T.D. II - Dénombrement

I - Dés, Mots, Urnes,...

Solution de l'exercice 1. Le résultat obtenu à l'issu des lancers peut être modélisé par un couple d'entiers compris entre 1 et 6.
Il suffit ensuite de lister les décompositions de chacun de ces entiers :

$$\begin{aligned}
6 &= 1+5 = 2+4 = 3+3 = 4+2 = 5+1, \\
7 &= 1+6 = 2+5 = 3+4 = 4+3 = 5+2 = 6+1, \\
8 &= 2+6 = 3+5 = 4+4 = 5+3 = 6+2.
\end{aligned}$$

Il y a ainsi :
- ∗ 5 façons d'obtenir 6,
- ∗ 6 façons d'obtenir 7,
- ∗ 5 façons d'obtenir 8.

□

Solution de l'exercice 2. Comme un nombre de 4 chiffres ne peut pas commencer par un 0, tout nombre de 4 chiffres est un élément de

$$[\![1,9]\!] \times [\![0,9]\!] \times [\![0,9]\!] \times [\![0,9]\!].$$

Il y a ainsi

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$$

nombres de 4 chiffres. □

Solution de l'exercice 3. Un sonnet est une succession de 14 vers. Pour chacun des vers, il y a 10 façons de le choisir (une par page). Le nombre de sonnets pouvant être composé est donc égal à 10^{14}.
Comme $10^{14} = 10^5 \times 10^9 = 100\,000 \times 10^9$, le livre contient bien *cent mille milliardes* de poèmes. □

Solution de l'exercice 4.

1. Le 0 ne peut pas figurer en première position. Il y a ainsi :
- ∗ $9 \times 1 \times 9 \times 9 \times 9$ nombres pour lesquels le 0 est en deuxième position,
- ∗ $9 \times 9 \times 1 \times 9 \times 9$ nombres pour lesquels le 0 est en troisième position,
- ∗ $9 \times 9 \times 9 \times 1 \times 9$ nombres pour lesquels le 0 est en quatrième position,
- ∗ $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 1$ nombres pour lesquels le 0 est en cinquième position.

Finalement, il y a

$$4 \times 9^4 = 26\,244$$

nombres de 5 chiffres qui ne contiennent qu'un seul zéro.

2. On distingue en fonction du chiffre qui est répété :
- ∗ Si le premier chiffre est répété :
  - ⋆ il doit être choisi entre 1 et 9 : 9 possibilités,
  - ⋆ on choisit où il est répété : 4 possibilités,
  - ⋆ on choisit les 3 chiffres restants entre 0 et 9 (distincts) : $9 \times 8 \times 7$.

  Il y a donc $4 \times 9 \times 9 \times 8 \times 7$ possibilités.
- ∗ Si le premier chiffre n'est pas répété et que le chiffre répété n'est pas 0 :
  - ⋆ on choisit le chiffre à répéter entre 1 et 9 : 9 possibilités,
  - ⋆ on choisit la position des 2 répétitions parmi les 4 positions : $\binom{4}{2}$ possibilités,
  - ⋆ on choisit les chiffres distincts restants : $8 \times 8 \times 7$.

  Il y a alors $9 \times \binom{4}{2} \times 8 \times 8 \times 7$ possibilités.
- ∗ Si le premier chiffre n'est pas répété et que le chiffre répété est 0 :
  - ⋆ on choisit la position des 2 répétitions parmi les 4 positions : $\binom{4}{2}$ possibilités,
  - ⋆ on choisit les chiffres restants : $9 \times 8 \times 7$.

  Il y a alors $\binom{4}{2} \times 9 \times 8 \times 7$ possibilités.

Finalement, le nombre de nombres de 5 chiffres avec une unique répétition est égal à

$$\begin{aligned}&4\times 9^2\times 8\times 7+6\times 8\times 9\times 8\times 7+6\times 9\times 8\times 7\\&=4\times 9^2\times 8\times 7+6\times 9\times 8\times 7\times(8+1)\\&=9^2\times 8\times 7\times(4+6)=10\times 9^2\times 8\times 7=45\,360.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. Comme toutes les lettres du mot COMPTER sont distinctes, il y a autant d'anagrammes que de mélanges de lettres, soit :

$$7!=5040 \text{ anagrammes de COMPTER.}$$

2. Tout anagramme de ANANAS est composé de 6 lettres. Pour constituer un anagramme, il faut choisir :

* la position des 3 lettres A : $\binom{6}{3}$ possibilités,
* la position des 2 lettres N parmi les positions restantes : $\binom{3}{2}$ possibilités,
* la position du S sur la position restante : 1 possibilité.

Finalement, il y a

$$\binom{6}{3}\times\binom{3}{2}=20\times 3=60 \text{ anagrammes d'ANANAS.}$$

3. Tout anagramme de DENOMBREMENT est composé de 11 lettres. Pour constituer un anagramme, il faut choisir :

* la position des 3 lettres E : $\binom{11}{3}$ possibilités,
* la position des 2 lettres M parmi les positions restantes : $\binom{8}{2}$ possibilités,
* la position des 2 lettres N parmi les positions restantes : $\binom{6}{2}$ possibilités,
* la position des lettres O, B, R, T parmi les positions restantes : $4\times 3\times 2\times 1$ possibilités.

Finalement, il y a

$$\begin{aligned}\binom{11}{3}\times\binom{8}{2}\times\binom{6}{2}\times 4! &= \frac{11!}{3!8!}\times\frac{8!}{6!2!}\times\binom{6!}{4!2!}\times 4!\\&=\frac{11!}{3!2!2!}\\&=\frac{11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}{3\times 2\times 2\times 2}\\&=11\times 10\times 9\times 7\times 6\times 5\times 4\times 2\\&=1\,663\,200\end{aligned}$$

anagrammes de DENOMBREMENT. □

Solution de l'exercice 6.

1. Pour obtenir un tel tirage il faut choisir :

* les p_1 boules blanches parmi les n_1 boules blanches : $\binom{n_1}{p_1}$,
* les p_2 boules noires parmi les n_2 boules noires : $\binom{n_2}{p_2}$.

Finalement, le nombre de tels tirages est égal à $\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}$.

2. Un tirage est une succession de p boules numérotées. Pour obtenir p_1 boules blanches et p_2 noires, il faut :

* choisir la position des boules blanches : $\binom{p}{p_1}$ possibilités,
* choisir les numéros (distincts) des boules blanches : $n_1\times(n_1-1)\times(n_1-p_1+1)=\frac{n_1!}{p_1!}$ possibilités,
* choisir les numéros (distincts) des boules noires sur les emplacements restants : $\frac{n_2!}{p_2!}$ possibilités.

Finalement, le nombre de tels tirages est égal à :

$$\binom{p}{p_1}\times\frac{n_1!}{p_1!}\times\frac{n_2!}{p_2!}.$$

3. Un tirage est une succession de p boules numérotées. Pour obtenir p_1 boules blanches et p_2 noires, il faut :

* choisir la position des boules blanches : $\binom{p}{p_1}$ possibilités,
* choisir les numéros des boules blanches : $n_1^{p_1}$ possibilités,
* choisir les numéros des boules noires sur les emplacements restants : $n_2^{p_1}$ possibilités.

Finalement, le nombre de tels tirages est égal à :

$$\binom{p}{p_1} \times n_1^{p_1} \times n_2^{p_2}.$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. Lorsque toutes les figurines sont de la même couleur, il y a une unique façon de les arranger.

2. Pour aligner les figures il faut choisir :

* la position des 2 figures rouges : $\binom{20}{2}$ façons,
* les figures blanches sont placées sur les emplacements restants.

Il y a ainsi $\binom{20}{2} = \frac{20\times 19}{2} = 190$ alignements possibles.

3. Pour aligner les figures il faut choisir :

* la position des 3 figures jaunes : $\binom{20}{3}$ possibilités,
* la position des 5 figures rouges sur les emplacements restants : $\binom{17}{5}$ possibilités,
* la figures blanches sont placées sur les emplacements restants.

