

T.D. VI - Espaces vectoriels

I - Systèmes linéaires

Solution de l'exercice 1.

1. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 2 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2y + 2z = -1 \\ y + 2z = 9 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2y + 2z = -1 \\ 6z = 17 \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{17}{6} \\ y = \frac{10}{3} \\ z = \frac{17}{6} \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est $\left\{ \left(-\frac{17}{6}, \frac{10}{3}, \frac{17}{6} \right) \right\}$.

2. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 5y - 3z = 13 \\ 4y - 7z = 15 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 5y - 3z = 13 \\ 23z = -23 \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow -5L_3 + 4L_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ainsi, \mathcal{S}_2 possède une unique solution et l'ensemble des solutions est $\{(1, 2, -1)\}$.

3. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 2 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ -5y + 10z = -10 \\ -5y + 10z = -10 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ -5y + 10z = -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Le système (\mathcal{S}_3) possède une infinité de solutions et l'ensemble des solutions est

$$\{(2 - \lambda, 2 + 2\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2, 2, 0) + \lambda(-1, 2, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

4. Le système est déjà échelonné et possède deux variables libres. Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\{(5 - \lambda - \mu, \lambda, \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{(5, 0, 0) + \lambda(-1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

$$5. (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ est solution de } (\mathcal{S}_5) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -7y + 11z = 10 \\ -7y + 11z = 7 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix}.$$

Les deuxième et troisième lignes sont incompatibles, le système ne possède aucune solution. L'ensemble des solutions est \emptyset .

6. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -x + 2y + 4z &= -11 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 2x - 3y + 5z &= 8 & L_2 \leftarrow L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -x + 2y + 4z &= -11 \\ y + 13z &= -14 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x &= -17 - 22\lambda \\ y &= -14 - 13\lambda \\ z &= \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système (\mathcal{S}_6) est infini et est donné par

$$\begin{aligned} & \{(-17 - 22\lambda, -14 - 13\lambda, \lambda) ; \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-17, -14, 0) + \lambda(-22, -13, 1)\}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 2. On raisonne par équivalences

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 & L_2 \leftarrow L_1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \lambda \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 & L_1 \leftarrow L_2 \\ -5x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 5x_2 - 3x_3 + 7x_4 &= \lambda - 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 & L_1 \leftarrow L_2 \\ -5x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 &= \lambda - 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\lambda = 5$, le système possède une infinité de solution. Si $\lambda \neq 5$, l'ensemble des solutions est l'ensemble vide. Finalement, l'unique solution est $\lambda = 5$. □

II - Familles de vecteurs

Solution de l'exercice 3.

1. D'une part, E_1 est inclus dans \mathbb{R}^n et $\vec{0}_n \in E_1$.

D'autre part, si $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de E_1 et α est un réel, alors

$$\alpha u + v = (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \dots, \alpha x_n + y_n).$$

Comme $u \in E_1$, alors $x_1 = x_2 = 0$. De même, $y_1 = y_2 = 0$. Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha x_1 + y_1 &= 0 \\ \alpha x_2 + y_2 &= 0 \end{cases}$$

Les deux composantes de $\alpha u + v$ sont nulles, donc $\alpha u + v \in E_1$.

Finalement, E_1 est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

2^e méthode. En posant $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2)$, alors f est linéaire et $E_1 = \text{Ker } f$. Ainsi, E_1 est un espace vectoriel.

2. D'une part, E_2 est inclus dans \mathbb{R}^n et $\vec{0}_n \in E_2$.

D'autre part, si $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de E_2 et α est un réel, alors

$$\alpha u + v = (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \dots, \alpha x_n + y_n).$$

Comme $u \in E_2$, alors $x_1 + x_2 = 0$. De même, $y_1 + y_2 = 0$.

Ainsi,

$$(\alpha x_1 + y_1) + (\alpha x_2 + y_2) = \alpha(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0.$$

Donc, $\alpha u + v \in E_2$.

Finalement, E_2 est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

2^e méthode. En posant $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + x_2$, alors f est linéaire et $E_2 = \text{Ker } f$. Ainsi, E_2 est un espace vectoriel.

