IV - Variables aléatoires discrètes finies

Révisions

- Expérience aléatoire, Univers.
- Probabilité, Équiprobabilité.
- Probabilité conditionnelle.
- Formules : des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.
- Indépendance, Indépendance mutuelle.

Exercice 1. Un dé équilibré à 6 faces est lancé 2 fois. On effectue la somme des nombres obtenus pour chacun des lancers.

- **1.** Décrire l'univers Ω .
- 2. Quelle est la probabilité d'obtenir 2? d'obtenir 7?
- 3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair?
- **4.** Sachant que nous avons obtenu un nombre pair, quelle est la probabilité d'obtenir 2?
- **5.** Les événements obtenir un nombre pair et obtenir un nombre impair sont-ils indépendants?

Dans tout le cours, Ω désigne un univers et \mathbf{P} est une probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

I - Variables aléatoires réelles finies

I.1 - Définition

Définition 1 - Variable aléatoire réelle

On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est un ensemble fini. Une *va*riable aléatoire est une application de Ω dans \mathbb{R} .

Exemple 1 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

Un dé équilibré est lancé successivement 2 fois. On note les résultats obtenus à l'issue de chacun des lancers.

L'univers est $\Omega = \{(i, j), 1 \le i, j \le 6\} = [1, 6]^2$.

La somme S des résultats obtenus à l'issue des 2 lancers est une variable aléatoire :

$$S: \quad \Omega \quad \to \quad \mathbb{R}$$
$$(d_1, d_2) \quad \mapsto \quad d_1 + d_2$$

Définition 2 - Notations

Si $x \leq y$ sont des réels, on notera

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) = x\}$$
$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \leqslant x\}$$
$$[X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \geqslant x\}$$
$$[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega ; x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}$$

Exemple 2 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.

$$[S = 3] = \{(d_1, d_2) \in \Omega ; d_1 + d_2 = 3\}$$

$$= \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

$$[S \leqslant 4] = \{(d_1, d_2) \in \Omega ; d_1 + d_2 \leqslant 4\}$$

$$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}.$$

Définition 3 - Système complet

Soit Ω un univers fini et X une variable aléatoire. Notons x_1, \ldots, x_p les valeurs prises par X. Alors, $\{[X = x_i], i \in [1, p]\}$ est un système complet d'événements. C'est le système complet associé à la variable aléatoire X.

Exemple 3 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent. Le système complet associé à S est :

$$\left\{[S=2],\,[S=3],\,[S=4],\,[S=5],\,[S=6],\,[S=7],\\[S=8],\,[S=9],\,[S=10],\,[S=11],\,[S=12]\right\}.$$

I.2 - Loi de probabilité

Définition 4 - Loi de probabilité

La loi de la variable aléatoire X est la donnée :

- des valeurs x_1, \ldots, x_p prises par X,
- de la famille de probabilités

$$(\mathbf{P}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}([X = x_p])).$$

Exemple 4 - Lois usuelles

• Somme de deux dés équilibrés. Nous obtenons successivement :

- Loi certaine. La variable aléatoire X ne prend qu'une seule valeur c et $\mathbf{P}([X=c])=1$.
- Loi uniforme sur [1, n]. Notée $\mathscr{U}([1, n])$. Résultat renvoyé par un tirage dans une urne contenant

des boules numérotées de 1 à n. Les valeurs prises par X sont $1, \ldots, n$ et

$$\forall i \in [1, n], \mathbf{P}([X = i]) = \frac{1}{n}.$$

• Loi de Bernoulli de paramètre p. Notée $\mathcal{B}(p)$.

Nombre de Piles obtenus lors du lancer d'une pièce qui tombe sur Pile avec probabilité p et sur Face avec probabilité 1-p.

Soit $p \in [0, 1]$. Les valeurs prises par X sont 0 et 1 et

$$\mathbf{P}([X=0]) = 1 - p \text{ et } \mathbf{P}([X=1]) = p.$$

Loi binomiale de paramètres n et p. Notée \$\mathscr{B}(n,p)\$.
 Nombre de Piles obtenus lors de n lancers d'une pièce qui tombe sur Pile avec probabilité p et sur Face avec probabilité 1 - p.

Soit $p \in [0, 1]$. Les valeurs prises par X sont $0, \ldots, n$ et

$$\forall k \in [0, n], \mathbf{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}.$$

Exercice 2. Dans chacun des cas précédents, montrer que si x_1, \ldots, x_p sont les valeurs prises par X, alors $\sum_{i=1}^p \mathbf{P}([X=x_i]) = 1$.

