

T.D. VIII - Intégration

I - Calculs d'intégrales

Solution de l'exercice 1.

1. La fonction est continue sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* . En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\int^x f_1(t) dt = \int^x t dt + \int^x 5 dt - \int^x \frac{4}{t^2} dt = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + C.$$

2. La fonction est continue sur $] -\infty, -\sqrt[3]{2}[$ et sur $] -\sqrt[3]{2}, +\infty[$. On reconnaît une expression de la forme $u'(x)u(x)^{-3}$, où $u(x) = x^3 + 2$. Ainsi,

$$\int^x f_2(t) dt = \frac{8}{-6} \int^x (-2) \times 3t^2(t^3 + 2)^{-3} dt = -\frac{4}{3}(x^3 + 2)^{-2} + C.$$

3. La fonction est continue sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. On reconnaît une expression de la forme $u'(x)u(x)^{1/2}$, où $u(x) = 1 - 2x^2$. Ainsi,

$$\int^x f_3(t) dt = -\frac{1}{6} \int^x \left(\frac{3}{2}\right) (-4t) \sqrt{1 - 2t^2} dt = -\frac{(1 - 2x^2)^{3/2}}{6} + C.$$

4. La fonction est continue sur \mathbb{R} . On reconnaît une expression de la forme $u'(x)u(x)^3$, où $u(x) = 1 + e^x$. Ainsi,

$$\int^x f_4(t) dt = \frac{1}{4} \int^x 4e^t(1 + e^t)^3 dt = \frac{(1 + e^x)^4}{4} + C.$$

5. La fonction est continue sur \mathbb{R} . On reconnaît une expression de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = e^x + e^{-x} > 0$. Ainsi,

$$\int^x f_5(t) dt = \ln(e^x + e^{-x}) + C.$$

La fonction f_5 est appelée tangente hyperbolique.

6. La fonction est définie et continue sur $] -\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}[$. On reconnaît une expression de la forme $u'(x)u(x)^{-1/2}$ où $u(x) = 5 + x^3$. Ainsi,

$$\int^x f_6(t) dt = \frac{1}{3} \int^x 3t^2(5 + t^3)^{-1/2} dt = \frac{2}{3} \sqrt{5 + x^3} + C.$$

7. La fonction est continue sur $]0, +\infty[$. On reconnaît une expression de la forme $u'(x)u(x)$, où $u(x) = \ln(x)$. Ainsi,

$$\int^x f_7(t) dt = \frac{1}{2} \int^x 2 \frac{1}{t} \ln(t) dt = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C.$$

8. La fonction est continue sur $]0, +\infty[$. On reconnaît une expression de la forme $u'(x)u(x)^{27}$, où $u(x) = \ln(x)$. Ainsi,

$$\int^x f_8(t) dt = \frac{1}{28} \int^x 28 \frac{1}{t} \ln^{27}(t) dt = \frac{(\ln(x))^{28}}{28} + C.$$

□

Solution de l'exercice 2.

1. La fonction est continue sur \mathbb{R} . En effectuant le changement de variables $\varphi : u \mapsto \ln(u)$, alors

$$\begin{aligned} \int^x f_1(t) dt &= \int^x \frac{1}{e^t + 1} dt = \int^{e^x} \frac{1}{e^{\ln(u)} + 1} \times \frac{1}{u} du \\ &= \int^{e^x} \frac{1}{u(u + 1)} du = \int^{e^x} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u + 1} \right] dt \\ &= \ln(e^x) - \ln(1 + e^x) = x - \ln(1 + e^x) + C. \end{aligned}$$

2^e méthode. On remarque que

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{e^t + 1} dt &= \int^x \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt = -\ln(1 + e^{-x}) + C \\ &= -\ln(e^{-x}) - \ln(e^x + 1) + C. \end{aligned}$$

