# IV - Fonctions

## I - Fonctions particulières

### I.1 - Polynômes

**À Savoir**

Soit $a$, $b$, $c$ des réels tels que $a \neq 0$.

- Si $f : x \mapsto ax + b$, alors $f$ est un **polynôme de degré** 1 et de coefficient dominant égal à $a$. Il s'annule en $-\frac{b}{a}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-b/a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f(x)$ | | $-$ signe de $a$ | 0 | signe de $a$ | |

- Si $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, alors $f$ est un **polynôme de degré** 2 (appelé également **trinôme**) et de coefficient dominant égal à $a$. Le discriminant de $f$ est égal à $\Delta = b^2 - 4ac$.
  - Si $\Delta > 0$, la fonction $f$ possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Alors, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f(x)$ | | signe de $a$ | 0 | $-$ signe de $a$ | 0 | signe de $a$ | |

  - Si $\Delta = 0$, la fonction $f$ possède une unique racine :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

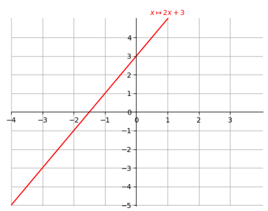
| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f(x)$ | | signe de $a$ | 0 | signe de $a$ | |

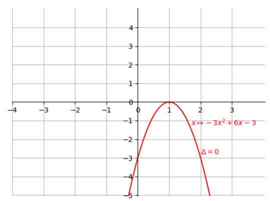
  - Si $\Delta < 0$, la fonction $f$ ne possède pas de racine réelle.

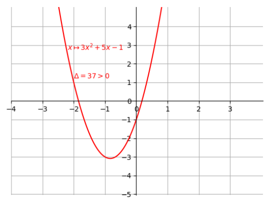
| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| signe de $f(x)$ | | signe de $a$ | |

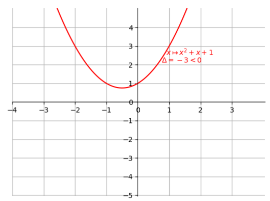
**Représentations graphiques**

Il est important de savoir représenter graphiquement ces fonctions.









**À Savoir**

Si $f$ est un polynôme et si $a$ est une racine de $f$ (c'est-à-dire $f(a) = 0$), alors il existe un polynôme $g(x)$ tel que

$$f(x) = (x - a)g(x).$$

**Exemple 1**

Posons $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$.
On remarque que

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 6 \times (-2)^2 - (-2) + 30 \\ &= -2^3 - 6 \times 2^2 + 2 + 30 \\ &= -8 - 24 + 2 + 30 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x$ réel,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)(ax^2 + bx + c) \\ x^3 - 6x^2 - x + 30 &= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de $x^3$ dans les deux membres :

$$1 = a$$

En identifiant les coefficients constants dans les deux membres :

$$\begin{aligned} 30 &= 2c \\ c &= 15 \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de $x$ dans les deux membres :

$$\begin{aligned} -1 &= c + 2b \\ -1 &= 15 + 2b \\ 2b &= -16 \\ b &= -8 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = (x+2)(x^2 - 8x + 15)$$

Le discriminant de $x^2 - 8x + 15$ est

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 15 = 64 - 60 = 4.$$

Ainsi, les racines de $x^2 - 8x + 15$ sont

$$x_1 = \frac{8-2}{2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{8+2}{2} = 5.$$

Finalement,

$$x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$$

et

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x+2)(x-3)(x-5).$$

## I.2 - Valeur absolue

**À Savoir**

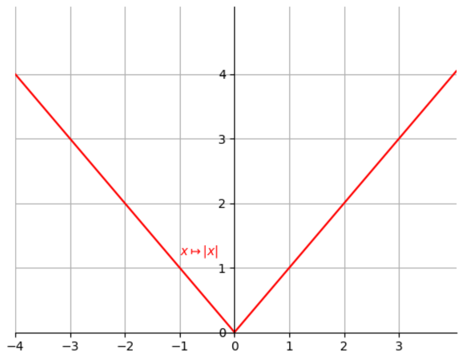
Soit $a$ un réel. La **valeur absolue** de $a$, notée $|a|$, est égale à

$$\begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} |x| = +\infty.$$

**Graphe de la fonction valeur absolue**




**Exemple 2**

D'après la définition,

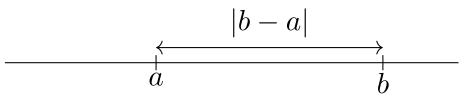
$$|0| = 0$$
$$|2| = 2$$

$$|-3| = 3$$
$$\sqrt{a^2} = |a|$$

**À Savoir**

Soit $a$, $b$ deux réels. La valeur $|a-b|$ est la **distance** entre les réels $a$ et $b$.

**Valeur absolue et Distance à 0**




## I.3 - Logarithme

**À Savoir**

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 :

$$\forall\ x > 0,\ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

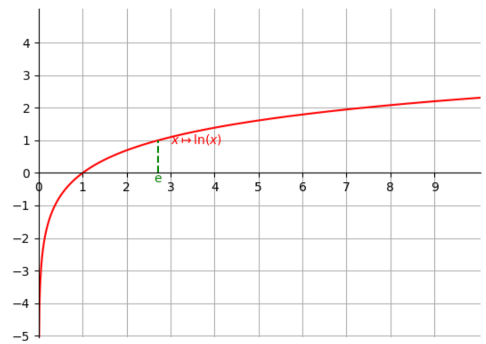
La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Ses valeurs remarquables sont :

$$\ln(1) = 0,$$
$$\ln(\mathrm{e}) = 1.$$

**Graphe de la fonction logarithme**



**À Savoir**

La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall\, x > 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

**Exemple 3**

Soit $f(x) = x\ln(x) - x + 10$. En utilisant les règles de dérivation, la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \ln'(x) - 1 + 0 \\ &= \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln(x). \end{aligned}$$

**À Savoir**

Pour tous $a$, $b > 0$ et $x$ réel,

$$\begin{aligned} \ln(ab) &= \ln(a) + \ln(b), \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b), \\ \ln(a^x) &= x\ln(a). \end{aligned}$$

**Exemple 4**

$$\begin{aligned} \ln(e^4) &= 4\ln(e) = 4, \\ \ln(8) &= \ln(2^3) = 3\ln(2). \end{aligned}$$

## I.4 - Exponentielle

**À Savoir**

La fonction **exponentielle**, notée exp, définie sur $\mathbb{R}$, est la fonction réciproque de la fonction logarithme. On note $e^x = \exp(x)$.

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^x\right) &= x, \\ \forall\, x > 0,\ e^{\ln(x)} &= x. \end{aligned}$$

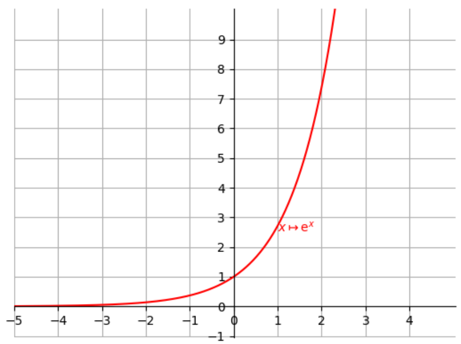
La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.
Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} e^x &= 0, \\ \lim_{x \to +\infty} e^x &= +\infty. \end{aligned}$$

Ses valeurs remarquables sont :

$$\begin{aligned} e^0 &= 1, \\ e^1 &= e\,. \end{aligned}$$

**Graphe de la fonction exponentielle**



**À Savoir**

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x).$$

**Exemple 5**

Soit $f(x) = 4x\,\mathrm{e}^x + x^2$. La fonction $f$ est dérivable pour tout $x$ réel et

$$f'(x) = 4 \times 1 \times \mathrm{e}^x + 4x\,\mathrm{e}^x + 2x = 4(1+x)\,\mathrm{e}^x + 2x.$$

**À Savoir**

Pour tous $a$, $b \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b,$$
$$\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}.$$

**Exemple 6**

$$\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^5,\ \mathrm{e}^{\ln(8)} = 8 \text{ et } \mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$$

## II - Généralités

**À Savoir**

* Si $f$ est **croissante** sur $I$ et $x$, $y \in I$. Alors,
$$\begin{aligned} & x \leqslant y \\ \Rightarrow\ & f(x) \leqslant f(y) \end{aligned}$$
* Si $f$ est **décroissante** sur $I$ et $x$, $y \in I$. Alors,
$$\begin{aligned} & x \leqslant y \\ \Rightarrow\ & f(y) \leqslant f(x) \end{aligned}$$

**Exemple 7**

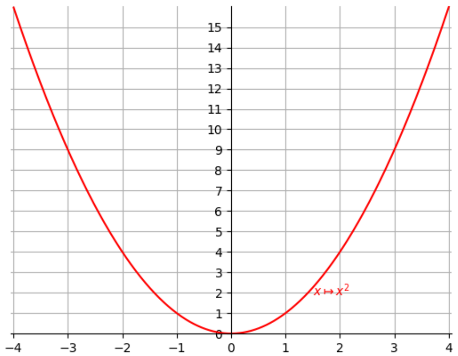
Comme la fonction exponentielle est croissante, et $2 \leqslant 3$, alors $\mathrm{e}^2 \leqslant \mathrm{e}^3$.
Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ et $2 \leqslant 3$, alors $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3}$.

**À Savoir**

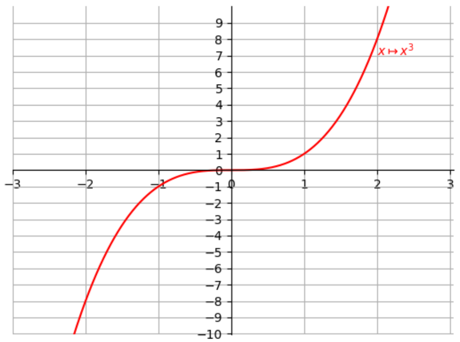
* La fonction $f$ est paire si $\forall\, x \in I$, $f(-x) = f(x)$.
Sa courbe représentative présente alors une symétrie axiale dont l'axe est l'axe des ordonnées.
* La fonction $f$ est impaire si $\forall\, x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.
Sa courbe représentative présente alors une symétrie centrale centrée en l'origine du repère.

**Graphes et Parité**

La fonction carré est paire :




La fonction cube est impaire :




## II.1 - Limites

**À Savoir**

* La **limite à droite** de $f$ en $a$ est la valeur que prend $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$ tout en restant supérieur à $a$. On la note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
* La **limite à gauche** de $f$ en $a$ est la valeur que prend $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$ tout en restant inférieur à $a$. On la note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

**Exemple 8**

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

**À Savoir**

* La limite en $-\infty$ ou en $+\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
* La limite en $-\infty$ ou en $+\infty$ d'un quotient de polynômes est égale à la limite du quotient de leurs termes de plus haut degré.

**Exemple 9**

* Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, alors
$$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 100x^2 - 12 = +\infty.$$
* Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -5x^4 = -\infty$, alors
$$\lim_{x \to +\infty} -5x^4 + 300x^3 - 12 = -\infty.$$
* Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} -5x^3 = +\infty$, alors
$$\lim_{x \to -\infty} -5x^3 - 300x^2 - 12 = +\infty.$$
* Comme $\frac{5x^4}{12x^6} = \frac{5}{12x^3}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{12x^3} = 0$, alors
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4 + 2x^2 - x + 1}{12x^6 + 26x^5} = 0.$$

* Comme $\frac{4x^3}{3x^3} = \frac{4}{3}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 - 12x^2 + x + 1}{3x^3 - 5x^2 + 12} = \frac{4}{3}.$$

**À Savoir**

Si la case indique ? ?, la limite est indéterminée. Il faut transformer l'expression (factorisation, expression conjuguée, croissances comparées,...) pour pouvoir la déterminer.

* **Multiplication** par une constante.

| $\lim f =$ | $\ell$ | $-\infty$ | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim kf =$ | $k\ell$ | $-\infty$ | $+\infty$ | si $k > 0$ |
| | $k\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | si $k < 0$ |
| | $0$ | $0$ | $0$ | si $k = 0$ |

* **Addition** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim(f + g)$.

| $\lim g$ \ $\lim f$ | $\ell_1$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell_2$ | $\ell_1 + \ell_2$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | ? ? |
| $+\infty$ | $+\infty$ | ? ? | $+\infty$ |

* **Multiplication** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim(f \times g)$.

| $\lim g$ \ $\lim f$ | $\ell_1 < 0$ | $\ell_1 > 0$ | $0$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ell_2 < 0$ | $\ell_1\ell_2$ | $\ell_1\ell_2$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell_2 > 0$ | $\ell_1\ell_2$ | $\ell_1\ell_2$ | $0$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | ? ? | ? ? |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? ? | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? ? | $-\infty$ | $+\infty$ |

* **Quotient** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim \frac{f}{g}$.

| $\lim g$ \ $\lim f$ | $\ell_1 < 0$ | $\ell_1 > 0$ | $0^-$ | $0^+$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ell_2 < 0$ | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell_2 > 0$ | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $0^-$ | $0^+$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? ? | ? ? | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | ? ? | ? ? |
| $+\infty$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | ? ? | ? ? |

**À Savoir**

Théorème des **croissances comparées**. Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} (x^\alpha \ln(x)) = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$$

**Exemple 10**

* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
* $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$.
* Soit $f(x) = x\ln(x) - x$. D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. D'après les limites classiques,

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} (x\ln(x) - x) = 0.$$

∗ Soit $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{15x^{100}}$. D'après les propriétés classiques, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. D'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^{100}} = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{15x^{100}} = +\infty.$$

∗ Soit $f(x) = x\ln(x) - x = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right)$. D'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} - 1 = -1$. Finalement,

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) - x = -\infty.$$

**À Savoir**

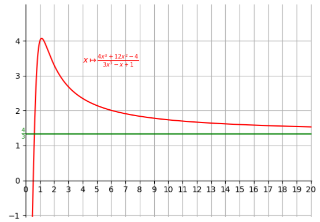
∗ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de $f$.
∗ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une **droite asymptote** à la courbe représentative de $f$.
∗ Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de $f$.

**Exemple 11**

∗ Soit $f(x) = \frac{4x^3+12x^2-4}{3x^3-x+1}$. Comme $\frac{4x^3}{3x^3} = \frac{4}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{4}{3}.$$

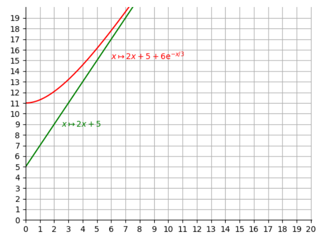
Ainsi, la courbe représentative de $f$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{4}{3}$.



∗ Soit $f(x) = 2x + 5 + 6\,\mathrm{e}^{-x/3}$. Alors,

$$f(x) - (2x+5) = 6\,\mathrm{e}^{-x/3}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x/3} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (2x+5) = 0$. Ainsi, la courbe représentative de $f$ possède une droite asymptote d'équation $y = 2x+5$.



∗ Soit $f(x) = \ln|x-1|$. Comme $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 1} \ln|x-1| = -\infty$. Ainsi, la courbe représentative de $f$ possède une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

## II.2 - Continuité

**À Savoir**

* La fonction $f$ est **continue** au point $a$ si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

* Si $f$, $g$ sont continues en $a$ et $k \in \mathbb{R}$, alors
  * $f + kg$ est continue en $a$,
  * $f \times g$ est continue en $a$,
  * $\frac{f}{g}$ est continue en $a$ si $g(a) \neq 0$,
  * $x \mapsto f(g(x))$ est continue en $a$ si elle est définie.