Le nombre d'alignements possibles est donc égal à

$$\binom{20}{3} \times \binom{17}{5} = \frac{20!}{3!12!5!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13}{6^2}$$
$$= 19 \times 17 \times 8 \times 1514 \times 14 \times 13 = 7\,054\,320.$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. Pour avoir une seule paire dans une main de 5 cartes, on choisit :

* la valeur faciale de la paire : 13 possibilités,
* les deux couleurs de chacune des cartes de la paire : $\binom{4}{2}$ possibilités,
* les valeurs des autres cartes qui doivent être distinctes et disctinctes de celles de la paire : $\underbrace{\binom{12}{3}}$ possiblités,
* les couleurs des autres cartes : 4^3 possibilités.

Le nombre de mains cmportant exactement une paire est donc égal à :

$$13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1\,098\,240.$$

2. Pour avoir 5 cartes consécutives (indépendamment de la couleur), on choisit :

* la plus petite des cartes qui doit être choisie parmi les cartes de 1 à 10 : : 10 possibilités,
* la couleur de chacune des cartes : 4^5.

Le nombre de mains comportant une suite de 5 cartes est donc égal à :

$$10 \times 4^5 = 10\,240.$$

3. Pour avoir 2 paires distinctes de cartes, on choisit :

* la valeur faciale de chacune des paires : $\binom{13}{2}$ possibilités,
* la couleur de chacune des cartes de la première paire : $\binom{4}{2}$ possibilités,
* la couleur de chacune des cartes de la seconde paire : $\binom{4}{2}$ possibilités,
* la valeur faciale de la carte restante : 11 possibilités,
* la couleur de la carte restante : 4 possibilités.

Le nombre de mains comportant exactement 2 paires de valeurs distinctes est donc égal à

$$\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 \times 11 \times 4 = 123\,552.$$

4. Pour avoir 5 cartes de la même couleur, on choisit :

* la couleur des cartes : 4 possibilités,
* les 5 cartes de cette couleur : $\binom{13}{5}$ possibilités.

Au final, le nombre de mains comportant 5 cartes de la même couleur est égal à

$$4\binom{13}{5} = 5148.$$

La probabilité vaut environ 0.00198.
(on pourrait vouloir ici soustraire les 40 quintes flushes) □

Solution de l'exercice 9. On modélise le problème en numérotant les figurines de 1 à 20.

1. On suppose que les oiseaux sont les figurines numérotées 1 et 2. Pour qu'elles soient côte à côte, il suffit de choisir :
* les positions $(i, i+1)$ qu'elles prennent dans l'alignement : 19 possibilités,
* la position de la figure 1 et celle de la figure 2 sur ces 2 emplacements : 2 possibilités,
* la position des 18 figurines restantes sur les emplacements restants : 18! possibilités.

Le nombre d'alignments est donc égal à

$$19 \cdot 2 \cdot 18!.$$

Étant donné qu'il y a 20! alignements distincts, la proportion des alignements où les 2 oiseaux sont côte à côte est donc égale à :

$$\frac{2 \cdot 19!}{20!} = \frac{1}{10}.$$

2ème méthode. On place les deux oiseaux côte à côte. Ensuite,
* l'animal suivant peut être placé soit à gauche soit à droite du couple ;
* l'animal suivant a 3 positions possibles ;
* ...

Ainsi, le nombre de positions est égal à (en comptant qu'il y a deux manières de constituer le couple d'oiseaux) :

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 19$$

2. On étudie l'événement complémentaire où tous les oiseaux ont au moins une figurine entre eux. Il y a 5 oiseaux et 15 figurines d'autres animaux.
* Soit le dernier oiseau est en dernière position. Il faut alors placer 4 couples (oiseau, autre) et 11 (autres) parmi les 19 places restantes, i.e. $\binom{15}{4}$. Il y a, pour chacune de ces positions, $5! \cdot 11!$ manières de disposer les figurines sur ces positions.
* Sinon, il y a 5 couples (oiseau, autre) et 10 (autres) à disposer parmi les 20 places, i.e. $\binom{15}{5}$. Il y a, pour chacune de ces positions, $5! \cdot 15!$ manières de disposer les figurines sur ces positions.

Ainsi, le nombre d'alignements où deux oiseaux sont côte à côte est égal à :

$$20! - 5! \cdot 15! \left(\binom{15}{4} + \binom{15}{5} \right).$$

2ème méthode. On note o_1 (resp. $o_2, \dots, o_5$) la position du premier (resp. deuxième,...,cinquième) oiseau dans l'alignement. On note n_i le nombre d'animaux (non oiseaux) alignés avant la position o_i. Alors, en notant $i_j = n_1 + \cdots + n_j$, on obtient

$$0 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leqslant 15.$$

Ainsi, il y a
* $\binom{16}{5}$ manières de choisir le quintuplet $(i_1, \dots, i_5)$ donc les positions des oiseaux.
* 5! façons de choisir les oiseaux qui vont sur ces positions,
* 15! façons de choisir les animaux qui vont sur les positions restantes.

Le nombre d'alignements où il y a deux oiseaux côte à côte est donc égal à

$$20! - \binom{16}{5} \times 15! \times 5! = 20! - \frac{16! \times 15!}{11!}.$$

3ème méthode. On place les animaux itérativement :
* on place les animaux qui ne sont pas des oiseaux : 15! possibilités,
* on place le premier oiseau dans cette succession (en comptant les extrémités) : 16 possibilités,
* on place le second oiseau, mais pas à côté du premier : 15 places,
* ...
* on place le cinquième oiseau, mais pas à côté des précédents : 12 possibilités.

On obtient ainsi $20! - 15! \cdot 16 \cdots 12 = \frac{15! \cdot 16!}{11!}$ placements possibles.

La proportion des alignements où deux oiseaux sont côte à côte est donc égale à

$$1 - \frac{15!16!}{11! \cdot 20!} = \frac{232}{323}$$

□

II - Coefficients binomiaux

Solution de l'exercice 10.

1. Constituer une équipe revient à choisir k étudiants parmi les $n+p$ étudiants de la filière $D2$. Il y a ainsi $\binom{n+p}{k}$ équipes différentes qui peuvent être constituées.

2. Dans l'équipe de k étudiants, si j sont en 1re année, les $k-j$ restants sont en 2e année. On choisit donc :

* j étudiants en 1re année : $\binom{n}{j}$ possibilités,
* $k-j$ étudiants en 2e année : $\binom{p}{k-j}$ possibilités.

Le nombre d'équipes où j étudiants sont en 1re et $k-j$ étudiants sont en 2e année est donc égal à $\binom{n}{j} \times \binom{p}{k-j}$.

3. Pour constituer l'équipe, on a deux façons de faire :

* soit on choisit directement k étudiants parmi les $n+p$, soit $\binom{n+p}{k}$ possibilités,
* soit on commence par choisir le nombre $j \in [\![0,k]\!]$ d'étudiants de 1re année qui constitueront l'équipe. Il y a alors $\binom{n}{j}\binom{p}{k-j}$ équipes possibles. Comme j varie entre 0 et k, le nombre d'équipes possibles est égal à
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{p}{k-j}.$$

Finalement, on a utilisé deux stratégies pour compter le même nombre d'équipes et
$$\binom{n+p}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{p}{k-j}.$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. Effectuer un tirage revient à extraire $k+1$ éléments d'un ensemble à $n+1$ éléments. Le nombre de tirages possibles est donc égal à $\binom{n+1}{k+1}$.

2. a) Le numéro 1 étant choisi, les autres boules doivent être choisies comme une partie de $\{2,\ldots,n+1\}$. Il y a ainsi $\binom{n}{k}$ tirages possibles.

b) Le numéro 2 étant choisi, les autres boules doivent être choisies comme une partie de $\{3,\ldots,n+1\}$. Il y a ainsi $\binom{n-1}{k}$ tirages possibles.

c) Le numéro k étant choisi, les autres boules doivent être choisies comme une partie de $\{k+1,\ldots,n+1\}$. Il y a ainsi $\binom{n+1-k}{k}$ tirages possibles.

