T.D. XI - Fonctions de plusieurs variables

I - Extremums libres

Solution de l'exercice 1.

1. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-y \\ 2y \end{pmatrix}$. Ainsi, le seul point critique est (0,0).

La hessienne de f vaut $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après le résultat de Monge, f atteint un minimum local en (0,0).

Comme $(h_1 \ h_2) H(f)(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \geqslant 0$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction f est convexe et le minimum est un minimum global.

2.
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8xy + 6x^2 - 4y + 2 \\ 4x^2 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- * Soit x = 0 et y = 1/2.
- * Soit x = 1 et y = -2.

De plus,

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 8y + 12x & 8x - 4 \\ 8x - 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

- * En (0, 1/2), $rt s^2 = -16 < 0$. Ainsi, (0, 1/2) est un point selle.
- * En (1, -2), $rt s^2 = -16 < 0$. Ainsi, (1, -2) est un point selle.
- 3. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6x \\ -3y^2 6y \end{pmatrix}$. Ainsi, (x,y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases} x(x+2) = 0 \\ y(y+2) = 0 \end{cases}$.

On obtient ainsi 4 points critiques de coordonnées : (0,0), (0,-2), (-2,0), (-2,-2).

De plus, la hessienne de f vaut

$$H(f)(x,y) = 6 \begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & -y-1 \end{pmatrix}.$$

* Si (x,y) = 0, la hessienne est vaut $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. Les notations de Monge montrent que f atteint un point selle en (0,0).

* Si (x,y) = (-2,-2), la hessienne vaut $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Les notations de Monge montrent que f atteint un point selle en (-2,-2).

* Si (x,y) = (0,-2), la hessienne vaut $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Comme $rt - s^2 > 0$ et r > 0, les notations de Monge assurent que f atteint un minimum local en (0,-2).

* Si (x,y) = (-2,0), la hessienne vaut $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. Comme $rt - s^2 > 0$ et r < 0, les notations de Monge assurent que f atteint un maximum local en (-2,0).

Comme $\lim_{x\to +\infty} f(x,0) = +\infty$, alors f n'admet pas de maximum global. Comme $\lim_{x\to -\infty} f(x,0) = -\infty$, alors f n'admet pas de minimum global.

Solution de l'exercice 2.

1. $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z \\ 2-6y \\ 2x-6z \end{pmatrix}$. Ainsi, le seul point critique est $a_{\star} = (0,1/3,0)$.

De plus,
$$H(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$
. Alors,

$$q_{(x,y,z)}(f)(h) = h^{T}H(f)(x,y,z)h$$

$$= 4h_{1}h_{3} - 6h_{2}^{2} - 6h_{3}^{2}$$

$$= -6\left(h_{3} - \frac{2}{3}h_{1}h_{3}\right) - 6h_{2}^{2}$$

$$= -6\left(h_{3} - \frac{1}{3}h_{1}\right)^{2} + \frac{2}{3}h_{1} - 6h_{2}^{2}.$$

Comme $q_{a_{\star}}(h,0,h/3) > 0$ et $q_{a_{\star}}(0,h,0) < 0$, alors f n'atteint pas d'extremum en a_{\star} .

2. Le gradient vaut $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z - yz \\ x + z - xz \\ y + x - xy \end{pmatrix}$.

Soit (x, y, z) un point critique. Si z = 1, la première équation donne 1 = 0, ce qui est impossible. Ainsi, $z \neq 1$ et

$$\begin{cases} y & = -\frac{z}{1-z} \\ x & = -\frac{z}{1-z} \\ -2\frac{z}{1-z} - \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y & = -\frac{z}{1-z} \\ x & = -\frac{z}{1-z} \\ -\frac{z}{1-z} \left(2 + \frac{z}{1-z}\right) & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, si z=0, alors x=y=0. Sinon, z=2, alors x=y=2. Il y a donc deux points critiques : (0,0,0) et (2,2,2). La hessienne de f vaut

$$H(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1-z & 1-y \\ 1-z & 0 & 1-x \\ 1-y & 1-x & 0 \end{pmatrix}.$$

* Si
$$a_{\star} = (0,0,0)$$
, alors $H(f)(a_{\star}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$q_{a_{\star}}(h) = 2(h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3).$$

$$\star q_{a_{\star}}(h, h, 0) = 2h^2 > 0.$$

$$\star q_{a_{\star}}(-h, h, 0) = -2h^2 < 0.$$

Ainsi, f ne présente pas d'extremum en (0,0,0).

* Si
$$a_{\star} = (2, 2, 2)$$
. Alors $H(f)(a_{\star}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On conclut comme précédemment.

Solution de l'exercice 3.

1. a) (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 2x - 6 &= 0 \\ 2y - 14 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 3 \\ y &= 7 \end{cases}.$$

Ainsi, M(3,7) est l'unique point critique de f.

