

# T.D. I - Suites & Fonctions

## I - Suites

### I.1 - Suites classiques

**Solution de l'exercice 1.** Notons  $r$  la raison de la suite arithmétique.

Alors, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_n = u_1 + (n-1)r$ .

On obtient ainsi le système

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u_{80} &= u_1 + 79r \\ u_{15} &= u_1 + 14r \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 393 &= u_1 + 79r \\ 133 &= u_1 + 14r \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 393 &= u_1 + 79r \\ 260 &= (79-14)r \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 393 &= u_1 + 79r \\ r &= \frac{260}{65} = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,  $u_1 = 133 - 14 \times 4 = 77$ .

□

### Solution de l'exercice 2.

1. En utilisant la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{4u_0} = \sqrt{4} = 2, \\ u_2 &= \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8} = 2^{3/2}, \\ u_3 &= \sqrt{4 \times 2^{3/2}} = \sqrt{2^{7/2}} = 2^{7/4}, \\ u_4 &= \sqrt{4 \times 2^{7/4}} = \sqrt{2^{15/4}} = 2^{15/8}, \\ u_5 &= \sqrt{4 \times 2^{15/8}} = \sqrt{2^{31/8}} = 2^{31/16}. \end{aligned}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - \ln(4) \\ &= \frac{1}{2} \ln(4) + \frac{1}{2} \ln(u_n) - \ln(4) \\ &= \frac{1}{2} v_n. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

D'après les résultats sur les suites géométriques,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0.$$

Or,  $v_0 = \ln(u_0) - \ln(4) = -\ln(4) = -2\ln(2)$ . Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2\ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

3. En utilisant la relation sur  $(v_n)$ ,

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= v_n + \ln(4) \\ u_n &= e^{v_n + \ln(4)} \\ &= e^{v_n} e^{\ln(4)} \\ &= 4 e^{-\ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &= 4 \times 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &= 2^{2 - \frac{1}{2^{n-1}}} \\ &= 2^{\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Comme  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow 0$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4 \times 2^{-0} = 4.$$

□

**Solution de l'exercice 3.**

1. En résolvant l'équation,

$$\begin{aligned}\ell &= -\frac{\ell}{2} + 12 \\ \frac{3}{2}\ell &= 12 \\ \ell &= 8.\end{aligned}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= -\frac{1}{2}u_n - 8 + 12 \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 4 \\ &= -\frac{1}{2}(u_n - 8) \\ &= -\frac{1}{2}v_n.\end{aligned}$$

Ainsi,  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{1}{2}$ .3. Comme  $v_0 = 0 - 8 = -8$ , en utilisant les résultats sur les suites géométriques, pour tout  $n$  entier naturel,

$$v_n = -8 \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

4. D'après la définition de  $v_n$ ,

$$u_n = -8 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 8.$$

Comme  $-\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 8.$$

□

**Solution de l'exercice 4.**

1. En résolvant l'équation,

$$\begin{aligned}\ell &= 3\ell + 4 \\ 2\ell &= -4 \\ \ell &= -2.\end{aligned}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= 3u_n + 4 + 2 \\ &= 3u_n + 6 \\ &= 3(u_n + 2) \\ &= 3v_n.\end{aligned}$$

Ainsi,  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 3.3. Comme  $v_0 = 2 + 2 = 4$ , en utilisant les résultats sur les suites géométriques, pour tout  $n$  entier naturel,

$$v_n = 4 \times 3^n.$$

4. D'après la définition de  $v_n$ ,

$$u_n = 4 \times 3^n - 2$$

Comme  $3 > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

□

**Solution de l'exercice 5.**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} \\ &= \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} \\ &= \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12} \\ &= \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} \\ &= \frac{v_n}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 5.

2. D'une part,  $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+3} = -\frac{1}{3}$ .

D'autre part, d'après les résultats sur les suites géométriques, pour tout  $n$  entier naturel,

$$v_n = -\frac{1}{3 \times 5^n}.$$

En revenant à la définition de  $v_n$ ,

$$\begin{aligned} \frac{u_n - 1}{u_n + 3} &= -\frac{1}{3 \times 5^n} \\ u_n - 1 &= -\frac{u_n}{3 \times 5^n} - \frac{1}{5^n} \\ 3 \times 5^n u_n - 3 \times 5^n &= -u_n - 3 \\ (3 \times 5^n + 1)u_n &= 3(5^n - 1) \\ u_n &= 3 \frac{5^n - 1}{3 \times 5^n + 1}. \end{aligned}$$

3. Comme  $\frac{1}{5} \in ]-1, 1[$  et  $u_n = 3 \frac{1-5^{-n}}{3+5^{-n}}$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3.$$

□

## I.2 - Sommes des termes

### Solution de l'exercice 6.

1. Les termes de la somme sont tous constants et elle est constituée de  $n+1$  termes. Ainsi,  $\sum_{k=0}^n 1 = n+1$ .

2. Les termes de la somme sont constants et elle est constituée de  $n$  termes. Ainsi,  $\sum_{k=1}^n 2 = 2n$ .

3. D'après les résultats sur la somme des premiers entiers,  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

4. D'après les résultats sur la somme des premiers carrés d'entiers,  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

5. D'après les résultats sur la somme des premiers cubes d'entiers,  $\sum_{k=0}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ . □

### Solution de l'exercice 7.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} H_{n+1} - H_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(H_n)$  est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone,

- \* soit  $(H_n)$  est majorée et elle converge alors vers un réel  $\ell$ ,
- \* soit  $(H_n)$  tend vers  $+\infty$ .

