T.D. IX - Variables aléatoires à densité

I - Lois usuelles

Solution de l'exercice 1. Rappelons que

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}([3U \leqslant x]) = \mathbf{P}\left(\left[U \leqslant \frac{x}{3}\right]\right) \\ &= F_U\left(\frac{x}{3}\right). \end{aligned}$$

∗ Si $\frac{x}{3} \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 0$, alors $F_X(x) = 0$.
∗ Si $0 \leqslant \frac{x}{3} \leqslant 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant x \leqslant 3$, alors $F_X(x) = \frac{x}{3}$.
∗ Si $\frac{x}{3} \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 3$, alors $F_X(x) = 1$.

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{3} & \text{si } x \in [0,3] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}.$$

Une densité f_X de X est donnée par la dérivée de F_X en les points où F_X est dérivable, soit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x \in [0,3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,3])$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leqslant x]) = \mathbf{P}([U+1 \leqslant x]) = \mathbf{P}([U \leqslant x-1]) \\ &= F_U(x-1). \end{aligned}$$

∗ Si $x-1 \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 1$, alors $F_Y(x) = 0$.
∗ Si $0 \leqslant x-1 \leqslant 1$, c'est-à-dire $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $F_Y(x) = x-1$.
∗ Si $x-1 \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 2$, alors $F_Y(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{si } x \in [1,2] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

Une densité f_Y de Y est donnée par la dérivée de F_Y en les points où F_Y est dérivable, soit

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([1,2])$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leqslant x]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{2}X + 1 \leqslant x\right]\right) = \mathbf{P}([X \leqslant 2(x-1)]) \\ &= F_U(2(x-1)). \end{aligned}$$

∗ Si $2(x-1) \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 1$, alors $F_Z(x) = 0$.
∗ Si $0 \leqslant 2(x-1) \leqslant 1$, c'est-à-dire $1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$, alors $F_Z(x) = 2(x-1)$.
∗ Si $2(x-1) \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant \frac{3}{2}$, alors $F_Z(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2(x-1) & \text{si } x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ 1 & \text{si } x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Une densité f_Z de Z est donnée par la dérivée de F_Z en les points où F_Z est dérivable, soit

$$f_Z(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Z \hookrightarrow \mathscr{U}\left([1, \frac{3}{2}]\right)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([W \leqslant x]) = \mathbf{P}\left([U^2 \leqslant x]\right).$$

* Si $x \leqslant 0$, alors $[U^2 \leqslant x] = \emptyset$ et $F_W(x) = 0$.
* Si $x \geqslant 0$, comme la fonction racine carrée est croissante et bijective et U est à valeurs positives,

$$F_W(x) = \mathbf{P}\left([|U| \leqslant \sqrt{x}]\right) = \mathbf{P}\left([U \leqslant \sqrt{x}]\right) = F_U\left(\sqrt{x}\right).$$

  ⋆ Si $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$ c'est-à-dire $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $F_W(x) = \sqrt{x}$.
  ⋆ Si $\sqrt{x} \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 1$, alors $F_W(x) = 1$.

Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Une densité f_W de W est donnée par la dérivée de F_W en les points où F_W est dérivable, soit

$$f_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition et la fonction exponentielle est croissante et bijective

$$\begin{aligned} F_H(x) &= \mathbf{P}([H \leqslant x]) = \mathbf{P}([\ln(U) \leqslant x]) = \mathbf{P}([U \leqslant e^x]) \\ &= F_U(e^x). \end{aligned}$$

* e^x est une quantité toujours strictement positive.
* Si $0 \leqslant e^x \leqslant 1$, c'est-à-dire $x \leqslant 0$, alors $F_H(x) = e^x$.
* Si $e^x \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 0$, alors $F_H(x) = 1$.

