T.P. IV - Suites...

Code Capytale: 7db3-1087927

I - Ce qu'il faut savoir

II - ... définies en fonction de l'indice

Solution de l'exercice 1.

1. En factorisant le numérateur, on obtient

$$c_n = 2 - \frac{3^n}{4^{n-1}} \left(1 + \frac{25}{3^n} \right)$$
$$= 2 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \times 4 \times \left(1 + \frac{25}{3^n} \right).$$

Comme $3^n \to +\infty$, alors $1 + \frac{25}{3^n} \to 1$. Comme $\frac{3}{4} \in]0, 1[$, alors $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$.

D'après les théorèmes d'addition des limites,

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = 2.$$

2. Avant la boucle conditionnelle, n contient la valeur 1 et c la valeur c_1 . Ensuite, on incrémente n et on calcule les valeurs de c_n . La boucle s'arrête dès que $c_n \ge 1.95$. Ainsi, la valeur renvoyée est le plus petit rang n pour lequel $c_n \ge 1.95$. Ce plus petit rang vaut donc 16.

Solution de l'exercice 2.

1.

```
import matplotlib.pyplot as plt  \begin{split} \textbf{def} \ c(n) \colon \\ \textbf{return} \ 1 \ - \ (2**n \ - \ 1)/3**(n \ - \ 1) \end{split}
```

```
X = range(5, 22)
Y = [c(n) for n in X]

plt.figure()
plt.plot(X, Y, '.')
plt.show()
```

2. Le plus petit entier naturel n pour lequel $c_n \ge 0.95$ est égal à 11. \square

Solution de l'exercice 3. [D'après Ecricome - 2022 - Exercice 1]

```
\begin{array}{l} n = 0 \ \# \ contient \ la \ valeur \ 0 \\ a = 1 \ \# \ contient \ la \ valeur \ a\_0 \\ b = -1/3 \ \# \ contiente \ la \ valeur \ b\_0 \\ \hline \textbf{while} \ a > 0.334 \ \textbf{or} \ b < 0.333 \colon \\ \# \ s'arr\'ete \ d\`es \ que \ a <= 0.334 \ et \ b >= 0.333 \\ n = n + 1 \ \# \ calcule \ la \ valeur \ suivante \ de \ n \\ a = 1/3 \ * \ (1 + 2/4**n) \ \# \ contient \ a\_n \\ b = 1/3 \ * \ (1 - 2/4**n) \ \# \ contient \ b\_n \\ \hline \\ \textbf{print} \ (n) \end{array}
```

III - ... récurrentes simples

Solution de l'exercice 4.

1. Ne pas oublier que range(a, b) est la liste des entiers compris entre a et b-1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def u(n):
    u = 1 # contient u_0
    for i in range(1, n+1): # i varie de 1 à n
```

```
u = u / 2 + 3 # contient u_i
return u

n = 20
X = np.arange(0, n+1, 1) # entiers de 0 à 20
Y = [u(n) for n in X] # contient u_0,..., u_20

plt.figure()
plt.plot(X, Y, 'o') # trace le graphique
plt.show() # affiche le graphique
```

2.

```
\begin{array}{l} {\rm n} = 0 \ \# \ contient \ 0 \\ {\rm c} = 1 \ \# \ contient \ u\_0 \\ {\rm while} \ {\rm c} < 5.5 \colon \\ {\rm \# \ s \ 'arr\'ete \ d\`es \ que \ c} >= 5.5 \\ {\rm c} = {\rm c}/2 \ + \ 3 \ \# \ calcule \ c\_(n-1) \\ {\rm n} = {\rm n} \ + \ 1 \ \# \ calcule \ la \ valeur \ suivante \ de \ n \\ \\ {\rm print (n)} \end{array}
```

IV - ... récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Solution de l'exercice 5.

1.

```
import numpy as np

n = 5
u = 1 # contient la valeur u_0

for k in range(1, n+1): # k varie de 1 à 5
        u = np.log(1 + u**2) # contient u_k

print(u)
```

2. Le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n < 0.0001$ est égal à 6.

Solution de l'exercice 6. [D'après ESCP BSB - 2016 - Exercice 2] 1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
U = np.ones((21, 1)) \# U matrice \grave{a}
21 lignes et 1 colonne qui ne contient que des 1
\#U[0] = 1 \# on \ stocke \ u \ 0 \ dans \ U[0]
\#U[1] = np. log(1 + 1) \# on stocke u 1 dans U[1]
\#U[2] = np.log(U[1] + 1) \# on stocke u 2 dans U[2]
\#U[3] = np.log(U[2] + 1) \# on stocke u 3 dans U[3]
for i in range(1, 21): # pour i variant de 1 à 20
    U[i] = np.log(U[i-1] + 2) \# U[i] contient u i
X = \text{np.arange}(0, 21, 1) \# liste les entiers 0 à 20
plt.figure() # Cree une figure
\# ordonnées des points à tracer : [u 0,..., u 20],
# stockée dans U
plt.plot(X, U, '+') # Trace les points
plt.grid()
plt.show()
```

2. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante. On peut constater que cette valeur limite est solution de l'équation $\ell = g(\ell)$. Ainsi, le point ℓ est l'abscisse du point d'intersection entre la droite d'équation y = x et la courbe représentative de q:

```
def g(x):
    return np.log(x + 2)

X = np.arange(1, 2, 0.001)
Y = [g(x) for x in X]
plt.figure()
plt.plot(X, Y, 'r') # graphe de g
plt.plot(X, X, 'b') # graphe de la droite y = x
plt.grid()
plt.show()
```

Solution de l'exercice 7. [D'après Ecricome - 2020 - Exercice 2]

Lycée Ozenne 10 A. Camanes

 \Box

```
def f(x):
    return x/(1 + x + x**2)

u = 1 # u contient la valeur de u_0
n = 0 # n contient la valeur 0
while u > 1/1000:
    u = f(u) # u contient la valeur u_(n+1)
    n = n + 1 # calcule l'indice suivant

print(n)
```

V - ... récurrentes dépendant du rang

Solution de l'exercice 8.

Solution de l'exercice 9. [D'après Ecricome - 2016 - Exercice 2]

```
\begin{array}{l} \textbf{import numpy as np} \\ \\ \textbf{n} = 10 \\ \\ \textbf{I} = 1 \ \# \ contient \ la \ valeur \ de \ I\_0 \\ \\ \# \ I = 1/np. \ exp \ (1) \ + \ 1 \ * \ I \ \# \ contient \ la \ valeur \ de \ I\_1 \\ \\ \# \ I = 1/np. \ exp \ (1) \ + \ 2 \ * \ I \ \# \ contient \ la \ valeur \ de \ I\_2 \\ \end{array}
```

П

VI - ... imbriquées

Solution de l'exercice 10.

```
n = 50
u = 0
v = 1
for k in range(1, n+1):
    u = (u + v)/2
    v = (u + v)/2

print("u50", u)
print("v50", v)
```

Solution de l'exercice 11. [D'après BCE ESCP - 2017 - Exercice 2]

1.

```
import numpy as np
n = 10
u = 1
v = 2
for k in range(2, n+1):
    a = u
    u = u**2/(u + v)
    v = v**2/(u + v)
print("u10", u)
print("v10", v)
```

2.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
n = 10
u = 1
v = 2
s = np.zeros((n+1, 1))
s[1] = u
for k in range(2, n+1):
    a = u
    u = u**2/(u + v)
    v = v**2/(u + v)
    s[k] = u

X = np.arange(0, n+1)
Y = np.cumsum(s)
plt.figure()
plt.plot(X, Y)
plt.show()
```

a) La variable **s** contient la liste des termes 0, u_1, u_2, \ldots, u_{10} . La variable **y** contient la liste des termes 0, $u_1, u_1+u_2, \ldots, u_1+\cdots+u_{10}$.

3. On peut conjecturer que la série $\sum u_n$ converge vers 2,4.

VII - ... récurrentes doubles

Solution de l'exercice 12. La variable sert à stocker la valeur de u avant qu'on ne la modifie. Ainsi, à l'issue du i^e passage dans la boucle, u contient la valeur de u_i et v contient la valeur de u_{i-1} .

```
v = 0
u = 1
for i in range(2, 11):
    a = u
    u = 4 * u + 2 * v
    v = a
print(u)
```

VIII - ... & fonctions : la dichotomie

Solution de l'exercice 13.

1. La fonction h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$h'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^4} = \frac{3}{x^4}(x^6 - 1)$$
$$= \frac{3}{x^4}(x^3 - 1)(x^3 + 1).$$

D'une part, $\frac{3}{r^4} > 0$.

D'autre part, comme x > 0, alors $x^3 + 1 > 0$.

Enfin, $x^3 - 1 \ge 0$ si et seulement si $x^3 \ge 1$ si et seulement si $x \ge 1$.

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
h'(x)		_	0	+	
h(x)			-1		*

2. Comme $\lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$, alors $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$. D'après les théorèmes d'addition des limites, $\lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$.

D'après la définition de h, h(1) = -1.

La fonction h est continue et strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$. Comme $0 \in [-1, +\infty[$, il existe un unique réel α tel que $h(\alpha) = 0$.

3. Comme $h(2) = 2^3 + \frac{1}{2^3} - 3 = 5 + \frac{1}{8}$, alors $\alpha \le 2$. On cherche donc α entre 1 et 2.

def h(x):
return x**3 + 1/x**3 - 3
a = 1
b = 2
while (b - a) >
$$10**(-5)$$
:

```
egin{array}{lll} \mathbf{m} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2 \\ & \mathbf{if} \ \mathbf{h}(\mathbf{m}) * \mathbf{h}(\mathbf{a}) <= 0: \\ & \mathbf{b} = \mathbf{m} \\ & \mathbf{else}: \\ & \mathbf{a} = \mathbf{m} \\ & \mathbf{print}(\mathbf{a}) \end{array}
```