T.D. VII - Applications linéaires

I - Applications linéaires

II - Applications linéaires & Matrices

Solution de l'exercice 7.

1. Comme

$$f(1,0) = (1,3) = 1 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1),$$
$$f(0,1) = (1,-5) = 1 \cdot (1,0) - 5 \cdot (0,1),$$

alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Comme

$$f(0,1) = (1,-5) = -5 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0),$$
$$f(1,0) = (1,3) = 3 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0),$$

alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. D'une part,

$$f(1,2) = (4,-1)$$
$$f(3,4) = (10,-1).$$

D'autre part, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43/2 \\ 21/2 \end{pmatrix}$. Donc

$$f(1,2) = -\frac{19}{2}(1,2) + \frac{9}{2}(3,4)$$
$$f(3,4) = -\frac{43}{2}(1,2) + \frac{21}{2}(3,4).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}.$$

4. Comme

$$f(1,0,0) = (1,3,0) = (1,0,0) + 3(0,1,0) + 0(1,1,1),$$
$$f(0,1,0) = (1,0,1) = 0 \cdot (1,0,0) - (0,1,0) + (1,1,1),$$
$$f(1,1,1) = (2,2,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (1,1,1),$$

alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

III - Calculs de puissances

Solution de l'exercice 11. On décompose,

$$A = (a-b)I_3 + bJ.$$

De plus, on remarque que $J^2 = 3J$, puis on montre par récurrence que pour tout $k \geqslant 1$, $J^k = 3^{k-1}J$.

Comme $I_3J = JI_3 = J$, les matrices $(a-b)I_3$ et J commutent. Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((a-b)I_3)^{n-k} (bJ)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} b^k J^k \\
&= \binom{n}{0} (a-b)^n b^0 J^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} b^k 3^{k-1} J \\
&= (a-b)^n I_3 + \left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (3b)^k \right) J \\
&= (a-b)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (3b)^k - \binom{n}{0} (a-b)^n \right) J \\
&= (a-b)^n I_3 + \frac{(a-b+3b)^n - (a-b)^n}{3} J \\
&= (a-b)^n I_3 + \frac{(a-2b)^n - (a-b)^n}{3} J.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 12. D'après les notations,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $k \geqslant 3$,

$$B^k = B^{k-3} \times B^3 = 0_3.$$

De plus, $I_3B = BI_3 = B$. Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
A^n &= (B + I_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + 0_3 \\
&= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi les coefficients de A^n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & n\beta + \frac{n(n-1)}{2}\alpha\gamma \\ 0 & 1 & n\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

IV - Rangs de matrices

Solution de l'exercice 13.

1. Les colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires et la matrice est non nulle. Le rang vaut 2.

2. Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle. Le rang vaut 1.

3. Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle. Le rang vaut 1.

4. Les deux premiers vecteurs colonnes sont non colinéaires, le troisième est la somme des deux premiers. Le rang vaut 2.

5. Les deux vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires. Le rang vaut 2.

6. Toutes les colonnes sont égales à la première qui est non nulle. Le rang vaut 1. □

Solution de l'exercice 14.

1. En effectuant des opérations élémentaires :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rg}\, A_1 &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \scriptstyle{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \atop L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \scriptstyle{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

2. En effectuant des opérations élémentaires :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rg}\, A_2 &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \scriptstyle{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} & \scriptstyle{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

3. En effectuant des opérations élémentaires :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rg}\, A_3 &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \scriptstyle{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \atop {L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \atop L_4 \leftarrow L_4 - L_1}} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} & \scriptstyle{C_2 \leftrightarrow C_3} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} & \scriptstyle{L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \\ 0 & 0 & 0 & 167 \end{pmatrix} & \scriptstyle{L_4 \leftarrow 9L_4 - 5L_3} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

□

V - Questions plus théoriques

Solution de l'exercice 15.

1. Soit N, $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition,

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda M + N) &= (\lambda M + N)A \\
&= \lambda MA + NA \\
&= \lambda\varphi(M) + \varphi(N).
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Rappelons que

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\varphi(E_{1,1}) = E_{1,1}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 2E_{1,2} + 3E_{1,3}$$

$$\varphi(E_{1,2}) = E_{1,2}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_{1,1} + E_{1,2} + 2E_{1,3}$$

$$\varphi(E_{1,3}) = E_{1,3}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} + 3E_{1,3}$$

$$\varphi(E_{2,1}) = E_{2,1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1} + 2E_{2,2} + 3E_{2,3}$$

$$\varphi(E_{2,2}) = E_{2,2}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_{2,1} + E_{2,2} + 2E_{2,3}$$

$$\varphi(E_{2,3}) = E_{2,3}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,2} + 3E_{2,3}$$

$$\varphi(E_{3,1}) = E_{3,1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = E_{3,1} + 2E_{3,2} + 3E_{3,3}$$

$$\varphi(E_{3,2}) = E_{3,2}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -E_{3,1} + E_{3,2} + 2E_{3,3}$$

$$\varphi(E_{3,3}) = E_{3,3}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = E_{3,2} + 3E_{3,3}$$

Ainsi, en notant $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

□

Solution de l'exercice 16. Z_n est l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Cet ensemble est appelé le *centre* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La lettre Z provient de l'initiale de *Zentrum* qui signifie centre en allemand.

1. Soit A, $B \in Z_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda A + B \in Z_n$.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\begin{aligned} (\lambda A + B)M &= \lambda AM + BM \\ &= \lambda MA + MB, \text{ car } A,\, B \in Z_n \\ &= M(\lambda A + B). \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda A + B$ commute avec toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda A + B \in Z_n$.

2. a) On peut ici dessiner les matrices produits...

