

III - Récurrences

À Savoir

Le raisonnement par récurrence se déroule en 3 étapes principales.

- * On énonce clairement la propriété à démontrer. Cette propriété doit dépendre d'un entier naturel noté n .
- * **L'initialisation.** On montre la propriété lorsque $n = 0$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel) ou lorsque $n = 1$ (si la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul).

Généralement, la propriété est une égalité. On montre alors que les deux membres de l'égalité sont égaux à une même valeur.

- * **L'hérédité.** On fixe un entier naturel n . On suppose la propriété vraie à l'ordre n (c'est l'hypothèse de récurrence). On montre que la propriété est vraie lorsque n est remplacé par $(n + 1)$ (ne pas oublier le parenthésage).

Généralement, on part d'un côté de l'égalité et on arrive à l'autre côté. Une des étapes du calcul utilise l'hypothèse de récurrence.

- * **Conclusion.** On conclut clairement en citant l'initialisation, l'hérédité et le principe de récurrence.

I - Calculs de sommes

Exemple 1 - Somme des n premiers entiers non nuls

Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On note $P_n : \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^0 k = \frac{0(0+1)}{2}$. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 k &= 0 \\ \frac{0(0+1)}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons

que $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= 0 + 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\
&= [0 + 1 + \cdots + n] + (n+1), \text{ d'après les propriétés des sommes} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 2 - Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $q \neq 1$. Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

On note $P_n : \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^0 q^k = \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q}$. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^0 q^k &= q^0 = 1 \\
\frac{1 - q^{0+1}}{1 - q} &= \frac{1 - q}{1 - q} = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Montrons

que $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \\
&= [q^0 + q^1 + \cdots + q^n] + q^{n+1}, \text{ d'après les propriétés des sommes} \\
&= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q} \\
&= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - \overbrace{q \cdot q^{n+1}}^{q^{n+2}}}{1 - q} \\
&= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}
\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Solution de l'exercice 1. On note $P_n : \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^0 k^2 = \frac{0(0+1)(2 \times 0+1)}{6}$. Or,

$$\sum_{k=0}^0 k^2 = 0^2 = 0$$

$$\frac{0(0+1)(2 \times 0+1)}{6} = 0$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \\ &= [0^2 + 1^2 + \dots + n^2] + (n+1)^2, \text{ d'après les propriétés des sommes} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{n+1}{6} [n(2n+1) + 6(n+1)] \\ &= \frac{n+1}{6} [2n^2 + n + 6n + 6] \\ &= \frac{n+1}{6} [2n^2 + 7n + 6] \\ &= \frac{n+1}{6} (n+2)(2n+3), \text{ car } (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6 \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□

Solution de l'exercice 2. On note $P_n : \sum_{k=0}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $\sum_{k=0}^0 k^3 = \left[\frac{0(0+1)}{2} \right]^2$. Or,

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0$$

$$\left[\frac{0(0+1)}{2} \right]^2 = 0$$

Ainsi, P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$. Montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2. \text{ Or,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 \\ &= [0^3 + 1^3 + \dots + n^3] + (n+1)^3, \text{ d'après les propriétés des sommes} \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2^2} [n^2 + 4(n+1)] \\ &= \frac{(n+1)^2}{2^2} [n^2 + 4n + 4] \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \times (n+2)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

□

Solution de l'exercice 3. Notons $P_n : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $(a + b)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$.

Or,

$$(a + b)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Mon-

trons que $(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$. Or,

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n (a + b), \text{ d'après la définition des puissances} \\ &= \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right] (a + b), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \text{ par distributivité} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}, \text{ par distributivité} \\ &= \sum_{k+1=1}^{k+1=n+1} \binom{n}{k+1-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n+1-\ell} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}, \text{ en posant } \ell = k + 1 \\ &= \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n+1-\ell} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}, \text{ d'après le triangle de Pascal} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier

naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

□

II - Inégalités

Exemple 3 - Inégalité de Bernoulli

Soit $x > 0$. Montrons que, pour tout $n \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

On note $P_n : (1+x)^n \geq 1+nx$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $(1+x)^0 \geq 1+0x$. Or,

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &= 1 \\ 1+0x &= 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(1+x)^n \geq 1+nx$. Montrons que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. En effet,

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \times (1+x), \text{ d'après la définition des puissances} \\ &\geq (1+nx) \times (1+x), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &\geq 1+x+nx+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x, \text{ car } nx^2 \geq 0\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Exemple 4 - Suite & Encadrement

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq 5$.

