

T.D. II - Dénombrement

I - Dés, Mots, Urnes,...

Solution de l'exercice 1. Le résultat obtenu à l'issu des lancers peut être modélisé par un couple d'entiers compris entre 1 et 6.

Il suffit ensuite de lister les décompositions de chacun de ces entiers :

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1,$$

$$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1,$$

$$8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2.$$

Il y a ainsi :

- * 5 façons d'obtenir 6,
- * 6 façons d'obtenir 7,
- * 5 façons d'obtenir 8.

□

Solution de l'exercice 2. Comme un nombre de 4 chiffres ne peut pas commencer par un 0, tout nombre de 4 chiffres est un élément de

$$[1, 9] \times [0, 9] \times [0, 9] \times [0, 9].$$

Il y a ainsi

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$$

nombre de 4 chiffres.

□

Solution de l'exercice 3. Un sonnet est une succession de 14 vers. Pour chacun des vers, il y a 10 façons de le choisir (une par page). Le nombre de sonnets pouvant être composé est donc égal à 10^{14} .

Comme $10^{14} = 10^5 \times 10^9 = 100\,000 \times 10^9$, le livre contient bien *cent mille milliards* de poèmes.

□

Solution de l'exercice 4.

1. Le 0 ne peut pas figurer en première position. Il y a ainsi :

- * $9 \times 1 \times 9 \times 9 \times 9$ nombres pour lesquels le 0 est en deuxième position,

- * $9 \times 9 \times 1 \times 9 \times 9$ nombres pour lesquels le 0 est en troisième position,
- * $9 \times 9 \times 9 \times 1 \times 9$ nombres pour lesquels le 0 est en quatrième position,
- * $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 1$ nombres pour lesquels le 0 est en cinquième position.

Finalement, il y a

$$4 \times 9^4 = 26\,244$$

nombre de 5 chiffres qui ne contiennent qu'un seul zéro.

2. On distingue en fonction du chiffre qui est répété :

- * Si le premier chiffre est répété :
 - ★ il doit être choisi entre 1 et 9 : 9 possibilités,
 - ★ on choisit où il est répété : 4 possibilités,
 - ★ on choisit les 3 chiffres restants entre 0 et 9 (distincts) : $9 \times 8 \times 7$.

Il y a donc $4 \times 9 \times 9 \times 8 \times 7$ possibilités.

- * Si le premier chiffre n'est pas répété et que le chiffre répété n'est pas 0 :
 - ★ on choisit le chiffre à répéter entre 1 et 9 : 9 possibilités,
 - ★ on choisit la position des 2 répétitions parmi les 4 positions : $\binom{4}{2}$ possibilités,
 - ★ on choisit les chiffres distincts restants : $8 \times 8 \times 7$.
- * Si le premier chiffre n'est pas répété et que le chiffre répété est 0 :
 - ★ on choisit la position des 2 répétitions parmi les 4 positions : $\binom{4}{2}$ possibilités,
 - ★ on choisit les chiffres restants : $9 \times 8 \times 7$.

Il y a alors $\binom{4}{2} \times 9 \times 8 \times 7$ possibilités.

Finalement, le nombre de nombre de 5 chiffres avec une unique répéti-

tion est égal à

$$\begin{aligned} & 4 \times 9^2 \times 8 \times 7 + 6 \times 8 \times 9 \times 8 \times 7 + 6 \times 9 \times 8 \times 7 \\ &= 4 \times 9^2 \times 8 \times 7 + 6 \times 9 \times 8 \times 7 \times (8 + 1) \\ &= 9^2 \times 8 \times 7 \times (4 + 6) = 10 \times 9^2 \times 8 \times 7 = 45\,360. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. Comme toutes les lettres du mot COMPTE sont distinctes, il y a autant d'anagrammes que de mélanges de lettres, soit :

$$7! = 5040 \text{ anagrammes de COMPTE.}$$

2. Tout anagramme de ANANAS est composé de 6 lettres. Pour constituer un anagramme, il faut choisir :

- * la position des 3 lettres A : $\binom{6}{3}$ possibilités,
- * la position des 2 lettres N parmi les positions restantes : $\binom{3}{2}$ possibilités,
- * la position du S sur la position restante : 1 possibilité.

Finalement, il y a

$$\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} = 20 \times 3 = 60 \text{ anagrammes d'ANANAS.}$$

3. Tout anagramme de DENOMBREMENT est composé de 11 lettres. Pour constituer un anagramme, il faut choisir :

- * la position des 3 lettres E : $\binom{11}{3}$ possibilités,
- * la position des 2 lettres M parmi les positions restantes : $\binom{8}{2}$ possibilités,
- * la position des 2 lettres N parmi les positions restantes : $\binom{6}{2}$ possibilités,
- * la position des lettres O, B, R, T parmi les positions restantes : $4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilités.

Finalement, il y a

$$\begin{aligned} \binom{11}{3} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times 4! &= \frac{11!}{3!8!} \times \frac{8!}{6!2!} \times \binom{6!}{4!2!} \times 4! \\ &= \frac{11!}{3!2!2!} \\ &= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 2 \times 2} \\ &= 11 \times 10 \times 9 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 2 \\ &= 1\,663\,200 \end{aligned}$$

anagrammes de DENOMBREMENT.

□

Solution de l'exercice 6.

1. Pour obtenir un tel tirage il faut choisir :

- * les p_1 boules blanches parmi les n_1 boules blanches : $\binom{n_1}{p_1}$,
- * les p_2 boules noires parmi les n_2 boules noires : $\binom{n_2}{p_2}$.

Finalement, le nombre de tels tirages est égal à $\binom{n_1}{p_1} \binom{n_2}{p_2}$.

2. Un tirage est une succession de p boules numérotées. Pour obtenir p_1 boules blanches et p_2 noires, il faut :

- * choisir la position des boules blanches : $\binom{p}{p_1}$ possibilités,
- * choisir les numéros (distincts) des boules blanches : $n_1 \times (n_1 - 1) \times \dots \times (n_1 - p_1 + 1) = \frac{n_1!}{p_1!}$ possibilités,
- * choisir les numéros (distincts) des boules noires sur les emplacements restants : $\frac{n_2!}{p_2!}$ possibilités.

Finalement, le nombre de tels tirages est égal à :

$$\binom{p}{p_1} \times \frac{n_1!}{p_1!} \times \frac{n_2!}{p_2!}.$$

3. Un tirage est une succession de p boules numérotées. Pour obtenir p_1 boules blanches et p_2 noires, il faut :

- * choisir la position des boules blanches : $\binom{p}{p_1}$ possibilités,
- * choisir les numéros des boules blanches : $n_1^{p_1}$ possibilités,
- * choisir les numéros des boules noires sur les emplacements restants : $n_2^{p_2}$ possibilités.

Finalement, le nombre de tels tirages est égal à :

$$\binom{p}{p_1} \times n_1^{p_1} \times n_2^{p_2}.$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. Lorsque toutes les figurines sont de la même couleur, il y a une unique façon de les arranger.

2. Pour aligner les figures il faut choisir :

- * la position des 2 figures rouges : $\binom{20}{2}$ façons,
- * les figures blanches sont placées sur les emplacements restants.

Il y a ainsi $\binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$ alignements possibles.

3. Pour aligner les figures il faut choisir :

- * la position des 3 figures jaunes : $\binom{20}{3}$ possibilités,
- * la position des 5 figures rouges sur les emplacements restants : $\binom{17}{5}$ possibilités,
- * les figures blanches sont placées sur les emplacements restants.

