

## T.D. III - Intégrale sur un segment

### I - Calculs d'intégrales par primitives

**Exercice 1. (Fonctions polynomiales, ⚙️)** Déterminer des primitives des fonctions suivantes puis calculer la valeur de l'intégrale :

- |                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. <math>x^2 + x + 1</math>.<br/> <math>\int_1^2 (x^2 + x + 1) dx</math>.</p> <p>2. <math>2x^3 + 4x + 2</math>.<br/> <math>\int_0^2 (2x^3 + 4x + 2) dx</math>.</p> | <p>3. <math>4x^3 + 2x^2 - 1</math>.<br/> <math>\int_1^2 (4x^3 + 2x^2 - 1) dx</math>.</p> <p>4. <math>x^{10} + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}</math>.<br/> <math>\int_0^1 \left(x^{10} + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}\right) dx</math>.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Exercice 2. (Fonctions puissances, ⚙️)** Déterminer des primitives des fonctions suivantes puis calculer la valeur de l'intégrale :

- |                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. <math>x^{3/2}</math>.<br/> <math>\int_0^1 x^{3/2} dx</math>.</p> <p>2. <math>\frac{1}{\sqrt{x}}</math>.<br/> <math>\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx</math>.</p> <p>3. <math>\frac{1}{3x^2}</math>.<br/> <math>\int_1^2 \frac{1}{3x^2} dx</math>.</p> | <p>4. <math>\frac{4}{x^5}</math>.<br/> <math>\int_1^2 \frac{4}{x^5} dx</math>.</p> <p>5. <math>(2x+1)(x^2+x)^5</math>.<br/> <math>\int_{-1}^0 (2x+1)(x^2+x)^5 dx</math>.</p> <p>6. <math>(x^2+1)(x^3+3x+4)</math>.<br/> <math>\int_{-1}^0 (x^2+1)(x^3+3x+4) dx</math>.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Exercice 3. (Logarithmes & Exponentielles, ⚙️)** Déterminer des primitives des fonctions suivantes puis calculer la valeur de l'intégrale :

- |                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. <math>\frac{3}{x}</math>.<br/> <math>\int_1^2 \frac{3}{x} dx</math>.</p> <p>2. <math>\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}</math>.<br/> <math>\int_1^2 \frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1} dx</math>.</p> | <p>3. <math>e^{2x}</math>.<br/> <math>\int_{-2}^2 e^{2x} dx</math>.</p> <p>4. <math>\frac{1}{e^{12x}}</math>.<br/> <math>\int_{-2}^2 \frac{1}{e^{12x}} dx</math>.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

5.  $(e^x+1)(e^x+x)^{22}$ .  
 $\int_0^1 (e^x+1)(e^x+x)^{22} dx$ .

6.  $\frac{e^x+1}{e^x+x}$ .  
 $\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x} dx$ .

**Exercice 4. (Calculs d'intégrales, ⚙️)** Calculer les valeurs des intégrales suivantes :

- |                                                                                                                                             |                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. <math>\int_0^1 (x^2 + 3x + 1) dx</math>.</p> <p>2. <math>\int_{-2}^1 e^{3x} dx</math>.</p> <p>3. <math>\int_1^{-1} e^3 dx</math>.</p> | <p>4. <math>\int_2^1 \frac{1}{x} dx</math>.</p> <p>5. <math>\int_0^1 2e^x + 3x^2 dx</math>.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Exercice 5.** Soit  $A \geq 1$ . Déterminer  $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx$ .

### II - Fonctions définies par morceaux

**Exercice 6. (Loi uniforme)** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 0$  si  $x \notin [1, 3]$  et  $f(x) = \frac{1}{2}$  sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction  $f$ .
2. Déterminer les intégrales suivantes :

- |                                                                                                                                         |                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a) <math>\int_{-2}^0 f(x) dx</math>.</p> <p>b) <math>\int_{-1}^{3/2} f(x) dx</math>.</p> <p>c) <math>\int_{-1}^2 f(x) dx</math>.</p> | <p>d) <math>\int_{-4}^3 f(x) dx</math>.</p> <p>e) <math>\int_{-5}^{10} f(x) dx</math>.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|

3. Si  $x \in [1, 3]$ , déterminer  $\int_1^x f(t) dt$ .

**Exercice 7. (Loi exponentielle)** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $f(x) = 2e^{-2x}$  sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction  $f$ .

