

## T.D. V - Variables aléatoires discrètes finies

### I - Lois usuelles

**Solution de l'exercice 1.** Les valeurs prises par  $X$  sont 1, 2, 3 ou 4. Sachant que ces nombres ont tous la même probabilité d'être tirés, alors  $X$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ .

Comme  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}, \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{4^2-1}{2} = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 2.** Les valeurs prises par  $X$  sont les entiers compris entre 1 et 20. Sachant que ces nombres ont tous la même probabilité d'être tirés, alors  $X$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, 20 \rrbracket$ .

Comme  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 20 \rrbracket)$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{1+20}{2} = \frac{21}{2}, \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{20^2-1}{2} = \frac{399}{2}. \end{aligned}$$

□

#### Solution de l'exercice 3.

**1.** Les valeurs prises par  $X$  sont 0 et 1. Ainsi, suit  $X$  suit une loi de Bernoulli. Comme la probabilité que  $X$  vaille 1 vaut  $\frac{2}{3}$ , alors  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{2}{3})$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{2}{3}, \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

**2.** La variable aléatoire  $Y$  compte le nombre de succès lors d'une suite de 5 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès vaut  $\frac{2}{3}$ . Ainsi,  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres 5 et  $\frac{2}{3}$ , noté

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{2}{3}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}, \\ \mathbf{V}(Y) &= 5 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= 5 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

□

#### Solution de l'exercice 4.

**1.** Les valeurs prises par  $X$  sont 0 et 1. Ainsi, suit  $X$  suit une loi de Bernoulli. La variable aléatoire  $X$  vaut 1 si la lampe est défectueuse, donc elle vaut 1 avec probabilité  $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ . Ainsi,  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{20})$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{1}{20}, \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{1}{20} \left(1 - \frac{1}{20}\right) = \frac{19}{400}. \end{aligned}$$

**2.** La variable aléatoire  $Y$  compte le nombre de succès lors d'une suite de 30 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès vaut  $\frac{1}{20}$ . Ainsi,  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres 30 et  $\frac{1}{20}$ , noté

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(30, \frac{1}{20}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y] &= 30 \times \frac{1}{20} = \frac{3}{2}, \\ \mathbf{V}(Y) &= 30 \times \frac{1}{20} \times \left(1 - \frac{1}{20}\right) \\ &= 30 \times \frac{1}{20} \times \frac{19}{20} = \frac{57}{40}.\end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 5.** L'expérience est une suite de 4 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire de tirer une boule noire) vaut  $\frac{5}{8}$ .

Comme  $X$  compte le nombre de succès lors de ces 4 tirages, alors  $X$  suit une loi binomiale de paramètres 4 et  $\frac{5}{8}$ , noté

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(4, \frac{5}{8}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 4 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{2}, \\ \mathbf{V}(X) &= 4 \times \frac{5}{8} \times \left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{16}.\end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 6.** L'expérience est une suite de 5 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire de tirer une boule noire) vaut  $\frac{3}{10}$ .

Comme  $X$  compte le nombre de succès lors de ces 5 tirages, alors  $X$  suit une loi binomiale de paramètres 5 et  $\frac{3}{10}$ , noté

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{3}{10}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 5 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{2}, \\ \mathbf{V}(X) &= 5 \times \frac{3}{10} \times \left(1 - \frac{3}{10}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{20}.\end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 7.** L'expérience est une suite de 2 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire de tirer une boule numérotée 1) vaut  $\frac{1}{3}$ .

Comme  $X$  compte le nombre de succès lors de ces 2 tirages, alors  $X$  suit une loi binomiale de paramètres 2 et  $\frac{1}{3}$ , noté

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{3}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \\ \mathbf{V}(X) &= 2 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 8.** L'expérience est une suite de 5 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire d'obtenir le numéro 1) vaut  $\frac{1}{6}$ .