Le nombre d'alignements possibles est donc égal à

$$\begin{aligned} \binom{20}{3} \times \binom{17}{5} &= \frac{20!}{3!12!5!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13}{6^2} \\ &= 19 \times 17 \times 8 \times 1514 \times 14 \times 13 = 7\,054\,320. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. Pour avoir une seule paire dans une main de 5 cartes, on choisit :

- * la valeur faciale de la paire : 13 possibilités,
- * les deux couleurs de chacune des cartes de la paire : $\binom{4}{2}$ possibilités,
- * les valeurs des autres cartes qui doivent être distinctes et distinctes de celles de la paire : $\underbrace{\binom{12}{3}}_{\text{possibilités}},$
- * les couleurs des autres cartes : 4^3 possibilités.

Le nombre de mains emportant exactement une paire est donc égal à :

$$13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1\,098\,240.$$

2. Pour avoir 5 cartes consécutives (indépendamment de la couleur), on choisit :

- * la plus petite des cartes qui doit être choisie parmi les cartes de 1 à 10 : 10 possibilités,
- * la couleur de chacune des cartes : 4^5 .

Le nombre de mains comportant une suite de 5 cartes est donc égal à :

$$10 \times 4^5 = 10\,240.$$

3. Pour avoir 2 paires distinctes de cartes, on choisit :

- * la valeur faciale de chacune des paires : $\binom{13}{2}$ possibilités,
- * la couleur de chacune des cartes de la première paire : $\binom{4}{2}$ possibilités,
- * la couleur de chacune des cartes de la seconde paire : $\binom{4}{2}$ possibilités,
- * la valeur faciale de la carte restante : 11 possibilités,
- * la couleur de la carte restante : 4 possibilités.

Le nombre de mains comportant exactement 2 paires de valeurs distinctes est donc égal à

$$\binom{13}{2} \binom{4}{2}^2 \times 11 \times 4 = 123\,552.$$

4. Pour avoir 5 cartes de la même couleur, on choisit :

- * la couleur des cartes : 4 possibilités,
- * les 5 cartes de cette couleur : $\binom{13}{5}$ possibilités.

Au final, le nombre de mains comportant 5 cartes de la même couleur est égal à

$$4 \binom{13}{5} = 5148.$$

La probabilité vaut environ 0.00198.

(on pourrait vouloir ici soustraire les 40 quintes flushes)

□

Solution de l'exercice 9. On modélise le problème en numérotant les figurines de 1 à 20.

1. On suppose que les oiseaux sont les figurines numérotées 1 et 2. Pour qu'elles soient côte à côte, il suffit de choisir :

- * les positions $(i, i+1)$ qu'elles prennent dans l'alignement : 19 possibilités,
- * la position de la figure 1 et celle de la figure 2 sur ces 2 emplacements : 2 possibilités,
- * la position des 18 figurines restantes sur les emplacements restants : $18!$ possibilités.

Le nombre d'alignements est donc égal à

$$19 \cdot 2 \cdot 18!.$$

Étant donné qu'il y a $20!$ alignements distincts, la proportion des alignements où les 2 oiseaux sont côte à côte est donc égale à :

$$\frac{2 \cdot 19!}{20!} = \frac{1}{10}.$$

2ème méthode. On place les deux oiseaux côte à côte. Ensuite,

- * l'animal suivant peut être placé soit à gauche soit à droite du couple ;
- * l'animal suivant a 3 positions possibles ;
- * ...

Ainsi, le nombre de positions est égal à (en comptant qu'il y a deux manières de constituer le couple d'oiseaux) :

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 19$$

2. On étudie l'événement complémentaire où tous les oiseaux ont au moins une figurine entre eux. Il y a 5 oiseaux et 15 figurines d'autres animaux.

- * Soit le dernier oiseau est en dernière position. Il faut alors placer 4 couples (oiseau, autre) et 11 (autres) parmi les 19 places restantes, i.e. $\binom{15}{4}$. Il y a, pour chacune de ces positions, $5! \cdot 11!$ manières de disposer les figurines sur ces positions.

- * Sinon, il y a 5 couples (oiseau, autre) et 10 (autres) à disposer parmi les 20 places, i.e. $\binom{15}{5}$. Il y a, pour chacune de ces positions, $5! \cdot 15!$ manières de disposer les figurines sur ces positions.

