# IV - Variables aléatoires discrètes

Dans tout le cours, $\Omega$ désigne un univers muni d'une tribu $\mathscr{F}$ et $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Lorsque $\Omega$ est un ensemble fini, on choisira $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$.

## I - Variables aléatoires réelles finies

### I.1 - Définition

**Définition 1 - Variable aléatoire réelle**

On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ est un ensemble fini. Une *variable aléatoire réelle* est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

**Exemple 1 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré**

Un dé équilibré est lancé successivement 2 fois. On note les résultats obtenus à l'issue de chacun des lancers.
L'univers est $\Omega = \{(i, j),\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 6\} = [\![1, 6]\!]^2$.
La somme $S$ des résultats obtenus à l'issue des 2 lancers est une variable aléatoire :

$$S : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (d_1, d_2) & \mapsto & d_1 + d_2 \end{array}$$

**Définition 2 - Notations**

Si $x \leqslant y$ sont des réels, on notera

$$\begin{aligned} [X = x] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ X(\omega) = x\} \\ [X \leqslant x] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ X(\omega) \leqslant x\} \\ [X \geqslant x] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ X(\omega) \geqslant x\} \\ [x \leqslant X \leqslant y] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ x \leqslant X(\omega) \leqslant y\} \end{aligned}$$

**Exemple 2 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré**

On reprend les notations de l'exemple précédent.

$$\begin{aligned} [S = 3] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega \ ;\ d_1 + d_2 = 3\} \\ &= \{(1, 2), (2, 1)\}. \\ [S \leqslant 4] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega \ ;\ d_1 + d_2 \leqslant 4\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}. \end{aligned}$$

**Définition 3 - Système complet**

Soit $\Omega$ un univers fini et $X$ une variable aléatoire. Notons $x_1, \ldots, x_p$ les valeurs prises par $X$. Alors, $\{[X = x_i],\ i \in [\![1, p]\!]\}$ est un système complet d'événements. C'est le *système complet* associé à la variable aléatoire $X$.

**Exemple 3 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré**

On reprend les notations de l'exemple précédent. Le système complet associé à $S$ est :

$$\Big\{[S = 2],\ [S = 3],\ [S = 4],\ [S = 5],\ [S = 6],\ [S = 7],\ [S = 8],\ [S = 9],\ [S = 10],\ [S = 11],\ [S = 12]\Big\}.$$

## I.2 - Loi de probabilité

**Définition 4 - Loi de probabilité**

La *loi* de la variable aléatoire $X$ est la donnée :
- des valeurs $x_1, \dots, x_p$ prises par $X$,
- de la famille de probabilités

$$(\mathbf{P}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}([X = x_p])).$$

**Exemple 4 - Somme de 2 dés équilibrés**

On reprend les notations de l'exemple précédent. Nous obtenons successivement :

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}([S = k])$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

**Définition 5 - Fonction de répartition**

Soit $X$ une variable aléatoire. La *fonction de répartition* de $X$ est la fonction $F_X$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leqslant x])$.

**Exemple 5 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré**

On reprend les notations de l'exemple précédent.
- Si $x < 2$. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

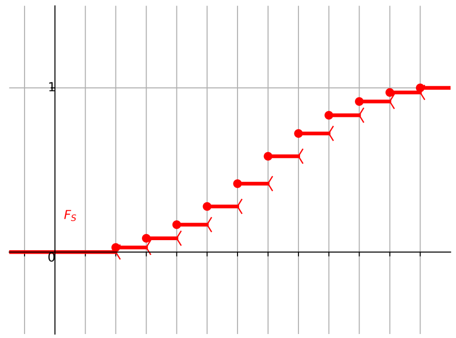
- Si $2 \leqslant x < 3$. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}([S = 2]) = \frac{1}{36}.$$

- ...
- Si $x \geqslant 12$. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

On obtient le graphe suivant :




**Proposition 1**

Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont de même loi si et seulement si elles ont mêmes fonctions de répartition.

## I.3 - Lois usuelles

**Définition 6 - Loi certaine**

Soit $c \in \mathbb{R}$. La variable aléatoire $X$ suit une *loi certaine* de valeur $c$ si $\mathbf{P}([X = c]) = 1$.

