

# T.D. X - Variables aléatoires à densité

## I - Densités

**Exercice 1.** (⚙️) Soit  $a > 0$  et  $f$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2a^2} & \text{si } t \in [0, 2a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

**Exercice 2.** (⚙️) Soit  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction  $f$  est une densité de probabilité.

On admettra que pour tout  $A \geq 1$ ,  $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1$ .

**Exercice 3.** Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $f_n$  définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} nt^{n-1} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f_n$  est une densité de probabilité.

**Exercice 4.** Soit  $a \in ]0, 1]$  et  $f$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a^2} & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ \frac{2a-t}{a^2} & \text{si } a < t \leq 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

**Exercice 5.** (🔗) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(t) = \begin{cases} k \frac{t}{1+t} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la valeur de  $k$  pour laquelle  $f$  est une fonction de densité.

On admettra que  $\int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = 1 - \ln(2)$ .

## II - Fonctions de répartition, Espérances, Variances

**Exercice 6.** (⚙️) Soit  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

Soit  $T$  une variable aléatoire de densité  $f$ .

2. Déterminer la fonction de répartition de  $T$ .

**Exercice 7.** Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t/2} - e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$ .

2. Si  $Y$  est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $a > 0$ , rappeler une densité et l'espérance de  $Y$ . En déduire la valeur de  $\int_0^{+\infty} t e^{-at} dt$ .

3. En déduire l'espérance de  $X$ .

**Exercice 8.** (🔗) Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition  $G$  de  $X$ .

2. Montrer que  $X$  n'admet pas d'espérance.

**Exercice 9.** Soit  $a > 0$  et  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2a^2} & \text{si } t \in [0, 2a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer  $\mathbf{E}[X]$ .
2. Déterminer  $\mathbf{E}[X^2]$  et en déduire  $\mathbf{V}(X)$ .

**Exercice 10.** Soit  $a \in ]0, 1]$  et  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a^2} & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ \frac{2a-t}{a^2} & \text{si } a < t \leq 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer  $\mathbf{E}[X]$ .
2. Déterminer  $\mathbf{E}[X^2]$  et en déduire  $\mathbf{V}(X)$ .

**Exercice 11.** Soit  $a$  un réel et  $f$  la fonction définie pour tout  $t$  réel par

$$f(t) = \begin{cases} a e^{2-t} & \text{si } t \geq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. a) Déterminer la valeur de  $a$  pour laquelle  $f$  est une densité de probabilité.

b) Représenter graphiquement  $f$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .

2. a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

b) Représenter graphiquement la fonction  $F$ .

3. Déterminer les probabilités suivantes :

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $\mathbf{P}([X \leq 3])$ .  | c) $\mathbf{P}([0 < X < 3])$ . |
| b) $\mathbf{P}([1 < X < 2])$ . | d) $\mathbf{P}([X \geq 4])$ .  |

4. Soit  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ .

a) Rappeler la formule (avec une intégrale) et la valeur de  $\mathbf{E}[Y]$ .

b) On pose  $Z = Y + 2$ . Déterminer la fonction de répartition puis une densité de  $Z$ .

c) En déduire que  $X$  admet une espérance et la calculer.

**Exercice 12.** Soit  $a$  un réel et  $f$  la fonction définie pour tout  $t$  réel par

$$f(t) = \begin{cases} a e^{3-t} & \text{si } t \geq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Déterminer la valeur de  $a$  pour laquelle  $f$  est une densité de probabilité.

b) Représenter graphiquement  $f$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .

2. a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

b) Représenter graphiquement la fonction  $F$ .

3. Déterminer les probabilités suivantes :

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $\mathbf{P}([X \leq 3])$ .  | c) $\mathbf{P}([0 < X < 5])$ . |
| b) $\mathbf{P}([1 < X < 2])$ . | d) $\mathbf{P}([X \geq 4])$ .  |

4. Soit  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ .

a) Rappeler la formule (avec une intégrale) et la valeur de  $\mathbf{E}[Y]$ .

b) On pose  $Z = Y + 3$ . Déterminer une fonction de répartition puis une densité de  $Z$ .

c) En déduire que  $X$  admet une espérance et la calculer.

