VIII - Intégration

I - Primitives

Définition 1 - Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une *primitive* de f est une fonction dérivable F sur I telle que, pour tout $x \in [a,b]$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 1

Soit $F(x) = x\ln(x) - x$ définie sur $]0,1]$. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0,1]$, alors F est dérivable et pour tout $x \in]0,1]$,

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Ainsi, F est une primitive de ln sur $]0,1]$.

Exercice 1. Déterminer la fonction dont $F(x) = \frac{x^3}{12} + 4x^2 + 1$ est une primitive.

Théorème 1 - Primitives de fonctions continues

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.
Si F et G sont des primitives d'une fonction f continue sur I, alors il existe un réel c tel que $\forall\ x \in I$, $F(x) = G(x) + c$.

Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Intervalle
c	cx	$\mathbb{R}$
x^a, $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0,+\infty[$
e^{ax}, $a \neq 0$	$\frac{1}{a}\,e^{ax}$	$\mathbb{R}$

Exercice 2. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. x^5.

2. $\frac{3}{x}$.

3. e^{3x}.

4. $\frac{1}{x^5}$.

Proposition 2 - Primitive de fonctions composées

Soit u une fonction dérivable telle que u' soit continue.

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$\lambda u'(x) + \mu v'(x)$	$\lambda u(x) + \mu v(x)$
$u'(x)u^a(x)$, $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1}(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\|$
$u'(x)\,e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$u'(x)v'(u(x))$	$v(u(x))$

Exercice 3. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $\frac{1}{x}\ln(x)$.
2. $\frac{1}{x}\ln^4(x)$.
3. $(3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}$.
4. $\frac{2x+1}{x^2+x}$.

II - Intégrale sur un segment

Définition 2 - Intégrale sur un segment

L'*intégrale*, sur le segment $[a,b]$, d'une fonction f positive, est l'aire, délimitée par les abscisses a et b, et comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses. Cette quantité est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition 3 - Intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est le réel défini par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple 2

En utilisant les primitives usuelles,

- $\displaystyle\int_1^2 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}$.
- $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^3+4x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^5 - 1$.

Exercice 4. Exprimer simplement les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_3^4 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

Théorème 2 - Intégrale et Primitive

Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. On note $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors, F est l'unique primitive de f qui s'annule en a. En particulier, pour tout réel $x > a$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 3

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. La fonction F est dérivable et $F'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, F' est positive et F est croissante.

II.1 - Propriétés de l'intégrale

Définition 3 - Intégrale des fonctions continues par morceaux

Soit f une fonction définie sur un segment $I = \displaystyle\bigcup_{k=0}^n [a_k,b_k]$. On suppose que f est continue par morceaux sur $[a,b]$, i.e. prolongeable par continuité sur chacun des segments $[a_k,b_k]$. Alors, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition 4 - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et a, b et c des réels de I. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 4 - Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = x - 1$ sinon. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (x-1)\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2\\ &= 0 + \frac{1}{2} - 0\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Proposition 5 - Linéarité de l'intégrale

Soit f et g des fonctions continues sur $[a,b]$ et λ un réel. Alors,

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 5

En utilisant les primitives usuelles,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{12}{x} + 5x^3\,\mathrm{d}x &= 12\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 5\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x\\ &= 12\left[\ln(x)\right]_1^2 + 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2\\ &= 12\left(\ln(2) - \ln(1)\right) + 5\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}\right)\\ &= 12\ln(2) + \frac{5}{4}\cdot 15.\end{aligned}$$

Exercice 5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 2\,\mathrm{e}^x + 3x^2\,\mathrm{d}x$.

Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (I)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si $a \leqslant b$ et, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Exemple 6

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ et $0 \leqslant x \leqslant y$. Alors,

$$\begin{aligned}F(y) &= \int_0^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t, \text{ d'après la relation de Chasles}\\ &= F(x) + \int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^t \geqslant 0$ pour tout $t \in [x,y]$ et $x \leqslant y$, donc $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Ainsi, $F(x) \leqslant F(y)$ et F est croissante.
Ce raisonnement reste valable dès que l'intégrande est positif.

Exercice 6. Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_3^x x^2 - 2x + 1\,\mathrm{d}x$ est croissante sur $[3, +\infty[$.

Proposition 7 - Croissance de l'intégrale (II)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 7

Pour tout $x \in [0,1]$, $x^3 \leqslant x^2$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Proposition 8 - Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 8

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$. Alors,

$$\left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |(-t)^n|\,\frac{\mathrm{e}^t}{n!}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^x}{(n+1)!}.$$

Proposition 9 - Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si f est à valeurs positives, alors $f \equiv 0$ si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 7. Montrer que ce résultat est faux en général si la fonction est continue par morceaux.

