T.D. IV - Matrices inversibles

I - Résolution de systèmes

Solution de l'exercice 1.

1. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 5x+y-2z &= 3 \\ x+4y+z &= 2 \\ -3x+2y+3z &= -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4y+z &= 2 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ 5x+y-2z &= 3 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1} \\ -3x+2y+3z &= -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4y+z &= 2 \\ 19y+7z &= 7 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow -L_2+5L_1} \\ 14y+6z &= 4 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3+3L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4y+z &= 2 \\ 19y+7z &= 7 \\ 16z &= -22 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow 19L_3-14L_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2-4y-z = 2-\frac{7}{8}+\frac{11}{8} = \frac{2\times 8-4\times 7+11}{8} = -\frac{1}{8} \\ y &= \frac{7}{19}-\frac{7}{19}z = \frac{7\times 8+7\times 11}{8\times 19} = \frac{7\times 19}{9\times 19} = \frac{7}{8} \\ z &= -\frac{22}{16} = -\frac{11}{8} \end{cases}$$

La solution du système est donc $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\frac{11}{8}\right)$.

2. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x+3y-z &= 1 \\ 5x+2y+3z &= 0 \\ -x+y+z &= 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z &= 5 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_3} \\ 5x+2y+3z &= 0 \\ 2x+3y-z &= 1 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z &= 5 \\ 7y+8z &= 25 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2+5L_1} \\ 5y+z &= 11 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3+2L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z &= 5 \\ 7y+8z &= 25 \\ -33z &= -48 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow 7L_3-5L_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= -5+y+z = \frac{-5\times 11+21+16}{11} = -\frac{18}{11} \\ y &= \frac{25}{7}-\frac{8}{7}z = \frac{25\times 11-8\times 16}{7\times 11} = \frac{275-128}{7\times 11} = \frac{147}{7\times 11} = \frac{21}{11} \\ z &= \frac{-48}{-33} = \frac{16}{11} \end{cases}$$

La solution du système est donc $(x,y,z) = \left(-\frac{18}{11}, \frac{21}{11}, \frac{16}{11}\right)$.

3. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ 3x+5y-z &= 1 \\ 2x+2y+z &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z &= 2 \\ 2y+2z &= -5 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \\ 3z &= -3 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2-y+z = 2+\frac{3}{2}-1 = \frac{5}{2} \\ y &= -\frac{5}{2}-z = -\frac{5}{2}+1 = -\frac{3}{2} \\ z &= -1 \end{cases}$$

La solution du système est donc $(x,y,z) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -1\right)$.

4. En utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 3x+4y-z &= 2 \\ x+3y+z &= 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ -2y+2z &= 2 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \\ y+2z &= 9 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ -2y+2z &= -1 \\ 6z &= 17 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1-2y+z = 1-\frac{20}{3}+\frac{17}{6} = \frac{6-40+17}{6} = -\frac{17}{6} \\ y &= \frac{-1}{-2} - \frac{2}{-2}z = \frac{1}{2}+\frac{17}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \\ z &= \frac{17}{6} \end{cases}$$

La solution du système est donc $(x,y,z) = \left(-\frac{17}{6}, \frac{10}{3}, \frac{17}{6}\right)$. □

Solution de l'exercice 2.

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x+y+z+t &= 3 \\ x+y+z+t &= 12 \\ 3x+2y+2z+t &= 3 \\ 3x+y+2z+3t &= 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t &= 12 \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ 2x+y+z+t &= 3 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1} \\ 3x+2y+2z+t &= 3 \\ 3x+y+2z+3t &= 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t &= 12 \\ -y-z-t &= -21 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ -y-z-2t &= -33 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \\ -2y-z &= -31 \quad {\scriptstyle L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t &= 12 \\ -y-z-t &= -21 \\ -t &= -12 \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \\ z+2t &= 11 \quad {\scriptstyle L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 12-y-z-t = 12-22+13-12 = -9 \\ y &= 21-z-t = 21+13-12 = 22 \\ t &= 12 \\ z &= 68-2t = 11-2*12 = -13 \end{cases}$$

La solution du système est donc $(x,y,z,t) = (-9, 22, -13, 12)$.

2. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x+2y+z+t &= 1 \\ x+y+3z+t &= 2 \\ 3x+y+2z+2t &= -1 \\ 3x+y+2z+3t &= 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z+t &= 2 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1} \\ 2x+2y+z+t &= 1 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ 3x+y+2z+2t &= -1 \\ 3x+y+2z+3t &= 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z+t &= 2 \\ -5z-t &= -3 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2-2L_1} \\ -2y-7z-t &= -7 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3-3L_1} \\ -2y-7z &= -1 & {\scriptstyle L_4 \leftarrow L_4-3L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z+t &= 2 \\ -2y-7z &= -1 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_4} \\ -2y-7z-t &= -7 \\ -5z-t &= -3 & {\scriptstyle L_4 \leftarrow L_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z+t &= 2 \\ -2y-7z &= -1 \\ -t &= -6 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3-L_2} \\ -5z-t &= -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2-y-3z-t = 2-\frac{13}{5}+3\times\frac{3}{5}-6 = \frac{10-13+9-30}{5} = -\frac{24}{5} \\ y &= \frac{1-7z}{2} = \frac{1}{2}+\frac{7\times 3}{2\times 5} = \frac{5+21}{10} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5} \\ t &= 6 \\ z &= \frac{3-t}{5} = \frac{3-6}{5} = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

La solution du système est donc $(x,y,z,t) = (-24/5, 13/5, -3/5, 6)$. $\square$

II - Inverses par calculs de produits

Solution de l'exercice 3.

1. En utilisant la formule du produit matriciel, on obtient

$$AB = I_3.$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = B$.

2. En utilisant la formule du produit matriciel, on obtient

$$AB = I_3.$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = B$.

3. En utilisant la formule du produit matriciel,

$$AB = 2I_3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} AB &= 2I_3 \\ \frac{1}{2}AB &= I_3 \\ A\left(\frac{1}{2}B\right) &= I_3. \end{aligned}$$

Donc, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}B$.

4. En utilisant la formule du produit matriciel, on obtient

$$AB = 18I_3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} AB &= 18I_3 \\ \frac{1}{18}AB &= I_3 \\ A\left(\frac{1}{18}B\right) &= I_3. \end{aligned}$$

Donc, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{18}B$. □

Solution de l'exercice 4.

1. En utilisant la définition du produit matriciel, on obtient

$$PQ = I_3.$$

Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = Q$.

2. Montrons par récurrence sur n que $M^n = P^{-1}A^nP$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $M^0 = P^{-1}A^0P$.

* $M^0 = I_3$, par définition.
* $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3$.

Ainsi, $M^0 = P^{-1}A^0P$ et la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $M^n = P^{-1}A^nP$. Montrons que $M^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^nM, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= P^{-1}A^nPM, \text{ d'après l'H.R..} \end{aligned}$$

Pour avancer dans le calcul, exprimons M en fonction de A. Or, d'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} A &= PMP^{-1} \\ AP &= PMP^{-1}P, \text{ en multipliant à droite par } P \\ &= PMI_3 \\ &= PM \\ P^{-1}AP &= P^{-1}PM, \text{ en multipliant à gauche par } P^{-1} \\ &= I_3M \\ &= M. \end{aligned}$$

Ainsi $M = P^{-1}AP$, et en reprenant le calcul précédent,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= P^{-1}A^nPM \\ &= P^{-1}A^nPP^{-1}AP \\ &= P^{-1}A^nI_3AP, \text{ car } PP^{-1} = I_3 \\ &= P^{-1}A^nAP \\ &= P^{-1}A^{n+1}P. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc pour tout n entier naturel,

$$M^n = P^{-1}A^nP.$$

□

III - Inverses par polynômes de matrices

Solution de l'exercice 5.

1. D'après la définition du produit matriciel,

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après les propriétés des puissances de matrices,

$$M^4 = M^2 \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} M^4 &= I_3 \\ M \times M^3 &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi, M est inversible et $M^{-1} = I_3$. □

Solution de l'exercice 6.