Définition 5 - Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur \mathbb{R} par $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$.

Exemple 5 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.

• Si x < 2. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

• Si $2 \leqslant x < 3$. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}([S = 2]) = \frac{1}{36}.$$

• Si $3 \leqslant x < 4$. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \le x]) = \mathbf{P}([S = 2] \sqcup [S = 3]) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36}.$$

- •
- Si $x \ge 12$. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

On peut tracer le graphe de la fonction F_S .

Exercice 3. Tracer les fonctions de répartition...

- 1. ... d'une loi certaine de valeur $\frac{3}{2}$.
- **2.** ... d'une loi uniforme sur [1, 4]
- 3. . . . d'une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{4}$.

Proposition 1

Les variables aléatoires X et Y sont de mêmes lois si et seulement si elles ont mêmes fonctions de répartition.

II - Espérance & Variance

II.1 - Espérance

Définition 6 - Espérance

Soit X une variable aléatoire et x_1, \ldots, x_p les valeurs prises par X. L'espérance de X, notée $\mathbf{E}[X]$, est le réel

$$\mathbf{E}[X] = x_1 \mathbf{P}([X = x_1]) + \dots + x_p \mathbf{P}([X = x_p]).$$

Exemple 6 - Lois usuelles - À connaître par cœur

• Loi certaine de valeur c.

$$\mathbf{E}[X] = c\mathbf{P}([X = c]) = c.$$

• Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

$$\mathbf{E}[X] = 1\mathbf{P}([X = 1]) + 2\mathbf{P}([X = 2]) + \dots + n\mathbf{P}([X = n])$$

$$= 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + \dots + n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + n)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

• Loi de Bernoulli de paramètre p.

$$\mathbf{E}[X] = 0 \times \mathbf{P}([X = 0]) + 1 \times \mathbf{P}([X = 1])$$

= $0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$.

• Loi binomiale de paramètres n et p.

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n \times p.$$

Proposition 2 - Linéarité

Soit X, Y deux variables aléatoires et a, b deux réels. Alors, $\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y]$.

Exemple 7 - Somme de deux dés

Notons X_1 le résultat du premier lancer et X_2 le résultat du second. Alors, X_1 et X_2 suivent une loi uniforme sur [1,6] et $S = X_1 + X_2$. Ainsi,

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] = \frac{6+1}{2} + \frac{6+1}{2} = 7.$$

Proposition 3 - Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire, x_1, \ldots, x_p les valeurs prises par X et g une fonction à valeurs réelles. On note Y = g(X) la variable aléatoire définie par

$$\forall \ \omega \in \Omega, \ Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Alors,

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^{p} g(x_k) \mathbf{P}([X = x_k]).$$

Exemple 8 - Carré de la somme

On reprend les notations de l'exemple précédent. Posons $Y=S^2$. Alors,

$$\mathbf{E}[Y] = 2^{2} \frac{1}{36} + 3^{2} \frac{2}{36} + 4^{2} \frac{3}{36} + 5^{2} \frac{4}{36} + 6^{2} \frac{5}{36} + 7^{2} \frac{6}{36} + \cdots$$
$$\cdots + 8^{2} \frac{5}{36} + 9^{2} \frac{4}{36} + 10^{2} \frac{3}{36} + 11^{2} \frac{2}{36} + 12^{2} \frac{1}{36}$$

II.2 - Variance

Définition 7 - Variance, Écart-type

Soit X une variable aléatoire. La variance de X, notée $\mathbf{V}(X)$, est le réel :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2 \right].$$

L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Exemple 9 - Lois usuelles - À connaître par cœur

• Loi certaine de valeur c.

$$\mathbf{V}(X) = 0.$$

• Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

$$\mathbf{V}\left(X\right) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

• Loi de Bernoulli de paramètre p.

$$\mathbf{V}(X) = p(1-p).$$

• Loi binomiale de paramètres n et p.

$$\mathbf{V}(X) = np(1-p).$$

Proposition 4

Soit X une variable aléatoire et a, b deux réels. Alors,

$$\mathbf{V}\left(aX+b\right) = a^2\mathbf{V}\left(X\right).$$

Exemple 10

Soit Y une variable suivant une loi uniforme sur [2, 12]. On pose X = Y - 1.

