XI - Fonctions de plusieurs variables

- p désigne un entier naturel non nul.
- Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ désigne la norme de x. Si $n = 1$, $\|x\| = |x|$ est la valeur absolue de x. Si $n = 2$, on retrouve la norme usuelle.
- U désigne une partie de $\mathbb{R}^n$ pour laquelle, en tout point x_0, tous les points suffisamment proches de x_0 appartiennent à U. Formellement,

$$\forall\, x_0 \in U, \exists\, \varepsilon > 0\ ;\ \forall\, h \in \mathbb{R}^n,\ \|h\| \leqslant \varepsilon \ \Rightarrow\ x_0 + h \in U.$$

  Cela permet d'approcher les points de x_0 dans toutes les directions et définir les notions de continuité et de dérivabilité.
- Lorsque $n = 2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on peut représenter graphiquement f dans un repère à 3 dimensions : les arguments de f sont les abscisses et ordonnées, la valeur $f(x, y)$ est représentée selon la composante de hauteur. On rencontre de telles surfaces par exemple pour représenter le relief d'un massif montagneux.

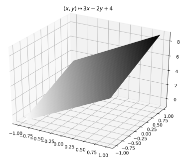
Définition 1 - Continuité (H.P.)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. La fonction f est *continue* en a si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'image par f de tout point suffisamment proche de a est à distance au plus ε de $f(a)$. Formellement,

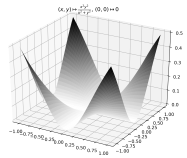
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0\ ;\ \forall\, x \in U,\ \|x - a\| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemple 1 - Continuité des fonctions

- Lorsque $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la notion de continuité coïncide avec celle vue sur $\mathbb{R}$.
- Si f est une fonction constante, alors $f(x) = f(a)$ pour tout $(x, a) \in U^2$ donc l'application f est continue.
- La multiplication par un réel, la somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues est une fonction continue. Ainsi, les fonctions classiques sont continues.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.



- Lorsque f est définie par morceaux, on tente de majorer $|f(x) - f(a)|$ par une constante qui tend vers 0 lorsque x tend vers a. Par exemple, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$ et $f(0, 0) = 0$. Une représentation graphique de cette fonction est la suivante :



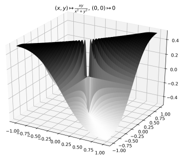
  - ⋆ D'après les propriétés des fonctions continues, comme $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
  - ⋆ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{x^2 + y^2} \\ &\leqslant \frac{\|(x, y)\|^2}{4} = \frac{\|(x, y) - (0, 0)\|^2}{4}. \end{aligned}$$

  Ainsi, si (x, y) est suffisamment proche de $(0, 0)$, alors $f(x, y)$ est suffisamment proche de 0. La fonction f est donc continue en $(0, 0)$.

Finalement, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- À titre d'exemple, la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, $f(x,x) = \frac{1}{2}$ donc même si (x,x) est très proche de $(0,0)$ son image sera éloignée de $f(0,0) = 0$. Sa représentation graphique est la suivante :



I - Applications partielles

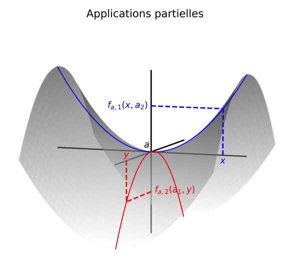
I.1 - Définitions

Définition 2 - Application partielle

Pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ et $i \in [\![1, n]\!]$, l'*application partielle* en a selon la i-ème composante est définie par $f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. De plus, il existe un intervalle ouvert non trivial $U_{a,i}$ contenant a_i tel que $f_{a,i}$ soit définie sur $U_{a,i}$.

Application partielle

Lorsque $n = 2$, la courbe représentative de la première (resp. seconde) application partielle est la courbe obtenue en effectuant la section de la surface avec un plan passant par l'axe des abscisses (resp. ordonnées) :



Exemple 2 - Applications partielles

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et elle possède une seule application partielle (elle-même).
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 3x + 2y + 4$. Au point $a = (2,5)$, la fonction f possède deux applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto 3x + 14 \\ f_{a,2} &: y \mapsto 2y + 10 \end{aligned}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. Au point $a = (4,3)$, la fonction f possède deux applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto f(x,3) = x^2 + 9 - 6x, \\ f_{a,2} &: y \mapsto f(4,y) = 16 + y^2 - 8y. \end{aligned}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x + 3y\,\mathrm{e}^z$. Au point $a = (0,4,1)$, la fonction f possède trois applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto f(x,4,1) = \mathrm{e}^x + 12\,\mathrm{e}, \\ f_{a,2} &: y \mapsto f(0,y,1) = 1 + 3\,\mathrm{e}\,y, \\ f_{a,3} &: z \mapsto f(0,4,z) = 1 + 12\,\mathrm{e}^z. \end{aligned}$$