3. Comme $(0, \dots, 0) \notin E_3$, alors E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

4. D'une part, E_4 est inclus dans \mathbb{R}^n et $\vec{0}_n \in E_4$.

D'autre part, si $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de E_4 et α est un réel, alors

$$\alpha u + v = (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \dots, \alpha x_n + y_n).$$

Comme $u \in E_4$, alors $x_1 = x_2$. De même, $y_1 = y_2$.

Ainsi,

$$\alpha x_1 + y_1 = \alpha x_2 + y_2.$$

Donc, $\alpha u + v \in E_4$.

Finalement, E_4 est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

2^e méthode. En posant $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 - x_2$, alors f est linéaire et $E_4 = \text{Ker } f$. Ainsi, E_4 est un espace vectoriel.

5. On remarque que

$$u = (1, 0, 0, \dots, 0) \in E_5$$

$$v = (0, 1, 0, \dots, 0) \in E_5$$

Cependant, $u + v = (1, 1, 0, \dots)$ donc $u + v \notin E_5$.

Ainsi, E_5 n'est pas un espace vectoriel. □

Solution de l'exercice 4.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a(-1, -1, 1, 2) + b(1, -1, 1, 5) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ -a - b = 0 \\ a + b = 0 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ a + 2b = 0 \\ a + b = 0 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2$$

Ainsi, $a = b = 0$ et la famille est libre.

2^e méthode. Comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, alors ils forment une famille libre.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a(8, 4, 1, -2) + b(1, 3, 0, 5) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} 8a + b = 0 \\ 4a + 3b = 0 \\ a = 0 \\ -2a + 5b = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $a = b = 0$ et la famille est libre.

2^e méthode. Comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, alors ils forment une famille libre.

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a(1, 1, 3, 2) + b(1, -1, 1, 3) + c(0, 1, 5, 2) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b + c = 0 \\ 3a + b + 5c = 0 \\ 2a + 3b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + a - b = 0 \\ a + b = 0 \\ 5c + 3a + b = 0 \\ 2c + 2a + 3b = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c + a - b = 0 \\ a + b = 0 \\ -2a + 6b = 0 \\ 5b = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}$$

Ainsi, $a = b = c = 0$ et la famille est libre.

4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a(1, 2, 3, 4) + b(-1, 3, 2, 1) + c(2, 1, -1, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \\ 3a + 2b - c = 0 \\ 4a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 5b - 3c = 0 \\ 5b - 7c = 0 \\ 5b - 7c = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 5b - 3c = 0 \\ 4c = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

Ainsi, $a = b = c = 0$ et la famille est libre. \square

Solution de l'exercice 5.

1. Comme $F_1 = \text{Vect}\{(2, -1, -3)\}$, alors $((2, -1, -3))$ est une famille génératrice de F_1 .

2. Comme $F_2 = \text{Vect}\{(2, 0, -3)\}$, alors $((2, 0, -3))$ est une famille génératrice de F_2 .

3. Comme $F_3 = \text{Vect}\{(2, 0, 3), (1, 2, -1)\}$, alors $((2, 0, 3), (1, 2, -1))$ est une famille génératrice de F_3 .

4. Comme $F_4 = \text{Vect}\{(2, 5, 3), (1, 2, -1)\}$, alors $((2, 5, 3), (1, 2, -1))$ est une famille génératrice de F_4 . \square

Solution de l'exercice 6.

1. $(x, y, z) \in F_1$ si et seulement si $2x - 3y + z = 0$ si et seulement s'il existe λ, μ réels tels que

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -2\lambda + 3\mu \end{cases}.$$

Ainsi, $F_1 = \text{Vect}\{(1, 0, -2), (0, 1, 3)\}$.

La famille $((1, 0, -2), (0, 1, 3))$ est une famille génératrice de F_1 et elle est libre, donc c'est une base de F_1 .

Remarque. $\dim F_1 = 2$, donc F_1 est un plan de \mathbb{R}^3 .

2. Le système étant déjà échelonné,

$$(x, y, z) \in F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

Ainsi, $F_2 = \text{Vect}\{(1, -1, -3)\}$. Comme $(1, -1, -3)$ est non nul, alors la famille $((1, -1, -3))$ est une famille libre de F_2 . De plus, c'est une famille génératrice de F_2 , donc c'est une base de F_2 .