- **b)** Comme $H(f)(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, alors $rt-s^2>0$ et r>0. Ainsi, f admet un minimum local en (3,7).
- **2. a)** Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ non nul. Alors,

$$q_{(x,y)}(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 2h_2^2 > 0.$$

Ainsi, f est strictement convexe sur \mathbb{R}^2 .

- **b)** Comme f est strictement convexe et (2,7) est un point critique de f, alors f atteint un minimum global en (2,7).
- 3. a) D'après la définition de la distance,

$$\|(x,y) - (2,7)\|^2 = (x-2)^2 + (y-7)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 14y + 58.$$

b) D'après la question précédente, $f(x,y) \ge 0$. De plus, f(x,y) = 0 si et seulement si (x,y) = (2,7). On obtient bien que (2,7) est un minimum global de f.

II - Extremums sous contraintes

Solution de l'exercice 5.

1. On se ramène à l'étude de $\varphi: x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$. Comme $\varphi'(x) = \ln(x+1) + 1$, alors φ est décroissante sur $]-1, \mathrm{e}^{-1}-1]$ puis croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}-1, +\infty[$.

Le minimum de f sous contrainte est donc atteint en $(e^{-1}-1, e^{-1})$.

- **2.** On se ramène à l'étude de $\varphi : x \mapsto 2x e^x$. Comme $\varphi'(x) = 2(x+1) e^x$, alors φ est décroissante sur $]-\infty,-1]$ puis croissante sur $[-1,+\infty[$. Le minimum de f sous contrainte est donc atteint en (-1,-1).
- **3.** Comme $y^2 = 3 2x^2$, on se ramène à l'étude de $\varphi : x \mapsto \frac{3-y^2}{2}y$ où $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Comme $\varphi'(x) = 3\frac{1-y^2}{2}$, alors φ est décroissante sur $[-\sqrt{3}, -1]$, croissante sur [-1, 1] puis décroissante sur $[1, \sqrt{3}]$. De plus, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(-1) = -1$.

Comme $\varphi(-\sqrt{3})=\varphi(\sqrt{3})=0,\,\varphi$ ne possède pas d'extremum global en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

Le minimum de f sous contrainte est donc atteint en (1, -1) et (-1, -1). Le maximum de f sous contraine est donc atteint en (1,1) et (1,-1). On pourrait ensuite étudier la présence d'extrema locaux.

Solution de l'exercice 6.

1. Contrainte de qualification : La jacobienne vaut $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car ses deux premières colonnes sont linéairement indépendantes.

Condition du premier ordre : il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0\\ 2y - \lambda_1 + \lambda_2 &= 0\\ 2z - \lambda_1 - \lambda_2 &= 0\\ 2t + \lambda_1 - \lambda_2 &= 0\\ x + y + z - t &= 3\\ 2x - y + z + t &= -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -1\\ y &= 2\\ z &= 0\\ t &= -2\\ \lambda_1 &= 2\\ \lambda_2 &= -2 \end{cases}$$

Comme la hessienne réduite du lagrangien est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors

 $h^T \widetilde{H} h > 0$ pour tout vecteur h non nul et f atteint sous contrainte un minimum en (-1, 2, 0).

2. Contrainte de qualification : la jacobienne (2x 2y) est de rang 1 sauf en (0,0) qui n'appartient pas au domaine étudié. Condition du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} - 2\lambda x &= 0\\ -\frac{1}{x-y} - 2\lambda y &= 0\\ x^2 + y^2 - 2 &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, $2\lambda(x+y)=0$.

- * Si $\lambda=0$, alors $\frac{1}{x-y}=0$, ce qui est impossible. * Si x=-y, comme $x^2+y^2=2$, alors $x^2\in\{-1,1\}$. On obtient ainsi les points (-1,1) (avec $\lambda = \frac{1}{4}$) et (1,-1) (avec $\lambda = \frac{1}{4}$). De plus,

$$H_{\star} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x-y)^2} - 2\lambda & \frac{1}{(x-y)^2} \\ \frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-y)^2} - 2\lambda \end{pmatrix}.$$

* Si
$$a_{\star} = (-1, 1)$$
. Alors, $H_{\star} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et Ker $J_{\star} = \text{Vect } \{(-1, 1)\}$. Ainsi, si $h^{T} = (-t, t)^{T} \in \text{Ker } J_{\star}$,

$$4h^T H_{\star} h = -3t^2 + 2t^2 - 3t^2 < 0.$$

Ainsi, f atteint un maximum sous contrainte en (-1,1).

 \star Si $a_{\star} = (1,-1)$. Alors, $H_{\star} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et on obtient le même calcul que précédemment. Ainsi, f atteint un maximum sous contrainte en (-1,1).

