■ Chapitre 13 ■
Espaces vectoriels préhilbertiens réels

■ E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I. Produit scalaire

I.1 Définitions

Définition 1 (Produit scalaire).

Une application $f : E \times E \to \mathbb{R}$ définit un *produit scalaire* si f est

(i). une forme bilinéaire symétrique : pour tous $(u, v, w) \in E^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(u,v) &= f(v,u). \\ f(u+\lambda v, w) &= f(u,w) + \lambda f(v,w). \end{aligned}$$

(ii). définie positive : $\forall\, u \in E,\ f(u,u) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $u = 0_E$.

Notation.

■ Le produit scalaire de deux éléments u, $v \in E$ sera noté $\langle u, v\rangle$, $u \cdot v$ ou $(u|v)$.

Exercice 1.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'application $\varphi : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$ soit une forme bilinéaire symétrique.

2. Donner des exemples de produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$ définit un produit scalaire.

Définition 2 (Espace vectoriel préhilbertien / euclidien).

(i). Un espace *préhilbertien réel* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

(ii). Un espace vectoriel *euclidien* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

I.2 Inégalités

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Pour tous vecteurs u, $v \in E$,

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle},$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Exercice 2. Montrer que $|\operatorname{Tr}(A)| \leqslant \sqrt{n \operatorname{Tr}(A^tA)}$.

Proposition 2 (Inégalité de Minkowski).

Pour tous vecteurs u, $v \in E$,

$$\sqrt{\langle u+v, u+v\rangle} \leqslant \sqrt{\langle u, u\rangle} + \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

I.3 Norme & Distance euclidiennes

Théorème 1 (Norme euclidienne).

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. L'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$, $u \mapsto \sqrt{\langle u,u\rangle}$ est une norme sur E. C'est la *norme euclidienne* issue du produit scalaire.
Si $u \in E$ est tel que $\|u\| = 1$, le vecteur u est *normé* ou *unitaire*.

Notation.
- $\|\cdot\|$ désignera la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exercice 3. Donner des exemples de normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 3 (Identités de polarisation).

Soient u, $v \in E$.

(i). $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle$.

(ii). **Al-Kashi.** $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v\rangle$.

(iii). **Identité de polarisation.** $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u,v\rangle$.

(iv). **Identité du parallélogramme.** $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Exercice 4.

1. Retrouvez la formule de la médiane : $AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$.

2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \max\{|x|,|y|\}$ n'est pas une norme euclidienne.

3. Montrer que $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sqrt{4x^2+2xy+3y^2}$ est une norme euclidienne et identifier le produit scalaire associé.

II. Orthogonalité

II.1 Définitions

Définition 3 (Orthogonalité).

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, u, v deux vecteurs de E, F, G deux sous-espaces vectoriels de E, $p \in \mathbb{N}^\star$ et $(u_1,\ldots,u_p) \in E^p$.

(i). Les vecteurs u et v sont *orthogonaux* si $\langle u,v\rangle = 0$. On note $u \perp v$.

(ii). Les espaces F et G sont *orthogonaux* si $\forall\,(u,v) \in F \times G$, $\langle u,v\rangle = 0$.

(iii). La famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est *orthogonale* si $\forall\, i,\, j \in [\![1,p]\!]$, $i \neq j$, $\langle u_i,u_j\rangle = 0$.

(iv). La famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est *orthonormée* si $\forall\, i,\, j \in [\![1,p]\!]$, $\langle u_i,u_j\rangle = \delta_{ij}$.

(v). L'*orthogonal* de F est l'espace $F^\perp = \{u \in E\ ;\ \forall\, v \in F,\ \langle u,v\rangle = 0\}$.

Exercice 5.

1. Déterminer $E^\perp$ puis $\{0_E\}^\perp$.

2. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$. Montrer que $G^\perp \subset F^\perp$.

3. Soient $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $D = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$. Déterminer $D^\perp$.

Propriétés 4 (Orthogonalité & Somme directe).

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

(i). Si F et G sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe.

(ii). L'espace $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère $P = \mathrm{Vect}\{(1,1,2),(1,3,4)\}$. Déterminer une équation cartésienne de P puis de $P^\perp$.

