

I - Suites

I.1 - Suites classiques

Solution de l'exercice 1. Notons r la raison de la suite arithmétique.

Alors, pour tout n entier naturel, $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

On obtient ainsi le système

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u_{80} &= u_1 + 79r \\ u_{15} &= u_1 + 14r \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 393 &= u_1 + 79r \\ 133 &= u_1 + 14r \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 393 &= u_1 + 79r \\ 260 &= (79 - 14)r \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 393 &= u_1 + 79r \\ r &= \frac{260}{65} = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $u_1 = 133 - 14 \times 4 = 77$. □

Solution de l'exercice 2.

1. En utilisant la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{4u_0} = \sqrt{4} = 2, \\ u_2 &= \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8} = 2^{3/2}, \\ u_3 &= \sqrt{4 \times 2^{3/2}} = \sqrt{2^{7/2}} = 2^{7/4}, \\ u_4 &= \sqrt{4 \times 2^{7/4}} = \sqrt{2^{15/4}} = 2^{15/8}, \\ u_5 &= \sqrt{4 \times 2^{15/8}} = \sqrt{2^{31/8}} = 2^{31/16}. \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - \ln(4) = \ln(\sqrt{4u_n}) - \ln(4) \\ &= \frac{1}{2} \ln(4) + \frac{1}{2} \ln(u_n) - \ln(4) \\ &= \frac{1}{2} v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

D'après les résultats sur les suites géométriques,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0.$$

Or, $v_0 = \ln(u_0) - \ln(4) = -\ln(4) = -2\ln(2)$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2\ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

3. En utilisant la relation sur (v_n) ,

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= v_n + \ln(4) \\ u_n &= e^{v_n + \ln(4)} \\ &= e^{v_n} e^{\ln(4)} \\ &= 4 e^{-\ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &= 4 \times 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &= 2^{2 - \frac{1}{2^{n-1}}} \\ &= 2^{\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4 \times 2^{-0} = 4.$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. En résolvant l'équation,

$$\begin{aligned}\ell &= -\frac{\ell}{2} + 12 \\ \frac{3}{2}\ell &= 12 \\ \ell &= 8.\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= -\frac{1}{2}u_n - 8 + 12 \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 4 \\ &= -\frac{1}{2}(u_n - 8) \\ &= -\frac{1}{2}v_n.\end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.3. Comme $v_0 = 0 - 8 = -8$, en utilisant les résultats sur les suites géométriques, pour tout n entier naturel,

$$v_n = -8 \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

4. D'après la définition de v_n ,

$$u_n = -8 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 8.$$

Comme $-\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 8.$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. En résolvant l'équation,

$$\begin{aligned}\ell &= 3\ell + 4 \\ 2\ell &= -4 \\ \ell &= -2.\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= 3u_n + 4 + 2 \\ &= 3u_n + 6 \\ &= 3(u_n + 2) \\ &= 3v_n.\end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 3.3. Comme $v_0 = 2 + 2 = 4$, en utilisant les résultats sur les suites géométriques, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 4 \times 3^n.$$

4. D'après la définition de v_n ,

$$u_n = 4 \times 3^n - 2$$

Comme $3 > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} \\ &= \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} \\ &= \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12} \\ &= \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} \\ &= \frac{v_n}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 5.

2. D'une part, $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+3} = -\frac{1}{3}$.

D'autre part, d'après les résultats sur les suites géométriques, pour tout n entier naturel,

$$v_n = -\frac{1}{3 \times 5^n}.$$

En revenant à la définition de v_n ,

$$\begin{aligned} \frac{u_n - 1}{u_n + 3} &= -\frac{1}{3 \times 5^n} \\ u_n - 1 &= -\frac{u_n}{3 \times 5^n} - \frac{1}{5^n} \\ 3 \times 5^n u_n - 3 \times 5^n &= -u_n - 3 \\ (3 \times 5^n + 1)u_n &= 3(5^n - 1) \\ u_n &= 3 \frac{5^n - 1}{3 \times 5^n + 1}. \end{aligned}$$

3. Comme $\frac{1}{5} \in]-1, 1[$ et $u_n = 3 \frac{1-5^{-n}}{3+5^{-n}}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3.$$

□

I.2 - Sommes des termes

Solution de l'exercice 6.

1. Les termes de la somme sont tous constants et elle est constituée de $n + 1$ termes. Ainsi, $\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

2. Les termes de la somme sont constants et elle est constituée de n termes. Ainsi, $\sum_{k=1}^n 2 = 2n$.

3. D'après les résultats sur la somme des premiers entiers, $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. D'après les résultats sur la somme des premiers carrés d'entiers, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. D'après les résultats sur la somme des premiers cubes d'entiers, $\sum_{k=0}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$. □

Solution de l'exercice 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} H_{n+1} - H_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (H_n) est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone,

- * soit (H_n) est majorée et elle converge alors vers un réel ℓ ,
- * soit (H_n) tend vers $+\infty$.

2. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
 H_{2n} - H_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\geq \frac{1}{2n}} \\
 &\geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 \\
 &\geq \frac{1}{2n} (2n - n) \\
 &\geq \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

3. Supposons par l'absurde que (H_n) converge vers un réel ℓ . Alors, en passant à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\ell - \ell \geq \frac{1}{2},$$

soit $\frac{1}{2} \leq 0$. Ceci est impossible.

Comme (H_n) ne converge pas, d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$. \square

Solution de l'exercice 8.

1. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Comme $p \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^{n+1} = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n p^k = \frac{1}{1 - p}.$$

2. D'une part, $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$. Ainsi, f est dérivable et pour tout x réel,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}.$$

D'autre part, $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Ainsi, f est dérivable et pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

Ainsi, pour $p \in]-1, 1[$,

$$\sum_{k=1}^n kp^{k-1} = \frac{1 - p^{n+1} - (n+1)p^n(1-p)}{(1-p)^2}.$$

Comme $p \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^{n+1} = 0$.

Toujours comme $p \in]-1, 1[$, d'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)p^n = 0$.

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kp^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

\square

Solution de l'exercice 9.

1. Soit $k \geq 2$. Alors,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k \times (k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

2. En sommant les relations précédentes et en reconnaissant une somme télescopique,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} &\leq \sum_{k=2}^n \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right] \\
 &\leq 1 - \frac{1}{n} \\
 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} &\leq 2 - \frac{1}{n} \\
 S_n &\leq 2.
 \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

Ainsi, la suite (S_n) est croissante.

La suite (S_n) est croissante et majorée par 2 donc elle est convergente.

Remarque. On peut montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. \square

Solution de l'exercice 10.

1. Soit $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0.$$

Ainsi, la fonction f est croissante. Comme $f(0) = 0$, alors pour tout $x \geq 0$,

$$\ln(1+x) \leq x.$$

Soit $g : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} \geq 0.$$

Ainsi, la fonction g est croissante. Comme $g(0) = 0$, alors pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x).$$

2. On remarque que $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}} &\leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \\ \frac{1}{1+k} &\leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

2^e méthode. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors, en utilisant la croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} &\leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \\ \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx &\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \\ \frac{1}{k+1} &\leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

3^e méthode. La fonction \ln est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$. En utilisant le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]k, k+1[$ tel que

$$\frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k+1 - k} = \frac{1}{c}.$$

On conclut en utilisant l'encadrement $k < c < k+1$.

3. En sommant les relations précédentes et en reconnaissant une somme télescopique,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} &\leq \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln(k)] \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} &\leq \ln(n+1) - \ln(1) \leq H_n \\ H_{n+1} - 1 &\leq \ln(n+1) \leq H_n. \end{aligned}$$

4. En utilisant l'inégalité de droite de l'encadrement précédent,

$$\ln(n+1) \leq H_n.$$

En utilisant l'inégalité de gauche de l'encadrement précédent à l'ordre $n-1$,

$$H_n - 1 \leq \ln(n).$$

Finalement,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

On remarque que

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$. D'après le théorème d'encadrement on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ soit

$$H_n \sim \ln(n).$$

5. Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= H_n - \ln(n+1) - H_{n-1} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

D'après la première inégalité de la question 1 pour $x = \frac{1}{n}$, alors $c_{n+1} - c_n \geq 0$.

Ainsi, la suite (c_n) est croissante.

6. Soit $n \geq 2$. D'après la question 4.,

$$\begin{aligned} H_{n-1} &\leq 1 + \ln(n-1) \\ H_{n-1} - \ln(n) &\leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n) \\ c_n &\leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n). \end{aligned}$$

7. Comme la fonction logarithme est croissante, $\ln(n-1) - \ln(n) \leq 0$. Ainsi, $c_n \leq 1$.

Finalement, la suite (c_n) est croissante et majorée par 1 donc convergente.

Remarque. Sa limite, notée γ est appelée constante d'Euler. On ne sait pas à ce jour si γ est ou non un nombre rationnel. . . \square

I.3 - Suites définies par récurrence

Solution de l'exercice 11.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

2. On suppose que la suite (u_n) est majorée. Alors, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ . En passant à la limite dans l'égalité,

$$\begin{aligned} \ell &= \ell + e^{-\ell} \\ e^{-\ell} &= 0. \end{aligned}$$

On obtient une contradiction car l'exponentielle est à valeurs strictement positives.

3. Finalement, la suite (u_n) est croissante et non majorée. D'après le théorème de la limite monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

\square

Solution de l'exercice 12.

