T.D. VI - Probabilités

I - Tirages

Solution de l'exercice 2.

1. a)

b)

c) $\frac{\binom{n-k}{3}}{\binom{n}{4}}$. □

Solution de l'exercice 3. $p_n = \frac{\binom{10}{4}\binom{n-10}{6}}{\binom{n}{10}}$. □

Solution de l'exercice 4. Le nombre de tirages de toutes les boules = agencement des b boules = $\binom{b+r}{b}$.
Le nombre de tirages favorables = k bleues puis 1 rouge puis les $r-1$ boules à placer : $\binom{b+r-b-1}{r-1}$.
D'où le résultat.

2ème méthode. En utilisant la formule

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i \cap \overline{B_k}\right) = \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(B_2|B_1) \cdots \mathbf{P}\left(B_k | \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cdot \mathbf{P}\left(\overline{B_{k+1}} | \bigcap_{i=1}^{k} B_i\right)$$
$$= \frac{b}{b+r} \cdots \frac{b-k+1}{b+r-k+1} \cdot \frac{r}{b+r-k}$$

□

II - Arbres

Solution de l'exercice 6.

1. $\frac{19}{68} \approx 0{,}2$.

2. $\frac{1}{932}$.

□

Solution de l'exercice 7. On utilise la formule de Bayes et on réalise un arbre.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(M|P) &= \frac{\mathbf{P}(M \cap P)}{\mathbf{P}(P)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(M \cap P)}{\mathbf{P}(M \cap P) + \mathbf{P}\left(\overline{M} \cap P\right)} \\
&= \frac{99999 \cdot 10^{-10}}{99999 \cdot 10^{-10} + 10^{-4} \cdot 999999 \cdot 10^{-5}} \\
&= \frac{99999}{99999 + 999999} \approx 10^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. En distinguant en fonction du numéro de l'urne choisie,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(N|B_k)\,\mathbf{P}(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n-1} \cdot \frac{n-k}{n-2} + \frac{n-k}{n-1} \cdot \frac{n-k-1}{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^{n} (n-k) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. En notant C_1 et C_2 la couleur des boules obtenues lors des deux premiers tirages,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(C_2 = N | C_1 = N) &= \frac{\mathbf{P}(C_1 = N, C_2 = N)}{\mathbf{P}(C_1 = N)} \\
&= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)(n-2)} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 9. A = tirer le jeu de 32 cartes,
B = tirer le jeu de 54 cartes, D = tirer une dame.
$\mathbf{P}_D(A) = \frac{\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}_A(D)}{\mathbf{P}(D)} = \frac{1/2\cdot 1/8}{\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}_A(D)+\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}_B(D)} = \frac{1/(2\cdot 8)}{1/(2\cdot 8)+1/(2\cdot 14)} = \frac{7}{11}$.
□

III - Jeu de pile ou face

Solution de l'exercice 10. En notant P_1 (resp. P_2) le nombre de piles obtenues par le joueur 1 (resp. 2), la probabilité recherchée est $1 - \mathbf{P}(P_1 = P_2)$. Cette dernière vaut $\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$ en utilisant la formule de Vandermonde. □

Solution de l'exercice 11. On note A l'événement *Faire banqueroute* et B l'événement *Le joueur perd* 1 *euro au premier lancer*. On note $\mathbb{P}_k$ la probabilité où la somme de départ vaut k. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_k(A) &= \mathbb{P}_k(A|B)\mathbb{P}_k(B) + \mathbb{P}_k(A|\overline{B})\mathbb{P}_k(\overline{B})\\ p_k &= p_{k+1}\frac{1}{2} + p_{k-1}\frac{1}{2}\end{aligned}$$

L'équation caractéristique associée à cette formule de récurrence est $r^2 - 2r + 1 = 0$. Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ p_k = \alpha + \beta k$$

De plus, $p_0 = 1$ et $p_N = 0$. Ainsi,

$$p_k = 1 - \frac{k}{N}$$

Remarque. La question de savoir si le jeu termine n'est ici pas posée. On peut cependant montrer que le temps de terminaison est fini presque sûrement en le dominant par une v.a. de loi géométrique. □

IV - Divers

Solution de l'exercice 12. Nombre de tirages possibles : $10 \cdot 9 \cdot 8$.
Nombre de tirages favorables : nombre de parties à 3 éléments parmi les 10 cartes : $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}$. En effet, il y a bijection entre le nombre de tirages favorables et ce nombre de parties.
La probabilité recherchée est donc $\frac{1}{6}$ et est indépendante de la taille du paquet. □

Solution de l'exercice 13. On note $\mathbf{P}(A_{n+1}|A_n) = x$. Alors, $\mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}}|\overline{A_n}\right) = 1 - x$ et En utilisant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbf{P}\left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right)\\ &= x\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) - \mathbf{P}\left(\overline{A_{n+1}} \cap \overline{A_n}\right)\\ &= x\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) - x\mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right)\\ &= (2x-1)\mathbf{P}(A_n) + 1 - x.\end{aligned}$$

Le point fixe est $\ell = \frac{1}{2}$ et $p_{n+1} - \ell = (2x-1)^n p_0$.
De plus, $-1 < 2x - 1 < 1$. On obtient ainsi une suite arithmético-géométrique et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{2}$. □

Solution de l'exercice 14.

* Soit on choisit $n-1$ allumettes dans la boîte n°1 et $n+1-k$ dans la boîte n°2, la dernière allumette étant prise dans la première boîte. Le nombre de façons est

$$2^{-2n-1+k}\binom{2n-k}{n-1}$$

* Soit on choisit n allumettes dans la boîte n°2 et $n-k$ dans la boîte n°1 (la dernière allumette étant prise dans la seconde boîte). Le nombre de façons est

$$2^{-2n-1+k}\binom{2n-k}{n}$$

Finalement, la probabilité de chaque tirage est de $2^{-2n+k+1}$ et

$$2^{-2n-1+k}\left[\binom{2n-k}{n-1} + \binom{2n-k}{n}\right] = 2^{-2n-1+k}\binom{2n+1-k}{n}$$

□