2. Déterminer les intégrales suivantes :

a)  $\int_{-2}^0 f(x) \, dx.$

b)  $\int_{-1}^{3/2} f(x) \, dx.$

c)  $\int_{-1}^2 f(x) \, dx.$

d)  $\int_{-4}^3 f(x) \, dx.$

e)  $\int_{-5}^{10} f(x) \, dx.$

3. Si  $x \geq 0$ , déterminer  $\int_0^x f(t) \, dt$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) \, dt$ .

**Exercice 8.** ( $\Rightarrow$ ) Calculer  $\int_{-1}^5 |x-2| \, dx$ .

### III - Linéarité de l'intégrale

**Exercice 9.** ( $\otimes$ )

1. Montrer que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ .

2. En déduire la valeur de  $\int_0^1 \frac{t}{1+t} \, dt$ .

**Exercice 10.** ( $\otimes$ ) Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt$ .  
Montrer que  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$ .

**Exercice 11.** ( $\otimes$ ) Soit  $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx$  et  $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x} \, dx$ .

1. Calculer  $I$ .

2. Calculer  $I + J$ .

3. En déduire la valeur de  $J$ .

**Exercice 12.** ( $\otimes$ ) Soit  $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$  et  $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} \, dx$ .

1. Calculer  $I$ .

2. Calculer  $I + J$ .

3. En déduire la valeur de  $J$ .

### IV - Dérivation par rapport aux bornes

**Exercice 13.** ( $\Rightarrow$ ) Montrer que  $F(x) = \int_3^x (t^2 - 2t + 1) \, dt$  est croissante.

**Exercice 14.** Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \geq 1$  par  $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt$ .

1. Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$ .

2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1.

3. Déterminer la dérivée seconde  $f''$  de  $f$ .

### V - Inégalités

**Exercice 15.** Soit  $g$  la fonction définie pour tout  $x \geq 1$  par  $g(x) = \frac{e^x}{x^3}$ .

1. Déterminer la dérivée  $g'$  de  $g$ .

2. En déduire le tableau de variations de  $g$ .

3. En déduire l'encadrement :  $0 \leq \int_1^3 g(t) \, dt \leq 2e$ .

**Exercice 16.** Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \geq 1$  par  $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt$ .

1. Minorer  $\frac{1}{t}$  pour tout  $t \in [1, x]$  et en déduire que  $f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$ .

2. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Exercice 17.** ( $\Rightarrow$ ) Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2} \, dx$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

2. Montrer que  $(u_n)$  est minorée par 0.

3. En minorant  $1 - x^2$ , montrer que  $u_n \leq \frac{4}{3(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ .

4. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 18.** (☞) Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ .

1. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $0 \leq I_n \leq \ln(2)$ .
2. Étudier les variations de la suite  $(I_n)$ .
3. En déduire que la suite  $(I_n)$  converge.

## VI - Intégrations par parties

**Exercice 19.** (☞) À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

- |                             |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. $\int_0^1 x e^x dx$ .    | 4. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ .    |
| 2. $\int_1^2 x e^{2x} dx$ . | 5. $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$ . |
| 3. $\int_1^e x \ln(x) dx$ . | 6. $\int_1^e (\ln(t))^2 dt$ . |

**Exercice 20.** Soit  $A \geq 1$ . À l'aide d'une intégration par parties, déterminer  $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ .

**Exercice 21.** Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \geq 1$  par  $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ .

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt.$$

2. À l'aide d'une seconde intégration par parties, montrer que

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt.$$

**Exercice 22.** (☞) Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$ .

1. Calculer  $u_0$ .
2. Montrer que  $f(t) = (2-t)e^t$  est une primitive de la fonction  $g(t) = (1-t)e^t$ .
3. Déterminer la valeur de  $u_1$ .
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ .
5. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
6. Déterminer la limite de  $(nu_n)$ .

**Exercice 23.** (☞) Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $u_n = \int_1^e t(\ln(t))^n dt$ .

1. Calculer  $u_0$ .
2. a) Montrer que, pour tout  $t \in [1, e]$ ,  $0 \leq \ln(t) \leq 1$ .  
b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n$ .
4. En déduire  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .