IX - Suites numériques

I - Suites usuelles

À Savoir

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r si

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr.$$

Exemple 1 - Une suite arithmétique

Soit (u_n) telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$. Alors, (u_n) est une suite arithmétique de raison 3. Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 3n.$$

À Savoir

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q si

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n.$$

Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0.$$

Exemple 2 - Une suite géométrique

Soit (u_n) telle que $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$. Alors, (u_n) est une suite arithmétique de raison 2. Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n.$$

À Savoir

La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique si

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n + r.$$

Exemple 3 - Une suite arithmético-géométrique

L'étude d'une suite arithmético-géométrique suit toujours le schéma suivant.
Soit (u_n) telle que $u_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

* Recherche du réel ℓ tel que $\ell = 2\ell + 3$:

$$\begin{aligned} \ell &= 2\ell + 3 \\ 0 &= 2\ell - \ell + 3 \\ \ell &= -3. \end{aligned}$$

* Étude de la suite définie par $v_n = u_n - \ell$. Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= (2u_n + 3) - (2\ell + 3) \\ &= 2u_n + 3 - 2\ell - 3 \\ &= 2(u_n - \ell) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

De plus, $v_0 = u_0 - \ell = 7 - (-3) = 10$.
Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = 10 \times 2^n.$$

* Retour sur u_n. D'après la définition,

$$\begin{aligned} u_n - \ell &= v_n \\ u_n &= v_n + \ell \\ &= 10 \times 2^n - 3 = 5 \times 2^{n+1} - 3. \end{aligned}$$

II - Comportement des suites

À Savoir

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

* La suite (u_n) est croissante si
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$
* La suite (u_n) est décroissante si
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$$

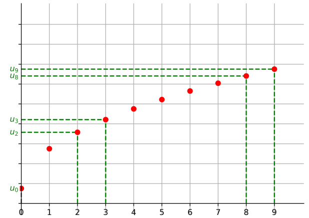
Exemple 4 - Études de monotonie

* On définit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout entier naturel n non nul.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \geqslant 0. \end{aligned}$$
Ainsi, la suite (u_n) est croissante.
* Soit $t \in]0,1[$. On définit $v_n = \ln(1+t^n)$ pour tout entier naturel n.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $t \in]0,1[$,
$$\begin{aligned} t &\leqslant 1 \\ t^n \times t &\leqslant t^n \times 1, \quad \text{car } t^n \geqslant 0 \\ 1 + t^{n+1} &\leqslant 1 + t^n \\ \ln(1+t^{n+1}) &\leqslant \ln(1+t^n), \quad \text{car ln est croissante} \\ v_{n+1} &\leqslant v_n \\ v_{n+1} - v_n &\leqslant 0. \end{aligned}$$
Ainsi, la suite (v_n) est croissante.

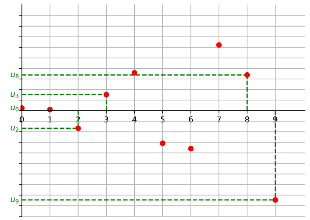
Attention ! Il convient de travailler avec un entier naturel n **quelconque**. Montrer que $u_1 - u_0 \geqslant 0$ ou $u_2 - u_1 \geqslant 0$ n'est d'aucune utilité pour étudier la monotonie d'une suite.

Exemple 5 - Représentations graphiques

Suite croissante.



Suite non monotone.



À Savoir

Soit (u_n) une suite de réels.

* La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
* La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.

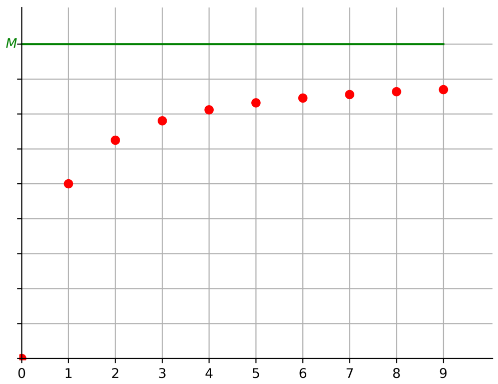
Exemple 6 - Étude de majorant

Soit $t \in]0,1[$. On définit $v_n = \ln(1+t^n)$ pour tout entier naturel n.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $t \in]0,1[$,
$$\begin{aligned} t &\leqslant 1 \\ t^n &\leqslant 1^n, \quad \text{car les puissances sont croissantes sur } \mathbb{R}_+ \\ 1 + t^n &\leqslant 2 \\ \ln(1+t^n) &\leqslant \ln(2), \quad \text{car ln est croissante} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est majorée par $\ln(2)$.

Attention ! Le minorant ou le majorant **ne** doit **pas** dépendre de l'indice n.

Exemple 7 - Représentation graphique



À Savoir

La suite (u_n) est convergente s'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Sinon, la suite (u_n) est dite divergente.

À Savoir

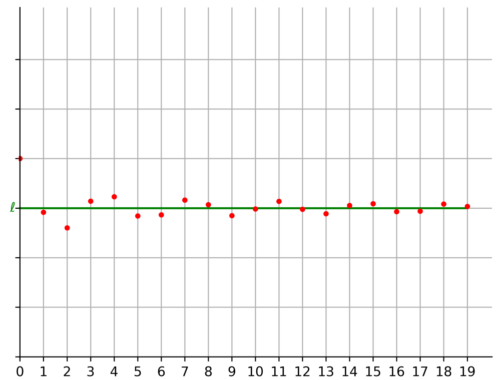
Limites classiques

Soit $a > 0$. Les limites suivantes sont à connaître :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0, \quad \text{si } a > 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^a = +\infty, \quad \text{si } a > 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} t^n = 0, \quad \text{si } t \in]-1, 1[$$
$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty, \quad \text{si } a > 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-4n^5+3n+1}{n^2+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-4n^5}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} -4n^3 = -\infty$$

Les limites des polynômes ou des fractions rationnelles sont données par les limites des monômes de plus haut degré ou de leur quotient.

Exemple 8 - Représentation graphique



III - Opérations sur les limites

À Savoir

Si la case indique ? ?, la limite est indéterminée. Il faut transformer l'expression (factorisation, expression conjuguée,...) pour pouvoir la déterminer.

- **Multiplication** par une constante.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	
$\lim\limits_{n\to+\infty} ku_n =$	$k\ell$	$-\infty$	$+\infty$	si $k>0$
	$k\ell$	$+\infty$	$-\infty$	si $k<0$
	0	0	0	si $k=0$

- **Addition** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ_1	$-\infty$	$+\infty$
ℓ_2	$\ell_1+\ell_2$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	? ?
$+\infty$	$+\infty$	? ?	$+\infty$

- **Multiplication** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell_1<0$	$\ell_1>0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2<0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2>0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	? ?	? ?
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ?	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ?	$-\infty$	$+\infty$

- **Quotient** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell_1<0$	$\ell_1>0$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2<0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\ell_2>0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+
0^-	0^+	0^-	? ?	? ?	0^+	0^-
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ?	? ?
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ?	? ?

Exemple 9 - Opérations sur les limites

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n)=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-5\ln(n)\right)=-\infty$.
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^2}=0$.
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}n^3=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n^5=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}n^3-n^5$ est une forme indéterminée. On va utiliser une factorisation pour lever l'indétermination :

$$n^3-n^5=n^5\left(\frac{1}{n^2}-1\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=-1$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}n^5=+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}n^5\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=-\infty.$$

À Savoir

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que, pour tout n entier naturel, $u_n \leqslant v_n$.
Si (u_n) et (v_n) convergent, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

À Savoir

Théorème d'encadrement.
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels tells que pour tout n entier naturel,

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n.$$

* Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors (u_n) converge et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$
* Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
* Si $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 10 - Théorème d'encadrement

* Soit (u_n) une suite de réels telle que pour tout n entier naturel non nul,
$$\frac{n^5+n^3+1}{2n(1+n^4)} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^5+n^4+1}{2n(1+n^4)}.$$
Comme la limite d'une fraction rationnelle est égale au rapport de ses monômes de plus hauts degrés,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5+n^3+1}{2n(1+n^4)} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5+n^4+1}{2n(1+n^4)} = \frac{1}{2}.$$
D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
* Soit (u_n) une suite de réels telle que pour tout n entier naturel,
$$\frac{n^4+n^3+1}{n^2} \leqslant u_n.$$
Comme la limite d'une fraction rationnelle est égale au rapport de ses monômes de plus hauts degrés,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+n^3+1}{n^2} = +\infty.$$
D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

IV - Existence de limites

À Savoir

Théorème de la limite monotone.
Soit (u_n) une suite de réels.
* Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge.
* Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.

Attention ! Ce théorème **ne** fournit **pas** la valeur de la limite. Pour cela, il faudra se reporter à une des techniques précédentes.

Exemple 11 - Limite monotone

Soit (u_n) une suite telle que

$$u_0 = -2 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3.$$

* Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par 6.
Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = -2 \leqslant 6$ donc la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leqslant 6$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + 3 \\ &\leqslant \frac{6}{2} + 3, \text{ d'après l'H.R.} \\ &\leqslant 6. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 6.$$

* Étudions la monotonie de (u_n). Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{2} + 3 - u_n \\ &= 3 - \frac{1}{2}u_n \\ &\geqslant 3 - \frac{1}{2}6, \quad \text{car } u_n \leqslant 6 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.
* La suite (u_n) est croissante et majorée par 6. D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.
* Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et en passant à la limite dans l'égalité,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + 3 \\ \ell &= \frac{\ell}{2} + 3 \\ \frac{\ell}{2} &= 3 \\ \ell &= 6. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 6$.