3. Sachant que $k+1$ boules sont extraites de l'urne,

* soit le plus petit numéro tiré est égal à 1,
* soit le plus petit numéro tiré est égal à 2,
* $\ldots$,
* soit le plus petit numéro tiré est égal à $n-k+1$.

Ainsi, en reprenant les résultats de la question précédente,
$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n-j+1}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k}.$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. Pour choisir un k-uplet où les répétitions sont possibles, on choisit :

* le premier élément du k-uplet : n possibilités,
* le deuxième élément du k-uplet : n possibilités,
* $\ldots$,
* le dernier élément du k-uplet : n possibilités.

Finalement, le nombre de k uplet avec répétitions éventuelles est égal à n^k.

Remarque. Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des fonctions de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

2. Pour choisir un k-uplet où les répétitions sont impossibles, on choisit :

* le premier élément du k-uplet : n possibilités,
* le deuxième élément du k-uplet, distinct du précédent : $n-1$ possibilités,
* $\ldots$,
* le dernier élément du k-uplet, distinct des précédents : $n-k+1$ possibilités.

Finalement, le nombre de k-uplets sans répétition est égal à
$$n \times (n-1) \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Remarque. Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des applications injectives de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

3. Soit $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$. Alors, $\{i_1, \ldots, i_k\}$ est une partie de $[\![1, n]\!]$ à k éléments.
Réciproquement, si on considère une partie de $[\![1, n]\!]$ à k éléments, il existe une unique manière de les ordonner de manière strictement croissante.
Ainsi, cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments. Son cardinal est donc égal à : $\binom{n}{k}$. □

III - Compter autrement

Solution de l'exercice 13.

1. Pour les petites valeurs de n :
- ∗ il existe un unique mur constitué d'une brique, donc $M_1 = 1$.
- ∗ il existe deux murs constitués de deux briques : soit les briques sont côte à côte, soit elles sont l'une sur l'aure. Ainsi, $M_2 = 2$.
- ∗ en décrivant le mur selon le nombre de briques par colonnes, on obtient les combinaisons : 3, 2/1, 1/2, 1/1/1. Ainsi, $M_3 = 4$.

2. On peut conjecturer que $M_n = 2^{n-1}$.

3. Étant donné un mur, on pose la première brique au sol. La deuxième sera soit sur la première, soit à côté. La troisième sera soit sur la deuxième, soit sur le sol juste à droite. La quatrième sera soit sur la troisième, soit sur le sol juste à droite,...
Un mur peut ainsi être décrit par une succession d'instructions *dessus*, *sol* décrivant la position des briques à partir de la deuxième.

4. Comme la succession de *dessus* / *sol* permet de construire 2^{n-1}, il y a 2^{n-1} murs possibles et $M_n = 2^{n-1}$.

5. La première colonne de briques est consituée d'un nombre k de briques variant entre 1 et n. La suite des colonnes constitue ensuite un mur contenant $n-k$ briques.
Ainsi, en effectuant le changement de variables $j = k-1$,

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} M_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} M_j.$$

□

Solution de l'exercice 14.

1. Soit $(u_1, \ldots, u_p) \in \mathscr{C}_{0,p}$. Alors, $\sum_{i=1}^{p} u_i = 0$. Comme une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul, alors $u_1 = \cdots = u_p = 0$.
Ainsi, $\mathscr{C}_{0,p} = \{(0, \ldots, 0)\}$ et $C_{0,p} = 1$.

2. Soit $(u_1, \ldots, u_p) \in \mathscr{C}_{1,p}$. Alors, $\sum_{i=1}^{p} u_i = 1$ donc il existe un entier i_0 tel que $u_{i_0} = 1$ et pour tout $i \neq i_0$, $u_i = 0$.
Ainsi, $\mathscr{C}_{1,p} = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$ et $C_{1,p} = p$.