Finalement,

$$F_H(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Une densité f_H de H est donnée par la dérivée de F_H en les points où F_H est dérivable, soit

$$f_H(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition, la fonction exponentielle est croissante et bijective,

$$\begin{aligned} F_E(x) &= \mathbf{P}([E \leqslant x]) = \mathbf{P}([-\ln(U) \leqslant x]) = \mathbf{P}([\ln(U) \geqslant -x]) \\ &= \mathbf{P}\left([U \geqslant e^{-x}]\right) = 1 - \mathbf{P}\left([U \leqslant e^{-x}]\right) \\ &= 1 - F_U\left(e^{-x}\right). \end{aligned}$$

* e^{-x} est une quantité toujours strictement positive.
* Si $0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 0$, alors $F_E(x) = 1 - e^{-x}$.
* Si $e^{-x} \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \leqslant 0$, alors $F_E(x) = 0$.

Finalement,

$$F_E(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f_E de E est donnée par la dérivée de F_E en les points où F_E est dérivable, soit

$$f_E(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît $E \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. □

Solution de l'exercice 2.

1. $R(\omega)$ est le plus petit des réels $R_1(\omega)$ et $R_2(\omega)$. Ainsi, $R(\omega) > x$ si et seulement si $R_1(\omega)$ et $R_2(\omega)$ sont strictement supérieurs à x. Ainsi,

$$\begin{aligned} [R > x] &= [R_1 > x] \cap [R_2 > x] \\ \mathbf{P}([R > x]) &= \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]). \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les propriétés de la fonction de répartition et la question précédente,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{P}([R \leqslant x]) = 1 - \mathbf{P}([R > x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]), \text{ d'après } \mathbf{1.} \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x]) \times \mathbf{P}([R_2 > x]), \text{ par indépendance} \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x])^2, \text{ car } R_1 \text{ et } R_2 \text{ ont même loi} \\ &= 1 - (1 - \mathbf{P}([R_1 \leqslant x]))^2. \end{aligned}$$

Comme $R_1 \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, sa fonction de répartition satisfait :

$$\mathbf{P}([R_1 \leqslant x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Ainsi,

* Si $x \leqslant 0$, alors
$$F(x) = 1 - (1-0)^2 = 0.$$
* Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors
$$F(x) = 1 - (1-x)^2 = x(2-x).$$
* Si $x \geqslant 1$, alors
$$F(x) = 1 - (1-1)^2 = 1.$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x(2-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f de R est donnée par la dérivée de F en tout point où F est dérivable, soit

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. On cherche la probabilité que le minimum des deux distances soit inférieur à 50cm, soit

$$\mathbf{P}([R \leqslant 0{,}5]) = F(0{,}5) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

□

Solution de l'exercice 3. On note F_X la fonction de répartition de X. Comme $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Comme X est à valeurs positives, alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = n) &= \mathbf{P}(\lfloor X \rfloor + 1 = n) = \mathbf{P}(\lfloor X \rfloor = n-1) = \mathbf{P}(n-1 \leqslant X < n) \\ &= F_X(n) - F_X(n-1) \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda n}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)} - \mathrm{e}^{-\lambda n} = \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}}\right)$.

2. On note F_Z la fonction de répartition de Z. Alors,

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(Z \leqslant x) = \mathbf{P}\left(\sqrt{X} \leqslant x\right).$$

* Si $x \leqslant 0$, l'événement $[\sqrt{Z} \leqslant x]$ est impossible et $F_Z(x) = 0$.
* Si $x \geqslant 0$, comme la fonction carrée est croissante et bijective sur $\mathbb{R}_+$,
$$F_Z(x) = \mathbf{P}\left(X \leqslant x^2\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2}.$$

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Une densité de Z est donnée par

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\lambda x\, \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Sous réserve d'existence, $\mathbf{E}[Z] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\, \mathrm{d}t$.

