T.D. X - Réduction

I - Diagonalisation

Solution de l'exercice 1.

1. La matrice A_1 est diagonale, donc diagonalisable.

2. La matrice est A_2 est symétrique réelle donc diagonalisable.

3. La matrice A_3 est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale et sont donc 1, 2 et 3. Comme A_3 est de taille 3 et possède 3 valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

4. La matrice A_4 est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc A_4 possède comme seule valeur propre 2. Ainsi, si A_4 était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $A_4 = P2I_3P^{-1} = 2I_3$. Or, $A \neq 2I_3$. Ainsi, A_4 n'est pas diagonalisable.

Solution de l'exercice 2.

1. La matrice $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 \times 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 4\}.$$

 ${\bf 2.}\,$ La matrice A est de taille 2 et possède deux valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

Alors,

$$AX = 4X$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 4x \\ 2x + 2y = 4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \text{Vect } \{(1, 1)\}.$$

Ainsi, $E_4(A) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix} \right\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. Alors,

$$AX = -X$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -x \\ 2x + 2y = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \text{Vect} \{(-3, 2)\}.$$

Ainsi, $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -3\\2 \end{pmatrix} \right\}.$

4. En posant $P=\begin{pmatrix}1&-3\\1&2\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}4&0\\0&-1\end{pmatrix}$, d'après les formules de changement de base, $A=PDP^{-1}.$

Solution de l'exercice 3. La matrice $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si

$$(2 - \lambda)(-\lambda) - (-1) \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \{-1\}.$$

1. D'après la question précédente, l'unique valeur propre de A est -1. Supposons par l'absurde que A soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$= P(-I_2)P^{-1} = -I_2.$$

Or, $A \neq -I_2$, donc on obtient une contradiction et A n'est pas diagonalisable.

Solution de l'exercice 4. Soit A diagonalisable dont l'unique valeur propre est λ_0 . Alors, il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P(\lambda_0 I_n) P^{-1}$$
$$= \lambda_0 I_n.$$

Ainsi, l'ensemble recherché ne contient qu'un seul élément et vaut $\{\lambda_0 I_n\}$.

Solution de l'exercice 5.

1. On remarque que

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 4\\8\\8 \end{pmatrix} = 4X_1.$$

Comme X_1 est non nul et $AX_1 = 4X_1$, alors X_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

De même,

$$AX_2 = \begin{pmatrix} -4\\-2\\4 \end{pmatrix} = -2X_2.$$

Comme X_2 est non nul et $AX_2 = -2X_2$, alors X_2 est vecteur propre de A associé à la valeur propre -2.

Enfin,

$$AX_3 = \begin{pmatrix} -2\\2\\-1 \end{pmatrix} = X_3.$$

Comme X_3 est non nul et $AX_3 = X_3$, alors X_3 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

2. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'après les formules de changement de base.

$$A = PDP^{-1}.$$

Solution de l'exercice 6.

1. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

D 2

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$Rg(A - \lambda I_3) = Rg\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad L_{1 \leftrightarrow L_2}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad L_{2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 - \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \quad L_{3 \leftrightarrow L_2}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 2\lambda \end{pmatrix} \quad L_{3 \leftrightarrow L_3 - (1 - \lambda^2)L_2}.$$

Ainsi,

$$Rg(A - \lambda I_3) < 3$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$$

$$= 0$$

Les valeurs propres de A sont donc $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Soit
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) = \text{Ker}(A)$$
. Alors,

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$E_0(A) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(A) = \text{Ker}(A)$$
. Alors,

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ x + z = \sqrt{2}y \\ y = \sqrt{2}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ -\sqrt{2}x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ -y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

$$y - \sqrt{2}z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ -y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$E_{\sqrt{2}}(A) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1\\\sqrt{2}\\1 \end{pmatrix} \right\}.$$

De manière analogue,

$$E_{-\sqrt{2}}(A) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finalement, en posant $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, alors

 $A = PDP^{-1}.$

II - Réduction & Application

Solution de l'exercice 7.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant des opérations élémentaires,

$$Rg(A - \lambda I_{3}) = Rg\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 3 - \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \quad L_{2 \leftrightarrow L_{1}}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - (2 - \lambda)(3 - \lambda) & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \quad L_{2 \leftarrow L_{2} - (3 - \lambda)L_{1}}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \\ 0 & -\lambda^{2} + 5\lambda - 7 & 1 \end{pmatrix} \quad L_{3 \leftrightarrow L_{2}}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 1 - (-\lambda^{2} + 5\lambda - 7)(1 - \lambda) \end{pmatrix} \quad L_{3 \leftarrow L_{3} - (-\lambda^{2} + 5\lambda - 7)L_{2}}. \quad \text{Ainsi, } E_{2}(A) = \text{Vect } \{ (0 & 1 & 1) \}.$$

$$\mathbf{3. a)} \quad D^{\text{après la question précédent}}$$

Ainsi, $Rg(A - \lambda I_3) < 3$ si et seulement si

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0$$
$$-(\lambda - 2)^3 = 0$$
$$\lambda = 2.$$

Ainsi, l'unique valeur propre de A est 2.