Déterminons la loi de X.

Comme X = Y - 1,

Ainsi, $X \sim \mathcal{U}([1, 11])$.

Déterminons l'espérance et la variance de Y.

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X+1] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[1] = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7,$$
 $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X+1) = \mathbf{V}(X) = \frac{11^2 - 1}{2} = 60.$

Théorème 1 - Formule de Kænig-Huygens

Soit X une variable aléatoire. Alors,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Définition 8 - Variable centrée, réduite

Soit X une variable aléatoire.

- X est une variable centrée si $\mathbf{E}[X] = 0$.
- X est une variable réduite si $\mathbf{V}(X) = 1$.

Proposition 5

Soit X une variable aléatoire qui ne soit pas de loi certaine. La variable $X^* = \frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.

III - Couple de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire X qui prend les valeurs x_1, \ldots, x_p et une variable aléatoire Y qui prend les valeurs y_1, \ldots, y_q .

III.1 - Loi du couple

Définition 9 - Loi du couple

La loi du couple (X,Y) est la donnée :

- des valeurs (x_i, y_j) prises par le couple (X, Y),
- des probabilités $\mathbf{P}([X=x_i] \cap [Y=y_j])$.

Exemple 11 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On dispose d'un bureau à 2 tiroirs et de 2 feuilles de papier. On dispose aléatoirement chacune des feuilles de papier dans l'un des tiroirs.

On note X le nombre de feuilles dans le premier tiroir et Y le nombre de tiroirs vides.

Le nombre de feuilles de papier dans le premier tiroir peut être égal à 0, 1 ou 2.

Le nombre de tiroirs vides peut être égal à 0 (les 2 feuilles sont dans le même tiroir) ou 1 (il y a 1 feuille dans chaque tiroir). De plus,

$$\mathbf{P}\left([X=0]\cap[Y=0]\right)=0$$

$$\mathbf{P}([X=0] \cap [Y=1]) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=0]) = \frac{1}{4}$$

$$P([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X=2] \cap [Y=0]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X=2] \cap [Y=1]) = \frac{1}{4}$$

On peut représenter ces résultats dans un tableau : à chaque ligne correspond une valeur x que peut prendre X; à chaque colonne correspond une valeur y que peut prendre Y; à l'intersection d'une ligne et d'une colonne se lit la probabilité $\mathbf{P}([X=x] \cap [Y=y])$:

x	0	1
0	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$

Définition 10 - Marginales

Les lois de X et de Y sont les marginales du couple (X,Y).

En utilisant le système complet associé à la variable aléatoire Y (resp. X), on obtient

$$\forall i \in [1, p], \mathbf{P}([X = x_i]) = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

$$\forall j \in [1, q], \mathbf{P}([Y = y_j]) = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

Exemple 12 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les notations de l'exemple précédent, les marginales s'obtiennent en sommant les lignes / les colonnes du tableau.

y	0	1	$\mathbf{P}\left([X=x]\right)$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}\left([Y=y]\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Définition 11 - Loi conditionnelle

La loi conditionnelle de X sachant $[Y = y_i]$ est la donnée :

- des valeurs x_1, \ldots, x_n prises par X,
- des probabilités $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X=x_1]), \dots, \mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X=x_p]).$

Exemple 13 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On reprend les notations de l'exercice précédent. La loi conditionnelle de X sachant [Y=0] est égale à

$$\begin{array}{c|cccc} i & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbf{P}_{[Y=0]} \left([X=i] \right) & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

C'est une loi presque certaine : sachant qu'aucun des tiroirs n'est vide, on est certain qu'il y a une feuille dans le premier tiroir. La loi conditionnelle de X sachant [Y=1] est égale à

$$\begin{array}{c|cc} i & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbf{P}_{[Y=0]}\left([X=i]\right) & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Sachant qu'un des deux tiroirs est vide, il y a une chance sur deux que le premier tiroir contienne 0 feuille et une chance sur deux qu'il contienne les 2 feuilles.