Solution de l'exercice 7.

- **1.** P(x,y) = x + 3y C(x,y). La hessienne vaut $\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$. Comme $q_a(P)(h) = -10h_1^2 + 4h_1h_2 - 10h_2^2 = -10\left(h_1 - \frac{1}{5}h_2\right)^2 - \frac{24}{25}h_2^2 \le 0$, le profit est une fonction concave.
- **2.** La condition est x + y = 20. Condition de qualification : la jacobienne est égale à (1 1) est de rang 1.

Conditions du premier ordre :

$$\begin{cases}
-10x + 2y + 3 - \lambda &= 0 \\
-10y + 2x + 3 - \lambda &= 0 \\
x + y &= 20
\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}
x &= 10 \\
y &= 10 \\
\lambda &= -77
\end{cases}$$

Comme la contrainte est linéaire, $H_{\star} = H(P)$. Comme P est concave, alors P atteint un maximum sous contrainte en (10, 10).

Solution de l'exercice 8.

1. Comme U_1 , U_2 et U_3 sont sans biais,

$$\mathbf{E}\left[T_1\right] = \frac{c+c+c}{3} = c,$$

$$\mathbf{E}[T_2] = c,$$

$$\mathbf{E}\left[T_3\right] = \frac{3c + c + c}{5} = c.$$

Ainsi, T_1 , T_2 et T_3 sont sans biais.

2. D'après les hypothèses, en notant σ_1^2 la variance de l'estimateur U_1 , alors $\sigma_2^2 = 4\sigma_1^2$ et $\sigma_3^2 = 9\sigma_1^2$. Comme les estimateurs sont indépendants,

$$\mathbf{V}(T_1) = \frac{\sigma_1^1 + 4\sigma_1^2 + 9\sigma_1^2}{9} = \frac{14}{9}\sigma_1^2,$$

$$\mathbf{V}(T_2) = \sigma_1^2,$$

$$\mathbf{V}(T_2) = \frac{9 + 4 + 9}{25}\sigma_1^2 = \frac{22}{25}\sigma_1^2.$$

Comme $\frac{22}{25} < 1 < \frac{14}{9}$, c'est le troisième estimateur qui est le meilleur.

3. Comme T est sans biais, alors a+b+c=1. De plus, $\mathbf{V}(T)=a^2+4b^2+9c^2$. On cherche donc à optimiser $f(a,b,c)=a^2+4b^2+9c^2$ sous la contrainte a+b+c=1.

Condition de qualification : la jacobienne vaut

$$J(g)(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix},$$

qui est bien de rang 1.

Conditions du premier ordre : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} 2a - \lambda &= 0 \\ 8b - \lambda &= 0 \\ 18c - \lambda &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - \lambda &= 0 \\ 8b - \lambda &= 0 \\ 18c - \lambda &= 0 \end{cases}$$

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{18}) \lambda = 0$$

$$\begin{cases} a &= \frac{36}{49} \\ b &= \frac{9}{49} \\ c &= \frac{4}{49} \\ \lambda &= \frac{72}{40} \end{cases}$$

On montre sans difficulté que f est convexe et la contrainte est linéaire donc f atteint un minimum sous contrainte en (a,b,c).

L'estimateur linéaire sans biais de variance minimale est donc :

$$T = \frac{36U_1 + 9U_2 + 4U_3}{49}.$$

Solution de l'exercice 9.

1. La condition de qualification est triviale car la jacobienne est une matrice ne contenant que des 1.

Les premières conditions de premier ordre donnent $x_i = \frac{\lambda}{2}$. Or, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, donc $\lambda = \frac{2}{n}$. Ainsi, $x_i = \frac{1}{n}$.

Comme f est convexe et la contrainte est linéaire, f atteint un minimum.

2. L'estimateur T est de la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i X_i$. Comme T est sans biais, alors $\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda = \lambda$.

Comme les variables sont indépendantes, $\mathbf{V}(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i^2$. Ainsi, détermienr l'estimateur de variance minimale revient à optimiser $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

L'estimateur recherché est donc $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. C'est l'estimateur usuel de la moyenne.

Solution de l'exercice 10.

- 1. Comme $x^3 = y^2$, alors x est à valeurs positives. Ainsi, le minimum de f est atteint pour x = 0 et vaut 0.
- 2. Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda x^2 = 0 \\ -2\lambda y = 0 \\ x^3 - y^2 = 0 \end{cases}$$

- * Soit y = 0 et x = 0 et la première équation est impossible.
- * Soit $\lambda = 0$ et la première équation est impossible.
- **3.** Il n'y a pas de solution aux conditions du premier ordre et pourtant le problème d'optimisation admet une solution.

On constate que la jacobienne vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ au point (0,0). La condition de qualification n'est pas satisfaite et le théorème ne s'applique pas. \square