

## II - Récurrences

### À Savoir

Le raisonnement par récurrence se déroule en 3 étapes principales.

- \* On énonce clairement la propriété à démontrer. Cette propriété doit dépendre d'un entier naturel noté  $n$ .
- \* **L'initialisation.** On montre la propriété précédente lorsque  $n = 0$  (si la propriété est vraie pour tout entier naturel) ou lorsque  $n = 1$  (si la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul).

*Généralement, la propriété est une égalité. On montre alors que les deux membres de l'égalité sont égaux à une même valeur.*

- \* **L'hérédité.** On fixe un entier naturel  $n$ . On suppose la propriété vraie à l'ordre  $n$  (c'est l'hypothèse de récurrence). On montre que la propriété est vraie lorsque  $n$  est remplacé par  $(n + 1)$  (ne pas oublier le parenthésage).

*Généralement, on part d'un côté de l'égalité et on arrive à l'autre côté. Une des étapes du calcul utilise l'hypothèse de récurrence.*

- \* **Conclusion.** On conclut clairement en citant l'initialisation, l'hérédité et le principe de récurrence.

### I - Les classiques : Sommes d'entiers

**Exercice 1. (Somme des  $n$  premiers entiers non nuls)** Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Exercice 2. (Somme des  $n$  premiers carrés)** Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Exercice 3. (Somme des  $n$  premiers cubes)** Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

### II - Formules de sommes

**Exercice 4. (Somme des termes d'une suite géométrique)** Soit  $q \neq 1$ . Montrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

**Exercice 5. (Formule du binôme de Newton,  $\Rightarrow$ )** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

### III - Inégalités

**Exercice 6. (Inégalité de Bernoulli)** Soit  $x > 0$ . Montrer que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

**Exercice 7. (Suite & Encadrement)** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ . Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_n \leq 3$ .

**Exercice 8. (Suite & Encadrement)** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$ . Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $0 \leq u_n \leq 5$ .

**Exercice 9. (Suite & Encadrement)** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 6$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$ . Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $4 \leq u_n \leq 10$ .

### IV - Suites définies par récurrence

**Exercice 10. (Suite & Terme général)** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 5$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = u_n + 3$ . Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_n = 5 + 3n$ .

**Exercice 11. (Suite géométrique)** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = 5 \times u_n$ . Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_n = 3 \times 5^n$ .

**Exercice 12. (Suite & Terme général)** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = u_n + n + 1$ . Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Exercice 13. (Suite & Terme général)** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ . Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_n = \sqrt{n+9}$ .

**Exercice 14. (Suite & Terme général)** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$ . Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $u_n = \frac{2}{2n+1}$ .