1. Un calcul fastidieux mais simple permet de montrer que

$$A^3 - 2A^2 - 12A + 19I_3 = 0_3.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^3 - 2A^2 - 12A + 19I_3 &= 0_3 \\ A^3 - 2A^2 - 12A &= -19I_3 \\ -\frac{1}{19}\left(A^3 - 2A^2 - 12A\right) &= I_3 \\ -\frac{1}{19}A\left(A^2 - 2A - 12I_3\right) &= I_3 \\ A\left(-\frac{1}{19}\left(A^2 - 2A - 12I_3\right)\right) &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{19}\left(A^2 - 2A - 12I_3\right).$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. Un calcul fastidieux mais simple permet de montrer que

$$A^3 - 2A^2 + 3A + 14I_3 = 0_3.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^3 - 2A^2 + 3A + 14I_3 &= 0_3 \\ A^3 - 2A^2 + 3A &= -14I_3 \\ -\frac{1}{14}\left(A^3 - 2A^2 + 3A\right) &= I_3 \\ -\frac{1}{14}A\left(A^2 - 2A + 3I_3\right) &= I_3 \\ A\left(-\frac{1}{14}\left(A^2 - 2A + 3I_3\right)\right) &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{14}\left(A^2 - 2A + 3I_3\right).$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. D'après la définition de M,

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

De manière analogue,

$$M + 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$(M - I_3)(M + 3I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} (M - I_3)(M + 3I_3) &= 0_3 \\ M \times M + 3MI_3 - I_3M - 3I_3 \times I_3 &= 0_3 \\ M^2 + 3M - M - 3I_3 &= 0_3 \\ M^2 + 2M &= 3I_3 \\ \frac{1}{3}(M^2 + 2M) &= I_3 \\ \frac{1}{3}M(M + 2I_3) &= I_3 \\ M\left(\frac{1}{3}(M + 2I_3)\right) &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi, M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(M + 2I_3).$$

□

IV - Non inversibilité

Solution de l'exercice 9.

1. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A^3 = A^2 \times A &= 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 8 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 16A. \end{aligned}$$

2. Supposons par l'absurde que A soit inversible. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^3 &= 16A \\ A^3A^{-1} &= 16AA^{-1}, \text{ en multipliant à droite par } A^{-1} \\ A^2AA^{-1} &= 16AA^{-1} \\ A^2 &= 16I_3. \end{aligned}$$

Or, le calcul de la question précédente a montré que $A^2 \neq 16I_3$. On obtient ainsi une contradiction et la matrice A n'est pas inversible. $\square$

Solution de l'exercice 10.

1. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$A^2 = A \times A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Supposons par l'absurde que A soit inversible. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^3 &= 0_3 \\ A^{-1}A^3 &= A^{-1}0_3, \text{ en multipliant à gauche par } A^{-1} \\ A^{-1}AA^2 &= 0_3 \\ A^2 &= 0_3. \end{aligned}$$

Or, le calcul de la question précédente montre que $A^2 \neq 0_3$. On obtient ainsi une contradiction et A n'est donc pas inversible. $\square$

Solution de l'exercice 11.

1. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Supposons par l'absurde que A soit inversible. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} AB &= AC \\ A^{-1}AB &= A^{-1}AC, \text{ en multipliant à gauche par } A^{-1} \\ B &= C \end{aligned}$$

Or, B et C sont deux matrices différentes. On obtient ainsi une contradiction et A n'est donc pas inversible. $\square$

V - Inversibilité des matrices de taille 2

Solution de l'exercice 12.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $1 \times 1 - 4 \times 2 = -7 \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $1 \times 1 - (-4) \times 2 = 9 \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $3 \times 1 - 1 \times 0 = 3 \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $-1 \times 1 - 1 \times 5 = -6 \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Comme $-1 \times (-3) - 1 \times 3 = 0$, alors la matrice A n'est pas inversible.

6. On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$. Comme $5 \times (-2) - 10 \times (-1) = 0$, alors la matrice A n'est pas inversible. □

Solution de l'exercice 13.

