

T.D. IX - Variables aléatoires à densité

I - Lois usuelles

Solution de l'exercice 1. Rappelons que

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}([3U \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[U \leq \frac{x}{3}\right]\right) \\ &= F_U\left(\frac{x}{3}\right). \end{aligned}$$

- * Si $\frac{x}{3} \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 0$, alors $F_X(x) = 0$.
- * Si $0 \leq \frac{x}{3} \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq x \leq 3$, alors $F_X(x) = \frac{x}{3}$.
- * Si $\frac{x}{3} \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq 3$, alors $F_X(x) = 1$.

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{3} & \text{si } x \in [0, 3] \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

Une densité f_X de X est donnée par la dérivée de F_X en les points où F_X est dérivable, soit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x \in [0, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 3])$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leq x]) = \mathbf{P}([U + 1 \leq x]) = \mathbf{P}([U \leq x - 1]) \\ &= F_U(x - 1). \end{aligned}$$

- * Si $x - 1 \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$, alors $F_Y(x) = 0$.
- * Si $0 \leq x - 1 \leq 1$, c'est-à-dire $1 \leq x \leq 2$, alors $F_Y(x) = x - 1$.
- * Si $x - 1 \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq 2$, alors $F_Y(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

Une densité f_Y de Y est donnée par la dérivée de F_Y en les points où F_Y est dérivable, soit

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 2])$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{2}X + 1 \leq x\right]\right) = \mathbf{P}([X \leq 2(x - 1)]) \\ &= F_U(2(x - 1)). \end{aligned}$$

- * Si $2(x - 1) \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$, alors $F_Z(x) = 0$.
- * Si $0 \leq 2(x - 1) \leq 1$, c'est-à-dire $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$, alors $F_Z(x) = 2(x - 1)$.
- * Si $2(x - 1) \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq \frac{3}{2}$, alors $F_Z(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 2(x - 1) & \text{si } x \in [1, \frac{3}{2}] \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Une densité f_Z de Z est donnée par la dérivée de F_Z en les points où F_Z est dérivable, soit

$$f_Z(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [1, \frac{3}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Z \hookrightarrow \mathcal{U} \left(\left[1, \frac{3}{2}\right] \right)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([W \leq x]) = \mathbf{P}([U^2 \leq x]).$$

- * Si $x \leq 0$, alors $[U^2 \leq x] = \emptyset$ et $F_W(x) = 0$.
- * Si $x \geq 0$, comme la fonction racine carrée est croissante et bijective et U est à valeurs positives,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([|U| \leq \sqrt{x}]) = \mathbf{P}([U \leq \sqrt{x}]) = F_U(\sqrt{x}).$$

- ★ Si $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$ c'est-à-dire $0 \leq x \leq 1$, alors $F_W(x) = \sqrt{x}$.
- ★ Si $\sqrt{x} \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq 1$, alors $F_W(x) = 1$.

Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Une densité f_W de W est donnée par la dérivée de F_W en les points où F_W est dérivable, soit

$$f_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition et la fonction exponentielle est croissante et bijective

$$\begin{aligned} F_H(x) &= \mathbf{P}([H \leq x]) = \mathbf{P}([\ln(U) \leq x]) = \mathbf{P}([U \leq e^x]) \\ &= F_U(e^x). \end{aligned}$$

- * e^x est une quantité toujours strictement positive.
- * Si $0 \leq e^x \leq 1$, c'est-à-dire $x \leq 0$, alors $F_H(x) = e^x$.
- * Si $e^x \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq 0$, alors $F_H(x) = 1$.