2. Soit  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned}
 H_{2n} - H_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\geq \frac{1}{2n}} \\
 &\geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 \\
 &\geq \frac{1}{2n} (2n - n) \\
 &\geq \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

3. Supposons par l'absurde que  $(H_n)$  converge vers un réel  $\ell$ . Alors, en passant à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\ell - \ell \geq \frac{1}{2},$$

soit  $\frac{1}{2} \leq 0$ . Ceci est impossible.

Comme  $(H_n)$  ne converge pas, d'après le théorème de la limite monotone,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$ .  $\square$

### Solution de l'exercice 8.

1. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Comme  $q \in ]-1, 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

2. D'une part,  $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ . Ainsi,  $f$  est dérivable et pour tout  $x$  réel,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}.$$

D'autre part,  $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ . Ainsi,  $f$  est dérivable et pour tout  $x \neq 1$ ,

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

Ainsi, pour  $q \in ]-1, 1[$ ,

$$\sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{1 - q^{n+1} - (n+1)q^n(1-q)}{(1-q)^2}.$$

Comme  $q \in ]-1, 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$ .

Toujours comme  $q \in ]-1, 1[$ , d'après le théorème des croissances comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)q^n = 0$ .

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

$\square$

### Solution de l'exercice 9.

1. Soit  $k \geq 2$ . Alors,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k \times (k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

2. En sommant les relations précédentes et en reconnaissant une somme télescopique,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} &\leq \sum_{k=2}^n \left[ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right] \\
 &\leq 1 - \frac{1}{n} \\
 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} &\leq 2 - \frac{1}{n} \\
 S_n &\leq 2.
 \end{aligned}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

Ainsi, la suite  $(S_n)$  est croissante.

La suite  $(S_n)$  est croissante et majorée par 2 donc elle est convergente.

**Remarque.** On peut montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .  $\square$

### Solution de l'exercice 10.

1. Soit  $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et pour tout  $x \geq 0$ ,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$

Ainsi, la fonction  $f$  est croissante. Comme  $f(0) = 0$ , alors pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\ln(1+x) \leq x.$$

Soit  $g : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ . La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et pour tout  $x \geq 0$ ,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0.$$

Ainsi, la fonction  $g$  est croissante. Comme  $g(0) = 0$ , alors pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x).$$

2. On remarque que  $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ . Ainsi, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}} &\leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \\ \frac{1}{1+k} &\leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

**2<sup>e</sup> méthode.** Soit  $x \in [k, k+1]$ . Alors, en utilisant la croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} &\leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \\ \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx &\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \\ \frac{1}{k+1} &\leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

3. En sommant les relations précédentes et en reconnaissant une somme télescopique,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} &\leq \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln(k)] \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} &\leq \ln(n+1) - \ln(1) \leq H_n \\ H_{n+1} - 1 &\leq \ln(n+1) \leq H_n. \end{aligned}$$

4. En utilisant l'inégalité de droite de l'encadrement précédent,

$$\ln(n+1) \leq H_n.$$

En utilisant l'inégalité de gauche de l'encadrement précédent à l'ordre  $n-1$ ,

$$H_n - 1 \leq \ln(n).$$

Finalement,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

5. Soit  $n \geq 2$ .

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= H_n - \ln(n+1) - H_{n-1} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

D'après la première inégalité de la question 1 pour  $x = \frac{1}{n}$ , alors  $c_{n+1} - c_n \geq 0$ .

Ainsi, la suite  $(c_n)$  est croissante.

6. Soit  $n \geq 2$ . D'après la question 4.,

$$\begin{aligned} H_{n-1} &\leq 1 + \ln(n-1) \\ H_{n-1} - \ln(n) &\leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n) \\ c_n &\leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n). \end{aligned}$$

7. Comme la fonction logarithme est croissante,  $\ln(n-1) - \ln(n) \leq 0$ . Ainsi,  $c_n \leq 1$ .

Finalement, la suite  $(c_n)$  est croissante et majorée par 1 donc convergente.

**Remarque.** Sa limite, notée  $\gamma$  est appelée constante d'Euler. On ne sait pas à ce jour si  $\gamma$  est ou non un nombre rationnel...  $\square$

### I.3 - Suites définies par récurrence

#### Solution de l'exercice 11.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0.$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est croissante.

