■ Chapitre 4 ■
Déterminants

Notations.
■ $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
■ n désigne un entier naturel non nul.
■ E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

I. Déterminants de matrices carrées

I.1 Définition

Définition 1 (Alternée, Antisymétrique).

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

(i). f est *multilinéaire* si, pour tous $(X_1, \dots, X_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n$ et $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $x \mapsto f([X_1, \dots, X_{i-1}, x, X_{i+1}, \dots, X_n])$ est une forme linéaire.

(ii). La forme linéaire f est *alternée* si pour tous $(X_1, \dots, X_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$,
$f([X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \dots, X_n]) = 0$.

(iii). La forme linéaire f est *antisymétrique* si pour tous $(X_1, \dots, X_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})^n$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$,
$$f([X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \dots, X_n]) = -f([X_1, \dots, X_{i-1}, X_j, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \dots, X_n])$$

Exercice 1. Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire antisymétrique et alternée. Pour toute matrice M, exprimer $f(M)$ en fonction de $f(I_2)$.

Propriété 1 (Alternée et Antisymétrique).

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme multilinéaire. L'application f est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Théorème 1.

L'ensemble des formes multilinéaires alternées sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Définition 2 (Déterminant).

L'unique forme multilinéaire alternée sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant $f(I_n) = 1$ est le *déterminant*, notée det.

Exercice 2.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Exprimer $\det(M)$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Exprimer $\det(M)$.

I.2 Premières propriétés

Les matrices d'opérations élémentaires sont :

- Les *dilatations* : $D_i(\lambda) = \text{Diag}(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1)$, où $\lambda \neq 0$ est à la position i.
- Les *transpositions* : $P_{i,j} = (I_n - E_{i,i} - E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i}$.
- Les *transvections* : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$.

Propriétés 2 (Opérations élémentaires).

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i). $\det(AD_i(\lambda)) = \lambda\det(A)$.

(ii). $\det(AP_{i,j}) = -\det(A)$.

(iii). $\det(AT_{i,j}(\lambda)) = \det(A)$.

Exercice 3. Calculer $\det(D_i(\lambda))$, $\det(P_{i,j})$ et $\det(T_{i,j}(\lambda))$ ainsi que le déterminant de leurs transposées.

Propriété 3 (Matrices triangulaires).

Soit $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice triangulaire. Alors, $\det(T) = \prod_{k=1}^{n} t_{k,k}$.

Exercice 4.

1. Soit $D = \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Calculer $\det(D)$.

2. Soit $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$. Déterminer $\Delta_n = \begin{vmatrix} s_1 & s_1 & \cdots & s_1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_1 & s_2 & & s_n \end{vmatrix}$.

Théorème 3 (Inversibilité).

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Exercice 5.

1. Déterminer l'équation cartésienne de la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par le point A de coordonnées (x_0, y_0) et dirigée par le vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (u_1, u_2).

2. Déterminer l'équation cartésienne du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par le point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et dirigé par les vecteurs non colinéaires $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de coordonnées respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3).

Corollaire 4 (Forme multiplicative).

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Exercice 6. Montrer que le déterminant est un invariant de similitude.

Théorème 5 (Transposée).

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\det(A) = \det({}^tA)$.

Exercice 7. Exprimer le déterminant des matrices triangulaires inférieures en fonction de leurs coefficients diagonaux.

I.3 Développement selon les lignes / colonnes

On suppose dans cette partie que $n \geqslant 2$.

Définition 3 (Cofacteurs).

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et i, $j \in [\![1, n]\!]$. On note Δ_{ij} le déterminant de la matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

(i). Le *mineur* d'indice i, j de A est Δ_{ij}.

(ii). Le *cofacteur* d'indice i, j de A est $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Théorème 6 (Développement selon une ligne / colonne).

Soit $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i). Pour tout $j\in\llbracket 1,n\rrbracket$, $\det(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

(ii). Pour tout $i\in\llbracket 1,n\rrbracket$, $\det(A)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Exercice 8.

1. Soit $x\in[-1,1]$. Déterminer $A_n(x)=\begin{vmatrix}2x & 1 & & 0\\ 1 & 2x & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & & 1 & 2x\end{vmatrix}$.

2. Soit $(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que si A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, alors elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Propriété 4 (Déterminant par blocs).

