Devoir en temps libre

À rendre le lundi 26/02/2024

■ ■ ■

Problème. (Analyse) Rappel : On rappelle que la fonction cosinus est définie, continue, 2π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto -\sin(x)$ et paire. La fonction sinus est définie, continue, 2π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \cos(x)$ et impaire. De plus,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

Dans cet exercice, on considère $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = f(x)$. On note aussi pour $m \in \mathbb{Z}$ lest fonctions c_m et s_m définies sur $\mathbb{R}$ comme suit : $c_m : x \mapsto \cos(mx)$ et $s_m : x \mapsto \sin(mx)$. Pour f, $g \in \mathscr{C}_{2\pi}$, on définit :

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,\ \|f\|^2 := \langle f, f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \text{ et } \cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}.$$

2. Soit m, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\langle c_n, c_m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \neq 0 \\ 2 & \text{si } m = n = 0 \end{cases} \langle s_n, s_m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{si } m = n = 0 \end{cases} \langle c_n, s_m\rangle = 0.$$

Dans toute la suite, pour $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, on définit les coefficients réels :

$$a_{m,f} := \langle f, c_m\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x,\ b_{m,f} := \langle f, s_m\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x,$$

et $a_{0,f} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$, $b_{0,f} := 0$.

3. Montrer que si f est paire, $b_{m,f} = 0$ et si f est impaire, $a_{m,f} = 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit a_m, $b_m \in \mathbb{R}$ pour $m \in \{0, \dots, n\}$. On pose

$$g(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{n} (a_m\cos(mx) + b_m\sin(mx)).$$

a) Montrer que $g \in \mathscr{C}_{2\pi}$.

b) Montrer que $a_{m,g} = a_m$ et $b_{m,g} = b_m$ pour $m \in \{1, \dots, n\}$ et $a_{0,g} = a_0$.

5. Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $S_n(f) \in \mathscr{C}_{2\pi}$ comme suit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ S_n(f) := a_{0,f} + \sum_{m=1}^{n} (a_{m,f}\cos(mx) + b_{m,f}\sin(mx)).$$

a) Montrer que $\|S_n(f)\|^2 = 2a_{0,f}^2 + \sum_{m=1}^{n}\left(a_{m,f}^2 + b_{m,f}^2\right)$.

b) Montrer que $\langle f - S_n(f), S_n(f)\rangle = 0$, puis que $\|f\|^2 = \|S_n(f)\|^2 + \|f - S_n(f)\|^2$.

c) En déduire que $a_{0,f}^2 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left(a_{m,f}^2 + b_{m,f}^2\right) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}x$.

d) En déduire que la suite $\left(\sum_{m=1}^{n}\left(a_{m,f}^2 + b_{m,f}^2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note $\sum_{m=1}^{+\infty}\left(a_{m,f}^2 + b_{m,f}^2\right)$ cette limite. En déduire l'inégalité de Bessel :

$$a_{0,f}^2 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(a_{m,f}^2 + b_{m,f}^2\right) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$