2. On suppose que la suite  $(u_n)$  est majorée. Alors, d'après le théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ . En passant à la limite dans l'égalité,

$$\begin{aligned} \ell &= \ell + e^{-\ell} \\ e^{-\ell} &= 0. \end{aligned}$$

On obtient une contradiction car l'exponentielle est à valeurs strictement positives.

3. Finalement, la suite  $(u_n)$  est croissante et non majorée. D'après le théorème de la limite monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$\square$

#### Solution de l'exercice 12. TODO

$\square$

### I.4 - Suites définies implicitement

#### Solution de l'exercice 13.

1. Le résultat est trivial pour  $n = 0$ . On pose  $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$ . La fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  comme somme de fonctions strictement croissantes et  $f_n(0) = -1$ ,  $f_n(1) = n \geq 0$ . Ainsi,  $f_n$  admet un unique zéro compris dans l'intervalle  $]0, 1[$ .

2. D'une part,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= u_n^5 + (n+1)u_n - 1 \\ &= u_n^5 + nu_n - 1 + u_n \\ &= f_n(u_n) + u_n \\ &= u_n > 0 \\ f_{n+1}(u_n) &> f_{n+1}(u_{n+1}). \end{aligned}$$

Comme  $f_{n+1}$  est strictement croissante, alors  $u_{n+1} < u_n$ .

3. Ainsi,  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc convergente. Supposons par l'absurde que  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell > 0$ . Alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^5 = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = +\infty$ . Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^5 + nu_n - 1 = +\infty.$$

Or, cette quantité est toujours nulle. On obtient ainsi une contradiction et  $\ell \leq 0$ .

Comme  $u_n \geq 0$ , alors  $\ell \geq 0$ . Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

**2<sup>e</sup> méthode.** Comme  $u_n = \frac{1-u_n^5}{n}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul, et  $(u_n)$  est bornée, alors  $(u_n)$  converge vers 0.

4. D'après la définition,

$$nu_n - 1 = u_n^5.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^5 = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$ . Ainsi,

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

5. En utilisant l'équation initiale,

$$u_n^5 + n \left( \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \right) - 1 = 0$$

$$\varepsilon_n = -u_n^5 \sim -\frac{1}{n^5}.$$

6. D'après la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_n}{-\frac{1}{n^5}} = 1.$$

Ainsi, en posant  $\delta_n = 1 - \frac{\varepsilon_n}{-\frac{1}{n^5}}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$  et

$$\varepsilon_n + \frac{1}{n^5} = \frac{1}{n^5} \delta_n$$

$$nu_n - 1 = -\frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^5} \delta_n$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6} \delta_n.$$

□

### Solution de l'exercice 14.

1. Comme  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ , on obtient le tableau de variations suivant :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction  $f$  réalise une bijection de  $]0, 1]$  dans  $[1, +\infty[$ . Comme  $n \in [1, +\infty[$ , il existe un unique réel  $u_n \in ]0, 1]$  tel que  $f(u_n) = n$ .

3. On remarque que

$$f(u_{n+1}) = n + 1 = f(u_n) + 1$$

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$$

$$u_{n+1} \leq u_n$$

car  $f$  est décroissante sur  $]0, 1]$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers un réel positif  $\ell$ .

Supposons par l'absurde que  $\ell \neq 0$ . Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \ln(u_n) = n,$$

et en passant à la limite dans cette égalité,

$$\ell - \ln(\ell) = +\infty.$$

On obtient ainsi une contradiction.

Finalement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**2<sup>e</sup> méthode.** En notant  $g$  la restriction de  $f$  à  $]0, 1]$ , on obtient que  $u_n = g^{-1}(n)$ . Comme  $g$  est décroissante, alors  $g^{-1}$  est décroissante et  $(u_n)$  est décroissante.

De plus,  $\lim_{0^+} g = +\infty$ , donc  $\lim_{+\infty} g^{-1} = 0$ . D'où,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

4. Comme  $u_n - \ln(u_n) = n$ , alors  $u_n = e^{u_n} e^{-n} \sim e^{-n}$  car  $u_n \rightarrow 0$ .

5. En reprenant ces équations, comme  $u_n \rightarrow 0$ ,

$$u_n - e^{-n} = e^{-n}(e^{u_n} - 1)$$

$$\sim e^{-n} u_n$$

$$\sim e^{-2n}$$

6. Soit  $\delta_n = \frac{u_n - e^{-n}}{e^{-2n}} - 1$ . Alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$  et

$$u_n - e^{-n} = e^{-2n} + e^{-2n} \delta_n$$

$$u_n = e^{-n} + e^{-2n} + e^{-2n} \delta_n.$$

□

## II - Fonctions

### II.1 - Calculs de développements limités

#### Solution de l'exercice 15.

**1.** Un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré :

$$f_1(x) \sim_{+\infty} \frac{x^5}{2x^3} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{2}.$$

**2.** On factorise par le terme qui croît le plus vite :

$$f_2(x) = \frac{e^x}{2} \underbrace{(1 + e^{-2x})}_{\rightarrow 1} \sim_{+\infty} \frac{e^x}{2}.$$

**3.** On factorise numérateur et dénominateur par le terme qui croît le plus vite :

$$f_3(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \sim_{+\infty} 1,$$

car numérateur et dénominateur tendent vers 1.

