IV - Algèbre linéaire

I - Systèmes d'équations linéaires : pivot de Gauss

Définition 1 - Système linéaire

Soient $(a_{1,1},\dots,a_{1,p},\dots,a_{n,1},\dots,a_{n,p},b_1,\dots,b_n)$ des réels. Le système $(\mathscr{S})$

$$(\mathscr{S})\begin{cases} a_{1,1}x_1+\dots+a_{1,p}x_p &= b_1\\ a_{2,1}x_1+\dots+a_{2,p}x_p &= b_2\\ \vdots &= \vdots\\ a_{n,1}x_1+\dots+a_{n,p}x_p &= b_n\end{cases}$$

est un *système linéaire* d'inconnues $x_1,\dots,x_p$.

- Un p-uplet $(x_1,\dots,x_p)$ est *solution* de $(\mathscr{S})$ s'il est solution de chacune des lignes du système.
- Deux systèmes sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple 1

Les systèmes suivants sont des systèmes d'équations linéaires :

- $\begin{cases} 2x+3y+z &= 0\\ x+5y+2z &= 1\end{cases}$
- $\begin{cases} 2x+3y+5z=2\end{cases}$
- $\begin{cases} 2x+3y=1\end{cases}$
- $\begin{cases} 2x+y &= 3\\ x+5y &= 2\end{cases}$

Définition 2 - Opérations élémentaires

Nous noterons $L_1,\dots,L_n$ les lignes du système et appellerons *opérations élémentaires* sur les lignes du système les transformations suivantes :

- Pour $i\neq j$, l'échange des lignes L_i et L_j, symbolisé par $L_i\leftrightarrow L_j$.
- Pour $\alpha\neq 0$, la multiplication de la ligne L_i par α, symbolisée par $L_i\leftarrow \alpha L_i$.
- Pour $i\neq j$ et $\beta\in\mathbb{R}$, l'ajout à L_i de la ligne L_j multipliée par β, symbolisé par $L_i\leftarrow L_i+\beta L_j$.

Théorème 1

Le système obtenu par application d'opérations élémentaires sur les lignes est équivalent au système initial.

Principe de l'algorithme du pivot de Gauss : On utilise les opérations élémentaires pour transformer le système en un système échelonné, c'est-à-dire dans lequel le nombre d'inconnues décroît strictement quand on passe d'une ligne à la suivante.

Algorithme :

- On cherche une ligne où le coefficient α de x_1 est non nul et simple. Notons cette ligne L_{i_0}.
- On échange les lignes 1 et i_0, $L_1\leftrightarrow L_{i_0}$.
- On utilise la nouvelle ligne L_1 pour éliminer les occurrences de x_1 dans les lignes suivantes, c'est la ligne pivot. Par exemple, si à la ligne L_2 le coefficient de x_1 est a, on effectue $L_2\leftarrow \alpha L_2-aL_1$.
- On reprend ensuite les étapes de l'algorithme en travaillant sur

toutes les lignes sauf la première de manière à éliminer x_2...
- Enfin, on exprime les solutions en fonction des variables libres.

Définition 3 - Rang d'un système linéaire

Le *rang* du système est le nombre d'équations non triviales du système échelonné.

Théorème 2 - Ensemble de solutions

Soit S l'ensemble des solutions du système $(\mathscr{S})$.
- Soit $S = \emptyset$, les équations sont *incompatibles*.
- Soit S est un singleton, le rang est alors égal au nombre d'inconnues.
- Soit S est infini, le rang est alors strictement inférieur au nombre d'inconnues.

Exemple 2 - Résolution de système

Résolvons le système

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} 2x+3y+z & = 7 \\ x-y+2z & = -3 \\ 3x+y-z & = 6 \end{cases}.$$

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss :
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est solution de $(\mathscr{S}_0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z & = -3 \quad {\scriptstyle L_1 \leftrightarrow L_2} \\ 2x+3y+z & = 7 \\ 3x+y-z & = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z & = -3 \\ 5y-3z & = 13 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ 4y-7z & = 15 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z & = -3 \\ 5y-3z & = 13 \\ -23z & = 23 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow 5L_3 - 4L_2} \end{cases}.$$

Le système $(\mathscr{S}_0)$ possède une unique solution. L'ensemble des solutions est

$$\{(1,2,-1)\}.$$

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y & = 2 \\ x-2y & = 5 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x+2y+3z & = 1 \end{cases}.$

II - Espaces vectoriels

On note $\overrightarrow{0_n} = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels non nuls.

Définition 4 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

On définit sur $\mathbb{R}^n$ une addition et une multiplication par un réel de la manière suivante :

Addition Si $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$(x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n).$$

Multiplication par un réel Si $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\alpha \cdot (x_1,\ldots,x_n) = (\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n).$$

Exemple 3 - Cas où $n = 2, 3$

- Si $n = 2$.

$$(1,2)+(3,4) = (4,6)$$
$$(1,5)+(-1,0) = (0,5)$$
$$3\cdot(4,2) = (12,6)$$

- Si $n = 3$.

$$(1,-1,2)+(4,5,-5) = (5,4,-3)$$
$$(1,0,-1)+(3,1,2) = (4,1,1)$$
$$2\cdot(4,1,-2) = (8,2,-4)$$

Proposition 1 - Structure d'espace vectoriel

- Propriétés de l'addition. Soit x, y, z des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{0_n} = (0,\dots,0)$.
  - ⋆ Associativité : $x+(y+z) = (x+y)+z$.
  - ⋆ Élément neutre : $x+\overrightarrow{0_n} = \overrightarrow{0_n}+x = x$.
  - ⋆ Existence d'un opposé : $x+(-1)\cdot x = (-1)\cdot x + x = \overrightarrow{0_n}$.
  - ⋆ Commutativité : $x+y = y+x$.
- Propriétés de la multiplication pour un réel. Soit x, $y \in \mathbb{R}^n$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l|l} \lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x & (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x \\ 1\cdot x = x & \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y \end{array}$$

$\mathbb{R}^n$ est un *espace vectoriel*. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont des *vecteurs*.

