

# I - Calcul matriciel

## I - Matrices

### I.1 - Définition

#### Définition 1 - Matrices

Soit  $n, p$  deux entiers naturels non nuls.

- Une *matrice* de *taille*  $(n, p)$  est un tableau de nombres réels constitué de  $n$  lignes et de  $p$  colonnes.
- Le *coefficient* d'indice  $(i, j)$  d'une matrice est le coefficient situé à la  $i^e$  ligne et  $j^e$  colonne.
- L'ensemble des matrices de réels à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est noté  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On note généralement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

#### Exemple 1 - Matrices

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ .
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ .

#### Définition 2 - Matrices lignes / colonnes

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

- Si  $n = 1$ , alors  $A$  est une *matrice ligne*.
- Si  $p = 1$ , alors  $A$  est une *matrice colonne*.

#### Exemple 2

- Les matrices suivantes sont des matrices lignes :

$$(1 \quad -1), \left(\frac{1}{2} \quad 3 \quad -\frac{2}{3}\right).$$

- Les matrices suivantes sont des matrices colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

#### Définition 3 - Égalité entre matrices

Deux matrices  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  sont *égales* si elles ont même taille et si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $a_{i,j} = b_{i,j}$ .

## I.2 - Opérations

### Définition 4 - Somme, Multiplication par un réel

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ ,  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- L'*addition* de matrices de mêmes tailles est obtenue en additionnant les éléments de mêmes indices. Ainsi, la matrice  $A + B$  est la matrice de taille  $(n, p)$  et de coefficients  $(c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  définis par

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

- La *multiplication* d'une matrice par un réel est obtenue en multipliant chacun des coefficients de la matrice par ce réel. Ainsi, la matrice  $\alpha A$  est la matrice de taille  $(n, p)$  et de coefficients  $(d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  définis par

$$d_{i,j} = \alpha a_{i,j}.$$

### Exemple 3

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

### Définition 5 - Matrice nulle

La matrice de taille  $(n, p)$  dont tous les coefficients sont nuls est la *matrice nulle*. Elle est notée  $0_{n,p}$ .

### Proposition 1 - Propriétés de l'addition et de la multiplication par un réel

Soit  $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- *Commutativité*.  $A + B = B + A$ .
- *Associativité*.  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$ .
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ .
- $A + (-1)A = 0_{n,p}$ .

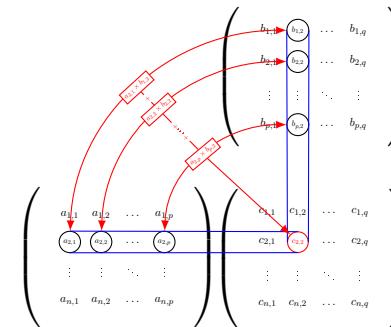
### Définition 6 - Produit de matrices de tailles compatibles

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ,  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . La matrice  $C = AB$  est la matrice de taille  $(n, q)$  dont le coefficient d'indice  $(i, j)$  est donné par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

### Exemple 4 - Représentation du produit matriciel

Pour effectuer un produit matriciel on représente souvent les matrices sur deux étages :



**Exemple 5 - Calculs de produits**

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y + z \\ 3x - 2y + z \end{pmatrix}.$

**Exercice 1.**

1. On considère trois suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $z_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$

- Déterminer la valeur de  $U_0$ .
  - Déterminer une matrice  $A$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = AU_n$ .
2. On considère les matrices  $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

- Comparer  $\Delta N$  et  $N \Delta$ .
- Calculer  $N^2$  puis  $N^3$ .

**Proposition 2 - Propriétés du produit matriciel**

Soit  $A$ ,  $B$ ,  $C$  trois matrices dont les tailles sont compatibles et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- *Associativité.*  $(AB)C = A(BC).$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$
- *Distributivité.*  
 $(A + B)C = AC + BC$  et  $A(B + C) = AB + AC.$

**II - Matrices carrées****Définition 7 - Matrices carrées**

Une *matrice carrée*  $M$  d'ordre  $p$  est une matrice dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes est égal à  $p$ . L'ensemble des matrices carrées d'ordre  $p$  est noté  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

**Exemple 6 - Matrices carrées**

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$

**Définition 8 - Triangulaires, Diagonales, Identité**

- Une matrice est *triangulaire supérieure* si les coefficients en dessous de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *triangulaire inférieure* si les coefficients au dessus de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *diagonale* si les coefficients en dehors de sa diagonale sont nuls.
- La matrice *identité* est la matrice diagonale dont tous les

coefficients diagonaux valent 1. La matrice identité d'ordre  $p$  est notée  $I_p$ .

- La matrice *nulle* est la matrice dont tous les éléments valent 0. La matrice nulle d'ordre  $p$  est notée  $0_p$ .

### Exemple 7

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure.
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  est diagonale.
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice identité d'ordre 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice identité d'ordre 3.

**Exercice 2.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

Parmi les matrices précédentes, lesquelles sont ...

1. ... triangulaires supérieures ?
2. ... triangulaires inférieures ?
3. ... diagonales ?

## III - Opérations sur les matrices carrées

### Proposition 3

Si  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées d'ordre  $p$ , alors

- $A+B$  et  $AB$  sont bien définies et appartiennent à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- $AI_p = I_pA = A$ .
- $A0_p = 0_pA = 0_p$ .