**4.** On factorise par  $x^2$  puis on utilise les propriétés du logarithme :

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \ln \left( x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \right) \\ &= \ln(x^2) + \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \ln(x^2) \underbrace{\left[ 1 + \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\ln(x^2)} \right]}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_{+\infty} \ln(x^2) \sim_{+\infty} 2 \ln(x). \end{aligned}$$

**5.** On factorise numérateur et dénominateur par les termes qui croissent le plus vite :

$$f_5(x) = \frac{x}{x^2} \times \frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{e^{-x}}{x}}{\underbrace{1 + \frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 3}} \sim_{+\infty} \frac{1}{3x}.$$

**6.** Un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré :

$$f_6(x) \sim_{+\infty} \frac{x^5 e^{-x}}{12x} \sim_{+\infty} \frac{x^4 e^{-x}}{12}.$$

**7.** En factorisant par les termes dominants,

$$\begin{aligned} f_7(x) &= \frac{(x + 25) \ln(x)}{e^x (1 + e^{-2x})} \\ &\sim_{+\infty} \frac{x \ln(x)}{e^x} \sim_{+\infty} x e^{-x} \ln(x). \end{aligned}$$

**8.** En utilisant les propriétés du logarithme,

$$\begin{aligned} \ln(x + 1) &= \ln \left( x \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \ln(x) + \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \\ &= \ln(x) \left[ 1 + \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln(x)} \right] \\ &\sim_{+\infty} \ln(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_8(x) \sim_{+\infty} \frac{\ln(x) e^x}{2x}.$$

**9.** Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , alors

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}.$$

Ainsi,

$$f_9(x) \sim_{+\infty} \frac{3x \times x}{5x^4} \sim_{+\infty} \frac{3}{5x^3}.$$

**10.** En factorisant par les termes dominants,

$$f_{10}(x) = \frac{x}{e^x (1 + e^{-2x})} \sim_{+\infty} \frac{x}{e^x} \sim_{+\infty} x e^{-x}.$$

**11.** En factorisant par les termes dominants,

$$f_{11}(x) = \frac{x^2}{e^x (1 - e^{-2x})} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{e^x} \sim_{+\infty} x^2 e^{-x}.$$



**12.** En factorisant par les termes dominants,

$$f_{12}(x) = \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{x^2 e^x(1 - e^{-2x})} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}.$$

**13.** En factorisant par les termes dominants,

$$f_{13}(x) = \frac{x^4 e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})} \sim_{+\infty} x^4.$$

**14.** En factorisant par les termes dominants,

$$f_{14}(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x(1 - e^{-2x})} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \sim_{+\infty} \sqrt{x} e^{-x}.$$

**15.** Comme un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré,

$$f_{15}(x) \sim_{+\infty} \frac{x^3 e^{-2\sqrt{x}}}{x^4} \sim_{+\infty} \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{x}.$$

□

### Solution de l'exercice 16.

**1.** Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} x^5 + 3x + 1 = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} 12x + 3 = 3$ , alors

$$f_1(x) \sim_0 \frac{1}{3}.$$

**2.** Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} x + 25 = 25$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + e^{-x} = 2$ , alors

$$f_2(x) \sim_0 \frac{25 \ln(x)}{2}.$$

**3.** Comme  $\ln(1+x) \sim_0 x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 5 = 5$ , alors

$$f_3(x) \sim_0 \frac{x}{5}.$$

**4.** D'une part,  $\lim_{x \rightarrow 0} 3x + 12 = 12$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} 5x^4 + 2 = 2$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \ln \frac{1+x}{x} \\ &= \ln(1+x) - \ln(x) \\ &= -\ln(x) \underbrace{\left[1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right]}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_0 -\ln(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_4(x) \sim_0 -\frac{12 \ln(x)}{2} \sim_0 -6 \ln(x).$$

**5.** Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + e^{-x} = 2$ , alors

$$f_5(x) \sim_0 \frac{x}{2}.$$

**6.** D'après la formule de Taylor-Young, il existe des fonctions  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  telles que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$  et

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\ e^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\ &= 2x \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_0 2x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_6(x) \sim_0 \frac{x^2}{2x} \sim_0 \frac{x}{2}.$$

