

## T.D. II - Calcul matriciel

### I - Opérations sur des matrices

**Exercice 1.** Effectuer les produits matriciels suivants :

$$1. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad 2. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2,5 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ -0,5 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -2,5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $AB$ .
2. Que dire du produit  $BA$  ?

**Exercice 3.** Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Exercice 4.** (🔧) Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ .

Effectuer les calculs suivants :

$$\begin{array}{l|l} 1. A + 2B. & 3. A + BC. \\ 2. ABC. & 4. (A - I_2)(B - I_2). \end{array}$$

**Exercice 5.** Soit  $A$  et  $B$  des matrices carrées de taille 4. Factoriser par  $A$  les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 1. A^4 + 3A^3 + 3A^2. & 3. A^3 + 3BA + A^2. \\ 2. A^3 + 3AB + A^2. & 4. A^3 + 2A^2 + 5A. \end{array}$$

**Exercice 6.** (🔧) Pour chacune des matrices  $J$  suivantes, calculer  $J^2$ ,  $J^3$  puis  $J^k$  pour tout  $k \geq 3$ .

$$\begin{array}{l|l} 1. J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. & 3. J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ 2. J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. & 4. J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

**Exercice 7.** (🔧) Soit  $A$  une matrice d'ordre 3 et  $I$  la matrice identité d'ordre 3. Développer l'expression  $(A - 2I)(A - I)$ .

**Exercice 8.** (🔧) Soit  $A$  une matrice d'ordre 4 et  $I$  la matrice identité d'ordre 4. Développer l'expression  $(A + I)^3$ .

**Exercice 9.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2$  puis  $A^3$ .

**Exercice 10.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2$  puis  $A^3$ .

**Exercice 11.** (🔧)

1. Soit  $a$  et  $b$  deux réels. Développer l'expression  $(a + b)^2$ .
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a) Calculer  $(A + B)^2$ .
  - b) Calculer  $A^2 + 2AB + B^2$ .
  - c) Que peut-on conclure ?

**Exercice 12.** (🔧) Soit  $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ . Déterminer les valeurs possibles pour  $d_1$  et  $d_2$  afin que  $D^2 + 5D = -4I_2$ .

## II - Calculs de puissances

### II.1 - Récurrences

**Exercice 13.** (✱) Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
2. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Cette relation est-elle encore vraie lorsque  $n = 0$  ?

**Exercice 14.** (✱) Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
2. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel,

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

**Exercice 15.** Soit  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $B^2$  et  $B^3$ .
2. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel,

$$B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{2n+1} \\ 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 16.** Soit  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $B^2$  et  $B^3$ .

2. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  entier naturel,
- $$B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 3^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n+1} \\ 0 & 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 17.** (✱) Soit  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  et  $I$  la matrice identité d'ordre 3.

1. a) Calculer  $A^2 - 2A - 8I$ .

b) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites de réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , on ait  $A^n = a_n A + b_n I$ .

On précisera les premiers termes  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ ; et on exprimera  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .

2. On définit deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par 
$$\begin{cases} u_n &= 4a_n + b_n \\ v_n &= -2a_n + b_n \end{cases}.$$

- a) Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont géométriques.
- b) En déduire une expression de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- c) En déduire une expression de  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ .

3. Exprimer  $A^n$  en fonction de  $n$ .

### II.2 - Formule du binôme

**Exercice 18.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $J = A - 2I_3$ .

1. Expliciter  $J, J^2$  et  $J^3$ . En déduire la valeur de  $J^k$  pour tout entier  $k \geq 3$ .

2. Montrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que pour tout  $n \geq 2$ ,

$$A^n = 2^n \left( I_3 + \frac{n}{2} J + \frac{n(n-1)}{8} J^2 \right).$$

**3.** En déduire, pour  $n \geq 2$ , les neuf coefficients de la matrice  $A^n$ . Vérifier que votre résultat reste vrai pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

**Exercice 19.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = A - 3I_3$ .

**1.** Expliciter  $B$ ,  $B^2$  et  $B^3$ . En déduire  $B^k$  pour tout  $k \geq 3$ .

**2.** A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$A^n = 3^n \left( I + \frac{n}{3}B + \frac{n(n-1)}{18}B^2 \right).$$

**3.** La formule est-elle encore vraie pour  $n = 0$  ?  $n = 1$  ?

**Exercice 20.** ( $\rightarrow$ ) Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que pour tout  $n$  entier

naturel,  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .