VI - Espaces vectoriels

I - Systèmes d'équations linéaires

Définition 1 - Système linéaire

Soient $a_{1,1}, \dots, a_{1,p}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,p}, b_1, \dots, b_n$ des réels. Le système $(\mathscr{S})$

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \vdots & = \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

est un *système linéaire* d'inconnues $x_1, \dots, x_p$.

- Un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ est *solution* de $(\mathscr{S})$ s'il est solution de chacune des lignes du système.
- Deux systèmes sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple 1

Les systèmes suivants sont des systèmes d'équations linéaires :

- $\begin{cases} 2x + 3y + z & = 0 \\ x + 5y + 2z & = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + y & = 3 \\ x + 5y & = 2 \end{cases}$

Définition 2 - Opérations élémentaires

Nous noterons $L_1, \dots, L_n$ les lignes du système et appellerons *opérations élémentaires* sur les lignes du système les transformations suivantes :

- Pour $i \neq j$, l'échange des lignes L_i et L_j, symbolisé par $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Pour $\alpha \neq 0$, la multiplication de la ligne L_i par α, symbolisée par $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
- Pour $i \neq j$ et $\beta \in \mathbb{R}$, l'ajout à L_i de la ligne L_j multipliée par β, symbolisé par $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$.

Théorème 1

Le système obtenu par application d'opérations élémentaires sur les lignes est équivalent au système initial.

Principe de l'algorithme du pivot de Gauss : On utilise les opérations élémentaires pour transformer le système en un système échelonné.

Algorithme :

- On cherche une ligne où le coefficient α de x_1 est non nul et simple. Notons cette ligne L_{i_0}.
- On échange les lignes 1 et i_0, $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$.
- On utilise la nouvelle ligne L_1 pour éliminer les occurrences de x_1 dans les lignes suivantes, c'est la ligne pivot. Par exemple, si à la ligne L_2 le coefficient de x_1 est a, on effectue $L_2 \leftarrow \alpha L_2 - a L_1$.
- On reprend ensuite les étapes de l'algorithme en travaillant sur toutes les lignes sauf la première de manière à éliminer x_2...
- Enfin, on exprime les solutions en fonction des variables libres.

Définition 3 - Rang d'un système linéaire

Le *rang* du système est le nombre d'équations non triviales du système échelonné.

Théorème 2 - Ensemble de solutions

Soit S l'ensemble des solutions du système $(\mathscr{S})$.

- Soit $S = \emptyset$, les équations sont *incompatibles*.
- Soit S est un singleton, le rang est alors égal au nombre d'inconnues.
- Soit S est infini, le rang est alors strictement inférieur au nombre d'inconnues.

Exemple 2 - Résolution de système

- Résolvons le système suivant avec l'algorithme du pivot de Gauss :
$$(\mathscr{S}) \begin{cases} 2x+3y+z &= 7 \\ x-y+2z &= -3 \\ 3x+y-z &= 6 \end{cases}.$$
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est solution de $(\mathscr{S})$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z &= -3 \quad {\scriptstyle L_1 \leftrightarrow L_2} \\ 2x+3y+z &= 7 \\ 3x+y-z &= 6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z &= -3 \\ 5y-3z &= 13 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2-2L_1} \\ 4y-7z &= 15 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3-3L_1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z &= -3 \\ 5y-3z &= 13 \\ -23z &= 23 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow 5L_3-4L_2} \end{cases}.$$
Le système $(\mathscr{S})$ possède une unique solution. L'ensemble des solutions est $\{(1,2,-1)\}$.
- Résolvons le système suivant avec l'algorithme du pivot de Gauss :
$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x+y &= 2 \\ x-2y &= 5 \end{cases}.$$
$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est solution de $(\mathscr{S})$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 2 \\ x-2y &= 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 2 \\ 3y &= -3 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1-L_2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 3 \\ y &= -1 \end{cases}$$
Le système $(\mathscr{S})$ possède une unique solution. L'ensemble des solutions est $\{(3,-1)\}$.
- Résolvons le système
$$(\mathscr{S}) \left\{ x+2y+3z = 1 \right. .$$
Ce système est déjà échelonné. Ainsi,
(x,y,z) est solution de $(\mathscr{S})$
$$\Leftrightarrow \exists\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\ ; \begin{cases} x &= 1-2\lambda-3\mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{cases}$$
Le système $(\mathscr{S})$ possède une infinité de solutions. L'ensemble des solutions est
$$\left\{(1-2\lambda-3\mu, \lambda, \mu),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
$$= \left\{(1,0,0)+\lambda(-2,1,0)+\mu(-3,0,1),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

II - Espaces vectoriels

On note $\overrightarrow{0_n} = (0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels non nuls.

Définition 4 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

On définit sur $\mathbb{R}^n$ l'addition et la multiplication par un réel de la manière suivante :

Addition. Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Multiplication par un réel. Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Exemple 3 - Cas où $n = 2, 3$

- Si $n = 2$.

$$\begin{aligned} (1,2) + (3,4) &= (4,6) \\ (1,5) + (-1,0) &= (0,5) \\ 3 \cdot (4,2) &= (12,6) \end{aligned}$$

- Si $n = 3$.

$$\begin{aligned} (1,-1,2) + (4,5,-5) &= (5,4,-3) \\ (1,0,-1) + (3,1,2) &= (4,1,1) \\ 2 \cdot (4,1,-2) &= (8,2,-4) \end{aligned}$$

Proposition 1 - Structure d'espace vectoriel

- Propriétés de l'addition. Soit x, y, z des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
  - ⋆ Associativité : $x + (y + z) = (x + y) + z$.
  - ⋆ Élément neutre : $x + \overrightarrow{0_n} = \overrightarrow{0_n} + x = x$.
  - ⋆ Existence d'un opposé : $x + (-1) \cdot x = (-1) \cdot x + x = \overrightarrow{0_n}$.
  - ⋆ Commutativité : $x + y = y + x$.
- Propriétés de la multiplication par un réel. Soit x, $y \in \mathbb{R}^n$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l|l} \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x & (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ 1 \cdot x = x & \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \end{array}$$

$\mathbb{R}^n$ est un *espace vectoriel*. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont des *vecteurs*.

III - Familles de vecteurs

Dans tout ce chapitre, p désigne un entier naturel non nul.

III.1 - Sous-espace vectoriel

Définition 5 - Sous-espace vectoriel

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est un *sous-espace vectoriel* si

- $\overrightarrow{0_n} \in A$,
- pour tout u, $v \in A$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha u + \beta v \in A$.

Exemple 4 - Exemples classiques de sous-espaces vectoriels

- $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- $\left\{\overrightarrow{0_n}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- Géométriquement,
  - ⋆ les droites sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
  - ⋆ les droites sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
  - ⋆ les plans sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5 - Exemples de sous-espaces vectoriels

- Soit $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = 0, \ 2x + 3y + 5z = 0\right\}$. Alors, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet,
  - ⋆ $0+0+0 = 0$ et $2 \times 0 + 3 \times 0 + 5 \times 0 = 0$. Ainsi, $\overrightarrow{0_3} \in F$.
  - ⋆ Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de F et α, β deux réels. Alors,

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 &= 0 \\ 2x_1 + 3y_1 + 5z_1 &= 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_2 + y_2 + z_2 &= 0 \\ 2x_2 + 3y_2 + 5z_2 &= 0 \end{cases}.$$

De plus, $\alpha u + \beta v = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$.

Ainsi,

$$\begin{cases} (\alpha x_1+\beta x_2)+(\alpha y_1+\beta y_2)+(\alpha z_1+\beta z_2) \\ \qquad =\alpha(x_1+y_1+z_1)+\beta(x_2+y_2+z_2)=0 \\ 2(\alpha x_1+\beta x_2)+3(\alpha y_1+\beta y_2)+5(\alpha z_1+\beta z_2) \\ \qquad =\alpha(2x_1+3y_1+5z_1)+\beta(2x_2+3y_2+5z_2)=0 \end{cases}$$

Donc $\alpha u+\beta v$ appartient à F.
Finalement, F contient le vecteur nul et est stable par combinaisons linéaires, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- Soit $\mathscr{F}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x+y+z=1,\ 2x+3y+5z=3\right\}$. Alors, $\mathscr{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, $0+0+0=0\neq 1$, donc $\overrightarrow{0_3}$ n'appartient pas à $\mathscr{F}$.

Définition 6 - Combinaison linéaire

Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- si $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{R}$, le vecteur $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_px_p$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $(x_1,\dots,x_p)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1,\dots,x_p)$ est noté :

$$\mathrm{Vect}\{x_1,\dots,x_p\}=\left\{\sum_{i=1}^p\alpha_ix_i,\ (\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{R}^p\right\}.$$

Proposition 2

Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors, $\mathrm{Vect}\left\{x_1,\dots,x_p\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 6 - Un peu de géométrie

- $D=\mathrm{Vect}\left\{(1,2)\right\}=\{\alpha(1,2),\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble D est une droite de $\mathbb{R}^2$.
- $D=\mathrm{Vect}\left\{(1,0)\right\}=\{\alpha(1,0),\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble D est une droite de $\mathbb{R}^2$.
- $D=\mathrm{Vect}\left\{(1,0,1)\right\}=\{\alpha(1,0,1),\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble D est une droite de $\mathbb{R}^2$.
- $P=\mathrm{Vect}\left\{(1,0,0),(0,0,1)\right\}=\{(\alpha,0,\beta),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble P est un plan de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 7 - Équation cartésienne → Combinaison linéaire

Cette transformation repose sur l'algorithme du pivot de Gauss.
Soit $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x+y+z=0 \text{ et } 2x+3y+5z=0\right\}$.
Écrivons F comme un ensemble de combinaisons linéaires.

$$(x,y,z)\in F\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x+y+z &=0 \\ 2x+3y+5z &=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} x+y+z &=0 \\ y+3z &=0 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-2L_1} \end{cases}\ \Leftrightarrow\ \exists\lambda\in\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x &=2\lambda \\ y &=-3\lambda \\ z &=\lambda \end{cases}.$$

Ainsi,

$$F=\{\lambda\cdot(2,-3,1),\ \lambda\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\left\{(2,-3,1)\right\}.$$

Exemple 8 - Combinaison linéaire → Équation cartésienne

Cette transformation repose sur l'existence d'une solution d'un système linéaire, via l'algorithme du pivot de Gauss.
Soit $F=\mathrm{Vect}\left\{(1,2,3),(1,0,1),(2,2,4)\right\}$.
Déterminons une équation cartésienne de F.
$(x,y,z)\in F$ si et seulement s'il existe $(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$(x,y,z)=\lambda(1,2,3)+\mu(1,0,1)+\nu(2,2,4)$
si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu &= x \\ 2\lambda + 2\nu &= y \\ 3\lambda + \mu + 4\nu &= z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu &= x \\ -2\mu - 2\nu &= y - 2x \leftarrow L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2\mu - 2\nu &= z - 3x \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu &= x \\ -2\mu - 2\nu &= y - 2x \\ 0 &= x - 2y + z \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Ainsi, une description de F via une équation cartésienne est

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x - 2y + z = 0\right\}.$$

Proposition 3 - S

it $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $(\alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\alpha_1 \neq 0$. Alors,

- $\mathrm{Vect}\,\{x_1, \ldots, x_p\} = \mathrm{Vect}\left\{\alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_i, x_2, \ldots, x_p\right\}$.
- Si $x_p \in \mathrm{Vect}\,\{x_1, \ldots, x_{p-1}\}$, alors $\mathrm{Vect}\,\{x_1, \ldots, x_p\} = \mathrm{Vect}\,\{x_1, \ldots, x_{p-1}\}$.

III.2 - Bases

Dans cette partie, $(x_1, \ldots, x_p)$ désigne une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 7 - Famille libre

La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est *libre* si, pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = \overrightarrow{0_n} \;\Rightarrow\; \forall\, i \in [\![1, p]\!],\, \alpha_i = 0.$$

La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de vecteurs *linéairement indépendants*.

Exemple 9

La famille $((1, 2), (3, 4))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
En effet, soit α, $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(1, 2) + \beta(3, 4) = (0, 0)$. Alors,

$$(\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0)$$

De même,

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta &= 0 \\ 2\alpha + 4\beta &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta &= 0 \\ -2\beta &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \end{cases}$$

Exercice 1. Montrer que $((1, 2, -1), (2, 1, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Définition 8 - Famille génératrice

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille *génératrice* de F si, pour tout $x \in F$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$.

Exercice 2. Montrer que $((1, 0), (0, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Définition 9 - Base

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est une *base* de F si elle est génératrice et que ses vecteurs sont linéairement indépendants.

Exemple 10 - Bases canoniques

- $((1, 0), (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 4 - Dimension

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_q)$ sont des bases de F, alors $p = q$. L'entier p est la *dimension* de l'espace vectoriel F, noté $\dim F$. Par convention, $\dim\left\{\overrightarrow{0_n}\right\} = 0$.

Exercice 3.

1. Déterminer la dimension de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la dimension de $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x+2y+z=0\right\}$.

Proposition 5 - Caractérisation des bases

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension q de $\mathbb{R}^n$ et $(x_1,\ldots,x_p)$ une famille de vecteurs de F. Il y a équivalence entre :

(i). $(x_1,\ldots,x_p)$ est une base de F.

(ii). $(x_1,\ldots,x_p)$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants et $p=q$.

(iii). $(x_1,\ldots,x_p)$ est une famille génératrice de F et $p=q$.

Exercice 4. Montrer que $((1,2,3),(1,0,1),(0,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3 - Théorème de la base incomplète

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(x_1,\ldots,x_p)$ une famille libre de F. Il existe une famille $(y_{p+1},\ldots,y_q)$ telle que $(x_1,\ldots,x_p,y_{p+1},\ldots,y_q)$ soit une base de F.

Définition 10 - Coordonnées

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $(x_1,\ldots,x_p)$ une base de F et $x \in F$. Il existe un unique $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$.

Exemple 11 - Calcul de coordonnées

Déterminons les coordonnées de $(3,1,2)$ dans la base $((1,2,3),(1,0,1),(0,1,-1))$.

Il existe $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(3,2,1) = \lambda(1,2,3) + \mu(1,0,1) + \nu(0,1,-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu &= 3 \\ 2\lambda+\nu &= 2 \\ 3\lambda+\mu-\nu &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu &= 3 \\ -2\mu+\nu &= -4 & {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-2L_1} \\ -2\mu-\nu &= -8 & {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3-3L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu &= 3 \\ -2\mu+\nu &= -4 \\ -4\mu &= -12 & {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3+L_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= 0 \\ \nu &= 2 \\ \mu &= 3 \end{cases}$$

Ainsi,

$$(3,2,1) = 0\cdot(1,2,3) + 3\cdot(1,0,1) + 2\cdot(0,1,-1).$$