Comme  $X$  compte le nombre de succès lors de ces 5 tirages, alors  $X$  suit une loi binomiale de paramètres 5 et  $\frac{1}{6}$ , noté

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{6}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \\ \mathbf{V}(X) &= 5 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.\end{aligned}$$

□

## II - Calculs de lois

**Solution de l'exercice 9.** On pourra dessiner un arbre.

Comme les tirages s'effectuent sans remise, les différents tirages possibles sont

$$(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (4, 1), (4, 2).$$

Chaque tirage a la même probabilité d'être effectué :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

La variable aléatoire  $X$  est la somme des tirages. Les valeurs qu'elle peut prendre sont donc :

$$3, 5, 6.$$

De plus,

$$\mathbf{P}([X = 3]) = \mathbf{P}(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{P}([X = 5]) = \mathbf{P}(\{(1, 4), (4, 1)\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{P}([X = 6]) = \mathbf{P}(\{(2, 4), (4, 2)\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

On peut ainsi résumer la loi de  $X$  dans le tableau suivant :

| $k$                   | 3             | 5             | 6             |
|-----------------------|---------------|---------------|---------------|
| $\mathbf{P}([X = k])$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

En utilisant ce tableau, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 3 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{3 + 5 + 6}{3} = \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2] &= 3^2 \times \frac{1}{3} + 5^2 \times \frac{1}{3} + 6^2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{9 + 25 + 36}{3} = \frac{70}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{70}{3} - \left(\frac{14}{3}\right)^2 \\ &= \frac{210}{9} - \frac{196}{9} = \frac{14}{9}.\end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 10.** On pourra dessiner un arbre.

1. Lors du premier lancer, le joueur remporte 10 ou  $-5$  euros.

Lors du second lancer, le joueur remporte 10 ou  $-5$  euros.

Lors du troisième lancer, le joueur remporte 10 ou  $-5$  euros.

Ainsi, les suites de gains possibles sont :

$$(10, 10, 10), (10, 10, -5), (10, -5, 10), (10, -5, -5), \\ (-5, 10, 10), (-5, 10, -5), (-5, -5, 10), (-5, -5, -5),$$

Les valeurs prises par  $S$ , la somme des gains sont donc

$$30, 15, 0, -15.$$

De plus, en représentant ces expériences dans un arbre, on obtient

$$\mathbf{P}([S = 30]) = \mathbf{P}(\{(10, 10, 10)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([S = 15]) &= \mathbf{P}(\{(10, 10, -5), (10, -5, 10), (-5, 10, 10)\}) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= 3 \times \frac{4}{27} = \frac{4}{9},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([S = 0]) &= \mathbf{P}(\{(10, -5, -5), (-5, 10, -5), (-5, -5, 10)\}) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= 3 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9},\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}([S = -15]) = \mathbf{P}(\{(-5, -5, -5)\}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

On peut représenter la loi de  $S$  dans le tableau suivant :

| $k$                   | -15            | 0             | 15            | 30             |
|-----------------------|----------------|---------------|---------------|----------------|
| $\mathbf{P}([S = k])$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{8}{27}$ |

2. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= -15 \times \frac{1}{27} + 0 \times \frac{2}{9} + 15 \times \frac{4}{9} + 30 \times \frac{8}{27} \\ &= \frac{-15 + 3 \times 15 \times 4 + 30 \times 8}{27} = \frac{405}{27} = \frac{45}{3}, \\ \mathbf{E}[X^2] &= (-15)^2 \times \frac{1}{27} + 0^2 \times \frac{2}{9} + 15^2 \times \frac{4}{9} + 30^2 \times \frac{8}{27} \\ &= \frac{10125}{27} = \frac{1125}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{1125}{3} - \left(\frac{45}{3}\right)^2 \\ &= \frac{3375}{9} - \frac{2025}{9} = \frac{1350}{9} = 150.\end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 11.

1. On distingue en fonction des valeurs prises par  $X$  :

- \* lorsque  $X$  vaut  $-2$ , alors  $Y$  vaut  $4$ ,
- \* lorsque  $X$  vaut  $-1$ , alors  $Y$  vaut  $1$ ,
- \* lorsque  $X$  vaut  $0$ , alors  $Y$  vaut  $0$ ,
- \* lorsque  $X$  vaut  $3$ , alors  $Y$  vaut  $9$ .