* La matrice $E_{i,j}A$ est constituée de 0 sauf sur la i^{e} ligne qui est constituée des éléments $a_{j,1}$, $a_{j,2}, \dots, a_{i,n}$.
* La matrice $AE_{i,j}$ est constituée de 0 sauf sur la j^{e} colonne qui est constituée des éléments $a_{1,i}, a_{2,i}, \dots, a_{n,i}$.

Comme $AE_{i,j} = E_{i,j}A$, en identifiant les éléments, on obtient

* les coefficients situés à la i^{e} ligne et j^{e} colonne sont égaux, soit $a_{j,j} = a_{i,i}$,
* les autres coefficients sont nuls, soit $a_{j,k} = 0$ si $k \neq j$ et $a_{k,i} = 0$ si $k \neq i$.

b) En uilisant la question précédente pour tous les couples (i, j) et en notant λ la valeur commune à tous les $a_{i,i}$, alors $A = \lambda I$.

3. Nous avons montré à la question précédente que, si A commute avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I$.
Réciproquement, si $A = \lambda I$, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A(\lambda I) = \lambda IA = \lambda A$.
Finalement, $Z_n = \{\lambda I,\, \lambda \in \mathbb{R}\}$. □

Solution de l'exercice 17. Raisonnons par Analyse / Synthèse.

Analyse. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe S symétrique et A antisymétrique telles que $M = S + A$. Alors,

$$\begin{aligned} M &= S + A \\ M^T &= S^T + A^T \\ &= S - A \end{aligned}$$

Ainsi, en additionnant puis soustrayant ces égalités, on obtient

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \text{ et } A = \frac{1}{2}(M - M^T).$$

Synthèse. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Posons

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T) \text{ et } A = \frac{1}{2}(M - M^T).$$

D'une part,

$$\begin{aligned} S^T &= \left(\frac{1}{2}(M + M^T)\right)^T = \frac{1}{2}(M^T + M) = S \\ A^T &= \left(\frac{1}{2}(M - M^T)\right)^T = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A \end{aligned}$$

Ainsi, S est symétrique et A est antisymétrique.
D'autre part,

$$S + A = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) = M.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. Comme $f^2 \neq 0$, l'application f^2 n'est pas l'application nulle et il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

2. Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0.$$

En composant par f^2,

$$\begin{aligned} af^2(x_0) + bf^3(x_0) + cf^4(x_0) &= f^2(0) \\ af^2(x_0) &= 0, \text{ car } f^3 = f^4 = 0 \end{aligned}$$

Comme $f^2(x_0) \neq 0$, alors $a = 0$.
Ainsi, en reprenant l'équation, on obtient

$$bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0.$$

En composant par f,

$$\begin{aligned} bf^2(x_0) + cf^3(x_0) &= f(0) \\ bf^2(x_0) &= 0, \ \text{ car } f^3 = 0 \end{aligned}$$

Comme $f^2(x_0) = 0$, alors $b = 0$.
Ainsi, en reprenant l'équation, on obtient

$$cf^2(x_0) = 0.$$

Comme $f^2(x_0) = 0$, alors $c = 0$.
Finalement, $a = b = c = 0$ et la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre.

3. Comme

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(x_0) \\ f(f(x_0)) &= f^2(x_0) \\ f(f^2(x_0)) &= f^3(x_0) = 0, \end{aligned}$$

alors

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Soit g telle que $g \circ f = f \circ g$. Notons

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \gamma & h & i \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} f \circ g &= g \circ f \\ \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g) &= \text{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} b &= 0 \\ c &= 0 \\ a &= e \\ b &= f \\ d &= h \\ e &= i \\ f &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= c = f = 0 \\ a &= e \\ d &= h \\ e &= i \end{cases}$$

soit

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ \gamma & d & a \end{pmatrix}$$

5. Notons $N = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. On remarque que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si g commute avec f, d'après la question précédente, il existe a, d, $\gamma \in \mathbb{R}$

tels que

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) &= a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\ &= aI_3 + dN + \gamma N^2\\ g &= a\,\mathrm{Id} + df + \gamma f^2.\end{aligned}$$

Réciproquement, si $g = af^2 + bf + c\,\mathrm{Id}$, alors $g \circ f = af^3 + bf^2 + cf = f \circ g$. $\square$

Solution de l'exercice 19.

1. D'après la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} AX &= 0\\ \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j\\ \sum_{j=2}^n a_{2,j}x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=2}^n a_{n,j}x_j\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

En utilisant la i^{e} ligne de ce produit matriciel, puis en sortant le i^{e} terme de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_{i,j}x_j &= 0\\ \sum_{k\neq i} a_{i,k}x_k + a_{i,i}x_i &= 0\\ a_{i,i}x_i &= -\sum_{k\neq i} a_{i,k}x_k.\end{aligned}$$

2. En utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}|a_{i_0,i_0}x_{i_0}| &\leqslant \sum_{k\neq i_0} |a_{i_0,k}x_k|\\ |a_{i_0,i_0}|\cdot|x_{i_0}| &\leqslant \sum_{k\neq i_0} |a_{i_0,k}|\cdot|x_{i_0}|\\ |a_{i_0,i_0}| &\leqslant \sum_{k\neq i_0} |a_{i_0,k}|,\end{aligned}$$

car $x_{i_0} \neq 0$.

3. D'après l'hypothèse,

$$|a_{i_0,i_0}| > \sum_{k\neq i_0} |a_{i_0,k}|.$$

On obtient ainsi une contradiction et $X = 0$.

Finalement, $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$. Ainsi, l'endomorphisme canoniquement associé à A est injectif donc bijectif. La matrice A est donc inversible. $\square$