**Exemple 12**

Soit $k \neq 0$ et $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} k\frac{t}{1+t} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pourra représenter les valeurs prises par $f$ dans un tableau :

| $t$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | $0$ | $\vert$ | $k\frac{t}{1+t}$ | $\vert$ | $0$ |

D'après les propriétés des fonctions usuelles, $f$ est continue sur $]-\infty, 0[$, $[0,1]$ et $]1,+\infty[$. Il suffit donc d'étudier la continuité de $f$ en 0 et en 1.

* Comme $f$ est constante égale à 0 sur $]-\infty, 0[$, alors

$$\lim_{t\to 0^-} f(t) = \lim_{t\to 0^-} 0 = 0.$$

* Comme $f$ est continue sur $[0,1]$, alors

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0) = k\frac{0}{1+0} = 0.$$

Ainsi, $\lim_{t\to 0^-} f(t) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$ et la fonction $f$ est continue en 0.

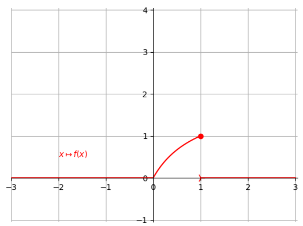
* Comme $f$ est constante égale à 0 sur $]1,+\infty[$, alors

$$\lim_{t\to 1^+} f(t) = \lim_{t\to 1^+} 0 = 0.$$

* Comme $f$ est continue sur $[0,1]$,

$$\lim_{t\to 1^-} f(t) = f(1) = \frac{k}{2}.$$

Comme $k \neq 0$, alors $\lim_{t\to 1^-} f(t) \neq \lim_{t\to 1^+} f(t)$ et la fonction $f$ n'est pas continue en 1.
Lorsque $k = 2$, la représentation graphique de $f$ est la suivante :



**À Savoir**

Théorème des **valeurs intermédiaires**. Si $f$ est continue sur $[a,b]$ et $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$, alors il **existe** $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

**À Savoir**

Théorème de la **bijection monotone**. Si $f$ est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$, alors il **existe un unique** $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

**Exemple 13**

Soit $f$ la fonction definie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x - \ln(x)}.$$

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $]0;+\infty[$.
D'après la définition de $f$,

$$\begin{aligned} f(x) = x \ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{x - \ln(x)} = x \\ &\Leftrightarrow\ 1 = x(x - \ln(x)) \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x} = x - \ln(x) \\ &\Leftrightarrow\ x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

On pose ainsi $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$.

**Continuité.** La fonction $h$ est continue sur $]0,+\infty[$ car somme de fonctions continues sur cet intervalle.

**Stricte monotonie.** La fonction $h$ est dérivable et, en utilisant la dérivée d'une somme de fonctions,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}.$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - x + 1$ vaut $1 - 4 = -3$. Ainsi, le trinôme ne s'annule jamais et est du signe de son coefficient dominant qui vaut 1. Ainsi, $h'$ est à valeurs strictement positives et $h$ est strictement croissante.

**Intervalle image.** Comme $h(x) = x - \frac{1}{x}(x\ln(x) + 1)$. D'après le théorème des croissances comparées et le produit des limités,

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty.$$

Comme $h(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$, d'après le théorème de croissances comparées ainsi que le produit des limites,

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty.$$

Le tableau de variations de $h$ est donc le suivant :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

D'après le théorème de la bijection monotone, il existe un unique réel $\alpha$ tel que $h(\alpha) = 0$.
Ainsi, d'après la question **3.a)**, il existe un unique réel $\alpha$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
Enfin, $f(1) = 1$ donc 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

**À Savoir**

Si $f$ est continue et strictement croissante sur $[a,b]$, alors il existe une unique fonction $h$ telle que

$$\forall\, y \in [f(a), f(b)],\ f(h(y)) = y$$
$$\text{et}$$
$$\forall\, x \in [a,b],\ h(f(x)) = x.$$

La fonction $h$ est la **bijection réciproque** de $f$.

**À Savoir**

Algorithme de **dichotomie**. Soit $f$ telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$. Pour trouver une valeur approchée à $\varepsilon$ près d'un réel $c$ tel que $f(c) = 0$, on procède itérativement comme suit :

- $*$ si $b - a \leqslant \varepsilon$, on renvoie la valeur $a$.
- $*$ sinon on pose $m = \frac{a+b}{2}$.
  - $\star$ Si $f(a)f(m) \leqslant 0$, on recommence en remplaçant $b$ par $m$.

⋆ Sinon on recommence en remplaçant $a$ par $m$.

## II.3 - Dérivabilité

**À Savoir**

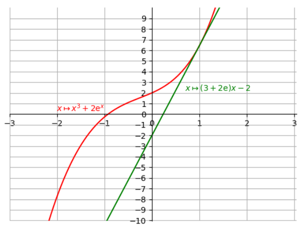
Si $f$ est une fonction dérivable en $a$ et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé, l'équation de la **tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point $a$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

**Exemple 14**

Soit $f(x) = x^3 + 2\,\mathrm{e}^x$. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 2\,\mathrm{e}^x$. Ainsi, l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 1 est :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= (3+2\,\mathrm{e})(x-1) + (1+2\,\mathrm{e}) \\ &= (3+2\,\mathrm{e})x - (3+2\,\mathrm{e}) + (1+2\,\mathrm{e}) \\ &= (3+2\,\mathrm{e})x - 2. \end{aligned}$$




**À Savoir**

Soit $I$ un intervalle de $f$.

- ∗ Si $\forall\, x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors $f$ est croissante sur $I$.
- ∗ Si $\forall\, x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors $f$ est décroissante sur $I$.
- ∗ Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $f$ est strictement croissante sur $I$.
- ∗ Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.

**Exemple 15**

Soit $g$ la fonction definie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$.

D'après les propriétés du logarithme,

$$g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, d'après les propriétés d'addition des limites,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty.$$

En factorisant par $x$, on obtient $g(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$.
D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.
D'autre part, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$.
Ainsi, d'après les propriétés de multiplication des limites,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

La fonction identité et la fonction logarithme népérien sont dérivables sur $]0,+\infty[$. De plus, en utilisant la dérivée d'une somme de fonctions, pour $x \in ]0,+\infty[$, la fonction $g$ est dérivable et

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Comme $x > 0$, le réel $g'(x)$ est du signe de $x - 1$. On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\|\| +\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**À Savoir**

Si $f$ admet un **maximum** ou un **minimum** en $a$, alors $f'(a) = 0$.

## II.4 - Convexité

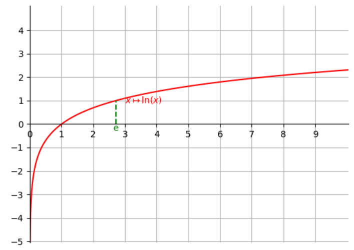
**À Savoir**

La fonction $f$ est **convexe** si sa courbe représentative se situe au-dessous de chacune de ses cordes.
Si $f$ est deux fois dérivable :

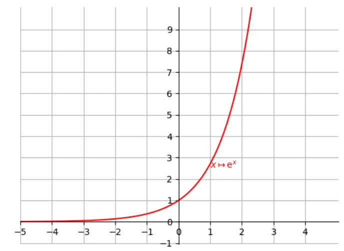
* $f$ est **convexe** si et seulement si $f'' \geqslant 0$.
* $f$ est **concave** si et seulement si $f'' \leqslant 0$.

**Exemple 16**

En posant $f(x) = \mathrm{e}^x$, alors $f'(x) = \mathrm{e}^x$ et $f''(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, $f'' \geqslant 0$ et la fonction exponentielle est convexe. Si on se déplace en vélo le long d'une route qui a une forme convexe, on va toujours pencher à gauche.




En posant $f(x) = \ln(x)$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ainsi, $f'' \leqslant 0$ et la fonction logarithme est concave. Si on se déplace en vélo le long d'une route qui a une forme concave, on va toujours pencher à droite.




**À Savoir**

La courbe représentative de $f$ admet un **point d'inflexion** en $a$ si $f''(a) = 0$ et si $f''$ change de signe en $a$.