

VII - Calcul matriciel

À Savoir

Opérations sur les matrices. Addition, Multiplication par un nombre, Multiplication de matrices.

- * $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
- * $\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$.
- * $A + 0 = 0 + A = A$.
- * $A + (-A) = (-A) + A = 0$.
- * $A \times I = I \times A = A$.

Attention. En général, $AB \neq BA$.

Exemple 1

Soit A une matrice carrée.

$$A^3 + 2A^2 + 3A = A \times A^2 + 2A \times A + 3A \times I = A(A^2 + 2A + 3I).$$

À Savoir

Systèmes linéaires. Traduire un système linéaire en équation matricielle et réciproquement.

Utilisation en lien avec :

- * la résolution de systèmes.
- * les suites définies par récurrence.
- * la formule des probabilités totales.

Exemple 2

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + 2w_n \end{cases} \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n$$

À Savoir

$$\begin{cases} A^0 = I, \\ A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ facteurs}}. \end{cases}$$

Calculs de puissances :

- * formule donnée et démonstration par récurrence.
- * puissance des matrices diagonales (par récurrence).
- * formule du binôme de Newton. Si $A \times B = B \times A$, alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Utile surtout si $A^k = 0$ pour k assez grand.

- * si $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$ (par récurrence).

À Savoir

Définition de l'inverse. Il existe B telle que $AB = I$. Alors, $A^{-1} = B$ et $BA = I$.

Existence d'un inverse :

- * donnée d'une matrice B telle que $AB = I$.
- * donnée d'une relation telle que $a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$.
- * matrice d'ordre 2 et $ad - bc \neq 0$ + Calcul.
- * matrice diagonale & tous les coefficients diagonaux non nuls + Calcul.
- * matrice triangulaire & tous les coefficients diagonaux non nuls.
- * calcul par inversion d'un système linéaire ou méthode du pivot sur l'identité.

Exemple 3

Si A est une matrice telle que $A^3 + 2A^2 + A + 5I = 0$. Alors,

$$A(A^2 + 2A + I) = -5I$$

$$A \times \left(-\frac{1}{5} (A^2 + 2A + I) \right) = I.$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{5} (A^2 + 2A + I)$.

Non-inversibilité. Utiliser une relation $AB = AC$ (ou $AB = 0$ ou ...). Supposer par l'absurde que A est inversible et en déduire $B = C$ (ou $B = 0$ ou ...). Obtenir une contradiction.