Finalement,

$$F_H(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Une densité f_H de H est donnée par la dérivée de F_H en les points où F_H est dérivable, soit

$$f_H(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition, la fonction exponentielle est croissante et bijective,

$$\begin{aligned} F_E(x) &= \mathbf{P}([E \leq x]) = \mathbf{P}([-\ln(U) \leq x]) = \mathbf{P}([\ln(U) \geq -x]) \\ &= \mathbf{P}([U \geq e^{-x}]) = 1 - \mathbf{P}([U \leq e^{-x}]) \\ &= 1 - F_U(e^{-x}). \end{aligned}$$

- * e^{-x} est une quantité toujours strictement positive.
- * Si $0 \leq e^{-x} \leq 1$, c'est-à-dire $x \geq 0$, alors $F_E(x) = 1 - e^{-x}$.
- * Si $e^{-x} \geq 1$, c'est-à-dire $x \leq 0$, alors $F_E(x) = 0$.

Finalement,

$$F_E(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f_E de E est donnée par la dérivée de F_E en les points où F_E est dérivable, soit

$$f_E(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît $E \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. □

Solution de l'exercice 2.

1. $R(\omega)$ est le plus petit des réels $R_1(\omega)$ et $R_2(\omega)$. Ainsi, $R(\omega) > x$ si et seulement si $R_1(\omega)$ et $R_2(\omega)$ sont strictement supérieurs à x . Ainsi,

$$\begin{aligned} [R > x] &= [R_1 > x] \cap [R_2 > x] \\ \mathbf{P}([R > x]) &= \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]). \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les propriétés de la fonction de répartition

et la question précédente,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \mathbf{P}([R \leq x]) = 1 - \mathbf{P}([R > x]) \\
 &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]), \text{ d'après 1.} \\
 &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x]) \times \mathbf{P}([R_2 > x]), \text{ par indépendance} \\
 &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x])^2, \text{ car } R_1 \text{ et } R_2 \text{ ont même loi} \\
 &= 1 - (1 - \mathbf{P}([R_1 \leq x]))^2.
 \end{aligned}$$

Comme $R_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, sa fonction de répartition satisfait :

$$\mathbf{P}([R_1 \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Ainsi,

* Si $x \leq 0$, alors

$$F(x) = 1 - (1 - 0)^2 = 0.$$

* Si $0 \leq x \leq 1$, alors

$$F(x) = 1 - (1 - x)^2 = x(2 - x).$$

* Si $x \geq 1$, alors

$$F(x) = 1 - (1 - 1)^2 = 1.$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x(2 - x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f de R est donnée par la dérivée de F en tout point où F est dérivable, soit

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. On cherche la probabilité que le minimum des deux distances soit inférieur à 50cm, soit

$$\mathbf{P}([R \leq 0,5]) = F(0,5) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

□

Solution de l'exercice 3. On note F_X la fonction de répartition de X . Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Comme X est à valeurs positives, alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Y = n) &= \mathbf{P}(\lfloor X \rfloor + 1 = n) = \mathbf{P}(\lfloor X \rfloor = n - 1) = \mathbf{P}(n - 1 \leq X < n) \\
 &= F_X(n) - F_X(n - 1) \\
 &= (1 - e^{-\lambda n}) - (1 - e^{-\lambda(n-1)}) \\
 &= e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda n} = e^{-\lambda(n-1)} \left(1 - \frac{1}{e^\lambda} \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - \frac{1}{e^\lambda}\right)$.

2. On note F_Z la fonction de répartition de Z . Alors,

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(Z \leq x) = \mathbf{P}(\sqrt{X} \leq x).$$

* Si $x \leq 0$, l'événement $[\sqrt{Z} \leq x]$ est impossible et $F_Z(x) = 0$.

* Si $x \geq 0$, comme la fonction carrée est croissante et bijective sur \mathbb{R}_+ ,

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(X \leq x^2) = 1 - e^{-\lambda x^2}.$$

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Une densité de Z est donnée par

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Sous réserve d'existence, $\mathbf{E}[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t) dt$.