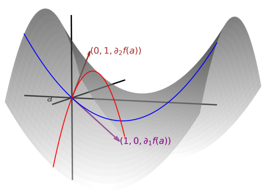
I.2 - Dérivées partielles

Définition 3 - Dérivées partielles

La fonction f admet une *dérivée partielle* en a par rapport à la i-ème variable si l'application partielle $f_{a,i}$ admet une dérivée en a_i. Cette valeur est notée $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Dérivées partielles

Les dérivées partielles sont les dérivées au sens usuel des applications partielles :



Exemple 3 - Calculs de dérivées partielles

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et la notion de dérivée partielle correspond à la notion de dérivée.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x+2y+4$. En tout point (x, y), la fonction f possède deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f \ : x \mapsto 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f \ : y \mapsto 2$$

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. En tout point (x, y), la fonction f possède deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f \ : (x, y) \mapsto 2x - 2y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f \ : (x, y) \mapsto 2y - 2x.$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^x + 3y\,\mathrm{e}^z$. En tout point (x, y), la fonction f possède trois dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f \ : (x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f \ : (x, y, z) \mapsto 3\,\mathrm{e}^z,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \partial_3 f \ : (x, y, z) \mapsto 3y\,\mathrm{e}^z.$$

Définition 4 - Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (H.P.)

Soit f une fonction définie sur U. La fonction f est de *classe* $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles sont définies et continues sur U.

Théorème 1 - Développement limité d'ordre 1

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $a \in U$. Alors, il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x \to (0,\ldots,0)} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in U$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a) + \|h\|\,\varepsilon(h).$$

La fonction f admet un *développement limité* d'ordre 1 en a.

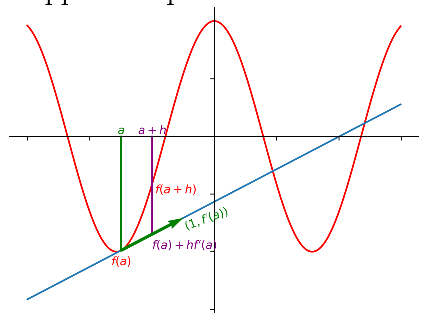
Exemple 4 - Développement limité d'ordre 1

- Ce théorème est hors programme mais permettra ensuite de mieux comprendre la recherche d'extremums.

Lorsque $n=1$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, le théorème s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + |h|\,\varepsilon(h).$$

On retrouve la formule de Taylor-Young à l'ordre 1. La fonction f est approchée par une droite au voisinage de a.



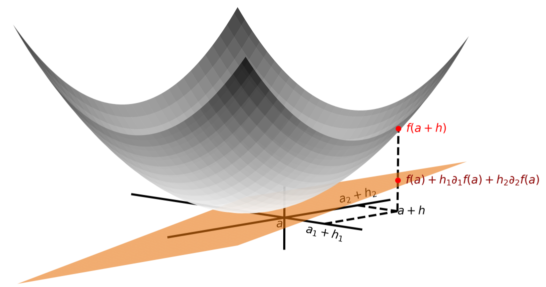
- Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto 3x+2y+4$. Le développement limité d'ordre 1 s'écrit :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h_1\partial_1 f(a) + \partial_2 f(a) + \|h\|\,\varepsilon(h) \\ 3(a_1+h_1)+2(a_2+h_2)+4 &= 3a_1+2a_2+4+\cdots \\ &\cdots + 3h_1 + 2h_2 + |h|\,\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on constate que $\varepsilon(h)=0$.

Approximation par un plan

Le théorème signifie que si h est petit, alors $f(a+h)$ est environ égal à $f(a)+\sum_{i=1}^{n} h_i\partial_i f(a)$.
Lorsque $n=2$, la surface représentant la fonction $g:(h_1,h_2)\mapsto f(a)+h_1\partial_1 f(a)+h_2\partial_2 f(a)$ est celle d'un plan. La fonction f est approchée par un plan au voisinage du point a.



II - Calcul différentiel d'ordre 2

II.1 - Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 5 - Dérivées partielles d'ordre 2

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. La fonction $\partial_i f$ est une fonction définie sur U et à valeurs réelles. On peut donc lui appliquer les définitions de la partie précédente. Si $\partial_i f$ admet une dérivée partielle en a selon la j-ème variable, on note

$$\partial_j\left(\partial_i f\right) = \partial^2_{j,i} f.$$

Lorsque $i=j$, on note $\partial_i^2 f$ cette dérivée.
Si toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont continues, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Exemple 5 - Calculs de dérivées partielles d'ordre 2

