

I - Construction d'estimateurs

Exercice 1. Soit $p \in [0, 1]$ et X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . On note (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de X et $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y_n = n\bar{X}_n$.
2. Exprimer $\mathbf{E}[Y_n]$, $\mathbf{V}(Y_n)$ et $\mathbf{E}[Y_n^2]$ en fonction de n et de p .
3. \bar{X}_n^2 est-il un estimateur sans biais de p^2 ? Sinon, proposer un estimateur sans biais de p^2 .

Exercice 2. (Estimation de la variance) Soit X une variable aléatoire qui admet une espérance m et une variance σ^2 . Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de X . On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $s_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)$.

1. Montrer que \bar{X}_n est un estimateur sans biais de m .
2. Montrer que $\mathbf{V}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.
3. Montrer que $s_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - \bar{X}_n$ puis que $\mathbf{E}[s_n] = \frac{n-1}{\sigma^2}$.
4. La variable aléatoire s_n est-elle un estimateur sans biais de σ^2 ?
5. Montrer que $S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ est un estimateur sans biais de σ^2 .

Exercice 3. Soit $N \geq 2$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On effectue n tirages avec remise. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_k le numéro de la boule tirée au k^{e} tirage. Enfin, on pose :

$$M_n = \max \{X_1, \dots, X_n\}.$$

1. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\mathbf{P}([M_n \leq i]) = \left(\frac{i}{N}\right)^n.$$

2. Déterminer $\mathbf{P}([M_n = N])$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([M_n = N])$.

3. Montrer que si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, alors $\mathbf{E}[Y] = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}([Y \geq i])$.

4. En déduire que $\mathbf{E}[M_n] = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

5. Montrer que $N - \frac{N}{n+1} \leq \mathbf{E}[M_n] \leq N$ puis déterminer la limite de $\mathbf{E}[M_n]$ lorsque n tend vers l'infini. L'estimateur M_n est un estimateur *asymptotiquement sans biais* de N .

II - Comparaison d'estimateurs

Exercice 4. Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Pour estimer ce paramètre, on considère un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) de X . On considère les deux estimateurs de λ suivants :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } T_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

1. Ces estimateurs sont-ils biaisés?
2. Calculer leur risque quadratique.
3. Lequel de ces deux estimateurs vous semble préférable?

Exercice 5. Soit $\theta > 0$, X suivant une loi de Poisson de paramètre θ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de X . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la variable aléatoire Y_n par $Y_k = 1$ si $X_k = 0$ et $Y_k = 0$ sinon. On pose $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer que \bar{Y}_n est un estimateur sans biais de $e^{-\theta}$.

2. Calculer $\mathbf{V}(\bar{Y}_n)$ et en déduire que \bar{Y}_n est un estimateur convergent de $e^{-\theta}$.
3. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, calculer $\varphi(j) = \mathbf{P}_{[S_n=j]}([X_j = 0])$.
4. Montrer que $\varphi(S_n)$ est un estimateur sans biais de $e^{-\theta}$.
5. Calculer $\mathbf{V}(\varphi(S_n))$ et en déduire que $\varphi(S_n)$ est un estimateur convergent de $e^{-\theta}$.
6. Comparer les deux estimateurs \bar{Y}_n et $\varphi(S_n)$.

Exercice 6. Soit $\theta \neq 0$, X une variable aléatoire discrète telle que $\mathbf{E}[X] = \theta$ et $\mathbf{V}(X) = 1$. On dispose d'un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) de X et on pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Montrer que \bar{X}_n est un estimateur sans biais de θ et calculer son risque quadratique.
2. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$. On note $Y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Y_n soit un estimateur sans biais de θ . On suppose ensuite cette condition vérifiée.
3. Calculer $\text{Cov}(\bar{X}_n, Y_n)$. En déduire que $\mathbf{V}(\bar{X}_n) \leq \mathbf{V}(Y_n)$. Que dire en cas d'égalité ?
4. Interpréter les résultats obtenus.