■ ■ ■

I. Lois de variables aléatoires

Exercice 1. [CCP] Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel N non nul selon la loi de probabilité : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N=n) = \frac{1}{2^n}$. Le joueur gagne N jetons si N est pair ; il perd N jetons si N est impair.

1. Quelle est la probabilité de gagner une partie ?

2. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

Exercice 2. [Mines] On tire sans remise $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.

1. Calculer la probabilité d'obtenir $1, 3, \dots, 2n-1$ dans cet ordre et consécutivement.

2. Déterminer la probabilité de tirer $1, 3, \dots, 2n-1$ dans cet ordre mais pas forcément consécutivement.

3. On note X la variable aléatoire associée au rang de la dernière boule impaire tirée. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 3. [CCP] Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. On note N la variable aléatoire qui vaut 0 si $X_1 = \cdots = X_n = 1$ et $\min\{k \in [\![1,n]\!]\ ;\ X_k = 0\}$ sinon. Déterminer la loi de N ?

Exercice 4. (➹, ♡) [X] Lors d'une élection, 700 électeurs votent pour A et 300 pour B. Quelle est la probabilité que, pendant le dépouillement, A soit toujours strictement en tête ?

II. Inégalités

Exercice 5. Soient $a < b$ et X une variable aléatoire discrète réelle à valeurs dans $[a,b]$. Montrer que X admet une variance puis que $\mathbb{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$ en discutant les cas d'égalité.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $u \in [-1,1]$, le réel $\mathbb{E}\left[u^X\right]$ est bien défini.

2. Montrer que pour tout u tel que $|u| < 1$,

$$\frac{1-\mathbb{E}\left[u^X\right]}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k)\, u^k.$$

Exercice 7. Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. a) Montrer que $\mathbb{P}(|X-\lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

b) En déduire l'inégalité $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

2. On considère dans toute cette question une variable aléatoire discrète Z définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, d'espérance nulle et de variance σ^2.

a) Montrer que pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \mathbb{P}\left((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\right)$.

b) Montrer que : $\forall\, a > 0, \forall\, x \geqslant 0, \mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$.

c) Montrer que : $\forall\, a > 0$, $\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$.

d) En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda+1}$.

3. Pour tout réel t, on pose $G_X(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k$.

a) Pour tout réel t, justifier l'existence de $G_X(t)$ et calculer sa valeur.

b) Montrer que : $\forall\, t \geqslant 1, \forall\, a > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}$.

c) En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant (\frac{\mathrm{e}}{4})^\lambda$.

Exercice 8. (Distance en variation totale, ♡) [Centrale] Soit $\mathscr{E}$ l'espace des suites réelles $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum |p_n|$ converge, muni de la norme $\|p\| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |p_n|$. Soit $\mathscr{P}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ formé des suites réelles positives (p_n) telles que $\|p\| = 1$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ est borné et convexe.
On montrera que pour tout $(p,q) \in \mathscr{P}^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $\lambda p + (1-\lambda) q \in \mathscr{P}$.

2. Pour $P, Q \in \mathscr{P}$, on pose $d(P,Q) = \sup_{A\subset\mathbb{N}} \left|\sum_{n\in A} p_n - \sum_{n\in A} q_n\right|$. Montrer que $d(P,Q) \in [0,1]$.

3. Soit $(p,q) \in [0,1]^2$, $P = (1-p, p, 0, 0, \dots)$ et $Q = (1-q, q, 0, 0, \dots)$. Déterminer $d(P,Q)$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer l'inégalité $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^\lambda \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}$.

5. Soient X_λ et X_μ deux variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Soit $P_\lambda = (\mathbb{P}(X_\lambda = n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $P_\mu = (\mathbb{P}(X_\mu = n))_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'inégalité

$$d(P_\lambda, P_\mu) \leqslant \max_{A\subset[\![0,n]\!]} \left|\sum_{k\in A} \mathbb{P}(X_\lambda = k) - \sum_{k\in A} \mathbb{P}(X_\mu = k)\right| + \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{\mu^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 9. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète réelle. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ tel que pour tout x réel, $F(\lambda x) = F(x)$. Déterminer la loi de X ?

III. Convergences

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le diamètre d'un tronc d'arbre à la fin de l'année numéro n. On considère une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes et de même loi, à valeurs dans $[0,1]$. On suppose que sa croissance suit le modèle décrit ci-dessous :

* le diamètre initial D_0 est tel que $D_0 > 0$;
* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_{n+1} = (1 + X_{n+1})D_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Q_n = \left(\frac{D_n}{D_0}\right)^{\frac{1}{n}}$ et $m = \mathbb{E}[\ln(1 + X_1)]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $\mathbb{E}[Q_n]$ en fonction de $\mathbb{E}\left[(1+X_1)^{1/n}\right]$.

b) Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $y \in [0,1]$, $0 \leqslant \mathrm{e}^y - 1 - y \leqslant Cy^2$.

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Q_n] = \mathrm{e}^m$.