Théorème 2 (Théorème de Pythagore).

(*i*). Soient u, $v \in E$. Les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(*ii*). Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et $(u_1,\dots,u_p) \in E^p$. Si la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est orthogonale, alors $\left\|\sum\limits_{i=1}^p u_i\right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^p \|u_i\|^2$.

Exercice 7.

1. Montrer que la réciproque du (ii) est fausse.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=0}^n a_i\cos(ix)\right)^2 \mathrm{d}x = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Propriété 5 (Orthogonalité & Familles libres).

Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathscr{F} = (u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de E non nuls. Si $\mathscr{F}$ est orthogonale, alors $\mathscr{F}$ est libre.

II.2 Bases orthonormées

Théorème 3 (Procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT).

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille libre de E. Il existe une famille orthonormée $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ telle que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{Vect}\{e_1,\dots,e_i\} = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i\}$.

Exercice 8.

1. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Orthonormaliser la base $(1,X,X^2)$.

2. Proposer un algorithme en Python qui permette d'orthonormaliser des familles libres.

Théorème 4 (Base orthonormée incomplète).

Toute famille orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E peut être complétée en une base orthonormée. En particulier, tout espace vectoriel euclidien non réduit à son élément neutre possède une base orthonormée.

Théorème 5 (Isomorphisme canonique).

Soient $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E et u, v des vecteurs de E. On note $x = \sum\limits_{i=1}^n x_ie_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^n y_ie_i$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\langle x,e_i\rangle = x_i,\ \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i,\ \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$, alors $\langle x,y\rangle = {}^t YX$ et $\|x\| = \sqrt{{}^t XX}$.

Exercice 9. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Exprimer $a_{i,j}$ en fonction des $(f(e_k))_k$.

III. Géométrie

III.1 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Théorème 6 (Unicité du supplémentaire orthogonal).

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension r de E.

(i). F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E.

(ii). Soit G un supplémentaire de F. Si $G \perp F$, alors $G = F^\perp$.

De plus, si E est de dimension finie n, alors $\dim F^\perp = n - \dim F$.

Exercice 10.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.

2. $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire tel que la base canonique soit orthonormée. On pose $F = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X] \ ; \ \sum_{k=0}^{n} a_k = 0 \right\}$. Déterminer $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$.

Définition 4 (Projection / Symétrie orthogonale).

(i). Une *projection orthogonale* de E est une projection p telle que $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ soient orthogonaux.

(ii). Une *symétrie orthogonale* de E est une symétrie s telle que $\operatorname{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ soient orthogonaux.

Exercice 11.

1. Soient r un entier naturel non nul et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base orthonormée de $\operatorname{Im} p$. Pour tout vecteur x de E, exprimer $p(x)$ en fonction des $(\varepsilon_i)_{i \in [\![1,r]\!]}$.

2. Pour tout entier naturel n, déterminer la projection orthogonale du polynôme X^n sur $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 6 (Inégalité de Bessel).

Soient $x \in E$ et p un projecteur orthogonal. Alors, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

III.2 Distances

Théorème 7 (Distance à un sev).

Soient z un vecteur de E préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. La *distance* de z à F, notée $d(z, F)$, est le réel $d(z, F) = \min_{x \in F} \|z - x\|$.

En notant p la projection orthogonale sur F, le vecteur $p(z)$ est l'unique vecteur de F tel que $d(z, F) = \|z - p(z)\|$.

Exercice 12. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\,\mathrm{d}x$.

Corollaire 8 (Expression dans une base orthonormée).

Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de dimension finie r et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base orthonormée de F. Notons p la projection orthogonale sur F. Pour tout vecteur $x \in E$,

(i). $p(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$.

(ii). $d(x, F) = \left\| x - \sum_{i=1}^{r} \langle x, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \right\|$.

De plus, si E est de dimension finie n et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormée de E, alors

$$d(x,F) = \sqrt{\sum_{i=r+1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2}.$$

Exercice 13. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. On note $F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ ET } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

III.3 Hyperplans

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel euclidien.

