

XI - Fonctions de plusieurs variables

- p désigne un entier naturel non nul.
- Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ désigne la norme de x . Si $n = 1$, $\|x\| = |x|$ est la valeur absolue de x . Si $n = 2$, on retrouve la norme usuelle.
- U désigne une partie de \mathbb{R}^n pour laquelle, en tout point x_0 , tous les points suffisamment proches de x_0 appartiennent à U . Formellement,

$$\forall x_0 \in U, \exists \varepsilon > 0 ; \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\| \leq \varepsilon \Rightarrow x_0 + h \in U.$$

Cela permet d'approcher les points de x_0 dans toutes les directions et définir les notions de continuité et de dérivabilité.

- Lorsque $n = 2$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on peut représenter graphiquement f dans un repère à 3 dimensions : les arguments de f sont les abscisses et ordonnées, la valeur $f(x, y)$ est représentée selon la composante de hauteur. On rencontre de telles surfaces par exemple pour représenter le relief d'un massif montagneux.

Définition 1 - Continuité (H.P.)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. La fonction f est *continue* en a si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'image par f de tout point suffisamment proche de a est à distance au plus ε de $f(a)$. Formellement,

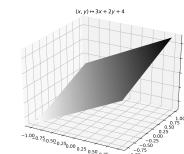
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 ; \forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemple 1 - Continuité des fonctions

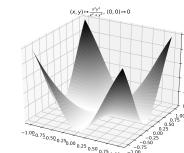
- Lorsque $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la notion de continuité coïncide avec celle vue sur \mathbb{R} .
- Si f est une fonction constante, alors $f(x) = f(a)$ pour tout $(x, a) \in U^2$ donc l'application f est continue.
- La multiplication par un réel, la somme, le produit, le

quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues est une fonction continue. Ainsi, les fonctions classiques sont continues.

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$. La fonction f est continue sur \mathbb{R}^2 .



- Lorsque f est définie par morceaux, on tente de majorer $|f(x) - f(a)|$ par une constante qui tend vers 0 lorsque x tend vers a . Par exemple, soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$ et $f(0, 0) = 0$. Une représentation graphique de cette fonction est la suivante :



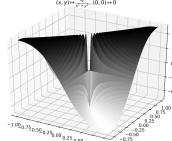
- ★ D'après les propriétés des fonctions continues, comme $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- ★ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{\left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{\|(x, y)\|^2}{4} = \frac{\|(x, y) - (0, 0)\|}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, si (x, y) est suffisamment proche de $(0, 0)$, alors $f(x, y)$ est suffisamment proche de 0. La fonction f est donc continue en $(0, 0)$.

Finalement, la fonction f est continue sur \mathbb{R}^2 .

- À titre d'exemple, la fonction définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, $f(x, x) = \frac{1}{2}$ donc même si (x, x) est très proche de $(0, 0)$ son image sera éloignée de $f(0, 0) = 0$. Sa représentation graphique est la suivante :

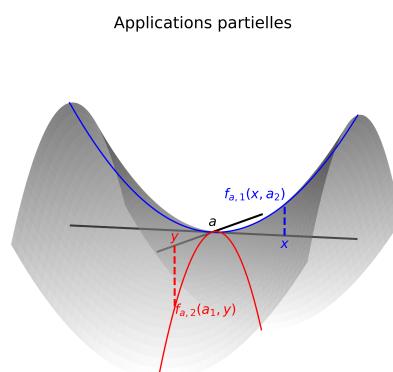


I - Applications partielles

I.1 - Définitions

Définition 2 - Application partielle

Pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ et $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'*application partielle* en a selon la i -ème composante est définie par $f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$. De plus, il existe un intervalle ouvert non trivial $U_{a,i}$ contenant a_i tel que $f_{a,i}$ soit définie sur $U_{a,i}$.



Exemple 2 - Applications partielles

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et elle possède une seule application partielle (elle-même).
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$. Au point $a = (2, 5)$, la fonction f possède deux applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto 3x + 14 \\ f_{a,2} &: y \mapsto 2y + 10 \end{aligned}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. Au point $a = (4, 3)$, la fonction f possède deux applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto f(x, 3) = x^2 + 9 - 6x, \\ f_{a,2} &: y \mapsto f(4, y) = 16 + y^2 - 8y. \end{aligned}$$

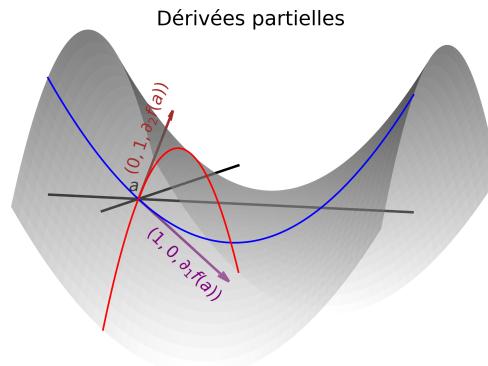
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto e^x + 3ye^z$. Au point $a = (0, 4, 1)$, la fonction f possède trois applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto f(x, 4, 1) = e^x + 12e, \\ f_{a,2} &: y \mapsto f(0, y, 1) = 1 + 3e^y, \\ f_{a,3} &: z \mapsto f(0, 4, z) = 1 + 12e^z. \end{aligned}$$

I.2 - Dérivées partielles

Définition 3 - Dérivées partielles

La fonction f admet une *dérivée partielle* en a par rapport à la i -ème variable si l'application partielle $f_{a,i}$ admet une dérivée en a_i . Cette valeur est notée $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.



Exemple 3 - Calculs de dérivées partielles

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et la notion de dérivée partielle correspond à la notion de dérivée.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$. En tout point (x, y) , la fonction f possède deux dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \partial_1 f : x \mapsto 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \partial_2 f : y \mapsto 2\end{aligned}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. En tout point (x, y) , la fonction f possède deux dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \partial_1 f : (x, y) \mapsto 2x - 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \partial_2 f : (x, y) \mapsto 2y - 2x.\end{aligned}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto e^x + 3y e^z$. En tout point (x, y) , la fonction f possède trois dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \partial_1 f : (x, y, z) \mapsto e^x, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \partial_2 f : (x, y, z) \mapsto 3e^z, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \partial_3 f : (x, y, z) \mapsto 3ye^z.\end{aligned}$$

Définition 4 - Fonctions de classe \mathcal{C}^1 (H.P.)

Soit f une fonction définie sur U . La fonction f est de *classe \mathcal{C}^1* si ses dérivées partielles sont définies et continues sur U .

Théorème 1 - Développement limité d'ordre 1

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U et $a \in U$. Alors, il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow (0, \dots, 0)} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in U$,

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a) + \|h\| \varepsilon(h).$$

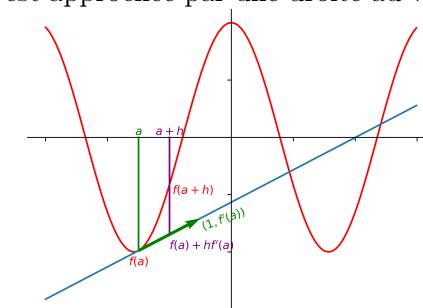
La fonction f admet un *développement limité* d'ordre 1 en a .

Exemple 4 - Développement limité d'ordre 1

- Ce théorème est hors programme mais permettra ensuite de mieux comprendre la recherche d'extremums. Lorsque $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le théorème s'écrit

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + |h| \varepsilon(h).$$

On retrouve la formule de Taylor-Young à l'ordre 1. La fonction f est approchée par une droite au voisinage de a .



- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$. Le développement

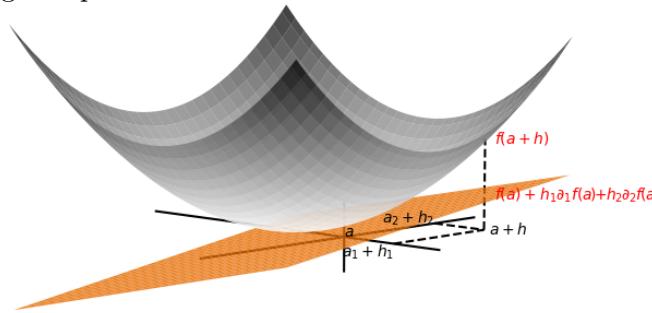
limité d'ordre 1 s'écrit :

$$\begin{aligned} 3(a_1 + h_1) + 2(a_2 + h_2) + 4 &= 3a_1 + 2a_2 + 4 + \cdots \\ &\quad \cdots + 3h_1 + 2h_2 + |\boldsymbol{h}| \varepsilon(\boldsymbol{h}). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on constate que $\varepsilon(\boldsymbol{h}) = 0$.

- Le théorème signifie que si \boldsymbol{h} est petit, alors $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h})$ est environ égal à $f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(\boldsymbol{a})$.

Lorsque $n = 2$, la surface représentant la fonction $g : (h_1, h_2) \mapsto f(\boldsymbol{a}) + h_1 \partial_1 f(\boldsymbol{a}) + h_2 \partial_2 f(\boldsymbol{a})$ est celle d'un plan. La fonction f est approchée par un plan au voisinage du point \boldsymbol{a} .



II - Calcul différentiel d'ordre 2

II.1 - Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 5 - Dérivées partielles d'ordre 2

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U et $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$. La fonction $\partial_i f$ est une fonction définie sur U et à valeurs réelles. On peut donc lui appliquer les définitions de la partie précédente. Si $\partial_i f$ admet une dérivée partielle en a selon la j -ème variable, on note

$$\partial_j (\partial_i f) = \partial_{j,i}^2 f.$$

Lorsque $i = j$, on note $\partial_i^2 f$ cette dérivée.