**Définition 7 - Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$**

La variable aléatoire $X$ suit une *loi uniforme* sur $[\![1, n]\!]$, noté $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, si

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}([X = i]) = \frac{1}{n}.$$

**Exemple 6 - Modélisation**

La loi uniforme modélise une expérience où $n$ résultats distincts sont possibles et équiprobables.

**Définition 8 - Loi de Bernoulli de paramètre $p$**

Soit $p \in [0,1]$. La variable aléatoire $X$ suit une *loi de Bernoulli* de paramètre $p$, noté $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, si

$$\mathbf{P}([X=0]) = 1-p \text{ et } \mathbf{P}([X=1]) = p.$$

**Exemple 7 - Modélisation**

La loi de Bernoulli modélise le nombre de succès d'une seule expérience qui a une probabilité de succès égale à $p$.

**Définition 9 - Expérience de Bernoulli**

Une *expérience de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui n'admet que deux issues, appelées généralement succès et échec.

**Définition 10 - Loi binomiale de paramètres $n$ et $p$**

Soit $p \in [0,1]$. La variable aléatoire $X$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n$ et $p$, noté $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, si

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}([X=k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

**Exemple 8 - Modélisation**

La loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la réalisation de $n$ expériences de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès égale à $p$.

**Définition 11 - Loi hypergéométrique de paramètres $n$, $N$ et $b$**

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant n, b \leqslant N$. La variable aléatoire $X$ suit une loi hypergéométrique de paramètres $n$, $N$, $b$, noté $X \hookrightarrow \mathscr{H}(n,N,b/N)$, si

$$\forall\, k \in [\![0,b]\!],\ \mathbf{P}(X=k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

**Exemple 9 - Modélisation**

La loi hypergéométrique modélise, dans une urne contenant $N$ boules dont $b$ sont blanches, le nombre de boules blanches tirées lors d'un tirage simultané de $n$ boules.

# II - Espérance & Variance

## II.1 - Espérance

**Définition 12 - Espérance**

Soit $X$ une variable aléatoire et $x_1, \dots, x_p$ les valeurs prises par $X$. L'*espérance* de $X$, notée $\mathbf{E}[X]$, est le réel

$$\mathbf{E}[X] = x_1\mathbf{P}([X=x_1]) + \cdots + x_p\mathbf{P}([X=x_p]).$$

**Proposition 2 - Lois usuelles**

- Si $X$ suit une loi certaine de paramètre $c$, alors $\mathbf{E}[X] = c$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$, alors $\mathbf{E}[X] = \frac{n+1}{2}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $\mathbf{E}[X] = p$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbf{E}[X] = np$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{H}(n,N,b/N)$, alors $\mathbf{E}[X] = \frac{nb}{N}$.

**Proposition 3 - Linéarité**

Soit $X$, $Y$ deux variables aléatoires et $a$, $b$ deux réels. Alors,

$$\mathbf{E}\left[aX+bY\right]=a\mathbf{E}\left[X\right]+b\mathbf{E}\left[Y\right].$$

**Exemple 10 - Somme de deux dés**

Notons $X_1$ le résultat du premier lancer et $X_2$ le résultat du second. Alors, $X_1$ et $X_2$ suivent une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$ et $S=X_1+X_2$. Ainsi,

$$\mathbf{E}\left[S\right]=\mathbf{E}\left[X_1+X_2\right]=\mathbf{E}\left[X_1\right]+\mathbf{E}\left[X_2\right]=\frac{6+1}{2}+\frac{6+1}{2}=7.$$

**Proposition 4 - Théorème de transfert**

Soit $X$ une variable aléatoire, $x_1,\ldots,x_p$ les valeurs prises par $X$ et $g$ une fonction à valeurs réelles. On note $Y=g(X)$ la variable aléatoire définie par

$$\forall\,\omega\in\Omega,\,Y(\omega)=g(X(\omega)).$$

Alors,

$$\mathbf{E}\left[Y\right]=\mathbf{E}\left[g(X)\right]=\sum_{k=1}^{p}g(x_k)\mathbf{P}\left([X=x_k]\right).$$

**Exemple 11 - Carré de la somme**

On reprend les notations de l'exemple précédent. Posons $Y=S^2$. Alors,

$$\mathbf{E}\left[Y\right]=2^2\frac{1}{36}+3^2\frac{2}{36}+4^2\frac{3}{36}+5^2\frac{4}{36}+6^2\frac{5}{36}+7^2\frac{6}{36}+\cdots$$
$$\cdots+8^2\frac{5}{36}+9^2\frac{4}{36}+10^2\frac{3}{36}+11^2\frac{2}{36}+12^2\frac{1}{36}$$