2. La fonction est continue sur $]0, +\infty[$. En effectuant le changement de variable $\varphi : u \mapsto u^2$, alors

$$\begin{aligned}\int^x f_2(t) dt &= \int^{\sqrt{x}} \frac{1 - \sqrt{u^2}}{\sqrt{u^2}} (2u) du = \int^{\sqrt{x}} 2(1 - u) du \\ &= -(1 - \sqrt{x})^2 + C.\end{aligned}$$

2^e méthode. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\int^x f_2(t) dt = \int^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt - \int^x 1 dt = 2\sqrt{x} - x + C.$$

3. La fonction est continue sur $]0, e^{-1/2}[$ et $]e^{-1/2}, +\infty[$. En utilisant le changement de variable $\varphi : u \mapsto e^u$, alors

$$\begin{aligned}\int^x f_3(t) dt &= \int^{\ln(x)} \frac{1}{2e^u \ln(e^u) + e^u} e^u du \\ &= \int^{\ln(x)} \frac{1}{2u + 1} du = \frac{\ln|2\ln(x) + 1|}{2} + C.\end{aligned}$$

4. La fonction est continue sur \mathbb{R} . Pour $x > 0$, en utilisant le changement de variable $\varphi : u \mapsto \sqrt{u - 2}$, alors

$$\begin{aligned}\int^x f_4(t) dt &= \int^{x^2+2} \frac{(u-2)^{3/2}}{\sqrt{u}} \times \frac{1}{2\sqrt{u-2}} du \\ &= \frac{1}{2} \int^{x^2+2} \frac{u-2}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{1}{2} \int^{x^2+2} \left(\sqrt{u} - \frac{2}{\sqrt{u}} \right) du \\ &= \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{3/2} - 2\sqrt{x^2 + 2} + C \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{3} (x^2 - 4) + C\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. La fonction est continue sur \mathbb{R} . Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et

$\begin{cases} v'(x) = e^x \\ v(x) = e^x \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int^x t e^t dt = [t e^t]^x - \int^x 1 \times e^t dt = x e^x - e^x + C.$$

2. La fonction est continue sur \mathbb{R} . Posons $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ et

$\begin{cases} v'(x) = e^x \\ v(x) = e^x \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int^x t^2 e^t dt = [t^2 e^t]^x - \int^x 2t e^t dt.$$

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) = e^x \\ v(x) = e^x \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int^x t^2 e^t dt &= [t^2 e^t]^x - 2 \left([t e^t]^x - \int^x 1 \times e^t dt \right) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.\end{aligned}$$

3. La fonction est continue sur $]0, +\infty[$. Les fonctions $\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ u(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$ et

$\begin{cases} v(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int^x t^2 \ln(t) dt &= \left[\frac{t^3}{3} \ln(t) \right]^x - \int^x \frac{t^3}{3} \times \frac{1}{t} dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} \ln(t) \right]^x - \left[\frac{t^3}{9} \right]^x \\ &= \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. Soient a, b réels tels que

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \\ \frac{x}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a(x+2) + b(x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ x &= (a+b)x + 2a + b.\end{aligned}$$

En particulier,

- * lorsque $x = 0$, alors $0 = 2a + b$;
- * lorsque $x = 1$, alors $1 = 3a + 2b$.

Ainsi,

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

Alors, $a = -1$ et $b = 2$ et

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx &= \int_0^1 \frac{2}{x+2} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \\ &= 2 [\ln|x+2|]_0^1 - [\ln|x+1|]_0^1 \\ &= 2 (\ln(3) - \ln(2)) - (\ln(2) - \ln(1)) \\ &= 2 \ln(3) - 3 \ln(2).\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. Comme p et q sont des entiers positifs, la fonction $x \mapsto x^p(1-x)^q$ est continue sur $[0, 1]$.

Posons $\begin{cases} u(x) &= (1-x)^q \\ u'(x) &= -q(1-x)^{q-1} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) &= x^p \\ v(x) &= \frac{x^{p+1}}{p+1} \end{cases}$. Comme q est non nul, les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. D'après la formule

d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}I_{p,q} &= \int_0^1 x^p(1-x)^q dx \\ &= \left[(1-x)^q \frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 (1-x)^{q-1} x^{p+1} dx \\ &= \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}.\end{aligned}$$

2. En utilisant la relation précédente,

$$\begin{aligned}I_{p,q} &= \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \frac{q-2}{p+3} \times \cdots \times \frac{1}{p+q} I_{p+q,0} \\ &= \frac{q!p!}{(p+q)!} \int_0^1 x^{p+q} dx \\ &= \frac{q!p!}{(p+q+1)!}.\end{aligned}$$

□

II - Inégalités

Solution de l'exercice 6. Comme la fonction $t \mapsto 1+t+t^2$ est une somme de fonctions croissantes sur $[0, 1]$, alors elle est croissante. Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}1 &\leq 1+t+t^2 \leq 3 \\ \frac{1}{3} &\leq \frac{1}{1+t+t^2} \leq 1 \\ \int_0^1 \frac{1}{3} dt &\leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} \leq \int_0^1 1 dt \\ \frac{1}{3} &\leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} \leq 1.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. Comme la fonction \ln est croissante sur $[k, k+1]$, alors

$$\begin{aligned} k &\leq t \leq k+1 \\ \ln(k) &\leq \ln(t) \leq \ln(k+1) \\ \int_k^{k+1} \ln(k) dt &\leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt \leq \int_k^{k+1} \ln(k+1) dt \\ \ln(k) &\leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt \leq \ln(k+1). \end{aligned}$$

Ainsi,

* en utilisant le membre de gauche,

$$\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt.$$

* en utilisant le membre de droite en remplaçant k par $k-1$,

$$\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k).$$

Finalement, on obtient bien

$$\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt.$$

2. En sommant la relation de gauche obtenue à la question précédente et en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left(\int_{k-1}^k \ln(t) dt \right) &\leq \sum_{k=2}^n \ln(k) \\ \int_1^n \ln(t) dt &\leq \ln \left(\prod_{k=2}^n k \right) \\ \int_1^n \ln(t) dt &\leq \ln(n!). \end{aligned}$$

En sommant la relation de droite obtenue à la question précédente et

en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} \ln(t) dt \right) \\ \ln((n-1)!) &\leq \int_1^n \ln(t) dt \\ \ln(n!) &\leq \ln(n) + \int_1^n \ln(t) dt. \end{aligned}$$

3. Comme une primitive de \ln est $t \mapsto t \ln(t) - t$, en utilisant la question précédente,

$$n \ln(n) - n - (1 \ln(1) - 1) \leq \ln(n!) \leq (n \ln(n) - n) - (1 \ln(1) - 1) + \ln(n)$$

$$1 - \frac{n-1}{n \ln(n)} \leq \frac{\ln(n!)}{n \ln(n)} \leq 1 + \frac{\ln(n) - n + 1}{n \ln(n)}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n+1}{n \ln(n)} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n) - n + 1}{n \ln(n)} = 0$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln(n)} = 1.$$

Ainsi, $\frac{\ln(n!)}{n \ln(n)} \sim_{+\infty} 1$ et $\ln(n!) \sim_{+\infty} n \ln(n)$. □

Solution de l'exercice 8.

1. Comme la fonction \ln est croissante et $x^2 \leq t \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} x^2 &\leq t \leq x \\ \frac{1}{\ln(x)} &\leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)} \\ \int_x^{x^2} \frac{dx}{\ln(x^2)} &\leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{dx}{\ln(x)} \\ \frac{x(x-1)}{2 \ln(x)} &\leq f(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

2. Posons $\varphi : t \mapsto t - 1 - \ln(t)$.

La fonction φ est deux fois dérivable sur $]x^2, 1[$ et

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}, \\ \varphi''(t) &= -\frac{1}{t^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, φ' est croissante. Comme $\varphi'(1) = 0$, alors φ' est négative et φ est décroissante. Ainsi, pour $t \in]x^2, 1[$,

$$\begin{aligned}\varphi(1) &\leq \varphi(t) \\ 0 &\leq t-1-\ln(t) \\ \ln(t) &\leq t-1.\end{aligned}$$