Soit $x > 0$.

$$\int_{-\infty}^{x} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 2\lambda t^2\,\mathrm{e}^{-\lambda t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On pose $\begin{cases} u(t) &= t \\ u'(t) &= 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(t) &= 2\lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t^2} \\ v'(t) &= -\,\mathrm{e}^{-\lambda t^2} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, x]$, donc d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t &= \left[t \times \left(-\,\mathrm{e}^{-\lambda t^2}\right)\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x\,\mathrm{e}^{-\lambda x^2} + \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or, $\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\frac{1}{2\lambda}}}$ est une densité de la loi $\mathscr{N}\left(0, \frac{1}{2\lambda}\right)$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$. D'après la symétrie de cette densité, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

D'autre part, d'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x^2} = 0$. Ainsi, Z admet une espérance et

$$\mathbf{E}\,[Z] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

De plus, $\mathbf{E}\left[Z^2\right] = \mathbf{E}\,[X] = \frac{1}{\lambda}$. Ainsi,

$$\mathbf{V}\,(Z) = \mathbf{E}\left[Z^2\right] - \mathbf{E}\,[Z]^2 = \frac{1}{\lambda} - \frac{\pi}{4\lambda} = \frac{4-\pi}{4\lambda}.$$

3. On note F_W la fonction de répartition de W. Alors,

$$F_W(x) = \mathbf{P}\,(W \leqslant x) = \mathbf{P}\left(X^2 \leqslant x\right).$$

* Si $x \leqslant 0$, l'événement $[X^2 \leqslant x]$ est impossible et $F_W(x) = 0$.
* Si $x \geqslant 0$, comme la fonction racine carrée est croissante et bijective sur $\mathbb{R}_+$ et X est à valeurs positives,

$$F_W(x) = \mathbf{P}\left(|X| \leqslant \sqrt{x}\right) = \mathbf{P}\left(X \leqslant \sqrt{x}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}.$$

Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Une densité de W est donnée par

$$f_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{\lambda}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Enfin, sous réserve d'existence,

$$\mathbf{E}\,[W] = \mathbf{E}\left[X^2\right] = \mathbf{V}\,(X) + \mathbf{E}\,[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{t\to-\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2} = 0$, le théorème de comparaison aux intégrales de Riemann assure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Notons F la primitive de f qui s'annule en 0. D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Notons $\ell = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$. Alors, $\Phi(x) = F(x) - \lim\limits_{t\to-\infty} F(t)$. Ainsi, la fonction la fonction Φ est dérivable et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Phi'(x) = f(x).$$

Comme $f > 0$, la fonction Φ est strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$ et, d'après la propriété de la loi normale,

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

D'après le théorème de la bijection monotone, Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.

2. En utilisant la notation précédente, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \mathbf{P}\,(-x < X < x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1.$$

Comme Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$, alors g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ (car $g(0)=0$). Ainsi, il existe un unique réel t_0 tel que $g(t_0)=0{,}95$.

3. Comme $X \hookrightarrow \mathscr{N}(8,4)$, alors $\frac{X-8}{2} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$.

a) En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X<7{,}5) = \mathbf{P}(X-8<-0{,}5) &= \mathbf{P}\left(\frac{X-8}{2}<-0{,}25\right)\\ &= 1-\Phi(0{,}25)\\ &\simeq 1-0{,}5987 \simeq 0{,}4013.\end{aligned}$$

b) En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X>8{,}5) = \mathbf{P}(X-8>0{,}5) &= \mathbf{P}\left(\frac{X-8}{2}>0{,}25\right)\\ &= 1-\Phi(0{,}25)\\ &\simeq 1-0{,}5987 \simeq 0{,}4013.\end{aligned}$$

c) En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(6{,}5<X<10) &= \mathbf{P}(-2{,}5<X-8<2) = \mathbf{P}\left(-1{,}25<\frac{X-8}{2}<1\right)\\ &= \Phi(1)-\Phi(-1{,}25) = \Phi(1)-(1-\Phi(1{,}25)\\ &\simeq 0{,}8413-1+0{,}8943\\ &\simeq 0{,}7356.\end{aligned}$$