## II.2 - Variance

**Définition 13 - Variance, Écart-type**

Soit $X$ une variable aléatoire. La *variance* de $X$, notée $\mathbf{V}\left(X\right)$, est le réel :

$$\mathbf{V}\left(X\right)=\mathbf{E}\left[\left(X-\mathbf{E}\left[X\right]\right)^2\right].$$

L'*écart-type* est $\sigma(X)=\sqrt{\mathbf{V}\left(X\right)}$.

**Théorème 1 - Formule de Kœnig-Huygens**

Soit $X$ une variable aléatoire. Alors,

$$\mathbf{V}\left(X\right)=\mathbf{E}\left[X^2\right]-\mathbf{E}\left[X\right]^2.$$

**Proposition 5 - Lois usuelles**

- Si $X$ suit une loi presque certaine, alors $\mathbf{V}\left(X\right)=0$.
- Si $X\hookrightarrow\mathscr{U}\left([\![1,n]\!]\right)$, alors $\mathbf{V}\left(X\right)=\frac{n^2-1}{12}$.
- Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, alors $\mathbf{V}\left(X\right)=p(1-p)$.
- Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbf{V}\left(X\right)=np(1-p)$.
- Si $X\hookrightarrow\mathscr{H}(n,N,b/N)$, alors $\mathbf{V}\left(X\right)=n\frac{b}{N}\frac{N-b}{N}\frac{N-n}{N-1}$.

**Proposition 6**

Soit $X$ une variable aléatoire et $a$, $b$ deux réels. Alors,

$$\mathbf{V}\left(aX+b\right)=a^2\mathbf{V}\left(X\right).$$

**Exemple 12**

Soit $Y$ une variable suivant une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$. On pose $X=Y-1$.
Déterminons la loi de $X$.

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}\left([Y=k]\right)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Comme $X = Y - 1$,

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}([X = j])$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Ainsi, $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, 11 \rrbracket)$.

Déterminons l'espérance et la variance de $Y$.

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X+1] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[1] = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7,$$

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X+1) = \mathbf{V}(X) = \frac{11^2 - 1}{2} = 60.$$

**Définition 14 - Variable centrée, réduite**

Soit $X$ une variable aléatoire.
- $X$ est une variable aléatoire *centrée* si $\mathbf{E}[X] = 0$.
- $X$ est une variable aléatoire *réduite* si $\mathbf{V}(X) = 1$.

**Proposition 7**

Soit $X$ une variable aléatoire qui ne soit pas de loi certaine. La variable $X^* = \frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

# III - Couples de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire $X$ qui prend les valeurs $x_1, \ldots, x_p$ et une variable aléatoire $Y$ qui prend les valeurs $y_1, \ldots, y_q$.

## III.1 - Loi du couple

**Définition 15 - Loi du couple**

La *loi du couple* $(X, Y)$ est la donnée :
- des valeurs $(x_i, y_j)$ prises par le couple $(X, Y)$,
- des probabilités $\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.

**Exemple 13 - 2 feuilles et 2 tiroirs**

On dispose d'un bureau à 2 tiroirs et de 2 feuilles de papier. On dispose aléatoirement chacune des feuilles de papier dans l'un des tiroirs.
On note $X$ le nombre de feuilles dans le premier tiroir et $Y$ le nombre de tiroirs vides.
Le nombre de feuilles de papier dans le premier tiroir peut être égal à 0, 1 ou 2.
Le nombre de tiroirs vides peut être égal à 0 (il y a 1 feuille dans chaque tiroir) ou 1 (les 2 feuilles sont dans le même tiroir).
De plus,

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0, \mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 0]) = 0, \mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4}$$

On peut représenter ces résultats dans un tableau : à chaque ligne correspond une valeur $x$ que peut prendre $X$ ; à chaque colonne correspond une valeur $y$ que peut prendre $Y$ ; à l'intersection d'une ligne et d'une colonne se lit la probabilité $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$ :

| $x \backslash y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| 2 | 0 | $\frac{1}{4}$ |

### Définition 16 - Marginales

Les lois de $X$ et de $Y$ sont les *marginales* du couple $(X, Y)$.
En utilisant le système complet associé à la variable aléatoire $Y$ (resp. $X$), on obtient

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!],\ \mathbf{P}\left([X = x_i]\right) = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right)$$

$$\forall\, j \in [\![1, q]\!],\ \mathbf{P}\left([Y = y_j]\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right)$$

### Exemple 14 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les notations de l'exemple précédent, les marginales s'obtiennent en sommant les lignes / les colonnes du tableau.

| $x$ \\ $y$ | 0 | 1 | $\mathbf{P}([X = x])$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $\mathbf{P}([Y = y])$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |

La somme des cases de l'intérieur du tableau vaut 1.

