

# II - Intégrale sur un segment

## Révisions

- Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$c, c \in \mathbb{R}$	0
$x^a, a \in \mathbb{R}$	$ax^{a-1}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$e^{ax}$	$a e^{ax}$

- Règles de dérivation :

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$c \cdot u(x), c \in \mathbb{R}$	$c \cdot u'(x)$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$u^n(x)$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$
$u(v(x))$	$v'(x)u'(v(x))$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$

- Interprétation de l'intégrale des fonctions positives comme aire entre la courbe et l'axe des abscisses..

## I - Primitives

### Définition 1 - Primitive

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Une *primitive* de  $f$  est une fonction dérivable  $F$  sur  $I$  telle que, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

### Exemple 1

Soit  $F(x) = x \ln(x) - x$  définie sur  $]0, +\infty[$ . Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , alors  $F$  est dérivable et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Ainsi,  $F$  est une primitive de  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 1.** Déterminer la fonction dont  $F(x) = \frac{x^3}{12} + 4x^2 + 1$  est une primitive.

### Théorème 1 - Primitives de fonctions continues

Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet des primitives. Si  $F$  et  $G$  sont des primitives d'une fonction  $f$  continue sur  $I$ , alors il existe un réel  $c$  tel que  $\forall x \in I, F(x) = G(x) + c$ .

**Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles** ⚙️

Fonction $f$	Primitive $F$
$c, c \in \mathbb{R}$	$cx$
$x^a, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$e^{ax}, a \neq 0$	$\frac{1}{a} e^{ax}$

**Exercice 2.** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1.  $x^5$ .      2.  $\frac{3}{x}$ .      3.  $e^{3x}$ .      4.  $\frac{1}{x^5}$ .

**Proposition 2 - Primitive de fonctions composées** ⚙️Soit  $u$  une fonction dérivable telle que  $u'$  soit continue.

Fonction $f$	Primitive $F$
$\lambda u'(x)$	$u(x)$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x)$
$u'(x)u^a(x), a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} u^{a+1}(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln  u(x) $
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$

**Exercice 3.** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1.  $\frac{1}{3x}$ .      5.  $\frac{1}{x} \ln^4(x)$ .  
 2.  $e^{2x} + \sqrt{x}$ .      6.  $\frac{2x+1}{x^2+x}$ .  
 3.  $3e^{2x} + 5\sqrt{x}$ .      7.  $\frac{x+1}{x^2+2x}$ .  
 4.  $\frac{1}{x} \ln(x)$ .      8.  $(3x^2 + 4)e^{x^3+4x}$ .

**II - Intégrale d'une fonction continue****Définition 2 - Intégrale d'une fonction continue** ⚙️

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et  $F$  une primitive de  $f$ .  
 L'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  est le réel défini par

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

**Exemple 2**

En utilisant les primitives usuelles,

- $\int_1^2 x^4 dx = \left[ \frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$ .
- $\int_0^1 (3x^2 + 4)e^{x^3+4x} dx = [e^{x^3+4x}]_0^1 = e^5 - 1$ .

**Exercice 4.** Exprimer simplement les intégrales suivantes :

1.  $\int_0^1 x^3 dx$ .      3.  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ .  
 2.  $\int_3^4 e^{2x} dx$ .      4.  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4} dx$ .

**Théorème 2 - Intégrale et Primitive** ⚙️

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $a \in I$ . La fonction  
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  
 $a$ . En particulier, pour tout réel  $x > a$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

**Exemple 3**

Soit  $F$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $F(x) = \int_0^x e^t dt$ . La  
 fonction  $F$  est dérivable et  $F'(x) = e^x$ . Ainsi,  $F'$  est positive et  
 $F$  est croissante.