d) En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X>5]}(X>6) &= \frac{\mathbf{P}([X<6]\cap[X>5])}{\mathbf{P}(X>5)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(5<X<6)}{\mathbf{P}(X>5)}\\ &= \frac{\mathbf{P}\left(-1{,}5<\frac{X-8}{2}<-1\right)}{\mathbf{P}\left(\frac{X-8}{2}>-1{,}5\right)}\\ &= \frac{\Phi(-1)-\Phi(-1{,}5)}{1-\Phi(-1{,}5)}\\ &= \frac{1-\Phi(1)-(1-\Phi(1{,}5))}{1-(1-\Phi(1{,}5))}\\ &= \frac{\Phi(1{,}5)-\Phi(1)}{\Phi(1{,}5)}\\ &\simeq \frac{0{,}9332-0{,}8413}{0{,}9332} \simeq 0{,}0985.\end{aligned}$$

□

II - Densités

Solution de l'exercice 5.

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

* D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 et 1.
  Comme $\lim\limits_{t\to -1^-} f(t)=0$ et $\lim\limits_{t\to -1^+} f(t)=1-1=0$, alors f est continue en -1.
  Comme $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t)=1-1=0$ et $\lim\limits_{t\to 1^+} f(t)=0$, alors f est continue en 1.
  Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.
* Pour tout $t\in[-1,1]$, alors $|t|\in[0,1]$ et $1-|t|\geqslant 0$. Ainsi, comme f est nulle en dehors du segment $[-1,1]$, alors f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
* Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

converge et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1}(1-|t|)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}(1-|t|)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1}(1-|t|)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-1}^{0}(1+t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1}(1-t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{(1-t)^2}{2}\right]_{0}^{1}\\ &= \frac{1-0}{2} + \frac{-0+1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Finalement, la fonction f est bien une densité de probabilité.

2. Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-1}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} t(1-|t|)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} t(1-|t|)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-1}^{0} t(1+t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} t(1-t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $\varphi : [0,1] \to [-1,0]$, $u \mapsto -u$ dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{1}^{0} -u(1-u)(-1)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{1} t(1-t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_{0}^{1} u(1-u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{1} t(1-t)\,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = \mathbf{E}\left[X^2\right] - 0\\ &= \int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} t^2(1-|t|)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} t^2(1-|t|)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-1}^{0} t^2(1+t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} t^2(1-t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{1}^{0} (-u)^2(1-u)(-1)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{1} t^2(1-t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{1} u^2(1-u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{1} t^2(1-t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\left(\int_{0}^{1} t^2\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} t^3\,\mathrm{d}t\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 6.

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

∗ Comme l'exponentielle est à valeurs strictement positives, le dénominateur de f ne s'annule pas et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

∗ Comme l'exponentielle est à valeurs strictement positives, alors f est à valeurs strictement positives.

∗ Soit $y < 0 < x$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{y}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{y}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\right]_{y}^{x}\\ &= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-y}}.\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to-\infty}\int_{y}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité.

2. En utilisant la question précédente, pour tout x réel,

$$F(x) = \mathbf{P}\left(X \leqslant x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

3. On remarque que

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x+1-2}{\mathrm{e}^x+1} = 1-\frac{2}{\mathrm{e}^x+1}.$$

Ainsi, la fonction φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 1$.
Ainsi, φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

4. Soient $x\in\mathbb{R}$ et $y\in]-1,1[$ tels que :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= y\\
1-\frac{2}{\mathrm{e}^x+1} &= y\\
\frac{2}{\mathrm{e}^x+1} &= 1-y\\
\mathrm{e}^x+1 &= \frac{2}{1-y}\\
\mathrm{e}^x &= \frac{2}{1-y}-1 = \frac{1+y}{1-y}\\
x &= \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction φ est bijective et $\varphi^{-1} : y\mapsto \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

5. Soit $x\in\mathbb{R}$.

∗ Comme Y est à valeurs dans $[-1,1]$,

⋆ Si $x\leqslant -1$, alors $G(x) = 0$.