Ainsi,  $Y(\Omega) = \{0, 1, 4, 9\}$ .

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y = 0]) &= \mathbf{P}([X = 0]) = \frac{1}{3}, \\ \mathbf{P}([Y = 1]) &= \mathbf{P}([X = -1]) = \frac{1}{6}, \\ \mathbf{P}([Y = 4]) &= \mathbf{P}([X = -2]) = \frac{1}{4}, \\ \mathbf{P}([Y = 9]) &= \mathbf{P}([X = 3]) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

La loi de  $Y$  peut donc être représentée dans le tableau suivant :

| $k$                   | 0             | 1             | 4             | 9             |
|-----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\mathbf{P}([Y = k])$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

2. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= -2 \times \frac{1}{4} - 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{-6 - 2 + 9}{12} = \frac{1}{12}, \\ \mathbf{E}[X^2] &= (-2)^2 \times \frac{1}{4} + (-1)^2 \times \frac{1}{6} + 0^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{4} \\ &= 1 + \frac{1}{6} + \frac{9}{4} = \frac{12 + 2 + 27}{12} = \frac{41}{12}.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{41}{12} - \frac{1}{12^2} \\ &= \frac{41 \times 12 - 1}{144} \\ &= \frac{491}{144}.\end{aligned}$$

3. D'après la définition de  $Y$  ainsi que la question précédente,

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X^2] = \frac{41}{12}.$$

D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y^2] &= \mathbf{E}[X^4] = (-2)^4 \times \frac{1}{4} + (-1)^4 \times \frac{1}{6} + 0^4 \times \frac{1}{3} \\ &= 4 + \frac{1}{6} + \frac{81}{4} = \frac{48 + 2 + 243}{12} = \frac{293}{12}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}[Y^2] - \mathbf{E}[Y]^2 = \frac{293}{12} - \left(\frac{41}{12}\right)^2 \\ &= \frac{293 \times 12 - 41^2}{144} = \frac{1835}{144}.\end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 12.

1. On distingue en fonction des valeurs prises par  $X$  :

- \* lorsque  $X$  vaut 0, alors  $Y$  vaut 0,
- \* lorsque  $X$  vaut 1, alors  $Y$  vaut 1,
- \* lorsque  $X$  vaut 4, alors  $Y$  vaut 2,
- \* lorsque  $X$  vaut 9, alors  $Y$  vaut 3.

Ainsi,  $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ .

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y = 0]) &= \mathbf{P}([X = 0]) = \frac{1}{4}, \\ \mathbf{P}([Y = 1]) &= \mathbf{P}([X = 1]) = \frac{1}{6}, \\ \mathbf{P}([Y = 2]) &= \mathbf{P}([X = 4]) = \frac{1}{3}, \\ \mathbf{P}([Y = 3]) &= \mathbf{P}([X = 9]) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

La loi de  $Y$  peut donc être représentée dans le tableau suivant :

| $k$                   | 0             | 1             | 2             | 3             |
|-----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\mathbf{P}([Y = k])$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |

2. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} \\ &= \frac{2 + 16 + 27}{12} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}, \\ \mathbf{E}[X^2] &= 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{3} + 9^2 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{16}{3} + \frac{81}{4} = \frac{2 + 16 \times 4 + 81 \times 3}{12} = \frac{309}{12} = \frac{103}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{103}{4} - \left(\frac{15}{4}\right)^2 \\ &= \frac{103 \times 4 - 15^2}{16} \\ &= \frac{187}{16}.\end{aligned}$$

3. D'après la définition de  $Y$  ainsi que la formule de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y] &= \mathbf{E}[\sqrt{X}] \\ &= \sqrt{0} \times \frac{1}{4} + \sqrt{1} \times \frac{1}{6} + \sqrt{2} \times \frac{1}{3} + \sqrt{9} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 + 8 + 9}{12} = \frac{19}{12}.\end{aligned}$$

D'après la définition,

$$\mathbf{E}[Y^2] = \mathbf{E}[\sqrt{X}^2] = \mathbf{E}[X] = \frac{15}{4}.$$

Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}[Y^2] - \mathbf{E}[Y]^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{19}{12}\right)^2 \\ &= \frac{15 \times 36 - 19^2}{144} = \frac{179}{144}.\end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 13.

