T.D. IX - Intégrales généralisées

I - Fonctions continues

Exercice 1. (⚙) Pour chacune des intégrales suivantes, montrer qu'elle converge et déterminer sa valeur.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{5}{t^3}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^4}\,\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t$.
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} 3\,\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t$.
8. $\displaystyle\int_3^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. (⚙) Pour chacune des intégrales suivantes, montrer qu'elle converge et déterminer sa valeur.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-5} 2\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Pour tout x réel, on pose $h(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$ et $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

1. Déterminer la dérivée de h.
2. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

II - Fonctions discontinues

Exercice 4. (⚙) Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } t \in [5,10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Pour tout x réel, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   - **a)** Pour tout $x < 5$, déterminer la valeur de $F(x)$.
   - **b)** Pour tout $x \in]5,10[$, déterminer la valeur de $F(x)$.
   - **c)** Pour tout $x > 10$, déterminer la valeur de $F(x)$.
   - **d)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.
2. Pour tout x réel, on pose $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t$.
   - **a)** Pour tout $x < 5$, déterminer la valeur de $G(x)$.
   - **b)** Pour tout $x \in]5,10[$, déterminer la valeur de $G(x)$.
   - **c)** Pour tout $x > 10$, déterminer la valeur de $G(x)$.
   - **d)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 5. (⚙) Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t \in [2,4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Pour tout x réel, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   - **a)** Pour tout $x < 2$, déterminer la valeur de $F(x)$.
   - **b)** Pour tout $x \in]2,4[$, déterminer la valeur de $F(x)$.
   - **c)** Pour tout $x > 4$, déterminer la valeur de $F(x)$.
   - **d)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Pour tout $x < 2$, déterminer la valeur de $G(x)$.

b) Pour tout $x \in]2,4[$, déterminer la valeur de $G(x)$.

c) Pour tout $x > 4$, déterminer la valeur de $G(x)$.

d) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 6. (⚙) Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\,\mathrm{e}^{-2t} & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Pour tout x réel, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.

b) Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.

c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

b) Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

On pourra utiliser une intégration par parties.

c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 7. (⚙) Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Pour tout x réel, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.

b) Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.

c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

b) Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

On pourra utiliser une intégration par parties.

c) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et g la fonction définie pour tout $t \geqslant 0$ par $g(t) = -\frac{1}{1+t^2}$.

1. Pour tout réel $t \geqslant 0$, déterminer $g'(t)$.

2. Pour tout $x \geqslant 0$, déterminer la valeur de $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 9. (✐) Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \ln(t) & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout réel A supérieur ou égal à 1, on pose $I(A) = \int_{-\infty}^{A} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ et $J(A) = \int_{-\infty}^{A} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Pour tout $A \geqslant 1$, déterminer la valeur de $I(A)$.

2. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $A \geqslant 1$,

$$J(A) = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.$$

4. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.