IV - Calcul matriciel

À Savoir

Opérations sur les matrices. Addition, Multiplication par un nombre, Multiplication de matrices.

* $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
* $\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$.
* $A + 0 = 0 + A = A$.
* $A + (-A) = (-A) + A = 0$.
* $A \times I = I \times A = A$.

Attention. En général, $AB \neq BA$.

$$A^3 + 2A^2 + 3A = A \times A^2 + 2A \times A + 3A \times I = A(A^2 + 2A + 3I).$$

À Savoir

Systèmes linéaires. Traduire un système linéaire en équation matricielle et réciproquement.

Utilisation en lien avec :

* la résolution de systèmes.
* les suites définies par récurrence.
* la formule des probabilités totales.

À Savoir

$$\begin{cases} A^0 &= I, \\ A^n &= \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}}. \end{cases}$$

Caluls de puissances :

* formule donnée et démonstration par récurrence.
* puissance des matrices diagonales (par récurrence).
* formule du binôme de Newton. Si $A \times B = B \times A$, alors $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

  Utile surtout si $A^k = 0$ pour k assez grand.
* si $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$ (par récurrence).

À Savoir

Définition de l'inverse. Il existe B telle que $AB = I$. Alors, $A^{-1} = B$ et $BA = I$.

Existence d'un inverse :

* donnée d'une matrice B telle que $AB = I$.
* donnée d'une relation telle que $a_k A^k + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$.
* matrice d'ordre 2 et $ad - bc \neq 0$ + Calcul.
* matrice diagonale & tous les coefficients diagonaux non nuls + Calcul.
* matrice triangulaire & tous les coefficients diagonaux non nuls.
* calcul par inversion d'un système linéaire ou méthode du pivot sur l'identité.

Non-inversibilité. Utiliser une relation $AB = AC$ (ou $AB = 0$ ou ...). Supposer par l'absurde que A est inversible et en déduire $B = C$ (ou $B = 0$ ou ...). Obtenir une contradiction.