III - Primitives : Stratégie

Lors du calcul de primitives, il est important d'appliquer une stratégie de calculs pour *reconnaître* la formule à utiliser. Nous présentons et illustrons ces règles ci-dessous, de la plus élémentaire à la plus élaborée. Plutôt que d'écrire « Une primitive de la fonction $f(x) = \cdots$ est la fonction $F(x) = \cdots$ », nous adopterons la notation **non standard** $f(x) \rightsquigarrow F(x)$.

I - Fonctions élémentaires

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$c \in \mathbb{R},\ c$	$\rightsquigarrow$	cx

$$3 \rightsquigarrow 3x$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$n \neq -1,\ x^n$	$\rightsquigarrow$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\begin{array}{lcl}
x & \rightsquigarrow & \frac{x^2}{2} \\
x^2 & \rightsquigarrow & \frac{x^3}{3} \\
\sqrt{x} = x^{1/2} & \rightsquigarrow & \frac{1}{1/2+1}x^{1/2+1} = \frac{2}{3}x^{3/2} \\
x^{1/3} & \rightsquigarrow & \frac{1}{1/3+1}x^{1/3+1} = \frac{3}{4}x^{4/3} \\
\frac{1}{x^2} = x^{-2} & \rightsquigarrow & \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = -\frac{1}{x} \\
\frac{1}{x^3} = x^{-3} & \rightsquigarrow & \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} = -\frac{2}{x^2} \\
\frac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3} & \rightsquigarrow & \frac{1}{-1/3+1}x^{-1/3+1} = \frac{3x^{2/3}}{2}
\end{array}$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$\frac{1}{x}$	$\rightsquigarrow$	$\ln(x)$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$a \neq 0,\ \mathrm{e}^{ax}$	$\rightsquigarrow$	$\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}$

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{e}^{x} & \rightsquigarrow & \mathrm{e}^{x} \\
\mathrm{e}^{3x} & \rightsquigarrow & \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}
\end{array}$$

II - Fonctions composées

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$\lambda u'(x)$	$\rightsquigarrow$	$\lambda u(x)$

$$\frac{1}{3}x^2 \rightsquigarrow \frac{1}{3}\times\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{9}$$
$$3x^{1/2} \rightsquigarrow 3\times\frac{2x^{3/2}}{3} = 2x^{3/2}$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$u'(x)+v'(x)$	$\rightsquigarrow$	$u(x)+v(x)$

$$x^4+x^5 \rightsquigarrow \frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$$
$$\mathrm{e}^{3x}+\frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}+\ln(x)$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$\lambda u'(x)+\mu v'(x)$	$\rightsquigarrow$	$\lambda u(x)+\mu v(x)$

$$3x-2x^7 \rightsquigarrow 3\times\frac{x^2}{2}-2\times\frac{x^8}{8} = \frac{3x^2}{2}-\frac{x^8}{4}$$
$$\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}+\frac{2}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{3}\times\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}+2\ln(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{9}+2\ln(x)$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$n\neq -1,\ u'(x)u^n(x)$	$\rightsquigarrow$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}(x)$

$$(x+2)^2 = \underbrace{1}_{u'(x)}\times(\underbrace{x+2}_{u(x)})^2 \rightsquigarrow \frac{1}{3}(x+2)^3$$
$$\frac{1}{(x+3)^4} = \underbrace{1}_{u'(x)}\times(\underbrace{x+3}_{u(x)})^{-4} \rightsquigarrow \frac{1}{-4+1}(x+3)^{-4+1} = -\frac{1}{3(x+3)^3}$$
$$\underbrace{2x}_{u'(x)}(\underbrace{x^2+3}_{u(x)})^4 \rightsquigarrow \frac{1}{4+1}(x^2+3)^5 = \frac{(x^2+3)^5}{5}$$
$$\frac{2x}{(x^2+3)^4} = \underbrace{2x}_{u'(x)}(\underbrace{x^2+3}_{u(x)})^{-4} \rightsquigarrow \frac{1}{-4+1}(x^2+3)^{-4+1} = -\frac{1}{3(x^2+3)^3}$$
$$\underbrace{(3x^2+2\,\mathrm{e}^{2x})}_{u'(x)}(\underbrace{x^3+\mathrm{e}^{2x}}_{u(x)})^3 \rightsquigarrow \frac{1}{3+1}(x^3+\mathrm{e}^{2x})^{3+1} = \frac{(x^3+\mathrm{e}^{2x})^4}{4}$$

$$(x^2+\mathrm{e}^{3x})(x^3+\mathrm{e}^{3x})^5 = \frac{1}{3}\underbrace{3(x^2+\mathrm{e}^{3x})}_{u'(x)}(\underbrace{x^3+\mathrm{e}^{3x}}_{u(x)})^5 \rightsquigarrow \frac{1}{6}(x^3+\mathrm{e}^{3x})^6$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\rightsquigarrow$	$\ln\lvert u(x)\rvert$

$$\frac{1}{x+12} \rightsquigarrow \ln|x+12|$$
$$\frac{2x+3\,\mathrm{e}^{3x}}{x^2+\mathrm{e}^{3x}} \rightsquigarrow \ln\left|x^2+\mathrm{e}^{3x}\right|$$
$$\frac{3x+\mathrm{e}^{2x}}{3x^2+\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1}{2}\,\frac{\overbrace{2(3x^2+\mathrm{e}^{2x})}^{u'(x)}}{\underbrace{3x^2+\mathrm{e}^{2x}}_{u(x)}} \rightsquigarrow \frac{1}{2}\ln\left|3x^2+\mathrm{e}^{2x}\right|$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	primitive
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\rightsquigarrow$	$\mathrm{e}^{u(x)}$

$$\mathrm{e}^{x+12} \rightsquigarrow \mathrm{e}^{x+12}$$

$$\left(2x+3\,\mathrm{e}^{3x}\right)\mathrm{e}^{x^2+\mathrm{e}^{3x}} \rightsquigarrow \mathrm{e}^{x^2+\mathrm{e}^{3x}}$$

$$\left(3x+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{e}^{3x^2+\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{2(3x^2+\mathrm{e}^{2x})}_{u'(x)}\right)\mathrm{e}^{\overbrace{3x^2+\mathrm{e}^{2x}}^{u(x)}} \rightsquigarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3x^2+\mathrm{e}^{2x}}$$

À Savoir

Si la fonction est sous forme d'un **produit** $u'(x)v(x)$, on essaiera d'appliquer la formule d'intégration par parties.