Ainsi, le nombre d'alignements où deux oiseaux sont côte à côte est égal à :

$$20! - 5! \cdot 15! \left(\binom{15}{4} + \binom{15}{5} \right).$$

2ème méthode. On note o_1 (resp. o_2, \dots, o_5) la position du premier (resp. deuxième, ..., cinquième) oiseau dans l'alignement. On note n_i le nombre d'animaux (non oiseaux) alignés avant la position o_i . Alors, en notant $i_j = n_1 + \dots + n_j$, on obtient

$$0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq 15.$$

Ainsi, il y a

- * $\binom{16}{5}$ manières de choisir le quintuplet (i_1, \dots, i_5) donc les positions des oiseaux.
- * $5!$ façons de choisir les oiseaux qui vont sur ces positions,
- * $15!$ façons de choisir les animaux qui vont sur les positions restantes.

Le nombre d'alignements où il y a deux oiseaux côte à côte est donc égal à

$$20! - \binom{16}{5} \times 15! \times 5! = 20! - \frac{16! \times 15!}{11!}.$$

3ème méthode. On place les animaux itérativement :

- * on place les animaux qui ne sont pas des oiseaux : 15! possibilités,
- * on place le premier oiseau dans cette succession (en comptant les extrémités) : 16 possibilités,
- * on place le second oiseau, mais pas à côté du premier : 15 places,
- * ...
- * on place le cinquième oiseau, mais pas à côté des précédents : 12 possibilités.

On obtient ainsi $20! - 15! \cdot 16 \cdots 12 = \frac{15! \cdot 16!}{11!}$ placements possibles.

La proportion des alignements où deux oiseaux sont côte à côte est donc égale à

$$1 - \frac{15! \cdot 16!}{11! \cdot 20!} = \frac{232}{323}$$

□

II - Coefficients binomiaux

Solution de l'exercice 10.

1. Constituer une équipe revient à choisir k étudiants parmi les $n + p$ étudiants de la filière D2. Il y a ainsi $\binom{n+p}{k}$ équipes différentes qui peuvent être constituées.

2. Dans l'équipe de k étudiants, si j sont en 1^{re} année, les $k - j$ restants sont en 2^e année. On choisit donc :

- * j étudiants en 1^{re} année : $\binom{n}{j}$ possibilités,
- * $k - j$ étudiants en 2^e année : $\binom{p}{k-j}$ possibilités.

Le nombre d'équipes où j étudiants sont en 1^{re} et $k - j$ étudiants sont en 2^e année est donc égal à $\binom{n}{j} \times \binom{p}{k-j}$.

3. Pour constituer l'équipe, on a deux façons de faire :

- * soit on choisit directement k étudiants parmi les $n + p$, soit $\binom{n+p}{k}$ possibilités,
- * soit on commence par choisir le nombre $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ d'étudiants de 1^{re} année qui constitueront l'équipe. Il y a alors $\binom{n}{j} \binom{p}{k-j}$ équipes possibles. Comme j varie entre 0 et k , le nombre d'équipes possibles est égal à

$$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{p}{k-j}.$$

Finalement, on a utilisé deux stratégies pour compter le même nombre d'équipes et

$$\binom{n+p}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{p}{k-j}.$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. Effectuer un tirage revient à extraire $k + 1$ éléments d'un ensemble à $n + 1$ éléments. Le nombre de tirages possibles est donc égal à $\binom{n+1}{k+1}$.

2. a) Le numéro 1 étant choisi, les autres boules doivent être choisies comme une partie de $\{2, \dots, n + 1\}$. Il y a ainsi $\binom{n}{k}$ tirages possibles.

b) Le numéro 2 étant choisi, les autres boules doivent être choisies comme une partie de $\{3, \dots, n + 1\}$. Il y a ainsi $\binom{n-1}{k}$ tirages possibles.

c) Le numéro k étant choisi, les autres boules doivent être choisies comme une partie de $\{k + 1, \dots, n + 1\}$. Il y a ainsi $\binom{n+1-k}{k}$ tirages possibles.

