T.D. III - Intégrale sur un segment

I - Calculs d'intégrales par primitives

Solution de l'exercice 1.

1. On décompose la fonction en une somme :
- $*$ une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$,
- $*$ une primitive de x est $\frac{x^2}{2}$,
- $*$ une primitive de 1 est x.

Ainsi, une primitive de x^2+x+1 est

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2+x+1)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2\\ &= \left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\right)-\left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+1\right)\\ &= \frac{8}{3}+2+2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\\ &= \frac{7}{3}+3=\frac{16}{3}.\end{aligned}$$

2. On décompose la fonction en une somme :
- $*$ une primitive de $2x^3$ est $\frac{2x^4}{4}=\frac{x^4}{2}$,
- $*$ une primitive de $4x$ est $\frac{4x^2}{2}=2x^2$,
- $*$ une primitive de 2 est $2x$.

Ainsi, une primitive de $2x^3+4x+2$ est

$$\frac{x^4}{2}+2x^2+2x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2x^3+4x+2)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{2}+2x^2+2x\right]_0^2\\ &= \left(\frac{2^4}{2}+2\times 2^2+2\times 2\right)-\left(\frac{0^4}{2}-2\times 0^2+2\times 0\right)\\ &= 8+8+4-0=20.\end{aligned}$$

3. On décompose la fonction en une somme :
- $*$ une primitive de $4x^3$ est $4\frac{x^4}{4}=x^4$,
- $*$ une primitive de $2x^2$ est $2\frac{x^3}{3}$,
- $*$ une primitive de -1 est $-x$.

Ainsi, une primitive de $4x^3+2x^2-1$ est

$$x^4+\frac{2}{3}x^3-x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned}\int_1^2 (4x^3+2x^2-1)\,\mathrm{d}x &= \left[x^4+\frac{2}{3}x^3-x\right]_1^2\\ &= \left(2^4+\frac{2}{3}2^3-2\right)-\left(1^4+\frac{2}{3}1^3-1\right)\\ &= 16+\frac{16}{3}-2-1-\frac{1}{3}+1\\ &= 14+\frac{15}{3}=19.\end{aligned}$$

4. On décompose la fonction en une somme :
- $*$ une primitive de x^{10} est $\frac{x^{11}}{11}$,
- $*$ une primitive de $\frac{1}{5}x^4$ est $\frac{1}{25}x^5$,
- $*$ une primitive de $\frac{1}{2}$ est $\frac{x}{2}$.

Ainsi, une primitive de $x^{10}+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{2}$ est

$$\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^5}{25}+\frac{x}{2}.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(x^{10} + \frac{x^4}{5} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^5}{25} + \frac{x}{2}\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1^{11}}{11} + \frac{1^5}{25} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{0^{11}}{11} + \frac{0^5}{25} + \frac{0}{2}\right) \\ &= \frac{1}{11} + \frac{1}{25} + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{50 + 22 + 275}{550} \\ &= \frac{347}{550}.\end{aligned}$$

$\square$

Solution de l'exercice 2.

1. Une primitive de $x^{3/2}$ est donnée par

$$\frac{x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^{5/2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{3/2} \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{5}1^{5/2} - \frac{2}{5}0^{5/2} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

2. Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ est donnée par

$$\frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1$$
$$= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.$$

3. Une primitive de $\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}x^{-2}$ est donnée par

$$\frac{1}{3} \times \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{3} \times \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{3x^2} \,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{3x}\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3\times 2}\right) - \left(-\frac{1}{3\times 1}\right) \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

4. Une primitive de $\frac{4}{x^5} = 4x^{-5}$ est donnée par

$$4\frac{x^{-5+1}}{-5+1} = 4\frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{x^4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{4}{x^5} \,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{x^4}\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2^4}\right) - \left(-\frac{1}{1^4}\right) \\ &= -\frac{1}{16} + 1 = \frac{15}{16}.\end{aligned}$$

5. La fonction $(2x+1)(x^2+x)^5$ est de la forme $u'(x)u(x)^5$, avec $u(x) = x^2 + x$. Ainsi, une primitive de $(2x+1)(x^2+x)^5$ est donnée par

$$\frac{1}{6}u(x)^6 = \frac{(x^2+x)^6}{6}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 (2x+1)(x^2+x)^5 \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(x^2+x)^6}{6}\right]_{-1}^0 \\ &= \frac{(0^2+0)^6}{6} - \frac{((-1)^2+1)^6}{6} \\ &= 0 - \frac{2^6}{6} = -\frac{2^5}{3} = -\frac{32}{3}.\end{aligned}$$