1. On raisonne par récurrence sur n .

Initialisation. Lorsque $n = 1$, alors $u_1 = \sqrt{1 + u_0}$. Comme $u_0 \geq -1$, alors u_1 est bien défini. De plus, la fonction racine carrée est à valeurs positives donc $u_1 \geq 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n \geq 0$. Alors, $1 + u_n \geq 0$ donc u_{n+1} est bien défini. Comme la fonction racine carrée est à valeurs positives, alors $u_{n+1} \geq 0$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 1 et est héréditaire, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0.$$

2. La fonction g est définie sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $] -1, +\infty[$. De plus, pour tout $x > -1$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1.$$

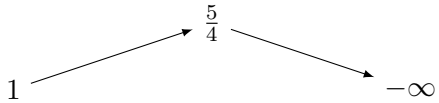
De plus,

$$\begin{aligned}
 g'(x) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}} &\geq 1 \\
 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x} &\leq 1 \\
 \Leftrightarrow 1+x &\leq \frac{1}{4} \\
 \Leftrightarrow x &\leq -\frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

D'une part, $g(-3/4) = \frac{5}{4}$.

D'autre part, pour $x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{x} \left(\frac{1+\frac{1}{x}}{-x} \sqrt{x} \right)$ soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g			

Enfin,

$$\begin{aligned}
 g(x) &= 0 \\
 \sqrt{1+x} &= x \\
 1+x &= x^2 \\
 x^2 - x - 1 &= 0.
 \end{aligned}$$

Les racines de ce trinôme sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comme $g(0) = 1$, le tableau de variation de g assure que le zéro de g est positif. Ainsi,

- * g est positive sur $\left] -1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$,
- * g est négative sur $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right[$.

3. a) Comme f est la composée de $x \mapsto 1+x$ et de la fonction racine carrée qui sont croissantes, alors f est croissante. On raisonne ensuite par récurrence.

Initialisation. $u_0 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ par hypothèse.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comme la fonction f est croissante, alors

$$\begin{aligned}
 f(u_n) &\leq f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
 u_{n+1} &\leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.
 \end{aligned}$$

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 1 et est héréditaire, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, alors $g(u_n) \geq 0$. Ainsi, $f(u_n) \geq u_n$ soit $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

c) Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors (u_n) converge vers un réel ℓ .

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue, alors $f(\ell) = \ell$ soit $g(\ell) = 0$. Or, le seul réel pour lequel $g(x) = 0$ est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. a) En utilisant la croissance de f , on montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

b) Comme la fonction g est négative sur $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$, on montre que la suite (u_n) est décroissante.

c) Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge. On montre comme précédemment que la suite (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. \square

I.4 - Suites définies implicitement

Solution de l'exercice 13.

1. Le résultat est trivial pour $n = 0$. On pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$. La fonction f_n est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ comme somme de fonctions strictement croissantes et $f_n(0) = -1$, $f_n(1) = n \geq 0$. Ainsi, f_n admet un unique zéro compris dans l'intervalle $]0, 1[$.

2. D'une part,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= u_n^5 + (n+1)u_n - 1 \\ &= u_n^5 + nu_n - 1 + u_n \\ &= f_n(u_n) + u_n \\ &= u_n > 0 \\ f_{n+1}(u_n) &> f_{n+1}(u_{n+1}). \end{aligned}$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante, alors $u_{n+1} < u_n$.

3. Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers un réel $\ell > 0$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^5 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^5 + nu_n - 1 = +\infty.$$

Or, cette quantité est toujours nulle. On obtient ainsi une contradiction et $\ell \leq 0$.

Comme $u_n \geq 0$, alors $\ell \geq 0$. Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

2^e méthode. Comme $u_n = \frac{1-u_n^5}{n}$ pour tout entier naturel n non nul, et (u_n) est bornée, alors (u_n) converge vers 0.

4. D'après la définition,

$$nu_n - 1 = u_n^5.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^5 = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$. Ainsi,

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

5. En utilisant l'équation initiale,

$$\begin{aligned} u_n^5 + n \left(\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \right) - 1 &= 0 \\ \varepsilon_n &= -u_n^5 \sim -\frac{1}{n^5}. \end{aligned}$$

6. D'après la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_n}{-\frac{1}{n^5}} = 1.$$

Ainsi, en posant $\delta_n = 1 - \frac{\varepsilon_n}{-\frac{1}{n^5}}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ et

$$\begin{aligned} \varepsilon_n + \frac{1}{n^5} &= \frac{1}{n^5} \delta_n \\ nu_n - 1 &= -\frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^5} \delta_n \\ u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6} \delta_n. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 14.

1. Comme $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	$\nearrow +\infty$

2. La fonction f réalise une bijection de $]0, 1]$ dans $[1, +\infty[$. Comme $n \in [1, +\infty[$, il existe un unique réel $u_n \in]0, 1]$ tel que $f(u_n) = n$.