Remarque. $\dim F_2 = 1$ donc F_2 est une droite de \mathbb{R}^3 .

3. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss,

$$(x, y, z, t) \in F_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 5x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 5y + 3z = 0 \\ 10y + 6z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 5y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

Ainsi, $F_3 = \text{Vect}\{(2, -3, 5)\}$. Comme $((2, -3, 5))$ est une famille génératrice de F_3 composée d'un seul vecteur non nul, alors c'est une base de F_3 .

Remarque. Comme $\dim F_3 = 1$, alors F_3 est une droite de \mathbb{R}^3 .

4. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss,

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t) \in F_4 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ x + y - t = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ y + 3z + 2t = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ y + 4z + 2t = 0 & L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ y + 3z + 2t = 0 \\ z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 0 \\ t = \lambda \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $F_4 = \text{Vect}\{(3, -2, 0, 1)\}$. Comme $((3, -2, 0, 1))$ est une famille génératrice de F_4 composée d'un seul vecteur non nul, alors c'est une base de F_4 .

Remarque. Comme $\dim F_4 = 1$, alors F_4 est une droite de \mathbb{R}^4 . \square

Solution de l'exercice 7.

1. $(x, y, z) \in F_1$ si et seulement s'il existe λ, μ réels tels que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 2) + \mu(1, 0, 1)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \lambda = y \\ 2\lambda + \mu = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu + \lambda = x \\ \lambda = y \\ \lambda = z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu + \lambda = x \\ \lambda = y \\ 0 = z - x - y & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, le système possède une solution si et seulement si $z - x - y = 0$. Une équation cartésienne de F_1 est donc $x + y - z = 0$:

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - z = 0\}.$$

2. $(x, y) \in F_2$ si et seulement s'il existe λ, μ réels tels que

$$(x, y) = \lambda(1, 2) + \mu(4, 6)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda + 4\mu = x \\ 2\lambda + 6\mu = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 4\mu = x \\ -2\mu = y - 2x & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

Ainsi, le système possède toujours une solution et $F_2 = \mathbb{R}^2$.

3. $(x, y, z) \in F_3$ si et seulement s'il existe λ, μ réels tels que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 3, 1)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 3\mu = y \\ \lambda + \mu = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 3\mu = y \\ \mu = x - z & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 3\mu = y \\ 0 = 3x - 3z - y & L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, le système possède une solution si et seulement si $3x - 3z - y = 0$. Une équation cartésienne de F_3 est donc $3x - y - 3z = 0$:

$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 3x - y - 3z = 0\}.$$

4. $(x, y, z) \in F_4$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1)$$

si et seulement si le système suivant possède une solution :

$$\begin{cases} \lambda = x \\ \lambda = y \\ \lambda = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x \\ 0 = x - y \\ 0 = x - z \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix}$$

Ainsi, le système possède une solution si et seulement si $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

et une équation cartésienne de F_4 est donc $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$:

$$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y = 0 \text{ ET } x - z = 0\}.$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. Comme nous devons déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base \mathcal{B}_1 , montrons que \mathcal{B}_1 est une base de \mathbb{R}^3 en montrant que tout vecteur de \mathbb{R}^3 se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B}_1 .

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et a, b, c des réels tels que

$$(x, y, z) = a(-1, 1, 1) + b(1, -1, 1) + c(1, 1, -1).$$

Alors,

$$\begin{cases} x = -a + b + c \\ y = a - b + c \\ z = a + b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b + c = x \\ 2c = x + y \\ 2b = x + z \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{y+z}{2} \\ b = \frac{x+z}{2} \\ c = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

Ainsi, tout vecteur de \mathbb{R}^3 se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_1 est bien une base de \mathbb{R}^3 .

De plus,

$$(x, y, z) = \frac{y+z}{2}(-1, 1, 1) + \frac{x+z}{2}(1, -1, 1) + \frac{x+y}{2}(1, 1, -1)$$

soit ici

$$(8, 4, 2) = 3(-1, 1, 1) + 5(1, -1, 1) + 6(1, 1, -1).$$

Les coordonnées de $(8, 4, 2)$ dans la base \mathcal{B}_1 sont donc $(3, 5, 6)$.