III - Familles de vecteurs

Dans tout ce chapitre, p désigne un entier naturel non nul.

III.1 - Sous-espace vectoriel

Définition 5 - Sous-espace vectoriel

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est un *sous-espace vectoriel* si
- $\overrightarrow{0_n} \in A$,
- pour tout x, $y \in \mathbb{R}^n$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha x + \beta y \in A$.

Exemple 4 - Exemple de sous-espaces vectoriels

- $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- $\left\{\overrightarrow{0_n}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- Géométriquement,
  - ⋆ les droites sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$,
  - ⋆ les droites sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$,
  - ⋆ les plans sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Définition 6 - Combinaison linéaire

Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
- si $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{R}$, le vecteur $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $(x_1,\dots,x_p)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1,\dots,x_p)$ est noté :

$$\mathrm{Vect}\{x_1,\dots,x_p\} = \left\{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i,\ \alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{R}\right\}.$$

Proposition 2

Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors, $\mathrm{Vect}\,\{x_1,\dots,x_p\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5

- $D = \mathrm{Vect}\,\{(1,2)\} = \{\alpha(1,2),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $D = \mathrm{Vect}\,\{(1,0)\} = \{\alpha(1,0),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- $D = \mathrm{Vect}\,\{(1,0,1)\} = \{\alpha(1,0,1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- $P = \mathrm{Vect}\,\{(1,0,0),(0,0,1)\} = \{(\alpha,0,\beta),\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$ est un plan de $\mathbb{R}^3$.

III.2 - Bases

Dans cette partie, $(x_1, \dots, x_p)$ désigne une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 7 - Famille libre

La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est *libre* si, pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = \overrightarrow{0_n} \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, p]\!],\ \alpha_i = 0.$$

La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs *linéairement indépendants*.

Exemple 6

La famille $((1,2),(3,4))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
En effet, soit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(1,2) + \beta(3,4) = (0,0)$. Alors,

$$(\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta) = (0,0)$$

De même,

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta & = 0 \\ 2\alpha + 4\beta & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta & = 0 \\ -2\beta & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 0 \\ \beta & = 0 \end{cases}$$

Exercice 2.

1. Montrer que $((1,0),(0,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $((1,2,-1),(2,1,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que $((1,1,1),(0,1,1),(2,0,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Définition 8 - Famille génératrice

La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est *génératrice* si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$.

Exercice 3. Montrer que $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Définition 9 - Base

La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est une *base* si elle est génératrice et que ses vecteurs sont linéairement indépendants.

Exemple 7 - Bases canoniques

- $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3 - Dimension

Si $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_q)$ sont des bases de $\mathbb{R}^n$, alors $p = q = n$. L'entier n est la *dimension* de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4.

1. Déterminer la dimension de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer la dimension de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer la dimension de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x + 2y + z = 0\}$.

Proposition 4 - Caractérisation des bases

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Il y a équivalence entre :

(i). $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(ii). $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants et $p = n$.

(iii). $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice et $p = n$.

Exercice 5. Montrer que $((1,2,3),(1,0,1),(0,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3 - Théorème de la base incomplète

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Il existe une famille $(y_{p+1}, \dots, y_n)$ telle que $(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

IV - Applications linéaires

Définition 10 - Application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. L'application f est une *application linéaire* si pour tout $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est noté $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Exemple 8 - Applications linéaires

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y, x + 2z)$.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y, x + 2z, x + y + z)$.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (3x + 2y, x + 2y, x + y)$.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x + 2y$.

Proposition 5

Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors $f(\overrightarrow{0_n}) = \overrightarrow{0_p}$.

Proposition 6 - Opérations sur les applications linéaires

- Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\alpha \cdot f : x \mapsto \alpha \cdot f(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
- Soit $f,\ g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors, $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
- Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)$. $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exemple 9

- Si $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, x + y)$ et $g : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z)$, alors
$$f + g : (x, y, z) \mapsto (3x + 2y + z, x - z).$$
- Si $f : (x, y) \mapsto x + 2y$ et $g : (x, y, z) \mapsto (x + z, y + z)$, alors
$$f \circ g : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z.$$

IV.1 - Noyau & Image

Définition 11 - Noyau, Image

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

- Le *noyau* de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ f(x) = \overrightarrow{0_p}\}.$$
- L'*image* de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Exemple 10 - TODO

Proposition 7

oit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

- $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 11 - TODO

Théorème 4 - Caractérisation des applications linéaires injectives

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i). f est injective.

(ii). $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_n}\}$.

Théorème 5 - Théorème du rang (admis)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors,

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{Rg} f = \dim(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 8 - S

it $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est bijective.
- f est injective.
- f est surjective.