

T.D. III - Intégrale sur un segment

I - Calculs d'intégrales par primitives

Solution de l'exercice 1.

1. On décompose la fonction en une somme :

- * une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$,
- * une primitive de x est $\frac{x^2}{2}$,
- * une primitive de 1 est x .

Ainsi, une primitive de $x^2 + x + 1$ est

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 + x + 1) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{8}{3} + 2 + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{7}{3} + 3 - \frac{1}{2} = \frac{16}{3} - \frac{1}{2} = \frac{32 - 3}{6} = \frac{29}{6}. \end{aligned}$$

2. On décompose la fonction en une somme :

- * une primitive de $2x^3$ est $\frac{2x^4}{4} = \frac{x^4}{2}$,
- * une primitive de $4x$ est $\frac{4x^2}{2} = 2x^2$,
- * une primitive de 2 est $2x$.

Ainsi, une primitive de $2x^3 + 4x + 2$ est

$$\frac{x^4}{2} + 2x^2 + 2x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2x^3 + 4x + 2) dx &= \left[\frac{x^4}{2} + 2x^2 + 2x \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{2^4}{2} + 2 \times 2^2 + 2 \times 2 \right) - \left(\frac{0^4}{2} - 2 \times 0^2 + 2 \times 0 \right) \\ &= 8 + 8 + 4 - 0 = 20. \end{aligned}$$

3. On décompose la fonction en une somme :

- * une primitive de $4x^3$ est $4 \frac{x^4}{4} = x^4$,
- * une primitive de $2x^2$ est $2 \frac{x^3}{3}$,
- * une primitive de -1 est $-x$.

Ainsi, une primitive de $4x^3 + 2x^2 - 1$ est

$$x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned} \int_1^2 (4x^3 + 2x^2 - 1) dx &= \left[x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x \right]_1^2 \\ &= \left(2^4 + \frac{2}{3}2^3 - 2 \right) - \left(1^4 + \frac{2}{3}1^3 - 1 \right) \\ &= 16 + \frac{16}{3} - 2 - 1 - \frac{2}{3} + 1 \\ &= 14 + \frac{14}{3} = \frac{56}{3}. \end{aligned}$$

4. On décompose la fonction en une somme :

- * une primitive de x^{10} est $\frac{x^{11}}{11}$,
- * une primitive de $\frac{1}{5}x^4$ est $\frac{1}{5} \times \frac{x^5}{5} = \frac{1}{25}x^5$,
- * une primitive de $\frac{1}{2}$ est $\frac{x}{2}$.

Ainsi, une primitive de $x^{10} + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}$ est

$$\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^5}{25} + \frac{x}{2}.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(x^{10} + \frac{x^4}{5} + \frac{1}{2}\right) dx &= \left[\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^5}{25} + \frac{x}{2}\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1^{11}}{11} + \frac{1^5}{25} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{0^{11}}{11} + \frac{0^5}{25} + \frac{0}{2}\right) \\ &= \frac{1}{11} + \frac{1}{25} + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{50 + 22 + 275}{550} = \frac{347}{550}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 2.

1. Une primitive de $x^{3/2}$ est donnée par

$$\frac{x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^{5/2}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 x^{3/2} dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}1^{5/2} - \frac{2}{5}0^{5/2} = \frac{2}{5}.$$

2. Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ est donnée par

$$\frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.$$

3. Une primitive de $\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}x^{-2}$ est donnée par

$$\frac{1}{3} \times \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{3} \times \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{3x^2} dx &= \left[-\frac{1}{3x}\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3 \times 2}\right) - \left(-\frac{1}{3 \times 1}\right) \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

4. Une primitive de $\frac{4}{x^5} = 4x^{-5}$ est donnée par

$$4 \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = 4 \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{x^4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{4}{x^5} dx &= \left[-\frac{1}{x^4}\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2^4}\right) - \left(-\frac{1}{1^4}\right) \\ &= -\frac{1}{16} + 1 = \frac{15}{16}.\end{aligned}$$

