■ ■ ■

On propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
On admettra le Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS : toute suite bornée de nombres complexes admet une sous-suite convergente.

Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $p > 0$. Notons

$$\mathscr{P} = \{|P(z)| \ ; \ z \in \mathbb{C}\}.$$

1. $\mathscr{P}$ admet une borne inférieure notée α.
Comme $|P(0)| \in \mathscr{P}$, l'ensemble $\mathscr{P}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0 (le module est à valeurs positives). Ainsi, d'après le théorème de la borne inférieure, $\mathscr{P}$ admet une borne inférieure notée α.

2. Soit $r > 0$. **Pour tout nombre complexe z de module r,**

$$|P(z)| \geqslant |a_p| r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k.$$

Nous allons utiliser les deux inégalités triangulaires.

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{p} a_k z^k \right| \\
&\geqslant \left| |a_p z^p| - \left| \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k \right| \right| \\
&\geqslant |a_p z^p| - \left| \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k \right| \\
&\geqslant |a_p z^p| - \sum_{k=0}^{p-1} \left| a_k z^k \right| \\
&\geqslant |a_p| r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k.
\end{aligned}$$

Soit,

$$|P(z)| \geqslant |a_p| r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k.$$

On a utilisé ici $p \geqslant 1$, donc l'hypothèse qui affirme que P est non constant.

3. Ainsi, $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$.
D'après les résultats sur les fonctions polynomiales, lorsque r tend vers $+\infty$, $|a_p| r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k \sim_{+\infty} |a_p| r^p$. Ainsi, pour tout $M \geqslant 0$, il existe un réel $r_0 > 0$ tel que si $|z| \geqslant r_0$, alors $|P(z)| \geqslant M$, soit

$$\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty.$$

On a réutilisé ici $p \geqslant 1$, donc l'hypothèse qui affirme que P est non constant.

4. Il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $\lim_{n \to +\infty} |P(z_n)| = |P(z_0)| = \alpha$.
D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(\alpha_n) \in \mathscr{P}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha$. D'après la définition de $\mathscr{P}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in \mathbb{C}$ tel que $|P(y_n)| = \alpha_n$.
Comme $\lim_{n \to +\infty} |P(y_n)| = \alpha$, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|P(y_n)| \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$.
Or, d'après la question précédente, il existe un réel $r_1 > 0$ tel que si $|z| \geqslant r_1$, alors $|P(z)| \geqslant \alpha + 2$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|y_n| \leqslant r_1$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite bornée de $\mathbb{C}$ et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (pour les suites à valeurs complexes), $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. Notons $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cette suite extraite et z_0 sa limite.
Comme $(|P(z_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(|P(y_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $(|P(z_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.
D'après les propriétés de passage à la limite dans les produits et modules de suites à valeurs complexes,

$$\lim_{n \to +\infty} |P(z_n)| = |P(z_0)| = \alpha.$$

5. On suppose que $\alpha \neq 0$ et on pose $Q = \frac{P(X+z_0)}{P(z_0)}$.

a) $\inf_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = 1$**.**

Comme $|P(z_0)| = \alpha \neq 0$, le polynôme Q est bien défini. De plus, on a bien $Q(0) = 1$, soit $|Q(0)| = 1$.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $|Q(z)| = \frac{|P(z+z_0)|}{|P(z_0)|}$. Or, d'après la définition de z_0, $|P(z_0)| \leqslant |P(z+z_0)|$. Ainsi, $|Q(z)| \leqslant 1$ et

$$\inf_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = 1.$$

b) Il existe $q \in [\![1, p]\!]$ **et** $b_q \neq 0$ **tels que** $Q = \sum_{k=q+1}^{p} b_k X^k - b_q X^q + 1$**.**

Notons p le degré de Q, $Q = \sum_{k=0}^{p} c_k X^k$ et $q = \inf\{k \in [\![1, p]\!] \; ; \; c_k \neq 0\}$ (q existe car $|c_0| = 1 \neq 0$ donc l'ensemble est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et minorée). Alors, en posant $b_q = -c_q$ et pour tout $k \in [\![q+1, p]\!]$, $b_k = c_k$, on obtient bien

$$Q = 1 - b_q X^q + \sum_{k=q+1}^{p} b_k X^k.$$

c) On note (sous forme trigonométrique) $b_q = \rho e^{-i\theta}$ et $z = re^{i\theta/q}$. **Il existe** $r_0 > 0$ **tel que pour tout** $r \leqslant r_0$**,**

$$|Q(z)| - 1 \leqslant -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} |b_k| r^k.$$

En utilisant les notations suggérées par l'énoncé ainsi que l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} Q(z) &= 1 - \rho e^{-i\theta} r^q e^{i\theta} + \sum_{k=q+1}^{p} b_k z^k \\ &= 1 - \rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} b_k z^k \\ |Q(z)| &\leqslant |1 - \rho r^q| + \sum_{k=q+1}^{p} |b_k| r^k. \end{aligned}$$

Ainsi, pour r assez petit, $\rho r^q \leqslant 1$ et

$$|Q(z)| \leqslant 1 - \rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} |b_k| r^k.$$

d) Ainsi, $\alpha = 0$**.**

Lorsque r tend vers 0, $-\rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} |b_k| r^k \sim_0 -\rho r^q < 0$. Ainsi, d'après les résultats sur les équivalents, pour r assez petit, $|Q(z)| - 1 < 0$ soit $|Q(z)| < 1$. Or, ceci est impossible car $1 = \inf_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)|$.
On obtient ainsi une contradiction, soit

$$\alpha = 0.$$

6. P **possède une racine.**
En effet, $\alpha = 0$ et il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$.

Mathématiciens

BOLZANO Bernard (5 oct. 1781 à Prague-18 déc. 1848 à Prague).
WEIERSTRASS Karl (31 oct. 1815 à Ostenfelde-19 fév. 1897 à Berlin).