### Définition 17 - Loi conditionnelle

La *loi conditionnelle* de $X$ sachant $[Y = y_j]$ est la donnée :

- des valeurs $x_1, \ldots, x_p$ prises par $X$,
- des probabilités $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}\left([X = x_1]\right), \ldots, \mathbf{P}_{[Y=y_j]}\left([X = x_p]\right)$.

### Exemple 15 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On reprend les notations de l'exercice précédent. La loi conditionnelle de $X$ sachant $[Y = 0]$ est égale à

| $i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}_{[Y=0]}([X = i])$ | 0 | 1 | 0 |

C'est une loi presque certaine : *sachant qu'aucun des tiroirs n'est vide, on est certain qu'il y a une feuille dans le premier tiroir.*
La loi conditionnelle de $X$ sachant $[Y = 1]$ est égale à

| $i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}_{[Y=0]}([X = i])$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |

*Sachant qu'un des deux tiroirs est vide, il y a une chance sur deux que le premier tiroir contienne 0 feuille et une chance sur deux qu'il contienne les 2 feuilles.*

## III.2 - Indépendance

### Définition 18 - Indépendance

Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont *indépendantes* si pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$,

$$\mathbf{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right) = \mathbf{P}\left([X = x_i]\right) \times \mathbf{P}\left([Y = y_j]\right).$$

### Exemple 16

- On considère le couple de variables aléatoires $(X, Y)$ dont la loi est définie par

| $y$ \ $x$ | 0 | 1 | $\mathbf{P}([X=x])$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathbf{P}([Y=y])$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | |

On étudie le comportement de **tous** les couples de valeurs possibles :

$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \mathbf{P}([X=0])\times\mathbf{P}([Y=0])$$
$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \mathbf{P}([X=0])\times\mathbf{P}([Y=1])$$
$$\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \mathbf{P}([X=1])\times\mathbf{P}([Y=0])$$
$$\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \mathbf{P}([X=1])\times\mathbf{P}([Y=1])$$

Ainsi, les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes.

- $2$ **feuilles et** $2$ **tiroirs.** En reprenant la loi du couple,

$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=0]) = 0 \neq \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \mathbf{P}([X=0])\times\mathbf{P}([Y=0]).$$

Les variables aléatoires $X$ et $Y$ **ne** sont **pas** indépendantes.

**Définition 19 - Schéma de Bernoulli**

Un *schéma de Bernoulli* est la succession d'un nombre fini d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

**Proposition 8 - Loi certaine**

Si $Y$ est une variable aléatoire certaine, alors $X$ et $Y$ sont indépendantes.

**Théorème 2 - Stabilité de la loi binomiale**

Soit $m, n$ deux entiers naturels, $p \in [0,1]$, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$. Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors

$$X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m+n,p).$$

## III.3 - Covariance

**Proposition 9 - Espérance d'un produit**

En utilisant la loi du couple,

$$\mathbf{E}[X\times Y] = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i\times y_j\times\mathbf{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j]).$$

**Exemple 17 - 2 feuilles et 2 tiroirs**

En reprenant l'exemple des feuilles et des tiroirs,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[XY] &= 0\times0\times0+0\times1\times\frac{1}{4}+\cdots\\ &\cdots+1\times0\times\frac{1}{2}+1\times1\times0+\cdots\\ &\cdots+2\times0\times0+2\times1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**Théorème 3 - Espérance et Indépendance**

Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors

$$\mathbf{E}[X\times Y] = \mathbf{E}[X]\times\mathbf{E}[Y].$$

**Définition 20 - Covariance**

La *covariance* de $X$ et $Y$, notée $\mathrm{Cov}(X,Y)$, est le réel

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}[(X-\mathbf{E}[X])\times(Y-\mathbf{E}[Y])].$$

### Proposition 10 - Propriétés de la covariance

Soit $a$, $b$, $c$ trois réels et $X$, $Y$, $Z$ trois variables aléatoires.

- $\text{Cov}\,(X,Y) = \mathbf{E}\,[X \times Y] - \mathbf{E}\,[X] \times \mathbf{E}\,[Y]$.
- $\text{Cov}\,(X,Y) = \text{Cov}\,(Y,X)$.
- $\text{Cov}\,(X,X) = \mathbf{V}\,(X)$.
- $\text{Cov}\,(X,c) = 0$.
- $\text{Cov}\,(aX+bY,Z) = a\text{Cov}\,(X,Z) + b\text{Cov}\,(Y,Z)$.

### Exemple 18 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les calculs précédents,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,[X] &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1, \\ \mathbf{E}\,[Y] &= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ \text{Cov}\,(X,Y) &= \mathbf{E}\,[XY] - \mathbf{E}\,[X]\,\mathbf{E}\,[Y] \\ &= \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

### Proposition 11 - Covariance et Somme

$$\mathbf{V}\,(X+Y) = \mathbf{V}\,(X) + \mathbf{V}\,(Y) + 2\text{Cov}\,(X,Y)\,.$$

### Exemple 19 - Variance d'une somme

On considère le couple $(X_1, X_2)$ dont la loi est définie par :

| $x_1$ \ $x_2$ | 0 | 1 | $\mathbf{P}\,([X_1 = x_1])$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $\mathbf{P}\,([X_2 = x_2])$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | |

$X_1$ et $X_2$ ont même loi, donc ils ont même espérance et même variance. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,[X_1] &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \mathbf{E}\,[X_1^2]\,, \\ \mathbf{V}\,(X_1) &= \mathbf{E}\,[X_1^2] - \mathbf{E}\,[X_1]^2 = \frac{3}{16}, \\ \mathbf{E}\,[X_1X_2] &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ \text{Cov}\,(X_1,X_2) &= \mathbf{E}\,[X_1X_2] - \mathbf{E}\,[X_1]\,\mathbf{E}\,[X_2] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{16} \\ \mathbf{V}\,(X_1+X_2) &= \mathbf{V}\,(X_1) + \mathbf{V}\,(X_2) + 2\text{Cov}\,(X_1,X_2) \\ &= \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

### Proposition 12 - Convariance et Indépendance

Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $\text{Cov}\,(X,Y) = 0$.

### Exemple 20 - 2 feuilles et 2 tiroirs

L'exemple des feuilles et des tiroirs montre que la covariance peut être nulle alors que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

### Définition 21 - Coefficient de corrélation linéaire

Le *coefficient de corrélation linéaire* de $X$ et $Y$, noté $\rho(X,Y)$, est défini par

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}\,(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

**Exemple 21**

En reprenant l'exemple précédent,

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}\,(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{V}\,(X_1)\,\mathbf{V}\,(X_2)}} = \frac{\frac{-1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{3}{16}}} = -\frac{1}{3}.$$

**Proposition 13**

- $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.
- $|\rho(X, Y)| = 1$ signifie qu'il existe des réels $a$, $b$ et $c$ tels que $\mathbf{P}\,(aX + bY + c = 0) = 1$.

## III.4 - Vecteurs de variables aléatoires discrètes

**Définition 22 - Vecteur aléatoire**

$X$ est un *vecteur de variables aléatoires* s'il existe $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes telles que :

$$X : \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

Les définitions de loi, loi marginale s'étendent au cas des vecteurs aléatoires. De manière analogue, on définit l'indépendance de $n$ variables aléatoires indépendantes.

# IV - Variables aléatoires discrètes infinies

## IV.1 - Loi de probabilité

**Définition 23 - Variable aléatoire discrète infinie**

Une variable aléatoire $X$ est *discrète infinie* si les valeurs prises par $X$ sont en nombre infini et peuvent être indexées par $\mathbb{N}$. On notera

$$X(\Omega) = \{x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3, \dots\} = \{x_i,\, i \in \mathbb{N}\}\,.$$

Dans toute la suite, on se limitera aux variables aléatoires qui ne prennent que des valeurs positives.

