

T.D. II - Intégrale sur un segment

I - Calcul de primitives

Exercice 1. (Fonctions polynomiales, ⚙️) Déterminer des primitives des fonctions suivantes

- | | |
|----------------------------|--|
| 1. $x^2 + x + 1.$ | 3. $4x^3 + 2x^2 - 1.$ |
| 2. $2x^3 + 4x + 2.$ | 4. $x^{10} + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}.$ |

Exercice 2. (Fonctions puissances, ⚙️)

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $x^{3/2}.$ | 4. $\frac{4}{x^5}.$ |
| 2. $\frac{1}{\sqrt{x}}.$ | 5. $(2x + 1)(x^2 + x)^5.$ |
| 3. $\frac{1}{3x^2}.$ | 6. $(x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4).$ |

Exercice 3. (Logarithmes & Exponentielles, ⚙️)

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $\frac{3}{x}.$ | 4. $\frac{1}{e^{12x}}.$ |
| 2. $\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}.$ | 5. $(e^x + 1)(e^x + x)^{22}.$ |
| 3. $e^{2x}.$ | 6. $\frac{e^x+1}{e^x+x}.$ |

Exercice 4. (Calculs d'intégrales, ⚙️) Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_0^1 (x^2 + 3x + 1) \, dx.$ | 3. $\int_1^{-1} e^3 \, dx.$ |
| 2. $\int_{-2}^1 e^{3x} \, dx.$ | 4. $\int_2^1 \frac{1}{x} \, dx.$ |

II - Propriétés de l'intégrale

Exercice 5. (Loi uniforme) Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \notin [1, 3]$ et $f(x) = \frac{1}{2}$ sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction f .
2. Déterminer les intégrales suivantes :

- | | |
|---|--|
| a) $\int_{-2}^0 f(x) \, dx.$ | d) $\int_{-4}^3 f(x) \, dx.$ |
| b) $\int_{-1}^{3/2} f(x) \, dx.$ | e) $\int_{-5}^{10} f(x) \, dx.$ |
| c) $\int_{-1}^2 f(x) \, dx.$ | |

3. Si $x \in [1, 3]$, déterminer $\int_1^x f(t) \, dt.$

Exercice 6. (Loi exponentielle) Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 2e^{-2x}$ sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction f .
2. Déterminer les intégrales suivantes :

- | | |
|---|--|
| a) $\int_{-2}^0 f(x) \, dx.$ | d) $\int_{-4}^3 f(x) \, dx.$ |
| b) $\int_{-1}^{3/2} f(x) \, dx.$ | e) $\int_{-5}^{10} f(x) \, dx.$ |
| c) $\int_{-1}^2 f(x) \, dx.$ | |

3. Si $x \geq 0$, déterminer $\int_0^x f(t) \, dt$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) \, dt.$

Exercice 7. Calculer $\int_{-1}^5 |x - 2| \, dx.$

Exercice 8. (⚙️) Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x} \, dx.$

1. Calculer I .
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire la valeur de J .

Exercice 9. (⚙️) Soit $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} \, dx.$

1. Calculer I .
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire la valeur de J .

Exercice 10. (\rightarrow) Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2} dx$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Montrer que (u_n) est minorée par 0.
3. En minorant $1 - x^2$, montrer que $u_n \leq \frac{4}{3(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 11. (\rightarrow) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

1. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leq I_n \leq \ln(2)$.
2. Étudier les variations de la suite (I_n) .
3. En déduire que la suite (I_n) converge.

III - Intégrations par parties

Exercice 12. (\rightarrow) À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int_0^1 x e^x dx$. 2. $\int_1^2 x e^{2x} dx$. 3. $\int_1^e x \ln(x) dx$. | <ol style="list-style-type: none"> 4. $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$. 5. $\int_1^e (\ln(t))^2 dt$. 6. $\int_1^e t^2 e^t dt$. |
|--|--|

Exercice 13. (\rightarrow) Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1. Calculer u_0 .
2. Montrer que $f(t) = (2-t)e^t$ est une primitive de la fonction $g(t) = (1-t)e^t$.
3. Déterminer la valeur de u_1 .
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.
5. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
6. Déterminer la limite de (nu_n) .

Exercice 14. (\rightarrow) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = \int_1^e t(\ln(t))^n dt$.

1. Calculer u_0 .
2. a) Montrer que, pour tout $t \in [1, e]$, $0 \leq \ln(t) \leq 1$.
b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n$.
4. En déduire u_1 , u_2 et u_3 .