5. La fonction $(2x+1)(x^2+x)^5$ est de la forme $u'(x)u(x)^5$, avec $u(x) = x^2+x$. Ainsi, une primitive de $(2x+1)(x^2+x)^5$ est donnée par

$$\frac{1}{6}u(x)^6 = \frac{(x^2+x)^6}{6}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 (2x+1)(x^2+x)^5 dx &= \left[\frac{(x^2+x)^6}{6}\right]_{-1}^0 \\ &= \frac{(0^2+0)^6}{6} - \frac{((-1)^2+(-1))^6}{6} \\ &= 0 - 0 = 0.\end{aligned}$$

6. En posant $u(x) = x^3 + 3x + 4$, alors $u'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$. Ainsi, la fonction

$$(x^2+1)(x^3+3x+4) = \frac{1}{3}3(x^2+1)(x^3+3x+4)$$

est de la forme $\frac{1}{3}u'(x)u(x)$. Ainsi, une de ses primitives est

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(x^3 + 3x + 4)^2 = \frac{(x^3 + 3x + 4)^2}{6}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4) dx &= \left[\frac{(x^3 + 3x + 4)^2}{6} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{(0^3 + 3 \times 0 + 4)^2}{6} - \frac{((-1)^3 + 3 \times (-1) + 4)^2}{6} \\ &= \frac{4^2}{6} - 0 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. Une primitive de $\frac{3}{x} = 3\frac{1}{x}$ est $3\ln(x)$. Ainsi,

$$\int_1^2 \frac{3}{x} dx = [3\ln(x)]_1^2 = 3\ln(2) - 3\ln(1) = 3\ln(2).$$

2. En posant $u(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, alors $u'(x) = 3x^2 + 4x$. Ainsi, $\frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 1}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ et une primitive est donnée par

$$\ln |x^3 + 2x^2 + 1|.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 1} dx &= [\ln |x^3 + 2x^2 + 1|]_1^2 \\ &= \ln |2^3 + 2 \times 2^2 + 1| - \ln |1^3 + 2 \times 1^2 + 1| \\ &= \ln(17) - \ln(4) = \ln(17) - 2\ln(2). \end{aligned}$$

3. Une primitive de e^{2x} est donnée par $\frac{e^{2x}}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 e^{2x} dx &= \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{e^{2 \times 2}}{2} - \frac{e^{2 \times (-2)}}{2} \\ &= \frac{e^4 - e^{-4}}{2}. \end{aligned}$$

4. Une primitive de $\frac{1}{e^{12x}} = e^{-12x}$ est donnée par

$$\frac{e^{-12x}}{-12} = -\frac{e^{-12x}}{12}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{1}{e^{12x}} dx &= \left[-\frac{e^{-12x}}{12} \right]_{-2}^2 \\ &= -\frac{e^{-12 \times 2}}{12} - \left(-\frac{e^{-12 \times (-2)}}{12} \right) \\ &= \frac{-e^{-24} + e^{24}}{12} = \frac{e^{24} - e^{-24}}{12}. \end{aligned}$$

5. En posant $u(x) = e^x + x$, alors $u'(x) = e^x + 1$ et

$$(e^x + 1)(e^x + x)^{22} = u'(x)u(x)^{22}.$$

Ainsi, une primitive de cette fonction est donnée par

$$\frac{u(x)^{23}}{23} = \frac{(e^x + x)^{23}}{23}.$$

En utilisant cette primitive, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^x + 1)(e^x + x)^{22} dx &= \left[\frac{(e^x + x)^{23}}{23} \right]_0^1 \\ &= \frac{(e^1 + 1)^{23}}{23} - \frac{(e^0 + 0)^{23}}{23} \\ &= \frac{(e + 1)^{23} - 1}{23}. \end{aligned}$$

6. En posant $u(x) = e^x + x$, alors $u'(x) = e^x + 1$ et

$$\frac{e^x + 1}{e^x + x} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Ainsi, une primitive de cette fonction est donnée par

$$\ln |e^x + x|.$$

En utilisant cette primitive, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx &= [\ln |e^x + x|]_0^1 \\ &= \ln |e^1 + 1| - \ln |e^0 + 0| \\ &= \ln(e+1) - \ln(1) = \ln(e+1).\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. En décomposant la fonction en une somme de fonctions :

- * une primitive de x^2 est donnée par $\frac{x^3}{3}$,
- * une primitive de $3x$ est donnée par $\frac{3x^2}{2}$,
- * une primitive de 1 est donnée par x .

