T.D. XI - Convergence Estimation

I - Inégalités

Solution de l'exercice 1.

1. Y compte le nombre de succès (être défectueux) lors d'une suite de 100 expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès 0,1. Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres 100 et 0,1.

2. D'après les propriétés des lois binomiales,

$$\mathbf{E}[Y] = 100 \times 0{,}1 = 10.$$

3. D'après l'inégalité de Markov, comme Y est à valeurs positives,

$$\mathbf{P}(Y \geqslant 20) \leqslant \frac{\mathbf{E}[Y]}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, il y a au plus une chance sur deux qu'il y ait plus de 20 ampoules défectueuses. □

Solution de l'exercice 2.

1. En notant X le nombre d'appels reçus en une heure, comme $X \hookrightarrow \mathscr{P}(4)$, alors le nombre moyen d'appels vaut $\mathbf{E}[X] = 4$.

2. Comme X est à valeurs positives, en utilisant l'inégalité de Markov,

$$\mathbf{P}(X \geqslant 8) \leqslant \frac{\mathbf{E}[X]}{8} = \frac{1}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 3. Comme $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors $\mathbf{E}[X] = \lambda$ et $\mathbf{V}(X) = \lambda$. Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([|X-\lambda| \geqslant \lambda]) &= \mathbf{P}([|X-\mathbf{E}[X]| \geqslant \lambda]) \\ &\leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. Comme Y compte le nombre de 1 dans une suite de 100 variables aléatoires de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de valoir 1 vaut $\frac{1}{4}$, alors $Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{1}{4}\right)$.

2. Comme $Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{1}{4}\right)$, alors

$$\mathbf{E}[Y] = 100 \times \frac{1}{4} = 25$$

et

$$\mathbf{V}(Y) = 100 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{75}{4}.$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([|Y-25| \geqslant 10]) &= \mathbf{P}([|Y-\mathbf{E}[Y]| \geqslant 10]) \\ &\leqslant \frac{\mathbf{V}(Y)}{100} \\ &\leqslant \frac{75}{4 \times 100} = \frac{3 \times 25}{4 \times 4 \times 25} \\ &\leqslant \frac{3}{16}.\end{aligned}$$

□

II - Convergence

Solution de l'exercice 5. On note X_i la valeur renvoyée par l'appel de la fonction `rd.randint(0, 2)`. Alors, X_i suit une loi uniforme sur l'ensemble des entiers compris entre 0 et 1, soit une loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1\}$. Ainsi,

$$\mathbf{P}([X_i = 0]) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{P}([X_i = 1]) = \frac{1}{2}.$$

On reconnaît ainsi que $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$.

Comme $\mathtt{s} = \sum_{i=0}^{\mathtt{N}-1} X_i$, alors $\mathtt{s/N}$ vaut $\frac{1}{\mathtt{N}} \sum_{i=0}^{\mathtt{N}-1} X_i$. Les variables $X_0, \ldots, X_{\mathtt{N}-1}$ sont indépendantes et suivent une même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. D'après la loi des grands nombres, cette quantité vaut environ $\mathbf{E}[X_1] = \frac{1}{2}$, ce qui est conforme au résultat obtenu. □

Solution de l'exercice 6. On note F la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$ et on rappelle que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Commençons par remarquer que $\mathtt{X}$ ne peut prendre que les valeurs -1, 2 et 4. De plus,

∗ $\mathtt{X}$ vaut -1 si et seulement si $\mathtt{u} < \frac{1}{3}$. Ainsi,

$$\mathbf{P}([\mathtt{X} = -1]) = \mathbf{P}([\mathtt{u} < 1/3]) = F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

∗ $\mathtt{X}$ vaut 2 si et seulement si $\frac{1}{3} \leqslant \mathtt{u} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Ainsi,

$$\mathbf{P}([\mathtt{X} = 2]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{3} \leqslant \mathtt{u} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right]\right) = F\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

