## T.D. X - Réduction

## I - Diagonalisation

**Exercice 1.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

- 1. Déterminer les réels  $\lambda$  tels que  $A \lambda I_2$  ne soit pas inversible.
- **2.** La matrice A est-elle diagonalisable?
- **3.** Déterminer une matrice P inversible et une D diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

**Exercice 2.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1. Déterminer les réels  $\lambda$  tels que  $A \lambda I_2$  ne soit pas inversible.
- **2.** La matrice A est-elle diagonalisable?

**Exercice 3.** Soit  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ . Déterminer l'ensemble des matrices diagonalisables qui ont pour unique valeur propre  $\lambda_0$ .

**Exercice 4.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1. Déterminer les réels  $\lambda$  tels que  $A \lambda I_3$  ne soit pas inversible.
- **2.** La matrice A est-elle diagonalisable?
- 3. Reprendre les questions précédentes avec la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 5.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1. Montrer sans calculs que A est diagonalisable.
- **2.** Diagonaliser la matrice A.

**Exercice 6.** Soit 
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
,  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et

$$X_3 = \begin{pmatrix} -2\\2\\-1 \end{pmatrix}.$$

- 1. Montrer que  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont des vecteurs propres de A.
- **2.** Montrer que A est diagonalisable puis déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

## II - Réduction & Application

**Exercice 7.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- 1. Montrer que A admet une unique valeur propre. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- **2.** Déterminer une base du sous-espace propre de A.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A et  $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- 3. Recherche d'une base adaptée.
  - a) Déterminer un vecteur  $e_1$  tel que  $f(e_1) = 2e_1$ .
  - **b)** Déterminer un vecteur  $e_2 = (a, b, -1)$  tel que  $f(e_2) = e_1 + 2e_2$ .
  - c) Déterminer un vecteur  $e_3 = (c, d, 2)$  tel que  $f(e_3) = e_2 + 2e_3$ .
- **d)** Montrer que  $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  puis déterminer  $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ .

On note P la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathscr{B}$ .

**4.** Déterminer  $P^{-1}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

5. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer  $T^n$ .

**6.** En déduire les coefficients de  $A^n$ .

**Exercice 8.** Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites définies par  $u_0=1$ ,  $v_0=-1$ ,  $w_0=2$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = -3u_n + 4v_n - w_n \\ v_{n+1} & = 2v_n \\ w_{n+1} & = -4v_n + 2w_n \end{cases}.$$

1. Pour tout n entier naturel, exprimer  $v_n$  en fonction de n.

On pose 
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$
.

**2.** Déterminer les réels  $\lambda$  tels que  $A - \lambda I_3$  ne soit pas inversible.

**3.** Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que  $A=PDP^{-1}$ . Soit  $n\in\mathbb{N}$ .

**4.** En déduire par récurrence que, une expression de  $A^n$  en fonction de  $D^n,\,P^{-1}$  et P.

5. Déterminer  $D^n$  et en déduire les 9 coefficients de  $A^n$ .

Pour tout 
$$n$$
 entier naturel, on pose  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ .

- **6.** Montrer que, pour tout n entier naturel,  $U_{n+1} = AU_n$ .
- 7. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,  $U_n = A^n U_0$ .
- **8.** En déduire les expressions de  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$ .

**Exercice 9.** Soit 
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
 et  $R(X) = X^3 + X^2 - 4X - 4$ .

- 1. Montrer que R est un polynôme annulateur de A.
- **2.** En déduire que A est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

- **3.** Calculer R(2) puis déteminer un polynôme Q tel que R(X) = (X-2)Q(X).
- 4. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
- ${f 5.}\,$  Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.
- **6.** En déduire que A est diagonalisable.