⋆ Si $x\geqslant 1$, alors $G(x) = 1$.

∗ Si $x\in]-1,1[$, comme φ^{-1} est strictement croissante et bijective,

$$\begin{aligned}
G(x) &= \mathbf{P}\left(Y\leqslant x\right) = \mathbf{P}\left(\varphi(X)\leqslant x\right)\\
&= \mathbf{P}\left(X\leqslant \varphi^{-1}(x)\right) = F\left(\varphi^{-1}(x)\right)\\
&= \frac{1}{1+\exp\left(-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)}\\
&= \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}\\
&= \frac{1+x}{1+x+1-x}\\
&= \frac{1+x}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant -1\\ \frac{1+x}{2} & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}.$$

Une densité g est donnée par la dérivée de G en tout point où G est dérivable, soit

$$g(x) = \begin{cases}\frac{1}{2} & \text{si } x\in[-1,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{U}\left([-1,1]\right)$. □

Solution de l'exercice 7.

1. Déterminons les valeurs de C telles que f_α soit une densité de probabilité.

∗ La fonction f_α est continue sauf en 1, point en lequel elle admet des limites finies à gauche et à droite car

$$\lim_{t\to1^-} f(t) = 0 \text{ et } \lim_{t\to1^+} f(t) = C.$$

∗ Comme f_α est non nulle pour $t\geqslant 1$, et que $t^{\alpha+1}$ est positif pour $t\geqslant 1$, alors f_α est positive si et seulement si $C\geqslant 0$.

$*$ Soit $x \geqslant 1$.

$$\int_{-\infty}^{x} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{C}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = C\left[-\frac{1}{\alpha t^\alpha}\right]_1^x = \frac{C}{\alpha}\left(1-\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

Comme $\alpha > 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{C}{\alpha}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = 1$ si et seulement si $C = \alpha$.

Finalement, comme $\alpha > 0$, alors f_α est une densité de probabilité si et seulement si $C = \alpha$.

2. En utilisant le caclul précédent,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x^\alpha} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. Sous réserve d'existence, $\mathbf{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $x \geqslant 1$. Alors,

$$\int_{-\infty}^{x} t f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\alpha}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

$*$ Si $\alpha = 1$. Alors, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} t f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x)$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} t f_1(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ et X n'admet pas d'espéance.

$*$ Si $\alpha \neq 1$. Alors,

$$\int_1^x \frac{\alpha}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right).$$

Or,

- $\star$ si $\alpha > 1$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ donc X admet bien une espéance ;
- $\star$ si $\alpha < 1$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ diverge donc X n'admet pas d'espérance.

Finalement, X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$. Alors,

$$\mathbf{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Sous réserve d'existence, $\mathbf{V}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t - \mathbf{E}[X]^2$.

Soit $x \geqslant 1$. Alors,

$$\int_{-\infty}^{x} t^2 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\alpha}{t^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}t.$$

$*$ Si $\alpha = 2$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} t^2 f_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t = 2\ln(x)$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} t^2 f_2(t)\mathrm{d}t = +\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_2(t)\mathrm{d}t$ diverge. Ainsi, X n'admet pas de variance.

$*$ Si $\alpha \neq 2$. Alors,

$$\int_{-\infty}^{x} t^2 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\alpha}{(\alpha-2)t^{\alpha-2}}\right]_1^x = \frac{\alpha}{\alpha-2}\left(1-\frac{1}{x^{\alpha-2}}\right).$$

Or,

- $\star$ si $\alpha > 2$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-2}} = 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{\alpha-2}$;
- $\star$ si $\alpha < 2$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-2}} = +\infty$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-2}}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Ainsi, X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$. Alors,

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{\alpha-2}$$

et

$$\mathbf{V}(X) = \frac{\alpha}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2 = \alpha\frac{(\alpha-1)^2-\alpha(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}.$$

4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et F_Y la fonction de répartition de Y.

$$F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}\left(X^2 \leqslant x\right).$$

$*$ Si $x \leqslant 0$, alors $[X^2 \leqslant x]$ est impossible et $F_Y(x) = 0$.