3. On remarque que

$$\begin{aligned} f(u_{n+1}) &= n+1 = f(u_n) + 1 \\ f(u_{n+1}) &\geq f(u_n) \\ u_{n+1} &\leq u_n \end{aligned}$$

car f est décroissante sur $]0, 1]$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers un réel positif ℓ .

Supposons par l'absurde que $\ell \neq 0$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \ln(u_n) = n,$$

et en passant à la limite dans cette égalité,

$$\ell - \ln(\ell) = +\infty.$$

On obtient ainsi une contradiction.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2^e méthode. En notant g la restriction de f à $]0, 1[$, on obtient que $u_n = g^{-1}(n)$. Comme g est décroissante, alors g^{-1} est décroissante et (u_n) est décroissante.

De plus, $\lim_{g \rightarrow +\infty} g = +\infty$, donc $\lim_{g \rightarrow +\infty} g^{-1} = 0$. D'où, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. Comme $u_n - \ln(u_n) = n$, alors $u_n = e^{u_n} e^{-n} \sim e^{-n}$ car $u_n \rightarrow 0$.

5. En reprenant ces équations, comme $u_n \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} u_n - e^{-n} &= e^{-n}(e^{u_n} - 1) \\ &\sim e^{-n} u_n \\ &\sim e^{-2n} \end{aligned}$$

6. Soit $\delta_n = \frac{u_n - e^{-n}}{e^{-2n}} - 1$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ et

$$\begin{aligned} u_n - e^{-n} &= e^{-2n} + e^{-2n} \delta_n \\ u_n &= e^{-n} + e^{-2n} + e^{-2n} \delta_n. \end{aligned}$$

□

II - Fonctions

II.1 - Calculs de développements limités

Solution de l'exercice 15.

1. Un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré :

$$f_1(x) \sim_{+\infty} \frac{x^5}{2x^3} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{2}.$$

2. On factorise par le terme qui croît le plus vite :

$$f_2(x) = \frac{e^x}{2} \underbrace{(1 + e^{-2x})}_{\rightarrow 1} \sim_{+\infty} \frac{e^x}{2}.$$

3. On factorise numérateur et dénominateur par le terme qui croît le plus vite :

$$f_3(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \sim_{+\infty} 1,$$

car numérateur et dénominateur tendent vers 1.

4. On factorise par x^2 puis on utilise les propriétés du logarithme :

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \ln \left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right) \\ &= \ln(x^2) + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \ln(x^2) \underbrace{\left[1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\ln(x^2)} \right]}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_{+\infty} \ln(x^2) \sim_{+\infty} 2 \ln(x). \end{aligned}$$

5. On factorise numérateur et dénominateur par les termes qui croissent le plus vite :

$$f_5(x) = \frac{x}{x^2} \times \frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{e^{-x}}{x}}{\underbrace{1 + \frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 3}} \sim_{+\infty} \frac{3}{x}.$$

6. Un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré :

$$f_6(x) \sim_{+\infty} \frac{x^5 e^{-x}}{12x} \sim_{+\infty} \frac{x^4 e^{-x}}{12}.$$

7. En factorisant par les termes dominants,

$$f_7(x) = \frac{(x+25)\ln(x)}{e^x(1+e^{-2x})} \\ \sim_{+\infty} \frac{x\ln(x)}{e^x} \sim_{+\infty} x e^{-x} \ln(x).$$

8. En utilisant les propriétés du logarithme,

$$\ln(x+1) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \\ = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ = \ln(x) \left[1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right] \\ \sim_{+\infty} \ln(x).$$

Ainsi,

$$f_8(x) \sim_{+\infty} \frac{\ln(x)e^x}{2x}.$$

9. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}.$$

Ainsi,

$$f_9(x) \sim_{+\infty} \frac{3x \times x}{5x^4} \sim_{+\infty} \frac{3}{5x^3}.$$

10. En factorisant par les termes dominants,

$$f_{10}(x) = \frac{x}{e^x(1+e^{-2x})} \sim_{+\infty} \frac{x}{e^x} \sim_{+\infty} x e^{-x}.$$

11. En factorisant par les termes dominants,

$$f_{11}(x) = \frac{x^2}{e^x(1-e^{-2x})} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{e^x} \sim_{+\infty} x^2 e^{-x}.$$

12. En factorisant par les termes dominants,

$$f_{12}(x) = \frac{e^x(1+e^{-2x})}{x^2 e^x(1-e^{-2x})} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}.$$

13. En factorisant par les termes dominants,

$$f_{13}(x) = \frac{x^4 e^x(1+e^{-2x})}{e^x(1-e^{-2x})} \sim_{+\infty} x^4.$$

14. En factorisant par les termes dominants,

$$f_{14}(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x(1-e^{-2x})} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \sim_{+\infty} \sqrt{x} e^{-x}.$$