Théorème 9 (Représentation des formes linéaires).
Pour tout forme linéaire $f \in E^\star$, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $f : x \mapsto \langle a, x \rangle$.

Exercice 14.

1. Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall\ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

2. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$. Existe-t-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, A \rangle = P(0)$?

Théorème 10 (Normale).
Soit H un hyperplan de E. L'espace vectoriel $H^\perp$ est une droite appelée *normale* à l'hyperplan H. Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et H a pour équation cartésienne $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ dans cette base, alors $H^\perp = \mathrm{Vect}\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i e_i\right\}$.

Exercice 15.

1. Illustrer le théorème dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

2. Ligne de niveau. Soient $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de E, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in E$. Décrire l'ensemble des points M tels que $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle = \lambda$.

Théorème 11 (Distance à un hyperplan).
Soient H un hyperplan de E, de vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$ et u un vecteur de E. Alors, $d(u,H) = |\langle u, \overrightarrow{n} \rangle|$.

Exercice 16.

1. En dimension 2, exprimer la distance d'un point M de coordonnées (x_0, y_0) à la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

2. En dimension 3, exprimer la distance d'un point M de coordonnées (x_0, y_0, z_0) au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Familles de polynômes orthogonaux

Exercice 17. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $w \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_I |x|^n w(x)\mathrm{d}x$ converge. On note $\mathscr{H} = \left\{f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \ ; \ \displaystyle\int_I f^2 w \text{ converge}\right\}$. Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_I P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes tels que
- $*$ Pour tout n entier naturel, $\deg(P_n) = n$;
- $*$ Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $m \neq n$, $\langle P_n, P_m\rangle = 0$.
- $*$ Pour tout n entier naturel, P_n est unitaire

Soit n un entier naturel.

3. Montrer que $\operatorname{Vect}\{P_0, \dots, P_n\} = \mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$.

5. Racines. On note $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ les racines de P_n qui appartiennent à $\overset{\circ}{I}$ et qui sont de multiplicité impaire. On pose $Q = \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)$.

a) Déterminer le degré de Q.

b) Déterminer le signe de P_nQ sur I.

c) En déduire que $k = n$ et que P_n a toutes ses racines réelles et simples dans $\overset{\circ}{I}$.

6. Relation de récurrence.

a) Montrer que $(P_0, \dots, P_{n-1}, XP_{n-1})$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On note $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k + \alpha_n XP_{n-1}$.

b) Montrer que, pour tout $j \in [\![0, n-3]\!]$, $\alpha_j = 0$.

c) En déduire qu'il existe trois suites réelles (a_n), (b_n) et (c_n) telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = (a_nX + b_n)P_{n+1} + c_nP_n.$$

Les exemples classiques de familles sont résumés dans le tableau suivant. Ces familles de polynômes sont utilisées, via les formules de quadrature, pour calculer des valeurs approchées d'intégrales.

Nom	I	$w(x)$	Relation de récurrence
Legendre	$[-1,1]$	1	$(n+2)L_{n+2} = (2n+3)L_{n+1} - (n+1)L_n$
Tchebychev	$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$
Laguerre	$\mathbb{R}_+$	e^{-x}	$(n+2)L_{n+2} = (-X+2n+3)L_{n+1} - (n+1)L_n$
Hermitte	$\mathbb{R}$	e^{-x^2}	$H_{n+2} = 2XH_{n+1} - 2(n+1)H_n$

Programme officiel (PCSI)

Produit scalaire et espaces euclidiens (p. 29, 40)

Programme officiel (PSI)

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens - A - Espaces préhilbertiens réels (p. 9, 10)

Mathématiciens

CAUCHY Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).
SCHWARZ Hermann (25 jan. 1843 à Hermsdorf-30 nov. 1921 à Berlin).
GRAM Jorgen Pedersen (27 juin 1850-29 avr. 1916 à Copenhague).
MINKOWSKI Hermann (22 juin 1864 à Alexotas-12 jan. 1909 à Göttingen).
SCHMIDT Erhart (13 jan. 1876 à Dorpat-16 déc. 1959 à Berlin).