

■ Chapitre 13 ■

Espaces vectoriels préhilbertiens réels

■ E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel.

I. Produit scalaire

I.1 Définitions

Définition 1 (Produit scalaire).

Une application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définit un *produit scalaire* si f est

(i). une forme bilinéaire symétrique : pour tous $(u, v, w) \in E^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(v, u). \\ f(u + \lambda v, w) &= f(u, w) + \lambda f(v, w). \end{aligned}$$

(ii). définie positive : $\forall u \in E$, $f(u, u) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $u = 0_E$.

Notation.

■ Le produit scalaire de deux éléments $u, v \in E$ sera noté $\langle u, v \rangle$, $u \cdot v$ ou $(u|v)$.

Exercice 1.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'application $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$ soit une forme bilinéaire symétrique.

2. Donner des exemples de produits scalaires sur \mathbb{R}^n , $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$ définit un produit scalaire.

Définition 2 (Espace vectoriel préhilbertien / euclidien).

(i). Un espace *préhilbertien réel* est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

(ii). Un espace vectoriel *euclidien* est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

I.2 Inégalités

Proposition 1 (Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

Pour tous vecteurs $u, v \in E$,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle},$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Exercice 2. Montrer que $|\text{Tr}(A)| \leq \sqrt{n \text{Tr}(A^t A)}$.

Proposition 2 (Inégalité de MINKOWSKI).

Pour tous vecteurs $u, v \in E$,

$$\sqrt{\langle u + v, u + v \rangle} \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} + \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

I.3 Norme & Distance euclidiennes

Théorème 1 (Norme euclidienne).

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+, u \mapsto \sqrt{\langle u, u \rangle}$ est une norme sur E . C'est la *norme euclidienne* issue du produit scalaire.
Si $u \in E$ est tel que $\|u\| = 1$, le vecteur u est *normé* ou *unitaire*.

Notation.

■ $\|\cdot\|$ désignera la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 3. Donner des exemples de normes euclidiennes sur \mathbb{R}^n , $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 3 (Identités de polarisation).

Soient $u, v \in E$.

- (i). $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$.
- (ii). **Al-Kashi.** $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle$.
- (iii). **Identité de polarisation.** $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v \rangle$.
- (iv). **Identité du parallélogramme.** $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Exercice 4.

1. Retrouvez la formule de la médiane : $AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$.

2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \max\{|x|, |y|\}$ n'est pas une norme euclidienne.

⚙️ 3. Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{4x^2 + 2xy + 3y^2}$ est une norme euclidienne et identifier le produit scalaire associé.

II. Orthogonalité

II.1 Définitions

Définition 3 (Orthogonalité).

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, u, v deux vecteurs de E , F, G deux sous-espaces vectoriels de E , $p \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$.

- (i). Les vecteurs u et v sont *orthogonaux* si $\langle u, v \rangle = 0$. On note $u \perp v$.
- (ii). Les espaces F et G sont *orthogonaux* si $\forall (u, v) \in F \times G, \langle u, v \rangle = 0$.
- (iii). La famille (u_1, \dots, u_p) est *orthogonale* si $\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = 0$.
- (iv). La famille (u_1, \dots, u_p) est *orthonormée* si $\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$.
- (v). L'*orthogonal* de F est l'espace $F^\perp = \{u \in E ; \forall v \in F, \langle u, v \rangle = 0\}$.

Exercice 5.

1. Déterminer E^\perp puis $\{0_E\}^\perp$.

2. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$. Montrer que $G^\perp \subset F^\perp$.

3. Soient \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique et $D = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$. Déterminer D^\perp .

Propriétés 4 (Orthogonalité & Somme directe).

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

- (i). Si F et G sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe.
- (ii). L'espace F^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 6. Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, on considère $P = \text{Vect}\{(1, 1, 2), (1, 3, 4)\}$. Déterminer une équation cartésienne de P puis de P^\perp .

Théorème 2 (Théorème de Pythagore).