Ainsi, une primitive de $x^2 + 3x + 1$ est donnée par

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x.$$

En utilisant cette primitive,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2 + 3x + 1) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1^3}{3} + \frac{3 \times 1^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{3 \times 0^2}{2} + 0 \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 \\ &= \frac{2+9+6}{6} = \frac{17}{6}.\end{aligned}$$

2. Une primitive de e^{3x} est donnée par $\frac{e^{3x}}{3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 e^{3x} dx &= \left[\frac{e^{3x}}{3} \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{e^{3 \times 1}}{3} - \frac{e^{3 \times (-2)}}{3} \\ &= \frac{e^3 - e^{-6}}{3}.\end{aligned}$$

3. La fonction e^3 est constante donc une de ses primitives est $e^3 x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^{-1} e^3 dx &= [e^3 x]_1^{-1} \\ &= e^3(-1) - e^3 \times 1 = -2e^3.\end{aligned}$$

4. Une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_2^1 \frac{1}{x} dx &= [\ln(x)]_2^1 \\ &= \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2).\end{aligned}$$

5. En décomposant la fonction sous forme de somme,

- * une primitive de e^x est e^x ,
- * une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$.

Ainsi, une primitive de $2e^x + 3x^2$ est

$$2e^x + 3\frac{x^3}{3} = 2e^x + x^3.$$

En utilisant cette primitive, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 2e^x + 3x^2 dx &= [2e^x + x^3]_0^1 \\ &= 2e^1 + 1^3 - (2e^0 + 0^3) \\ &= 2e + 1 - 2 = 2e - 1.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5. En posant $u(x) = \ln(x)$, alors $u'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi, $\frac{\ln(x)}{x}$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$ et une primitive est donnée par

$$\frac{1}{2}u(x)^2 = \frac{(\ln(x))^2}{2}.$$

Ainsi,

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_1^A = \frac{\ln(A)^2}{2} - \frac{\ln(1)^2}{2} = \frac{\ln(A)^2}{2}.$$

□

II - Fonctions définies par morceaux

Solution de l'exercice 6.

1. TODO

x		1		3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$		0

2. a) Comme f est nulle sur $[-2, 0]$,

$$\int_{-2}^0 f(x) \, dx = \int_{-2}^0 0 \, dx = 0.$$

b) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3/2} f(x) \, dx &= \int_{-1}^1 f(x) \, dx + \int_1^{3/2} f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 0 \, dx + \int_1^{3/2} \frac{1}{2} \, dx \\ &= 0 + \left[\frac{x}{2} \right]_1^{3/2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

c) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) \, dx &= \int_{-1}^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 0 \, dx + \int_1^2 \frac{1}{2} \, dx \\ &= 0 + \left[\frac{x}{2} \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

d) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_{-4}^3 f(x) \, dx &= \int_{-4}^1 f(x) \, dx + \int_1^3 f(x) \, dx \\ &= \int_{-4}^1 0 \, dx + \int_1^3 \frac{1}{2} \, dx \\ &= 0 + \left[\frac{x}{2} \right]_1^3 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

e) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{10} f(x) \, dx &= \int_{-5}^1 f(x) \, dx + \int_1^3 f(x) \, dx + \int_3^{10} f(x) \, dx \\ &= \int_{-5}^1 0 \, dx + \int_1^3 \frac{1}{2} \, dx + \int_3^{10} 0 \, dx \\ &= 0 + \left[\frac{x}{2} \right]_1^3 + 0 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