∗ $\mathtt{X}$ vaut 4 dans les autres cas, donc

$$\mathbf{P}([\mathtt{X} = 4]) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

La loi de $\mathtt{X}$ peut ainsi être résumée dans le tableau suivant :

k	-1	2	4
$\mathbf{P}([\mathtt{X} = k])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

De plus, $\mathtt{s}$ est la somme de $\mathtt{N}$ réalisations de $\mathtt{X}$ indépendantes. Ainsi, d'après la loi des grands nombres,

$$\frac{\mathtt{s}}{N} \simeq \mathbf{E}[X] = -\frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{4}{2} = 2.$$

□

III - Estimation

Solution de l'exercice 7.

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

∗ D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en a.
Comme $\lim_{t \to a^-} f(t) = \lim_{t \to a^-} 0 = 0$ et $\lim_{t \to a^+} f(t) = \lim_{t \to a^+} \frac{3a^3}{t^4} = \frac{3}{a}$, la fonction f admet des limites finies à droite et à gauche en a.

∗ Comme $a > 0$, alors $a^3 > 0$ et la fonction f est positive sur $[a, +\infty[$. Ainsi, la fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

∗ Soit $M \geqslant 0$. Comme f est nulle sur $]-\infty, a]$,

$$\int_{-\infty}^{M} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^M \frac{3a^3}{t^4}\,\mathrm{d}t = 3a^3 \int_a^M t^{-4}\,\mathrm{d}t = 3a^3 \left[\frac{t^{-4+1}}{-4+1}\right]_a^M = 3a^3 \left(\frac{1}{3a^3} -\right.$$

Comme $\lim_{M \to +\infty} \frac{1}{M^3} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 3a^3 \left(\frac{1}{3a^3} - 0\right) = 1.$$

2. Soit $M \geqslant 0$.

$$\int_{-\infty}^{M} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^M \frac{3a^3}{t^3}\,\mathrm{d}t = 3a^3 \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_a^M$$
$$= 3a^3 \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2M^2}\right).$$

Comme $\lim_{M \to +\infty} \frac{1}{2M^2} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3a^3}{2a^2} = \frac{3a}{2}.$$

De manière analogue,

$$\int_{-\infty}^{M} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^M \frac{3a^3}{t^2}\,\mathrm{d}t = 3a^3 \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_a^M = 3a^3 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{M}\right).$$

Comme $\lim\limits_{M\to+\infty} \frac{1}{M} = 0$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3a^3}{a} = 3a^2.$$

D'après la formule de Kœnig-Huyggens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \\ &= \left(3 - \frac{9}{4}\right)a^2 = \frac{3a^2}{4}.\end{aligned}$$

3. Posons $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Comme $\mathbf{E}[X_1] = \frac{3a}{2}$, d'après la loi faible des grands nombres, $\overline{X}$ est un estimateur ponctuel de $\frac{3a}{2}$.

4. a) D'après les relations précédentes,

$$\begin{aligned}\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i &\simeq \frac{3a}{2} \\ \frac{603}{100} &\simeq \frac{3a}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$a \simeq \frac{603}{100} \times \frac{2}{3} \simeq \frac{402}{100} \simeq 4{,}02.$$

b) Comme les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{100}$ sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{100} \mathbf{V}(X_i) = 100\mathbf{V}(X) \\ &= 100 \times \frac{3a^2}{4} = 75a^2.\end{aligned}$$

