VII - Variables aléatoires discrètes infinies

I - Variables aléatoires discrètes infinies

I.1 - Loi de probabilité

Définition 1 - Variable aléatoire discrète infinie

Une variable aléatoire X est *discrète infinie* si les valeurs prises par X sont en nombre infini et peuvent être indexées par $\mathbb{N}$. On notera

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

Dans toute la suite, on se limitera aux variables aléatoires qui ne prennent que des valeurs positives.

Exemple 1

- Un dé est lancé jusqu'à obtenir la valeur 6. On note T le rang du lancer où le premier 6 est obtenu. La variable aléatoire T peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 1 si le 6 apprait au premier lancer,
  - ⋆ 2 si le 1er lancer n'est pas un 6 et que le 2e l'est,
  - ⋆ 3 si les 1er et 2e lancers ne sont pas des 6 et que le 3e l'est,
  - ⋆ ...
- Une étudiante collectionne les cartes de 23 joueurs de foot de son équipe nationale qui sont distribuées dans des tablettes de chocolat. On note T le nombre de tablettes achetées pour que sa collection soit complète. T peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 23 si elle a obtenu à chaque achat une carte différente,
  - ⋆ 24 si elle a obtenu exactement une carte en double,
  - ⋆ ...

Définition 2 - Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *loi de probabilité* de X est la donnée :

- des valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots$ prises par X,
- de la famille de probabilités $(\mathbf{P}([X = x_0]), \mathbf{P}([X = x_1]), \ldots, \mathbf{P}([X = x_n]), \ldots)$.

Exemple 2 - Instant du premier Pile

On note T le numéro du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.
D'une part, $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
D'autre part,

- $[T = 1]$ correspond à obtenir un Pile lors du premier lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}.$$
- $[T = 2]$ correspond à obtenir Face lors du premier lancer et Pile lors du second lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = 2]) = \mathbf{P}(\{(F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$
- $[T = 3]$ correspond à obtenir Face lors des 2 premiers lancers et Pile lors du troisième lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = 3]) = \mathbf{P}(\{(F, F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$
- ...
- $[T = n]$ correspond à obtenir Face lors des $n - 1$ premiers lancers et Pile lors du n^{e} lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = n]) = \mathbf{P}(\{(F, F, \ldots, F, P)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

La loi de T peut être représentée dans un tableau contenant une infinité de colonnes :

x	$=1$	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
$\mathbf{P}([X=x])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}$	$\cdots$

Définition 3 - Système complet

Si X est une variable aléatoire discrète infinie, la famille d'événements $([X=x_0],[X=x_1],[X=x_2],\ldots)$ est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}([X=x_k])=1.$$

Exemple 3 - Instant du premier Pile

En reprenant l'exemple précédent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}([T=k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\times\frac{1}{3}\right]\\ &= \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\\ &= 1.\end{aligned}$$

I.2 - Fonction de répartition

Définition 4 - Fonction de répartition

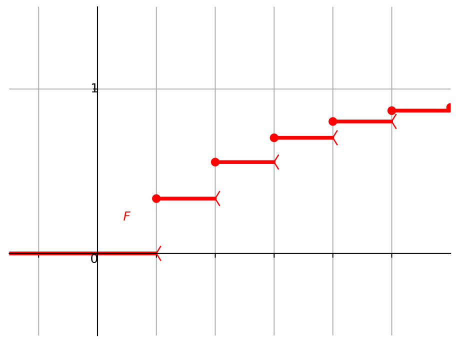
Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *fonction de répartition* de X est la fonction F_X définie pour tout x réel par $F_X(x)=\mathbf{P}([X\leqslant x])$.

Exemple 4 - Instant du premier Pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

- Si $x<1$, $\mathbf{P}([T\leqslant x])=\mathbf{P}(\emptyset)=0$.
- Si $1\leqslant x<2$, $\mathbf{P}([T\leqslant x])=\mathbf{P}([T=1])=\frac{1}{3}$.
- Si $2\leqslant x<3$,
  $\mathbf{P}([T\leqslant x])=\mathbf{P}(T\in\{1,2\})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$.
- Si $3\leqslant x<4$,
  $\mathbf{P}([T\leqslant x])=\mathbf{P}(T\in\{1,2,3\})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{19}{27}$.
- $\ldots$
- Si $n\leqslant x<n+1$,
  $\mathbf{P}([T\leqslant x])=\mathbf{P}(T\in[\![1,n]\!])=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- $\ldots$

On obtient le graphe suivant :



Proposition 1 - Fonction de répartition

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète infinie et à valeurs positives.