1. On commence par déterminer les valeurs que peut prendre la variable aléatoire  $Y$  :

- \* si  $X(\omega) = 1$ , alors  $Y(\omega) = 2$ ,
- \* si  $X(\omega) = 2$ , alors  $Y(\omega) = 1$ ,
- \* si  $X(\omega) = 3$ , alors  $Y(\omega) = 0$ ,
- \* si  $X(\omega) = 4$ , alors  $Y(\omega) = 1$ ,
- \* si  $X(\omega) = 5$ , alors  $Y(\omega) = 2$ .

Ainsi,

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

D'après l'étude précédente,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = 0) &= \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{10}, \\ \mathbf{P}(Y = 1) &= \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 4) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}, \\ \mathbf{P}(Y = 2) &= \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

On peut représenter la loi de  $Y$  dans le tableau suivant :

| $k$                   | 0              | 1             | 2             |
|-----------------------|----------------|---------------|---------------|
| $\mathbf{P}([X = k])$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ |

En utilisant la formule de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{13}{10}.$$

2. En utilisant le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}[Y] = |1 - 3| \frac{1}{5} + |2 - 3| \frac{1}{10} + |3 - 3| \frac{1}{10} + |4 - 3| \frac{2}{5} + |5 - 3| \frac{1}{5}.$$

□

### Solution de l'exercice 14.

1. On commence par déterminer les valeurs que peut prendre la variable aléatoire  $Y$  :

- \* si  $X(\omega) = -1$ , alors  $Y(\omega) = 2$ ,
- \* si  $X(\omega) = 0$ , alors  $Y(\omega) = 1$ ,
- \* si  $X(\omega) = 1$ , alors  $Y(\omega) = 0$ ,
- \* si  $X(\omega) = 2$ , alors  $Y(\omega) = 1$ ,
- \* si  $X(\omega) = 3$ , alors  $Y(\omega) = 2$ .

Ainsi,

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

D'après l'étude précédente,

$$\mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{10},$$

$$\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(X = -1) + \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

On peut représenter la loi de  $Y$  dans le tableau suivant :

| $k$                   | 0              | 1             | 2             |
|-----------------------|----------------|---------------|---------------|
| $\mathbf{P}([X = k])$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ |

En utilisant la formule de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{13}{10}.$$

2. En utilisant le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}[Y] = |-1 - 1| \frac{1}{5} + |0 - 1| \frac{1}{10} + |1 - 1| \frac{1}{10} + |2 - 1| \frac{2}{5} + |3 - 1| \frac{1}{5}.$$

□

## III - Espérance & Variance sans calcul de loi

**Solution de l'exercice 15.** Remarquons que  $X_i$  est le résultat du  $i^e$  lancer d'un dé équilibré, donc  $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ . Ainsi,

$$\mathbf{E}[X_i] = \frac{1 + 6}{2} = \frac{7}{2},$$

$$\mathbf{V}(X_i) = \frac{6^2 - 1}{12} = \frac{35}{12}.$$

1. D'après la définition de  $S$ ,

$$S = \sum_{i=1}^{30} X_i.$$

En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S] &= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right] = \sum_{i=1}^{30} \mathbf{E}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{30} \frac{7}{2} = 30 \times \frac{7}{2} = 15 \times 7 = 105. \end{aligned}$$

D'après les propriétés de la variance, comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(S) &= \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} \mathbf{V}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{30} \frac{35}{12} = 30 \times \frac{35}{12} = \frac{5 \times 35}{2} = \frac{175}{2}. \end{aligned}$$

2. Comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[P] &= \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{30} X_i\right] = \prod_{i=1}^{30} \mathbf{E}[X_i] \\ &= \prod_{i=1}^{30} \frac{7}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)^{30}.\end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 16.** La variable aléatoire  $X_i$  prend les valeurs 10 et  $-5$ . De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X_i = 10]) &= \frac{2}{3}, \\ \mathbf{P}([X_i = -5]) &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

D'après les définitions,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_i] &= 10 \times \frac{2}{3} - 5 \times \frac{1}{3} = \frac{15}{3} = 5, \\ \mathbf{E}[(X_i)^2] &= 10^2 \times \frac{2}{3} + 5^2 \times \frac{1}{3} = 75.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X_i) = \mathbf{E}[(X_i)^2] - \mathbf{E}[X_i]^2 = 75 - 5^2 = 50.$$

1. D'après la définition de  $S$ ,

$$S = \sum_{i=1}^{50} X_i.$$

En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[S] &= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{50} X_i\right] = \sum_{i=1}^{50} \mathbf{E}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{50} 5 = 50 \times 5 = 250.\end{aligned}$$

D'après les propriétés de la variance, comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S) &= \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = \sum_{i=1}^{50} \mathbf{V}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{50} 50 = 50 \times 50 = 2500.\end{aligned}$$

2. Comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[P] &= \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{50} X_i\right] = \prod_{i=1}^{50} \mathbf{E}[X_i] \\ &= \prod_{i=1}^{50} 5 = 5^{50}.\end{aligned}$$

□

## IV - Lois de couple

**Solution de l'exercice 17.**

1. Comme la somme des probabilités vaut 1, alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + p + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} &= 1 \\ 1 + p &= 1 \\ p &= 0.\end{aligned}$$

2. On complète le tableau précédent :

| $x \backslash y$    | 1             | 2             | 3             | 4             | $\mathbf{P}(X = x)$ |
|---------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------------|
| 0                   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 0             | $\frac{3}{4}$       |
| 1                   | 0             | 0             | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$       |
| $\mathbf{P}(Y = x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |                     |

Comme  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1/4)$ , alors

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{4}.$$

De plus, d'après la loi de  $Y$  obtenue ci-dessus,

$$\mathbf{E}[Y] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} = 2.$$

**3.** En utilisant le tableau précédent,

$$\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=1]) = \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=1])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0,$$

$$\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=2]) = \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=2])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0,$$

$$\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=3]) = \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=3])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=4]) = \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=4])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

On peut donc résumer la loi de  $Y$  sachant  $[X=1]$  dans le tableau suivant :

| $k$                         | 3             | 4             |
|-----------------------------|---------------|---------------|
| $\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=k])$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

**4.** On remarque que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) &= 0 \\ \mathbf{P}(X=1) \times \mathbf{P}(Y=1) &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) \neq \mathbf{P}(X=1) \times \mathbf{P}(Y=1)$$

et les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

**5.** D'après les propriétés des probabilités,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X=0] \cup [Y=1]) &= \mathbf{P}(X=0) + \mathbf{P}(Y=1) - \mathbf{P}([X=0] \cap [Y=1]) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

**6.** En utilisant la définition,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[XY] &= 0 \times 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 2 \times \frac{1}{8} + 0 \times 3 \times \frac{1}{8} + 0 \times 4 \times 0 + \dots \\ &\quad \dots + 1 \times 1 \times 0 + 1 \times 2 \times 0 + 1 \times 3 \times \frac{1}{8} + 1 \times 4 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la question **1.**,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X] \mathbf{E}[Y] \\ &= \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \times 2 = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

**7.** Comme  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1/4)$ , alors

$$\mathbf{V}(X) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}.$$

D'après le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}[Y^2] = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{8} = \frac{21}{4}.$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}[Y^2] - \mathbf{E}[Y]^2 = \frac{21}{4} - 2^2 = \frac{5}{4}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \mathbf{V}(Y)}} \\ &= \frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{5}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}. \end{aligned}$$