Soit $x > 0$.

$$\int_{-\infty}^x t f_Z(t) dt = \int_0^x 2\lambda t^2 e^{-\lambda t^2} dt.$$

On pose $\begin{cases} u(t) = t \\ u'(t) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(t) = 2\lambda t e^{-\lambda t^2} \\ v'(t) = -e^{-\lambda t^2} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, x]$, donc d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x t f_Z(t) dt &= \left[t \times \left(-e^{-\lambda t^2} \right) \right]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t^2} dt \\ &= x e^{-\lambda x^2} + \int_0^x e^{-\lambda t^2} dt. \end{aligned}$$

Or, $\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\lambda}}$ est une densité de la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2\lambda})$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$. D'après la symétrie de cette densité, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

D'autre part, d'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\lambda x^2} = 0$. Ainsi, Z admet une espérance et

$$\mathbf{E}[Z] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

De plus, $\mathbf{E}[Z^2] = \mathbf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$. Ainsi,

$$\mathbf{V}(Z) = \mathbf{E}[Z^2] - \mathbf{E}[Z]^2 = \frac{1}{\lambda} - \frac{\pi}{4\lambda} = \frac{4 - \pi}{4\lambda}.$$

3. On note F_W la fonction de répartition de W . Alors,

$$F_W(x) = \mathbf{P}(W \leq x) = \mathbf{P}(X^2 \leq x).$$

- * Si $x \leq 0$, l'événement $[X^2 \leq x]$ est impossible et $F_W(x) = 0$.
- * Si $x \geq 0$, comme la fonction racine carrée est croissante et bijective sur \mathbb{R}_+ et X est à valeurs positives,

$$F_W(x) = \mathbf{P}(|X| \leq \sqrt{x}) = \mathbf{P}(X \leq \sqrt{x}) = 1 - e^{-\lambda \sqrt{x}}.$$

Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda \sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Une densité de W est donnée par

$$f_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda \sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Enfin, sous réserve d'existence,

$$\mathbf{E}[W] = \mathbf{E}[X^2] = \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ est continue sur \mathbb{R} . D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^{-t^2/2} = 0$, le théorème de compa-

raison aux intégrales de Riemann assure que $\int_{-\infty}^x f(t) dt$ converge.

Notons F la primitive de f qui s'annule en 0. D'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x f(t) dt$ existe et est finie. Notons $\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$. Alors, $\Phi(x) = F(x) - \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t)$. Ainsi, la fonction Φ est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi'(x) = f(x).$$

Comme $f > 0$, la fonction Φ est strictement croissante. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$ et, d'après la propriété de la loi normale,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

D'après le théorème de la bijection monotone, Φ réalise une bijection de \mathbb{R} dans $]0, 1[$.

2. En utilisant la notation précédente, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \mathbf{P}(-x < X < x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1.$$

Comme Φ réalise une bijection de \mathbb{R} dans $]0, 1[$, alors g réalise une bijection de \mathbb{R} dans $]0, 1[$ (car $g(0) = 0$). Ainsi, il existe un unique réel t_0 tel que $g(t_0) = 0,95$.

3. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8, 4)$, alors $\frac{X-8}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

a) En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X < 7,5) &= \mathbf{P}(X - 8 < -0,5) = \mathbf{P}\left(\frac{X-8}{2} < -0,25\right) \\ &= 1 - \Phi(0,25) \\ &\simeq 1 - 0,5987 \simeq 0,4013. \end{aligned}$$

b) En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X > 8,5) &= \mathbf{P}(X - 8 > 0,5) = \mathbf{P}\left(\frac{X-8}{2} > 0,25\right) \\ &= 1 - \Phi(0,25) \\ &\simeq 1 - 0,5987 \simeq 0,4013. \end{aligned}$$

c) En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(6,5 < X < 10) &= \mathbf{P}(-2,5 < X - 8 < 2) = \mathbf{P}\left(-1,25 < \frac{X-8}{2} < 1\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1,25) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1,25)) \\ &\simeq 0,8413 - 1 + 0,8943 \\ &\simeq 0,7356. \end{aligned}$$

d) En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{[X>5]}(X > 6) &= \frac{\mathbf{P}([X < 6] \cap [X > 5])}{\mathbf{P}(X > 5)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(5 < X < 6)}{\mathbf{P}(X > 5)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(-1,5 < \frac{X-8}{2} < -1)}{\mathbf{P}(\frac{X-8}{2} > -1,5)} \\ &= \frac{\Phi(-1) - \Phi(-1,5)}{1 - \Phi(-1,5)} \\ &= \frac{1 - \Phi(1) - (1 - \Phi(1,5))}{1 - (1 - \Phi(1,5))} \\ &= \frac{\Phi(1,5) - \Phi(1)}{\Phi(1,5)} \\ &\simeq \frac{0,9332 - 0,8413}{0,9332} \simeq 0,0985. \end{aligned}$$

□

II - Densités

Solution de l'exercice 5.

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

* D'après les théorèmes généraux, f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en -1 et 1 .

Comme $\lim_{t \rightarrow -1^-} f(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) = 1 - 1 = 0$, alors f est continue en -1 .

Comme $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 1 - 1 = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 0$, alors f est continue en 1 .

Finalement, f est continue sur \mathbb{R} .

* Pour tout $t \in [-1, 1]$, alors $|t| \in [0, 1]$ et $1 - |t| \geq 0$. Ainsi, comme f est nulle en dehors du segment $[-1, 1]$, alors f est positive ou nulle sur \mathbb{R} .

* Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$

converge et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_{-1}^1 (1 - |t|) dt = \int_{-1}^0 (1 - |t|) dt + \int_0^1 (1 - |t|) dt \\ &= \int_{-1}^0 (1 + t) dt + \int_0^1 (1 - t) dt \\ &= \left[\frac{(1+t)^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{(1-t)^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1-0}{2} + \frac{-0+1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Finalement, la fonction f est bien une densité de probabilité.

2. Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-1}^1 tf(t) dt = \int_{-1}^0 t(1 - |t|) dt + \int_0^1 t(1 - |t|) dt \\ &= \int_{-1}^0 t(1 + t) dt + \int_0^1 t(1 - t) dt.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $\varphi : [0, 1] \rightarrow [-1, 0]$, $u \mapsto -u$ dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_1^0 -u(1 - u)(-1) du + \int_0^1 t(1 - t) dt \\ &= -\int_0^1 u(1 - u) du + \int_0^1 t(1 - t) dt = 0.\end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \mathbf{E}[X^2] - 0 \\ &= \int_{-1}^1 t^2 f(t) dt = \int_{-1}^0 t^2(1 - |t|) dt + \int_0^1 t^2(1 - |t|) dt \\ &= \int_{-1}^0 t^2(1 + t) dt + \int_0^1 t^2(1 - t) dt \\ &= \int_1^0 (-u)^2(1 - u)(-1) du + \int_0^1 t^2(1 - t) dt \\ &= \int_0^1 u^2(1 - u) du + \int_0^1 t^2(1 - t) dt \\ &= 2 \left(\int_0^1 t^2 dt - \int_0^1 t^3 dt \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 6.

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

- * Comme l'exponentielle est à valeurs strictement positives, le dénominateur de f ne s'annule pas et la fonction f est continue sur \mathbb{R} .
- * Comme l'exponentielle est à valeurs strictement positives, alors f est à valeurs strictement positives.
- * Soit $y < 0 < x$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_y^x f(t) dt &= \int_y^x \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{1 + e^{-t}} \right]_y^x \\ &= \frac{1}{1 + e^{-x}} - \frac{1}{1 + e^{-y}}.\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle,

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^x f(t) dt = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(t) dt = 1.$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité.

2. En utilisant la question précédente, pour tout x réel,

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} dt = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

3. On remarque que

$$\varphi(x) = \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}.$$

Ainsi, la fonction φ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$.

