

T.P. IV - Suites...

Code Capytale : 7db3-1087927

I - Ce qu'il faut savoir

- * **Définir** une suite par :
 - ★ son terme général,
la structure `for i in range(a, b)` : permet de faire parcourir à `i` les valeurs de `a` à `b-1`.
 - ★ récurrence à l'aide de la définition d'une **fonction**,
La fonction peut être définie de manière externe avec le mot-clé `def` ou alors être définie à chaque itération.
 - ★ récurrence pour des suites **imbriquées**,
 - ★ récurrence linéaire avec des **matrices**.
- * **Tracer** les termes successifs et **interpréter** un comportement asymptotique.
- * Déterminer un **seuil**
Les boucles conditionnelles `while` permettent d'interrompre le calcul dès qu'une condition est satisfaite.

II - ...définies en fonction de l'indice

Exercice 1. (Étude de suite) Pour tout n entier naturel, on pose $c_n = 2 - \frac{3^n + 25}{4^{n-1}}$.

1. Compléter le code suivant pour qu'il affiche le graphe des points de coordonnées $((n, c_n))_{5 \leq n \leq 21}$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def c(n):
    return ...

X = range(..., ...)
```

```
Y = [c(n) for n in X]

plt.figure()
plt.plot(..., ..., '.')
```

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.

3. On considère le code Python suivant :

```
n = 1
c = 2 - (3**n + 25)/4**(n-1)
while c < 1.95 :
    n = n + 1
    c = 2 - (3**n + 25)/4**(n-1)
print(n)
```

On obtient l'affichage suivant : 16.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 2. (Terme général, Seuil) On considère la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}.$$

1. Compléter le code suivant pour qu'il affiche le graphe des points de coordonnées $((n, c_n))_{5 \leq n \leq 21}$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def c(n):
    return ...

X = range(..., ...)
Y = [... for n in X]

plt.figure()
plt.plot(..., ..., '.')
```

2. Évaluer la suite d'instructions suivante puis interpréter le résultat.

```
n = 1
c = 1 - (2**n - 1) / 3**(n-1)

while c < 0.95:
    n = n + 1
    c = 1 - (2**n - 1) / 3**(n-1)

print(n)
```

Exercice 3. (Terme général, Seuil) Soit (a_n) et (b_n) les suites définies pour tout n entier naturel par

$$\begin{cases} a_n &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n}\right) \\ b_n &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{4^n}\right) \end{cases}$$

1. Compléter le script ci-dessous pour qu'il affiche sur une même figure les graphes des points de coordonnées $((n, a_n))_{1 \leq n \leq 20}$ et $((n, b_n))_{1 \leq n \leq 20}$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def a(n):
    return ...

def b(n):
    return ...

X = range(..., ...)
Ya = [a(n) for n in X]
Yb = [b(n) for n in X]

plt.figure()
plt.plot(X, Ya, 'o')
plt.plot(X, Yb, 'd')
plt.show()
```

2. Compléter le script ci-dessous afin qu'il calcule le plus petit entier naturel n tel que l'on ait à la fois : $a_n \leq 0,334$ et $b_n \geq 0,333$.

```
n = 0
a = 1
```

```
b = ...
while ...:
    n = ...
    a = 1/3 * (1 + 2/4**n)
    b = ...

print(...)
```

III - ...récurrentes simples

Exercice 4. (Suite arithmético-géométrique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Compléter le code suivant qui permet de calculer le n -ième terme de la suite puis d'afficher les valeurs de u_n pour $0 \leq n \leq 20$. Quelle conjecture pouvez vous effectuer sur le comportement de la suite ?

```
import numpy as np

def u(n):
    c = 1
    for i in range(1, ...):
        c = 1 / 2 * c + ...
    return c

X = np.arange(0, ..., 1)
Y = [u(n) for n in X]

plt.figure()
plt.plot(..., ..., 'o')
plt.show()
```

2. On souhaite déterminer puis afficher le plus petit entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} \geq 5,5$. Compléter le code suivant :

```
n = 0
c = 1
while c < ...:
```

```
n = ...
c = ...

print(...)
```

IV - ...récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 5. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. Compléter la suite d'instructions suivante pour qu'elle calcule et affiche la valeur de u_5 .

