

# T.D. VI - Calculs de sommes

## Séries numériques

### I - Calculs de sommes

**Exercice 1. (Sommes à étendre)** Calculer les sommes suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| <p>1. <math>\sum_{k=0}^5 3.</math></p> <p>2. <math>\sum_{n=3}^5 10.</math></p> <p>3. <math>\sum_{\ell=1}^7 \ell.</math></p> | <p>4. <math>\sum_{n=3}^{10} (-1)^n.</math></p> <p>5. <math>\sum_{n=1}^5 \frac{1}{2^{2n}}.</math></p> <p>6. <math>\sum_{n=1}^4 \frac{3^{2n+1}}{2^{2n}}.</math></p> |
|---|---|

**Exercice 2. (Sommes géométriques)** Calculer les sommes suivantes :

- |  |  |
|--|--|
| <p>1. <math>\sum_{k=3}^{10} 2^k.</math></p> <p>2. <math>\sum_{\ell=1}^5 (3^\ell - 2).</math></p> | <p>3. <math>\sum_{j=0}^n \left( \frac{2^k}{5^k} + \frac{1}{4^k} \right).</math></p> <p>4. <math>\sum_{k=0}^n \frac{3^{k+4^k}}{5^k}.</math></p> |
|--|--|

### II - Sommes télescopiques

**Exercice 3.** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $w_n = \frac{1}{2^n}$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} w_n.$$

Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 4.** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $w_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} w_n.$$

Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 5.** Pour tout  $k \geq 1$ , on pose  $u_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ .

1. Exprimer  $u_k$  en fonction de  $\ln(k+1)$  et  $\ln(k)$ .
2. À l'aide d'une somme télescopique, calculer  $\sum_{k=1}^n u_k$ .
3. En déduire la nature (et éventuellement la somme) de la série  $\sum u_k$ .

**Exercice 6.** Pour tout  $k \geq 2$ , on pose  $u_k = \frac{1}{k^3 - k}$ .

1. Montrer que

$$\forall k \geq 2, u_k = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{k} + \frac{2}{k+1}.$$

2. En utilisant la linéarité de la somme puis des changements d'indices, montrer que :

$$\sum_{k=2}^n u_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=2}^n u_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

4. En déduire la nature (et éventuellement la somme) de la série  $\sum u_k$ .

### III - Séries géométriques... et plus

**Exercice 7.** Vérifier la convergence puis calculer les sommes suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| <p>1. <math>\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k}.</math></p> <p>2. <math>\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{5^k}.</math></p> | <p>3. <math>\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}}.</math></p> <p>4. <math>\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{3^{2\ell+1}}{10^\ell}.</math></p> |
|---|---|

**Exercice 8.** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = 2 - \alpha + \frac{1}{5^n}$ . Montrer que  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\alpha = 2$ .

**Exercice 9.** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $u_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \alpha$ . Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $\alpha = \frac{1}{4}$ .

**Exercice 10.** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $a_n = n2^{n-1}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $a_n = a_{n+1} - a_n - 2^n$ .
2. Montrer que  $\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$ .
3. Calculer  $\sum_{k=0}^n 2^k$ .
4. En déduire que  $\sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ .

**Exercice 11. (Série harmonique,  $\rightarrow$ )** Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Exprimer  $H_{2n} - H_n$  en fonction d'un seul signe somme.
2. Montrer que  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ .
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite  $(H_n)$  diverge.
4. En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer que  $(H_n)$  tend vers  $+\infty$ .