**8.** En utilisant la linéarité de la covariance par rapport à son premier argument,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X+Y, X) &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) = \mathbf{V}(X) + \text{Cov}(X, Y) \\ &= \frac{3}{16} + \frac{3}{8} = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$



En utilisant la symétrie de la covariance,

$$\text{Cov}(X, X + Y) = \text{Cov}(X + Y, X) = \frac{9}{16}.$$

En utilisant la linéarité de la covariance par rapport à son premier argument,

$$\text{Cov}(2X, X) = 2\text{Cov}(X, X) = 2\mathbf{V}(X) = 2 \times \frac{3}{16} = \frac{3}{8}.$$

En utilisant la variance d'une somme,

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{3}{16} + \frac{5}{4} + 2\frac{3}{8} = \frac{35}{16}.$$

□

### Solution de l'exercice 18.

1. En fonction des valeurs obtenus pour chacun des lancers, les valeurs obtenues par le couple  $(X, Y)$  sont

$$\{(i, j), 1 \leq i \leq j \leq 6\}.$$

2. Si  $X = 1$ , la plus grande valeur renvoyée est 1, donc les deux dés ont renvoyé la valeur 1. Ainsi,

$$[X = 1] = \{(1, 1)\}.$$

En utilisant l'équiprobabilité des lancers,

$$\mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{36}.$$

3. Si  $Y = 1$ , alors un des deux dés a renvoyé 1 :

$$[Y = 1] = \{(1, 1), (1, i), (j, 1), 2 \leq i, j \leq 6\}.$$

Comme  $|[Y = 1]| = 11$ , en utilisant l'équiprobabilité,

$$\mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{11}{36}.$$

4. Si le plus petit et le plus grand des résultats obtenus vaut 1, alors les deux lancers ont renvoyé 1. Ainsi,

$$[X = 1] \cap [Y = 1] = \{(1, 1)\}.$$

D'où,

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{36}.$$

5. Comme  $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) \neq \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 1)$ , alors  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes. □

### Solution de l'exercice 19.

1. Les résultats obtenus au cours des 4 lancers peuvent varier entre 0 (tous les résultats sont identiques) et 3 (le résultat change à chaque lancer). De plus,

$$\mathbf{P}([X = 0]) = \mathbf{P}(\{FFFF, PPPP\}) = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^3},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = 1]) &= \mathbf{P}(\{FPFP, FFPP, FFFP, PFFF, PPFF, PPPF\}) \\ &= \frac{6}{2^4} = \frac{3}{2^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = 2]) &= \mathbf{P}(\{PFPP, PFFP, PPFP, FPF, FPPF, FFPF\}) \\ &= \frac{6}{2^4} = \frac{3}{2^3}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}([X = 2]) = \mathbf{P}(\{PFPP, FFPF\}) = \frac{2}{2^4} = \frac{1}{2^3}.$$

La loi de  $X$  peut être représentée dans le tableau suivant :

| $k$                   | 0             | 1             | 2             | 3             |
|-----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\mathbf{P}([X = k])$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

En utilisant le tableau,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{3 + 6 + 3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{3 + 12 + 9}{8} = \frac{24}{8} = 3. \end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{12-9}{4} = \frac{3}{4}.$$

2. La variable aléatoire  $Y$  compte le nombre de succès dans une suite de 4 expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès égale à  $\frac{1}{2}$ . Ainsi,  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(4, 1/2)$ .

D'après le cours,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y] &= 4 \times \frac{1}{2} = 2, \\ \mathbf{V}(Y) &= 4 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.\end{aligned}$$

3. En utilisant l'étude effectuée précédemment pour établir la loi de  $X$ , on peut, pour chaque série de lancers, calculer les valeurs de  $X$  et de  $Y$ . On obtient ainsi le tableau suivant :

| $x \backslash y$ | 0              | 1             | 2             | 3             | 4              |
|------------------|----------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 0                | $\frac{1}{16}$ | 0             | 0             | 0             | $\frac{1}{16}$ |
| 1                | 0              | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 0              |
| 2                | 0              | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 0              |
| 3                | 0              | 0             | $\frac{1}{8}$ | 0             | 0              |

En utilisant le tableau,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[XY] &= 1 \times 1 \times \frac{1}{8} + 1 \times 2 \times \frac{1}{8} + 1 \times 3 \times \frac{1}{8} + \dots \\ &\quad \dots + 2 \times 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times 3 \times \frac{1}{8} + \dots \\ &\quad \dots + 3 \times 2 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1+2+3+2+4+6+6}{8} = \frac{24}{8} = 3.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X] \mathbf{E}[Y] = 3 - \frac{3}{2} \times 2 = 0.$$

4. D'après le tableau,

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) = 0$$

et

$$\mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{2}{16} \times \frac{2}{8} \neq 0.$$

Ainsi, les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

5. D'après la définition du coefficient de corrélation,

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \mathbf{V}(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{3}{4} \times 1}} = 0.$$

6. D'une part,

$$\mathbf{P}([X = 0, Y = 1]) = 0.$$

D'autre part,

$$\mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X = 0, Y = 1]) \neq \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 1])$$

et les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

7. En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y] = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}.$$

En utilisant la formule sur la variance d'une somme,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X + Y) &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{3}{4} + 1 + 0 = \frac{7}{4}, \\ \mathbf{V}(X - Y) &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(-Y) + 2\text{Cov}(X, -Y) \\ &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{7}{4}.\end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 20.

1. Les valeurs qui peuvent être prises par le couple  $(X, Y)$  sont :

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1).$$

La loi du couple  $(X, Y)$  est ainsi :

\* si les deux premières boules tirées sont numérotées 1 :

$$\mathbf{P}([X = 1, Y = 1]) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

\* si la première boule est numérotée 1 et la seconde est numérotée 2 :

$$\mathbf{P}([X = 1, Y = 2]) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

\* si la première boule est numérotée 2 et la seconde est numérotée 1 :

$$\mathbf{P}([X = 2, Y = 1]) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{3}.$$

La loi du couple peut être représentée dans le tableau suivant :

| $x \backslash y$ | 1             | 2             |
|------------------|---------------|---------------|
| 1                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 2                | $\frac{1}{3}$ | 0             |

2. En utilisant les marginales, on obtient :

| $x \backslash y$      | 1             | 2             | $\mathbf{P}([X = x])$ |
|-----------------------|---------------|---------------|-----------------------|
| 1                     | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$         |
| 2                     | $\frac{1}{3}$ | 0             | $\frac{1}{3}$         |
| $\mathbf{P}([Y = y])$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |                       |

3. En utilisant le tableau précédent,

$$\mathbf{E}[X] = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

$$\mathbf{E}[Y] = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

4. Toujours à l'aide du tableau, on obtient :

$$\mathbf{E}[XY] = 1 \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ainsi, d'après la définition de la covariance,

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X] \mathbf{E}[Y] = \frac{5}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{15 - 16}{9} = -\frac{1}{9}.$$

5. D'une part,

$$\mathbf{P}([X = 2, Y = 2]) = 0.$$

D'autre part,

$$\mathbf{P}([X = 2]) \times \mathbf{P}([Y = 2]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X = 2, Y = 2]) \neq \mathbf{P}([X = 2]) \times \mathbf{P}([Y = 2])$$

et les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

6. D'une part,

$$\mathbf{E}[X^2] = 1^2 \frac{2}{3} + 2^2 \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{18 - 16}{9} = \frac{2}{9}.$$

Comme  $X$  et  $Y$  ont la même loi, alors  $\mathbf{V}(Y) = \frac{2}{9}$ .

D'après la définition du coefficient de corrélation,

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \mathbf{V}(Y)}} \\ &= \frac{-\frac{1}{9}}{\sqrt{\frac{2}{9} \times \frac{2}{9}}} \\ &= -\frac{1}{9} \times \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

7. En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y] = \frac{8}{3}.$$

En utilisant la formule sur la variance d'une somme,

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X - Y) &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(-Y) + 2\text{Cov}(X, -Y) \\ &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□