IV - Hyperplans

Soit E un espace vectoriel de dimension n supérieure ou égale à 2. On pourra remplacer E par $\mathbb{R}^n$ dans tout le document. Les hyperplans sont des espaces vectoriels particuliers qui ont de nombreuses propriétés et font donc l'objet d'exercices...

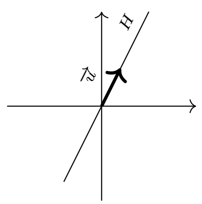
I - Définitions & Géométrie

Définition 1 - Hyperplan

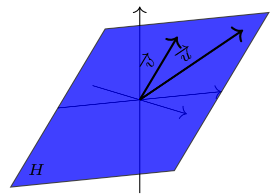
Un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Petites dimensions

- Définir les hyperplans en dimension 1 n'a pas beaucoup d'intérêt car l'unique espace vectoriel de dimension 0 est $\{0_E\}$.
- Lorsque $n = 2$. Les hyperplans sont les sous-espaces vectoriels de dimension 1. Ainsi, H est un sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul tel que $H = \text{Vect}\{\overrightarrow{u}\}$. Les hyperplans sont donc les *droites vectorielles*.



- Lorsque $n = 3$. Les hyperplans sont les sous-espaces vectoriels de dimension 2. Ainsi, H est un sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il existe une famille libre $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ telle que $H = \text{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$. Les hyperplans sont donc les *plans vectoriels*.



II - Formes linéaires & Hyperplans

Définition 2 - Forme linéaire

Une *forme linéaire* est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

Exemple 1

- L'application $f : x \mapsto 0$ est une forme linéaire sur E. C'est la forme linéaire nulle.
- Si $E = \mathbb{R}^2$, la fonction $f : (x, y) \mapsto 2x + 3y$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.
- Si $E = \mathbb{R}^3$, la fonction $f : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 4z$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.
- Si $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la fonction $f : A \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appelée *trace*.
- Si E est l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$, alors $f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ est une forme linéaire. Ici, la dimension de E est infinie.

Proposition 1 - Forme linéaire → Hyperplan

Si f est une forme linéaire non nulle, alors $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de E.

Remarque 1

Comme f est une forme linéaire, $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Or, les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.
Si $\operatorname{Im} f = \{0\}$, alors f est la forme linéaire nulle, ce qui est impossible.
Ainsi, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ et $\operatorname{Rg}(f) = \dim \mathbb{R} = 1$.
D'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{Rg} f = n - 1$$

donc $\operatorname{Ker} f$ est bien un hyperplan de E.

Exemple 2

Reprenons les exemples précédents.

- ∗ Si $E = \mathbb{R}^2$ et $f : (x, y) \mapsto 2x + 3y$. Alors,

$$\operatorname{Ker} f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x + 3y = 0\right\}$$

est un hyperplan de E. Il s'agit de la droite engendrée par le vecteur $(-3, 2)$.

- ∗ Si $E = \mathbb{R}^3$ et $f : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 4z$. Alors,

$$\operatorname{Ker} f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - 2y + 4z = 0\right\}$$

est un hyperplan de E. Il s'agit du plan engendré par la famille de vecteurs $((2, 1, 0), (0, 2, 1))$.

- ∗ Si $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $f : A \mapsto a_{1,1} + a_{2,2}$. Alors,

$$\operatorname{Ker} f = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ a_{1,1} + a_{2,2} = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc un sous-espace vectoriel de dimension $2^2 - 1 = 3$.

Comme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont des éléments de $\operatorname{Ker} f$ et qu'ils forment une famille libre (le vérifier !), alors

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

- ∗ Si $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $f : A \mapsto a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$. Alors,

$$\operatorname{Ker} f = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc un sous-espace vectoriel de dimension $3^2 - 1 = 8$.
Les matrices suivantes sont des éléments de $\operatorname{Ker} f$ qui forment une famille libre (le vérifier !) et donc une base de $\operatorname{Ker} f$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- ∗ Si $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : A \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Alors,

$$\operatorname{Ker} f = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$. En notant $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les matrices élémentaires, on montre que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{E_{i,j},\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\ E_{1,1} - E_{k,k},\ 2 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Proposition 2 - Hyperplan → Forme linéaire

Soit H un hyperplan de E. Il existe une forme linéaire non nulle f telle que $H = \operatorname{Ker} f$.

Remarque 2

Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. On définit l'application linéaire

$$f : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto x_n.$$

Alors, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $x_n = 0$ si et seulement si $x \in H$.
Ainsi, $H = \operatorname{Ker} f$.

Exemple 3 - Hyperplan → Forme linéaire

- Soit D un hyperplan de $\mathbb{R}^2$.
  - ⋆ Comme $\dim D = 1$, il existe $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ tel que $D = \operatorname{Vect}\{(x_0, y_0)\}$.
    L'écriture $D = \{\lambda(x_0, y_0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une description paramétrique de D.
  - ⋆ Comme D est une droite, il existe $(a,b) \neq (0,0)$ tel que $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ ax + by = 0\right\}$. Ainsi, en posant $f : (x,y) \mapsto ax + by$, alors $D = \operatorname{Ker} f$.
    L'équation $ax + by = 0$ est une équation cartésienne de D.

  On peut passer d'une description paramétrique à une équation cartésienne en cherchant les conditions pour qu'un système linéaire admette une solution :

$$(x,y) \in D \ \Leftrightarrow\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\ ;\ (x,y) = \lambda(x_0, y_0)$$
$$\Leftrightarrow\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} \lambda x_0 &= x \\ \lambda y_0 &= y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} \lambda x_0 &= x \\ 0 &= x_0 y - y_0 x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\ x_0 y - y_0 x = 0.$$

  Ainsi, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ x_0 y - y_0 x = 0\right\}$ et $x_0 y - y_0 x = 0$ est une équation cartésienne de D.
  En posant $f : (x,y) \mapsto x_0 y - y_0 x$, alors $D = \operatorname{Ker} f$.
- Soit P un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
  - ⋆ Comme $\dim P = 2$, il existe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une famille libre telle que $P = \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$.
    L'écriture $P = \left\{\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est une description paramétrique de P.
  - ⋆ Comme P est un plan, il existe $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tel que $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ ax + by + cz = 0\right\}$. Ainsi, en posant $f : (x,y,z) \mapsto ax + by + cz$, alors $P = \operatorname{Ker} f$.
    L'équation $ax+by+cz = 0$ est une équation cartésienne de P.

  On peut effectuer le même raisonnement que précédemment pour passer d'une description paramétrique à une équation cartésienne.