II - Intégrale sur un segment

Révisions

- Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
c, $c \in \mathbb{R}$	0
x^a, $a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^{ax}	$a\,\mathrm{e}^{ax}$

- Règles de dérivation :

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$c \cdot u(x)$, $c \in \mathbb{R}$	$c \cdot u'(x)$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$u^n(x)$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$
$u(v(x))$	$v'(x)u'(v(x))$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\mathrm{e}^{u(x)}$	$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$

- Interprétation de l'intégrale des fonctions positives comme aire entre la courbe et l'axe des abscisses..

I - Primitives

Définition 1 - Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une *primitive* de f est une fonction dérivable F sur I telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 1

Soit $F(x) = x\ln(x) - x$ définie sur $]0, +\infty[$. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors F est dérivable et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Ainsi, F est une primitive de ln sur $]0, +\infty[$.

Exercice 1. Déterminer la fonction dont $F(x) = \frac{x^3}{12} + 4x^2 + 1$ est une primitive.

Théorème 1 - Primitives de fonctions continues

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives. Si F et G sont des primitives d'une fonction f continue sur I, alors il existe un réel c tel que $\forall\, x \in I$, $F(x) = G(x) + c$.

Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F
c, $c \in \mathbb{R}$	cx
x^a, $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
e^{ax}, $a \neq 0$	$\frac{1}{a} \mathrm{e}^{ax}$

Exercice 2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. x^5. **2.** $\frac{3}{x}$. **3.** e^{3x}. **4.** $\frac{1}{x^5}$.

Proposition 2 - Primitive de fonctions composées

Soit u une fonction dérivable telle que u' soit continue.

Fonction f	Primitive F
$\lambda u'(x)$	$u(x)$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x)$
$u'(x)u^a(x)$, $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} u^{a+1}(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$

Exercice 3. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $\frac{1}{3x}$.

2. $\mathrm{e}^{2x} + \sqrt{x}$.

3. $3\,\mathrm{e}^{2x} + 5\sqrt{x}$.

4. $\frac{1}{x}\ln(x)$.

5. $\frac{1}{x}\ln^4(x)$.

6. $\frac{2x+1}{x^2+x}$.

7. $\frac{x+1}{x^2+2x}$.

8. $(3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}$.

II - Intégrale d'une fonction continue

Définition 2 - Intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est le réel défini par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple 2

En utilisant les primitives usuelles,

- $\displaystyle\int_1^2 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$.
- $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^3+4x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^5 - 1$.

Exercice 4. Exprimer simplement les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$.

2. $\displaystyle\int_3^4 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

4. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

Théorème 2 - Intégrale et Primitive

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. En particulier, pour tout réel $x > a$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 3

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. La fonction F est dérivable et $F'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, F' est positive et F est croissante.

III - Propriétés de l'intégrale

Proposition 3 - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c des réels de I. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = x - 1$ sinon. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^1 0\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2\\ &= 0 + \frac{1}{2} - 0\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Proposition 4 - Linéarité de l'intégrale

Soit f, g des fonctions continues sur $[a, b]$ et α, β des réels. Alors,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 5

En utilisant les primitives usuelles,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{12}{x} + 5x^3\right)\mathrm{d}x &= 12\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 5\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x\\ &= 12\left[\ln(x)\right]_1^2 + 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2\\ &= 12\left(\ln(2) - \ln(1)\right) + 5\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}\right)\\ &= 12\ln(2) + \frac{5}{4}\cdot 15.\end{aligned}$$

Exercice 5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 2\,\mathrm{e}^x + 3x^2\,\mathrm{d}x$.

Proposition 5 - Croissance de l'intégrale (I)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $a \leqslant b$ et, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Exemple 6

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ et $0 \leqslant x \leqslant y$. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}F(y) &= \int_0^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\ &= F(x) + \int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^t \geqslant 0$ pour tout $t \in [x, y]$ et $x \leqslant y$, donc $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Ainsi, $F(x) \leqslant F(y)$ et F est croissante.

Exercice 6. Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_3^x (t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{d}t$ est croissante.

Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (II)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 7

Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \underbrace{(x-1)}_{\leqslant 0}\underbrace{\frac{x^n}{1+x}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant 1$, les bornes de l'intégrale sont bien ordonnées. Comme la fonction intégrée est négative, alors $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, soit $I_{n+1} \leqslant I_n$.
La suite (I_n) est donc décroissante.

Théorème 3 - Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 8 -

- Calculons $\displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

  Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Alors, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$. Comme u, v sont dérivables et u', v' sont continues sur $[1,2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\,\mathrm{e}^4}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_1^2 \\
&= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{4} \\
&= \frac{3\,\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}.
\end{aligned}$$

- Calculons $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

  Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. Alors, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$. Comme u, v sont dérivables et u', v' sont continues sur $[1,2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln(2) - [x]_1^2\\ &= 2\ln(2) - 2 + 1\\ &= 2\ln(2) - 1.\end{aligned}$$

Exercice 7. Calculer

1. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

2. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

3. $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$.