Ainsi, φ réalise une bijection de \mathbb{R} dans $] -1, 1[$.

4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in] -1, 1[$ tels que :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= y \\ 1 - \frac{2}{e^x + 1} &= y \\ \frac{2}{e^x + 1} &= 1 - y \\ e^x + 1 &= \frac{2}{1 - y} \\ e^x &= \frac{2}{1 - y} - 1 = \frac{1 + y}{1 - y} \\ x &= \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction φ est bijective et $\varphi^{-1} : y \mapsto \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Comme Y est à valeurs dans $[-1, 1]$,

★ Si $x \leq -1$, alors $G(x) = 0$.

★ Si $x \geq 1$, alors $G(x) = 1$.

* Si $x \in] -1, 1[$, comme φ^{-1} est strictement croissante et bijective,

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbf{P}(Y \leq x) = \mathbf{P}(\varphi(X) \leq x) \\ &= \mathbf{P}(X \leq \varphi^{-1}(x)) = F(\varphi^{-1}(x)) \\ &= \frac{1}{1 + \exp \left(-\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{1+x}{1+x+1-x} \\ &= \frac{1+x}{2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1+x}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Une densité g est donnée par la dérivée de G en tout point où G est dérivable, soit

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in] -1, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$. □

Solution de l'exercice 7.

1. Déterminons les valeurs de C telles que f_α soit une densité de probabilité.

* La fonction f_α est continue sauf en 1, point en lequel elle admet des limites finies à gauche et à droite car

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = C.$$

* Comme f_α est non nulle pour $t \geq 1$, et que $t^{\alpha+1}$ est positif pour $t \geq 1$, alors f_α est positive si et seulement si $C \geq 0$.

* Soit $x \geq 1$.

$$\int_{-\infty}^x f_{\alpha}(t) dt = \int_1^x \frac{C}{t^{\alpha+1}} dt = C \left[-\frac{1}{\alpha t^{\alpha}} \right]_1^x = \frac{C}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha}} \right).$$

Comme $\alpha > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha}(t) dt = \frac{C}{\alpha}$.

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha}(t) dt = 1$ si et seulement si $C = \alpha$.

Finalement, comme $\alpha > 0$, alors f_{α} est une densité de probabilité si et seulement si $C = \alpha$.

2. En utilisant le calcul précédent,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{\alpha}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. Sous réserve d'existence, $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{\alpha}(t) dt$. Soit $x \geq 1$. Alors,

$$\int_{-\infty}^x t f_{\alpha}(t) dt = \int_1^x \frac{\alpha}{t^{\alpha}} dt.$$

* Si $\alpha = 1$. Alors, $\int_{-\infty}^x t f_1(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x)$. Ainsi,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x t f_1(t) dt = +\infty$ et X n'admet pas d'espérance.

* Si $\alpha \neq 1$. Alors,

$$\int_1^x \frac{\alpha}{t^{\alpha}} dt = \left[-\frac{\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} \right]_1^x = \frac{\alpha}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right).$$

Or,

★ si $\alpha > 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{\alpha}(t) dt = \frac{\alpha}{\alpha-1}$
donc X admet bien une espérance ;

★ si $\alpha < 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{\alpha}(t) dt$ diverge
donc X n'admet pas d'espérance.

Finalement, X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$. Alors,

$$\mathbf{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Sous réserve d'existence, $\mathbf{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{\alpha}(t) dt - \mathbf{E}[X]^2$.

Soit $x \geq 1$. Alors,

$$\int_{-\infty}^x t^2 f_{\alpha}(t) dt = \int_1^x \frac{\alpha}{t^{\alpha-1}} dt.$$

* Si $\alpha = 2$, alors $\int_{-\infty}^x t^2 f_2(t) dt = \int_1^x \frac{2}{t} dt = 2 \ln(x)$. Ainsi,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x t^2 f_2(t) dt = +\infty$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_2(t) dt$ diverge.

Ainsi, X n'admet pas de variance.

* Si $\alpha \neq 2$. Alors,

$$\int_{-\infty}^x t^2 f_{\alpha}(t) dt = \left[-\frac{\alpha}{(\alpha-2)t^{\alpha-2}} \right]_1^x = \frac{\alpha}{\alpha-2} \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-2}} \right).$$

Or,

★ si $\alpha > 2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-2}} = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{\alpha}(t) dt = \frac{\alpha}{\alpha-2}$;

★ si $\alpha < 2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-2}} = +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-2}} dt$ diverge.

Ainsi, X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$. Alors,

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{\alpha}(t) dt = \frac{\alpha}{\alpha-2}$$

et

$$\mathbf{V}(X) = \frac{\alpha}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 = \alpha \frac{(\alpha-1)^2 - \alpha(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}.$$

4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et F_Y la fonction de répartition de Y .

$$F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leq x) = \mathbf{P}(X^2 \leq x).$$

* Si $x \leq 0$, alors $[X^2 \leq x]$ est impossible et $F_Y(x) = 0$.

- * Si $x \geq 0$, comme la fonction racine carrée est croissante et bijective et X est à valeurs positives, alors

$$F_Y(x) = \mathbf{P}(X \leq \sqrt{x}).$$

- ★ Si $\sqrt{x} \leq 1$, soit $x \leq 1$, alors $F_Y(x) = 0$.
 ★ Si $\sqrt{x} \geq 1$, soit $x \geq 1$, alors

$$F_Y(x) = F(\sqrt{x}) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha/2}}$$

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{\alpha/2}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f_Y de Y est donnée par

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\alpha/2}{x^{\alpha/2+1}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, Y suit une loi de Pareto de paramètre $\frac{\alpha}{2}$. Elle admet une espérance si et seulement si $\frac{\alpha}{2} > 1$, soit $\alpha > 2$ et alors

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 2}.$$

5. Soient $x \in \mathbb{R}$ et F_T la fonction de répartition de T .

$$F_T(x) = \mathbf{P}(T \leq x) = \mathbf{P}(\sqrt{X} \leq x).$$

- * Si $x \leq 0$, alors $[\sqrt{X} \leq x]$ est impossible et $F_T(x) = 0$.
 * Si $x \geq 0$, comme la fonction carrée est croissante et bijective, alors

$$F_T(x) = \mathbf{P}(X \leq x^2).$$

- ★ Si $x^2 \leq 1$, soit $0 \leq x \leq 1$, alors $F_T(x) = 0$.
 ★ Si $x^2 \geq 1$, soit $x \geq 1$, alors

$$F_T(x) = F(x^2) = 1 - \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

Finalement,

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{2\alpha}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f_T de T est donnée par

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2\alpha}{x^{2\alpha+1}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, T suit une loi de Pareto de paramètre 2α . Elle admet une espérance si et seulement si $2\alpha > 1$, soit $\alpha > \frac{1}{2}$ et alors

$$\mathbf{E}[T] = \frac{2\alpha}{2\alpha - 1}.$$

□

III - Estimation

Solution de l'exercice 8.

1. En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[T_1] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \mathbf{E}[X_3] + \mathbf{E}[X_4]}{4} = \mathbf{E}[X_1] = \frac{2\theta}{2} = \theta,$$

$$\mathbf{E}[T_2] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + 2\mathbf{E}[X_2] + 3\mathbf{E}[X_3] + 4\mathbf{E}[X_4]}{10} = \mathbf{E}[X_1] = \frac{2\theta}{2} = \theta.$$

Ainsi, T_1 et T_2 sont des estimateurs sans biais de θ .

2. Comme les estimateurs sont sans biais, leur risque quadratique est égal à leur variance. De plus, comme les v.a. sont indépendantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(T_1) &= \frac{\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + \mathbf{V}(X_3) + \mathbf{V}(X_4)}{16} = \frac{\mathbf{V}(X_1)}{4} \\ &= \frac{(2\theta)^2}{48} = \frac{\theta^2}{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(T_2) &= \frac{\mathbf{V}(X_1) + 4\mathbf{V}(X_2) + 9\mathbf{V}(X_3) + 16\mathbf{V}(X_4)}{100} = \frac{30\mathbf{V}(X_1)}{100} \\ &= \frac{(2\theta)^2}{40} = \frac{\theta^2}{10}. \end{aligned}$$

3. Ainsi, T_1 a un risque quadratique plus faible que T_2 et est donc préférable. \square

Solution de l'exercice 9.

1. Notons F_X la fonction de répartition de X et F_n la fonction de répartition de M_n . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbf{P}(M_n \leq x) = \mathbf{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq x) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x]\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(X_k \leq x), \text{ d'après l'indépendance} \\ &= F_n(x)^n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{2\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0, 2\theta] \\ 1 & \text{si } x \geq 2\theta \end{cases}.$$

Ainsi, une densité f_n de M_n est donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{(2\theta)^n} x^{n-1} & \text{si } x \in [0, 2\theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme f_n est nulle en dehors d'un segment, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt$ converge et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = \int_0^{2\theta} t \times \frac{n}{(2\theta)^n} t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{(2\theta)^n} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^{2\theta} = \frac{n}{(n+1)} 2\theta. \end{aligned}$$

Comme f_n est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_n^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t) dt = \int_0^{2\theta} t^2 \times \frac{n}{(2\theta)^n} t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{(2\theta)^n} \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^{2\theta} = \frac{n}{n+2} (2\theta)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(M_n) &= \mathbf{E}[M_n^2] - \mathbf{E}[M_n]^2 = \frac{n}{n+2} (2\theta)^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 (2\theta)^2 \\ &= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} (2\theta)^2. \end{aligned}$$

2. Comme U_n est une fonction du n -échantillon (X_1, \dots, X_n) , alors U_n est un estimateur.

D'après la question précédente,

$$\mathbf{E}[U_n] = \frac{n+1}{2n} \mathbf{E}[M_n] = \theta.$$

Ainsi, U_n est un estimateur sans biais de θ .

3. Comme \bar{X}_n est une fonction du n -échantillon (X_1, \dots, X_n) , alors \bar{X}_n est un estimateur de θ .

D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i] = \frac{n2\theta}{2n} = \theta.$$

Ainsi, \bar{X}_n est un estimateur sans biais de θ .

4. Comme les variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) = \frac{1}{n} \times \frac{(2\theta)^2}{12} = \frac{(2\theta)^2}{12n}.$$

Comme \bar{X}_n et U_n sont des estimateurs sans biais de θ , nous recherchons celui qui a le biais quadratique (i.e. la variance) la plus faible. Or,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{V}(\bar{X}_n)}{\mathbf{V}(U_n)} &= \frac{\frac{(2\theta)^2}{12n}}{\frac{n}{(n+1)^2(n+2)} (2\theta)^2} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)}{12n^2}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} (n+1)^2(n+2) - 12n^2 &= (n-1)(n^2 - 7n - 2) \\ &= (n-1) \left(n - \frac{7 - \sqrt{57}}{2} \right) \left(n - \frac{7 + \sqrt{57}}{2} \right). \end{aligned}$$

Comme $\frac{7+\sqrt{57}}{2} \simeq 7,27$, alors le biais de U_n est inférieur à celui de \bar{X}_n dès que $n \geq 8$. \square

Solution de l'exercice 10.

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en θ .

De plus, $\lim_{t \rightarrow \theta^-} f(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \theta^+} f(t) = e^{-(\theta-\theta)} = 1$ donc la fonction f admet des limites finies à gauche et à droite en θ .

* Comme la fonction exponentielle est à valeurs positives, alors f est à valeurs positives.

* Soit $x \geq \theta$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_{\theta}^x e^{-(t-\theta)} dt \\ &= e^{\theta} [-e^{-t}]_{\theta}^x \\ &= e^{\theta} (e^{-\theta} - e^{-x}) \\ &= 1 - e^{\theta-x}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\theta-x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité.

2. En posant $Y = T - \theta$, on remarque que $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Ainsi,

$$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[Y + \theta] = 1 + \theta \text{ et } \mathbf{V}(T) = \mathbf{V}(Y + \theta) = 1.$$

3. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[T_i] = \mathbf{E}[T] = 1 + \theta.$$

Comme les variables aléatoires (T_1, \dots, T_n) sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(T_i) = \frac{1}{n}.$$

4. Comme \hat{Y}_n est une fonction du n -échantillon (T_1, \dots, T_n) , alors \hat{Y}_n est un estimateur.

D'après la question précédente, $\mathbf{E}[\hat{Y}_n] = \mathbf{E}[Y_n] - 1 = \theta$.

Ainsi, \hat{Y}_n est un estimateur sans biais de θ .

5. Comme \hat{Y}_n est un estimateur sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance et, d'après les questions précédentes,

$$\mathbf{V}(\hat{Y}_n) = \mathbf{V}(Y_n - 1) = \mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n}.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbf{P}(\min\{T_1, \dots, T_n\} \leq x) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\max\{T_1, \dots, T_n\} > x) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [T_i > x]\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(T_i > x), \text{ d'après l'indépendance} \\ &= 1 - (1 - F(x))^n. \end{aligned}$$

7. En utilisant la densité f , on remarque que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \theta \\ 1 - e^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta. \end{cases}$$

Ainsi,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \theta \\ 1 - e^{-n(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta. \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_n admet donc comme densité

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ n e^{-n(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta. \end{cases}$$

8. Soit $x \geq \theta$. En utilisant la densité précédente puis une intégration par parties,

$$\int_{-\infty}^x t f_n(t) dt = n e^{n\theta} \int_{\theta}^x t e^{-nt} dt = n e^{n\theta} \frac{(n\theta + 1) e^{-n\theta} - (nx + 1) e^{-nx}}{n^2}.$$

Ainsi, Z_n admet une espérance et $\mathbf{E}[Z_n] = \frac{n\theta+1}{n}$.

De manière analogue,

$$\int_{-\infty}^x t^2 f(t) dt = n e^{n\theta} \frac{(n^2\theta^2 + 2n\theta + 2)e^{-n\theta} - (n^2x^2 + 2nx + 2)e^{-nx}}{n^3},$$

soit $\mathbf{E}[Z_n^2] = \frac{n^2\theta^2 + 2n\theta + 2}{n^2}$.

Ainsi, $\mathbf{V}(Z_n) = \mathbf{E}[Z_n^2] - \mathbf{E}[Z_n]^2 = \frac{1}{n^2}$.

Remarque. On aurait également pu constater que $Z_n - \theta \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$.

9. Comme \hat{Z}_n est une fonction de T_1, \dots, T_n , alors Z_n est un estimateur. Comme $\mathbf{E}[Z_n] = \theta + \frac{1}{n}$, alors $\mathbf{E}[Z_n - \frac{1}{n}] = \theta$ et \hat{Z}_n est un estimateur sans biais de θ .

10. D'après les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}(\hat{Z}_n) = \mathbf{V}\left(Z_n - \frac{1}{n}\right) = \mathbf{V}(Z_n) = \frac{1}{n^2}.$$

11. Comme \hat{Y}_n est \hat{Z}_n sont deux estimateurs sans biais de θ , alors leurs risques quadratiques sont égaux à leurs variances. De plus, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbf{V}(\hat{Z}_n) = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} = \mathbf{V}(\hat{Y}_n).$$

Ainsi, l'estimateur \hat{Z}_n est préférable à \hat{Y}_n . \square