II.2 - Calculs d'intégrales

Théorème 3 - Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 9 -

- Calculons $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

  Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Alors, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$. Comme u, v sont dérivables et u', v' sont continues sur $[0,1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2\,\mathrm{e}^4}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_1^2\\ &= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{4}\\ &= \frac{3\,\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}.\end{aligned}$$

- Calculons $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

  Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. Alors, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$. Comme u, v sont dérivables et u', v' sont continues sur $[1,2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln(2) - [x]_1^2\\ &= 2\ln(2) - 2 + 1\\ &= 2\ln(2) - 1.\end{aligned}$$

Exercice 8. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Théorème 4 - Changement de variable

Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et φ une fonction de $[a, b]$ dans I de classe $\mathscr{C}^1$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 10 -

Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$ à l'aide du changement de variable $t = \ln(u)$.

La fonction $\varphi : [1, \mathrm{e}] \to [0, 1]$, $u \mapsto \ln(u)$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u+1}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right]\mathrm{d}u \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= [\ln(u)]_1^{\mathrm{e}} - [\ln(1+u)]_1^{\mathrm{e}} \\
&= 1 - \ln(1+\mathrm{e}) + \ln(2).
\end{aligned}$$

Exercice 9. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$.

III - Intégrales généralisées

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

III.1 - Définition

Définition 4 - Convergence

Soit f une fonction continue par morceaux sur I.

- Si $I = [a, b[$ et f est continue sur $[a, b[$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque x tend vers b.
- Si $I =]a, b]$ et f est continue sur $]a, b]$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque x tend vers a.
- Si $I =]a, b[$ et f est continue sur $]a, b[$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge* s'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

Dans tous les cas, si l'intégrale ne converge pas, elle *diverge*.

Exemple 11

La fonction ln est continue sur $]0, 1]$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 5 - Intégrales de référence

(i). **Intégrales de Riemann sur** $[1, +\infty[$**.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Alors, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$.

(ii). **Intégrales de Riemann sur** $]0,1]$.
$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Alors, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$.

(iii). **Fonction exponentielle.**
$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$. Alors, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

(iv). **Fonction logarithme.**
$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$.

III.2 - Propriétés

Proposition 10 - Linéarité

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Alors, $\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 11 - Relation de Chasles

On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $c \in]a,b[$. Alors, $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 12 - Croissance de l'intégrale

On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

(i). Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(ii). Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 6 - Inégalité triangulaire

Si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 7 - Positivité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est nulle sur I.

III.3 - Preuves d'existences

Proposition 13 - Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Alors, les intégrales de f sur $[a,b]$, $]a,b]$, $]a,b[$ et $[a,b[$ sont égales.

Exemple 12

Montrons que $\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. On pose $f : t \mapsto t\ln(t)$.

- La fonction f est continue sur $]0,1]$.
- D'après les croissances comparées, $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$. Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0.

Finalement, l'intégrale de f sur $]0,1]$ est bien définie.

Proposition 14 - Fonctions à valeurs positives

Si f est valeurs positives sur $[a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

Théorème 8 - Domination locale

Soient f, g deux fonctions continues de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}_+$.

- S'il existe un réel c tel que $\forall\, x \in [c,b[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et $\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si $f(x) \sim_b g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Exemple 13

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions $\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
  - ⋆ $x \mapsto x^n\,\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
  - ⋆ Comme $\lim_{x\to+\infty} x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$, il existe un réel c tel que, pour tout $x \geqslant c$,
$$x^n\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2}.$$
    D'après les intégrales de référence, $\int_c^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.
    Ainsi, $\int_c^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.
    Comme $x \mapsto x^n\,\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0,c]$, son intégrale sur ce segment est bien définie.

  Finalement, $\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.
- Étudions $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$.
  - ⋆ $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est continue sur $[0,1[$.
  - ⋆ $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)} \sim_1 \frac{1}{2(1-t)}$.
    Or, $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x) \to +\infty$ quand $x \to 1$.

  Ainsi, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$ n'est pas convergente.

III.4 - Méthodes de calculs

Utiliser les méthodes de calcul sur un segment (primitivation, intégration par parties, changement de variable), puis étudier la limite.

Exemple 14

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $I_n = \int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

- Si $n = 0$, alors $I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$.
- Si $n \geqslant 1$. Soit $M \geqslant 0$. Les fonctions $u : x \mapsto x^n$ et $v : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,M]$. D'après la

formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^M x^n \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x &= \left[-x^n \mathrm{e}^{-x}\right]_0^M + \int_0^M n x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \\ &= -M^n \mathrm{e}^{-M} + n \int_0^M x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $M \to +\infty$, on obtient la relation :

$$I_n = n I_{n-1}.$$

- On montre alors par récurrence que, pour tout n entier naturel, $I_n = n!$.