Supposons par l'absurde que A est diagonalisable. Il existe une matrice P inversible telle que $A = P(2I_3)P^{-1} = 2I_3$. On obtient ainsi une contradiction et A n'est pas inversible.

2. Soit
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A)$$
. Alors,

$$AX = 2X$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z &= 2x \\ x + 2y &= 2y \\ y + z &= 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases}$$

3. a) D'après la question précédente, on cherche e_1 tel que $e_1 \in E_2(f)$. On pose donc $e_1 = (0, 1, 1)$.

b) D'après la définition de f,

$$f(e_2) = e_1 + 2e_2$$
$$(3a - b - 1, a + 2b, b - 1) = (0, 1, 1) + 2(a, b, -1).$$

Ainsi.

$$\begin{cases} 3a - b - 1 &= 2a \\ a + 2b &= 1 + 2b \Leftrightarrow \\ b - 1 &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b &= 1 \\ a &= 1 \\ b &= 0 \end{cases}$$

On pose ainsi $e_2 = (1, 0, -1)$.

c) D'après la définition de f,

$$f(e_3) = e_2 + 2e_3$$
$$(3c - d + 2, c + 2d, d + 2) = (1, 0, -1) + 2(c, d, 2).$$

Ainsi,

$$\begin{cases} 3c - d + 2 &= 1 + 2c \\ c + 2d &= 2d \\ d + 2 &= -1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - d &= -1 \\ c &= 0 \\ d &= 1 \end{cases}$$

On pose ainsi $e_3 = (0, 1, 2)$.

d) Montrons que (e_1, e_2, e_3) est libre. Soit λ, μ, ν des réels tels que

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= 0\\ \lambda + \nu &= 0\\ \lambda - \mu + 2\nu &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= 0\\ \lambda + \nu &= 0\\ \lambda + 2\nu &= 0 \end{cases}$$

soit $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Ainsi, \mathscr{B} est une famille libre composée de 3 vecteurs de \mathbb{R} , espace vectoriel de dimension 3, donc \mathscr{B} est une base de \mathbb{R}^3 .

De plus, d'après les questions précédentes, $Mat_{\mathscr{B}}(f) = T$.

4. D'après les questions précédentes,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons l'inverse de T en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & L_{1} \leftarrow L_{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & L_{2} \leftarrow L_{1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & L_{3} \leftarrow L_{3} \leftarrow L_{1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & L_{4} \leftarrow L_{1} \leftarrow L_{3} \leftarrow L_{2} \leftarrow L_{1} \leftarrow L_{1} \leftarrow L_{1} \leftarrow L_{2} \leftarrow L_{3} \leftarrow L_{4} \leftarrow L_{4$$

Ainsi,
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
.

5. Posons
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
. Alors, $T = 2I_3 + B$.

Comme $2I_3$ et B commutent, d'après la formule du binôme de Newton,

$$T^n = (2I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} B^k.$$

Or,
$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 et $B^3 = 0_3$. Ainsi, pour tout $n \ge 2$,

$$T^{n} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^{k}$$

$$= 2^{n} I_{3} + 2^{n-1} n B + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} B^{2}$$

$$= \binom{2^{n} \quad n2^{n-1} \quad n(n-1)2^{n-3}}{0 \quad 2^{n} \quad n2^{n-1}}$$

$$= \binom{0}{0} \quad 0 \quad 2^{n}$$

6. En utilisant les formules de changement de base,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$$
$$A = PTP^{-1}.$$

On montre ainsi par récurrence que

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

En utilisant la question précédente et en effectuant un produit matriciel,

$$A^{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \times 3^{n} & 1 - 3^{n} & 3^{n} - 1 \\ -2(2^{n} - 3^{n}) & 2^{n+2} - 3^{n} - 1 & -2^{n+1} + 3^{n} + 1 \\ -2(2^{n} - 3^{n}) & 2^{n+2} - 3^{n} - 3 & -2^{n+1} + 3^{n} + 3 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 8.

1. D'après la définition, pour tout n entier naturel, $v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = -1$. Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme -1. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2^n.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible, i.e. $\operatorname{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$.