15. Comme un polynôme est équivalent en l'infini à son monôme de plus haut degré,

$$f_{15}(x) \sim_{+\infty} \frac{x^3 e^{-2\sqrt{x}}}{x^4} \sim_{+\infty} \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{x}.$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^5 + 3x + 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 12x + 3 = 3$, alors

$$f_1(x) \sim_0 \frac{1}{3}.$$

2. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x + 25 = 25$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + e^{-x} = 2$, alors

$$f_2(x) \sim_0 \frac{25\ln(x)}{2}.$$

3. Comme $\ln(1+x) \sim_0 x$, $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 5 = 5$, alors

$$f_3(x) \sim_0 \frac{x}{5}.$$

4. D'une part, $\lim_{x \rightarrow 0} 3x + 12 = 12$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 5x^4 + 2 = 2$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \ln \frac{1+x}{x} \\ &= \ln(1+x) - \ln(x) \\ &= -\ln(x) \underbrace{\left[1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right]}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_0 -\ln(x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_4(x) \sim_0 -\frac{12\ln(x)}{2} \sim_0 -6\ln(x).$$

5. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + e^{-x} = 2$, alors

$$f_5(x) \sim_0 \frac{x}{2}.$$

6. D'après la formule de Tayloy-Young, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 telles que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\ e^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}e^x - e^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\ &= 2x \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_0 2x.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_6(x) \sim_0 \frac{x^2}{2x} \sim_0 \frac{x}{2}.$$

2^e méthode. On remarque que

$$f_6(x) = \frac{x^2}{e^{-x}(e^{2x}-1)} \sim_0 \frac{x^2}{1 \times 2x} \sim_0 \frac{x}{2}.$$

7. D'une part, $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + e^{-x} = 2$.

D'autre part, d'après la formule de Tayloy-Young, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 telles que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\ e^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}e^x - e^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\ &= 2x \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_0 2x.\end{aligned}$$

Finalement,

$$f_7(x) \sim_0 \frac{2}{x^2 \times 2x} \sim_0 \frac{1}{x^3}.$$

8. D'une part, $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + e^{-x} = 2$.

D'autre part, d'après la formule de Tayloy-Young, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 telles que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\ e^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}e^x - e^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\ &= 2x \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_0 2x.\end{aligned}$$

Finalement,

$$f_8(x) \sim_0 \frac{2x^4}{2x} \sim_0 x^3.$$

9. D'après la formule de Taylor-Young, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 telles que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + x\varepsilon_1(x), \\ e^{-x} &= 1 - x + x\varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= 2x + x(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \\ &= 2x \underbrace{\left(1 + \frac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)}{2}\right)}_{\rightarrow 1} \\ &\sim_0 2x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_9(x) \sim_0 \frac{\sqrt{x}}{2x} \sim_0 \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

□

Solution de l'exercice 17.

1. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + 2x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} - 1 = -1$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{x} - 1} = 0.$$

2. En utilisant les équivalents classiques,

$$\begin{aligned} \ln(1 + 2x) &\sim_0 2x \\ \text{et } \sqrt{1 + x} - 1 &\sim_0 \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{1 + x} - 1} \sim_0 \frac{2x}{\frac{x}{2}} \sim_0 4.$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{1 + x} - 1} = 4.$$

3. En utilisant les équivalents classiques,

$$e^x - 1 \sim_0 x.$$

Ainsi, $\frac{e^x - 1}{x} \sim_0 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

4. En utilisant les équivalents classiques,

$$\begin{aligned} \ln(1 + 2x) &\sim_0 2x \\ \text{et } \sqrt{1 + 2x} - 1 &\sim_0 \frac{2x}{2} \sim_0 x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{1 + 2x} - 1} \sim_0 \frac{2x}{x} \sim_0 2$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{1 + 2x} - 1} = 2.$$

5. En utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

Ainsi,

$$\frac{e^{3x} - 1 - 3x}{x^2} = \frac{9}{2} + \varepsilon(x).$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1 - 3x}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. On remarque que

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$.

Ainsi,

$$f_1(x) \sim_1 \frac{1}{\sqrt{2(x-1)}}.$$

2. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = \ln(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}$, alors

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \\ &\sim_1 \frac{\ln(2)}{\sqrt{2(x-1)}}. \end{aligned}$$

3. D'une part, comme $\lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$, en utilisant les équivalents en 0 classiques,

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \ln(1+x-1) \\ &\sim_1 (x-1). \end{aligned}$$

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{\ln(1+x-1)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \\ &\sim_1 \frac{x-1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}} \\ &\sim_1 \sqrt{\frac{x-1}{2}}. \end{aligned}$$

4. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$, en utilisant les équivalents classiques en 0,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x}-1 &= (1+x-1)^{1/3}-1 \\ &\sim_1 \frac{x-1}{3} \\ \sqrt{x}-1 &= (1+x-1)^{1/2}-1 \\ &\sim_1 \frac{x-1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_4(x) &\sim_1 \frac{\frac{x-1}{3}}{\frac{x-1}{2}} \\ &\sim_1 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$, alors

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \\ &\sim_1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{2(x-1)}}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 19.

