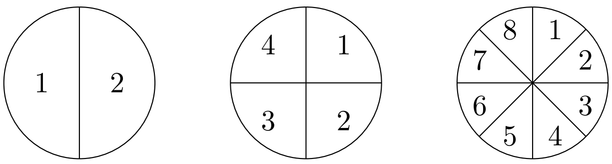
Lycée Ozenne — Devoir surveillé — **ECT 2**

DS n°03 — 11/01/2025

■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.
Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. Un forain organise un jeu de fléchettes dans une fête foraine. Le jeu se présente sous la forme de trois cibles A, B et C. La cible A est séparée en deux secteurs, la cible B est séparée en quatre secteurs et la cible C est séparée en 8 secteurs. Sur chaque cible, les secteurs sont de même dimension ce qui signifie qu'un joueur qui lance une fléchette au hasard sur une cible donnée a les mêmes chances d'atteindre chaque secteur de cette cible.



A **B** **C**

Le jeu consiste à lancer des fléchettes sur les cibles successives selon le protocole suivant :

- On commence par la cible A. Il faut atteindre le secteur 1 de cette cible pour avoir le droit de passer à la cible B ; dans le cas contraire on continue à lancer la fléchette en direction de la cible A.
- De même, lorsqu'on lance une fléchette en direction de la cible B, il faut atteindre le secteur 1 pour avoir le droit de passer à la cible C ; dans le cas contraire, on continue les lancers vers la cible B.
- Enfin le joueur ne lance qu'une fois la fléchette en direction de la cible C. Le secteur qu'il atteint décide du lot qu'il gagne.

On suppose que le joueur atteint toujours la cible visée et que pour une cible donnée les secteurs atteints le sont de manière équiprobable. On suppose que le joueur continue de lancer des fléchettes autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir le droit de passer à la cible C.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement : « lors du lancer de la n-ème fléchette le joueur tire vers la cible A ». On définit de même l'événement B_n. On note a_n et b_n les probabilités respectives de A_n et B_n.
Le joueur commençant par la cible A on a donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

1. a) Calculer les probabilités a_2 et b_2.

b) Calculer b_3 et vérifier que $b_3 = \frac{5}{8}$.

2. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n.$$

3. a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche les valeurs de a_{50} et b_{50}.

```
1 n = ...
2 a = 1
3 b = 0
4 for i in range(1, n+1):
5     b = ...
6     a = ...
7 print(b, a)
```

b) Si on échange les lignes 5 et 6 le résultat affiché est-il le même ? Pourquoi ?

4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on pose $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$.

a) Montrer que $v_1 = 2$ et que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a : $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n$.

b) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

c) Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a : $b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}$.

6. On rappelle qu'en important le module `import numpy.random as rd`, l'appel `rd.randint(1, n+1)` permet de simuler la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes lancées par le joueur. Recopier le programme suivant et compléter les lignes 12, 13 et 14 afin qu'il simule notre expérience et affiche la valeur de X.

```
1  import numpy.random as rd
2
3  cible = "a"
4  n = 1
5  while cible != "c":
6      n = n + 1
7      if cible == "a":
8          secteur = rd.randint(1, 3)
9          if secteur == 1:
10             cible = "b"
11     elif cible == "b":
12         secteur = ...
13         if ... :
14             ....
15 print(n)
```

7. Il faut payer 1 euro pour chaque fléchette lancée. Les joueurs se découragent vite. Le forain constate qu'en fait, chaque joueur effectue au moins deux lancers et s'il n'obtient pas le droit de tirer sur la cible C après les deux premiers lancers, alors il abandonne le jeu. Les deux euros qu'il a donnés sont alors perdus.

a) Justifier que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot dans ces conditions est $\frac{1}{8}$.

20 joueurs se présentent successivement et jouent selon ce principe. On suppose que les résultats de chaque joueur sont indépendants les uns des autres. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui gagnent un lot.

b) Reconnaître la loi de Y. Décrire l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y et donner l'expression de $\mathbf{P}([Y = k])$ pour tout entier k apparentant à cet ensemble.

c) Calculer $\mathbf{E}[Y]$ et $\mathbf{V}(Y)$.

d) Chaque lot offert par le forain est d'une valeur de 5 euros. Une fois que les 20 joueurs ont tenté leur chance, on note G la variable aléatoire égale au gain du forain, G étant négatif si le forain perd de l'argent.
Justifier que $G = 2(20 - Y) - 2Y$. Calculer le gain moyen du forain.

Exercice 2. On pose, pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$:

$$f(x) = x\ln(1+x).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et que sa dérivée f' est également dérivable sur l'intervalle $]-1,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère plan.

1. a) Déterminer la limite de f en -1.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$: $f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$.

c) En déduire les variations de la fonction f' sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

3. Tracer l'allure $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan, en soignant le tracé au point d'abscisse 0.

4. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

b) Vérifier que : $\forall\, x \in [0,1]$, $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

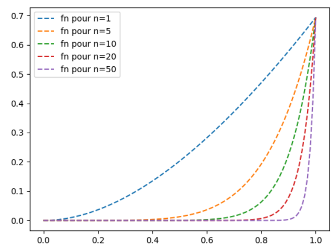
c) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

d) Calculer l'intégrale I.

5. On considère à présent la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in]-1,+\infty[,\ f_n(x) = x^n\ln(1+x).$$

On pose alors pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Le graphique ci-dessous contient les représentations graphiques des fonctions f_1, f_5, f_{10}, f_{20} et f_{50} sur l'intervalle $[0,1]$.



Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour qu'il trace les courbes des fonctions ci-dessus.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return ...

X = np.linspace(0, 1, 100)

for n in [...]:
    plt.plot(..., ..., "--", label=r"fn pour n="+str(n))

plt.legend()
...
```

6. a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En utilisant le graphique ci-dessus, conjecturer la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

7. a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, x \in [0,1],\ 0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n \ln(2).$$

b) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 3. On dispose de deux urnes $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$. L'urne $\mathscr{U}_1$ contient 3 boules rouges et 2 boules vertes, tandis que l'urne $\mathscr{U}_2$ contient 1 boule rouge et 4 boules vertes.
On choisit une des deux urnes au hasard (c'est-à-dire que chacune des deux urnes a la même probabilité d'être choisie), puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne.

- si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathscr{U}_1$;
- si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathscr{U}_2$.

Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par :

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte} \end{cases} \quad \text{et } X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte} \end{cases}$$

On pose $Z = X_1 + X_2$.

1. a) Montrer que $\mathbf{P}([X_1 = 1]) = \frac{2}{5}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?

b) Donner les valeurs de $\mathbf{E}[X_1]$ et $\mathbf{V}(X_1)$.

2. a) Montrer que $\mathbf{P}([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = \frac{12}{25}$.

b) Donner sous forme de tableau, la loi du couple (X_2, Z).

3. a) Déterminer la loi de X_2 ainsi que $\mathbf{E}[X_2]$ et $\mathbf{V}(X_2)$.

b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer la loi de Z.

d) Calculer $\mathbf{E}[Z]$. Montrer que $\mathbf{V}(Z) = \frac{414}{625}$.

4. On considère l'événement : « la première boule tirée est verte ». Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathscr{U}_1$.

5. On se propose dans cette question de calculer $\mathbf{V}(Z)$ par une autre méthode.

a) Calculer $\mathbf{E}[X_2 Z]$.

b) Montrer que $\mathrm{Cov}(X_2, Z) = \frac{204}{625}$.

c) En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

d) Utiliser le résultat précédent pour calculer $\mathbf{V}(Z)$.