2. a) Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y| \leqslant L\,|x-y|$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(|Q_n - \mathrm{e}^m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{M}{n}$.

c) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Q_n - \mathrm{e}^m| \geqslant \varepsilon) = 0$.

Exercice 11. [CCP] Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i, et que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i \to p$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$.

IV. Lois conjointes

Exercice 12. [CCP] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On définit $Z = X/Y$.

1. Justifier que $Z(\Omega) = \mathbb{Q}_+^*$.

2. Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$ d'écriture irréductible $r = a/b$. Montrer que $\mathbb{P}(Z = r) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = ka, Y = kb)$.

3. Calculer l'espérance de Z.

4. Montrer que $\mathbb{E}[Z] > 1$.

Exercice 13. [Centrale] Soit $(X_{i,j})_{(1,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Soit $Z = (X_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle loi suit $\mathrm{Tr}(Z)$. Quelle sont son espérance et sa variance ?

2. Cas $n = 2$. Déterminer $\mathbb{P}(Z \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{R}))$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0_{2,n-2} \\ 1 & 0 & \\ 0_{n-2,2} & & I_{n-2} \end{pmatrix}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer AP et PA.

4. Soit $\Phi : B \mapsto BP$ et f sa restriction à E, où E est l'ensemble des valeurs possibles de Z. Montrer que f est bijective et en déduire l'espérance de $\det(Z)$.

Exercice 14. (Identité de WALD) [ENSAM] Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = [\![1, k]\!]$. On considère $k+1$ variables aléatoires $(X_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ suivant une même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes. On définit enfin une variable aléatoire Y par $Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.

1. Montrer que si les X_i admettent une espérance, alors Y aussi.

2. Donner sous ces hypothèses une expression de $\mathbb{E}[Y]$ en fonction de $\mathbb{E}[X_i]$ et de $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 15. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(U_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $X_{i,m} = |\{k \in [\![1, m]\!] \ ; \ U_k = i\}|$.

1. Déterminer la loi de $X_{i,m}$.

2. Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de la famille $(U_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $Y_i = X_{i,N}$. Déterminer la loi de Y_i.

Exercice 16. [CCP] Soient a, $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $N = an$ clients qui s'approvisionnent chez n fournisseurs. Chaque client choisit un fournisseur au hasard. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le nombre de clients du fournisseur i et Y le nombre de fournisseurs n'ayant aucun client.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i.

2. Que vaut $X_1 + \cdots + X_n$? En déduire $\mathbb{E}[X_iX_j]$ et $\mathscr{C}ov(X_i, X_j)$ pour $i \neq j$. Donner l'expression du coefficient de corrélation linéaire de X_i et X_j.

3. Soit β_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement : *le fournisseur i n'a pas de client*. Exprimer Y en fonction des β_i et déterminer $\mathbb{E}[Y]$.

4. Calculer, pour tout $i \neq j$, le réel $\mathscr{C}ov(\beta_i, \beta_j)$.

5. Déterminer la variance de Y.

Exercice 17. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \geqslant 2$, on note $\mathscr{P}_n(2)$ l'ensemble des parties à deux éléments de $[\![1, n]\!]$ et si $I = \{i, j\}$, on pose $Y_I = X_iX_j$. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $V_n = \sum_{I\in\mathscr{P}_n(2)} Y_I$.

1. a) Quelle est la loi de S_n ?

b) Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$.

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire S_nV_n.

d) Montrer que $S_n^2 = S_n + 2V_n$ et en déduire l'espérance de S_n^3.

2. a) Soit $I \in \mathscr{P}_n(2)$. Déterminer la loi de Y_I.

b) Soit $(I, J) \in \mathscr{P}_n(2)^2$. Déterminer, la covariance de Y_I et Y_J.

c) On pose $W_n = n^{-2}V_n$. Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathbb{P}\left(\left|\frac{V_n}{n^2} - \frac{p^2}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right)$.

V. Avec Python

Exercice 18. [Centrale 2] Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 2) = p$$

Pour tout n entier naturel, on pose $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ et $Y_k = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ S_n \geqslant k\}$.

1. Justifier l'existence de Y_k. Écrire une fonction `Y(p,k)` prenant en argument p et k et permettant de simuler la variable aléatoire Y_k.

2. En utilisant le programme précédent, écrire une fonction `m(p,k)` permettant de calculer une valeur approchée m_k de $\mathbb{E}[Y_k]$. Tracer la courbe (k, m_k) pour $1 \leqslant k \leqslant 100$ et $p \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 3$,

$$\mathbb{P}(Y_k = n) = p\mathbb{P}(Y_{k-1} = n - 1) + (1 - p)\mathbb{P}(Y_{k-1} = n - 1)$$

4. En déduire que

$$\mathbb{E}[Y_k] = p\mathbb{E}[Y_{k-1}] + (1-p)\mathbb{E}[Y_{k-2}] + 1$$

5. Prouver l'existence d'une constante C_p telle que

$$\mathbb{E}[Y_k] \sim_{p\to+\infty} C_p k$$

Mathématiciens

Wald Abraham (31 oct. 1902 à Kolozsvàr-13 déc. 1950 à Travancore).