VIII - Probabilités

I - L'univers

À Savoir

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.

Exemple 1

Les résultats obtenus à l'issue de deux lancers successifs d'un dé.

À Savoir

L'**univers** est l'ensemble des résultats possibles pour une expérience. Généralement noté Ω.

Exemple 2 - 2 lancers d'un dé

$\Omega = \{(i,j),\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 6\} = [\![1,6]\!]^2$

À Savoir

Un **événement** est une partie (ou sous-ensemble) de l'univers Ω.

Exemple 3 - 2 lancers d'un dé

A : *obtenir un nombre pair lors du premier lancer.*
B : *la somme des deux lancers est un nombre pair.*

À Savoir

Deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$

Exemple 4 - 2 lancers d'un dé

A : *obtenir un nombre pair lors du premier lancer.*
B : *la somme des deux lancers vaut* 2.
Si on considère l'événement $A \cap B$, le premier dé renvoie un nombre pair, donc supérieur ou égal à 2. Comme le second dé renvoie au moins 1, la somme des deux est supérieure ou égale à 3. Ainsi, A et B sont incompatibles.

À Savoir

L'événement **contraire** de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des expériences de Ω qui ne sont pas dans A.

Exemple 5 - 2 lancers d'un dé

A : *obtenir un nombre pair lors du premier lancer.*
$\overline{A}$: *obtenir un nombre impair lors du premier lancer.*

À Savoir

Un **système complet d'événements** est une famille d'événements $A_1, \ldots, A_n$ tels que

$$\begin{cases} A_i \neq \emptyset & \forall\ 1 \leqslant i \leqslant n \\ A_i \cap A_j = \emptyset & \forall\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \\ \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega & \end{cases}$$

Exemple 6 - 2 lancers d'un dé

A_2 : *la somme des deux résultats vaut* 2.
A_3 : *la somme des deux résultats vaut* 3.

...
A_{12} : *la somme des deux résultats vaut* 12.
$(A_2, \dots, A_{12})$ est un système complet d'événements.

II - Probabilité

À Savoir

Une **probabilité** sur un ensemble fini Ω est une application définie sur l'ensemble des événements et à valeurs dans $[0,1]$ telle que

* $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
* si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbf{P}(A \sqcup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

À Savoir

L'**équiprobabilité** est la probabilité définie (lorsque Ω est fini) par $\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Exemple 7 - 2 lancers d'un dé équilibré

A : *le résultat du premier lancer est pair.*

$$A = \{(2i, j),\ 1 \leqslant i \leqslant 3,\ 1 \leqslant j \leqslant 6\}.$$
$$\mathbf{P}(A) = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}.$$

À Savoir

* $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
* $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Exemple 8 - 2 lancers d'un dé équilibré

A : *le résultat du premier lancer est pair.*
C : *le résultat du second lancer est pair.*
$A \cup C$: *le résultat d'un des lancers est pair.*

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2},$$
$$A \cap C = \{(2i, 2j),\ 1 \leqslant i, j \leqslant 3\},$$
$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}(A \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

À Savoir

Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$, alors la **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B vaut $\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$.

Exemple 9 - 2 lancers d'un dé équilibré

A : *le résultat du premier lancer est un* 2.
B : *le résultat du premier lancer est pair.*
On a vu précédemment que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

Si le résultat du premier lancer est 2, alors le résultat est pair. Ainsi, $A \cap B = A$ et

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}.$$

Finalement, la probabilité que le résultat du premier lancer soit égal à 2 sachant qu'il est pair est égale à

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

À Savoir

Formule des probabilités composées. Si $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Cette formule est utile lorsque l'expérience est une succession d'étapes qui ont une influence les unes sur les autres.

Exemple 10 - Une urne

Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules noires. On effectue 4 tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 2 boules rouges puis 2 boules noires ?
On note :
A_1 : *la première boule tirée est rouge.*
A_2 : *la seconde boule tirée est rouge.*
A_3 : *la troisième boule tirée est noire.*
A_4 : *la quatrième boule tirée est noire.*
Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) &= \mathbf{P}(A_1)\times\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\times\cdots\\ &\quad\cdots\times\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4)\\ &= \frac{10}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{5}{13}\times\frac{4}{12}\\ &= \frac{5}{13\times 7}.\end{aligned}$$

À Savoir

Formule des probabilités totales. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A\cap A_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_{A_i}(A)\,\mathbf{P}(A_i).$$

Cette formule est utile lorsque le résultat d'une expérience peut être plus facile à décrire lorsqu'on le décompose selon différents cas possibles.

Exemple 11 - La même urne

Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge ? On distingue les cas où la première boule tirée est rouge (événement A_1) et les cas où la première boule tirée est noire (événement $\overline{A_1}$). Comme $(A_1, \overline{A_1})$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_2) &= \mathbf{P}(A_2\cap A_1) + \mathbf{P}\left(A_2\cap\overline{A_1}\right)\\ &= \frac{10}{15}\times\frac{9}{14}+\frac{5}{15}\times\frac{10}{14}\\ &= \frac{10\times 14}{15\times 14} = \frac{5\times 2\times 14}{5\times 3\times 14} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

À Savoir

Formule de Bayes. Si $\mathbf{P}(A)\neq 0$ et $\mathbf{P}(B)\neq 0$,

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}_B(A)\,\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Exemple 12 - La même urne

L'expérimentateur tire successivement 2 boules et cache le résultat de son premier tirage. Sachant que le second tirage est une boule rouge, quelle est la probabilité que le premier tirage soit une boule rouge ?

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{A_2}(A_1) &= \frac{\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\times\mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(A_2)}\\ &= \frac{\frac{9}{14}\times\frac{10}{15}}{\frac{2}{3}}\\ &= \frac{9}{14}.\end{aligned}$$

III - Indépendance

À Savoir

A et B sont **indépendants** si $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Exemple 13 - 2 lancers d'un dé équilibré

A : *le résultat du premier lancer est pair.*
C : *le résultat du premier lancer est un multiple de* 3.

$$C = \{(3i, j),\ 1 \leqslant i \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant 6\}$$
$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(C) = \frac{2\times 6}{6\times 6} = \frac{1}{3}$$
$$A\cap C = \{(6, j),\ 1 \leqslant j \leqslant 6\}$$
$$\mathbf{P}(A\cap C) = \frac{6}{6\times 6} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi, $\mathbf{P}(A\cap C) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(C)$. Les événements A et C sont indépendants.

À Savoir

Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si pour tout $J \subset [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbf{P}(A_j)$.

Peut être utilisé entre les différents lancers d'une pièce, d'un dé, d'un tirage avec remise,...