**7.** D'une part,  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + e^{-x} = 2$ .

D'autre part, d'après la formule de Taylor-Young, il existe des fonctions  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  telles que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$  et

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\ e^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\ &= 2x \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_0 2x. \end{aligned}$$

Finalement,

$$f_7(x) \sim_0 \frac{2}{x^2 \times 2x} \sim_0 \frac{1}{x^3}.$$

**8.** D'une part,  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + e^{-x} = 2$ .

D'autre part, d'après la formule de Taylor-Young, il existe des fonctions  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  telles que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$  et

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\ e^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\ &= 2x \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_0 2x. \end{aligned}$$

Finalement,

$$f_8(x) \sim_0 \frac{2x^4}{2x} \sim_0 x^3.$$

**9.** D'après la formule de Taylor-Young, il existe des fonctions  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  telles que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$  et

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\ e^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\ &= 2x \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_0 2x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_9(x) \sim_0 \frac{\sqrt{x}}{2x} \sim_0 \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

□

### Solution de l'exercice 17.

**1.** Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + 2x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} - 1 = -1$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{x} - 1} = 0.$$

**2.** En utilisant les équivalents classiques,

$$\begin{aligned} \ln(1 + 2x) &\sim_0 2x \\ \text{et } \sqrt{1 + x} - 1 &\sim_0 \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{1 + x} - 1} \sim_0 \frac{2x}{\frac{x}{2}} \sim_0 4.$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{1 + x} - 1} = 4.$$

3. En utilisant les équivalents classiques,

$$e^x - 1 \sim_0 x.$$

Ainsi,  $\frac{e^x - 1}{x} \sim_0 1$  et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

4. En utilisant les équivalents classiques,

$$\begin{aligned} \ln(1 + 2x) &\sim_0 2x \\ \text{et } \sqrt{1 + 2x} - 1 &\sim_0 \frac{2x}{2} \sim_0 x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{1 + 2x} - 1} \sim_0 \frac{2x}{x} \sim_0 2$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{1 + 2x} - 1} = 2.$$

5. En utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  et

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + x^2 \varepsilon(x).$$

Ainsi,

$$\frac{e^{3x} - 1 - 3x}{x^2} = \frac{9}{2} + \varepsilon(x).$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1 - 3x}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

□

### Solution de l'exercice 18.

1. On remarque que

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}.$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$ .  
Ainsi,

$$f_1(x) \sim_1 \frac{1}{\sqrt{2(x-1)}}.$$

2. Comme  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = \ln(2)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}$ , alors

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \\ &\sim_1 \frac{\ln(2)}{\sqrt{2(x-1)}}. \end{aligned}$$

3. D'une part, comme  $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ , en utilisant les équivalents en 0 classiques,

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \ln(1 + x - 1) \\ &\sim_1 (x - 1). \end{aligned}$$

D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}$ .  
Ainsi,

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{\ln(1+x-1)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \\ &\sim_1 \frac{x-1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}} \\ &\sim_1 \sqrt{\frac{x-1}{2}}. \end{aligned}$$

4. Comme  $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ , en utilisant les équivalents classiques en 0,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} - 1 &= (1 + x - 1)^{1/3} - 1 \\ &\sim_1 \frac{x-1}{3} \\ \sqrt{x} - 1 &= (1 + x - 1)^{1/2} - 1 \\ &\sim_1 \frac{x-1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_4(x) &\sim_1 \frac{\frac{x-1}{3}}{\frac{x-1}{2}} \\ &\sim_1 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5. Comme  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$ , alors

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \\ &\sim_1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{2(x-1)}}. \end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 19.

1. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle,

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \exp \left\{ n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \right\}.$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n} = 0$ , donc en utilisant les équivalents classiques en 0,

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) &\sim_{+\infty} \frac{\alpha}{n} \\ n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) &\sim_{+\infty} \alpha. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) = \alpha$ . En utilisant la continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left\{ n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \right\} = e^\alpha.$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha.$$

2. Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ , en utilisant les développements limités classiques en 0,

$$\begin{aligned} e^{3/x} - 1 &\sim_{+\infty} \frac{3}{x} \\ x(e^{3/x} - 1) &\sim_{+\infty} 3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{3/x} - 1) = 3.$$

□

### Solution de l'exercice 20.

1. Dans toute la suite,  $\varepsilon$  désigne une fonction telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre. En utilisant la formule de Taylor-Young,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \\ e^x - 1 &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \\ \frac{e^x - 1}{x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

2. Dans toute la suite,  $\varepsilon$  désigne une fonction telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre. En utilisant la formule de Taylor-Young,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \\ 1 + \ln(1+x) &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \\ (1 + \ln(1+x))^{-1} &= \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Or,  $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 + u^2 \varepsilon_1(x)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} (1 + \ln(1+x))^{-1} &= 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)\right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)\right)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)\right) \varepsilon_1(x) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 + x^2 \varepsilon(x) \\ &= 1 - x + \frac{3x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

## II.2 - Étude de courbes

### Solution de l'exercice 21.

**1. a)** Posons  $f : u \mapsto \ln(1 + u)$ . La fonction  $f$  est deux fois dérivable et

$$f'(u) = \frac{1}{1+u},$$

$$f''(u) = -\frac{1}{(1+u)^2}.$$

Comme  $f'' \leq 0$ , la fonction  $f$  est concave et sa courbe représentative se trouve en dessous de ses tangentes.

