

T.D. II - Calcul matriciel

I - Opérations sur des matrices

Exercice 1. Effectuer les produits matriciels suivants :

$$1. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad 2. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2,5 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ -0,5 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -2,5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB .
2. Que dire du produit BA ?

Exercice 3. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. (✿) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Effectuer les calculs suivants :

$$\begin{array}{l|l} 1. A + 2B. & 3. A + BC. \\ 2. ABC. & 4. (A - I_2)(B - I_2). \end{array}$$

Exercice 5. Soit A et B des matrices carrées de taille 4. Factoriser par A les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 1. A^4 + 3A^3 + 3A^2. & 3. A^3 + 3BA + A^2. \\ 2. A^3 + 3AB + A^2. & 4. A^3 + 2A^2 + 5A. \end{array}$$

Exercice 6. (✿) Pour chacune des matrices J suivantes, calculer J^2 , J^3 puis J^k pour tout $k \geq 3$.

$$\begin{array}{l|l} 1. J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. & 3. J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ 2. J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. & 4. J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Exercice 7. (✿) Soit A une matrice d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. Développer l'expression $(A - 2I)(A - I)$.

Exercice 8. (✿) Soit A une matrice d'ordre 4 et I la matrice identité d'ordre 4. Développer l'expression $(A + I)^3$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis A^3 .

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis A^3 .

Exercice 11. (✿)

1. Soit a et b deux réels. Développer l'expression $(a + b)^2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Calculer $(A + B)^2$.
 - b) Calculer $A^2 + 2AB + B^2$.
 - c) Que peut-on conclure ?

Exercice 12. (✿) Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs possibles pour d_1 et d_2 afin que $D^2 + 5D = -4I_2$.

II - Calculs de puissances

II.1 - Récurrences

Exercice 13. (✱) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Cette relation est-elle encore vraie lorsque $n = 0$?

Exercice 14. (✱) Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 et B^3 .
2. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{2n+1} \\ 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 et B^3 .

2. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,
- $$B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 3^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n+1} \\ 0 & 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. (✱) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité d'ordre 3.

1. a) Calculer $A^2 - 2A - 8I$.

b) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on ait $A^n = a_n A + b_n I$.

On précisera les premiers termes $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$; et on exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

2. On définit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par
$$\begin{cases} u_n &= 4a_n + b_n \\ v_n &= -2a_n + b_n \end{cases}.$$

- a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont géométriques.
- b) En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n .
- c) En déduire une expression de a_n et b_n en fonction de n .

3. Exprimer A^n en fonction de n .

II.2 - Formule du binôme

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = A - 2I_3$.

1. Expliciter J , J^2 et J^3 . En déduire la valeur de J^k pour tout entier $k \geq 3$.

2. Montrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que pour tout $n \geq 2$,

$$A^n = 2^n \left(I_3 + \frac{n}{2} J + \frac{n(n-1)}{8} J^2 \right).$$

3. En déduire, pour $n \geq 2$, les neuf coefficients de la matrice A^n . Vérifier que votre résultat reste vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 3I_3$.

1. Expliciter B , B^2 et B^3 . En déduire B^k pour tout $k \geq 3$.

2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$A^n = 3^n \left(I + \frac{n}{3}B + \frac{n(n-1)}{18}B^2 \right).$$

3. La formule est-elle encore vraie pour $n = 0$? $n = 1$?

Exercice 20. (\rightarrow) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout n entier

naturel, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.