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La dérivée partielle d'ordre 2 correspond à la dérivée seconde de f.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x+2y+4$. En tout point (x, y), la fonction f possède des dérivées partielles d'ordre 2 qui sont toutes nulles.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. En tout point (x, y), la fonction f possède des dérivées partielles d'ordre 2.
  - ⋆ Comme $\partial_1 f : (x, y) \mapsto 2x - 2y$, alors
    $$\begin{aligned}\partial^2_{1,1} f &= \partial_1(\partial_1 f) \ : (x, y) \mapsto 2\\ \partial^2_{2,1} f &= \partial_2(\partial_1 f) \ : (x, y) \mapsto -2\end{aligned}$$
  - ⋆ Comme $\partial_2 f : (x, y) \mapsto 2y - 2x$, alors
    $$\begin{aligned}\partial^2_{1,2} f &= \partial_1(\partial_2 f) \ : (x, y) \mapsto -2\\ \partial^2_{2,2} f &= \partial_2(\partial_2 f) \ : (x, y) \mapsto 2\end{aligned}$$
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^x + 3y\,\mathrm{e}^z$. En tout point (x, y), la fonction f possède des dérivées partielles d'ordre 2.
  - ⋆ Comme $\partial_1 f : (x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^x$,
    $$\begin{aligned}\partial^2_{1,1} f &= \partial_1(\partial_1 f) \ : (x, y, z) \mapsto \mathrm{e}^x\\ \partial^2_{2,1} f &= \partial_2(\partial_1 f) \ : (x, y, z) \mapsto 0\\ \partial^2_{3,1} f &= \partial_3(\partial_1 f) \ : (x, y, z) \mapsto 0\end{aligned}$$
  - ⋆ Comme $\partial_2 f : (x, y, z) \mapsto 3\,\mathrm{e}^z$,
    $$\begin{aligned}\partial^2_{1,2} f &= \partial_1(\partial_2 f) \ : (x, y, z) \mapsto 0\\ \partial^2_{2,2} f &= \partial_2(\partial_2 f) \ : (x, y, z) \mapsto 0\\ \partial^2_{3,2} f &= \partial_3(\partial_2 f) \ : (x, y, z) \mapsto 3\,\mathrm{e}^z\end{aligned}$$
  - ⋆ Comme $\partial_3 f : (z, y, z) \mapsto 3y\,\mathrm{e}^z$,
    $$\begin{aligned}\partial^2_{1,3} f &= \partial_1(\partial_3 f) \ : (x, y, z) \mapsto 0\\ \partial^2_{2,3} f &= \partial_2(\partial_3 f) \ : (x, y, z) \mapsto 3\,\mathrm{e}^z\\ \partial^2_{3,3} f &= \partial_3(\partial_3 f) \ : (x, y, z) \mapsto 3y\,\mathrm{e}^z\end{aligned}$$

Théorème 2 - Théorème de Schwarz (H.P.)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\partial^2_{i,j} f = \partial^2_{j,i} f$. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut donc effectuer les dérivées partielles dans l'ordre que l'on souhaite.

II.2 - Matrice hessienne

Définition 6 - Matrice hessienne

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$. La *hessienne* de f en a est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$H(f)(a) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(a) & \partial^2_{1,2} f(a) & \cdots & \partial^2_{1,n} f(a)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial^2_{n,1} f(a) & \partial^2_{n,2} f(a) & \cdots & \partial^2_{n,n} f(a)\end{pmatrix}$$

Exemple 6 - Calculs de hessiennes

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La hessienne est une matrice d'ordre 1 et $H(f)(a) = f''(a)$.
- Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, le théorème de Schwarz assure que la hessienne est une matrice réelle symétrique.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$ et $a \in \mathbb{R}^2$. D'après les calculs précédents,
  $$H(f)(a) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(a) & \partial^2_{1,2} f(a)\\ \partial^2_{2,1} f(a) & \partial^2_{2,2} f(a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}.$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x + 3y\,\mathrm{e}^z$ et $a = (0,4,1)$. D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} H(f)(a) &= \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}f(a) & \partial^2_{1,2}f(a) & \partial^2_{1,3}f(a) \\ \partial^2_{2,1}f(a) & \partial^2_{2,2}f(a) & \partial^2_{2,3}f(a) \\ \partial^2_{3,1}f(a) & \partial^2_{3,2}f(a) & \partial^2_{3,3}f(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\,\mathrm{e}^1 \\ 0 & 3\,\mathrm{e}^1 & 3\cdot 4\cdot \mathrm{e}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\,\mathrm{e} \\ 0 & 3\,\mathrm{e} & 12\,\mathrm{e} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Théorème 3 - Développement limité d'ordre 2

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in U$. Il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to(0,\dots,0)} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout $h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a+h \in U$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a) + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \partial^2_{i,j} f(a)}_{q_a(f)(h)} + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

La fonction f admet un *développement limité* d'ordre 2 en a.

Si $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$, on note

$$q_a(f)(h_1,\dots,h_n) = h^T H(f)(a) h.$$

Exemple 7 - Cas particuliers de développements limités

- Si $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$, la formule précédente s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + h^2 \varepsilon(h).$$

On retrouve le théorème de Taylor-Young à l'ordre 2.

