# Suites & Séries de fonctions

Chapitre IX



## I. Suites de fonctions

**Exercice 1.** (✍) Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)$ :

**1.** $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{n(1+x^n)}$

**2.** $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{n^a}{n^2+1} x\, \mathrm{e}^{-nx}$

**3.** $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-nx} \sin(nx)$

**4.** $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{(1-i)nx}$

**5.** $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\sqrt{x+4n^2\pi^2}$

**6.** $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\, \mathbb{1}_{[0,n]}$

**Exercice 2.** (✍) [CCP] Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right]$.

**Exercice 3.** [CCP] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n : x \mapsto \frac{n+2}{n+1}\, \mathrm{e}^{-nx^2}$.

**1.** Étudier la convergence simple de $(u_n)$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** Y-a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ ? sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ ?

**Exercice 4.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$ et à valeurs réelles. On suppose que $(f_n)$ converge uniformément sur $I$ vers une fonction $f$. Pour tout entier naturel $n$, on pose $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$.

**1.** Montrer que $(g_n)$ converge simplement sur $I$.

**2.** Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(1+xy) \leqslant (1+x^2)(1+y^2)$.

**3.** Montrer que $(g_n)$ converge uniformément sur $I$.

**Exercice 5.** (♡) [Centrale] Soit la suite de fonctions définie pour tout $x \in [0,1]$ par

$$P_0(x) = 0$$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$$

**1.** Montrer que $(P_n)$ est une suite de restrictions de polynômes dont on précisera le degré.

**2.** Montrer que cette suite converge simplement vers une fonction $f$ à préciser.

**3.** Montrer que, pour tout $x$ dans $[0,1]$ et pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant f(x) - P_n(x) \leqslant 2\frac{f(x)}{2+nf(x)}.$$

**4.** Montrer que $(P_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

**Exercice 6.** Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}_p[X]$. On suppose que $(P_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f$.

**1.** Montrer qu'il existe des polynômes $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^{p} P_n(k) L_k$.

**2.** En déduire que $f$ est un polynôme de degré au plus $p$.

**3.** Montrer que $(P_n)$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers $f$.

**Exercice 7.** [CCP] On lance un dé à 6 faces. Les lancers sont indépendants et le dé n'est pas pipé. On note $X_k$ la variable aléatoire égale à la valeur obtenue au $k$ème lancer.

**1.** Déterminer la loi de $X_k$ et la fonction de répartition $F$ associée à $X_k$.

**2.** On note $Z_n$ la valeur maximale obtenue au bout de $n$ lancers. Déterminer la fonction de répartition $F_n$ de $Z_n$ en fonction de $F$.

**3.** Déterminer la limite de $(F_n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini. La convergence est-elle uniforme ?

**4.** On note $Y_n$ la valeur minimale obtenue au bout de $n$ lancers. Déterminer $G_n$, sa fonction de répartition. Étudier les convergences simple et uniforme de $(G_n)$.

**Exercice 8.** (✍) [CCP] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0,1]$ la fonction $G_n : t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t$.

**1.** Montrer que pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$, $|G_n'(t)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{n}$.

**2.** En déduire que pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$, $|G_n(t) - 1| \leqslant \frac{t\,\mathrm{e}^t}{n}$.

**3.** On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite de fonctions $(I_n)$ converge simplement sur $[0,1]$.

**4.** Converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$ ?

**Exercice 9.** [Centrale] On note $(f_n)$ la suite de fonctions définie pour tout réel $x$ par $f_0(x) = \sin(x)$ et $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x t f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

**1. a)** Calculer $f_1$ et $f_2$.

**b)** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $f_{n+1}(x) = (2n+1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x)$.

**c)** Montrer qu'il existe $P_n$ et $Q_n$ des polynômes à coefficients entiers de degrés inférieurs à $n$ tels que

$$f_n(x) = Q_n(x^2)\sin(x) + xP_n(x^2)\cos(x)$$

**2. a)** Montrer que $|f_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{2^n n!}$.

**b)** La suite $(f_n)$ converge-t-elle simplement ? uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ ?

**3.** Montrer que $\pi^2$ est irrationnel.

**Exercice 10. (Approximation polynomiale de Bernstein, ♡)** Soit $f$ une fonction $k$-lipschitzienne sur $[0,1]$. Le polynôme de Bernstein d'ordre $n$ associé à $f$ est le polynôme

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de moyenne $x$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

**1.** Exprimer $B_n(x)$ en fonction de $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

**2.** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $(M,\delta) \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right]\right| \leqslant \varepsilon \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \delta\right) + 2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geqslant \delta\right)$$

**3.** En déduire que $(B_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

## II. Séries de fonctions

**Exercice 11.** [CCP] Soit $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-nx}\right)$.

**1.** Donner le domaine de définition $D$ de $F$.

**2.** La fonction $F$ est-elle continue sur $D$ ?

**3.** Déterminer $F(D)$.

**Exercice 12.** [IMT] Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n : x \mapsto a^n \frac{\cos(nx)}{n!}$.

**1.** Étudier les convergences simple et uniforme de la série $\sum u_n$.

**2.** Déterminer la somme $S$ de cette série de fonctions.

**3.** Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x)\cos(px)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x)\sin(px)\mathrm{d}x$.

**Exercice 13.** **(♡)** On définit $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

**1.** Déterminer l'ensemble de définition de $F$.

**2.** Trouver une relation entre $F$ et $\zeta$.

**3.** Déterminer $\lim_{x\to 1}(x-1)\zeta(x)$.

**4.** Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ ainsi qu'un équivalent de $\zeta$ en $+\infty$.

**Exercice 14.** On définit la suite de fonctions $(u_n)$ par

$$u_0(x) = \cos(x) \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n(x) = \sin(x)^n \cos(x)$$

Étudier le mode de convergence et éventuellement la somme de $\sum u_n$.

**Exercice 15.** [Mines] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

**1.** Déterminer l'ensemble de définition $D$ de $f$.

**2.** Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $D$.

**3.** Déterminer un équivalent simple de $f$ en $(-1)^+$.

**4.** Exprimer $f'$ à l'aide d'une intégrale.

**Exercice 16.** [Centrale] Soit $a : \mathbb{R}_+^* \to [1,+\infty[$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{a(x)}{\ln(x)} = +\infty$. On pose $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a(n)t}$.

**1.** Déterminer le domaine de définition de $f$.

**2.** Trouver un équivalent de $f$ en $+\infty$.

**3.** Soit $b > 0$. On suppose que $a(x) = x^b$. Déterminer un équivalent de $f$ en 0.

**Exercice 17.** [Mines] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x$ réel, on pose $u_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

**1.** Déterminer l'ensemble de définition de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, puis étudier sa continuité.

**2.** Déterminer un équivalent de $S$ en 0.

## III. Avec Python

**Exercice 18.** [Centrale] Pour tout entier naturel $n$, on pose $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^n}$.

**1.** Déterminer le domaine de définition commun $D$ des fonctions $f_n$ et le domaine de convergence $E$ de la suite $(f_n)$.

**2.** Avec Python, tracer les courbes des $f_n$ sur $[-5, 5] \cap E$ pour $0 \leqslant n \leqslant 10$.

**3.** Conjecturer le domaine de convergence uniforme de la suite $(f_n)$ puis prouver la conjecture.

**4.** Étudier la convergence uniforme de la série $\sum f_n$.

**5.** Tracer la somme de la série sur l'intersection de $\mathbb{R}_+$ et de son domaine de convergence.

## Mathématiciens

Bernstein Segei Natanovich (5 mar. 1880 à Odessa-26 oct. 1968 à Moscou).