- F est à valeurs dans $[0,1]$.
- $\forall\ x < 0,\ F(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

I.3 - Espérance et Variance

Définition 5 - Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$.
La variable aléatoire X admet une espérance si la série $\sum x_i \mathbf{P}([X = x_i])$ est convergente. L'*espérance* de X est alors :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}([X = x_i]).$$

Exemple 5 - Instant du premier pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.
On admet que pour tout $x \in [0,1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Alors, comme $\frac{2}{3} \in [0,1[$, $\sum n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ converge et

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 3.$$

Proposition 2 - Linéarité de l'espérance

Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes infinies admettant une espérance et a un réel. Alors,

$$\mathbf{E}[aX + Y] = a\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y].$$

Exemple 6 - Instant du premier pile

Un joueur joue à Pile ou Face, avec une pièce qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$, contre son banquier qui lui propose le contrat suivant :

- le joueur paye 40 euros pour jouer,
- la pièce de monnaie est lancée successivement jusqu'à obtenir Pile. Il gagne 10 euros lors de chacun de ces lancers.

En notant G le gain du joueur et T le nombre de lancers effectués, alors $G = 10 \times T - 40$. En utilisant les propriétés précédentes,

$$\mathbf{E}[G] = 10\mathbf{E}[T] - 40 = 10 \times 3 - 40 = -10.$$

Théorème 1 - Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives et f une fonction réelle à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i]).$$

Définition 6 - Variance, Écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum x_i^2 \mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors X admet une *variance* et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right].$$

L'*écart-type* de X est la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Proposition 3 - Propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire discrète infinie qui admet une variance.

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2$.
- $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$.

Exemple 7 - Pile/Face contre le banquier

On reprend l'exemple précédent et on admet que $\mathbf{V}(T) = 6$. Alors,

$$\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(10T-40) = 10^2\mathbf{V}(T) = 600$$

et $\sigma(G) \simeq 24{,}5$.

II - Lois usuelles

II.1 - Loi géométrique

Définition 7 - Loi géométrique

Soit $p \in [0,1]$. La variable aléatoire T suit une loi *géométrique* de paramètre p si

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T=k) = p(1-p)^{k-1}$.

On note $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Étant donnée une suite d'épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à p, la variable aléatoire égale au *rang du premier succès* suit une loi géométrique de paramètre p.

Proposition 4 - Espérance, Variance

Soit $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. On admet que

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple 8 - Instant du premier pile

Reprendre les exemples de la partie précédente.

II.2 - Loi de Poisson

Définition 8 - Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire Z suit une loi de *Poisson* de paramètre λ si

- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Z=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

On note $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Étant donnée une suite de N épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à p. Si N est grand et p est petit, la variable aléatoire égale au *nombre de succès* suit approximativement une loi de Poisson de paramètre λ.

Proposition 5 - Espérance, Variance

Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On admet que

$$\mathbf{E}[Z] = \lambda \text{ et } \mathbf{V}(Z) = \lambda.$$

Exemple 9 - Accidentés

Une banque accorde quotidiennement des crédits. Étant donné un crédit, la probabilité qu'il revienne au service contentieux dans un laps de temps d'un an est égale à 4%. On suppose que 100 crédits ont été accordés au mois de janvier.

On note X le nombre de crédits qui sont revenus au service contentieux un an plus tard. X compte le nombre de succès (contentieux) lors d'une suite d'épreuves de Bernoulli de probabilité de succès 4%. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(100, 0{,}04)$ et $\mathbf{E}[X] = 4$.

On suppose que X peut être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de paramètre $\mathbf{E}[X]$. On donne la table d'une loi de Poisson de paramètre 4 ci-dessous :

z	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$\mathbf{P}([Z=z])$	0,018	0,147	0,195	0,195	0,156	$\cdots$	

Alors,
- $\mathbf{P}(X=0) \simeq \mathbf{P}(Z=0) \simeq 0{,}018$.
- $\mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq \mathbf{P}(Z \leqslant 3) \simeq 0{,}018 + 0{,}147 + 0{,}195 \simeq 0{,}36$.
- $\mathbf{P}(X > 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq 1 - 0{,}36 \simeq 0{,}64$.