2. Comme nous devons déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base \mathcal{B}_2 , montrons que \mathcal{B}_2 est une base de \mathbb{R}^3 en montrant que tout vecteur de \mathbb{R}^3 se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B}_2 .

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et a, b, c des réels tels que

$$(x, y, z) = a(-1, -1, 1) + b(1, -1, 1) + c(2, 2, -1).$$

Alors,

$$\begin{cases} x = -a + b + 2c \\ y = -a - b + 2c \\ z = a + b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b + 2c = x \\ 2b = x - y \\ 2b + c = x + z \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2c + b = x \\ c + 2b = x + z \\ 2b = x - y \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-x+3y+4z}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \\ c = y+z \end{cases}$$

Ainsi, tout vecteur de \mathbb{R}^3 se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_2 est bien une base de \mathbb{R}^3 .

De plus,

$$(x, y, z) = \frac{-x+3y+4z}{2}(-1, -1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1, 1) + (y+z)(2, 2, -1)$$

soit ici

$$(8, 4, 2) = 6(-1, -1, 1) + 2(1, -1, 1) + 6(2, 2, -1).$$

Les coordonnées de $(8, 4, 2)$ dans la base \mathcal{B}_2 sont donc $(6, 2, 6)$.

3. Comme $F = \text{Vect } \mathcal{B}$, alors \mathcal{B} est une famille génératrice de F . Montrons que \mathcal{B} est une famille libre. Soit a, b réels tels que

$$a(-1, -1, 1) + b(2, 2, -1) = (0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} -a + 2b = 0 \\ -a + 2b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 0 \\ 0 = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $a = b = 0$ et \mathcal{B} est bien une famille libre.

Finalement, \mathcal{B} est bien une base de F .

Remarque. On aurait pu montrer la liberté en utilisant la non colinéarité des deux vecteurs. De plus, on a montré que $\dim F = 2$, donc que F est un plan.

Soit λ, μ des réels tels que

$$(3, 3, -1) = \lambda(-1, -1, 1) + \mu(2, 2, -1).$$

Alors,

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = 3 \\ -\lambda + 2\mu = 3 \\ \lambda - \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\mu = 3 \\ 0 = 0 \\ \mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$(3, 3, -1) = (-1, -1, 1) + 2(2, 2, -1)$$

et les coordonnées de $(3, 3, -1)$ dans la base \mathcal{B} sont $(1, 2)$. □

III - Questions plus théoriques

Solution de l'exercice 9.

1. D'une part, $F \cap G \subset \mathbb{R}^n$.

Comme $\vec{0}_n \in F$ et $\vec{0}_n \in G$, alors $\vec{0}_n \in F \cap G$.

Soit $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

* Comme $u, v \in F$ et F est un espace vectoriel, alors $\lambda u + v \in F$.

* Comme $u, v \in G$ et G est un espace vectoriel, alors $\lambda u + v \in G$.

Ainsi, $\lambda u + v \in F \cap G$.

Finalement, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

2. Comme $\vec{0}_n \in F$ et $\vec{0}_n \in G$, alors

$$\vec{0}_n + \vec{0}_n = \vec{0}_n \in F + G.$$

Soit $u, v \in F + G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

* Comme $u \in F + G$, il existe $f_1 \in F$ et $g_1 \in G$ tels que $u = f_1 + g_1$.

* Comme $v \in F + G$, il existe $f_2 \in F$ et $g_2 \in G$ tels que $v = f_2 + g_2$.

Comme F est un espace vectoriel, alors $\lambda f_1 + f_2 \in F$.

Comme G est un espace vectoriel, alors $\lambda g_1 + g_2 \in G$.

Finalement,

$$\lambda u + v = \underbrace{(\lambda f_1 + f_2)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda g_1 + g_2)}_{\in G} \in F + G.$$

Ainsi, $F + G$ est bien un espace vectoriel.

3. D'une part, $D_1 = \text{Vect} \{(1, 0)\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

D'autre part, $D_2 = \text{Vect} \{(0, 1)\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

Ainsi,

* $(1, 0) \in D_1$ donc $(1, 0) \in D_1 \cup D_2$,

* $(0, 1) \in D_2$ donc $(0, 1) \in D_1 \cup D_2$.

