

T.D. IV - Variables aléatoires discrètes

=====

I - Loix usuelles finies

Solution de l'exercice 1. $\mathcal{B}(p^n)$. □

Solution de l'exercice 2. $N(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N = 0) &= \mathbf{P}(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i = 1) \\ &= \frac{1}{n!} \\ \mathbf{P}(N = k) &= \mathbf{P}(\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, X_i = 1 \text{ ET } X_k = 0) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \left(1 - \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

□

II - Variables aléatoires finies

Solution de l'exercice 6.

1. Le nombre de tirages possibles est $(2n)!$. La position de la première boule impaire est comprise entre 1 et $(n+1)$, soit $(n+1)$ possibilités. Il y a enfin $n!$ façons de disposer les boules paires. Au final,

$$\frac{(n+1)n!}{(2n)!}.$$

2. Le nombre de positions des boules impaires est $\binom{2n}{n}$. Leur ordre est ensuite fixé. Il y a ensuite $n!$ manières de disposer les boules paires. Ainsi,

$$\frac{\binom{2n}{n}n!}{(2n)!} = \frac{1}{n!}.$$

3. D'une part, $X(\Omega) = \llbracket n, 2n \rrbracket$. Ensuite, sur $\{X = k\}$, il y a $\binom{k-1}{n-1}$ manières de choisir les positions des boules impaires (la dernière étant en position k). Ensuite, il y a $n!$ façons de disposer les boules impaires et $n!$ de disposer les paires. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{k=n}^{2n} k \frac{(n!)^2 \binom{k-1}{n-1}}{(2n)!} \\ &= \frac{n(n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=n}^{2n} \underbrace{\binom{k}{n}}_{=\binom{k}{n+1} - \binom{k-1}{n+1}} \\ &= \frac{n(n!)^2}{(2n)!} \binom{2n+1}{n+1} \\ &= \frac{n(2n+1)}{n+1} \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. D'après la formule du triangle de Pascal, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$. On utilise ensuite une somme télescopique.

2. D'une part, $X(\omega) = \llbracket b, n+b \rrbracket$. De plus, en numérotant les boules pour compter plus aisément,

- * il y a $(n+b)!$ tirages possibles.
- * Pour les tirages favorables, la b -ème boule blanche étant tirée lors du k -ème tirage, le nombre de tirages favorables vaut

$$\underbrace{\binom{k-1}{b-1}}_{\text{position des boules blanches}} \underbrace{b!}_{\text{rpartition des boules blanches}} \underbrace{n!}_{\text{rpartition des boules noires}}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$$

Remarque. En utilisant la première question,

$$\sum_{k=b}^{n+b} \binom{k-1}{b-1} = \sum_{k=b-1}^{n+b-1} \binom{k}{b-1} = \binom{n+b}{b}.$$

Ainsi, $\sum_{k=b}^{n+b} p_b = 1$.

De plus,

$$\sum_{k=b}^{n+b} k \binom{k-1}{b-1} = b \sum_{k=b}^{n+b} \binom{k}{b} = b \binom{n+b+1}{b+1}.$$

Ainsi, $\mathbf{E}[X] = \frac{b(n+b+1)}{b+1}$.

Concernant la variance,

$$\begin{aligned} \binom{n+b}{b} \mathbf{E}[X^2] &= \sum_{k=b}^{n+b} k^2 \binom{k-1}{b-1} \\ &= b \sum_{k=b}^{n+b} k \binom{k}{b} \\ &= b(b+1) \sum_{k=b}^{n+b} \binom{k+1}{b+1} - b \sum_{k=b}^{n+b} \binom{k}{b} \\ &= b(b+1) \binom{n+b+2}{b+2} - b \binom{n+b+1}{b+1} \\ &= \binom{n+b+1}{b+1} b \frac{n(b+1) + b(b+2)}{b+2} \\ \mathbf{E}[X^1] &= \frac{n+b+1}{(b+1)(b+2)} [n(b+1) + b(b+2)] \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{bn(n+b+1)}{(b+1)^2(b+2)}. \end{aligned}$$

□

III - Loix usuelles infinies

Solution de l'exercice 13.

1. L'événement $\{U_p = i\}$ est modélisé par une expérience de Bernoulli de probabilité de succès égale à $\frac{1}{n}$. La variable aléatoire $X_{i,m}$ suit une loi binomiale de paramètres m et $1/n$.

2. En utilisant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_i = j) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_i = j, N = m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_{i,m} = j, N = m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \\ &= e^{\lambda/n} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^j \frac{1}{j!}. \end{aligned}$$

Ainsi, Y_i suit une loi de Poisson de paramètre λ/n . □

IV - Variables aléatoires infinies

Solution de l'exercice 17.

1. Le joueur gagne si et seulement si le numéro renvoyé est pair. Ainsi, la probabilité de gagner est

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{3}.$$

2. On remarque que $G(\Omega) = \{(-1)^k k, k \in \mathbb{N}\}$.

De plus, si $n = 2k$, $\mathbf{P}(G = n) = \frac{1}{2^n}$. Si $n = 2k + 1$, $\mathbf{P}(G = -n) = \frac{1}{2^n}$.

Sinon, $\mathbf{P}(G = n) = 0$.

$$\text{Ainsi, } \mathbf{E}[G] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} = -\frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell (\ell+1)}{2^\ell}.$$

Notons $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Alors, $\sum u_n$ est absolument convergente et

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}\right) \\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{1+1/2}\right)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{4}{9} &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \mathbf{E}[G] &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

2ème méthode. On aurait également pu utiliser la dérivation des séries entières. \square

V - Lois jointes

Solution de l'exercice 21. D'après la définition, $R = 1 + \sum_{j=1}^n I_j$. De plus,

$I_j \sim \mathcal{B}(2pq)$, donc $\mathbf{E}[I_j] = 2pq$.

Ainsi,

$$\mathbf{E}[R] = 1 + 2(n-1)pq.$$

Si $k-j > 2$, d'après le lemme des coalitions, I_j et I_k sont indépendants. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[I_i I_{i+1}] &= \mathbf{P}(\{PF P\} \sqcup \{FP F\}) \\ &= p^2 q + q^2 p \\ &= pq \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(R) &= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{V}(I_j) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \text{Cov}(I_i, I_j) \\ &= (n-1)\mathbf{V}(I_1) + 2(n-1)\text{Cov}(I_1, I_2) \\ &= (n-1)2pq(1-2pq) + 2(n-2)(pq-4p^2q^2) \\ &= 2pq[2n-3-2pq(3n-5)] \end{aligned}$$

\square