Posons $\psi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t-1}$. La fonction ψ est deux fois dérivable et

$$\psi'(t) = \frac{1 - \frac{1}{t} - \ln(t)}{(t-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{t} + \ln \frac{1}{t}}{(t-1)^2} = -\frac{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}{(t-1)^2}.$$

D'après le point précédent, $\ln \frac{1}{t} + 1 - \frac{1}{t} \leq 0$. Ainsi, ψ' est négative et ψ est décroissante. Comme $x^2 \leq t$, on obtient ainsi l'inégalité :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x^2)}{x^2-1} &\geq \frac{\ln(t)}{t-1} \\ \frac{2\ln(x)}{x^2-1}(t-1) &\leq \ln(t), \text{ car } t \leq 1.\end{aligned}$$

Remarque. Rappelons que la fonction \ln est concave. L'inégalité $\ln(t) \leq t-1$ traduit le fait que la courbe représentative de \ln se situe en-dessous de sa tangente en 1. L'inégalité $\frac{\ln(x^2)}{x^2-1}(t-1) \leq \ln(t)$ traduit le fait que la courbe représentative de \ln se situe au-dessous de sa corde prise entre le point d'abscisse x^2 et celui d'abscisse 1.

3. D'après la question précédente, comme $x^2 \leq x$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-1} &\leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2-1}{2\ln(x)} \times \frac{1}{t-1} \\ \int_{x^2}^x \frac{1}{t-1} dt &\leq \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln(t)} \leq \frac{x^2-1}{2\ln(x)} \int_{x^2}^x \frac{1}{t-1} dt \\ [\ln|t-1|]_{x^2}^x &\leq -f(x) \leq \frac{x^2-1}{2\ln(x)} [\ln|t-1|]_{x^2}^x \\ \ln(1-x) - \ln(1-x^2) &\leq -f(x) \leq \frac{x^2-1}{2\ln(x)} [\ln(1-x) - \ln(1-x^2)] \\ -\ln(1+x) &\leq -f(x) \leq -\frac{(x-1)(x+1)}{2\ln(x)} \ln(1+x) \\ \frac{(x-1)(x+1)}{2\ln(x)} \ln(1+x) &\leq f(x) \leq \ln(x+1).\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(2).$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln(2)$.

4. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0, 1[$. Notons F une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$, alors pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned}f(x) &= F(x^2) - F(x) \\ f'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x) \\ &= 2xf(x^2) - f(x) \\ &= 2x \frac{1}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. En utilisant la croissance des fonctions puissances puis du logarithme,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ 0 &\leq x^n \leq 1^n \\ 1 &\leq 1 + x^n \leq 1 + 1 \\ \ln(1) &\leq \ln(1 + x^n) \leq \ln(2) \\ \int_0^1 0 \, dx &\leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx \leq \int_0^1 \ln(2) \, dx, \text{ car } 0 \leq 1 \\ 0 &\leq I_n \leq \ln(2). \end{aligned}$$

2. En reprenant la stratégie précédente,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ 0 &\leq x \times x^{n-1} \leq 1 \times x^{n-1}, \text{ car } x^{n-1} \geq 0 \\ 1 &\leq 1 + x^n \leq 1 + x^{n-1} \\ 0 &\leq \ln(1 + x^n) \leq \ln(1 + x^{n-1}) \\ \int_0^1 0 \, dx &\leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^{n-1}) \, dx, \text{ car } 0 \leq 1 \\ 0 &\leq I_n \leq I_{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante.

3. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, la suite (I_n) converge.

4. Posons $\varphi : x \mapsto x - \ln(1 + x)$. La fonction φ est dérivable et pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Ainsi, $\varphi' \geq 0$ et la fonction φ est croissante sur \mathbb{R}_+ . De plus, $\varphi(0) = 0$. Ainsi,

$$\forall x > 0, \ln(1 + x) \leq x.$$

5. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ln(1 + x^n) \leq x^n \\ 0 &\leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx \\ 0 &\leq I_n \leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

□

Solution de l'exercice 10.