**Exemple 22 - Variables aléatoires discrètes infinies**

- Un dé est lancé jusqu'à obtenir la valeur 6. On note $T$ le rang du lancer où le premier 6 est obtenu. La variable aléatoire $T$ peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 1 si le 6 apparaît au premier lancer,
  - ⋆ 2 si le 1^er^ lancer n'est pas un 6 et que le 2^e^ l'est,
  - ⋆ 3 si les 1^er^ et 2^e^ lancers ne sont pas des 6 et que le 3^e^ l'est,
  - ⋆ …
- Une étudiante collectionne les cartes de 23 joueurs de foot de son équipe nationale qui sont distribuées dans des tablettes de chocolat. On note $T$ le nombre de tablettes achetées pour que sa collection soit complète. $T$ peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 23 si elle a obtenu à chaque achat une carte différente,
  - ⋆ 24 si elle a obtenu exactement une carte en double,
  - ⋆ …

**Définition 24 - Loi de probabilité**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie. La *loi de probabilité* de $X$ est la donnée :

- des valeurs $x_0$, $x_1$, $x_2, \dots$ prises par $X$,
- de la famille de probabilités $(\mathbf{P}\,([X = x_0])\,, \mathbf{P}\,([X = x_1])\,, \dots, \mathbf{P}\,([X = x_n])\,, \dots)$.

**Exemple 23 - Instant du premier Pile**

On note $T$ le numéro du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.
D'une part, $T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
D'autre part,

- $[T = 1]$ correspond à obtenir un Pile lors du premier lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}.$$
- $[T = 2]$ correspond à obtenir Face lors du premier lancer et Pile lors du second lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = 2]) = \mathbf{P}(\{(F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$
- ...
- $[T = n]$ correspond à obtenir Face lors des $n - 1$ premiers lancers et Pile lors du $n^{\text{e}}$ lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = n]) = \mathbf{P}(\{(F, F, \dots, F, P)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = n]) = 1$, alors $\mathbf{P}([T = +\infty]) = 0$. La loi de $T$ peut être représentée dans un tableau contenant une infinité de colonnes :

| $x$ | $= 1$ | $2$ | $3$ | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}([X = x])$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3}$ | $\cdots$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}$ | $\cdots$ |

**Définition 25 - Système complet**

Si $X$ est une variable aléatoire discrète infinie, la famille d'événements $([X = x_0], [X = x_1], [X = x_2], \dots)$ est un système complet d'événements. En particulier,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = x_k]) = 1.$$

**Exemple 24 - Instant du premier Pile**

En reprenant l'exemple précédent,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

## IV.2 - Fonction de répartition

**Définition 26 - Fonction de répartition**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie. La *fonction de répartition* de $X$ est la fonction $F_X$ définie pour tout $x$ réel par $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leqslant x])$.

**Exemple 25 - Instant du premier Pile**

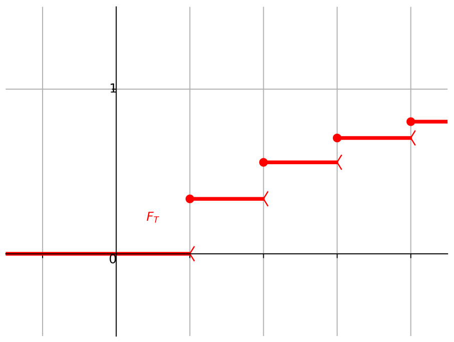
On note $T$ le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

- Si $x < 1$, $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- Si $1 \leqslant x < 2$, $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}$.
- Si $2 \leqslant x < 3$,

$\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}(T \in \{1,2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.

- ...
- Si $n \leqslant x < n+1$,
  $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}(T \in [\![1,n]\!]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- ...

On obtient le graphe suivant :




## Proposition 14 - Fonction de répartition

Soit $F$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète infinie.

- $F$ est à valeurs dans $[0,1]$.
- $F$ est croissante.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

# IV.3 - Espérance et Variance

## Définition 27 - Espérance

Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$.
La variable aléatoire $X$ admet une espérance si la série $\sum x_i \mathbf{P}([X = x_i])$ est convergente. L'*espérance* de $X$ est alors :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}([X = x_i]).$$

## Exemple 26 - Instant du premier pile

On note $T$ le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.
On admet que pour tout $x \in [0,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Alors, comme $\frac{2}{3} \in [0,1[$, $\sum n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ converge et

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 3.$$

## Proposition 15 - Propriétés de l'espérance

Soit $X$, $Y$ deux variables aléatoires discrètes infinies admettant une espérance et $a$ un réel. Alors,

- $\mathbf{E}[a] = a$.
- $\mathbf{E}[aX + Y] = a\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$.

