IX - Intégrales généralisées

I - Intégrales des fonctions continues

Définition 1 - Intégrale sur $[a,+\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a,+\infty[$.

- L'intégrale de f est *convergente* sur $[a,+\infty[$ si la fonction $F(y) = \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$.
- Si l'intégrale est convergente, on note
$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Si F n'admet pas de limite finie en $+\infty$, l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ est *divergente*.

Exemple 1 - Sur $[a,+\infty[$

- **Étude de** $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$**.** Soit $y>0$. Alors,
$$F(y) = \int_2^y \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^y = -\frac{1}{y} + \frac{1}{2}.$$
Ainsi, $\lim_{y\to+\infty} F(y) = \frac{1}{2}$. Donc, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
- **Étude de** $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$**.** Soit $y>0$. Alors,
$$F(y) = \int_2^y \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_2^y = \ln(t) - \ln(2).$$
Ainsi, $\lim_{y\to+\infty} F(y) = +\infty$. Donc, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Définition 2 - Intégrale sur $]-\infty,a]$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $]-\infty,a]$.

- L'intégrale de f est *convergente* sur $]-\infty,a]$ si la fonction $F(y) = \int_y^a f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $-\infty$.
- Si l'intégrale est convergente, on note
$$\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to-\infty} \int_y^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Si F n'admet pas de limite finie en $-\infty$, l'intégrale de f sur $]-\infty,a]$ est *divergente*.

Exemple 2 - Sur $]-\infty,a]$

- **Étude de** $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$**.** Soit $y<0$. Alors,
$$F(y) = \int_y^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_y^0 = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^y.$$
Ainsi, $\lim_{y\to-\infty} F(y) = 1$. Donc, $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ converge et
$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1.$$

- **Étude de $\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.** Soit $y < -1$. Alors,

$$F(y) = \int_y^{-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_y^{-1} = -\mathrm{e}^{1} + \mathrm{e}^{-y}.$$

Ainsi, $\lim_{y\to-\infty} F(y) = +\infty$. Donc, $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Définition 3 - Intégrale sur $]-\infty,+\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- L'intégrale de f est *convergente* sur $]-\infty,+\infty[$ si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.
- Si l'intégrale est convergente, on note

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Si l'une des intégrales $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, l'intégrale de f sur $]-\infty,+\infty[$ est *divergente*.

Exemple 3 - Sur $]-\infty,+\infty[$

- **Étude de $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.**
  - ⋆ D'une part,

$$\int_y^{0} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_y^{0} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{0} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}.$$

Ainsi, $\lim_{y\to-\infty} \int_y^{0} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$. Donc, $\int_{-\infty}^{0} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{0} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}.$$

  - ⋆ D'autre part,

$$\int_0^{y} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^{y} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{0}.$$

Ainsi, $\lim_{y\to+\infty} \int_0^{y} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Donc, $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

- **Étude de $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$.**
  - ⋆ D'une part,

$$F(y) = \int_y^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{t}\right]_y^{0} = \mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{y}$$

Ainsi, $\lim_{y\to-\infty} F(y) = 1$. Donc, $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

  - ⋆ D'autre part,

$$F(y) = \int_0^{y} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{t}\right]_0^{y} = \mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{0}$$

Ainsi, $\lim_{y\to+\infty} F(y) = +\infty$. Donc, $\int_0^{y} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

II - Fonctions continues par morceaux

Définition 4 - Fonction continue par morceaux

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. La fonction f est *continue sauf en un nombre fini de points* si

- f est continue en tout point de I, sauf en un nombre fini de points $a_0, \dots, a_n$,
- f admet des limites finies à gauche et à droite en chaque point $a_0, \dots, a_n$.

Exemple 4

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$
Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Comme $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en -1 et 1 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.

Définition 5 - Intégrales des fonctions continues par morceaux

Soit f une fonction continue sauf en un nombre fini de points sur I. Alors, l'intrégale de f, si elle converge, est égale à la somme des intégrales de f sur chacun des intervalles sur lesquels elle est continue.

Exemple 5

En reprenant les définitions précédentes.

- $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int_{-1}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= 1 + 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$