Or,  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ . Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de  $f$  a pour équation  $y = x$ .

On obtient ainsi,

$$\forall u > 1, \ln(1 + u) \leq u.$$

**b)** Posons  $f : u \mapsto e^u$ . La fonction  $f$  est deux fois dérivable et

$$f'(u) = e^u,$$

$$f''(u) = e^u.$$

Comme  $f'' \geq 0$ , la fonction  $f$  est convexe et sa courbe représentative se trouve en-dessus de ses tangentes.

Or,  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 1$ . Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de  $f$  a pour équation  $y = x + 1$ .

On obtient ainsi,

$$\forall u \in \mathbb{R}, 1 + u \leq e^u.$$

**2.** On pose  $f : u \mapsto \ln(1 + u) - u + \frac{u^2}{2}$ . La fonction  $f$  est deux fois dérivable et

$$f'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 + u,$$

$$f''(u) = -\frac{1}{(1+u)^2} + 1 = -\frac{u}{(1+u)^2}.$$



Rappelons que nous travaillons sur  $\mathbb{R}_+$ .

\* Comme  $f'' \leq 0$ , la fonction  $f'$  est décroissante.

\* Comme  $f'$  est décroissante et  $f'(0) = \frac{1}{1+0} - 1 + 0 = 0$ , alors  $f'$  est positive.

\* Comme  $f'$  est positive, alors  $f$  est croissante.

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

$x$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	
$f'(x)$		
$f(x)$		

Comme  $f$  est croissante et  $f(0) = 0$ , alors  $f$  est à valeurs positives. Ainsi,

$$\forall u \in [0, +\infty[, u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1 + u).$$

□

### Solution de l'exercice 22.

**1.** Notons  $f$  l'application proposée. La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi,  $f$  est croissante sur  $]0, e[$ , décroissante sur  $]e, +\infty[$ , tend vers  $-\infty$  en 0 et tend vers 0 en  $+\infty$ .

**2.** D'après l'étude précédente,  $f$  admet un maximum en  $e$  de valeur  $\frac{1}{e}$ . Par conséquent,

$$\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$$

$$e \ln \pi < \pi \ln e$$

$$\pi^e < e^\pi,$$

car la fonction exponentielle est croissante.  $\square$

### Solution de l'exercice 23.

**1.** La fonction  $f : x \mapsto e^x$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ , donc d'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  et

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x).$$

Ainsi, la tangente à la courbe représentative de  $f$  en 0 a pour équation

$$t : x \mapsto 1 + x.$$

D'après le développement limité précédent,

$$e^x - t(x) = \frac{x^2}{2}(1 + 2\varepsilon(x)) \sim \frac{x^2}{2}$$

Ainsi,  $e^x - t(x) \geq 0$  sur un voisinage de 0 et la courbe représentative de  $f$  se situe au-dessus de sa tangente.

**Remarque.** On aurait pu utiliser ici la convexité de la fonction exponentielle.

**2.** La fonction  $f : x \mapsto e^x$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ , donc d'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 2} \varepsilon(x) = 0$  et

$$e^x = e^2 + e^2(x - 2) + e^2 \frac{(x - 2)^2}{2} + (x - 2)^2 \varepsilon(x).$$

Ainsi, la tangente à la courbe représentative de  $f$  en 2 a pour équation

$$t : x \mapsto e^2(x - 1).$$

D'après le développement limité précédent,

$$e^x - t(x) = e^2 \frac{(x - 2)^2}{2}(1 + \varepsilon_1(x)) \sim_2 e^2 \frac{(x - 2)^2}{2}$$

Ainsi,  $e^x - t(x) \geq 0$  sur un voisinage de 2 et la courbe représentative de  $f$  se situe au-dessus de sa tangente.

**Remarque.** On aurait pu utiliser ici la convexité de la fonction exponentielle.

**3.** La fonction  $f : x \mapsto \ln(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc d'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x) = 0$  et

$$\ln(x) = 0 + 1 \times (x - 1) - \frac{1}{1^2} \frac{(x - 1)^2}{2} + (x - 1)^2 \varepsilon(x).$$

Ainsi, la tangente à la courbe représentative de  $f$  en 1 a pour équation

$$t : x \mapsto x - 1.$$

D'après le développement limité précédent,

$$\ln(x) - t(x) = -\frac{(x - 1)^2}{2}(1 + \varepsilon_1(x)) \sim_1 -\frac{(x - 1)^2}{2}$$

Ainsi,  $\ln(x) - t(x) \leq 0$  sur un voisinage de 1 et la courbe représentative de  $f$  se situe en-dessous de sa tangente.

