VIII - Réduction des matrices carrées

I - Matrices diagonalisables

I.1 - Diagonalisabilité

Définition 1 - Matrices diagonalisables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La matrice A est *diagonalisable* s'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exemple 1 - Matrice diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- D'après la définition du produit matriciel,

$$AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- De plus, en utilisant la méthode de Gauss-Jordan,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \end{array}$$

La matrice P est donc inversible.

En reprenant l'égalité trouvée précédente et l'inversibilité de P,

$$\begin{aligned} AP &= PD \\ APP^{-1} &= PDP^{-1} \\ AI &= PDP^{-1} \\ A &= PDP^{-1} \end{aligned}$$

La matrice A est donc diagonalisable.

I.2 - Valeurs propres, Vecteurs propres

Définition 2 - Valeurs propres, Vecteurs propres

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Le réel λ est une *valeur propre* de la matrice A s'il existe une matrice colonne X telle que

- X soit non nulle,
- $AX = \lambda X$.

La matrice colonne X est un *vecteur propre* associé à la valeur propre λ.

Exemple 2 - Valeurs / Vecteurs propres

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors,

$$AX = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 1+1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = 2X.$$

Ainsi, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

Proposition 1 - Vecteurs propres / Diagonalisation

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que A possède 3 valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, λ_3 associées aux vecteurs propres X_1, X_2, X_3. En notant P la matrice dont les colonnes sont X_1, X_2, X_3 et D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont λ_1, λ_2, λ_3, alors

$$A = PDP^{-1}.$$

Exemple 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- D'après la définition du produit matriciel,

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-4-4 \\ 3-1-3 \\ 5-4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_1.$$

  Ainsi, X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

- D'après la définition du produit matriciel,

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+4 \\ -1+3 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2X_2.$$

  Ainsi, X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

- D'après la définition du produit matriciel,

$$AX_3 = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-4 \\ 3-3 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3X_3.$$

  Ainsi, X_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

Proposition 2 - Diagonalisabilité et Valeurs propres (H.P.)

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, P une matrice inversible dont les colonnes sont notées X_1, X_2, X_3 et $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$.
Si $A = PDP^{-1}$, alors $AX_1 = d_1X_1$, $AX_2 = d_2X_2$ et $AX_3 = d_3X_3$.

II - Polynômes annulateurs

II.1 - Définition

Définition 3 - Polynôme annulateur

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$ un polynôme non nul. Le polynôme Q est un *polynôme annulateur* de A si

$$Q(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_pA^p = 0.$$

Exemple 4 - Polynôme annulateur

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $Q(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$. Alors,

$$\begin{aligned}
Q(A) &= A^3 - 4A^2 + A + 6I \\
&= \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}^3 - 4\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}^2 + \cdots \\
&\cdots + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 55 & -28 & -28 \\ 9 & -1 & -9 \\ 47 & -28 & -20 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 17 & -8 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 13 & -8 & -4 \end{pmatrix} + \cdots \\
&\cdots + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, Q est un polynôme annulateur de A.

En particulier, on obtient alors

$$\begin{aligned}
A^3 - 4A^2 + A + 6I &= 0 \\
A(A^2 - 4A + I) &= -6I
\end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I)$.

Proposition 3 - Taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Q(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - cb)$. Alors, $Q(A) = 0$.

Exemple 5 - Matrice de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. On pose

$$\begin{aligned}
Q(X) &= X^2 - (1+5)X + (1 \times 5 - (-1) \times 2) \\
&= X^2 - 6X + 7.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
Q(A) &= A^2 - 6A + 7I \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -6 & 23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, Q est un polynôme annulateur de A.

En particulier,

$$\begin{aligned}
A^2 - 6A + 7I &= 0 \\
A(A - 6I) &= -7I.
\end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{7}(A - 6I)$.

II.2 - Polynômes annulateurs et Valeurs propres

Proposition 4 - Valeurs propres & Racines de polynômes annulateurs

Soit A une matrice et Q un polynôme annulateur de A. Si λ est une valeur propre de A, alors λ est une racine de Q (c'est-à-dire que $Q(\lambda) = 0$).