Cependant, $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$ n'appartient ni à D_1 , ni à D_2 . Ainsi, $(1, 1) \notin D_1 \cup D_2$.

Ainsi, $D_1 \cup D_2$ n'est pas un espace vectoriel. □

Solution de l'exercice 10. L'équation cartésienne de F est

$$\{x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

Il s'agit d'une système échelonné de rang 1, donc il possède $n - 1$ variables libres. Ainsi, $\dim F = n - 1$ et une base de F est

$$((1, -1, 0, \dots, 0), (1, 0, -1, 0, \dots, 0), \dots, (1, 0, \dots, 0, -1)).$$

□

IV - Calcul matriciel

Solution de l'exercice 11. On décompose,

$$A = (a - b)I_3 + bJ.$$

De plus, on remarque que $J^2 = 3J$, puis on montre par récurrence que pour tout $k \geq 1$, $J^k = 3^{k-1}J$.

Comme $I_3 J = J I_3 = J$, les matrices $(a - b)I_3$ et J commutent. Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
 A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((a - b)I_3)^{n-k} (bJ)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a - b)^{n-k} b^k J^k \\
 &= \binom{n}{0} (a - b)^n b^0 J^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a - b)^{n-k} b^k 3^{k-1} J \\
 &= (a - b)^n I_3 + \left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a - b)^{n-k} (3b)^k \right) J \\
 &= (a - b)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a - b)^{n-k} (3b)^k - \binom{n}{0} (a - b)^n \right) J \\
 &= (a - b)^n I_3 + \frac{(a - b + 3b)^n - (a - b)^n}{3} J \\
 &= (a - b)^n I_3 + \frac{(a + 2b)^n - (a - b)^n}{3} J.
 \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 12. D'après les notations,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 B^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Alors, pour tout $k \geq 3$,

$$B^k = B^{k-3} \times B^3 = 0_3.$$

De plus, $I_3 B = B I_3 = B$. Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
 A^n &= (B + I_3)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} \\
 &= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + 0_3 \\
 &= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2.
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi les coefficients de A^n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & n\beta + \frac{n(n-1)}{2}\alpha\gamma \\ 0 & 1 & n\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que cette formule reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$. □

V - Matrices & Espaces vectoriels

Solution de l'exercice 13.

1. Comme $AI_n = A$ et $I_n A = A$, alors $I_n \in \mathcal{C}(A)$.

Comme $A0_n = 0_n$ et $0_n A = 0_n$, alors $0_n \in \mathcal{C}(A)$.

Comme $A \times A = A \times A$, alors $A \in \mathcal{C}(A)$.

Plus généralement, tout polynôme en A appartient à $\mathcal{C}(A)$.

2. On montre que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

* Comme $0_n A = A0_n$, alors $0_n \in \mathcal{C}(A)$.

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, M' \in \mathcal{C}(A)$. Montrer que $\lambda M + M' \in \mathcal{C}(A)$, i.e. $A(\lambda M + M') = (\lambda M + M')A$. En effet,

$$\begin{aligned}
 A(\lambda M + M') &= \lambda AM + AM', \text{ par distributivité du produit matriciel} \\
 &= \lambda MA + M'A, \text{ car } M, M' \in \mathcal{C}(A) \\
 &= (\lambda M + M')A.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}(A)$ est un espace vectoriel.

2^e méthode. On pose $\varphi : M \mapsto AM - MA$. D'après la distributivité du produit matriciel, l'application φ est une application linéaire. Comme $\mathcal{C}(A) = \text{Ker } \varphi$, alors $\mathcal{C}(A)$ est un espace vectoriel. \square

Solution de l'exercice 14.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$aI_2 + bA = 0.$$

Alors,

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b & = 0 \\ 4a & = 0 \\ -3a + 2b & = 0 \\ 2a & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $a = b = 0$ et la famille (I_2, A) est libre.

2^e méthode. Comme A et I_2 ne sont pas colinéaires, alors la famille (I_2, A) est libre.

2. D'après la définition du produit matriciel,

$$A^2 = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}.$$

Comme $12 = 3 \times 4$ et $-9 = 3 \times (-3)$, on étudie

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^2 = 3A - 14I_2.$$

3. Comme $A^2 = 3A - 14I_2$, alors $\text{Vect} \{I_2, A, A^2\} = \text{Vect} \{I_2, A\}$.

Ainsi, (I_2, A) est une famille génératrice de F .

D'après la question 1., (I_2, A) est une famille libre.

Ainsi, (I_2, A) est une base de F et $\dim F = 2$. \square

Solution de l'exercice 15.

1. D'après la définition du produit matriciel, $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Soit a, b, c des réels tels que $aI_2 + bA + cA^2 = 0_3$. Alors,

$$\begin{pmatrix} a + 3b + 12c & b + 5c & 2b + 7c \\ -b - c & a & b - 2c \\ 2b + 5c & b + 2c & a + 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b + 12c & = 0 \\ b + 5c & = 0 \\ 2b + 7c & = 0 \\ -b - c & = 0 \\ a & = 0 \\ b - 2c & = 0 \\ 2b + 5c & = 0 \\ b + 2c & = 0 \\ a + 5c & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $a = 0$ puis la dernière ligne fournit $c = 0$ puis $b = 0$. La famille (I_3, A, A^2) est donc libre.

Comme (I_3, A, A^2) est une famille génératrice de F , alors $\dim F = 3$.

2. D'après la définition du produit matriciel,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 45 & 19 & 29 \\ -7 & -3 & -2 \\ 23 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^3 - 3A^2 - 4A + 3I_3 = 0_3.$$

3. En utilisant la relation précédente,

$$A^3 - 3A^2 - 4A + 3I_3 = 0$$

$$A^3 - 3A^2 - 4A = -3I_3$$

$$A \left[-\frac{1}{3}(A^2 - 3A - 4I_3) \right] = I_3.$$

Comme il existe une matrice B telle que $AB = I_3$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}(A^2 - 3A - 4I_3).$$

4. On raisonne par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$, $A^0 = 1I_3 + 0A + 0A^2 \in F$. De manière analogue, la propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

Hérédité. Soit $n \geq 3$. On suppose que $A^{n-1} \in F$. Alors, il existe a, b, c tels que

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= aI_3 + bA + cA^2 \\ A \times A^{n-1} &= A(aI_3 + bA + cA^2) \\ A^n &= aA + bA^2 + cA^3 \\ &= aA + bA^2 + c(3A^2 + 4A - 3I_3) \\ &= (b + 3c)A^2 + (a + 4c)A - 3cI_3 \\ &\in F. \end{aligned}$$

Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n \in F.$$

5. D'après la question précédente,

$$\text{Vect} \{A^k, k \in \mathbb{N}\} = \text{Vect} \{I_3, A, A^2\} = F.$$

Ainsi,

$$\dim \text{Vect} \{A^k, k \in \mathbb{N}\} = \dim F = 3.$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. D'une part, $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la matrice nulle est une matrice symétrique.

D'autre part, soit $A, B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $A^T = A$ et $B^T = B$. Ainsi, comme la transposée est une application linéaire,

$$(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T = \lambda A + B.$$

La matrice $\lambda A + B$ est donc symétrique.

Finalement, $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. L'ensemble des matrices symétriques de taille 3 est

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \{E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,3} + E_{3,2}\}. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,3} + E_{3,2})$.

On vérifie très rapidement que \mathcal{B} est une famille libre. De plus, il s'agit d'une famille génératrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, donc \mathcal{B} est une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\dim \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) = 6$.

3. On vérifie comme pour la question 1. que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On montre ensuite que

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect} \{E_{i,j} + E_{j,i}, E_{\ell,\ell}, 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq \ell \leq n\}$$

Comme cette famille est libre et génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, son nombre d'éléments est égal à la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Or,

$$\begin{aligned} |\{\ell ; 1 \leq \ell \leq n\}| &= n \\ |\{(i, j) ; 1 \leq i < j \leq n\}| &= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 17. La matrice A appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension $3^2 = 9$.
Comme la famille (I_3, A, \dots, A^9) est une famille de 10 vecteurs appartenant à un espace vectoriel de dimension 9, alors cette famille est liée. \square