# T.D. VI - Variables aléatoires discrètes infinies

## I - Modélisation & Lois géométriques

**Exercice 1.** Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires indistinguables au toucher. On effectue avec remise des tirages dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. On note $T$ le premier instant où une boule blanche est tirée.
Quelle est la loi de $T$ ? Préciser l'espérance et la variance de $T$.

**Exercice 2.** Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires indistinguables au toucher. On effectue avec remise des tirages dans l'urne jusqu'à obtenir une boule noire. On note $T$ le premier instant où une boule noire est tirée.
Quelle est la loi de $T$ ? Préciser l'espérance et la variance de $T$.

**Exercice 3.** Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note $S$ la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

**1.** Quelle est la loi de $S$ ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note $T$ la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

**2.** Quelle est la loi de $T$ ? Préciser l'espérance et la variance de $T$.

**Exercice 4.** On dispose d'une pièce qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$. On lance la pièce successivement 4 fois et on note $X$ le nombre de faces obtenus.

**1.** Quelle est la loi de $X$ ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir au moins 2 piles lors d'une manche. On note $T$ la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

**2.** Quelle est la loi suivie par $T$ ? Préciser l'espérance et la variance de $T$.

**Exercice 5.** On dispose d'une urne $U_1$ contenant 2 boules rouges et 3 boules noires et d'une urne $U_2$ contenant 1 boule rouge et 4 boules noires. On dispose également d'une pièce équilibrée.
On appelle *partie* l'expérience suivante : *on lance la pièce de monnaie ; si elle renvoie Pile, on tire une boule de l'urne $U_1$ ; sinon, on tire une boule de l'urne $U_2$.*

**1.** On note $R$ l'événement « la boule tirée est rouge ». Déterminer $\mathbf{P}(R)$.

Un joueur répète des parties en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne une boule rouge. On note $T$ le rang de la partie où il s'arrête.

**2.** Déterminer la loi de $T$. Préciser l'espérance et la variance de $T$.

**Exercice 6.** On dispose de 3 urnes numérotées de 1 à 3. Pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, l'urne numéro $k$ contient $k$ boules rouges et $4-k$ boules noires.
L'expérience consiste à choisir une urne « au hasard » puis à y tirer une boule.

**1.** On note $N$ l'événement « la boule tirée est noire ». Déterminer $\mathbf{P}(N)$.

Un joueur répète des expériences en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne une boule noire. On note $T$ le rang de la partie où il s'arrête.

**2.** Déterminer la loi de $T$. Préciser l'espérance et la variance de $T$.

## II - Autour de la loi géométrique

**Exercice 7.** Soit $T$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(T=k) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

On pose $Y = T + 1$.

**1.** Déterminer $Y(\Omega)$, puis, pour tout $k \in Y(\Omega)$, exprimer $\mathbf{P}(Y = k)$ en fonction de $\mathbf{P}(T = k - 1)$.

**2.** Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y$. Préciser son espérance et sa variance.

**3.** En déduire l'espérance et la variance de $T$.

**Exercice 8.** Soit $T$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(T = k) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^k.$$

On pose $Y = T + 1$.

**1.** Déterminer $Y(\Omega)$, puis, pour tout $k \in Y(\Omega)$, exprimer $\mathbf{P}(Y = k)$ en fonction de $\mathbf{P}(T = k - 1)$.

**2.** Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y$. Préciser son espérance et sa variance.

**3.** En déduire l'espérance et la variance de $T$.

**Exercice 9.** (✎) On considère une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \mathbf{P}_{[X>n-1]}([X = n]) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathbf{P}([X > n])$.

**1.** Justifier que

$$[X > n - 1] = [X = n] \cup [X > n].$$

**2.** En déduire que $u_{n-1} - u_n = \mathbf{P}([X = n])$.

**3.** Montrer que, pour tout $n$ entier naturel non nul,

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}([X > n]) = 1 - \mathbf{P}_{[X>n-1]}([X = n]).$$

**4.** En déduire que pour tout $n$ entier naturel non nul, $u_n = \frac{1}{3} u_{n-1}$.

**5.** Exprimer, pour tout $n$ entier naturel la valeur de $u_n$ en fonction de $n$ puis reconnaître la loi de $X$.

**6.** Exprimer $\mathbf{P}([X \leqslant n])$ en fonction de $n$.

**Exercice 10.** (✎) Soit $X_1$, $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$. On note $Z$ la variable aléatoire égale au maximum de $X_1$ et de $X_2$.

**1.** Montrer que $[Z \leqslant n] = [X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n]$.

**2.** En déduire la valeur de $\mathbf{P}([Z \leqslant n])$.

**3.** Pour tout $n$ entier naturel non nul, en remarquant que $\mathbf{P}([Z = n]) = \mathbf{P}([Z \leqslant n]) - \mathbf{P}([Z \leqslant n - 1])$, déterminer $\mathbf{P}([Z = n])$.

**4.** Vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([Z = n]) = 1$.

**Exercice 11.** Soit $Y$ une variable aléatoire telle que,

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(Y = k) = \mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-(k+1)}.$$

On pose $Z = Y + 1$.

**1.** Vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) = 1$.

**2.** Reconnaître la loi de $Z$ puis en déduire son espérance et sa variance.

**3.** En déduire l'espérance et la variance de $Y$.

**4.** On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité que $M$ soit inversible.

**Exercice 12.** (✎) Soit $X$ et $Y$ deux variables éaléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

**1.** En utilisant le système complet d'événements $([Y = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$, montrer que

$$\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \times \mathbf{P}(Y = k).$$

**2.** Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2}$.

**3.** En déduire $\mathbf{P}(X = Y)$.

# III - Autour de la loi de Poisson

**Exercice 13.** Un serveur téléphonique ouvre sa ligne chaque minute. Chaque minute, la probabilité qu'il prenne un client est constante et égale à $\frac{1}{12}$. On note $X$ le nombre d'appels auxquels le serveur a répondu en 1 heure.

**1.** Déterminer la loi de $X$, son espérance $\mathbf{E}[X]$ et sa variance $\mathbf{V}(X)$.
On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $X$ par la loi d'une variable aléatoire $Z$ suivant une loi de Poisson de même espérance que $X$. On considère la table de la loi de Poisson de paramètre 5 suivante :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}([Y=k])$ | 0.006 | 0.034 | 0.084 | 0.140 | 0.175 | 0.175 | 0.146 |

**2.** Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.

**3.** Déterminer des valeurs approchées de $\mathbf{P}(X \leqslant 3)$ puis $\mathbf{P}(X \geqslant 4)$.

**Exercice 14.** Une entreprise produit 100 ampoules par seconde. On suppose que chaque ampoule a une probabilité de 5% d'être défectueuse. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défecteuses par seconde.

**1.** Déterminer la loi de $X$ puis préciser son espérance et sa variance.

On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $X$ par la loi d'une variable aléatoire $Z$ suivant une loi de Poisson de même espérance que $X$.

**2.** Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.

**3.** À l'aide de la table de valeurs ci-dessous, calculer une valeur approchée de $\mathbf{P}([X \geqslant 10])$.

**Fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.**

Par exemple, si $U$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$, alors $\mathbf{P}([U \leqslant 4]) = 0.815$.

| $k \backslash \lambda$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.368 | 0.135 | 0.05 | 0.018 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1 | 0.736 | 0.406 | 0.199 | 0.092 | 0.040 | 0.017 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 2 | 0.920 | 0.677 | 0.423 | 0.238 | 0.125 | 0.062 | 0.030 | 0.014 | 0.006 | 0.003 |
| 3 | 0.981 | 0.857 | 0.647 | 0.433 | 0.265 | 0.151 | 0.082 | 0.042 | 0.021 | 0.010 |
| 4 | 0.996 | 0.947 | 0.815 | 0.629 | 0.440 | 0.285 | 0.173 | 0.100 | 0.055 | 0.030 |
| 5 | 0.999 | 0.983 | 0.916 | 0.785 | 0.616 | 0.446 | 0.301 | 0.191 | 0.116 | 0.067 |
| 6 | 1 | 0.995 | 0.966 | 0.889 | 0.762 | 0.606 | 0.450 | 0.313 | 0.207 | 0.130 |
| 7 | 1 | 0.999 | 0.988 | 0.949 | 0.867 | 0.744 | 0.599 | 0.453 | 0.324 | 0.220 |
| 8 | 1 | 1 | 0.996 | 0.979 | 0.932 | 0.847 | 0.729 | 0.593 | 0.456 | 0.333 |
| 9 | 1 | 1 | 0.999 | 0.992 | 0.968 | 0.916 | 0.930 | 0.717 | 0.587 | 0.458 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 0.997 | 0.986 | 0.957 | 0.901 | 0.816 | 0.706 | 0.583 |

# IV - Autres lois

**Exercice 15.** On considère une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X=0) & = \frac{1}{2}, \\ \mathbf{P}(X=j) & = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j, \forall\, j \geqslant 1. \end{cases}$$

On rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
Déterminer l'espérance de $X$.

**Exercice 16.** Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X=k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

**1.** Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

**2.** Vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=k) = 1$.

**3.** En déduire la valeur de $\mathbf{P}(X=0)$.

**4.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X > n) = \frac{1}{n+1}$.

**Exercice 17.** Soit $X$ une variable aléatoire telle que

$$\forall\, n \geqslant 2, \mathbf{P}(X=n) = \frac{4(n-1)}{3^n}.$$

On admet que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} k^2x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

**1.** Vérifier que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4(n-1)}{3^n} = 1$.

**2.** Calculer l'espérance de $X$.

**Exercice 18.** Soit $Y$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ telle que

$$\forall\, n \geqslant 2,\, \mathbf{P}\left(Y = n\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

**1.** Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(Y = n\right)$.

**2.** Calculer $\mathbf{E}\left[Y\right]$.