Exemple 6 - Reprise de l'exemple précédent

- En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $Q(X) = X^2 - 6X + 7$, alors $Q(A) = 0$.
  Or, le discriminant du trinôme Q est $6^2 - 4 \times 7 = 8$ et $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Les racines de Q sont donc
  $$\frac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2} \text{ et } \frac{6 + 2\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2}.$$
  Les valeurs propres de A sont donc incluses dans l'ensemble $\left\{3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\right\}$.
- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $R(X) = X^3 - 7X^2 + 13X - 7$.
  Un simple calcul montre que $R(A) = 0$.
  Or, 1 est une racine évidente de R et un calcul usuel montre que
  $$R(X) = (X - 1)(X^2 - 6X + 7).$$
  D'après le calcul du point précédent,
  $$R(X) = (X - 1)(X - (3 - \sqrt{2}))(X - (3 + \sqrt{2})).$$
  Les valeurs propres de A sont donc incluses dans l'ensemble $\left\{1, 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\right\}$.

Un polynôme annulateur permet d'identifier les valeurs propres **possibles** pour une matrice.

II.3 - Recherche de valeurs / vecteurs propres

Proposition 5 - Recherche de vecteurs propres

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour montrer que λ est une valeur propre de A il faut déterminer les vecteurs X solutions du système linéaire $AX = \lambda X$ et montrer qu'il existe une solution non nulle.

Exemple 7 - Recherche de valeurs / vecteurs propres

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q(X) = (X - 5)(X + 1)(X + 2)$.

- **Un polynôme annulateur.** En utilisant la définition du produit matriciel,
  $$\begin{aligned} Q(A) &= (A - 5I)(A + I)(A + 2I) \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 & 28 \\ 14 & 14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
  Ainsi, Q est un polynôme annulateur de A.
- **Recherche des valeurs propres éventuelles.** Comme les racines de Q sont 5, -1 -2, les valeurs propres possible sont 5, -1, -2.
- **Recherche des vecteurs propres.**
  ⋆ Résolvons le système $AX = 5X$.
  $$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y &= 5x \\ 2x + y &= 5y \end{cases}$$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y &= 0 \\ 2x - 4y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_1}$$
  Ainsi, $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ satisfait $AX_1 = 5X_1$. Donc 5 est

valeur propre de A et X_1 est un vecteur propre associé.

$\star$ Résolvons le système $AX = -X$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y & = -x \\ 2x+y & = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y & = 0 \\ 2x+2y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y & = 0 \\ 0 & = 0 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1} \end{cases}$$

Ainsi, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ satisfait $AX_2 = -X_2$. Donc -1 est valeur propre de A et X_2 est un vecteur propre associé.

$\star$ Résolvons le système $AX = -2X$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y & = -2x \\ 2x+y & = -2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4y & = 0 \\ 2x+3y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4y & = 0 \\ 7y & = 0 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow 5L_2 - 2L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution du système $AX = -2X$ est le vecteur nul. Le réel -2 n'est donc pas une valeur propre de A.

Finalement, les valeurs propres de A sont -1 et 5.

- **Diagonalisation.** On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Comme $2 \times (-1) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$, alors P est inversible et $P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En posant $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= D \\ PP^{-1}AP &= PD \\ IAPP^{-1} &= PDP^{-1} \\ A &= PDP^{-1}. \end{aligned}$$

- **Application.** Une récurrence classique permet alors de montrer que pour tout n entier naturel,

$$A^n = PD^nP^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si (u_n) et (v_n) sont les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et

$$\forall\, n \geqslant 0, \begin{cases} u_{n+1} & = 3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} & = 2u_n + v_n \end{cases}$$

On peut définir le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, puis

(i). Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

(ii). À l'aide d'une récurrence, montrer que pour tout n entier naturel, $X_n = A^n X_0$.

(iii). En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n.