T.D. I - Analyse réelle

I - Suites

I.1 - Étude de suites

Exercice 1. (Suite arithmétique) Soit (u_n) une suite arithmétique. Sachant que $u_{80} = 393$ et $u_{15} = 133$, calculer u_1.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel non nul, $u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$.

1. Déterminer $u_1, \dots, u_5$ en écrivant les résultats sous la forme d'une puissance de 2.

2. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $v_n = \ln(u_n) - \ln(4)$. Déterminer la nature de la suite (v_n) et en déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3. Donner l'expression de u_n en fonction de n puis en déduire la limite de (u_n).

Exercice 3. (Sommes classiques) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer, en fonction de n les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} 1$. **2.** $\sum_{k=1}^{n} 2$. **3.** $\sum_{k=0}^{n} k$.

Exercice 4. (Une suite arithmético-géométrique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 12$.

1. Déterminer la solution ℓ de l'équation $\ell = -\frac{\ell}{2} + 12$.

Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - \ell$.

2. Déterminer la nature de la suite (v_n).

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

I.2 - Étude de limites

Exercice 5. (Série harmonique) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2. En déduire que (H_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 6. (Espérance d'une géométrique) Soit $q \in]-1, 1[$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$.

Exercice 7. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

2. Montrer que (S_n) est majorée par 2.

3. En déduire que (S_n) converge.

Exercice 8. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.

2. En supposant que (u_n) est majorée, aboutir à une contradiction.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 9. (Une suite homographique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$.

Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n).

2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 10. (Constante d'Euler) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Pour tout $x \geqslant 0$, montrer les inégalités

$$\ln(1+x) \leqslant x \text{ et } \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x).$$

2. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant u_n.$$

4. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $c_n = H_{n-1} - \ln(n)$.

5. Calculer $c_{n+1} - c_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (c_n).

6. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $c_n \leqslant 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$.

7. En déduire que la suite (c_n) est convergente.

II - Fonctions

II.1 - Développements limités

Exercice 11. (Calculs de limites en 0) Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}-1}$.

Exercice 12. (Équivalents en $+\infty$) Déterminer des équivalents simples, en $+\infty$, des fonctions suivantes :

1. $\frac{x^5+4x^4+2}{2x^3+x+1}$.

2. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

3. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

4. $\ln(1+x^2)$.

5. $\frac{e^{-x} + 3x + 2}{x^2+1}$.

Exercice 13. (Calculs de limites en $+\infty$) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{3/x} - 1\right)$.

Exercice 14. (Calculs de développements limités) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, en 0 de :

1. $\frac{e^x - 1}{x}$.

2. $\frac{1}{1+\ln(1+x)}$.

II.2 - Étude de courbes

Exercice 15. Déterminer l'équation de la tangente ainsi que le la position de la courbe de par rapport à cette tangente aux points précisés.

1. e^x en 0.

2. e^x en 2.

3. $\ln(x)$ en 1.

4. $x\,e^x$ en 0.

5. $\frac{e^x - 1}{x}$ en 0.

Exercice 16. On considère la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f.

2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in D \setminus \{-1, 1\}$, $f'(x)$ et $f(x)$ sont de même signe.

4. Déterminer les variations de f sur $[1, +\infty[$.

5. Montrer que, pour tout $x \in D$, $f(x)f(-x) = -1$ et en déduire les variations de f sur $]-\infty, -1]$.

6. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe représentative de f $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

7. Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ.