T.D. VIII - Intégration

Exercice 1. (Une deuxième équation fonctionnelle) On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

Dans toute la suite, f désigne une fonction de $\mathscr{E}$.

1. a) Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.

b) Démontrer que la fonction f est impaire.

2. On suppose que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer que f est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle

$$xf'(x) - f(x) = kx,$$

où k est une constante réelle dépendant de f que l'on précisera.

b) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle précédente.

c) En déduire, en fonction de la constante k, la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

e) En supposant que $f'(1) = 1$, donner l'allure du graphe de f_1 dans un repère orthonormal direct.

3. On note F la primitive de f qui s'annule en 0.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(xy) = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x).$$

b) En déduire que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$.

I - Primitives & Intégrales

Exercice 2. (⚙) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}$.

2. $\frac{8x^2}{(x^3+2)^3}$.

3. $x\sqrt{1-2x^2}$.

4. $(e^x+1)^3e^x$.

5. $\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

6. $\frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}$.

7. $\frac{\ln(x)}{x}$.

8. $\frac{\ln^{27}(x)}{x}$.

Exercice 3. (Changements de variables, ⚙) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $\frac{1}{e^x+1}$.
$\varphi : u \mapsto \ln(u)$, $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}$.

2. $\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$.
$\varphi : u \mapsto u^2$.

3. $\frac{1}{2t\ln(t)+t}$.
$\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^u$.

4. $\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}$.
$\varphi : u \mapsto \sqrt{u-2}$.

Exercice 4. (Intégrations par parties, ⚙) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $\ln(x)$.

2. $x\,\mathrm{e}^x$.

3. $x^2\,\mathrm{e}^x$.

4. $x^2\ln(x)$.

5. $\sqrt{1+x}\ln(x)$.
$\varphi : u \mapsto \sqrt{u-2}$.

Exercice 5.

1. Montrer qu'il existe a, b réels tels que pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6. (⚙) Montrer que $\frac{1}{3} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} \leqslant 1$.

Exercice 7. (Loi exponentielle, ⚙) Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x}$ sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction f.

2. Déterminer les intégrales suivantes :

Exercice 11. Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que : $\forall\ x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 12. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. a) Calculer J_1.

b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire que (J_n) converge et déterminer sa limite.

2. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall\ n \geqslant 1,\ I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

b) Montrer que la suite (I_n) converge.

c) Montrer que la suite (nI_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 13. (Fonction bêta) Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.

2. Exprimer la valeur de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

III - Calculs d'intégrales généralisées

Exercice 14. (⚙) Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x\ln^2(x)\,\mathrm{d}x$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t$.

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. **b)** $\displaystyle\int_{-1}^{3/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Si $x \geqslant 0$, déterminer $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8. ( )

1. Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t + \ln(n).$$

3. En utilisant une primitive de ln, en déduire la limite de la suite de terme général $\frac{\ln(n!)}{n\ln(n)}$.

Exercice 9. ( ) Pour tout $x \in [0,1]$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. En utilisant la concavité du logarithme, montrer que

$$\forall\, x \in]0,1[,\ \forall\, t \in]x^2,1[,\ \frac{2\ln(x)}{x^2-1}(t-1) \leqslant \ln(t) \leqslant t-1.$$

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.

3. Montrer que f est dérivable sur $[0,1[$ et calculer sa dérivée.

II - Suites d'intégrales

Exercice 10. ( ) Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que (I_n) converge et déterminer sa limite.

2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.

3. En déduire la limite de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$.
$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2}$.

Exercice 15. (Loi uniforme,) Soit $a < b$ et f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16. (Loi exponentielle,) Soit $\lambda > 0$ et f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 17. ( ) Montrer que les intégrales suivantes convergent :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
$\forall\, t \geqslant 1,\ \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
$\forall\, t \geqslant a,\ \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant 1/t^2$.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}-1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t$.

3. En déduire, pour tout n entier naturel, la valeur de $\Gamma(n+1)$.

Exercice 20. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Existence. On pose $f : x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$.

a) Montrer que f admet un prolongement continu en 0.

b) Montrer que f admet un prolongement continu en 1.

c) En déduire que l'intégrale I converge.

2. On pose $J_{\varepsilon,M} = \displaystyle\int_\varepsilon^M \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

a) Effectuer le changement de variable $\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ dans $J_{\varepsilon,M}$.

b) En utilisant la linéarité de l'intégrale, calculer $J_{\varepsilon,M}$.

c) En faisant tendre successivement M vers $+\infty$, puis ε vers 0, en déduire la valeur de I.

V - Calculs d'équivalents

Exercice 21. Piour chacune des fonctions suivantes, calculer un équivalent en $+\infty$ et déterminer si l'intégrale de la fonction sur $[1,+\infty[$ converge.

1. $f_1(x) = \frac{(x^5+3x+1)\,\mathrm{e}^{-x}}{12x+3}$.

2. $f_2(x) = \frac{(x+25)\ln(x)}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

3. $f_3(x) = \frac{\ln(x+1)\,\mathrm{e}^x}{2x+5}$.

4. $f_4(x) = \frac{(3x+12)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{5x^4+2}$.

5. $f_5(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

6. $f_6(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.

7. $f_7(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x^2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}$.

8. $f_8(x) = \frac{x^4\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.

9. $f_9(x) = \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.

10. $f_{10}(x) = \frac{t^3\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{t}}}{1+t^3+t^4}$.

Exercice 22. Piour chacune des fonctions suivantes, calculer un équivalent en 0 et déterminer si l'intégrale de la fonction sur $]0,1]$ converge.

1. $f_1(x) = \frac{(x^5+3x+1)\,\mathrm{e}^{-x}}{12x+3}$.

2. $f_2(x) = \frac{(x+25)\ln(x)}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

IV - Intégrations par parties - Changement de variable

Exercice 18. (Expression intégrale de la factorielle,) Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$\forall\, t \geqslant a,\ 0 \leqslant t^n \,\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

b) En déduire que l'intégrale I_n converge.

3. En utilisant une intégration par parties sur le segment $[0, M]$, puis en faisant tendre M vers $+\infty$, montrer que $I_{n+1} = nI_n$.

4. En déduire, pour tout n entier naturel, la valeur de I_n.

Exercice 19. (Fonction Gamma d'Euler,) Pour tout réel x strictement positif, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$.

1. Soit $x > 0$.

a) Pour tout $t \in]0, 1]$, rappeler la définition de t^{x-1}.

b) Déterminer un équivalent, lorsque $t \to 0$ de $t^{x-1} \,\mathrm{e}^{-t}$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1} \,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ converge.

d) Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$\forall\, t \geqslant a,\ t^{x-1} \,\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t/2}.$$

e) En déduire que $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^{x-1} \,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ converge.

f) En déduire que la fonction Γ est bien définie.

2. En utilisant une intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, M]$ puis en faisant tendre ε vers 0 et M vers $+\infty$, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. $f_3(x) = \frac{\ln(x+1)\,\mathrm{e}^x}{2x+5}$.

4. $f_4(x) = \frac{(3x+12)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{5x^4+2}$.

5. $f_5(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

6. $f_6(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.

7. $f_7(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x^2(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}$.

8. $f_8(x) = \frac{x^4\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.

9. $f_9(x) = \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.

Exercice 23. Piour chacune des fonctions suivantes, calculer un équivalent en 1 et déterminer si l'intégrale de la fonction sur $]1, 2]$ converge.

1. $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. $f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2-1}}$.

3. $f_3(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. $f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

5. $f_5(x) = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x^2-1}}$.