### III - Transformation de variables aléatoires

**Exercice 13.** Soit  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ . Déterminer la fonction de répartition, une densité, puis identifier éventuellement la loi des variables aléatoires suivantes :

- |                             |                        |
|-----------------------------|------------------------|
| 1. $X = 3U$ .               | 4. $W = X^2$ .         |
| 2. $Y = U + 1$ .            | 5. $H = \ln(X + 1)$ .  |
| 3. $Z = \frac{1}{2}X + 1$ . | 6. $E = -\ln(X + 1)$ . |

**Exercice 14. (⚙️)** Soit  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ . Déterminer la fonction de répartition, une densité, puis identifier éventuellement la loi des variables aléatoires suivantes :

- |  |  |   |
|--|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>X = 4U</math>.</li> <li>2. <math>Y = U + 2</math>.</li> <li>3. <math>Z = \frac{1}{2}X + 1</math>.</li> </ol> |  | <ol style="list-style-type: none"> <li>4. <math>W = X^2</math>.</li> <li>5. <math>H = \ln(X + 1)</math>.</li> <li>6. <math>E = -\ln(X + 1)</math>.</li> </ol> |
|--|--|---|

**Exercice 15.** Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $f_n$  définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} nt^{n-1} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que  $f_n$  est une densité de probabilité et on note  $X_n$  est une variable aléatoire de densité  $f_n$ .

1. Déterminer la fonction de répartition  $F_n$  de  $X_n$ .
2. Déterminer  $\mathbf{E}[X_n]$ .

On pose  $Y_n = -\ln(X_n)$ .

3. Déterminer la fonction de répartition  $G_n$  de  $Y_n$ .
4. Reconnaître la loi de  $Y_n$ .
5. En déduire  $\mathbf{E}[Y_n]$  et  $\mathbf{V}(Y_n)$ .

**Exercice 16.** Soit  $a \geq 0$  et  $f$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 2e^{2a}e^{-2t} & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que  $f$  est une densité de probabilité et on considère une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$ . On pose  $Y = X - a$ .

1. Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .
2. Déterminer la fonction de répartition  $G$  de  $Y$ .
3. Reconnaître la loi de  $Y$ , en déduire son espérance et sa variance.
4. Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .

## IV - Lois usuelles

**Exercice 17. (⚙️)** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 4)$ . En utilisant la table de la loi normale, calculer

- |  |  |  |
|--|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\mathbf{P}([X \leq 2])</math>.</li> <li>2. <math>\mathbf{P}([X &gt; 2,5])</math>.</li> </ol> |  | <ol style="list-style-type: none"> <li>3. <math>\mathbf{P}([Y &lt; 1])</math>.</li> <li>4. <math>\mathbf{P}([3 &lt; Y \leq 10])</math>.</li> </ol> |
|--|--|--|

**Exercice 18. (⚙️)** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 9)$ . En utilisant la table de la loi normale, calculer

- |   |  |   |
|---|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\mathbf{P}([X \leq 2,5])</math>.</li> <li>2. <math>\mathbf{P}([X &gt; 1,49])</math>.</li> </ol> |  | <ol style="list-style-type: none"> <li>3. <math>\mathbf{P}([Y &lt; 1])</math>.</li> <li>4. <math>\mathbf{P}([3 &lt; Y \leq 6])</math>.</li> </ol> |
|---|--|---|

**Exercice 19. (⚙️)** Un archer lance deux flèches en direction d'une cible de rayon d'un mètre. On suppose qu'il atteint systématiquement la cible et que ses lancers sont indépendants. Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , on note  $R_i$  la variable aléatoire égale à la distance (en mètres) de la flèche numéro  $i$  au centre de la cible et on suppose que  $R_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ . On note également  $R = \min\{R_1, R_2\}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Justifier que  $\mathbf{P}([R > x]) = \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x])$ .
2. En déduire, pour tout  $x$  réel, la fonction de répartition  $F$  de  $R$ .
3. Calculer la probabilité que la flèche la mieux lancée par l'archer soit située à moins de 50cm de la cible.

**Exercice 20. (⚙️)** Un appareil électronique utilise deux piles dont les durées de vie (en années) respectives sont  $T_1$  et  $T_2$ . On suppose que  $T_1$  et  $T_2$  sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre 1. Pour le fonctionnement, une seule pile suffit et l'appareil cesse donc de fonctionner au bout d'un temps  $T = \max\{T_1, T_2\}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Justifier que  $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}([T_1 \leq x] \cap [T_2 \leq x])$ .
2. En déduire, pour tout  $x$  réel, la fonction de répartition  $F$  de  $T$ .
3. Calculer la probabilité que l'appareil fonctionne, en excluant toute autre panne, durant au moins 6 mois.