T.D. VIII - Réduction des matrices carrées

I - Valeurs propres / Vecteurs propres

Exercice 1. (⚙) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que X_1 est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée.

Exercice 2. (⚙) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que X_1 est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée.

Exercice 3. (⚙) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.
Montrer que X_1 et X_2 sont des vecteurs propres de A et préciser les valeurs propres associées.

Exercice 4. (⚙) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que X_1 et X_2 sont des vecteurs propres de A et préciser les valeurs propres associées.

Exercice 5. (⚙) Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 6 \\ -5 & -3 & 6 \\ -6 & -6 & 10 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et préciser les valeurs propres associées.

Exercice 6. (⚙) Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 6 \\ -7 & 9 & 6 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et préciser les valeurs propres associées.

II - Polynômes annulateurs

Exercice 7. (⚙) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A. En déduire un polynôme annulateur de A.

2. En déduire déduire les valeurs propres possibles de A.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

4. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire que A est diagonalisable.

Exercice 8. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Cacluler le produit matriciel $(M - I)(M + 3I)$.

2. Déterminer un polynôme annulateur de M.

3. En déduire les valeurs propres possibles de M.

Exercice 9. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $J^3 = 2J$.

2. En déduire les valeurs propres possibles de J.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $R(X) = X^3 + X^2 - 4X - 4$.

1. Montrer que R est un polynôme annulateur de A.

2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

3. Déterminer $R(2)$ et en déduire qu'il existe un polynôme Q, dont on précisera le degré, tel que $R(X) = (X-2)Q(X)$.

4. Effectuer la division euclidienne de $R(X)$ par $(X-2)$ et en déduire la valeur de $Q(X)$.

5. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

On pose $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Vérifier que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et préciser les valeurs propres associées.

On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Vérifier que $AP = PD$ et en déduire que A est diagonalisable.

III - Calculs de puissances

Exercice 11. Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -1$, $w_0 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= -3u_n + 4v_n - w_n \\ v_{n+1} &= 2v_n \\ w_{n+1} &= -4v_n - 2w_n \end{cases}.$$

1. Déterminer les valeurs de u_1, v_1 et w_1.

2. Pour tout n entier naturel, exprimer v_n en fonction de n.

On pose $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Vérifier que $PA = DP$ et en déduire que A est diagonalisable.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

4. En déduire, par récurrence, une expression de A^n en fonction de D^n, P^{-1} et P.

5. Déterminer D^n et en déduire les 9 coefficients de A^n.

Pour tout n entier naturel, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

6. Montrer que, pour tout n entier naturel, $U_{n+1} = AU_n$.

7. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $U_n = A^n U_0$.

8. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n.

Exercice 12. Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -1$, $w_0 = 2$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + w_n \\ v_{n+1} &= 2v_n - 4w_n \\ w_{n+1} &= -2w_n \end{cases}.$$

1. Déterminer les valeurs de u_1, v_1 et w_1.

2. Pour tout n entier naturel, exprimer w_n en fonction de n.

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Vérifier que $AP = PD$ et en déduire que A est diagonalisable.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

4. En déduire par récurrence que, une expression de A^n en fonction de D^n, P^{-1} et P.

5. Déterminer D^n et en déduire les 9 coefficients de A^n.

Pour tout n entier naturel, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

6. Montrer que, pour tout n entier naturel, $U_{n+1} = AU_n$.

7. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $U_n = A^n U_0$.

8. En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n.