1. a) D'après les définitions,

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}.$$

b) Comme $1 + x^2 \geq 1$, en utilisant la croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n \\ 0 &\leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx \\ 0 &\leq J_n \leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

c) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

2. a) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \\ u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) = x^n \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} \, dx \\ &= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}. \end{aligned}$$

b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$ et, d'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_{n+2}}{n+1} = 0$, d'après le théorème d'addition des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

c) D'après la question 2.a),

$$nI_n = \frac{n}{n+1} \ln(2) - 2 \frac{n}{n+1} J_{n+2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{n+2} = 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \ln(2).$$

□

III - Intégrales généralisées

Solution de l'exercice 11.

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} . On découpe l'intervalle d'étude.

* **Étude en $+\infty$.** D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$. Ainsi, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $0 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

* **Étude en $-\infty$.** Comme $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$, un raisonnement analogue montre que $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

* **Étude sur $[-1, 1]$.** Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[-1, 1]$, alors $\int_{-1}^1 e^{-t^2} dt$ converge.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

2. La fonction $t \mapsto \sqrt{t} e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \times \sqrt{t} e^{-t} = 0$.

Ainsi, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $0 \leq \sqrt{t} e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt$ converge.

3. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^4}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \frac{\ln t}{1+t^4} = 0$. Ainsi, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $0 \leq \frac{\ln t}{1+t^4} \leq \frac{1}{t^2}$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^4} dt$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^4} dt$ converge.

4. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^4}$ est continue sur $]0, 1]$ et à valeurs négatives.

Comme $\frac{\ln t}{1+t^4} \sim \ln(t)$ et $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge, alors $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^4} dt$ converge. □

Solution de l'exercice 12.

1. La fonction $x \mapsto x \ln^2(x)$ est continue sur $]0, 1]$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x) = 0$, la fonction est prolongeable par continuité

en 0. Ainsi, $\int_0^1 x \ln^2(x) dx$ converge.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\begin{cases} u(x) &= \ln^2(x) \\ u'(x) &= \frac{2}{x} \ln(x) \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) &= x \\ v(x) &= \frac{x^2}{2} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon, 1]$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 x \ln^2(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln^2(x) \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{2}{x} \ln(x) \frac{x^2}{2} dx \\ &= -\frac{\varepsilon^2 \ln^2(\varepsilon)}{2} - \int_{\varepsilon}^1 x \ln(x) dx. \end{aligned}$$

On pose $\begin{cases} u(x) &= \ln(x) \\ u'(x) &= \frac{1}{x} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) &= x \\ v(x) &= \frac{x^2}{2} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont

de classe \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon, 1]$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^1 x \ln^2(x) \, dx &= -\frac{\varepsilon^2 \ln^2(\varepsilon)}{2} - \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} \, dx \\ &= -\frac{\varepsilon^2 \ln^2(\varepsilon)}{2} + \frac{\varepsilon^2 \ln(\varepsilon)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 x \, dx \\ &= -\frac{\varepsilon^2 \ln^2(\varepsilon)}{2} + \frac{\varepsilon^2 \ln(\varepsilon)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{4}.\end{aligned}$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln(\varepsilon) = 0$. Ainsi,

$\int_0^1 x \ln^2(x) \, dx$ converge et

$$\int_0^1 x \ln^2(x) \, dx = \frac{1}{4}.$$

2. La fonction $t \mapsto \ln^2(t)$ est continue sur $]0, 1]$.

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \ln^2(t) = 0$. Ainsi, il existe $A \geq 0$ tel que

$$\forall t \leq A, 0 \leq \ln(t)^2 \leq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt$ converge, alors $\int_0^1 \ln^2(t) \, dt$ converge.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\begin{cases} u'(t) &= 1 \\ u(t) &= t \end{cases}$ et $\begin{cases} v(t) &= \ln^2(t) \\ v'(t) &= \frac{2}{t} \ln(t) \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon, 1]$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^1 \ln^2(t) \, dt &= [t \ln^2(t)]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 t \times \frac{2}{t} \ln(t) \, dt \\ &= -\varepsilon \ln^2(\varepsilon) - 2 [t \ln(t) - t]_{\varepsilon}^1 \\ &= -\varepsilon \ln^2(\varepsilon) + 2 - 2(\varepsilon \ln(\varepsilon) - \varepsilon).\end{aligned}$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln^2(\varepsilon) = 0$. Ainsi,

$\int_0^1 \ln^2(t) \, dt$ converge et

$$\int_0^1 \ln^2(t) \, dt = 2.$$

3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

On remarque que

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2) + b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(a+b)x + 2a + b}{(x+1)(x+2)}.$$

Ainsi, pour que $a+b=0$ et $2a+b=1$, il faut choisir $a=1$ et $b=-1$. Soit $M \geq 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{1}{(x+1)(x+2)} \, dx &= \int_0^M \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \, dx \\ &= [\ln(x+1)]_0^M - [\ln(x+2)]_0^M \\ &= \ln(M+1) - 0 - \ln(M+2) + \ln(2) \\ &= \ln(2) + \ln\left(\frac{M+1}{M+2}\right).\end{aligned}$$

Comme $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M+1}{M+2} = 1$, alors $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} \, dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} \, dx = \ln(2).$$

□

IV - Intégrales classiques

Solution de l'exercice 13.

1. Soit $M \geq 0$. D'après la définition,

$$\int_0^M e^{-t} \, dt = [-e^{-t}]_0^M = 1 - e^{-M}.$$

Ainsi, $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

2. a) Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+2} e^{-t} = 0$, il existe un réel a tel que pour tout $t \geq a$,

$$0 \leq t^n e^t \leq \frac{1}{t^2}.$$

b) Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge, alors $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge. De plus, $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, 1]$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \text{ converge.}$$

3. Soit $M \geq 0$. On pose $\begin{cases} u(t) = t^{n+1} \\ u'(t) = (n+1)t^n \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(t) = e^{-t} \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, M]$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^M t^{n+1} e^{-t} dt = [-t^{n+1} e^{-t}]_0^M + \int_0^M (n+1)t^n e^{-t} dt \\ &= -M^{n+1} e^{-M} + (n+1) \int_0^M t^n e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème des croissances comparées $\lim_{M \rightarrow +\infty} M^{n+1} e^{-M} = 0$ et

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (n+1)I_n.$$

4. Comme $I_0 = 1$ et $I_{n+1} = (n+1)I_n$, on montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!.$$

□

Solution de l'exercice 14.

1. a) D'après la définition des puissances, pour $t > 0$, $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln(t)}$.

b) Comme $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} = 1$, alors $t^{x-1} e^{-t} \sim_0 t^{x-1}$.

c) Comme $x > 0$, alors $x-1 > -1$. Ainsi, $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge et $t^{x-1} e^{-t}$ est à valeurs positives. Donc, d'après la question précédente, $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.

d) D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x-1} e^{-t/2} = 0$. Ainsi, il existe un réel a tel que

$$\forall t \geq a, 0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

e) Comme $\int_a^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.

f) La fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. D'après les questions précédentes, $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ et $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ convergent. Donc,

$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ converge.}$$

2. Soit $0 < \varepsilon < M$. On pose $\begin{cases} u(t) = t^x \\ u'(t) = x t^{x-1} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(t) = e^{-t} \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon, M]$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^M t^x e^{-t} dt &= [-t^x e^{-t}]_\varepsilon^M + x \int_\varepsilon^M t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= -M^x e^{-M} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon} + x \int_\varepsilon^M t^{x-1} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^x e^{-\varepsilon} = 0$.

Par croissances comparées, $\lim_{M \rightarrow +\infty} M^x e^{-M} = 0$.

D'après la question 2. les intégrales convergent. Ainsi, en faisant tendre ε vers 0 puis M vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt &= x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

3. On remarque que $\Gamma(0) = 1$. On montre ainsi par récurrence sur n que $\Gamma(n+1) = n!$. \square