# II - Puissances

Le nombre réel $x^a$ est défini différemment en fonction de la nature du nombre $a$. Cependant, les règles de calcul seront toujours les mêmes !

## I - Lorsque $a$ est un entier naturel (positif)

**À Savoir**

Si $a$ est un entier naturel et $x$ est un réel,

- $x^0 = 1$.
- $x^a = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}}$.

**Exemple 1**

$$3^0 = 1,$$
$$3^1 = 3,$$
$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27.$$

**À Savoir**

Si $a$, $b$ sont des entiers naturels et $x$ est un réel,

$$x^a \times x^b = \underbrace{\overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{a \text{ facteurs}} \times \overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{b \text{ facteurs}}}_{a+b \text{ facteurs}}$$
$$= x^{a+b}.$$

**Exemple 2**

$$3^2 \times 3^3 = 3^5,$$
$$6^2 \times 3^3 = 3^2 \times 2^2 \times 3^3 = 2^2 \times 3^5,$$
$$3^n \times 3 = 3^{n+1}.$$

**À Savoir**

Si $a$, $b$ sont des entiers naturels et $x$ est un réel,

$$(x^a)^b = \left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}}\right)^b = \underbrace{\overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{a \text{ facteurs}} \times \cdots \times \overbrace{(x \times \cdots \times x)}^{a \text{ facteurs}}}_{b \text{ facteurs}}$$
$$= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \times b \text{ facteurs}}$$
$$= x^{a \times b}.$$

**Exemple 3**

$$\left(5^2\right)^3 = 5^{2\times 3} = 5^6,$$
$$81^5 = \left(3^4\right)^5 = 3^{4\times 5} = 3^{20}.$$

## II - Lorsque $a$ est un entier négatif

**À Savoir**

Si $a$ est un entier négatif et $x$ un réel non nul, alors $-a$ est un entier positif et

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{-a \text{ facteurs}}}.$$

**Exemple 4**

$$3^{-1} = \frac{1}{3^{+1}} = \frac{1}{3},$$
$$3^{-2} = \frac{1}{3^{+2}} = \frac{1}{9},$$
$$\frac{1}{3^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{3^3}} = 3^3.$$

**À Savoir**

Si $a$, $b$ sont des entiers,

$$x^a \times x^b = x^{a+b}.$$

**Exemple 5**

$$3^{-2} \times 3^5 = 3^{-2+5} = 3^3,$$
$$3^6 \times 3^{-12} = 3^{6-12} = 3^{-6},$$
$$\frac{3^5}{3^7} = 3^5 \times \frac{1}{3^7} = 3^5 \times 3^{-7} = 3^{5-7} = 3^{-2},$$
$$3^5 3^{-5} = 3^{5-5} = 3^0 = 1.$$

**À Savoir**

Si $a$, $b$ sont des entiers,

$$(x^a)^b = x^{ab}.$$

**Exemple 6**

$$\left(5^{-2}\right)^3 = 5^{-2\times 3} = 5^{-6}$$
$$\left(\frac{1}{81}\right)^5 = \left(\frac{1}{3^4}\right)^5 = \left(3^{-4}\right)^5 = 3^{-20},$$
$$\left(\frac{1}{25}\right)^{-3} = \left(5^{-2}\right)^{-3} = 5^{-2\times(-3)} = 5^6.$$

## III - Lorsque $a = 1/n$

**À Savoir**

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f(y) = y^n$ est strictement croissante, continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 0$, $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = +\infty$. Comme $x \in [0, +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $y$ tel que $y^n = x$. Ce réel est noté $x^{\frac{1}{n}}$.

**Exemple 7**

- Comme $2^2 = 4$, alors $2 = 4^{1/2}$.
- Si $x \geqslant 0$, alors $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

**Attention.** Dans ce cas, le nombre $x$ doit être positif.

**À Savoir**

Si $a$ est un entier, $b$ est un entier naturel non nul et $x$ est un réel positif,

$$\left(x^{1/b}\right)^a = x^{a/b}$$

**Exemple 8**

$$\left(2^{1/3}\right)^9 = 2^{9/3} = 2^3.$$

## IV - Lorsque $a$ est un réel

**À Savoir**

Si $a$ est un réel et $x$ est un réel strictement positif,

$$x^a = e^{a\ln(x)}.$$

Cette notion généralise les définitions précédentes.

**Exemple 9**

$$3^{1.5} = e^{\frac{3}{2}\ln(3)}$$

**Attention.** Dans ce cas, le nombre $x$ doit être strictement positif.

**À Savoir**

Si $a$, $b$ sont deux réels et $x$, $y$ sont deux réels strictement positifs,

$$\begin{aligned}(x\times y)^a &= x^a \times y^a,\\ x^a \times x^b &= x^{a+b},\\ (x^a)^b &= x^{a\times b}.\end{aligned}$$

**Exemple 10**

Déterminons les réels $x$ tels que $3^{-x} = \frac{3}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} e^{-x\ln(3)} &= \frac{3}{2}\\ \ln\left(e^{-x\ln(3)}\right) &= \ln\left(\frac{3}{2}\right)\\ -x\ln(3) &= \ln(3)-\ln(2)\\ x &= \frac{\ln(2)-\ln(3)}{\ln(3)}.\end{aligned}$$

## V - Exercices

**Exercice 1.** Factoriser par le réel indiqué puis simplifier si possible.

**1.** $e^{n+1} - e^n$ par $e^n$.

**2.** $2^{n+1} - 2^n$ par $2^n$.

**3.** $(n+1)2^n - 2^{n+1}$ par $2^n$.