1. En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle,

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \exp \left\{ n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \right\}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n} = 0$, donc en utilisant les équivalents classiques en 0,

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) &\sim_{+\infty} \frac{\alpha}{n} \\ n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) &\sim_{+\infty} \alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) = \alpha$. En utilisant la continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left\{ n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \right\} = e^\alpha.$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha.$$

2. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$, en utilisant les développements limités classiques en 0,

$$\begin{aligned} e^{3/x} - 1 &\sim_{+\infty} \frac{3}{x} \\ x(e^{3/x} - 1) &\sim_{+\infty} 3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{3/x} - 1 \right) = 3.$$

□

Solution de l'exercice 20.

1. Dans toute la suite, ε désigne une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre. En utilisant la formule de Taylor-Young,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \\ e^x - 1 &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \\ \frac{e^x - 1}{x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

2. Dans toute la suite, ε désigne une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre. En utilisant la formule de Taylor-Young,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \\ 1 + \ln(1+x) &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \\ (1 + \ln(1+x))^{-1} &= \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Or, $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 + u^2 \varepsilon_1(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (1 + \ln(1+x))^{-1} &= 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \right)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \right) \varepsilon_1(x) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 + x^2 \varepsilon(x) \\ &= 1 - x + \frac{3x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

II.2 - Étude de courbes

Solution de l'exercice 21.

1. a) Posons $f : u \mapsto \ln(1+u)$. La fonction f est deux fois dérivable et

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{1}{1+u}, \\ f''(u) &= -\frac{1}{(1+u)^2}. \end{aligned}$$

Comme $f'' \leq 0$, la fonction f est concave et sa courbe représentative se trouve en dessous de ses tangentes.

Or, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de f a pour équation $y = x$.

On obtient ainsi,

$$\forall u > 1, \ln(1+u) \leq u.$$

b) Posons $f : u \mapsto e^u$. La fonction f est deux fois dérivable et

$$\begin{aligned} f'(u) &= e^u, \\ f''(u) &= e^u. \end{aligned}$$

Comme $f'' \geq 0$, la fonction f est convexe et sa courbe représentative se trouve en-dessus de ses tangentes.

Or, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de f a pour équation $y = x + 1$.

On obtient ainsi,

$$\forall u \in \mathbb{R}, 1 + u \leq e^u.$$

2. On pose $f : u \mapsto \ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}$. La fonction f est deux fois dérivable et

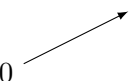
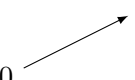
$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{1}{1+u} - 1 + u, \\ f''(u) &= -\frac{1}{(1+u)^2} + 1 = -\frac{u}{(1+u)^2}. \end{aligned}$$

Rappelons que nous travaillons sur \mathbb{R}_+ .

* Comme $f'' \leq 0$, la fonction f' est décroissante.

- * Comme f' est décroissante et $f'(0) = \frac{1}{1+0} - 1 + 0 = 0$, alors f' est positive.
- * Comme f' est positive, alors f est croissante.

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	
$f'(x)$	0 	
$f(x)$	0 	

Comme f est croissante et $f(0) = 0$, alors f est à valeurs positives. Ainsi,

$$\forall u \in [0, +\infty[, u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u).$$

□

Solution de l'exercice 22.

1. Notons f l'application proposée. La fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi, f est croissante sur $]0, e]$, décroissante sur $]e, +\infty[$, tend vers $-\infty$ en 0 et tend vers 0 en $+\infty$.

2. D'après l'étude précédente, f admet un maximum en e de valeur $\frac{1}{e}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\ln \pi}{\pi} &< \frac{\ln e}{e} \\ e \ln \pi &< \pi \ln e \\ \pi^e &< e^\pi, \end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est croissante. □

Solution de l'exercice 23.

1. La fonction $f : x \mapsto e^x$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , donc d'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x).$$

Ainsi, la tangente à la courbe représentative de f en 0 a pour équation

$$t : x \mapsto 1 + x.$$

D'après le développement limité précédent,

$$e^x - t(x) = \frac{x^2}{2}(1 + 2\varepsilon(x)) \sim \frac{x^2}{2}$$

Ainsi, $e^x - t(x) \geq 0$ sur un voisinage de 0 et la courbe représentative de f se situe au-dessus de sa tangente.

Remarque. On aurait pu utiliser ici la convexité de la fonction exponentielle.