3. Sachant que $k + 1$ boules sont extraites de l'urne,

- * soit le plus petit numéro tiré est égal à 1,
- * soit le plus petit numéro tiré est égal à 2,
- * ...,
- * soit le plus petit numéro tiré est égal à $n - k + 1$.

Ainsi, en reprenant les résultats de la question précédente,

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n-j+1}{k} = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k}.$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. Pour choisir un k -uplet où les répétitions sont possibles, on choisit :

- * le premier élément du k -uplet : n possibilités,
- * le deuxième élément du k -uplet : n possibilités,
- * ...,
- * le dernier élément du k -uplet : n possibilités.

Finalement, le nombre de k uplet avec répétitions éventuelles est égal à n^k .

Remarque. Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des fonctions de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

2. Pour choisir un k -uplet où les répétitions sont impossibles, on choisit :

- * le premier élément du k -uplet : n possibilités,
- * le deuxième élément du k -uplet, distinct du précédent : $n - 1$ possibilités,
- * ...,
- * le dernier élément du k -uplet, distinct des précédents : $n - k + 1$ possibilités.

Finalement, le nombre de k -uplets sans répétition est égal à

$$n \times (n - 1) \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Remarque. Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des applications injectives de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

3. Soit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Alors, $\{i_1, \dots, i_k\}$ est une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments.

Réciproquement, si on considère une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments, il existe une unique manière de les ordonner de manière strictement croissante.

Ainsi, cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments. Son cardinal est donc égal à : $\binom{n}{k}$. \square

III - Compter autrement

Solution de l'exercice 13.

1. Pour les petites valeurs de n :

- * il existe un unique mur constitué d'une brique, donc $M_1 = 1$.
- * il existe deux murs constitués de deux briques : soit les briques sont côte à côte, soit elles sont l'une sur l'autre. Ainsi, $M_2 = 2$.
- * en décrivant le mur selon le nombre de briques par colonnes, on obtient les combinaisons : 3, 2/1, 1/2, 1/1/1. Ainsi, $M_3 = 4$.

2. On peut conjecturer que $M_n = 2^{n-1}$.

3. Étant donné un mur, on pose la première brique au sol. La deuxième sera soit sur la première, soit à côté. La troisième sera soit sur la deuxième, soit sur le sol juste à droite. La quatrième sera soit sur la troisième, soit sur le sol juste à droite,...

Un mur peut ainsi être décrit par une succession d'instructions *dessus*, *sol* décrivant la position des briques à partir de la deuxième.

4. Comme la succession de *dessus* / *sol* permet de construire 2^{n-1} , il y a 2^{n-1} murs possibles et $M_n = 2^{n-1}$.

5. La première colonne de briques est constituée d'un nombre k de briques variant entre 1 et n . La suite des colonnes constitue ensuite un mur contenant $n - k$ briques.

Ainsi, en effectuant le changement de variables $j = k - 1$,

$$M_n = \sum_{k=1}^n M_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} M_j.$$

\square

Solution de l'exercice 14.

1. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{C}_{0,p}$. Alors, $\sum_{i=1}^p u_i = 0$. Comme une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul, alors $u_1 = \dots = u_p = 0$.

Ainsi, $\mathcal{C}_{0,p} = \{(0, \dots, 0)\}$ et $C_{0,p} = 1$.

2. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{C}_{1,p}$. Alors, $\sum_{i=1}^p u_i = 1$ donc il existe un entier i_0 tel que $u_{i_0} = 1$ et pour tout $i \neq i_0$, $u_i = 0$.

Ainsi, $\mathcal{C}_{1,p} = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$ et $C_{1,p} = p$.

3. Étant donné $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{C}_{n,p}$, on construit la suite de symboles :

$$\underbrace{\circ \dots \circ}_{u_1 \text{ symboles}} \mid \underbrace{\circ \dots \circ}_{u_2 \text{ symboles}} \mid \dots \mid \underbrace{\circ \dots \circ}_{u_p \text{ symboles}},$$

On associe ainsi à tout élément de $\mathcal{C}_{n,p}$ une unique succession de symboles \circ et \mid contenant exactement $\sum_{i=1}^n u_i = n$ symboles \circ et $p - 1$ symboles \mid .