3. Comme $1 \leq x \leq 3$, en utilisant le calcul précédent,

$$\int_1^x f(t) \, dt = \int_1^x \frac{1}{2} \, dt = \left[\frac{t}{2} \right]_1^x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. TODO

x		0
$f(x)$	0	$2e^{-2x}$

2. Une primitive de $2e^{-2x}$ est donnée par

$$2 \frac{e^{-2x}}{-2} = \frac{e^{-2x}}{-1} = -e^{-2x}.$$

a) Comme f est nulle sur $[-2, 0]$,

$$\int_{-2}^0 f(x) \, dx = \int_{-2}^0 0 \, dx = 0.$$

b) En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3/2} f(x) \, dx &= \int_{-1}^0 f(x) \, dx + \int_0^{3/2} f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^{3/2} 2e^{-2x} \, dx \\ &= 0 + [-e^{-2x}]_0^{3/2} \\ &= -e^{-2 \times \frac{3}{2}} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= -e^{-3} + 1 = 1 - e^{-3}. \end{aligned}$$

c) En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) \, dx &= \int_{-1}^0 f(x) \, dx + \int_0^2 f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^2 2e^{-2x} \, dx \\ &= 0 + [-e^{-2x}]_0^2 \\ &= -e^{-2 \times 2} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= -e^{-4} + 1 = 1 - e^{-4}. \end{aligned}$$

d) En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-4}^3 f(x) \, dx &= \int_{-4}^0 f(x) \, dx + \int_0^3 f(x) \, dx \\ &= \int_{-4}^0 0 \, dx + \int_0^3 2e^{-2x} \, dx \\ &= 0 + [-e^{-2x}]_0^3 \\ &= -e^{-2 \times 3} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= -e^{-6} + 1 = 1 - e^{-6}. \end{aligned}$$

e) En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{10} f(x) \, dx &= \int_{-5}^0 f(x) \, dx + \int_0^{10} f(x) \, dx \\ &= \int_{-5}^0 0 \, dx + \int_0^{10} 2e^{-2x} \, dx \\ &= 0 + [-e^{-2x}]_0^{10} \\ &= -e^{-2 \times 10} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= -e^{-20} + 1 = 1 - e^{-20}. \end{aligned}$$

f) Soit $x \geq 0$. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) \, dt &= \int_0^x 2e^{-2t} \, dt \\ &= [-e^{-2t}]_0^x \\ &= -e^{-2x} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= -e^{-2x} + 1 = 1 - e^{-2x}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) \, dt = 1.$$

□

Solution de l'exercice 8. On remarque que $x - 2 \geq 0$ si et seulement si $x \geq 2$. Ainsi,

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{si } x \leq 2 \end{cases}.$$

On peut représenter les valeurs de la fonction dans le tableau suivant :

x	2
$ x - 2 $	$-(x - 2) \quad \quad x - 2$

En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^5 |x-2| \, dx &= \int_{-1}^2 |x-2| \, dx + \int_2^5 |x-2| \, dx \\
 &= \int_{-1}^2 -(x-2) \, dx + \int_2^5 (x-2) \, dx \\
 &= \left[-\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^5 \\
 &= -\left(\frac{2^2}{2} - 2 \times 2\right) + \frac{(-1)^2}{2} - 2 \times (-1) + \dots \\
 &\quad \dots + \frac{5^2}{2} - 2 \times 5 - \left(\frac{2^2}{2} - 2 \times 2\right) \\
 &= 2 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{25}{2} - 10 + 2 = -4 + \frac{26}{2} \\
 &= 13 - 4 = 9.
 \end{aligned}$$

2^e méthode. On aurait pu remarquer qu'en posant $u(x) = x - 2$, alors $u'(x) = 1$ et $x - 2 = u'(x)u(x)$. Ainsi, une primitive de $x - 2$ est $\frac{(x-2)^2}{2}$. Les calculs sont alors plus simples.

3^e méthode. On remarque que l'aire sous la courbe est égale à l'aire de deux triangles rectangles dont la base est de longueur 2 et la hauteur de longueur 3. \square

III - Linéarité de l'intégrale

Solution de l'exercice 9.