* Si $x \geqslant 0$, comme la fonction racine carrée est croissante et bijective et X est à valeurs positives, alors

$$F_Y(x) = \mathbf{P}\left(X \leqslant \sqrt{x}\right).$$

  * Si $\sqrt{x} \leqslant 1$, soit $x \leqslant 1$, alors $F_Y(x) = 0$.
  * Si $\sqrt{x} \geqslant 1$, soit $x \geqslant 1$, alors

$$F_Y(x) = F(\sqrt{x}) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha/2}}$$

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{\alpha/2}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f_Y de Y est donnée par

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{\alpha/2}{x^{\alpha/2+1}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, Y suit une loi de Pareto de paramètre $\frac{\alpha}{2}$. Elle admet une espérance si et seulement si $\frac{\alpha}{2} > 1$, soit $\alpha > 2$ et alors

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 2}.$$

5. Soient $x \in \mathbb{R}$ et F_T la fonction de répartition de T.

$$F_T(x) = \mathbf{P}(T \leqslant x) = \mathbf{P}\left(\sqrt{X} \leqslant x\right).$$

* Si $x \leqslant 0$, alors $[\sqrt{X} \leqslant x]$ est impossible et $F_T(x) = 0$.
* Si $x \geqslant 0$, comme la fonction carrée est croissante et bijective, alors

$$F_T(x) = \mathbf{P}\left(X \leqslant x^2\right).$$

  * Si $x^2 \leqslant 1$, soit $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $F_T(x) = 0$.
  * Si $x^2 \geqslant 1$, soit $x \geqslant 1$, alors

$$F_T(x) = F(x^2) = 1 - \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

Finalement,

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{2\alpha}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f_T de T est donnée par

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{2\alpha}{x^{2\alpha+1}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi, T suit une loi de Pareto de paramètre 2α. Elle admet une espérance si et seulement si $2\alpha > 1$, soit $\alpha > \frac{1}{2}$ et alors

$$\mathbf{E}[T] = \frac{2\alpha}{2\alpha - 1}.$$

□

III - Estimation

Solution de l'exercice 8.

1. En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[T_1] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \mathbf{E}[X_3] + \mathbf{E}[X_4]}{4} = \mathbf{E}[X_1] = \frac{2\theta}{2} = \theta,$$
$$\mathbf{E}[T_2] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + 2\mathbf{E}[X_2] + 3\mathbf{E}[X_3] + 4\mathbf{E}[X_4]}{10} = \mathbf{E}[X_1] = \frac{2\theta}{2} = \theta.$$

Ainsi, T_1 et T_2 sont des estimateurs sans biais de θ.

2. Comme les estimateurs sont sans biais, leur risque quadratique est égal à leur variance. De plus, comme les v.a. sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(T_1) &= \frac{\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + \mathbf{V}(X_3) + \mathbf{V}(X_4)}{16} = \frac{\mathbf{V}(X_1)}{4} \\
&= \frac{(2\theta)^2}{48} = \frac{\theta^2}{12}, \\
\mathbf{V}(T_2) &= \frac{\mathbf{V}(X_1) + 4\mathbf{V}(X_2) + 9\mathbf{V}(X_3) + 16\mathbf{V}(X_4)}{100} = \frac{30\mathbf{V}(X_1)}{100} \\
&= \frac{(2\theta)^2}{40} = \frac{\theta^2}{10}.
\end{aligned}$$

3. Ainsi, T_1 a un risque quadratique plus faible que T_2 et est donc préférable. $\square$

Solution de l'exercice 9.