```
import numpy as np
n = ...
u = ...

for k in range(1, n+1):
    u = ...

print(u)
```

2. On admet que la suite (u_n) converge vers 0. Exécuter la suite d'instructions suivante.

```
import numpy as np

n = 0
u = 1

while u >= 0.0001:
    u = np.log(1 + u**2)
    n = n + 1

print(n)
```

Le résultat affiché est 6. Quelle est la signification de ce résultat ?

Exercice 6. On considère la fonction g définie sur $[1, 2]$ par $g(x) = \ln(x + 2)$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Compléter la suite d'instructions suivante pour qu'elle stocke les valeurs de u_0 à u_{20} et qu'elle les représente graphiquement.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Initialise une liste ne contenant que des 1
U = np.ones((21, 1))
for i in range(1, 21):
    U[i] = ...

X = np.arange(0, 21, 1)
plt.figure()
plt.plot(..., ..., '+')
plt.show()
```

2. Que conjecturer sur le sens de variation et sur la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 7. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n + u_n^2}.$$

On admettra que (u_n) est décroissante et converge vers 0.

Compléter la suite d'instructions suivante pour qu'elle affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $u_n \leq 1/1000$.

```
def f(x):
    return x/(1 + x + x**2)

u = ...
n = ...
while u ...:
    u = ...
    n = ...

print(...)
```

V - ...récurrentes dépendant du rang

Exercice 8. On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$ et

$$\forall k \geq 0, I_{k+1} = kI_k - \frac{1}{2e}.$$

Compléter la suite d'instructions suivante pour qu'elle calcule et affiche la valeur de I_{21} .

```
import numpy as np
n = ...
I = 1/2 - 1/(2 * np.exp(1))
for k in range(1, n+1):
    I = ...

print(I)
```

Exercice 9. Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 0, I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$

Écrire une suite d'instructions qui calcule et affiche la valeur de I_{10} .

VI - ...imbriquées

Exercice 10. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

Compléter la suite d'instructions suivante qui permet de déterminer u_n et v_n pour $n = 50$.

```
n = ...
u = ...
v = ...
for k in range(1, n+1):
    u = ...
```

```
v = ...
```

```
print("u50", u)
print("v50", v)
```

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites définies par $u_1 = 1$, $v_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Compléter la suite d'instructions suivantes afin qu'elle calcule et affiche les valeurs de u_{10} et v_{10} .

```
import numpy as np

n = ...
u = 1
v = 2
for k in range(2, n+1):
    a = u
    u = ...
    v = ...

print("u10", u)
print("v10", v)
```

2. On considère le programme précédent avec les instructions supplémentaires :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
n = ...
u = 1
v = 2
s = np.zeros((n+1, 1))
s[1] = u
for k in range(2, n+1):
    a = u
    u = ...
    v = ...
    s[k] = u
```

```
X = np.arange(0, n+1)
# Calcule la somme cumulee de la matrice ligne s :
Y = np.cumsum(s)
plt.figure()
plt.plot(X, Y)
plt.show()
```

- Que contiennent les variables `s` et `y` à l'issue du programme ?
- Quel résultat le graphique obtenu permet-il de conjecturer ?

VII - ...récurrentes doubles

Exercice 12. (Suite récurrente double) On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 4u_n + 2u_{n-1}$. Compléter les 3 lignes du script Python ci-dessous pour qu'il calcule et affiche la valeur de u_{10} .

```
v = 0
u = 1
for i in range(..., ...):
    a = u
    ...
    v = a

print(u)
```

VIII - ...& fonctions : la dichotomie

Exercice 13. (Exemple de dichotomie) On pose $h(x) = x^3 + \frac{1}{x^3} - 3$.

- Montrer que h est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.
- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[1, +\infty[$.
- Compléter le code Python suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de α par la méthode de dichotomie.

```
def h(x):
    return ....

a = ...
b = ...
while (b - a) ...:
    m = ...
    if h(m) * h(a) <= 0:
        b = ...
    else:
        ...

print(...)
```