1. On remarque que

$$\begin{aligned} Y = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -x + 3y \\ x + 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, en notant $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a bien $AX = Y$.

2. La matrice A est de taille 2 et $-1 \times 2 - 1 \times 3 = -5 \neq 0$. Ainsi, la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} AX &= Y \\ A^{-1}AX &= A^{-1}Y, \text{ en multipliant à gauche par } A^{-1}. \\ X = A^{-1}Y &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \times 11 + 3 \times 9 \\ 1 \times 11 + 1 \times 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du système est $(1, 4)$. □

VI - Inversibilité des matrices diagonales

Solution de l'exercice 14.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3. Comme A est diagonale et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 3 et 0. Comme A est diagonale et qu'un de ses coefficients diagonaux est nul, alors A n'est pas inversible.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 0 et 1. Comme A est diagonale et qu'un de ses coefficients diagonaux est nul, alors A n'est pas inversible.

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont -3, 1 et 2. Comme A est diagonale et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

VII - Inversibilité des matrices triangulaires

Solution de l'exercice 15.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3. Comme A est triangulaire et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible.
Il faudra utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour connaître son inverse.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 27 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux sont 0 et 3. Comme A est triangulaire et qu'un de ses coefficients diagonaux est nul, alors A n'est pas inversible.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 75 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont 0 et 1. Comme A est triangulaire et qu'un de ses coefficients diagonaux est nul, alors A n'est pas inversible.

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont -3, 1 et 2. Comme A est triangulaire et que tous ses coefficients diagonaux son non nuls, alors A est inversible.
Il faudra utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour connaître son inverse. □

VIII - Inverses par méthodes du pivot

Solution de l'exercice 16.

1. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} AX = Y \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} x + z & = a \\ y & = b \\ z & = c \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x & = a - z = a - c \\ y & = b \\ z & = c \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned}
AX = Y \iff & \begin{cases} x & = a \\ -x + y & = b \\ x + z & = c \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x & = a \\ y & = b + x = a + b \\ z & = c - x = -a + c \end{cases} \\
\iff & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned}
AX = Y \iff & \begin{cases} x + z & = a \\ 2x + y + z & = b \\ x - y + z & = c \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x + z & = a \\ y - z & = b - 2a \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ -y & = c - a \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x & = a - z = a - 3a + b + c = -2a + b + c \\ z & = y - b + 2a = a - c - b + 2a = 3a - b - c \\ y & = a - c \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x & = -2a + b + c \\ y & = a - c \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_3} \\ z & = 3a - b - c \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_2} \end{cases} \\
\iff & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned}
AX = Y \iff & \begin{cases} x + z & = a \\ 2x + 3z & = b \\ -2x - y + z & = c \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x + z & = a \\ z & = b - 2a \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ -y + 3z & = c + 2a \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x & = a - z = a - b + 2a = 3a - b \\ z & = -2a + b \\ y & = -c - 2a + 3z = -c - 2a + 3b - 6a = -8a + 3b - c \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x & = 3a - b \\ y & = -8a + 3b - c \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_3} \\ z & = -2a + b \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_2} \end{cases} \\
\iff & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Solution de l'exercice 17.

1. On utilise la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{array}{|ccc|ccc|l}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On utilise la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{array}{|ccc|ccc|l}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
-1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\
-2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
\hline
3 & 3 & 0 & 3 & -2 & 1 & L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & L_2 \leftarrow L_3 + L_2 \\
0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & \\
\hline
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & \\
0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & L_1 \leftarrow 1/3 L_1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & L_3 \leftarrow -1/3 L_3
\end{array}$$

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On utilise la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{array}{|ccc|ccc|l}
2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
-2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
\hline
2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & L_2 \leftarrow L_3 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & L_3 \leftarrow L_2 \\
\hline
6 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\
0 & 3 & 0 & 1 & -4 & 3 & L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & L_1 \leftarrow 1/6 L_1 \\
0 & 1 & 0 & 1/3 & -4/3 & 3/3 & L_2 \leftarrow 1/3 L_2 \\
0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 0 & L_3 \leftarrow 1/3 L_3
\end{array}$$