**Exercice 3.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer :

- |            |                       |
|------------|-----------------------|
| 1. $A+B$ . | 3. $BA$ .             |
| 2. $AB$ .  | 4. $AI_3$ et $I_3A$ . |

## IV - Calculs de puissances

### Exemple 8 - Pourquoi calculer des puissances de matrices ?

On considère les suites définies par  $x_0 = y_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= x_n - y_n \end{cases}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Alors,

$$\begin{aligned}
 U_1 &= A \times U_0 \\
 U_2 &= A \times U_1 \\
 &= \underbrace{A \times A}_{2 \text{ facteurs}} \times U_0 \\
 U_3 &= A \times U_2 \\
 &= A \times A \times U_1 \\
 &= \underbrace{A \times A \times A}_{3 \text{ facteurs}} U_0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

### Définition 9 - Puissance d'une matrice

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $p$  et  $n$  un entier naturel. Alors,

- $A^0 = I_p$ .
- $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$ .

### Exemple 9

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Alors,

- $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .
- $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- $A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 4.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^0$ ,  $A^1$ ,  $A^2$  et  $A^3$ .

## IV.1 - Matrices diagonales

### Proposition 4 - Puissance d'une matrice diagonale

Soit  $D$  une matrice diagonale d'ordre  $p$  et  $n$  un entier naturel. La matrice  $D^n$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de  $D$  élevés à la puissance  $n$ .

### Exemple 10 - Puissances & Diagonales ⚙️

Soit  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ .

Cette propriété se prouve par récurrence.

**Initialisation.** Pour  $n = 0$ , on a bien  $D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et

$$\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie à l'ordre  $n$ , c'est-à-dire  $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ . Alors,

$$\begin{aligned}
 D^{n+1} &= D^n \times D \\
 &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
 &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre  $n + 1$ .

**Conclusion.** Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Exercice 5.**

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Pour tout  $n$  entier naturel, exprimer  $A^n$ .
2. Pour tout  $n$  entier naturel, exprimer  $I_3^n$  et  $0_3^n$ .

**IV.2 - Formule du binôme de Newton****Exercice 6.**

1. Soit  $a$  et  $b$  deux réels.
  - a) À l'aide de la formule du triangle de Pascal, déterminer les valeurs de  $\binom{4}{0}$ ,  $\binom{4}{1}$ ,  $\binom{4}{2}$ ,  $\binom{4}{3}$  et  $\binom{4}{4}$ .
  - b) Développer la formule  $(a+b)^4$ .
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Définition 10 - Matrices qui commutent**

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $p$ . Les matrices  $A$  et  $B$  *commutent* si  $AB = BA$ .

**Exemple 11 - Commutativité**

- $I_2$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  commutent.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$  ne commutent pas.

**Théorème 1 - Formule du binôme de Newton**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $p$  qui commutent. Alors, pour tout  $n$  entier naturel,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

**Exemple 12 - Application de la formule du binôme**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- D'une part,  $A = I_2 + N$ .
- D'autre part,  $I_2 N = N I_2 = N$ . Ainsi,  $I_2$  et  $N$  commutent.
- On remarque ensuite que  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_2^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k, \text{ car } I_2^{n-k} = I_2 \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + 0_2 + \cdots + 0_2 \\ &= I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercice 7.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $2I_3 + N$ ,  $N^2$  puis  $N^3$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $A^n$  en utilisant la formule du binôme de Newton.

## V - Du côté de Python

### Informatique

Pour utiliser le calcul matriciel, on importe la bibliothèque `numpy` :

```
import numpy as np
```

On peut ensuite créer des matrices de plusieurs façons différentes :

- Crée la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$   
`A = np.array([[1, 2, 3], [4, 3, 2]])`
- Crée la matrice ne contenant que des 0 :  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  :  
`O = np.zeros((1, 3))`

- Crée la matrice ne contenant que des 1 :  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  :

```
U = np.ones((4, 2))
```

- Crée la matrice identité d'ordre 5 :  
`I = np.eye(5)`
- Crée la matrice ligne des nombres compris entre 1,1 (inclus) et 3,2 (exclu) avec un pas de 0,4, i.e.  $C = \begin{pmatrix} 1,1 & 1,5 & 1,9 & 2,3 & 2,7 & 3,1 \end{pmatrix}$  :  
`C = np.arange(1.1, 3.2, 0.4)`
- Crée la matrice ligne commençant à 1,1, terminant à 3,2 et contenant 5 nombres, i.e.  $D = \begin{pmatrix} 1,1 & 1,625 & 2,15 & 2,675 & 3,2 \end{pmatrix}$  :  
`D = np.linspace(1.1, 3.2, 5)`

L'accès à l'élément de la  $i + 1^{\text{e}}$  ligne et  $j + 1^{\text{e}}$  colonne s'effectue via la commande :

```
A[i, j]
```

Les opérations sur les matrices s'effectuent de la manière suivante :

- Additionner des matrices de même taille :  
`G + H`
- Multiplier des matrices de tailles compatibles :  
`np.dot(G, H)`

- Obtenir le nombre de lignes  $n$  et le nombre de colonnes  $p$  d'une matrice  $A$  :  
`n, p = np.shape(A)`