On note $P_n : 0 \leq u_n \leq 5$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $0 \leq u_0 \leq 5$.

$u_0 = 3 \in [0, 5]$, donc P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leq u_n \leq 5$. Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 5$. En effet,

$$\begin{aligned}0 &\leq u_n \leq 5, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ 15 &\leq u_n + 15 \leq 20 \\ \sqrt{15} &\leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{20}, \text{ la fonction racine étant croissante} \\ 0 &\leq \sqrt{15} \leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{20} \leq \sqrt{25}, \text{ car } 20 \leq 25 \\ 0 &\leq u_{n+1} \leq 5, \text{ d'après la définition de } u_{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 5.$$

Solution de l'exercice 4. On note $P_n : u_n \leq 3$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 \leq 3$.

Or, $u_0 = 3 \leq 3$, donc P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leq 3$. Montrons que $u_{n+1} \leq 3$. En effet,

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \sqrt{u_n + 6}, \text{ d'après la définition de } (u_n) \\ &\leq \sqrt{3 + 6}, \text{ d'après l'H.R. et la croissance de la fonction racine} \\ &\leq \sqrt{9} \\ &\leq 3.\end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3.$$

□

Solution de l'exercice 5. On note $P_n : 4 \leq u_n \leq 10$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $4 \leq u_0 \leq 10$.

$u_0 = 6 \in [4, 10]$, donc P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $4 \leq u_n \leq 10$. Montrons que $4 \leq u_{n+1} \leq 10$. En effet,

$$4 \leq u_n \leq 10, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$19 \leq u_n + 15 \leq 25$$

$$\sqrt{19} \leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{25}, \text{ la fonction racine étant croissante}$$

$$\sqrt{16} \leq \sqrt{19} \leq \sqrt{u_n + 15} \leq \sqrt{25} \leq \sqrt{100}, \text{ la fonction racine étant croissante}$$

$$4 \leq u_{n+1} \leq 10, \text{ d'après la définition de } u_{n+1}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4 \leq u_n \leq 10.$$

□

III - Suites définies par récurrence

Solution de l'exercice 6. On note $P_n : u_n = 5 + 3n$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = 5 + 3 \times 0$. Or,

$$u_0 = 5, \text{ d'après la définition}$$

$$5 + 3 \times 0 = 5$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 5 + 3n$. Montrons que $u_{n+1} = 5 + 3(n+1)$. En effet,

$$u_{n+1} = u_n + 3, \text{ d'après la définition}$$

$$= 5 + 3n + 3, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$= 5 + 3(n+1).$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5 + 3n.$$

□

Solution de l'exercice 7. On note $P_n : u_n = 3 \times 5^n$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = 3 \times 5^0$. Or,

$$u_0 = 3, \text{ d'après la définition}$$

$$3 \times 5^0 = 3 \times 1 = 3$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 3 \times 5^n$. Montrons que $u_{n+1} = 3 \times 5^{n+1}$. En effet,

$$u_{n+1} = 5 \times u_n, \text{ d'après la définition}$$

$$= 5 \times 3 \times 5^n, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$= 3 \times 5^{n+1}.$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 5^n.$$

□

Solution de l'exercice 8. On note $P_n : u_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Or,

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \text{ d'après la définition} \\ \frac{0(0+1)}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (n+1), \text{ d'après la définition} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right] \\ &= (n+1) \frac{n+2}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 9. On note $P_n : u_n = \sqrt{n+9}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \sqrt{0+9}$. Or,

$$\begin{aligned} u_0 &= 3, \text{ d'après la définition} \\ \sqrt{0+9} &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \sqrt{9+n}$. Montrons que $u_{n+1} = \sqrt{9+(n+1)} = \sqrt{n+10}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n^2}, \text{ d'après la définition} \\ &= \sqrt{1+n+9}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \sqrt{n+10} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{9+n}.$$

□

Solution de l'exercice 10. On note $P_n : u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$. Montrons que $u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1}$. Or,

$$\begin{aligned} u_0 &= 2, \text{ d'après la définition} \\ \frac{2}{2 \times 0 + 1} &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \frac{2}{2n+1}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}$. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n + 1}, \text{ d'après la définition} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2}{2n+1} + 1}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2+2n+1}{2n+1}} \\ &= \frac{2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2+2n+1} \\ &= \frac{2}{2+2n+1} \\ &= \frac{2}{2n+3}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n entier naturel, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}.$$

□