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. D'après la définition du produit matriciel,

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après les propriétés des puissances de matrices,

$$M^4 = M^2 \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

2. En développant cette expression,

$$\begin{aligned}(M - I_3)(M^3 + M^2 + M + I_3) &= M^4 + M^3 + M^2 + M - M^3 - M^2 - M - I_3 \\ &= M^4 - I_3 \\ &= 0_3.\end{aligned}$$

3. D'après la définition de M,

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer l'inversibilité de M, on utilise la méthode de Gauss-Jordan,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -4 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -12 & 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 4L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -24 & 0 & 0 & 6 & -12 & -6 \\ 0 & -12 & 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 2/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -2/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -2/4 & -3/4 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -1/24 L_1 \\ L_2 \leftarrow -1/12 L_2 \\ L_3 \leftarrow -1/4 L_3 \end{array}$$

Ainsi, $M - I_3$ est inversible et son inverse est

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Notons B l'inverse de $M - I_3$. Alors, d'après la question **2.**,

$$\begin{aligned}(M - I_3)(M^3 + M^2 + M + I_3) &= 0_3 \\ B(M - I_3)(M^3 + M^2 + M + I_3) &= B0_3, \text{ en multipliant à gauche par } B \\ M^3 + M^2 + M + I_3 &= 0_3, \text{ car } B(M - I_3) = I_3 \text{ et } B0_3 = 0_3.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$M^3 + M^2 + M + I_3 = 0_3.$$

□

IX - Calculs de puissances

Solution de l'exercice 19. Montrons par récurrence que $A^n = PB^nP^{-1}$ pour tout n entier naturel.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $A^0 = PB^0P^{-1}$.
 * $A^0 = I$,
 * $PB^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PB^nP^{-1}$. Montrons que $A^{n+1} = PB^{n+1}P^{-1}$. En effet,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= PB^nP^{-1}A, \text{ d'après l'H.R.} \end{aligned}$$

Pour avancer dans le calcul, exprimons A en fonction de B. D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= B \\ PP^{-1}AP &= PB, \text{ en multipliant à gauche par } P \\ AP &= PB, \text{ car } PP^{-1} = I \\ APP^{-1} &= PBP^{-1}, \text{ en multipliant à droite par } P^{-1} \\ A &= PBP^{-1}. \end{aligned}$$

En reprenant le calcul précédent,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= PB^nP^{-1}PBP^{-1} \\ &= PB^nIBP^{-1} \\ &= PB^nBP^{-1} \\ &= PB^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, A^n = PB^nP^{-1}.$$

□

Solution de l'exercice 20.
1. En utilisant la définition du produit matriciel, on obtient

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} PQ &= 2I \\ \frac{1}{2}PQ &= I \\ P\left(\frac{1}{2}Q\right) &= I. \end{aligned}$$

Ainsi, P est inversible et
$$P^{-1} = \frac{1}{2}Q.$$

2. En effectuant les produits matriciels,

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= PD\left(\frac{1}{2}Q\right) \\ &= \frac{1}{2}PDQ \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

3. Comme la matrice D est diagonale, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ D^n \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

4. Montrons par récurrence sur n que $A^n = PD^nP^{-1}$.
Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $A^0 = PD^0P^{-1}$.

$*$ $A^0 = I$,

$*$ $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

Ainsi, $A^0 = PD^0P^{-1}$ et la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$. Montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$. En effet,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= PD^nP^{-1}A, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \text{ d'après la question } \textbf{2.} \\ &= PD^nIDP^{-1}, \text{ car } PP^{-1} = I \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.$$

5. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= PD^n\left(\frac{1}{2}Q\right) \\ &= \frac{1}{2}PD^nQ \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 5^n \\ 0 & -2^n & 0 \\ 3^n & 0 & -5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 5^n & 0 & 3^n - 5^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 3^n - 5^n & 0 & 3^n + 5^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. La matrice D est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 3, 2 et 5. Comme D est diagonale et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors D est inversible et

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

7. En utilisant les propriétés de l'inverse d'un produit de matrices inversibles, A est inversible et

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= (PDP^{-1})^{-1} \\
&= \left((PD)P^{-1}\right)^{-1} \\
&= \left(P^{-1}\right)^{-1}(PD)^{-1} \\
&= PD^{-1}P^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5}\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{15}\begin{pmatrix}8 & 0 & 2\\ 0 & 15 & 0\\ 2 & 0 & 8\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{30}\begin{pmatrix}8 & 0 & 2\\ 0 & 15 & 0\\ 2 & 0 & 8\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 21.

