# T.D. VIII - Intégrales généralisées

## I - Fonctions continues

**Exercice 1.** Montrer que les intégrales suivantes convergent et déterminer leurs valeurs.

**1.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t.$

**2.** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t.$

**3.** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{5}{t^3}\,\mathrm{d}t.$

**4.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^4}\,\mathrm{d}t.$

**5.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t.$

**6.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t.$

**7.** $\displaystyle\int_2^{+\infty} 3\,\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t.$

**8.** $\displaystyle\int_3^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

## II - Fonctions discontinues

**Exercice 2.** Soit $f$ la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } t \in [5,10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

**1.** Pour tout $x$ réel, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

**a)** Pour tout $x < 5$, déterminer la valeur de $F(x)$.

**b)** Pour tout $x \in ]5,10[$, déterminer la valeur de $F(x)$.

**c)** Pour tout $x > 10$, déterminer la valeur de $F(x)$.

**d)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

**2.** Pour tout $x$ réel, on pose $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t.$

**a)** Pour tout $x < 5$, déterminer la valeur de $G(x)$.

**b)** Pour tout $x \in ]5,10[$, déterminer la valeur de $G(x)$.

**c)** Pour tout $x > 10$, déterminer la valeur de $G(x)$.

**d)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

**Exercice 3.** Soit $f$ la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t \in [2,4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

**1.** Pour tout $x$ réel, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

**a)** Pour tout $x < 2$, déterminer la valeur de $F(x)$.

**b)** Pour tout $x \in ]2,4[$, déterminer la valeur de $F(x)$.

**c)** Pour tout $x > 4$, déterminer la valeur de $F(x)$.

**d)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

**2.** Pour tout $x$ réel, on pose $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t.$

**a)** Pour tout $x < 2$, déterminer la valeur de $G(x)$.

**b)** Pour tout $x \in ]2,4[$, déterminer la valeur de $G(x)$.

**c)** Pour tout $x > 4$, déterminer la valeur de $G(x)$.

**d)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

**Exercice 4.** Soit $f$ la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\,\mathrm{e}^{-2t} & \text{sinon} \end{cases}.$

**1.** Pour tout $x$ réel, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

**a)** Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.

**b)** Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.

**c)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

**2.** Pour tout $x$ réel, on pose $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} t f(t)\,\mathrm{d}t$.

**a)** Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

**b)** Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

*On pourra utiliser une intégration par parties.*

**c)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

**Exercice 5.** Soit $f$ la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$.

**1.** Pour tout $x$ réel, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

**a)** Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.

**b)** Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.

**c)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

**2.** Pour tout $x$ réel, on pose $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} t f(t)\,\mathrm{d}t$.

**a)** Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

**b)** Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

*On pourra utiliser une intégration par parties.*

**c)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

**Exercice 6.** Soit $f$ la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g$ la fonction définie pour tout $t \geqslant 0$ par $g(t) = -\frac{1}{1+t^2}$.

**1.** Pour tout réel $t \geqslant 0$, déterminer $g'(t)$.

**2.** Pour tout $x \geqslant 0$, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

**3.** En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

**Exercice 7.** Soit $f$ la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \ln(t) & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Pour tout réel $A$ supérieur ou égal à 1, on pose $I(A) = \displaystyle\int_{-\infty}^{A} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ et $J(A) = \displaystyle\int_{-\infty}^{A} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

**1.** Pour tout $A \geqslant 1$, déterminer la valeur de $I(A)$.

**2.** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

**3.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $A \geqslant 1$,

$$J(A) = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.$$

**4.** En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.