T.D. II - Dénombrement

I - Dés, Mots, Urnes,...

Exercice 1. (⚙) On somme les résultats obtenus en lançant deux fois de suite un dé à 6 faces. De combien de façons peut-on obtenir un total de 6 ? de 7 ? de 8 ?

Exercice 2. (⚙) *Cent mille milliards de poèmes* est un livre écrit par Raymond Queneau et publié en 1961. Ce livre comporte 10 pages. Chacune des pages est découpée en 14 bandes horizontales. Sur chaque bande est écrit un vers. En tournant les bandes séparément, on peut composer un poème constitué de 14 vers formant un sonnet. Combien de sonnets peut-on ainsi lire ?

Exercice 3. (⚙) Combien y-a-t-il de nombres à 4 chiffres ?

Exercice 4. (⚙) Déterminer le nombre de nombres à 5 chiffres où...

1. ... 0 ne figure qu'une seule fois.

2. ... un et un seul chiffre est répété et ceci une unique fois.

Exercice 5. (⚙) Déterminer le nombre d'anagrammes des mots :

1. COMPTER

2. ANANAS

3. DENOMBREMENT

Exercice 6. (⚙) Une urne contient n boules noires ou blanches numérotées dont n_1 sont blanches et n_2 sont noires. On tire p boules dans cette urne. Déterminer le nombre de tirages donnant exactement p_1 boules blanches et p_2 boules noires lorsque...

1. ... les boules sont tirées simultanément.

2. ... les boules sont tirées successivement et sans remise.

3. ... les boules sont tirées successivement et avec remise.

Exercice 7. On dispose de 20 figurines qui ne diffèrent que par leur couleur et que nous souhaitons disposer sur une même rangée. Combien d'alignements différents peut-on obtenir lorsque...

1. ... toutes les figurines sont de la même couleur.

2. ... 2 figurines sont rouges et les autres sont blanches.

3. ... 3 figurines sont jaunes, 5 sont rouges et les autres sont blanches.

Exercice 8. (Poker) Durant une partie de poker, 5 cartes vous sont distribuées. Avec la convention qu'un as peut prendre les valeurs 1 ou As, déterminer le nombre de mains qui contiennent...

1. ... une seule paire.

2. ... 5 cartes consécutives.

3. ... 2 paires (de valeurs distinctes).

4. ... 5 cartes de la même couleur.

Exercice 9. (➹) Tom possède une collection de 20 figurines d'animaux. Ce mercredi soir, avant de partir dîner, il aligne aléatoirement ses figurines et prend une photo.

1. Sachant que, parmi les figurines, il y a exactement 2 oiseaux, quelle est la probabilité que ces deux oiseaux soient placés côte à côte.

2. On suppose maintenant qu'il possède 5 oiseaux. Quelle est la probabilité qu'au moins 2 de ces oiseaux soient placés côte à côte ?

II - Coefficients binomiaux

Exercice 10. (Identité de Vandermonde) La section $D2$ est constituée de n étudiants de 1re année et p étudiants de 2e année. Nous souhaitons constituer une équipe de k étudiants qui seront présents pour la journée portes ouvertes.

1. Combien d'équipes distinctes peut-on constituer ?

2. Soit $j \in [\![0, k]\!]$. Combien d'équipes d'équipes distinctes peut-on constituer en imposant qu'exactement j étudiants soient des étudiants de 1re année ?

3. En déduire que

$$\binom{n+p}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k-j}\binom{p}{j}.$$

Exercice 11. Soit k, n deux entiers naturels non nuls tels que $k \leqslant n$. Combien y-a-t il de k-uplets $(i_1, \ldots, i_k)$ appartenant à $[\![1, n]\!]^k$ lorsque...

1. ...les répétitions sont autorisées.

2. ...les répétitions ne sont pas autorisées.

3. ...on impose $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$.

III - Compter autrement

Exercice 12. Un maçon dispose de n briques indistinguables pour construire un mur vertical sans trous. Ainsi, toute brique se trouve soit sur le sol, jouxtant une autre brique, soit posée sur une autre brique. On note M_n le nombre de murs distincts qui peuvent être construits avec n briques.

1. Dessiner tous les murs possibles et déterminer M_n lorsque $n = 1$, 2, 3.

2. Conjecturer la valeur de M_n, pour tout n entier naturel non nul.

3. Montrer qu'un mur peut être décrit par un suite de $n-1$ instructions où chaque instruction peut-être soit *dessus* soit *sol*.

4. Démontrer la conjecture.

5. On pose $M_0 = 1$. À l'aide d'un argument combinatoire, montrer que pour tout n entier naturel non nul, $M_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k$.

Exercice 13. Soit n, $p \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathscr{C}_{n,p}$ l'ensemble des p-listes $(u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{N}^p$ telles que $\sum_{k=1}^{p} u_k = n$ et $C_{n,p} = |\mathscr{C}_{n,p}|$ son cardinal.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer $C_{p,0}$.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer $C_{p,1}$.

3. Montrer qu'un élément de $\mathscr{C}_{n,p}$ peut être représentée par une suite de symboles contenant n symboles $\circ$ et $p-1$ symboles $|$.

4. En déduire la valeur de $C_{n,p}$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et E un ensemble fini à n éléments. Combien y-a-t-il de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$?

Exercice 15. (Relations binaires) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et E un ensemble fini de cardinal n. Quel est le nombre dans E de

1. ...relations binaires ?

2. ...relations binaires symétriques ?

3. ...relations binaires réflexives et symétriques ?

4. ...relations binaires réflexives et antisymétriques ?