Intégration sur un intervalle quelconque

Chapitre V

■ ■ ■

I. Intégration sur un segment

Exercice 1. (✍) Étudier la fonction $f : x \mapsto \int_0^x \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2. (Fonction bêta, ✍, ♡) Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, \mathrm{d}x$.

1. Déterminer une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.

2. Exprimer la valeur de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

Exercice 3. (✍) Montrer qu'il n'existe pas de fonction g continue sur $[0,1]$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, $\int_0^1 \max\{x,t\} \, g(t) \, \mathrm{d}t = 1$.

Exercice 4. (✎) [TPE] Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t$. Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Exercice 5. Soit f une fonction deux fois dérivable définie sur $[0,1]$ telle que $f'' \leqslant 0$. En commençant par étudier le cas où $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, montrer que $\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 6. Déterminer les limites des suites suivantes.

1. $u_n = \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n} \tan \frac{k\pi}{4n}$.

2. $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$.

3. $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$.

II. Convergence d'intégrales - Intégrabilité

Exercice 7. Étudier l'intégrabilité, en fonction des paramètres éventuels, des fonctions sur les domaines indiqués. On suppose $a > -1$.

1. $x \mapsto \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2}$ sur $]0,1]$

2. $x \mapsto \frac{\ln(|1-x|)}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}$, $]-\infty, 0]$

3. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ sur $]0,+\infty[$

4. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2 \ln^2(x)}$ sur $[2,+\infty[$

Exercice 8. [ENSAM] Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ définie sur $]1,+\infty[$.

1. Étudier et tracer la fonction f.

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2-n^2}}$.

2. Étudier la convergence et la limite de la suite (S_n).

3. Même question avec la suite (nS_n).

Exercice 9. (Intégrales de FRESNEL) Déterminer la nature de

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) \, \mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(t^2) \, \mathrm{d}t$$

Exercice 10. [CCP] Donner la nature des intégrales

1. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin(t)}}{t} \, \mathrm{d}t$

2. $J = \int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$ converge. Montrer que, pour tout réel x positif, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 12. [ENSAM] Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles. On suppose que f et f'' sont de carrés intégrables. Montrer que f' est de carré intégrable et que

$$\left(\int_0^{+\infty} (f')^2\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)\left(\int_0^{+\infty} (f'')^2\right).$$

Exercice 13. [Mines] Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$; donner une expression de f'.

2. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0, et quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que f est intégrable et donner une expression de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

III. Calculs d'intégrales

Exercice 14. [ENSAM] Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15. [Mines] Montrer l'existence puis calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3x)-\tanh(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16. [CCP] Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $a<b$ et $f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que pour tout $x\in[a,b]$, $f(a+b-x)=f(x)$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17. [CCP] Soient $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I et J sont convergentes et que $I=J$.

2. Calculer $I+J$ et en déduire I et J.

Exercice 18. (Polynômes d'Hermite) [TPE] Soit $f : x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = f(x)P_n(x)$. Préciser le degré, la parité et le coefficient dominant de P_n.

2. Montrer l'existence puis calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 19. Montrer la convergence et déterminer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ | **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ | **3.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3\ln(x)}{(1+x^4)^3}\mathrm{d}x$

Exercice 20. (Intégrale de Gauss, ♡)

1. Montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \sim \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

En utilisant les intégrales de Wallis, on montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 21. [Mines] Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

IV. Avec Python

Exercice 22. [Centrale] Pour $n\geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{n\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2}\,\mathrm{d}x$.

1. a) Justifier l'existence de I_n.

b) Écrire une fonction Python qui calcule I_n. Conjecturer, à l'aide de l'ordinateur, la valeur de I_n (on ne demande pas de preuve).

2. a) Justifier l'existence de J_n.

b) À l'aide de l'ordinateur, conjecturer la convergence de la suite (J_n) puis la prouver en utilisant I_n.

c) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur.

Mathématiciens

Wallis John (23 nov. 1616 à Ashford-28 oct. 1703 à Oxford).
Gauss Johann Carl Friedrich (30 avr. 1777 à Brunswick-23 fév. 1855 à Göttingen).
Fresnel Augustin (10 mai 1788 à Broglie-14 juil. 1827 à Ville d'Avray).
Hermite Charles (24 déc. 1822 à Dieuze-14 jan. 1901 à Paris).