- Le développement limité à l'ordre 2 permet d'évaluer la distance entre $f(a+h)$ et $f(a) + \sum\limits_{i=1}^n h_i \partial_i f(a)$ lorsque h est petit.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h_1(2a_1 - 2a_2) + h_2(2a_2 - 2a_1) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{h_1^2}{2}\cdot 2 + \frac{h_1h_2}{2}\cdot(-2) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{h_2h_1}{2}\cdot(-2) + \frac{h_2^2}{2}\cdot 2 + \|h\|^2\varepsilon(h) \\ &= f(a) + 2(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) + \cdots \\ &\quad \cdots + h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2 + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ &= f(a) + 2(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) + (h_1 - h_2)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \|h\|^2 \varepsilon(h). \end{aligned}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^x + 3y\,\mathrm{e}^z$ et $a = (0,4,1)$. D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h_1\,\mathrm{e}^0 + h_2\cdot 3\cdot \mathrm{e}^1 + h_3 \cdot 3\cdot 4\cdot \mathrm{e}^1 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{h_1^2}{2}\cdot 1 + \frac{h_2h_3}{2}\cdot 3\,\mathrm{e} + \frac{h_3h_2}{2}\cdot 3\,\mathrm{e} + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{h_2^2}{2} 12\,\mathrm{e} + \|h\|^2\varepsilon(h) \\ &= f(a) + h_1 + 3\,\mathrm{e}\,h_2 + 12\,\mathrm{e}\,h_3 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{h_1^2}{2} + 3\,\mathrm{e}\,h_2h_3 + 6\,\mathrm{e}\,h_2^2 + \|h\|^2\varepsilon(h). \end{aligned}$$

II.3 - Convexité

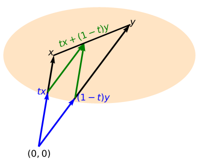
Définition 7 - Ensemble convexe

L'ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est *convexe* si

$$\forall\ (x, y) \in U^2,\ \forall\ t \in [0, 1],\ tx + (1 - t)y \in U.$$

Représentation d'un ensemble convexe

U est convexe si, pour tous points x, y de U, le segment reliant ces points est également inclus dans U.



On peut montrer que les ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Définition 8 - Convexité / Concavité

Soit U un ensemble convexe et $f : U \to \mathbb{R}$.

- La fonction f est *convexe* si

$$\forall\, x,\ y \in U, \forall\, t \in [0, 1],\ f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y).$$

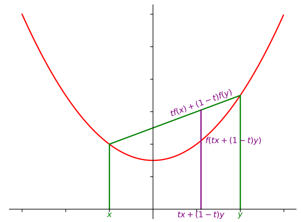
- La fonction f est *concave* si

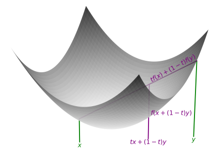
$$\forall\, x,\ y \in U, \forall\, t \in [0, 1],\ f(tx+(1-t)y) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y).$$

On remarque que f est convexe si et seulement si $-f$ est concave.

Exemple 8 - Exemples de fonction convexe

- La convexité signifie que l'épigraphe de f, i.e. l'ensemble des points qui sont au-dessus du graphe de f est un ensemble convexe.





- Les fonctions linéaires sont à la fois convexes et concaves.

Théorème 4 - Conditions sur la hessienne

Soit U un ensemble convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

- La fonction f est concave si et seulement si

$$\forall\ a \in U, \forall\ h \in \mathbb{R}^n,\ q_a(f)(h) \leqslant 0.$$

- La fonction f est convexe si et seulement si

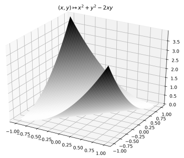
$$\forall\ a \in U, \forall\ h \in \mathbb{R}^n,\ q_a(f)(h) \geqslant 0.$$

Exemple 9 - Études de convexité

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. D'après les calculs précédents, $q_a(f)(h) = f''(a)h^2$. Ainsi,
  - ⋆ Si $f'' \leqslant 0$, la fonction f est concave.
  - ⋆ Si $f'' \geqslant 0$, la fonction f est convexe.
- Soient f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Si f et g sont convexes (resp. convaves), alors $f + g$ est convexe (resp. concave).
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} q_a(f)(h) &= 2h_1^2 - 2h_1h_2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 \\ &= 2(h_1 - h_2)^2. \end{aligned}$$

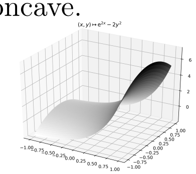
La fonction f est donc convexe.



- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2y^2$ et $a = (x,y,z)$. Alors, $H(f)(a) = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et

$$q_{(x,y,z)}(f)(h) = h_1^2 4\,\mathrm{e}^{2x} - 4h_2^2.$$

Ainsi, $q_a(f)(0,1) = -4$ et $q_a(f)(1,0) = 4\,\mathrm{e}^{2x}$. Cette quantité n'est donc pas de signe constant et la fonction f n'est donc ni convexe ni concave.



III - Recherche d'extremums

III.1 - Conditions d'existence

Définition 9 - Extremum local / global

Soit f une fonction définie sur U et $a \in U$.