III.2 - Indépendance

Définition 12 - Indépendance

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!],$

$$\mathbf{P}\left(\left[X=x_{i}\right]\cap\left[Y=y_{i}\right]\right)=\mathbf{P}\left(\left[X=x_{i}\right]\right)\times\mathbf{P}\left(\left[Y=y_{i}\right]\right).$$

Exemple 14

• On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi est définie par

y x	0	1	$\mathbf{P}\left([X=x]\right)$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{P}\left([Y=y]\right)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

On étudie le comportement de tous les couples de valeurs

possibles:

$$\mathbf{P}([X=0] \cap [Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{P}([X=0]) \times \mathbf{P}([Y=0])$$

$$\mathbf{P}([X=0] \cap [Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{P}([X=0]) \times \mathbf{P}([Y=1])$$

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{P}([X=1]) \times \mathbf{P}([Y=0])$$

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{P}([X=1]) \times \mathbf{P}([Y=1])$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

• 2 feuilles et 2 tiroirs. En reprenant la loi du couple,

$$\mathbf{P}\left(\left[X=0\right]\cap\left[Y=0\right]\right)=0\neq\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\mathbf{P}\left(\left[X=0\right]\right)\times\mathbf{P}\left(\left[Y=0\right]\right).$$

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Proposition 6 - Loi certaine

Si Y est une variable aléatoire certaine, alors X et Y sont indépendantes.

III.3 - Covariance

Proposition 7 - Espérance d'un produit

En utilisant la loi du couple,

$$\mathbf{E}[X \times Y] = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} x_i \times y_j \times \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

Exemple 15 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant l'exemple des feuilles et des tiroirs,

$$\mathbf{E}[XY] = 0 \times 0 \times 0 + 0 \times 1 \times \frac{1}{4} + \cdots$$

$$\cdots + 1 \times 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 \times 0 + \cdots$$

$$\cdots + 2 \times 0 \times 0 + 2 \times 1 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Théorème 2 - Espérance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbf{E}\left[X \times Y\right] = \mathbf{E}\left[X\right] \times \mathbf{E}\left[Y\right].$$

Définition 13 - Covariance

La covariance de X et Y, notée Cov(X,Y), est le réel

$$Cov(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X]) \times (Y - \mathbf{E}[Y])].$$

Proposition 8 - Propriétés de la covariance

Soit a, b, c trois réels et X, Y, Z trois variables aléatoires.

- $Cov(X, Y) = \mathbf{E}[X \times Y] \mathbf{E}[X] \times \mathbf{E}[Y]$.
- Cov(X, Y) = Cov(Y, X).
- $\operatorname{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$.
- $\operatorname{Cov}(X,c) = 0$.
- $\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a\operatorname{Cov}(X, Z) + b\operatorname{Cov}(Y, Z)$.

Exemple 16 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les calculs précédents,

$$\mathbf{E}[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1,$$

$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$$

$$= \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0.$$

Proposition 9 - Covariance et Somme

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y).$$

Exemple 17 - Variance d'une somme

On considère le couple (X_1, X_2) dont la loi est définie par :

x_2 x_1	0	1	$ \mathbf{P}\left([X_1 = x_1]\right) $
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\mathbf{P}\left(\left[X_{2}=x_{2}\right]\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

 X_1 et X_2 ont même loi, donc ils ont même espérance et même

variance. De plus,

$$\mathbf{E}[X_{1}] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \mathbf{E}[X_{1}^{2}],$$

$$\mathbf{V}(X_{1}) = \mathbf{E}[X_{1}^{2}] - \mathbf{E}[X_{1}]^{2} = \frac{3}{16},$$

$$\mathbf{E}[X_{1}X_{2}] = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Cov}(X_{1}, X_{2}) = \mathbf{E}[X_{1}X_{2}] - \mathbf{E}[X_{1}] \mathbf{E}[X_{2}]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{16}$$

$$\mathbf{V}(X_{1} + X_{2}) = \mathbf{V}(X_{1}) + \mathbf{V}(X_{2}) + 2\operatorname{Cov}(X_{1}, X_{2})$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{1}{4}.$$

Proposition 10 - Convariance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors Cov(X,Y) = 0.

Exemple 18 - 2 feuilles et 2 tiroirs



L'exemple des feuilles et des tiroirs montre que la covariance peut être nulle alors que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

Définition 14 - Coefficient de corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y, noté $\rho(X,Y)$, est défini par

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Exemple 19

En reprenant l'exemple précédent,

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{V}(X_1)\mathbf{V}(X_2)}} = \frac{\frac{-1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{3}{16}}} = -\frac{1}{3}.$$

Proposition 11

- $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.
- $|\rho(X,Y)| = 1$ signifie qu'il existe a, b, c réels tels que aX + bY + c = 0.