**Remarque.** On aurait pu utiliser ici la concavité de la fonction logarithme.

**4.** Notons  $f : x \mapsto x e^x$ . En utilisant le développement limité de la fonction exponentielle en 0, il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  et

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x),$$

$$x e^x = x + x^2 + x^2 \varepsilon(x).$$

Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de  $f$  a pour équation  $y = x$ .

De plus,

$$x e^x - x = x^2(1 + \varepsilon(x)) \sim_0 x^2.$$

Ainsi,  $x e^x - x \geq 0$  sur un voisinage de 0 et la courbe représentative de  $f$  se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.

**5.** Notons  $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ . En utilisant le développement limité de la fonction exponentielle en 0, il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  et

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x),$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon(x).$$

Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de  $f$  a pour équation  $t : x \mapsto 1 + \frac{x}{2}$ .

De plus,

$$f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{6}(1 + \varepsilon_1(x)) \sim_0 \frac{x^2}{6}.$$

Ainsi,  $f(x) - t(x) \geq 0$  sur un voisinage de 0 et la courbe représentative de  $f$  se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.  $\square$

### Solution de l'exercice 24.

1. Comme la fonction racine carrée est définie sur  $\mathbb{R}_+$ , la fonction  $f$  est définie sur  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

2. En rappelant que  $\sqrt{x^2} = |x|$ , on obtient

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = x + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

\* Si  $x > 0$ , alors  $f(x) = x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$ . Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

\* Si  $x < 0$ , comme  $\sqrt{1+u} - 1 \sim_0 \frac{u}{2}$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) \sim_{-\infty} x \times \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \\ &\sim_{-\infty} -\frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

3. Soit  $x \in ] -\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ . Comme la fonction racine carrée est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors  $f$  est dérivable en  $x$  et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2 \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{2f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Comme la fonction racine carrée est à valeurs positives, alors  $f'$  et  $f$  sont de même signe.

4. Si  $x \geq 1$ , alors  $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$  et  $f(x) \geq 0$ . Ainsi,  $f' \geq 0$  et  $f$  est croissante sur  $[1, +\infty[$ .

5. Soit  $x \in D$ . D'après la définition et la formule  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ,

$$\begin{aligned} f(x)f(-x) &= \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \times \left(-x + \sqrt{(-x^2) - 1}\right) \\ &= (x^2 - 1) - x^2 = -1. \end{aligned}$$

Ainsi,  $f(x)$  et  $f(-x)$  sont de signes opposés.

Soit  $x < -1$ . Alors,  $-x > 1$  et, d'après la question précédente,  $f(-x) \geq 0$ . Ainsi,  $f(x) \leq 0$ . Comme  $f'$  et  $f$  sont de même signe, alors  $f'(x) \leq 0$ .

La fonction  $f$  est donc décroissante sur  $] -\infty, -1[$ .

6. En reprenant les calculs de la question 2., pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} f(x) - 2x &= x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 2x \\ &= x \left( \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ , en utilisant le développement limité de  $(1+u)^{1/2}$ , il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$  et

$$\begin{aligned} f(x) - 2x &= x \left( 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon \left( \frac{1}{x} \right) - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon \left( \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$  et la droite  $\Delta$  est bien asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .

Remarquons enfin que  $f(x) - 2x \sim_{+\infty} -\frac{1}{2x}$ , qui est une quantité strictement négative. Ainsi, au voisinage de  $+\infty$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessous de  $\Delta$ .

7. TODO  $\square$

## II.3 - Équations fonctionnelles

### Solution de l'exercice 25.

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après l'équation satisfaite par  $f$ ,

$$|f(x) - f(0)| = |x|.$$

Ainsi, soit  $f(x) - f(0) = x$ , soit  $f(x) - f(0) = -x$ . En notant  $\varepsilon(x)$  ce signe, alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \varepsilon(x)x \\ f(x) &= \varepsilon(x)x + f(0). \end{aligned}$$

2. Soit  $x \neq 0$ . D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} (f(x) - f(1))^2 &= (x - 1)^2 \\ (\varepsilon(x)x - \varepsilon(1)1)^2 &= (x - 1)^2 \\ \varepsilon(x)^2 x^2 - 2\varepsilon(x)\varepsilon(1)x + \varepsilon(1)^2 1^2 &= x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Or,  $\varepsilon(x), \varepsilon(1) \in \{-1, 1\}$ , donc  $\varepsilon(x)^2 = \varepsilon(1)^2 = 1$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} x^2 - 2\varepsilon(x)\varepsilon(1)x + 1 &= x^2 - 2x + 1 \\ 2\varepsilon(x)\varepsilon(1)x &= 2x \\ \varepsilon(x)\varepsilon(1) &= 1, \text{ car } x \neq 0. \end{aligned}$$