(*i*). f présente un *maximum local* en $a_\star$ s'il existe $V \subset U$ contenant a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \leqslant f(a_\star)$.

(*ii*). f présente un *minimum local* en $a_\star$ s'il existe $V \subset U$ contenant a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \geqslant f(a_\star)$.

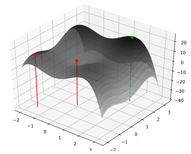
(*iii*). f présente un *maximum global* en a si pour tout $x \in U$, $f(x) \leqslant f(a_\star)$.

(*iv*). f présente un *minimum global* en a si pour tout $x \in U$, $f(x) \geqslant f(a_\star)$.

(*v*). Un *extremum* est un maximum ou un minimum.

Représentation graphique d'extremums

Sur le schema suivant, des extremums locaux sont matérialisés par des traits pleins et un maximum global est matérialisé par un trait pointillé.



Définition 10 - Point critique

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in U$. Le point a est un *point critique* de f si

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \partial_i f(a) = 0.$$

Le vecteur $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix}$ est le *gradient* de f en a.

∇

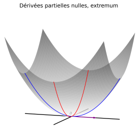
Le symbole ∇ se lit « gradient » ou « nabla ». Il s'agit d'un Δ (lettre grecque delta) renversée, le mot nabla provenant d'une nom d'une harpe hébraïque de l'antiquité.

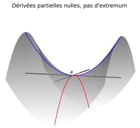
Théorème 5 - Extremum : condition nécessaire

Soit f une application admettant des dérivées partielles selon chacune de ses variables. Si f présente un extremum local en a, alors a est un point critique de f, i.e. $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 10 - Calculs de points critiques

- Soit $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Si f admet un extremum en $a_\star$, alors $f'(a_\star) = 0$. Cependant, la fonction $f : x \mapsto x^3$ montre que $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum en 0 : la réciproque du théorème est fausse.
- La démonstration de ce théorème est très simple : si f admet un extremum local en $a_\star$, alors chacune de ses applications partielles admet un extremum. Nous sommes ramenés au cas où $n = 1$. La réciproque est à nouveau fausse :





- Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$.

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) & = 0 \\ \partial_2 f(x,y) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 & = 0 \\ x + 2y - 1 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 3 & = 0 \\ x + 2y - 1 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -1 \\ y & = 1 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique point critique de f est $(-1, 1)$. Nous devons maintenant étudier ce point pour savoir si f atteint un extremum en $(-1, 1)$.

De plus, si $(h, k) \neq (0, 0)$, alors

$$\begin{aligned} & f(-1+h, 1+k) - f(-1, 1) \\ & = (-1+h)^2 + (-1+h)(1+k) + (1+k)^2 + \cdots \\ & \qquad \cdots + (-1+h) - (1+k) + 3 - f(-1,1) \\ & = h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{4}k^2 + k^2 \\ & = \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, f possède un maximum en $(-1, 1)$. Cette dernière méthode de factorisation est fastidieuse. On introduit la hessienne pour gagner en efficacité.

Théorème 6 - Conditions locales sur la hessienne

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $a_\star$ un point critique de f. D'après le développement limité à l'ordre 2 en $a_\star$,

- Si $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q_{a_\star}(f)(h) > 0$, alors f admet en $a_\star$ un minimum local.
- Si $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q_{a_\star}(f)(h) < 0$, alors f admet en $a_\star$ un maximum local.
- S'il existe h_1 et h_2 tels que $q_{a_\star}(f)(h_1) > 0$ et $q_{a_\star}(f)(h_2) < 0$, alors f n'admet pas d'extremum en $a_\star$.

Exemple 11 - Calculs de hessiennes

- Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$ et $a_\star = (-1, 1)$. On vérifie que $\nabla(f)(a_\star) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$H(f)(a_\star) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et pour $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} q_{a_\star}(f)(h) & = h_1^2 \cdot 2 + h_1 h_2 \cdot 1 + h_2 h_1 \cdot 1 + h_2^2 \cdot 2 \\ & = 2(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) = 2\left[\left(h_1 + \frac{1}{2}h_2\right)^2 + \frac{3}{4}h_2^2\right] \\ & > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, f possède un minimum local en $(-1, 1)$.
- Soit $f : (x, y, z) \mapsto \frac{x^3}{3} - xy - 4y + \frac{5}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2$. Alors,

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y,z) & = 0 \\ \partial_2 f(x,y,z) & = 0 \\ \partial_3 f(x,y,z) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y & = 0 \\ -x - 4 + 5y & = 0 \\ 3z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = x^2 \\ 5x^2 - x - 4 & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 1 \\ y & = 1 \\ z & = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x & = -\frac{4}{5} \\ y & = \frac{16}{25} \\ z & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les points critiques de f sont $(1,1,0)$ et $\left(-\frac{4}{5}, \frac{16}{25}, 0\right)$.
De plus,

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

⋆ Si $a_\star = (1,1,0)$, alors pour $(h_1,h_2) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} q_{a_\star}(f)(h) &= 2h_1^2 - 2h_1h_2 + 5h_2^2 + 3h_3^2 \\ &= 2\left(h_1^2 - h_1h_2\right) + 5h_2^2 + 3h_3^2 \\ &= 2\left(h_1 - \frac{1}{2}h_2\right)^2 + \frac{9}{2}h_2^2 + 3h_3^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi, f admet un minimum local en $(1,1,0)$.