Soient $T_1,\dots,T_p$ des matrices carrées et $A=\begin{pmatrix}T_1 & * & \cdots & *\\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & *\\ 0 & \cdots & 0 & T_p\end{pmatrix}$. Alors,

$$\det(A)=\prod_{i=1}^{p}\det(T_i).$$

Exercice 9.

1. Soit $(a,b,c,d,\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{K}^4$. Calculer $\begin{vmatrix}a & b & 0 & 0\\ c & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \gamma & \delta\end{vmatrix}$.

2. Soit $(A,B,C,D)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^4$. A-t-on $\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\det(A)\det(D)-\det(B)\det(C)$?

II. Déterminants d'endomorphismes et de familles de vecteurs

Définition 4 (Déterminant d'un endormorphisme).

Soient $f\in\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors,

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))=\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)).$$

Cette valeur commune est le *déterminant* de l'endomorphisme f, noté $\det(f)$.

Propriété 5.

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. L'endomorphisme f est inversible si et seulement si $\det(f)\neq 0$.

Définition 5 (Déterminant d'une famille de vecteurs).

Soient E un espace vectoriel de dimension n, $(v_1, \dots, v_n)$ des vecteurs de E et $\mathscr{B}$ une base de E. Le *déterminant* de la famille $(v_1, \dots, v_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ est le scalaire

$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n)\right).$$

Exercice 10. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Exprimer $\det_{\mathscr{B}'}(v_1, \dots, v_n)$ en fonction de $\det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n)$.

Propriété 6.

Soit E un espace vectoriel de dimension n. La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

III. Application : Déterminant de Vandermonde

Théorème 7 (Déterminant de Vandermonde).

Soient $n \geqslant 2$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors,

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Définition 6 (Valeur propre, Vecteur propre).

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le scalaire λ est une *valeur propre* de M s'il existe un vecteur colonne X non nul, appelé *vecteur propre*, tel que $MX = \lambda X$.

Exercice 11. Soit D une matrice diagonale. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de D.

Propriété 7.

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ des valeurs propres distinctes de A de vecteurs propres respectifs $X_1, \dots, X_p$. Alors, $(X_1, \dots, X_p)$ est une famille libre.

Différentes approches des polynômes d'interpolation de Lagrange

Exercice 12. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $((a_i, b_i))_{i \in [\![0,n]\!]} \in (\mathbb{K}^2)^{n+1}$, où $(a_0, \dots, a_n)$ sont des scalaires deux à deux distincts. On souhaite montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = b_i$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$. On note $P\mathbb{K}[X] = \{PQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ et $P\mathbb{K}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$, puis déterminer une base adaptée à la décomposition $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_n[X] \oplus P\mathbb{K}[X]$.

Soit φ l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ définie, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, par

$$\varphi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n)).$$

2. a) Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$, puis montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\varphi$.

b) En déduire que φ réalise un isomorphisme, noté φ_n, de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

c) En notant $(e_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$, déterminer, pour tout entier $i \in [\![0,n]\!]$, $L_i = \varphi_n^{-1}(e_i)$.

d) Montrer que la famille $\mathscr{L}_n = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
La famille $\mathscr{L}_n$ est la base des polynômes d'interpolation de Lagrange associée à $(a_0, \ldots, a_n)$.

e) Montrer que $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.

3. Déterminer la matrice de φ_n de la base $(1, X, \ldots, X_n)$ dans la base $(e_0, \ldots, e_n)$ et retrouver la bijectivité de φ_n.

4. Déterminer les applications linéaires coordonnées associées à la base $\mathscr{L}_n$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit π l'application définie pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ par $\pi(P) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i$.

5. a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{K}[X]$.

b) Déterminer le noyau et l'image de π.

Programme officiel (PCSI)

Matrices et déterminants - B - Déterminants (p. 26)

Programme officiel (PSI)

Algèbre linéaire
A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices
c) Déterminants (p. 7)

Mathématiciens

Vandermonde Alexandre-Théophile (28 fév. 1735 à Paris-1er jan. 1796 à Paris).
Lagrange Joseph-Louis (25 jan. 1736 à Turin-10 avr. 1813 à Paris).
Gauss Johann Carl Friedrich (30 avr. 1777 à Brunswick-23 fév. 1855 à Göttingen).