IX - Réduction des matrices

I - Éléments propres

Définition 1 - Valeur propre, Vecteur propre

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est une *valeur propre* de M s'il existe un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = \lambda X$.

Exemple 1 - Valeurs / Vecteurs propres

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} -1-1 \\ 1+1 \\ 1-1 \end{pmatrix} \\ &= 2X. \end{aligned}$$

Ainsi, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

Exercice 1.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice identité.

2. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer les valeurs propres des matrices diagonales.

Définition 2 - Sous-espace propre

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de M. Le *sous-espace propre* de M associé à la valeur propre λ est l'espace vectoriel $E_\lambda(M) = \operatorname{Ker}(M - \lambda I_n)$.

Exercice 2.

1. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice identité.

2. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 1 - Sous-espace propre

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $E_\lambda(M) = \operatorname{Ker}(M - \lambda I_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, $\dim E_\lambda(M) \geqslant 1$ si et seulement si λ est une valeur propre de M.

II - Diagonalisation

Définition 3 - Matrices diagonalisables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La matrice A est *diagonalisable* s'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exemple 2 - Matrice diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- D'une part,

$$AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- D'autre part,

$$PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- De plus, en utilisant la méthode de Gauss-Jordan,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow -L_3} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \\ \\ \end{array}$$

  Ainsi, P est inversible.

D'où,

$$\begin{aligned} AP &= PD \\ APP^{-1} &= PDP^{-1} \\ AI &= PDP^{-1} \\ A &= PDP^{-1} \end{aligned}$$

II.1 - Critères

Théorème 1

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si M possède n valeurs propres distinctes, alors M est diagonalisable.

Exercice 3.

Théorème 2 - Matrices symétriques

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 4.