⋆ Si $a_\star = \left(-\frac{4}{5}, \frac{16}{25}, 0\right)$, alors

$$q_{a_\star}(f)(h) = -\frac{8}{5}h_1^2 - 2h_1h_2 + 5h_2^2 + 3h_3^2.$$

Comme $q_{a_\star}(f)(1,0,0) = -\frac{8}{5}$ et $q_{a_\star}(f)(0,0,1) = 3$, alors f n'admet pas d'extremum en $a_\star = (1,1,0)$.

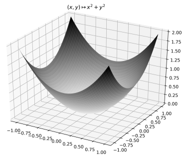
Théorème 7 - Notations de Monge (cas $n = 2$)

Soit $n = 2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a_\star$ un point critique de f. On note $H(f)(a_\star) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

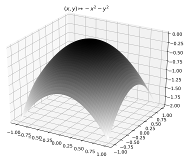
- Si $rt - s^2 > 0$, alors f possède un extremum local en $a_\star$.
  - ⋆ Si $r > 0$, il s'agit d'un minimum local.
  - ⋆ Si $r < 0$, il s'agit d'un maximum local.
- Si $rt - s^2 < 0$, alors f ne possède pas d'extremum en $a_\star$. Il s'agit d'un *point col* (ou *point selle*).
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas pas conclure.

Exemple 12 - La dimension 2

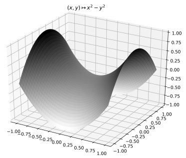
- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$ et $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $2 \times 2 - 0 > 0$ et $2 > 0$, alors f admet un minimum local en $(0,0)$.



- Soit $f : (x,y) \mapsto -x^2 - y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$ et $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Comme $-2 \times (-2) - 0 > 0$ et $-2 < 0$, alors f admet un maximum local en $(0,0)$.



- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$ et $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Comme $2 \times (-2) - 0 < 0$, alors f admet un point col en $(0,0)$.



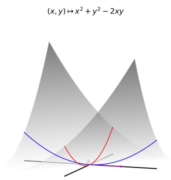
- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$ et $a_\star = (-1,1)$. On a vu que $a_\star$ est un point critique de f et que

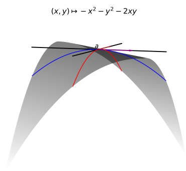
$$H(f)(a_\star) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $2 \times 2 - 1 \times 1 > 0$ et $2 > 0$, alors f possède un minimum local en $(-1,1)$.

- Si $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$, alors $(0,0)$ est un point

critique et $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ soit $rt - s^2 = 0$. Cependant, $f(x,y) = (x-y)^2 \geqslant 0$ donc f admet un minimum en $(0,0)$.
Si $f : (x,y) \mapsto -x^2 - y^2 - 2xy$, alors $(0,0)$ est un point critique et $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ soit $rt - s^2 = 0$. Cependant, $f(x,y) = -(x+y)^2 \leqslant 0$ donc f admet un maximum en $(0,0)$. Lorsque $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure de manière générale.





Théorème 8 - Condition globale

Soit U un ensemble convexe, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a_\star \in U$ un point critique de f.
- Si f est convexe sur U, alors f admet en $a_\star$ un minimum global.
- Si f est concave sur U, alors f admet en $a_\star$ un maximum global.

Exemple 13 - Extremums & Convexité

- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$ et c'est un minimum local. De plus, $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $q_{(x,y)}(f)(h) = 2(h_1^2 + h_2^2) > 0$ pour $(h_1, h_2) \neq (0,0)$. Ainsi, f est convexe. Donc $(0,0)$ est le minimum global de f.
- Soit $f : (x,y) \mapsto -x^2 - y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$ et c'est un maximum local. De plus, $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $q_{(x,y)}(f)(h) = -2(h_1^2 + h_2^2) < 0$ pour $(h_1, h_2) \neq (0,0)$. Ainsi, f est concave. Donc $(0,0)$ est le maximum global de f.
- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$ et $a_\star = (-1,1)$. On a vu que $a_\star$ est un minimum local de f. De plus, $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et pour $(h_1, h_2) \neq (0,0)$,
$$\begin{aligned} q_{(x,y)}(f)(h) &= 2h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_2^2 \\ &= 2\left(h_1 + \frac{1}{2}h_2\right)^2 + \frac{3}{2}h_2^2 > 0. \end{aligned}$$
Ainsi, f est convexe. Donc $(-1,1)$ est le minimum global de f.