## Exemple 27 - Instant du premier pile

Un joueur joue à Pile ou Face, avec une pièce qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$, contre son banquier qui lui propose le contrat suivant :

- le joueur paye 40 euros pour jouer,
- la pièce de monnaie est lancée successivement jusqu'à obtenir Pile. Il gagne 10 euros lors de chacun de ces lancers.

En notant $G$ le gain du joueur et $T$ le nombre de lancers effectués, alors $G = 10 \times T - 40$. En utilisant les propriétés précédentes,

$$\mathbf{E}[G] = 10\mathbf{E}[T] - 40 = 10 \times 3 - 40 = -10.$$

**Théorème 4 - Théorème de transfert**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives et $f$ une fonction réelle à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\, i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i]).$$

**Définition 28 - Variance, Écart-type**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\, i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum x_i^2\mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors $X$ admet une *variance* et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right].$$

L'*écart-type* de $X$ est la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

**Proposition 16 - Propriétés de la variance**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie qui admet une variance.

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2$.
- $\mathbf{V}(a) = 0$.
- $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$.

**Exemple 28 - Pile/Face contre le banquier**

On reprend l'exemple précédent et on admet que $\mathbf{V}(T) = 6$. Alors,

$$\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(10T - 40) = 10^2\mathbf{V}(T) = 600.$$

# IV.4 - Lois usuelles

**Définition 29 - Loi géométrique**

Soit $p \in [0, 1]$. La variable aléatoire $T$ suit une loi *géométrique* de paramètre $p$, noté $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, si

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T = k) = p(1-p)^{k-1}$.

**Exemple 29 - Modélisation**

Étant donné un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès de chaque expérience est égale à $p$, la variable aléatoire égale au *rang du premier succès* suit une loi géométrique de paramètre $p$.

**Proposition 17 - Espérance, Variance**

Soit $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. On admet que

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1-p}{p^2}.$$

**Définition 30 - Loi de Poisson**

Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire $Z$ suit une loi de *Poisson* de paramètre $\lambda$, noté $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, si

- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Z = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

**Exemple 30 - Modélisation**

Étant donnée une suite de $N$ épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $p$. Si $N$ est grand et $p$ est petit, la variable aléatoire égale au *nombre de succès* suit approximativement une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

**Proposition 18 - Espérance, Variance**

Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On admet que

$$\mathbf{E}[Z] = \lambda \text{ et } \mathbf{V}(Z) = \lambda.$$

**Exemple 31 - Accidentés**

Une banque accorde quotidiennement des crédits. Étant donné un crédit, la probabilité qu'il revienne au service contentieux dans un laps de temps d'un an est égale à 4%. On suppose que 100 crédits ont été accordés au mois de janvier.

On note $X$ le nombre de crédits qui sont revenus au service contentieux un an plus tard. $X$ compte le nombre de succès (contentieux) lors d'une suite de 100 épreuves de Bernoulli de probabilité de succès 4%. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{4}{100}\right)$ et $\mathbf{E}[X] = 4$.

On suppose que $X$ peut être approchée par une variable aléatoire $Z$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\mathbf{E}[X]$. On donne la table d'une loi de Poisson de paramètre 4 ci-dessous :

| $z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}([Z = z])$ | 0,018 | 0,073 | 0,147 | 0,195 | 0,195 | 0,156 | $\cdots$ |

Alors,

- $\mathbf{P}(X = 0) \simeq \mathbf{P}(Z = 0) \simeq 0{,}018$.
- $\mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq \mathbf{P}(Z \leqslant 3) \simeq 0{,}018 + 0{,}073 + 0{,}147 + 0{,}195 \simeq 0{,}433$.
- $\mathbf{P}(X > 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq 1 - 0{,}433 \simeq 0{,}567$.

**Théorème 5 - Stabilité de la loi de Poisson**

Soit $\lambda, \mu$ deux réels strictement positifs, $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$. Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu).$$

## IV.5 - Vecteurs de variables aléatoires

Les notions vues dans le cadre fini se généralisent aux variables aléatoires discrètes infinies.