Si  $\varepsilon(x) \neq \varepsilon(1)$ , alors l'un vaut 1 et l'autre vaut  $-1$  donc leur produit est différent de 1. On obtient ainsi une contradiction et

$$\forall x \neq 0, \varepsilon(x) = \varepsilon(1).$$

3. Soit  $f$  une fonction qui satisfait l'équation. D'après la question précédente, il existe  $\varepsilon(1) \in \{-1, 1\}$  tel que

$$\forall x \neq 0, f(x) = \varepsilon(1)x + f(0).$$

Cette équation est toujours valable lorsque  $x = 0$ . Ainsi, il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que

$$* \text{ soit } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + c,$$

$$* \text{ soit } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + c.$$

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions satisfont bien l'équation. Finalement, l'ensemble des fonctions recherchées est

$$\{x \mapsto x + c, x \mapsto -x + c, c \in \mathbb{R}\}.$$

□

### Solution de l'exercice 26.

1. Soit  $f$  satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. Alors,  $f(0)^2 = 2f(0)$ , soit  $f(0) = 0$  ou  $f(0) = 2$ .

2. Si  $f(0) = 0$ . Alors, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \cdot f(0) = f(x) + f(0)$ , soit  $f(x) = 0$  et  $f$  est la fonction nulle.

3. Si  $f(0) = 2$ . Alors, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \cdot 2 = f(x) + 2$ , soit  $f(x) = 2$  et  $f$  est la fonction constante égale à 2.

4. Réciproquement, la fonction nulle et la fonction constante égale à 2 sont bien solution de l'équation.

Finalement, l'ensemble des fonctions qui satisfont l'équation est :

$$\{x \mapsto 0, x \mapsto 2\}.$$

□

### Solution de l'exercice 27.

1. En évaluant en  $x = y = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} f(0 + 0) &= f(0) + f(0) \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Raisonnons par récurrence sur  $n$ .

**Initialisation.** Lorsque  $n = 0$ . D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} f(0 \times x) &= f(0) = 0, \\ 0f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $f(0 \times x) = 0 \times f(x)$  et la propriété est vraie à l'ordre 0.



**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $f(nx) = nf(x)$ . Alors,

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx+x) \\ &= f(nx) + f(x), \text{ d'après l'équation fonctionnelle} \\ &= nf(x) + f(x), \text{ d'après la relation de récurrence} \\ &= (n+1)f(x). \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre  $n+1$ .

**Conclusion.** Comme la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x).$$

**3.** On suppose que  $f$  est bornée. Ainsi, il existe un réel  $M$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} f(nx) &= nf(x) \\ f(x) &= \frac{f(nx)}{n} \\ 0 \leq |f(x)| &= \frac{|f(nx)|}{n} \\ &\leq \frac{M}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = f(x) = 0.$$

La fonction  $f$  est donc la fonction nulle.

**4.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après l'équation fonctionnelle en prenant  $y = -x$  et en utilisant la question **1.**,

$$\begin{aligned} f(x-x) &= f(x) + f(-x) \\ 0 &= f(x) + f(-x) \\ f(-x) &= -f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $f$  est impaire.

**5.** En utilisant la question **2.** avec  $x = 1$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1).$$

En utilisant la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(-n) = -f(n) = -nf(1).$$

**6.** Soit  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ . En utilisant la question **2.** avec  $n = q$  et  $x = \frac{p}{q}$ ,

$$\begin{aligned} f\left(q \times \frac{p}{q}\right) &= qf\left(\frac{p}{q}\right) \\ f(p) &= qf\left(\frac{p}{q}\right) \\ pf(1) &= qf\left(\frac{p}{q}\right), \text{ d'après la question précédente} \\ f\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p}{q}f(1). \end{aligned}$$

**7.** Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $(p_n/q_n)$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$ . D'après la question précédente,

$$f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{p_n}{q_n}f(1).$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$  et  $f$  est continue, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = f(x).$$

Ainsi, en passant à la limite dans l'égalité,

$$f(x) = xf(1).$$

**Remarque.** Il est intéressant dans cet exercice de remarquer la démarche.

On démontre la propriété  $f(x) = xf(1)$  :

- \* pour  $x \in \mathbb{N}$  dans la question **5.** première partie,
- \* pour  $x \in \mathbb{Z}$  dans la question **5.** seconde partie,

\* pour  $x \in \mathbb{Q}$  dans la question **6.**,

\* pour  $x \in \mathbb{R}$  avec l'hypothèse de continuité dans la question **7.**

On remarque également que la question **7.** suppose qu'il existe une suite de rationnels qui converge vers  $x$ . Il est aisé de construire cette suite en choisissant :

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}.$$

□