4. D'après la question précédente, à tout élément de $\mathcal{C}_{n,p}$ est associée une unique suite de $n + p - 1$ symboles constituée d'exactly n symboles \circ et $p - 1$ symboles \mid .

Il y a ainsi autant de suites différentes que de façon de placer les n symboles \circ parmi les $n + p - 1$ symboles. Finalement,

$$C_{n,p} = \binom{n+p-1}{n}.$$

\square

Solution de l'exercice 15. 1^{re} méthode. On commence par distinguer en fonction du cardinal de Y . Si Y est de cardinal $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il y a 2^r parties X de E telles que $X \subset Y$.

Ainsi, en utilisant le cardinal d'une union disjointe et en notant $\mathcal{P}_r(E)$

les parties de E à k éléments,

$$\begin{aligned} |E| &= \sum_{r=0}^n \sum_{Y \in \mathcal{P}_r(E)} 2^r \\ &= \sum_{r=0}^n 2^r |\mathcal{P}_r(E)| \\ &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 2^r \\ &= 3^n, \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

2^e méthode. Définir $X \subset Y \subset E$ revient, pour chaque élément de E , à choisir :

- * s'il appartient à X et à Y ,
- * s'il appartient à Y mais pas à X ,
- * s'il n'appartient ni à X ni à Y .

Ainsi, pour chaque élément de E , on a 3 possibilités et le nombre de parties telles que $X \subset Y \subset E$ est égale à

$$\underbrace{3 \times \cdots \times 3}_{n \text{ facteurs}} = 3^n.$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. Décrire une relation binaire \mathcal{R} sur E revient à indiquer, pour tout couple $(x, y) \in E^2$ si $x\mathcal{R}y$ ou si $x \not\mathcal{R}y$. Ainsi, pour chaque couple, il y a 2 possibilités. Comme il y a n^2 couples, le nombre de relations binaires est donc égal à 2^{n^2} .

On peut représenter ces relations binaires dans un tableau, où si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, on indique un 1 à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne si et seulement si $x_i\mathcal{R}x_j$.

2. Si la relation est symétrique et $x_i\mathcal{R}x_j$, alors $x_j\mathcal{R}x_i$. Ainsi, la détermination du tableau précédent pour un numéro de colonne supérieur ou égal au numéro de la ligne, permet de construire automatiquement l'autre partie du tableau.

Dans le demi-tableau supérieur, le nombre de cases est égal à

$$n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ainsi, le nombre de relations binaires symétriques est égal à $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

3. Si la relation est symétrique et réflexive, le tableau contient des 1 sur sa diagonale principale (par réflexivité : $x_i\mathcal{R}x_i$) et la détermination de la partie supérieure permet de définir la partie inférieure (par symétrie). Dans le demi-tableau strictement supérieur, le nombre de cases est égal à

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Ainsi, le nombre de relations binaires symétriques et réflexives est égal à $2^{\frac{(n-1)n}{2}}$.

4. Si la relation est réflexive, le tableau contient des 1 sur toute sa diagonale principale car $x_i\mathcal{R}x_i$.

Si la relation est antisymétrique, alors

$$x_i\mathcal{R}x_j \text{ et } x_j\mathcal{R}x_i \Rightarrow i \neq j.$$

Ainsi, si $i \neq j$,

- * soit la case (i, j) vaut 0 et la case (j, i) vaut 0,
- * soit la case (i, j) vaut 1 et la case (j, i) vaut 1,
- * soit la case (i, j) vaut 0 et la case (j, i) vaut 0.

Ainsi, pour chaque case (i, j) telle que $i < j$, il y a 3 possibilités.

Le nombre de relations réflexives et antisymétriques est donc égal à $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$. □