

# T.D. IV - Espaces vectoriels

## I - Systèmes linéaires

**Exercice 1.** Résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{array}{ll}
 1. (\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 2 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases} & 4. (\mathcal{S}_4) \begin{cases} x + y + z = 5 \end{cases} \\
 2. (\mathcal{S}_2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases} & 5. (\mathcal{S}_5) \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases} \\
 3. (\mathcal{S}_3) \begin{cases} 2x - y + 4z = 2 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases} & 6. (\mathcal{S}_6) \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 8 \\ -x + 2y + 4z = -11 \end{cases}
 \end{array}$$

**Exercice 2.** Identifier les réels  $\lambda$  pour lesquels le système d'équations suivant possède une solution.

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

## II - Familles de vecteurs

**Exercice 3. (Familles libres)** Montrer que les familles suivantes sont libres :

- $((-1, -1, 1, 2), (1, -1, 1, 5)).$
- $((8, 4, 1, -2), (1, 3, 0, 5)).$
- $((1, 1, 3, 2), (1, -1, 1, 3), (0, 1, 5, 2)).$
- $((1, 2, 3, 4), (-1, 3, 2, 1), (2, 1, -1, 1)).$

**Exercice 4. (Familles génératrices)** Déterminer une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

- $F = \{(2\lambda, -\lambda, -3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}.$
- $F = \{(2\lambda, 0, -3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}.$
- $F = \{(2\lambda + \mu, 2\mu, 3\lambda - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$
- $F = \{(2\lambda + \mu, 5\lambda + 2\mu, 3\lambda - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$

**Exercice 5. (Bases)** Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x - 3y + z = 0\}.$
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 4x + y + z = 0 \text{ ET } 3x + z = 0\}.$
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y - z = 0 \text{ ET } 2x + 3y + z = 0 \text{ ET } 5x + 5y + z = 0\}.$
- $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ x + y - t = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \right\}.$

**Exercice 6. (Équations cartésiennes)** Pour chacune des questions suivantes, déterminer une équation cartésienne de l'espace vectoriel.

- Vect  $\{(1, 1, 2), (1, 0, 1)\}.$
- Vect  $\{(1, 2), (4, 6)\}.$
- Vect  $\{(1, 0, 1), (2, 3, 1)\}.$
- Vect  $\{(1, 1, 1)\}.$

**Exercice 7. (Coordonnées)**

- Montrer que  $\mathcal{B}_1 = ((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer les coordonnées du vecteur  $(8, 4, 2)$  dans cette base.
- Montrer que  $\mathcal{B}_2 = ((-1, -1, 1), (1, -1, 1), (2, 2, -1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer les coordonnées du vecteur  $(8, 4, 2)$  dans cette base.
- Soit  $\mathcal{B} = ((-1, -1, 1), (2, 2, -1))$  et  $F = \text{Vect } \mathcal{B}$ . Déterminer les coordonnées de  $(3, 3, -1)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

### III - Questions plus théoriques

**Exercice 8.** Soit  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Montrer que  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
2. On note  $F + G = \{f + g, (f, g) \in F \times G\}$ . Montrer que  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
3. Montrer que, en général,  $F \cup G$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

*Indication : Exhiber un contre-exemple lorsque  $n = 2$ .*

**Exercice 9.** Soient  $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $u_2 = (1, 1, 1, 3)$ ,  $u_3 = (2, 1, 1, 1)$ ,  $u_4 = (-1, 0, -1, 2)$  et  $u_5 = (2, 3, 0, 1)$ . On considère les sous-espaces vectoriels  $U, V$  de  $\mathbb{R}^4$  définis par  $U = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$  et  $V = \text{Vect}\{u_4, u_5\}$ . Quelles sont les dimensions de  $U, V, U \cap V$  et  $U + V$  ?

**Exercice 10.** Soit  $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + \dots + x_n = 0\}$ . Déterminer la dimension et une base de  $F$ .