- (i). Soient $u, v \in E$. Les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
- (ii). Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$. Si la famille (u_1, \dots, u_p) est orthogonale, alors
- $$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

Exercice 7.



- Montrer que la réciproque du (ii) est fausse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^n a_i \cos(ix) \right)^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Propriété 5 (Orthogonalité & Familles libres).

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E non nuls. Si \mathcal{F} est orthogonale, alors \mathcal{F} est libre.

II.2 Bases orthonormées

Théorème 3 (Procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT).



Soit (e_1, \dots, e_p) une famille libre de E . Il existe une famille orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_i\} = \text{Vect}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i\}$.

Exercice 8.

- On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$.
- Proposer un algorithme en Python qui permette d'orthonormaliser des familles libres.

Théorème 4 (Base orthonormée incomplète).

Toute famille orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E peut être complétée en une base orthonormée. En particulier, tout espace vectoriel euclidien non réduit à son élément neutre possède une base orthonormée.

Théorème 5 (Isomorphisme canonique).

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et u, v des vecteurs de E . On note $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\langle x, e_i \rangle = x_i, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors $\langle x, y \rangle = {}^t Y X$ et $\|x\| = \sqrt{{}^t X X}$.

Exercice 9. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice de f dans la base \mathcal{B} . Exprimer $a_{i,j}$ en fonction des $(f(e_k))_k$.

III. Géométrie

III.1 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Théorème 6 (Unicité du supplémentaire orthogonal).

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension r de E .

- (i). F et F^\perp sont supplémentaires dans E .
- (ii). Soit G un supplémentaire de F . Si $G \perp F$, alors $G = F^\perp$.

De plus, si E est de dimension finie n , alors $\dim F^\perp = n - \dim F$.

Exercice 10.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.
2. $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire tel que la base canonique soit orthonormée. On pose $F = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X] ; \sum_{k=0}^n a_k = 0 \right\}$. Déterminer F^\perp et $(F^\perp)^\perp$.

Définition 4 (Projection / Symétrie orthogonale).

- (i). Une *projection orthogonale* de E est une projection p telle que $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ soient orthogonaux.
- (ii). Une *symétrie orthogonale* de E est une symétrie s telle que $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ soient orthogonaux.

Exercice 11.

1. Soient r un entier naturel non nul et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base orthonormée de $\text{Im } p$. Pour tout vecteur x de E , exprimer $p(x)$ en fonction des $(\varepsilon_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$.
2. Pour tout entier naturel n , déterminer la projection orthogonale du polynôme X^n sur $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

Propriété 6 (Inégalité de Bessel).

Soient $x \in E$ et p un projecteur orthogonal. Alors, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

III.2 Distances

Théorème 7 (Distance à un sev).

Soient z un vecteur de E préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . La *distance* de z à F , notée $d(z, F)$, est le réel $d(z, F) = \min_{x \in F} \|z - x\|$.

En notant p la projection orthogonale sur F , le vecteur $p(z)$ est l'unique vecteur de F tel que $d(z, F) = \|z - p(z)\|$.



Exercice 12. Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.


Corollaire 8 (Expression dans une base orthonormée).

Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de dimension finie r et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base orthonormée de F . Notons p la projection orthogonale sur F . Pour tout vecteur $x \in E$,

$$(i). \quad p(x) = \sum_{i=1}^r \langle x, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i. \quad (ii). \quad d(x, F) = \left\| x - \sum_{i=1}^r \langle x, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \right\|.$$

De plus, si E est de dimension finie n et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormée de E , alors

$$d(x, F) = \sqrt{\sum_{i=r+1}^n \langle x, e_i \rangle^2}.$$

 **Exercice 13.** On munit \mathbb{R}^4 du produit scalaire usuel. On note $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ ET } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

III.3 Hyperplans

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel euclidien.

Théorème 9 (Représentation des formes linéaires).

Pour toute forme linéaire $f \in E^*$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $f : x \mapsto \langle a, x \rangle$.

Exercice 14.

1. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{Tr}(AM)$.



2. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Existe-t-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, A \rangle = P(0)$?

Théorème 10 (Normale).

Soit H un hyperplan de E . L'espace vectoriel H^\perp est une droite appelée *normale* à l'hyperplan H . Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et H a pour équation cartésienne $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ dans cette base, alors $H^\perp = \text{Vect} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\}$.

Exercice 15.

1. Illustrer le théorème dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

2. **Ligne de niveau.** Soient \vec{n} un vecteur non nul de E , $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in E$. Décrire l'ensemble des points M tels que $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = \lambda$.

Théorème 11 (Distance à un hyperplan).

Soient H un hyperplan de E , de vecteur normal unitaire \vec{n} et u un vecteur de E . Alors, $d(u, H) = |\langle u, \vec{n} \rangle|$.

Exercice 16.

1. En dimension 2, exprimer la distance d'un point M de coordonnées (x_0, y_0) à la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

2. En dimension 3, exprimer la distance d'un point M de coordonnées (x_0, y_0, z_0) au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.



Familles de polynômes orthogonaux

Exercice 17. Soient I un intervalle non vide de \mathbb{R} et $w \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que, pour tout entier naturel n , $\int_I |x|^n w(x) dx$ converge. On note $\mathcal{H} = \left\{ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) ; \int_I f^2 w \text{ converge} \right\}$. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_I P(t)Q(t)w(t) dt$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes tels que

- * Pour tout n entier naturel, $\deg(P_n) = n$;
- * Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $m \neq n$, $\langle P_n, P_m \rangle = 0$.
- * Pour tout n entier naturel, P_n est unitaire

Soit n un entier naturel.

3. Montrer que $\text{Vect} \{P_0, \dots, P_n\} = \mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$.

5. **Racines.** On note $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq k}$ les racines de P_n qui appartiennent à $\overset{\circ}{I}$ et qui sont de multiplicité impaire. On pose $Q = \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)$.

a) Déterminer le degré de Q .

b) Déterminer le signe de $P_n Q$ sur I .

c) En déduire que $k = n$ et que P_n a toutes ses racines réelles et simples dans $\overset{\circ}{I}$.

6. **Relation de récurrence.**

a) Montrer que $(P_0, \dots, P_{n-1}, X P_{n-1})$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On note $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k + \alpha_n X P_{n-1}$.

b) Montrer que, pour tout $j \in \llbracket 0, n-3 \rrbracket$, $\alpha_j = 0$.

c) En déduire qu'il existe trois suites réelles (a_n) , (b_n) et (c_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = (a_n X + b_n) P_{n+1} + c_n P_n.$$

Les exemples classiques de familles sont résumés dans le tableau suivant. Ces familles de polynômes sont utilisées, via les formules de quadrature, pour calculer des valeurs approchées d'intégrales.

Nom	I	$w(x)$	Relation de récurrence
Legendre	$[-1, 1]$	1	$(n+2)L_{n+2} = (2n+3)L_{n+1} - (n+1)L_n$
Tchebychev	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$
Laguerre	\mathbb{R}_+	e^{-x}	$(n+2)L_{n+2} = (-X + 2n+3)L_{n+1} - (n+1)L_n$
Hermitte	\mathbb{R}	e^{-x^2}	$H_{n+2} = 2XH_{n+1} - 2(n+1)H_n$



Programme officiel (PCSI)

Produit scalaire et espaces euclidiens (p. 29, 40)



Programme officiel (PSI)

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens - A - Espaces préhilbertiens réels (p. 9, 10)

Mathématiciens

CAUCHY Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).

SCHWARZ Hermann (25 jan. 1843 à Hermsdorf-30 nov. 1921 à Berlin).

GRAM Jorgen Pedersen (27 juin 1850-29 avr. 1916 à Copenhague).

MINKOWSKI Hermann (22 juin 1864 à Alexotas-12 jan. 1909 à Göttingen).

SCHMIDT Erhart (13 jan. 1876 à Dorpat-16 déc. 1959 à Berlin).