <p>6. $f_6(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}$.</p> <p>7. $f_7(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2(e^x - e^{-x})}$.</p> <p>8. $f_8(x) = \frac{x^4(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}$.</p> <p>9. $f_9(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x - e^{-x}}$.</p> <p>10. $f_{10}(x) = \frac{t^3 e^{-2\sqrt{t}}}{1+t^3+t^4}$.</p> |
|--|--|

Exercice 22. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer un équivalent en 0 et déterminer si l'intégrale de la fonction sur $]0, 1]$ converge.

- | | |
|---|--|
| <p>1. $f_1(x) = \frac{(x^5+3x+1)e^{-x}}{12x+3}$.</p> | <p>2. $f_2(x) = \frac{(x+25)\ln(x)}{e^x + e^{-x}}$.</p> |
|---|--|

IV - Intégrations par parties - Changement de variable

Exercice 18. (Expression intégrale de la factorielle, ⚙️) Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

1. Calculer I_0 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$\forall t \geq a, 0 \leq t^n e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}.$$

- b) En déduire que l'intégrale I_n converge.
3. En utilisant une intégration par parties sur le segment $[0, M]$, puis en faisant tendre M vers $+\infty$, montrer que $I_{n+1} = nI_n$.
4. En déduire, pour tout n entier naturel, la valeur de I_n .

Exercice 19. (Fonction Gamma d'Euler, ⚙️) Pour tout réel x strictement positif, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Soit $x > 0$.
 - a) Pour tout $t \in]0, 1]$, rappeler la définition de t^{x-1} .
 - b) Déterminer un équivalent, lorsque $t \rightarrow 0$ de $t^{x-1} e^{-t}$.
 - c) En déduire que $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.
 - d) Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$\forall t \geq a, t^{x-1} e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

- e) En déduire que $\int_a^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.
 - f) En déduire que la fonction Γ est bien définie.
2. En utilisant une intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, M]$ puis en faisant tendre ε vers 0 et M vers $+\infty$, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$3. f_3(x) = \frac{\ln(x+1)e^x}{2x+5}.$$

$$4. f_4(x) = \frac{(3x+12)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{5x^4+2}.$$

$$5. f_5(x) = \frac{x}{e^x + e^{-x}}.$$

$$6. f_6(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}.$$

$$7. f_7(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2(e^x - e^{-x})}.$$

$$8. f_8(x) = \frac{x^4(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}.$$

$$9. f_9(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Exercice 23. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer un équivalent en 1 et déterminer si l'intégrale de la fonction sur $]1, 2]$ converge.

$$1. f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$2. f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$3. f_3(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$4. f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x-1}}.$$

$$5. f_5(x) = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x^2-1}}.$$