1. Montrons par récurrence que pour tout n entier naturel, $A^n = \begin{pmatrix}2^n & 0 & 3^n-2^n\\ 0 & 3^n & n3^{n-1}\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}$.

Initialisation. Lorsque $n=0$. Montrons que $A^0 = \begin{pmatrix}2^0 & 0 & 3^0-2^0\\ 0 & 3^0 & 0\times 3^{0-1}\\ 0 & 0 & 3^0\end{pmatrix}$.

- D'après les définitions des puissances de matrices, $A^0 = I$.
- D'après les définitions des puissances de réels, $\begin{pmatrix}2^0 & 0 & 3^0-2^0\\ 0 & 3^0 & 0\times 3^{0-1}\\ 0 & 0 & 3^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1-1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I$.

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = \begin{pmatrix}2^n & 0 & 3^n-2^n\\ 0 & 3^n & n3^{n-1}\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}$. Montrons que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix}2^{n+1} & 0 & 3^{n+1}-2^{n+1}\\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^{n+1-1}\\ 0 & 0 & 3^{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^{n+1} & 0 & 3^{n+1}-2^{n+1}\\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n\\ 0 & 0 & 3^{n+1}\end{pmatrix}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^nA \\
&= \begin{pmatrix}2^n & 0 & 3^n-2^n\\ 0 & 3^n & n3^{n-1}\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \text{ d'après l'H.R.} \\
&= \begin{pmatrix}2^n\times 2 & 3^n\times 3 & 2^n+(3^n-2^n)\times 3\\ 0 & 3^n\times 3 & 3^n+n3^{n-1}\times 3\\ 0 & 0 & 3\times 3^n\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2^{n+1} & 3^{n+1} & 2^n+3^{n+1}-3\times 2^n\\ 0 & 3^{n+1} & 3^n+n3^n\\ 0 & 0 & 3^{n+1}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2^{n+1} & 3^{n+1} & 3^{n+1}+2^n(1-3)\\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n\\ 0 & 0 & 3^{n+1}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2^{n+1} & 3^{n+1} & 3^{n+1}-2^{n+1}\\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n\\ 0 & 0 & 3^{n+1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix}2^n & 0 & 3^n-2^n\\ 0 & 3^n & n3^{n-1}\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}.$$

2. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = Q$.

3. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} PMP^{-1} &= PMQ \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

4. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} PMP^{-1} &= A \\ P^{-1}PMP^{-1} &= P^{-1}A, \text{ en multipliant à gauche par } P^{-1} \\ IMP^{-1} &= P^{-1}A \\ MP^{-1}P &= P^{-1}AP, \text{ en multipliant à droite par } P \\ MI &= P^{-1}AP \\ M &= P^{-1}AP. \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que pour tout n entier naturel, $M^n = P^{-1}A^nP$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $M^0 = P^{-1}A^0P$.

- $\ast$ $M^0 = I$,
- $\ast$ $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $M^n = P^{-1}A^nP$. Montrons que $M^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P$. En effet,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M, \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= P^{-1}A^nPM, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= P^{-1}A^nPP^{-1}AP, \text{ d'après le calcul précédent} \\ &= P^{-1}A^nIAP \\ &= P^{-1}A^nAP \\ &= P^{-1}A^{n+1}P. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ M^n = P^{-1}A^nP.$$

5. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} M^n &= P^{-1}A^nP \\ &= QA^nP \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & -3^n + 2^n - 3^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & -3^n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & -2 \times 3^n + 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & -3^n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2^n - 2 \times 3^n + 2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^n - 3^n + 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$