1. Soit $t \in [0, 1]$. En mettant sous le même dénominateur,

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t} = \frac{1+t-1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

2. En utilisant la question précédente puis la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{t}{1+t} \, dt &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) \, dt \\
 &= \int_0^1 1 \, dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, dt \\
 &= [t]_0^1 - [\ln|1+t|]_0^1 \\
 &= 1 - 0 - (\ln(1+1) - \ln(1+0)) \\
 &= 1 - \ln(2).
 \end{aligned}$$

\square

Solution de l'exercice 10. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \, dt + \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} + \frac{t^n}{1+t} \right) \, dt \\
 &= \int_0^1 \frac{t^{n+1} + t^n}{1+t} \, dt \\
 &= \int_0^1 t^n \frac{1+t}{1+t} \, dt \\
 &= \int_0^1 t^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

\square

Solution de l'exercice 11.

1. En posant $u(x) = 1 + x$, alors $u'(x) = 1$ et $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{1+x}$. Ainsi,

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln|1+1| - \ln|1+0| = \ln(2).$$

2. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+x}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

3. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} I + J &= 1 \\ J &= 1 - I = 1 - \ln(2). \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. En posant $u(x) = 1 + x^2$, alors $u'(x) = 2x$ et

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right]_0^1 \\ &= \frac{\ln |1+1^2|}{2} - \frac{\ln |1+0^2|}{2} = \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

2. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 x \frac{1+x^2}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} I + J &= \frac{1}{2} \\ J &= \frac{1}{2} - I = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{1 - \ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

□

IV - Dérivation par rapport aux bornes

Solution de l'exercice 13. La fonction F est dérivable et

$$F'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Ainsi, $F' \geq 0$ et la fonction F est croissante.

□

Solution de l'exercice 14.

1. La fonction f est dérivable et $f'(x) = \frac{e^x}{x}$.

2. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= \frac{e^1}{1}(x-1) + \int_1^1 \frac{e^t}{t} dt \\ &= e(x-1) + 0 = e(x-1). \end{aligned}$$

3. La fonction f' est de la forme $f'(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, où $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$.
Comme $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$, alors

$$f''(x) = \frac{e^x x - e^x \times 1}{x^2} = e^x \frac{x-1}{x^2}.$$

□

V - Inégalités

Solution de l'exercice 15.

1. En posant $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^3$, alors $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{e^x x^3 - e^x (3x^2)}{(x^3)^2} \\ &= e^x x^2 \frac{x-3}{x^6} = e^x \frac{x-3}{x^4}. \end{aligned}$$

2. Comme $e^x \geq 0$ et $x^4 \geq 0$, g' est du signe de $x-3$.

De plus, $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

D'après le théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$.

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	e	$\searrow \frac{e^3}{27}$	$\nearrow +\infty$

3. D'après le tableau de variations, la fonction g est décroissante

sur $[1, 3]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 &\leq x \leq 3 \\ g(3) &\leq g(x) \leq g(1), \text{ car } g \text{ est décroissante} \\ 0 &\leq \frac{e^3}{27} \leq g(x) \leq e \\ \int_1^3 0 \, dx &\leq \int_1^3 g(x) \, dx \leq \int_1^3 e \, dx, \text{ car } 1 \leq 3 \text{ et l'intégrale est croissante} \\ 0 &\leq \int_1^3 g(x) \, dx \leq e[x]_1^3 \\ 0 &\leq \int_1^3 g(x) \, dx \leq e(3-1) \\ 0 &\leq \int_1^3 g(x) \, dx \leq 2e. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. Comme la fonction inverse est décroissante,

$$\begin{aligned} 1 &\leq t \leq x \\ \frac{1}{x} &\leq \frac{1}{t} \leq 1 \\ \frac{e^t}{x} &\leq \frac{e^t}{t}, \text{ car } e^t \geq 0 \\ \int_1^x \frac{e^t}{x} \, dt &\leq \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt, \text{ car } 1 \leq x \text{ et l'intégrale est croissante} \\ \frac{1}{x} \int_1^x e^t \, dt &\leq f(x), \text{ car } x \text{ est indépendant de } t \\ \frac{1}{x} [e^t]_1^x &\leq f(x) \\ \frac{e^x - e}{x} &\leq f(x). \end{aligned}$$

2. En factorisant par e^x ,

$$\frac{e^x - e}{x} = \frac{e^x}{x} (1 - e^{1-x}).$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{1-x} = 1$.

Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e}{x} = +\infty$.

D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

□

Solution de l'exercice 17.

1. Comme $x \in [0, 1/2]$, alors $x^2 \in [0, 1]$ et $1 - x^2 \geq 0$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ 0 &\leq x \times x^{n-1} \leq 1 \times x^{n-1}, \text{ car } x^{n-1} \geq 0 \\ 0 &\leq x^n \leq x^{n-1} \\ 0 &\leq \frac{x^n}{1-x^2} \leq \frac{x^{n-1}}{1-x^2}, \text{ car } 1-x^2 \geq 0 \\ \int_0^{1/2} 0 \, dx &\leq \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2} \, dx \leq \int_0^{1/2} \frac{x^{n-1}}{1-x^2} \, dx, \text{ car } 0 \leq 1/2 \\ 0 &\leq u_n \leq u_{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

2. On a montré à la question précédente que (u_n) est minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, comme (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.

3. En utilisant les propriétés sur x ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 &\leq x^2 \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} &\leq -x^2 \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{4} &\leq 1 - x^2 \leq 0 \\ \frac{1}{1-x^2} &\leq \frac{1}{\frac{3}{4}}, \text{ car la fonction inverse est décroissante} \\ \frac{x^n}{1-x^2} &\leq \frac{4}{3} x^n, \text{ car } x^n \geq 0 \\ \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2} \, dx &\leq \frac{4}{3} \int_0^{1/2} x^n \, dx, \text{ par croissance de l'intégrale} \\ u_n &\leq \frac{4}{3} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{1/2} \\ &\leq \frac{4}{3} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} \\ &\leq \frac{4}{3(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

4. Comme $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0.$$

Comme, pour tout n entier naturel,

$$0 \leq u_n \leq \frac{4}{3(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. En utilisant la croissance des fonctions puissances puis du logarithme,

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x^n \leq 1^n, \text{ par croissance des fonctions puissances sur } \mathbb{R}_+$$

$$1 \leq 1 + x^n \leq 1 + 1$$

$$\ln(1) \leq \ln(1 + x^n) \leq \ln(2), \text{ car } \ln \text{ est croissante}$$

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx \leq \int_0^1 \ln(2) \, dx, \text{ car } 0 \leq 1$$

$$0 \leq I_n \leq [\ln(2)x]_0^1$$

$$0 \leq I_n \leq \ln(2) \times 1 - \ln(2) \times 0$$

$$0 \leq I_n \leq \ln(2).$$

2. En reprenant la stratégie précédente,

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x \times x^n \leq 1 \times x^n, \text{ car } x^n \geq 0$$

$$1 \leq 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$$

$$0 \leq \ln(1 + x^{n+1}) \leq \ln(1 + x^n)$$

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^{n+1}) \, dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx, \text{ car } 0 \leq 1$$

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante.

3. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, la suite (I_n) converge. \square

VI - Intégrations par parties**Solution de l'exercice 19.**

1. On pose $\begin{cases} u(x) &= x \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= e^x \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0, 1]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^x \, dx &= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x \, dx \\ &= 1 e^1 - 0 - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e^1 - e^0) = 1. \end{aligned}$$

2. On pose $\begin{cases} u(x) &= x \\ v'(x) &= e^{2x} \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, 2]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^2 x e^{2x} \, dx &= \left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 1 \times \frac{e^{2x}}{2} \, dx \\ &= 2 \times \frac{e^{2 \times 2}}{2} - 1 \times \frac{e^{2 \times 1}}{2} - \frac{1}{2} \int_1^2 e^{2x} \, dx \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2} \right) \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{4e^4 - 2e^2 - e^4 + e^2}{4} \\ &= \frac{3e^4 - e^2}{4}. \end{aligned}$$

3. On pose $\begin{cases} u(x) &= \ln(x) \\ v'(x) &= x \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v(x) &= \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, e]$.

Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^e x \ln(x) \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{e^2 \ln(e)}{2} - \frac{1^2 \ln(1)}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.\end{aligned}$$

4. On pose $\begin{cases} u(x) &= x^2 \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= 2x \\ v(x) &= e^x \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0, 1]$.
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x \, dx = e - 0 - 2 \int_0^1 x e^x \, dx.$$

Pour calculer cette nouvelle intégrale, on effectue une nouvelle intégration par parties. On pose $\begin{cases} u(x) &= x \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= e^x \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0, 1]$.
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^x \, dx &= e - 2 \left([x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x \, dx \right) \\ &= e - 2 \left(e^1 - 0 - [e^x]_0^1 \right) \\ &= e - 2 \left(e - (e - e^0) \right) = e - 2(e - e + 1) \\ &= e - 2.\end{aligned}$$

5. On pose $\begin{cases} u(x) &= \ln(x) \\ v'(x) &= x^2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v(x) &= \frac{x^3}{3} \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, 2]$.

Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 \ln(x) \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{2^3 \ln(2)}{3} - \frac{1^3 \ln(1)}{3} - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 \, dx \\ &= \frac{8 \ln(2)}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{8 \ln(2)}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) \\ &= \frac{3 \times 8 \ln(2) - 7}{9} = \frac{8 \ln(8) - 7}{9}.\end{aligned}$$

6. On pose $\begin{cases} u(t) &= (\ln(t))^2 \\ v'(t) &= 1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(t) &= 2 \times \frac{1}{t} \times \ln(t) \\ v(t) &= t \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, e]$.
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln(t))^2 \, dt &= \int_1^e 1 \times (\ln(t))^2 \, dt \\ &= [t(\ln(t))^2]_1^e - \int_1^e t \times 2 \times \frac{\ln(t)}{t} \, dt \\ &= e \ln(e)^2 - 1 \ln(1)^2 - 2 \int_1^e \ln(t) \, dt \\ &= e - 2 \int_1^e \ln(t) \, dt.\end{aligned}$$

On pose $\begin{cases} u(t) &= \ln(t) \\ v'(t) &= 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v(t) &= t \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, e]$.
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^e 1 \times (\ln(t))^2 \, dt &= e - 2 \left([t \ln(t)]_1^e - \int_1^e t \times \frac{1}{t} \, dt \right) \\ &= e - 2 \left(e \ln(e) - 1 \ln(1) - [t]_1^e \right) \\ &= e - 2(e - (e - 1)) = e - 2.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 20. On pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, A]$.

Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx &= \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^A - \int_1^A \left(-\frac{1}{x} \right) \times \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} - \left(-\frac{\ln(1)}{1} \right) + \int_1^A \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^A \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left(-\frac{1}{A} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1 = 1 - \frac{\ln(A) + 1}{A}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 21.

1. On pose $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = e^t \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v(t) = e^t \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, x]$.

Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt &= \left[e^t \times \frac{1}{t} \right]_1^x - \int_1^x e^t \times \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{e^x}{x} - \frac{e^1}{1} + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt \\ &= \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

2. On pose $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t^2} \\ v'(t) = e^t \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(t) = -\frac{2}{t^3} \\ v(t) = e^t \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, x]$.
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt &= \left[e^t \frac{1}{t^2} \right]_1^x - \int_1^x e^t \times \left(-\frac{2}{t^3} \right) dt \\ &= \frac{e^x}{x^2} - \frac{e^1}{1^2} + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \\ &= \frac{e^x}{x^2} - e + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt \\ &= \frac{e^x}{x} - e + \frac{e^x}{x^2} - e + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \\ &= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 22.

1. En utilisant la définition,

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 (1-t)^0 e^t dt = \int_0^1 e^t dt \\ &= [e^t]_0^1 = e^1 - e^0 \\ &= e - 1. \end{aligned}$$

2. On pose $f(t) = (2-t)e^t$. La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables et en appliquant la formule de la dérivée d'un produit,

$$\begin{aligned} f'(t) &= -e^t + (2-t)e^t = e^t(-1+2-t) \\ &= (1-t)e^t = g(t). \end{aligned}$$

Ainsi, $f' = g$ et f est une primitive de g .