c) Comme $\mathbf{E}\left[\frac{1}{n}Y\right] = \frac{3a}{2}$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{1}{n}Y - \frac{3a}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) &= \mathbf{P}\left(\left[\left|\frac{1}{n}Y - \mathbf{E}\left[\frac{1}{n}Y\right]\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \\ &\leqslant \frac{\mathbf{V}\left(\frac{1}{n}Y\right)}{\varepsilon^2} \\ &\leqslant \frac{\mathbf{V}(Y)}{n^2\varepsilon^2} \\ &\leqslant \frac{75a^2}{100^2\varepsilon^2} \\ &\leqslant \frac{3a^2}{400\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 0 et en a.
  Comme $\lim\limits_{t\to0^-} f(t) = \lim\limits_{t\to0^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{t\to0^+} = \lim\limits_{t\to0^+} \frac{3t^2}{a^2} = \frac{3\times0^2}{a^2} = 0$, alors la fonction f admet des limites finies à gauche et à droite en 0. La fonction f est même continue en 0.
  Comme $\lim\limits_{t\to a^+} f(t) = \lim\limits_{t\to a^+} 0 = 0$ et $\lim\limits_{t\to a^-} f(t) = \lim\limits_{t\to a^-} \frac{3t^2}{a^3} = \frac{3a^2}{a^3} = \frac{3}{a}$, alors la fonction f admet des limites finies à gauche et à droite en a.
* Comme $a > 0$, alors $a^3 > 0$ et f est positive sur $[0, a]$. Ainsi, f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
* Comme f est nulle en dehors du segment $[0, a]$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{3t^2}{a^3}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{a^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^a = \frac{3}{a^3} \times \frac{a^3}{3} = 1.$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité.

2. D'après les définitions, comme f est nulle en dehors du segment $[0, a]$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^a \frac{3t^3}{a^3}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{a^3}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^a\\ &= \frac{3}{a^3}\times\frac{a^4}{4} = \frac{3a}{4}.\end{aligned}$$

De manière analogue, comme f est nulle en en dehors du segment $[0,a]$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^a \frac{3t^4}{a^3}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{a^3}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^a\\ &= \frac{3}{a^3}\times\frac{a^5}{5} = \frac{3a^2}{5}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huyggens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 &= \frac{3a^2}{5} - \left(\frac{3a}{4}\right)^2\\ &= \left(\frac{3}{5}-\frac{9}{16}\right)a^2 = \frac{3}{80}a^2.\end{aligned}$$

3. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y_n] = \frac{4}{3n}\sum_{k=1}^n X_k = \frac{4}{3n}\sum_{k=1}^n \frac{3a}{4} = a.$$

Comme les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y_n) = \frac{16}{9n^2}\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) &= \frac{16}{9n^2}\sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k)\\ &= \frac{16}{9n^2}\times n\times\frac{3}{80}a^2 = \frac{a^2}{15n}.\end{aligned}$$

4. Comme $\mathbf{E}[Y_n] = a$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}0 \leqslant \mathbf{P}([|Y_n-a|\geqslant\varepsilon]) &= \mathbf{P}([|Y_n-\mathbf{E}[Y_n]|\geqslant\varepsilon)\\ &\leqslant \frac{\mathbf{V}(Y_n)}{\varepsilon^2}\\ &\leqslant \frac{a^2}{15n\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^2}{15n\varepsilon^2} = 0$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}([|Y_n-a|\geqslant\varepsilon]) = 0.$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. a) X compte le nombre de succès (prélever un loup) dans une suite de 30 expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès valant $\frac{10}{N}$. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(30,\frac{10}{N}\right)$.

b) D'après les propriétés des lois binomiales,

$$\mathbf{E}[X] = \frac{300}{N} \text{ et } \mathbf{V}(X) = \frac{300(N-10)}{N^2}.$$

c) D'après la question précédente, $\mathbf{E}\left[\frac{X}{300}\right] = \frac{1}{N}$ et $\frac{X}{300}$ est donc un estimateur ponctuel de $\frac{1}{N}$.

2. a) Y est l'instant de premier succès dans un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut $\frac{10}{N}$. Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{10}{N}\right)$.

b) En utilisant les propriétés de la loi géométrique,

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{N}{10} \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{1-\frac{10}{N}}{\frac{100}{N^2}} = \frac{N(N-10)}{100}.$$

□