Si toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont continues, f est de classe \mathcal{C}^2 sur U .

Exemple 5 - Calculs de dérivées partielles d'ordre 2

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La dérivée partielle d'ordre 2 correspond à la dérivée seconde de f .
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$. En tout point (x, y) , la fonction f possède des dérivées partielles d'ordre 2 qui sont toutes nulles.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. En tout point (x, y) , la fonction f possède des dérivées partielles d'ordre 2.

★ Comme $\partial_1 f : (x, y) \mapsto 2x - 2y$, alors

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}^2 f &= \partial_1(\partial_1 f) : (x, y) \mapsto 2 \\ \partial_{2,1}^2 f &= \partial_2(\partial_1 f) : (x, y) \mapsto -2 \end{aligned}$$

★ Comme $\partial_2 f : (x, y) \mapsto 2y - 2x$, alors

$$\begin{aligned} \partial_{1,2}^2 f &= \partial_1(\partial_2 f) : (x, y) \mapsto -2 \\ \partial_{2,2}^2 f &= \partial_2(\partial_2 f) : (x, y) \mapsto 2 \end{aligned}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto e^x + 3y e^z$. En tout point (x, y) , la fonction f possède des dérivées partielles d'ordre 2.

★ Comme $\partial_1 f : (x, y, z) \mapsto e^x$,

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}^2 f &= \partial_1(\partial_1 f) : (x, y, z) \mapsto e^x \\ \partial_{2,1}^2 f &= \partial_2(\partial_1 f) : (x, y, z) \mapsto 0 \\ \partial_{3,1}^2 f &= \partial_3(\partial_1 f) : (x, y, z) \mapsto 0 \end{aligned}$$

★ Comme $\partial_2 f : (x, y, z) \mapsto 3e^z$,

$$\begin{aligned} \partial_{1,2}^2 f &= \partial_1(\partial_2 f) : (x, y, z) \mapsto 0 \\ \partial_{2,2}^2 f &= \partial_2(\partial_2 f) : (x, y, z) \mapsto 0 \\ \partial_{3,2}^2 f &= \partial_3(\partial_2 f) : (x, y, z) \mapsto 3e^z \end{aligned}$$

★ Comme $\partial_3 f : (z, y, z) \mapsto 3y e^z$,

$$\partial_{1,3}^2 f = \partial_1(\partial_3 f) : (x, y, z) \mapsto 0$$

$$\partial_{2,3}^2 f = \partial_2(\partial_3 f) : (x, y, z) \mapsto 3e^z$$

$$\partial_{3,3}^2 f = \partial_3(\partial_3 f) : (x, y, z) \mapsto 3y e^z$$

Théorème 2 - Théorème de Schwarz (H.P.)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur U . Alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $\partial_{i,j}^2 f = \partial_{j,i}^2 f$. On peut donc effectuer les dérivées partielles dans l'ordre que l'on souhaite.

II.2 - Matrice hessienne

Définition 6 - Matrice hessienne

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 et $a \in U$. La *hessienne* de f en a est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$H(f)(a) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(a) & \partial_{1,2}^2 f(a) & \cdots & \partial_{1,n}^2 f(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{n,1}^2 f(a) & \partial_{n,2}^2 f(a) & \cdots & \partial_{n,n}^2 f(a) \end{pmatrix}$$

Exemple 6 - Calculs de hessiennes

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La hessienne est une matrice d'ordre 1 et $H(f)(a) = f''(a)$.
- Si f est de classe \mathcal{C}^2 , le théorème de Schwarz assure que la hessienne est une matrice réelle symétrique.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$ et $a \in \mathbb{R}^2$. D'après les calculs précédents,

$$H(f)(a) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(a) & \partial_{1,2}^2 f(a) \\ \partial_{2,1}^2 f(a) & \partial_{2,2}^2 f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto e^x + 3y e^z$ et $a = (0, 4, 1)$. D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} H(f)(a) &= \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(a) & \partial_{1,2}^2 f(a) & \partial_{1,3}^2 f(a) \\ \partial_{2,1}^2 f(a) & \partial_{2,2}^2 f(a) & \partial_{2,3}^2 f(a) \\ \partial_{3,1}^2 f(a) & \partial_{3,2}^2 f(a) & \partial_{3,3}^2 f(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3e^1 \\ 0 & 3e^1 & 3 \cdot 4 \cdot e^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3e \\ 0 & 3e & 12e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Théorème 3 - Développement limité d'ordre 2

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et $a \in U$. Il existe une fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow (0, \dots, 0)} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in U$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a) + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \partial_{i,j}^2 f(a)}_{q_a(f)(h)} + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

La fonction f admet un *développement limité* d'ordre 2 en a .