3. Étant donné $(u_1, \ldots, u_p) \in \mathscr{C}_{n,p}$, on construit la suite de sympboles :

$$\underbrace{\circ \cdots \circ}_{u_1 \text{ symboles}} \mid \underbrace{\circ \cdots \circ}_{u_2 \text{ symboles}} \mid \cdots \mid \underbrace{\circ \cdots \circ}_{u_p \text{ symboles}},$$

On associe ainsi à tout élément de $\mathscr{C}_{n,p}$ une unique succession de symboles $\circ$ et $\mid$ contenant exactement $\sum_{i=1}^{n} u_i = n$ symboles $\circ$ et $p-1$ symboles $\mid$.

4. D'après la question précédente, à tout élément de $\mathscr{C}_{n,p}$ est associée une unique suite de $n+p-1$ symboles constituée d'exactement n symboles $\circ$ et $p-1$ symboles $\mid$.
Il y a ainsi autant de suites différentes que de façon de placer les n symboles $\circ$ parmi les $n+p-1$ symboles. Finalement,

$$C_{n,p} = \binom{n+p-1}{n}.$$

□

Solution de l'exercice 15. 1re méthode. On commence par distinguer en fonction du cardinal de Y. Si Y est de cardinal $r \in [\![0, n]\!]$, il y a 2^r parties X de E telles que $X \subset Y$.
Ainsi, en utilisant le cardinal d'une union disjointe et en notant $\mathscr{P}_r(E)$

les parties de E à k éléments,

$$\begin{aligned} |E| &= \sum_{r=0}^{n} \sum_{Y \in \mathscr{P}_r(E)} 2^r \\ &= \sum_{r=0}^{n} 2^r \left|\mathscr{P}_r(E)\right| \\ &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 2^r \\ &= 3^n, \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

2^e méthode. Définir $X \subset Y \subset E$ revient, pour chaque élément de E, à choisir :

- ∗ s'il appartient à X et à Y,
- ∗ s'il appartient à Y mais pas à X,
- ∗ s'il n'appartient ni à X ni à Y.

Ainsi, pour chaque élément de E, on a 3 possibilités et le nombre de parties telles que $X \subset Y \subset E$ est égale à

$$\underbrace{3 \times \cdots \times 3}_{n \text{ facteurs}} = 3^n.$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. Décrire une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E revient à indiquer, pour tout couple $(x, y) \in E^2$ si $x \mathscr{R} y$ ou si $x \not\mathscr{R} y$. Ainsi, pour chaque couple, il y a 2 possibilités. Comme il y a n^2 couples, le nombre de relations binaires est donc égal à 2^{n^2}.

On peut représenter ces relations binaires dans un tableau, où si $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on indique un 1 à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne si et seulement si $x \mathscr{R} y$.

2. Si la relation est symétrique et $x_i \mathscr{R} x_j$, alors $x_j \mathscr{R} x_i$. Ainsi, la détermination du tableau précédent pour un numéro de colonne supérieur ou égal au numéro de la ligne, permet de construire automatiquement l'autre partie du tableau.

Dans le demi-tableau supérieur, le nombre de cases est égal à

$$n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ainsi, le nombre de relations binaires symétriques est égal à $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

3. Si la relation est symétrique et réflexive, le tableau contient des 1 sur sa diagonale principale (par réflexivité : $x_i \mathscr{R} x_i$) et la détermination de la partie supérieure permet de définir la partie inférieure (par symétrie). Dans le demi-tableau strictement supérieur, le nombre de cases est égal à

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Ainsi, le nombre de relations binaires symétriques et réflexives est égal à $2^{\frac{(n-1)n}{2}}$.

4. Si la relation est réflexive, le tableau contient des 1 sur toute sa diagonale principale car $x_i \mathscr{R} x_i$.
Si la relation est antisymétrique, alors

$$x_i \mathscr{R} x_j \text{ et } x_j \mathscr{R} x_i \Rightarrow i \neq j.$$

Ainsi, si $i \neq j$,

- ∗ soit la case (i, j) vaut 0 et la case (j, i) vaut 0,
- ∗ soit la case (i, j) vaut 1 et la case (j, i) vaut 1,
- ∗ soit la case (i, j) vaut 0 et la case (j, i) vaut 0.

Ainsi, pour chaque case (i, j) telle que $i < j$, il y a 3 possibilités.
Le nombre de relartions réflexives et antisymétriques est donc égal à $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$. □