6. En posant $u(x) = x^3 + 3x + 4$, alors $u'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$. Ainsi, la fonction

$$(x^2+1)(x^3+3x+4) = \frac{1}{3}3(x^2+1)(x^3+3x+4)$$

est de la forme $\frac{1}{3}u'(x)u(x)$. Ainsi, une de ses primitives est

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(x^3+3x+4)^2 = \frac{(x^3+3x+4)^2}{6}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} (x^2+1)(x^3+3x+4)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(x^3+3x+4)^2}{6}\right]_{-1}^{0} \\ &= \frac{(0^3+3\times 0+4)^2}{6} - \frac{((-1)^3+3\times(-1)+4)^2}{6} \\ &= \frac{4^2}{6} - 0 = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. Une primitive de $\frac{3}{x} = 3\frac{1}{x}$ est $3\ln(x)$. Ainsi,

$$\int_1^2 \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = [3\ln(x)]_1^2 = 3\ln(2) - 3\ln(1) = 3\ln(2).$$

2. En posant $u(x) = x^3+2x^2+1$, alors $u'(x) = 3x^2+4x$. Ainsi, $\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ et une primitive est donnée par

$$\ln\left|x^3+2x^2+1\right|.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \left[\ln\left|x^3+2x^2+1\right|\right]_1^2 \\ &= \ln\left|2^3+2\times 2^2+1\right| - \ln\left|1^3+2\times 1^2+1\right| \\ &= \ln(17) - \ln(4).\end{aligned}$$

3. Une primitive de e^{2x} est donnée par $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2\times 2}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2\times(-2)}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^{-4}}{2}.\end{aligned}$$

4. Une primitive de $\frac{1}{\mathrm{e}^{12x}} = \mathrm{e}^{-12x}$ est donnée par

$$\frac{\mathrm{e}^{-12x}}{-12} = -\frac{\mathrm{e}^{-12x}}{12}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{2} \frac{1}{\mathrm{e}^{12x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-12x}}{12}\right]_{-2}^{2} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-12\times 2}}{12} - \left(-\frac{\mathrm{e}^{-12\times(-2)}}{12}\right) \\ &= \frac{-\mathrm{e}^{-24}+\mathrm{e}^{24}}{12} = \frac{\mathrm{e}^{24}-\mathrm{e}^{-24}}{12}.\end{aligned}$$

5. En posant $u(x) = \mathrm{e}^x + x$, alors $u'(x) = \mathrm{e}^x + 1$ et

$$(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+x)^{22} = u'(x)u(x)^{22}.$$

Ainsi, une primitive de cette fonction est donnée par

$$\frac{u(x)^{23}}{23} = \frac{(\mathrm{e}^x+x)^{23}}{23}.$$

En utilisant cette primitive, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^2 (\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+x)^{22}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(\mathrm{e}^x+x)^{23}}{23}\right]_0^2 \\ &= \frac{(\mathrm{e}^2+2))^{23}}{23} - \frac{(\mathrm{e}^0+0)^{23}}{23} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^2+2)^{23}-1}{23}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. En décomposant la fonction en une somme de fonctions :

* une primitive de x^2 est donnée par $\frac{x^3}{3}$,
* une primitive de $3x$ est donnée par $\frac{3x^2}{2}$,
* une primitive de 1 est donnée par x.

Ainsi, une primitive de x^2+3x+1 est donnée par

$$\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x.$$

En utilisant cette primitive,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+3x+1)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x\right]_0^1\\ &= \left(\frac{1^3}{3}+\frac{3\times 1^2}{2}+1\right)-\left(\frac{0^3}{3}+\frac{3\times 0^2}{2}+0\right)\\ &= \frac{1}{3}+\frac{3}{2}+1\\ &= \frac{2+9+1}{6}=\frac{12}{6}=2.\end{aligned}$$

2. Une primitive de e^{3x} est donnée par $\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\right]_{-2}^1\\ &= \frac{\mathrm{e}^{3\times 1}}{3}-\frac{\mathrm{e}^{3\times(-2)}}{3}\\ &= \frac{\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{-6}}{3}.\end{aligned}$$

3. La fonction e^3 est constante donc une de ses primitives est $\mathrm{e}^3 x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^{-1} \mathrm{e}^3\,\mathrm{d}x &= \left[\mathrm{e}^3 x\right]_1^{-1}\\ &= \mathrm{e}^3(-1)-\mathrm{e}^3\times 1=-2\,\mathrm{e}^3.\end{aligned}$$

4. Une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_2^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)]_2^1\\ &= \ln(1)-\ln(2)=-\ln(2).\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5. En posant $u(x)=\ln(x)$, alors $u'(x)=\frac{1}{x}$. Ainsi, $\frac{\ln(x)}{x}$ est de la forme $u'(x)\times u(x)$ et une primitive est donnée par

$$\frac{1}{2}u(x)^2=\frac{(\ln(x))^2}{2}.$$

Ainsi,

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^1=\frac{\ln(A)^2}{2}-\frac{\ln(1)^2}{2}=\frac{\ln(A)^2}{2}.$$

□

II - Fonctions définies par morceaux

III - Linéarité de l'intégrale

IV - Dérivation par rapport aux bornes

V - Inégalités

VI - Intégrations par parties