



Exercice 1. Deux candidates, Alice et Béa se présentent à un concours, la première étant plus averse au risque. On pose A et B leurs notes respectives et on modélise l'aversion au risque de la façon suivante :

- A suit une loi discrète sur l'ensemble $\llbracket 9, 11 \rrbracket$ (probabilité $\frac{1}{3}$ pour chaque valeur),
- B suit aussi une loi uniforme discrète mais sur l'ensemble $\llbracket 8, 12 \rrbracket$ (probabilité $\frac{1}{5}$ pour chaque valeur).
- A et B sont indépendantes.

- Calculer les espérances des variables A et B .
 - Calculer leurs variances.
- Le concours retient la candidate ayant la meilleure note. En cas d'égalité, personne n'est sélectionné.
 - Quelle est la probabilité que $A = B$?
 - Conditionnellement à $B = 10$, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?
 - Dans le cas général, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?
 - Quelle est la probabilité qu'Alice soit sélectionnée ?

On suppose désormais qu'il y a deux candidates supplémentaires, Aria et Bénédicte, mais toujours une seule place au concours. Aria est averse au risque comme Alice, sa note A' est donc de même loi que A ; la note B' de Bénédicte est de même loi que B . Les notes sont toutes supposées indépendantes les unes des autres.

- Quelle est la probabilité que $B = 12$?
 - Conditionnellement à $B = 12$, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?
 - Dans le cas général, quelle est la probabilité que Aria soit sélectionnée ?
 - Quelle est la probabilité que Alice ou Aria soit sélectionnée ?
 - Quelle est la probabilité que Béa ou Bénédicte soit sélectionnée ?

On observe 100 notes, X_1, \dots, X_{100} , supposées indépendantes. On note p la proportion de ces variables aléatoires qui sont de même loi que B , les autres étant de même loi que A . On souhaite estimer cette proportion p .

- On suppose que la première candidate est averse au risque, quelle est alors la loi conditionnelle de sa note X_1 ?
 - Même question s'il s'agit d'une candidate non averse au risque.
 - En déduire la loi non conditionnelle de X_1 .
 - Calculer l'espérance de X_1 .
 - On pose $V = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (X_i - 10)^2$. Calculer son espérance.
 - Proposer un estimateur \hat{p} sans biais de p .