T.D. I - Études de fonctions

I - Inégalités

Exercice 1. Montrer que pour tout n entier naturel non nul,

$$\frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n \ln(2).$$

II - Étude de trinômes

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto x^2 + x + 1$. Étudier le signe de f.

Exercice 4. Soit h définie pour tout $x > 0$ par $h(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2}$. Déterminer, en fonction de x, le signe de $h(x)$.

Exercice 5. Soit $f : x \mapsto \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$. Déterminer, en fonction de x, le signe de $f(x)$.

III - Étude de signes

Exercice 6. Soit g la fonction définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = 1-\ln(x)$. Dresser le tableau de signes de g.

Exercice 7. Soit g la fonction définie pour tout $x \in]-1,+\infty[$ par $g(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$. Dresser le tableau de signe de g.

Exercice 8. Soit g la fonction définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = \frac{-3+2\ln(x)}{x^3}$. Dresser le tableau de signes de g.

Exercice 9. Soit $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$. Dresser le tableau de signes de f.

Exercice 10. Soit f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer le signe de f.

IV - Calculs de dérivées

Exercice 11. Pour tout x réel, on pose $h(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$. Déterminer la dérivée de h.

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

1. Montrer que la dérivée de f vérifie pour tout x réel, $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

2. En déduire le tableau de variations de f.

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

4. Calculer la dérivée seconde f'' de f.

Exercice 13. Soit f la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}$.

1. Dresser le tableau de variations de f.

2. Déterminer le nombre de réels λ tels que $f(\lambda) = 0$.

Exercice 14. Soit $f : x \mapsto \ln(x^2+x+1)$.

1. Déterminer la dérivée f' de f.

2. Déterminer la dérivée seconde de f'' de f.

Exercice 15. Soit f la fonction définie pour tout $x \in]-1,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(1+x)$.

1. Déterminer la dérivée f' de f.

2. Déterminer la dérivée seconde de f'' de f.

Exercice 16. Soit f définie pour tout $x \geqslant 1$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Déterminer la dérivée f' de f.

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\mathrm{e}^{3/2}$.

3. Déterminer la dérivée f'' de f.

V - Calculs de limites

Exercice 17. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Montrer que pour tout x réel $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Interpréter graphiquement ce résultat ?

Exercice 18. Soit f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Exercice 19. Soit h définie pour tout $x > 0$ par $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$.

1. Factoriser l'expression de $h(x)$ par le réel $\frac{1}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

2. Factoriser l'expression de $h(x)$ par le réel x. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Exercice 20. Soit g définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = x - \ln(x)$.

1. Calculer $g(1)$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Exercice 21. Soit $f : x \mapsto \ln(x^2+x+1)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

VI - Limites à droite / à gauche

Exercice 22. Soit n un entier naturel non nul et f_n définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} nt^{n-1} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les limites à gauche et à droite de f_n en 0.

2. Déterminer les limites à gauche et à droite de f_n en 1.

Exercice 23. Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Déterminer les limites à gauche et à droite de f en 0.

Exercice 24. Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25. Soit k un réel non nul. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} k\frac{t}{1+t} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.