3. Comme f est une primitive de g ,

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 (1-t)^1 e^t dt = \int_0^1 (1-t) e^t dt = \int_0^1 g(t) dt \\ &= [f(t)]_0^1 = [(2-t) e^t]_0^1 \\ &= (2-1) e^1 - (2-0) e^0 \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

4. On pose $\begin{cases} u(t) &= (1-t)^{n+1} \\ v'(t) &= e^t \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(t) &= -(n+1)(1-t)^n \\ v(t) &= e^t \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0, 1]$.

Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt = [e^t (1-t)^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 e^t (-(n+1)(1-t)^n) dt \\ &= e^1 (1-1)^{n+1} - e^0 (1-0)^{n+1} + \dots \\ &\quad \dots + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \\ &= -1 + (n+1)u_n = (n+1)u_n - 1. \end{aligned}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt - \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \\ &= \int_0^1 ((1-t)^{n+1} e^t - (1-t)^n e^t) dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^n e^t (1-t-1) dt \\ &= - \int_0^1 (1-t)^n t e^t dt. \end{aligned}$$

Comme $(1-t)^n t e^t \geq 0$ et $0 \leq 1$, alors $\int_0^1 (1-t)^n t e^t dt \geq 0$. Ainsi,

$u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Finalement, la suite (u_n) est décroissante.

Comme $(1-t)^n e^t \geq 0$, alors $u_n \geq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge. Notons ℓ sa limite. Comme $0 \leq u_n \leq u_0$, alors $0 \leq \ell \leq u_0$.

Supposons que $\ell \neq 0$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)u_n = \infty$. Comme $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$, en passant à la limite dans l'égalité, on obtient $\ell = \infty$, ce qui est impossible. Ainsi, $\ell = 0$.

6. En utilisant la question 4.,

$$nu_n = u_{n+1} - u_n + 1.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0 - 0 + 1 = 1$. □

Solution de l'exercice 23.

1. En utilisant la définition,

$$u_0 = \int_1^e t(\ln(t))^0 dt = \int_1^e t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

2. a) La fonction logarithme népérien étant croissante,

$$\begin{aligned} 1 &\leq t \leq e \\ \ln(1) &\leq \ln(t) \leq \ln(e) \\ 0 &\leq \ln(t) \leq 1. \end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les définitions ainsi que la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_1^e t(\ln(t))^{n+1} dt - \int_1^e t(\ln(t))^n dt \\ &= \int_1^e (t(\ln(t))^{n+1} - t(\ln(t))^n) dt \\ &= \int_1^e t(\ln(t))^n (\ln(t) - 1) dt. \end{aligned}$$

Comme $t \in [1, e]$,

$$\begin{aligned} t(\ln(t))^n (\ln(t) - 1) &\leq 0 \\ \int_1^e t(\ln(t))^n (\ln(t) - 1) dt &\leq \int_1^e 0 dt \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

3. On pose $\begin{cases} u(t) &= (\ln(t))^{n+1} \\ v'(t) &= t \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(t) &= (n+1) \times \frac{1}{t} \times (\ln(t))^n \\ v(t) &= \frac{t^2}{2} \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, e]$.

Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_1^e t(\ln(t))^{n+1} dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} (\ln(t))^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \times (n+1) \frac{(\ln(t))^n}{t} dt \\ &= \frac{e^2}{2} (\ln(e))^{n+1} - \frac{1^2}{2} (\ln(1))^{n+1} - \frac{n+1}{2} \int_1^e t(\ln(t))^n dt \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} u_n. \end{aligned}$$

4. En utilisant la question **1.** et la question précédente,

$$\begin{aligned} u_1 = u_{0+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{0+1}{2} u_0 \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{e^2-1}{2} \\ &= \frac{e^2+1}{4}, \\ u_2 = u_{1+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{1+1}{2} u_1 \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2+1}{4} = \frac{e^2-1}{4}, \\ u_3 = u_{2+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{2+1}{2} u_2 \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2}{2} - \frac{3e^2-3}{8} \\ &= \frac{e^2+3}{8}. \end{aligned}$$

□