1. Notons F_X la fonction de répartition de X et F_n la fonction de répartition de M_n. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbf{P}(M_n \leqslant x) = \mathbf{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leqslant x]\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(X_k \leqslant x), \quad \text{d'après l'indépendance} \\ &= F_n(x)^n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \left(\frac{x}{2\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0, 2\theta] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Ainsi, une densité f_n de M_n est donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{(2\theta)^n} x^{n-1} & \text{si } x \in [0, 2\theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme f_n est nulle en dehors d'un segment, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\, \mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\theta} t \times \frac{n}{(2\theta)^n} t^{n-1}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{n}{(2\theta)^n} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^{2\theta} = \frac{n}{(n+1)} 2\theta. \end{aligned}$$

Comme f_n est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[M_n^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\theta} t^2 \times \frac{n}{(2\theta)^n} t^{n-1}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{n}{(2\theta)^n} \left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^{2\theta} = \frac{n}{n+2}(2\theta)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(M_n) = \mathbf{E}\left[M_n^2\right] - \mathbf{E}[M_n]^2 &= \frac{n}{n+2}(2\theta)^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 (2\theta)^2 \\ &= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}(2\theta)^2. \end{aligned}$$

2. Comme U_n est une fonction du n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, alors U_n est un estimateur.
D'après la question précédente,

$$\mathbf{E}[U_n] = \frac{n+1}{2n} \mathbf{E}[M_n] = \theta.$$

Ainsi, U_n est un estimateur sans biais de θ.

3. Comme $\overline{X}_n$ est une fonction du n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, alors $\overline{X}_n$ est un estimateur de θ.
D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i] = \frac{n2\theta}{2n} = \theta.$$

Ainsi, $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de θ.

4. Comme les variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendantes,

$$\mathbf{V}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) = \frac{1}{n} \times \frac{(2\theta)^2}{12} = \frac{(2\theta)^2}{12n}.$$

Comme $\overline{X}_n$ est U_n sont des estimateurs sans biais de θ, nous recherchons celui qui a le biais quadratique (i.e. la variance) la plus faible. Or,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{V}\left(\overline{X}_n\right)}{\mathbf{V}(U_n)} &= \frac{\frac{(2\theta)^2}{12n}}{\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}(2\theta)^2} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)}{12n^2}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} (n+1)^2(n+2) - 12n^2 &= (n-1)(n^2 - 7n - 2) \\ &= (n-1)\left(n - \frac{7-\sqrt{57}}{2}\right)\left(n - \frac{7+\sqrt{57}}{2}\right). \end{aligned}$$

Comme $\frac{7+\sqrt{57}}{2} \simeq 7{,}27$, alors le biais de U_n est inférieur à celui de $\overline{X}_n$ dès que $n \geqslant 8$. □

Solution de l'exercice 10.

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en θ.
  De plus, $\lim_{t\to\theta^-} f(t) = 0$ et $\lim_{t\to\theta^+} f(t) = \mathrm{e}^{-(\theta-\theta)} = 1$ donc la fonction f admet des limites finies à gauche et à droite en θ.
* Comme la fonction exponentielle est à valeurs positives, alors f est à valeurs positives.
* Soit $x \geqslant \theta$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\theta}^{x} \mathrm{e}^{-(t-\theta)}\,\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{e}^{\theta}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_{\theta}^{x}\\ &= \mathrm{e}^{\theta}\left(\mathrm{e}^{-\theta}-\mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= 1-\mathrm{e}^{\theta-x}.\end{aligned}$$

  Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\theta-x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Finalement, f est bien une densité de probabilité.