Si $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$, on note

$$q_a(f)(h_1, \dots, h_n) = h^T H(f)(a)h.$$

Exemple 7 - Cas particuliers de développements limités

- Si $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 , la formule précédente s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + h^2 \varepsilon(h).$$

On retrouve le théorème de Taylor-Young à l'ordre 2.

- Le développement limité à l'ordre 2 permet d'évaluer la distance entre $f(a+h)$ et $f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a)$ lorsque h est petit.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + h_1(2a_1 - 2a_2) + h_2(2a_2 - 2a_1) + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{h_1^2}{2} \cdot 2 + \frac{h_1 h_2}{2} \cdot (-2) + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{h_2 h_1}{2} \cdot (-2) + \frac{h_2^2}{2} \cdot 2 + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\
&= f(a) + 2(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) + \cdots \\
&\quad \cdots + h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2 + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\
&= f(a) + 2(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) + (h_1 - h_2)^2 + \cdots \\
&\quad \cdots + \|h\|^2 \varepsilon(h).
\end{aligned}$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto e^x + 3y e^z$ et $a = (0, 4, 1)$. D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + h_1 e^0 + h_2 \cdot 3 \cdot e^1 + h_3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot e^1 + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{h_1^2}{2} \cdot 1 + \frac{h_2 h_3}{2} \cdot 3 e + \frac{h_3 h_2}{2} \cdot 3 e + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{h_2^2}{2} 12 e + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\
&= f(a) + h_1 + 3e h_2 + 12e h_3 + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{h_1^2}{2} + 3e h_2 h_3 + 6e h_2^2 + \|h\|^2 \varepsilon(h).
\end{aligned}$$

II.3 - Convexité

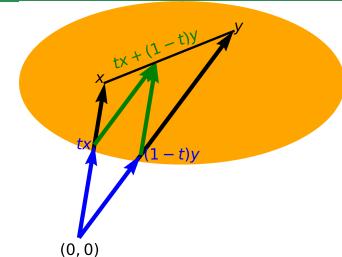
Définition 7 - Ensemble convexe

L'ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est *convexe* si

$$\forall (x, y) \in U^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1-t)y \in U.$$

Exemple 8 - Représentation d'un ensemble convexe

U est convexe si, pour tous points x, y de U , le segment reliant ces points est également inclus dans U .



On peut montrer que les ensembles convexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

Définition 8 - Convexité / Concavité

Soit U un ensemble convexe et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

- La fonction f est *convexe* si

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

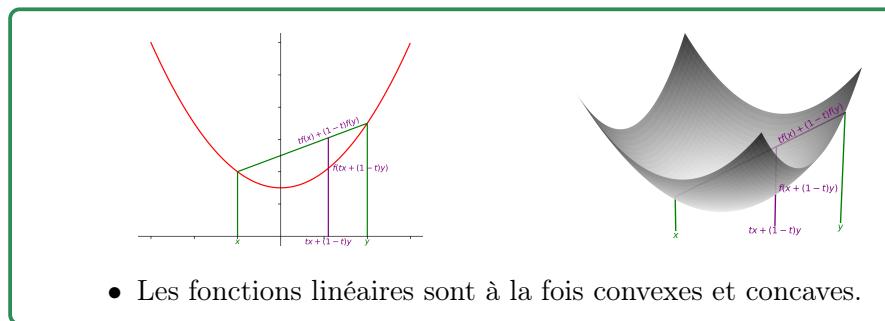
- La fonction f est *concave* si

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

On remarque que f est convexe si et seulement si $-f$ est concave.

Exemple 9 - Exemples de fonction convexe

- La convexité signifie que l'épigraphe de f , i.e. l'ensemble des points qui sont au-dessus du graphe de f est un ensemble convexe.



Théorème 4 - Conditions sur la hessienne

Soit U un ensemble convexe et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 .

- La fonction f est concave si et seulement si

$$\forall a \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n, q_a(f)(h) \leq 0.$$

- La fonction f est convexe si et seulement si

$$\forall a \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n, q_a(f)(h) \geq 0.$$

Exemple 10 - Études de convexité

- Si $n = 1$, alors $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. D'après les calculs précédents, $q_a(f)(h) = f''(a)h^2$. Ainsi,
 - Si $f'' \leq 0$, la fonction f est concave.
 - Si $f'' \geq 0$, la fonction f est convexe.
- Soient f, g deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur U . Si f et g sont convexes (resp. convaves), alors $f + g$ est convexe (resp. concave).
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$. D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} q_a(f)(h) &= 2h_1^2 - 2h_1h_2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 \\ &= 2(h_1 - h_2)^2. \end{aligned}$$

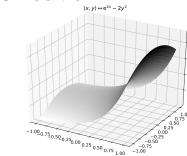
La fonction f est donc convexe.



- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto e^{2x} - 2y^2$ et $a = (x, y, z)$. Alors, $H(f)(a) = \begin{pmatrix} 4e^{2x} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et

$$q_{(x,y,z)}(f)(h) = h_1^2 4e^{2x} - 4h_2^2.$$

Ainsi, $q_a(f)(0, 1) = -4$ et $q_a(f)(1, 0) = 4e^{2x}$. Cette quantité n'est donc pas de signe constant et la fonction f n'est donc ni convexe ni concave.



III - Recherche d'extrema

III.1 - Conditions d'existence

Définition 9 - Extremum local / global

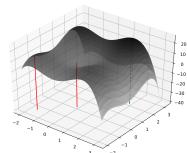
Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U et $a \in U$.

- f présente un *maximum local* en a_* s'il existe $V \subset U$ contenant a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \leq f(a_*)$.
- f présente un *minimum local* en a_* s'il existe $V \subset U$ contenant a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \geq f(a_*)$.
- f présente un *maximum global* en a si pour tout $x \in U$, $f(x) \leq f(a_*)$.
- f présente un *minimum global* en a si pour tout $x \in U$, $f(x) \geq f(a_*)$.

(v). Un *extremum* est un maximum ou un minimum.

Exemple 11 - Représentation graphique d'extremums

Sur le schéma suivant, des extremums locaux sont matérialisés par des traits pleins et un maximum global est matérialisé par un trait pointillé.



Définition 10 - Point critique

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $a \in U$. Le point a est un *point critique* de f si

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \partial_i f(a) = 0.$$

Le vecteur $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix}$ est le *gradient* de f en a .

Théorème 5 - Extremum : condition nécessaire

Soit f une application admettant des dérivées partielles selon chacune de ses variables. Si f présente un extremum local en a , alors

$$a \text{ est un point critique de } f, \text{ i.e. } \nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

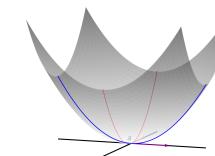
Exemple 12 - Calculs de points critiques

- Si $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable. Si f admet un extremum en a_* , alors $f'(a_*) = 0$. Cependant, la fonction

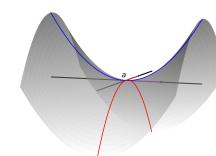
$f : x \mapsto x^3$ montre que $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum en 0 : la réciproque du théorème est fausse.

- La démonstration de ce théorème est très simple : si f admet un extremum local en a_* , alors chacune de ses applications partielles admet un extremum. On est ainsi ramenés au cas où $n = 1$. La réciproque est à nouveau fausse :

Dérivées partielles nulles, extrémum



Dérivées partielles nulles, pas d'extrémum



- Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$.

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

De plus, si $(h, k) \neq (0, 0)$, alors

$$\begin{aligned} & f(-1 + h, 1 + k) - f(-1, 1) \\ &= (-1 + h)^2 + (-1 + h)(1 + k) + (1 + k)^2 + \dots \\ &\quad \dots + (-1 + h) - (1 + k) + 3 - f(-1, 1) \\ &= h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{1}{2}k \right)^2 - \frac{1}{4}k^2 + k^2 \\ &= \left(h + \frac{1}{2}k \right)^2 + \frac{3}{4}k^2 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, f possède un maximum en $(-1, 1)$. Cette dernière méthode de factorisation est fastidieuse. On introduit la hessienne pour gagner en efficacité.

Théorème 6 - Conditions locales sur la hessienne

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et a un point critique de f . D'après le développement limité à l'ordre 2 en a ,

- Si $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q_{a_*}(f)(h) > 0$, alors f admet en a_* un minimum local.
- Si $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q_{a_*}(f)(h) < 0$, alors f admet en a_* un maximum local.
- S'il existe h_1 et h_2 tels que $q_{a_*}(f)(h_1) > 0$ et $q_{a_*}(f)(h_2) < 0$, alors f n'admet pas d'extremum en a_* .

Exemple 13 - Calculs de hessiennes

- Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$ et $a_* = (-1, 1)$. Alors,

$$H(f)(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et pour $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} q_{a_*}(f)(h) &= h_1^2 \cdot 2 + h_1 h_2 \cdot 1 + h_2 h_1 \cdot 1 + h_2^2 \cdot 2 \\ &= 2(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) = 2 \left[\left(h_1 + \frac{1}{2} h_2 \right)^2 + \frac{3}{4} h_2^2 \right] \\ &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi, f possède un minimum local en $(-1, 1)$.

- Soit $f : (x, y, z) \mapsto \frac{x^3}{3} - xy - 4y + \frac{5}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2$. Alors,

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y, z) = 0 \\ \partial_2 f(x, y, z) = 0 \\ \partial_3 f(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ -x - 4 + 5y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 5x^2 - x - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = \frac{16}{25} \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les points critiques de f sont $(1, 1, 0)$ et $(-\frac{4}{5}, \frac{16}{25}, 0)$.

De plus,

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si $a_* = (1, 1, 0)$, alors pour $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} q_{a_*}(f)(h) &= 2h_1^2 - 2h_1 h_2 + 5h_2^2 + 3h_3^2 \\ &= 2(h_1^2 - h_1 h_2) + 5h_2^2 + 3h_3^2 \\ &= 2 \left(h_1 - \frac{1}{2} h_2 \right)^2 + \frac{9}{2} h_2^2 + 3h_3^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi, f admet un minimum local en $(1, 1, 0)$.

- Si $a_* = (-\frac{4}{5}, \frac{16}{25}, 0)$, alors

$$q_{a_*}(f)(h) = -\frac{8}{5}h_1^2 - 2h_1 h_2 + 5h_2^2 + 3h_3^2.$$

Comme $q_{a_*}(f)(1, 0, 0) = -\frac{8}{5}$ et $q_{a_*}(f)(0, 0, 1) = 3$, alors f n'admet pas d'extremum en $a_* = (1, 1, 0)$.

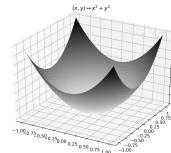
Théorème 7 - Notations de Monge (cas $n = 2$)

Soit $n = 2$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et a_* un point critique de f . On note $H(f)(a_*) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

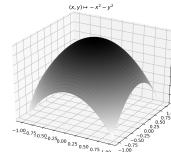
- Si $rt - s^2 > 0$, alors f possède un extremum local en a_* .
 - Si $r > 0$, il s'agit d'un minimum local.
 - Si $r < 0$, il s'agit d'un maximum local.
- Si $rt - s^2 < 0$, alors f ne possède pas d'extremum en a_* . Il s'agit d'un *point col* (ou *point selle*).
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

Exemple 14 - La dimension 2

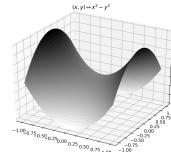
- Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Le seul point critique de f est $(0, 0)$. Alors, $H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $2 \times 2 - 0 > 0$ et $2 > 0$, alors f admet un minimum local en $(0, 0)$.



- Soit $f : (x, y) \mapsto -x^2 - y^2$. Le seul point critique de f est $(0, 0)$. Alors, $H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Comme $-2 \times (-2) - 0 > 0$ et $-2 < 0$, alors f admet un maximum local en $(0, 0)$.



- Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$. Le seul point critique de f est $(0, 0)$. Alors, $H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Comme $2 \times (-2) - 0 < 0$, alors f admet un point col en $(0, 0)$.



- Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$ et $a_\star = (-1, 1)$. On a vu que a_\star est un point critique de f et que

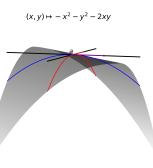
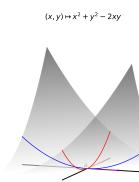
$$H(f)(a_\star) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $2 \times 2 - 1 \times 1 > 0$ et $2 + 2 > 0$, alors f possède un minimum local en $(-1, 1)$.

- Si $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$, alors $(0, 0)$ est un point

critique et $H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ soit $rt - s^2 = 0$. Cependant, $f(x, y) = (x-y)^2 \geqslant 0$ donc f admet un minimum en $(0, 0)$.

Si $f : (x, y) \mapsto -x^2 - y^2 - 2xy$, alors $(0, 0)$ est un point critique et $H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ soit $rt - s^2 = 0$. Cependant, $f(x, y) = -(x+y)^2 \leqslant 0$ donc f admet un maximum en $(0, 0)$. Lorsque $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure de manière générale.

**Théorème 8 - Condition globale**

Soit U un ensemble convexe, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $a_\star \in U$ un point critique de f .

- Si f est convexe sur U , alors f admet en a_\star un minimum global.
- Si f est concave sur U , alors f admet en a_\star un maximum global.

Exemple 15 - Extremums & Convexité

- Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Le seul point critique de f est $(0, 0)$ et c'est un minimum local. De plus, $H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $q_{(x,y)}(f)(h) = 2(h_1^2 + h_2^2) > 0$ pour $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$. Ainsi, f est convexe. Donc $(0, 0)$ est le minimum global de f .
- Soit $f : (x, y) \mapsto -x^2 - y^2$. Le seul point

critique de f est $(0,0)$ et c'est un maximum local. De plus, $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $q_{(x,y)}(f)(h) = -2(h_1^2 + h_2^2) < 0$ pour $(h_1, h_2) \neq (0,0)$. Ainsi, f est concave. Donc $(0,0)$ est le maximum global de f .

- Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$ et $a_\star = (-1,1)$. On a vu que a_\star est un minimum local de f . De plus, $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et pour $(h_1, h_2) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} q_{(x,y)}(f)(h) &= 2h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_2^2 \\ &= 2\left(h_1 + \frac{1}{2}h_2\right)^2 + \frac{3}{2}h_2^2 > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, f est convexe. Donc $(-1,1)$ est le minimum global de f .

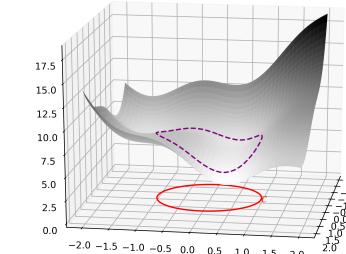
III.2 - Extremums sous contraintes

Définition 11 - Optimisation sous contraintes

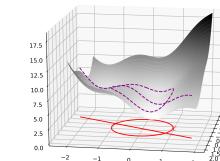
Soit f, g_1, \dots, g_p des fonctions définies sur U et à valeurs réelles. Optimiser f sous les *contraintes* g_1, \dots, g_p consiste à déterminer les extremums de la restriction de f à l'ensemble $\mathcal{C} = \{u \in U ; g_1(u) = \dots = g_p(u) = 0\}$.

Exemple 16 - Exemples de contraintes

- On a représenté ci-dessous la surface d'une fonction f sous une l'unique contrainte $x^2 + y^2 = 1$. L'ensemble \mathcal{C} des points satisfaisant cette contrainte est représenté par un trait plein. La fonction à minimiser est représentée par un trait en pointillés.



- On a représenté ci-dessous la surface d'une fonction f sous les contraintes $x^2 + y^2 = 1$ et $y - 2x + 1/4 = 0$. L'ensemble \mathcal{C} des points satisfaisant cette contrainte est représenté par un trait plein. La fonction à minimiser est représentée par un trait en pointillés.



- Considérons la fonction $f : (x,y) \mapsto x e^y + y e^x$ sous la contrainte $x - y = 1$. Une des variables s'exprime en fonction de l'autre. Il s'agit donc d'optimiser la fonction

$$g(y) = f(y+1, y) = (y+1)e^y + y e^{y+1}.$$

La fonction g est dérivable et

$$g'(y) = e^y(1 + y + 1 + e + e y) = e^y((1 + e)y + 2 + e).$$

La fonction g admet donc un minimum en $y_\star = -\frac{2+e}{1+e}$. La fonction f , sous la contrainte $x - y = 1$, admet donc un minimum en $\left(-\frac{1}{1+e}, -\frac{2+e}{1+e}\right)$.

Définition 12 - Jacobienne

Soit g_1, \dots, g_p des fonctions de classe \mathcal{C}^1 définies sur U et à va-

leurs réelles. La matrice jacobienne des contraintes est la matrice

$$J(g_1, \dots, g_p)(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x) & \cdots & \partial_n g_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_p(x) & \cdots & \partial_n g_p(x) \end{pmatrix}.$$

Exemple 17 - Exemples de jacobien

- Matrice jacobienne lorsque $p = 1$, $g_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$:

$$J(g_1)(x, y) = (\partial_1 g_1(x, y) \quad \partial_2 g_1(x, y)) = (2x \quad 2y).$$

- Si $p = 2$, $g_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ et $g_2 : (x, y) \mapsto y - 2x + \frac{1}{4}$,

$$J(g_1, g_2)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x, y) & \partial_2 g_1(x, y) \\ \partial_1 g_2(x, y) & \partial_2 g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 13 - Lagrangien

Soit f une fonction définie sur U et g_1, \dots, g_p des contraintes. Le *lagrangien* du problème d'optimisation est la fonction :

$$\begin{aligned} L : \quad U \times \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) &\mapsto f(x) - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x). \end{aligned}$$

Théorème 9 - Conditions du premier ordre

Soit f, g_1, \dots, g_p des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur U . Si f admet un extremum local en un point $a_\star \in U$ sous les contraintes $g_1(a_\star) = \dots = g_p(a_\star) = 0$ et $\text{Rg } J(g_1, \dots, g_p)(a_\star) = p$ (contrainte de *qualification*), alors il existe $\lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, p+n \rrbracket, \partial_i L(a_\star, \lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star}) = 0.$$

Les réels $\lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star}$ sont les *multiplicateurs de Lagrange*.

Théorème 10 - Condition suffisante d'extrémalité

Soit f, g_1, \dots, g_p des fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur U . Notons $(a_\star, \lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star})$ un point qui satisfait aux conditions du théorème précédent.