2. La fonction $f : x \mapsto e^x$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , donc d'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow 2} \varepsilon(x) = 0$ et

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + e^2 \frac{(x-2)^2}{2} + (x-2)^2 \varepsilon(x).$$

Ainsi, la tangente à la courbe représentative de f en 2 a pour équation

$$t : x \mapsto e^2(x-1).$$

D'après le développement limité précédent,

$$e^x - t(x) = e^2 \frac{(x-2)^2}{2}(1 + \varepsilon_1(x)) \sim_2 e^2 \frac{(x-2)^2}{2}$$

Ainsi, $e^x - t(x) \geq 0$ sur un voisinage de 2 et la courbe représentative de f se situe au-dessus de sa tangente.

Remarque. On aurait pu utiliser ici la convexité de la fonction exponentielle.

3. La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* , donc d'après la formule de Taylor-Young, il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\ln(x) = 0 + 1 \times (x - 1) - \frac{1}{1^2} \frac{(x - 1)^2}{2} + (x - 1)^2 \varepsilon(x).$$

Ainsi, la tangente à la courbe représentative de f en 1 a pour équation

$$t : x \mapsto x - 1.$$

D'après le développement limité précédent,

$$\ln(x) - t(x) = -\frac{(x - 1)^2}{2}(1 + \varepsilon_1(x)) \sim_1 -\frac{(x - 1)^2}{2}$$

Ainsi, $\ln(x) - t(x) \leq 0$ sur un voisinage de 1 et la courbe représentative de f se situe en-dessous de sa tangente.

Remarque. On aurait pu utiliser ici la concavité de la fonction logarithme.

4. Notons $f : x \mapsto x e^x$. En utilisant le développement limité de la fonction exponentielle en 0, il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + x\varepsilon(x), \\ x e^x &= x + x^2 + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de f a pour équation $y = x$.

De plus,

$$x e^x - x = x^2(1 + \varepsilon(x)) \sim_0 x^2.$$

Ainsi, $x e^x - x \geq 0$ sur un voisinage de 0 et la courbe représentative de f se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.

5. Notons $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$. En utilisant le développement limité de la fonction exponentielle en 0, il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \\ \frac{e^x - 1}{x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Ainsi, la tangente en 0 à la courbe représentative de f a pour équation $t : x \mapsto 1 + \frac{x}{2}$.

De plus,

$$f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{6}(1 + \varepsilon_1(x)) \sim_0 \frac{x^2}{6}.$$

Ainsi, $f(x) - t(x) \geq 0$ sur un voisinage de 0 et la courbe représentative de f se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0. \square

Solution de l'exercice 24.

1. Comme la fonction racine carrée est définie sur \mathbb{R}_+ , la fonction f est définie sur $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

2. En rappelant que $\sqrt{x^2} = |x|$, on obtient

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = x + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

* Si $x > 0$, alors $f(x) = x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

* Si $x < 0$, comme $\sqrt{1 + u} - 1 \sim_0 \frac{u}{2}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) \sim_{-\infty} x \times \left(\frac{1}{2x^2}\right) \\ &\sim_{-\infty} \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

3. Soit $x \in] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Comme la fonction racine carrée est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , alors f est dérivable en x et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2 \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{2f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Comme la fonction racine carrée est à valeurs positives, alors f' et f sont de même signe.

4. Si $x \geq 1$, alors $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ et $f(x) \geq 0$. Ainsi, $f' \geq 0$ et f est croissante sur $[1, +\infty[$.

5. Soit $x \in D$. D'après la définition et la formule $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,

$$\begin{aligned} f(x)f(-x) &= \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \times \left(-x + \sqrt{(-x)^2 - 1}\right) \\ &= (x^2 - 1) - x^2 = -1. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x)$ et $f(-x)$ sont de signes opposés.

Soit $x < -1$. Alors, $-x > 1$ et, d'après la question précédente, $f(-x) \geq 0$. Ainsi, $f(x) \leq 0$. Comme f' et f sont de même signe, alors $f'(x) \leq 0$.

La fonction f est donc décroissante sur $] -\infty, -1[$.

6. En reprenant les calculs de la question **2.**, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) - 2x &= x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 2x \\ &= x \left(\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, en utilisant le développement limité de $(1+u)^{1/2}$, il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) - 2x &= x \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right) - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$ et la droite Δ est bien asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$.

Remarquons enfin que $f(x) - 2x \sim_{+\infty} -\frac{1}{2x}$, qui est une quantité strictement négative. Ainsi, au voisinage de $+\infty$, \mathcal{C}_f est au-dessous de Δ .

7. TODO □

II.3 - Équations fonctionnelles

Solution de l'exercice 25.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'équation satisfaite par f ,

$$|f(x) - f(0)| = |x|.$$

Ainsi, soit $f(x) - f(0) = x$, soit $f(x) - f(0) = -x$. En notant $\varepsilon(x)$ ce signe, alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \varepsilon(x)x \\ f(x) &= \varepsilon(x)x + f(0). \end{aligned}$$

2. Soit $x \neq 0$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} (f(x) - f(1))^2 &= (x - 1)^2 \\ (\varepsilon(x)x - \varepsilon(1)1)^2 &= (x - 1)^2 \\ \varepsilon(x)^2 x^2 - 2\varepsilon(x)\varepsilon(1)x + \varepsilon(1)^2 1^2 &= x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Or, $\varepsilon(x), \varepsilon(1) \in \{-1, 1\}$, donc $\varepsilon(x)^2 = \varepsilon(1)^2 = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x^2 - 2\varepsilon(x)\varepsilon(1)x + 1 &= x^2 - 2x + 1 \\ 2\varepsilon(x)\varepsilon(1)x &= 2x \\ \varepsilon(x)\varepsilon(1) &= 1, \text{ , car } x \neq 0. \end{aligned}$$

Si $\varepsilon(x) \neq \varepsilon(1)$, alors l'un vaut 1 et l'autre vaut -1 donc leur produit est différent de 1. On obtient ainsi une contradiction et

$$\forall x \neq 0, \varepsilon(x) = \varepsilon(1).$$

3. Soit f une fonction qui satisfait l'équation. D'après la question précédente, il existe $\varepsilon(1) \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\forall x \neq 0, f(x) = \varepsilon(1)x + f(0).$$

Cette équation est toujours valable lorsque $x = 0$. Ainsi, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$* \text{ soit } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + c,$$

* soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + c$.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions satisfont bien l'équation. Finalement, l'ensemble des fonctions recherchées est

$$\{x \mapsto x + c, x \mapsto -x + c, c \in \mathbb{R}\}.$$

□

Solution de l'exercice 26.

1. Soit f satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. Alors, $f(0)^2 = 2f(0)$, soit $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$.

2. Si $f(0) = 0$. Alors, pour tout réel x , $f(x) \cdot f(0) = f(x) + f(0)$, soit $f(x) = 0$ et f est la fonction nulle.

3. Si $f(0) = 2$. Alors, pour tout réel x , $f(x) \cdot 2 = f(x) + 2$, soit $f(x) = 2$ et f est la fonction constante égale à 2.

4. Réciproquement, la fonction nulle et la fonction constante égale à 2 sont bien solution de l'équation.

Finalement, l'ensemble des fonctions qui satisfont l'équation est :

$$\{x \mapsto 0, x \mapsto 2\}.$$

□

Solution de l'exercice 27.

1. En évaluant en $x = y = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(0 + 0) &= f(0) + f(0) \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par récurrence sur n .

Initialisation. Lorsque $n = 0$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} f(0 \times x) &= f(0) = 0, \\ 0f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(0 \times x) = 0 \times f(x)$ et la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(nx) = nf(x)$. Alors,

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx + x) \\ &= f(nx) + f(x), \text{ d'après l'équation fonctionnelle} \\ &= nf(x) + f(x), \text{ d'après la relation de récurrence} \\ &= (n+1)f(x). \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion. Comme la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x).$$

3. On suppose que f est bornée. Ainsi, il existe un réel M tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} f(nx) &= nf(x) \\ f(x) &= \frac{f(nx)}{n} \\ 0 \leq |f(x)| &= \frac{|f(nx)|}{n} \\ &\leq \frac{M}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = f(x) = 0.$$

La fonction f est donc la fonction nulle.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'équation fonctionnelle en prenant $y = -x$ et en utilisant la question 1.,

$$\begin{aligned} f(x - x) &= f(x) + f(-x) \\ 0 &= f(x) + f(-x) \\ f(-x) &= -f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est impaire.

5. En utilisant la question 2. avec $x = 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1).$$

En utilisant la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(-n) = -f(n) = -nf(1).$$

6. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. En utilisant la question 2. avec $n = q$ et $x = \frac{p}{q}$,

$$f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$f(p) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$pf(1) = qf\left(\frac{p}{q}\right), \text{ d'après la question précédente}$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1).$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$ et (p_n/q_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$. D'après la question précédente,

$$f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{p_n}{q_n}f(1).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$ et f est continue, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = f(x).$$

Ainsi, en passant à la limite dans l'égalité,

$$f(x) = xf(1).$$

Remarque. Il est intéressant dans cet exercice de remarquer la démarche.

On démontre la propriété $f(x) = xf(1)$:

- * pour $x \in \mathbb{N}$ dans la question 5. première partie,
- * pour $x \in \mathbb{Z}$ dans la question 5. seconde partie,

* pour $x \in \mathbb{Q}$ dans la question 6.,

* pour $x \in \mathbb{R}$ avec l'hypothèse de continuité dans la question 7.

On remarque également que la question 7. suppose qu'il existe une suite de rationnels qui converge vers x . Il est aisé de construire cette suite en choisissant :

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}.$$

□