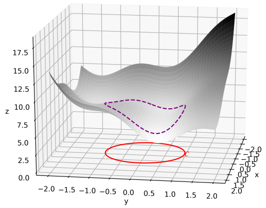
III.2 - Extremums sous contraintes

Définition 11 - Optimisation sous contraintes

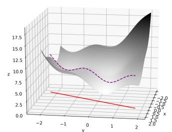
Soit $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions définies sur U et à valeurs réelles. Optimiser f sous les *contraintes* $g_1, \dots, g_p$ consiste à déterminer les extremums de la restriction de f à l'ensemble $\mathscr{C} = \{u \in U \ ; \ g_1(u) = \cdots = g_p(u) = 0\}$.

Exemple 14 - Exemples de contraintes

- On a représenté ci-dessous la surface d'une fonction f sous l'unique contrainte $x^2+y^2=1$. L'ensemble $\mathscr{C}$ des points satisfaisant cette contrainte est représenté par un trait plein. La fonction à minimiser est représentée par un trait en pointillés.



- On a représenté ci-dessous la surface d'une fonction f sous la contrainte $y-2x+\frac{1}{4}=0$. L'ensemble $\mathscr{C}$ des points satisfaisants cette contrainte est représenté par un trait plein. La fonction à minimiser est représentée par un trait en pointillés.



- Considérons la fonction $f:(x,y)\mapsto x\,\mathrm{e}^y+y\,\mathrm{e}^x$ sous la contrainte $x-y=1$. Une des variables s'exprime en fonction de l'autre. Il s'agit donc d'optimiser la fonction

$$g(y)=f(y+1,y)=(y+1)\,\mathrm{e}^y+y\,\mathrm{e}^{y+1}.$$

La fonction g est dérivable et

$$g'(y)=\mathrm{e}^y(1+y+1+\mathrm{e}+\mathrm{e}\,y)=\mathrm{e}^y((1+\mathrm{e})y+2+\mathrm{e}).$$

La fonction g admet donc un minimum en $y_\star=-\frac{2+\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$. La fonction f, sous la contrainte $x-y=1$, admet donc un minimum en $\left(-\frac{1}{1+\mathrm{e}},-\frac{2+\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right)$.

Définition 12 - Jacobienne

Soit $g_1,\dots,g_p$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur U et à valeurs réelles. La matrice *jacobienne* des contraintes est la matrice

$$J(g_1,\dots,g_p)(x)=\begin{pmatrix}\partial_1 g_1(x) & \cdots & \partial_n g_1(x)\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1 g_p(x) & \cdots & \partial_n g_p(x)\end{pmatrix}.$$

Exemple 15 - Exemples de jacobiennes

- Matrice jacobienne lorsque $p=1$, $g_1:(x,y)\mapsto x^2+y^2-1$:

$$J(g_1)(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_1 g_1(x,y) & \partial_2 g_2(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 2y\end{pmatrix}.$$

- Si $p=2$, $g_1:(x,y)\mapsto x^2+y^2-1$ et $g_2:(x,y)\mapsto y-2x+\frac{1}{4}$,

$$J(g_1,g_2)(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_1 g_1(x,y) & \partial_2 g_1(x,y)\\ \partial_1 g_2(x,y) & \partial_2 g_2(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 2y\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Définition 13 - Lagrangien

Soit f une fonction définie sur U et $g_1,\dots,g_p$ des contraintes. Le *lagrangien* du problème d'optimisation est la fonction :

$$\begin{array}{rccc} L: & U\times\mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}\\ & (x,\lambda_1,\dots,\lambda_p) & \mapsto & f(x)-\sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x).\end{array}$$

Théorème 9 - Conditions du premier ordre

Soit $f,g_1,\dots,g_p$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Si f admet un extremum local en un point $a_\star\in U$ sous les contraintes $g_1(a_\star)=\cdots=g_p(a_\star)=0$ et $\operatorname{Rg} J(g_1,\dots,g_p)(a_\star)=p$ (contrainte de *qualification*), alors il existe $\lambda_{1,\star},\dots,\lambda_{p,\star}\in\mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, i\in[\![1,p+n]\!],\ \partial_i L(a_\star,\lambda_{1,\star},\dots,\lambda_{p,\star})=0.$$

Les réels $\lambda_{1,\star},\dots,\lambda_{p,\star}$ sont les *multiplicateurs de Lagrange*.

Théorème 10 - Condition suffisante d'extrémalité

Soit $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Notons $(a_\star, \lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star})$ un point qui satisfait aux conditions du théorème précédent.
On note $H_\star$ la matrice hessienne du lagrangien par rapport aux seules variables x, évaluée en $(a_\star, \lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star})$:

$$H_\star = \left(\partial^2_{i,j} L(a_\star, \lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

- Si, pour tout $h \in \operatorname{Ker} J(g_1, \dots, g_p)(a_\star)$ non nul,
  - $\star$ $h^T H_\star h > 0$, alors f admet un minimum sous contraintes en $a_\star$.
  - $\star$ $h^T H_\star h < 0$, alors f admet un maximum sous contraintes en $a_\star$.
- S'il existe $h_1, h_2 \in \operatorname{Ker} J(g)(a_\star)$ tels que $h_1^T H_\star h_1 < 0$ et $h_2^T H_\star h_2 > 0$, alors f n'admet ni maximum ni minimum en $a_\star$.