On note H_\star la matrice hessienne du lagrangien par rapport aux seules variables x , évaluée en $(a_\star, \lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star})$:

$$H_\star = (\partial_{i,j}^2 L(a_\star, \lambda_{1,\star}, \dots, \lambda_{p,\star}))_{1 \leqslant i, j \leqslant n}.$$

- Si, pour tout $h \in \text{Ker } J(g_1, \dots, g_p)(a_\star)$ non nul,
 - ★ $h^T H_\star h > 0$, alors f admet un minimum sous contraintes en a_\star .
 - ★ $h^T H_\star h < 0$, alors f admet un maximum sous contraintes en a_\star .
- S'il existe $h_1, h_2 \in \text{Ker } J(g_1, \dots, g_p)(a_\star)$ tels que $h_1^T H_\star h_1 < 0$ et $h_2^T H_\star h_2 > 0$, alors f n'admet ni maximum ni minimum en a_\star .

Exemple 18 - Optimisation sous contrainte

- Lorsque f est de classe \mathcal{C}^2 et les fonctions g_1, \dots, g_p sont linéaires, il suffit que f soit convexe (resp. concave) pour que le point obtenu soit un minimum (resp. maximum).
- Optimisons la fonction $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes $\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ 2x - y - 3z &= 4 \end{cases}$. On introduit le lagrangien

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + 2y + z - 1) + \dots \\ &\quad \dots - \lambda_2(2x - y - 3z - 4). \end{aligned}$$

★ Contrainte de qualification :

$$J(g_1, g_2)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 car $(1, 2)$ et $(2, -1)$ ne sont pas colinéaires.

- ★ Conditions du premier ordre : si (x, y, z) est un extremum local de f sous les contraintes g_1, g_2 , il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \partial_1 L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ \partial_2 L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ \partial_3 L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ \partial_4 L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ \partial_5 L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2y - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2z - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2y - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2z - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -6\lambda_1 + \lambda_2 = -2 \\ -25\lambda_2 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{15} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{11}{15} \\ \lambda_1 = \frac{52}{75} \\ \lambda_2 = \frac{18}{25} \end{cases}$$

★ Étude de la hessienne : Comme les contraintes sont linéaires, H_\star est la hessienne de f qui vaut $2I_3$. Ainsi, $h^T H_\star h = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 > 0$ et f admet sous contrainte un minimum en $(\frac{16}{15}, \frac{1}{3}, -\frac{11}{15})$.

- Optimisons la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2y$ sous la contrainte $g_1(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3 = 0$. On introduit le lagrangien :

$$L : (x, y, \lambda) \mapsto x^2y - \lambda(2x^2 + y^2 - 3).$$

★ Contrainte de qualification :

$$J(g_1)(x, y) = (4x \quad 2y)$$

est de rang 1 (elle est de rang 0 en $(0, 0)$ qui est un point qui ne satisfait pas la contrainte).

★ Condition du premier ordre : si (x, y) est un extremum

local de f sous la contrainte g_1 , il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \partial_1 L(x, y, \lambda) = 2xy - 4\lambda x = 0 \\ \partial_2 L(x, y, \lambda) = x^2 - 2\lambda y = 0 \\ \partial_3 L(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2\lambda y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 2\lambda \\ x^2 = 4\lambda^2 \\ 2x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \\ \lambda = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y \in \{-1, 1\} \\ x \in \{-1, 1\} \\ \lambda = \frac{y}{2} \end{cases}$$

Les 6 candidats pour des extrema sont donc : $(0, -\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3}, 0)$, $(1, 1, 1/2)$, $(1, -1, -1/2)$, $(-1, 1, 1/2)$, $(-1, -1, -1/2)$.

★ Étude de la hessienne. D'après la définition de L ,

$$H_\star = \begin{pmatrix} 2y_\star - 4\lambda_\star & 2x_\star \\ 2x_\star & -2\lambda_\star \end{pmatrix} \text{ et } J_\star = (4x_\star \quad 2y_\star).$$

— Si $(x_\star, y_\star, \lambda_\star) = (0, -\sqrt{3}, 0)$, alors

$$H_\star = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \text{Ker } J_\star = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi, pour tout $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker } J_\star$ non nul,

$$h^T H_\star h = -2\sqrt{3}h_1^2 < 0.$$

f admet donc un maximum sous contrainte en $(0, -\sqrt{3})$.

— On montre de même que f admet un minimum sous contrainte en $(0, \sqrt{3})$.

— Si $(x_*, y_*, \lambda_*) = (-1, -1, -1/2)$, alors

$$H_* = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{Ker } J_* = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi, si $h = h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \text{Ker } J_*$ non nul,

$$h^T H_* h = 12h^2 > 0.$$

Ainsi, f admet donc un maximum sous contrainte en $(-1, -1)$.

— Les autres cas se traitent de manière analogue.

$$(x, y) \mapsto x^2y \text{ sous } 2x^2 + y^2 = 3$$