### III - Propriétés de l'intégrale

#### Proposition 3 - Relation de Chasles

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a, b$  et  $c$  des réels de  $I$ . Alors,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

#### Exemple 4

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 0$  si  $x \leq 1$  et  $f(x) = x - 1$  sinon. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) \, dx &= \int_{-1}^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 0 \, dx + \int_1^2 (x - 1) \, dx \\ &= 0 + \left[ \frac{(x - 1)^2}{2} \right]_1^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

#### Proposition 4 - Linéarité de l'intégrale

Soit  $f, g$  des fonctions continues sur  $[a, b]$  et  $\alpha, \beta$  des réels. Alors,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx.$$

#### Exemple 5

En utilisant les primitives usuelles,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left( \frac{12}{x} + 5x^3 \right) \, dx &= 12 \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx + 5 \int_1^2 x^3 \, dx \\ &= 12 [\ln(x)]_1^2 + 5 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_1^2 \\ &= 12 (\ln(2) - \ln(1)) + 5 \left( \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= 12 \ln(2) + \frac{5}{4} \cdot 15. \end{aligned}$$

**Exercice 5.** Calculer  $\int_0^1 2e^x + 3x^2 \, dx$ .

#### Proposition 5 - Croissance de l'intégrale (I)

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Si  $a \leq b$  et, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$ .

#### Exemple 6

Soit  $F(x) = \int_0^x e^t \, dt$  et  $0 \leq x \leq y$ . D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^y e^t \, dt = \int_0^x e^t \, dt + \int_x^y e^t \, dt \\ &= F(x) + \int_x^y e^t \, dt \end{aligned}$$

Or,  $e^t \geq 0$  pour tout  $t \in [x, y]$  et  $x \leq y$ , donc  $\int_x^y e^t \, dt \geq 0$ . Ainsi,  $F(x) \leq F(y)$  et  $F$  est croissante.

**Exercice 6.** Montrer que  $F(x) = \int_3^x (t^2 - 2t + 1) \, dt$  est croissante.

**Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (II)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ . Si, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , alors  $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$ .

**Exemple 7**

Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \, dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x} \right) \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} \, dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{(x-1)}_{\leq 0} \underbrace{\frac{x^n}{1+x}}_{\geq 0} \, dx. \end{aligned}$$

Comme  $0 \leq 1$ , les bornes de l'intégrale sont bien ordonnées. Comme la fonction intégrée est négative, alors  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ , soit  $I_{n+1} \leq I_n$ .

La suite  $(I_n)$  est donc décroissante.

**Théorème 3 - Intégration par parties**

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $[a, b]$  telles que  $u'$  et  $v'$  soient continues sur  $[a, b]$ . Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

**Exemple 8 - ⚙️**

- Calculons  $\int_1^2 x e^{2x} \, dx$ .

Posons  $u(x) = x$  et  $v'(x) = e^{2x}$ . Alors,  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$ . Comme  $u, v$  sont dérivables et  $u', v'$  sont continues sur  $[1, 2]$ , d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^2 x e^{2x} \, dx &= \left[ x \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} \, dx \\ &= \frac{2e^4}{2} - \frac{e^2}{2} - \left[ \frac{e^{2x}}{4} \right]_1^2 \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} \\ &= \frac{3e^4}{4} - \frac{e^2}{4}. \end{aligned}$$

- Calculons  $\int_1^2 \ln(x) \, dx$ .

Posons  $u(x) = \ln(x)$  et  $v'(x) = 1$ . Alors,  $u'(x) = \frac{1}{x}$  et  $v(x) = x$ . Comme  $u, v$  sont dérivables et  $u', v'$  sont conti-

nues sur  $[1, 2]$ , d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x) \, dx &= [\ln(x)x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= 2 \ln(2) - 1 \ln(1) - \int_1^2 1 \, dx \\ &= 2 \ln(2) - [x]_1^2 \\ &= 2 \ln(2) - 2 + 1 \\ &= 2 \ln(2) - 1.\end{aligned}$$

**Exercice 7.** Calculer

1.  $\int_0^1 x e^x \, dx.$

2.  $\int_0^1 x^2 e^x \, dx.$

3.  $\int_0^1 x \ln(x) \, dx.$