Exemple 16 - Optimisation sous contrainte

- Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^2$ et les fonctions $g_1, \dots, g_p$ sont linéaires, la hessienne du lagrangien par rapport à la variable x est égale à la hessienne de f et il suffit que f soit convexe (resp. concave) pour que f atteigne, sous contrainte, en le point critique obtenu un minimum (resp. maximum).
- Optimisons la fonction $f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes $\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ 2x - y - 3z &= 4 \end{cases}$. On introduit le lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + 2y + z - 1) + \cdots$$
$$\cdots - \lambda_2(2x - y - 3z - 4).$$

  - $\star$ Contrainte de qualification :

$$J(g_1, g_2)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

  est de rang 2 car $(1,2)$ et $(2,-1)$ ne sont pas colinéaires.

  - $\star$ Conditions du premier ordre : si (x,y,z) est un extremum local de f sous les contraintes g_1, g_2, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \partial_1 L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ \partial_2 L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ \partial_3 L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ \partial_4 L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \\ \partial_5 L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0 \\ 2y - 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2z - \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ x + 2y + z - 1 &= 0 \\ 2x - y - 3z - 4 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0 \\ 2y - 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2z - \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ -6\lambda_1 + \lambda_2 &= -2 \\ -25\lambda_2 &= -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{16}{15} \\ y &= \frac{1}{3} \\ z &= -\frac{11}{15} \\ \lambda_1 &= \frac{52}{75} \\ \lambda_2 &= \frac{18}{25} \end{cases}$$

  - $\star$ Étude de la hessienne : Comme les contraintes sont linéaires, $H_\star$ est la hessienne de f qui vaut $2I_3$. Ainsi, $h^T H_\star h = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 > 0$ et f admet sous contrainte un minimum en $\left(\frac{16}{15}, \frac{1}{3}, -\frac{11}{15}\right)$.

  Géométriquement, ce point est le point de la droite définie par $\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ 2x - y - 3z &= 4 \end{cases}$ qui soit le plus proche de l'origine.
- Optimisons la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 y$ sous la contrainte $g_1(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3 = 0$. On introduit le lagrangien :

$$L : (x,y,\lambda) \mapsto x^2 y - \lambda(2x^2 + y^2 - 3).$$

  - $\star$ Contrainte de qualification :

$$J(g_1)(x,y) = \begin{pmatrix} 4x & 2y \end{pmatrix}$$

  est de rang 1 (elle est de rang 0 en $(0,0)$ qui est un point qui ne satisfait pas la contrainte).

⋆ Condition du premier ordre : si (x, y) est un extremum local de f sous la contrainte g_1, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \partial_1 L(x, y, \lambda) & = 2xy - 4\lambda x = 0 \\ \partial_2 L(x, y, \lambda) & = x^2 - 2\lambda y = 0 \\ \partial_3 L(x, y, \lambda) & = 2x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ 2\lambda y & = 0 \\ y^2 & = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y & = 2\lambda \\ x^2 & = 4\lambda^2 \\ 2x^2 + y^2 & = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \\ \lambda & = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y & \in \{-1, 1\} \\ x & \in \{-1, 1\} \\ \lambda & = \frac{y}{2} \end{cases}$$

Les 6 candidats pour des extremums sont donc : $(0, -\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3}, 0)$, $(1, 1, 1/2)$, $(1, -1, -1/2)$, $(-1, 1, 1/2)$, $(-1, -1, -1/2)$.

⋆ Étude de la hessienne. D'après la définition de L,

$$H_\star = \begin{pmatrix} 2y_\star - 4\lambda_\star & 2x_\star \\ 2x_\star & -2\lambda_\star \end{pmatrix} \text{ et } J_\star = \begin{pmatrix} 4x_\star & 2y_\star \end{pmatrix}.$$

◇ Si $(x_\star, y_\star, \lambda_\star) = (0, -\sqrt{3}, 0)$, alors

$$H_\star = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{Ker} J_\star = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Ainsi, pour tout $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} J_\star$ non nul,

$$h^T H_\star h = -2\sqrt{3} h_1^2 < 0.$$

La fonction f admet donc un maximum sous contrainte en $(0, -\sqrt{3})$.

◇ On montre de même que f admet un minimum sous contrainte en $(0, \sqrt{3})$.

◇ Si $(x_\star, y_\star, \lambda_\star) = (-1, -1, -1/2)$, alors

$$H_\star = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{Ker} J_\star = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Ainsi, si $h = h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} J_\star$ non nul,

$$h^T H_\star h = 12 h_1^2 > 0.$$

Ainsi, la fonction f admet un minimum sous contrainte en $(-1, -1)$.

◇ Les autres cas se traitent de manière analogue.