2. En posant $Y = T - \theta$, on remarque que $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. Ainsi,

$$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[Y+\theta] = 1+\theta \text{ et } \mathbf{V}(T) = \mathbf{V}(Y+\theta) = 1.$$

3. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[T_i] = \mathbf{E}[T] = 1+\theta.$$

Comme les variables aléatoires $(T_1,\dots,T_n)$ sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(T_i) = \frac{1}{n}.$$

4. Comme $\widehat{Y}_n$ est une fonction du n-échantillon $(T_1,\dots,T_n)$, alors $\widehat{Y}_n$ est un estimateur.
D'après la question précédente, $\mathbf{E}\left[\widehat{Y}_n\right] = \mathbf{E}[Y_n] - 1 = \theta$.
Ainsi, $\widehat{Y}_n$ est un estimateur sans biais de θ.

5. Comme $\widehat{Y}_n$ est un estimateur sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance et, d'après les questions précédentes,

$$\mathbf{V}\left(\widehat{Y}_n\right) = \mathbf{V}(Y_n-1) = \mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n}.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \mathbf{P}(\min\{T_1,\dots,T_n\} \leqslant x)\\ &= 1-\mathbf{P}(\max\{T_1,\dots,T_n\} > x)\\ &= 1-\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[T_i > x]\right)\\ &= 1-\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(T_i > x), \quad \text{d'après l'indépendance}\\ &= 1-(1-F(x))^n.\end{aligned}$$

7. En utilisant la densité f, on remarque que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \theta \\ 1-\mathrm{e}^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geqslant \theta \end{cases}.$$

Ainsi,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \theta \\ 1-\mathrm{e}^{-n(x-\theta)} & \text{si } x \geqslant \theta \end{cases}.$$

La variable aléatoire Z_n admet donc comme densité

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ n\,\mathrm{e}^{-n(x-\theta)} & \text{si } x \geqslant \theta \end{cases}.$$

8. Soit $x \geqslant \theta$. En utilisant la densité précédente puis une intégration par parties,

$$\int_{-\infty}^{x} t f_n(t)\,\mathrm{d}t = n\,\mathrm{e}^{n\theta}\int_{\theta}^{x} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = n\,\mathrm{e}^{n\theta}\,\frac{(n\theta+1)\,\mathrm{e}^{-n\theta}-(nx+1)\,\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}.$$

Ainsi, Z_n admet une espérance et $\mathbf{E}\left[Z_n\right] = \frac{n\theta+1}{n}$.
De manière analogue,

$$\int_{-\infty}^{x} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = n\,\mathrm{e}^{n\theta}\,\frac{(n^2\theta^2+2n\theta+2)\,\mathrm{e}^{-n\theta} - (n^2x^2+2nx+2)\,\mathrm{e}^{-nx}}{n^3},$$

soit $\mathbf{E}\left[Z_n^2\right] = \frac{n^2\theta^2+2n\theta+2}{n^2}$.
Ainsi, $\mathbf{V}\left(Z_n\right) = \mathbf{E}\left[Z_n^2\right] - \mathbf{E}\left[Z_n\right]^2 = \frac{1}{n^2}$.

Remarque. On aurait également pu constater que $Z_n - \theta \hookrightarrow \mathscr{E}(n)$.

9. Comme $\widehat{Z}_n$ est une fonction de $T_1, \ldots, T_n$, alors Z_n est un estimateur. Comme $\mathbf{E}\left[Z_n\right] = \theta + \frac{1}{n}$, alors $\mathbf{E}\left[Z_n - \frac{1}{n}\right] = \theta$ et $\widehat{Z}_n$ est un estimateur sans biais de θ.

10. D'après les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}\left(\widehat{Z}_n\right) = \mathbf{V}\left(Z_n - \frac{1}{n}\right) = \mathbf{V}\left(Z_n\right) = \frac{1}{n^2}.$$

11. Comme $\widehat{Y}_n$ est $\widehat{Z}_n$ sont deux estimateurs sans biais de θ, alors leurs risques quadratiques sont égaux à leurs variances. De plus, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbf{V}\left(\widehat{Z}_n\right) = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} = \mathbf{V}\left(\widehat{Y}_n\right).$$

Ainsi, l'estimateur $\widehat{Z}_n$ est préférable à $\widehat{Y}_n$. $\square$