Or,

$$Rg(A - \lambda I_3) = Rg\begin{pmatrix} -3 - \lambda & 4 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -4 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} -3 - \lambda & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \\ 0 & -2 - \lambda & -4 \end{pmatrix} \quad c_2 \leftrightarrow c_3$$

$$= Rg\begin{pmatrix} -3 - \lambda & -1 & 4 \\ 0 & -2 - \lambda & -4 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

Ainsi, $Rg(A - \lambda I_3) < 3$ si et seulement si $\lambda \in \{-3, -2, 2\}$.

3. D'après la question précédente, A possède trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.

En résolvant des systèmes linéaires, on obtient

$$E_{-3}(A) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_{-2}(A) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_{3}(A) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi, en posant
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A = PDP^{-1}$.

4. Montrons par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout n entier naturel.

Initialisation. Lorsque n=0. D'une part, $A^0=I_3$. D'autre part, $PD^0P^{-1}=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3$. Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{split} A^{n+1} &= A^n A \\ &= PD^n P^{-1} A, \; \text{ d'après l'H.R.} \\ &= PD^n P^{-1} PDP^{-1}, \; \text{ d'après la question 3.} \\ &= PD^n DP^{-1} \\ &= PD^{n+1} P^{-1}. \end{split}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre n + 1.

 ${\bf Conclusion.}$ Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.$$

5. Comme la matrice D est diagonale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0\\ 0 & (-2)^n & 0\\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour tout n entier naturel,

$$A^{n} = PD^{n}P^{-1} = \begin{pmatrix} (-3)^{n} & 2^{n} - (-2)^{n} & (-3)^{n} - (-2)^{n} \\ 0 & 2^{n} & 0 \\ 0 & (-2)^{n} - 2^{n} & (-2)^{n} \end{pmatrix}.$$

6. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3u_n + 4v_n - w_n \\ 2v_n \\ -4v_n + 2w_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$
$$= AU_n.$$

7. Montrons par récurrence que $U_n = A^n U_0$ pour tout n entier naturel. **Initialisation.** Lorsque n=0. Comme $A^0=I_3$, alors $A^0 U_0=I_3 U_0=U_0$. La propriété est donc vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = A^n U_0$. Alors,

$$U_{n+1} = AU_n$$
, d'après la question $\mathbf{6}$
= AA^nU_0 , d'après l'H.R.
= $A^{n+1}U_0$, d'après la définition des puissances

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre n + 1.

Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0.$$

8. En reprenant le résultat de la question 5.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n U_0$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-3)^n - 2^n + (-2)^n + 2(-3)^n - 2(-2)^n \\ -2^n \\ -(-2)^n + 2^n + 2(-2)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout n entier naturel,

$$\begin{cases} u_n &= -2^n - (-2)^n - (-3)^{n+1} \\ v_n &= -2^n \\ w_n &= 2^n + (-2)^n \end{cases}$$

Solution de l'exercice 9.

1. On utilise la définition du produit matriciel,

Lycée Ozenne 100 A. Camanes

2. D'après la question précédente,

$$A^{3} - 4A^{2} + A + 6I_{3} = 0$$

$$A^{3} - 4A^{2} + A = -6I_{3}$$

$$A\left[-\frac{1}{6}(A^{2} - 4A + I_{3})\right] = I_{3}.$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I_3).$$

3. On remarque que

$$R(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 8 = 0.$$

En utilisant une division euclidienne, on obtient

$$R(X) = (X - 2)(X^2 - 2X - 3).$$

4. On remarque que

$$R(X) = (X - 2)(X + 1)(X - 3).$$

Si λ est une valeur propre de A, il existe un vecteur X non nul tel que

$$AX = \lambda X$$

$$A^{2}X = A(\lambda X) = \lambda^{2}X$$

$$A^{3}X = A(A^{2}X) = \lambda^{2}AX = \lambda^{3}X.$$

Ainsi, d'après la question 1.,

$$(A^{3} - 4A^{2} + A + 6I_{3})X = 0_{3}X$$

$$A^{3}X - 4A^{2}X + AX + 6X = 0_{3,1}$$

$$\lambda^{3}X - 4\lambda^{2}X + \lambda X + 6X = 0_{3,1}$$

$$(\lambda^{3} - 4\lambda^{2} + \lambda + 6)X = 0_{3,1}$$

Comme X est non nul, alors $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$, soit $R(\lambda) = 0$. Ainsi, $\lambda \in \{-1, 2, 3\}$.

5. En résolvant des équations, on obtient

$$E_{-1}(A) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2\\0\\1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_{2}(A) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_{3}(A) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}.$$

6. Ainsi, A possède trois valeurs propres distinctes et A est diagonalisable.