■ ■ ■

**Exercice 1.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+\mathrm{e}^{(1/x)}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**1.** Étudier la continuité de $f$ à droite en 0. Étudier la continuité à gauche de $f$ en 0. Déterminer si la fonction $f$ est continue en 0.

**2.** On considère la fonction $\varphi$ définie par $t \mapsto 1 + \mathrm{e}^t + t\,\mathrm{e}^t$. Déterminer à l'aide du tableau de variations de $\varphi$ le signe de $\varphi(x)$ en fonction de la valeur du nombre réel $x$.

**3.** Étudier la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}^*$. Donner le signe de $f'$.

**4.** Calculer (si elles existent) les dérivées à gauche et à droite en 0. Que peut-on en conclure ?

**5.** Tracer le tableau de variations de $f$.

**6.** Donner l'allure de la courbe représentative de $f$ au voisinage de l'origine, on précisera en particulier les éventuelles demi-tangentes en 0.

**7.** Montrer que la fonction admet une asymptote oblique (d'équation $y = ax + b$) au voisinage de $+\infty$. Déterminer les paramètres $a$ et $b$.

**Exercice 2.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(T_n)$ une suite de variables aléatoires. La suite $(T_n)$ *converge en probabilité* vers $\alpha$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(|T_n - \alpha| > \varepsilon\right) = 0.$$

Soit $(X_i,\, i \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p$. Pour tout $i \geqslant 1$, on pose $Y_i = X_i + X_{i+1}$.

**1.** Donner la loi de $Y_i$, $i \geqslant 1$.

**2.** Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $T_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$. Calculer l'espérance mathématique et la variance de $T_n$.

**3.** Montrer que la suite $(T_n)_{n>0}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante $X = 2p$.

**Exercice 3.** On place dans une enveloppe un exemplaire de chacun des billets en euros. On rappelle que les valeurs faciales de ces billets sont 5, 10, 20, 50, 100, 200 et 500 et on note l'ensemble de ces valeurs $B$. On va tirer deux billets de valeurs respectives $X$ et $Y$ et analyser le jeu suivant :

- si $X > Y$, le joueur gagne $X - Y$ ;
- si $Y > X$, le joueur perd $Y - X$ ;
- si la différence est nulle, il n'y a ni gain ni perte.

On note $G = X - Y$.

**Première partie : tirage avec remise**

On tire un premier billet dont la valeur est notée $X$ que l'on replace dans l'enveloppe, puis on tire un second billet, de valeur $Y$.

**1. a)** $X$ et et $Y$ suivent donc la même loi. Donnez cette loi.

**b)** Calculez le gain espéré $\mathbf{E}[G]$.

**c)** Donnez les probabilités des événements suivants

**i.** nul $N$ : « $X = Y$ »,

**ii.** victoire $V$ : « $X > Y$ »,

**iii.** défaite $D$ : « $X < Y$ ».

**d)** Le jeu vous semble-t-il équilibré ?

**2. a)** On tire $X = 50$. Conditionnellement à ce tirage, calculez

**i.** la probabilté de $N$,

**ii.** la probabilité de $V$,

**iii.** la loi de $G$,

**iv.** l'espérance de $G$

**b)** Soit $x \in B$. Conditionnellement à $X = x$, calculez

**i.** la proabilité de $N$,

**ii.** la loi de $G$,

**iii.** l'espérance de $G$.

**c)** On tire $X$ publiquement et on demande au joueur s'il veut se retirer du jeu sans gain ni perte. Pour quelle(s) valeur(s) de $X$ le joueur a-t-il intérêt à se retirer ?

**Deuxième partie : tirage sans remise**
On tire toujours un premier billet de valeur $X$, mais cette fois-ci sans le remettre dans l'enveloppe. On tire ensuite un second billet, de valeur $Y$ qui est donc différente de $X$ : $\mathbf{P}(N) = 0$.

**3. a)** Quelle est la loi de $Y$ ?

**b)** Quelle est la probabilité de $V$ ?

**c)** Combien vaut le gain espéré ?

**d)** Le jeu vous semble-t-il équilibré ?

**4. a)** On tire $X = 100$.

**i.** Quelle est la loi conditionnelle de $G$ ?

**ii.** Combient vaut alors l'espérance de $G$ ?

**b)** Soit $x \in B$.

**i.** Donnez la loi de $G$ conditionnellement à $X = x$.

**ii.** Combien vaut alors l'espérance de $G$ ?

**c)** On tire $X$ publiquement et on demande au joueur s'il veut se retirer du jeu sans gain ni perte. Pour quelle(s) valeur(s) de $X$ le joueur a-t-il intérêt à se retirer ?

**Exercice 4.** Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $v$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

**1.** Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible, où $I$ est la matrice identité.

**2.** Pour cette valeur de $\lambda$, déterminer alors le noyau de l'application linéaire associée à $(A - \lambda I)$.

**3.** Soit $a = (-3, 1, 2)$. Calculer $v(a)$.

**4.** Déterminer $b = (b_1, b_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $v(b) = a - b$.

**5.** Déterminer $c = (c_1, c_2, 1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $v(c) = b - c$.

**6.** Montrer que $B' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**7.** Déterminer $T$ la matrice de $v$ dans la base $B'$.

**8.** Montrer que $(T + I)^3 = 0$.

**9.** En déduire que $(A + I)^3 = 0$.

**10.** Déterminer $A^{-1}$ en fonction de $A^2$, $A$ et $I$.

**Exercice 5.** Soit $T_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures,

$$T \in T_n(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; T_{i,j} = 0 \;\forall\; 1 \leqslant j < i \leqslant n.$$

**1.** Montrer que $T_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

**2.** Montrer que $T,\, S \in T_n(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; TS \in T_n(\mathbb{R})$.

**3.** Soit $T \in T_n(\mathbb{R})$. Montrer que $T$ est inversible (dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) si et seulement si $\forall\; 1 \leqslant i \leqslant n$, $T_{i,i} \neq 0$.

On se donne désormais une matrice triangulaire supérieure $T \in T_n(\mathbb{R})$ **inversible fixée**, et on veut montrer que $T^{-1}$ est également triangulaire supérieure.

**4.** Montrer que $\begin{array}{rccc} \varphi : & T_n(\mathbb{R}) & \to & T_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & TM \end{array}$ est bien définie et linéaire.

**5.** Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi = \left\{0_{T_n(\mathbb{R})}\right\}$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Im}\varphi$ ?

**6.** En déduire qu'il existe $M \in T_n(\mathbb{R})$ telle que $TM = I$ (où $I$ est la matrice identité de taille $n$) et en conclure que $T^{-1}$ est triangulaire supérieure.