T.D. I - Suites & Fonctions

I - Suites

I.1 - Suites classiques

Exercice 1. (Suite arithmétique) Soit (u_n) une suite arithmétique. Sachant que $u_{80} = 393$ et $u_{15} = 133$, calculer u_1.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel non nul, $u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$.

1. Déterminer $u_1, \dots, u_5$ en écrivant les résultats sous la forme d'une puissance de 2.

2. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $v_n = \ln(u_n) - \ln(4)$. Déterminer la nature de la suite (v_n) et en déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3. Donner l'expression de u_n en fonction de n puis en déduire la limite de (u_n).

Exercice 3. (Une suite arithmético-géométrique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 12$.

1. Déterminer la solution ℓ de l'équation $\ell = -\frac{\ell}{2} + 12$.

Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - \ell$.

2. Déterminer la nature de la suite (v_n).

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4. (Une seconde suite arithmético-géométrique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

1. Déterminer un réel ℓ tel que $\ell = 3\ell + 4$.

2. Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - \ell$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

3. En déduire une expression de u_n en fonction de n puis étudier le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 5. (Une suite homographique) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$.

Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n).

2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

I.2 - Sommes des termes

Exercice 6. (Sommes classiques) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer, en fonction de n les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} 1$.

2. $\sum_{k=1}^{n} 2$.

3. $\sum_{k=0}^{n} k$.

4. $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

5. $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Exercice 7. (Série harmonique) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite (H_n) est monotone. Que peut-on en déduire quant à son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

3. En déduire que (H_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 8. Soit $p \in]-1,1[$. On note f la fonction définie pour tout $x \in]-1,1[$ par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Rappeler l'expression de f sans le signe somme. En déduire l'expression de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} p^k$.

2. Montrer que f est dérivable et donner deux expressions pour sa dérivée f'.

3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}$.

Exercice 9. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

2. Montrer que (S_n) est majorée par 2.

3. En déduire que (S_n) converge.

Exercice 10. (Constante d'Euler) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Pour tout $x \geqslant 0$, montrer les inégalités

$$\ln(1+x) \leqslant x \text{ et } \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x).$$

2. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$H_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant H_n.$$

4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

En déduire un équivalent de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $c_n = H_{n-1} - \ln(n)$.

5. Calculer $c_{n+1} - c_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (c_n).

6. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $c_n \leqslant 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$.

7. En déduire que la suite (c_n) est convergente.

I.3 - Suites définies par récurrence

Exercice 11. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.

2. En supposant que (u_n) est majorée, aboutir à une contradiction.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 12. On définit la suite définie par récurrence par $u_0 \geqslant -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. On pose $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$.

2. On pose $g : x \mapsto f(x) - x$. Étudier les variations puis le signe de g.

3. On suppose que $u_0 \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) En utilisant la fonction g, montrer que (u_n) est croissante.

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4. Reprendre les questions précédentes lorsque $u_0 \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

I.4 - Suites définies implicitement

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier les variations de la fonction $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

2. En déduire qu'il existe un unique réel $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.

3. En étudiant le signe de $f_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

4. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

5. En utilisant la question précédente, étudier la limite de la suite (nu_n) et en déduire un équivalent simple de u_n.

6. On pose $\varepsilon_n = nu_n - 1$. Exprimer ε_n en fonction de n et de u_n et en déduire un équivalent simple de ε_n.

7. En déduire qu'il existe une suite (δ_n) satisfaisant $\lim_{n \to +\infty} \delta_n = 0$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6}\delta_n.$$

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = x - \ln x$.

1. Dresser le tableau de variations de f.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que $f(u_n) = n$.

3. Montrer que (u_n) est strictement décroissante et converge vers 0.

4. En utilisant la question précédente, montrer que $u_n \sim \mathrm{e}^{-n}$.

5. Montrer que $u_n - \mathrm{e}^{-n} = \mathrm{e}^{-n}(\mathrm{e}^{u_n} - 1)$ et en déduire un équivalent simple de $(u_n - \mathrm{e}^{-n})$.

6. En déduire qu'il existe une suite (δ_n) satisfaisant $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n = 0$ et telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + \mathrm{e}^{-2n}\,\delta_n$.

II - Fonctions

II.1 - Calculs de développements limités

Exercice 15. Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{x^5+4x^4+2}{2x^3+x+1}$.

2. $f_2(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

3. $f_3(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

4. $f_4(x) = \ln(1+x^2)$.

5. $f_5(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + 3x + 2}{x^2+1}$.

6. $f_6(x) = \frac{(x^5+3x+1)\,\mathrm{e}^{-x}}{12x+3}$.

7. $f_7(x) = \frac{(x+25)\ln(x)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

8. $f_8(x) = \frac{\ln(x+1)\,\mathrm{e}^x}{2x+5}$.

9. $f_9(x) = \frac{(3x+12)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{5x^4+2}$.

10. $f_{10}(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

11. $f_{11}(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$.

12. $f_{12}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{x^2(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}$.

13. $f_{13}(x) = \frac{x^4\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$.

14. $f_{14}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$.

15. $f_{15}(x) = \frac{x^3\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}{1+x^3+x^4}$.

Exercice 16. Déterminer un équivalent simple en 0 de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{(x^5+3x+1)\,\mathrm{e}^{-x}}{12x+3}$.

2. $f_2(x) = \frac{(x+25)\ln(x)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

3. $f_3(x) = \frac{\ln(x+1)\,\mathrm{e}^x}{2x+5}$.

4. $f_4(x) = \frac{(3x+12)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{5x^4+2}$.

5. $f_5(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

6. $f_6(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$.

7. $f_7(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{x^2(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}$.

8. $f_8(x) = \frac{x^4\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$.

9. $f_9(x) = \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$.

Exercice 17. (Calculs de limites en 0) Déterminer les limites 0 des fonctions suivantes :

1. $\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}-1}$.

2. $\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-1}$.

3. $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

4. $\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+2x}-1}$.

5. $\frac{\mathrm{e}^{3x} - 1 - 3x}{x^2}$.

Exercice 18. Déterminer un équivalent en 1 de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. $f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2-1}}$.

3. $f_3(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. $f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

5. $f_5(x) = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 19. (Calculs de limites en $+\infty$) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\mathrm{e}^{3/x} - 1\right)$.

Exercice 20. (Calculs de développements limités) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, en 0 de :

1. $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

2. $\frac{1}{1+\ln(1+x)}$.

II.2 - Étude de courbes

Exercice 21. (Inégalités classiques)

1. Démontrer puis représenter graphiquement les inégalités suivantes :

a) $\forall\, u \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+u) \leqslant u$.

b) $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $1+u \leqslant e^u$.

2. Montrer que $\forall\, u \geqslant 0$, $u - \frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u)$.

Exercice 22. (e^π ou π^{e} ?)

1. Étudier la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

2. Sans calculatrice, parmi les réels e^π et π^{e}, lequel est le plus petit ?

Exercice 23. Déterminer l'équation de la tangente ainsi que la position (locale) de la courbe représentative par rapport à cette tangente aux points précisés :

1. e^x en 0.

2. e^x en 2.

3. $\ln(x)$ en 1.

4. $x\,\mathrm{e}^x$ en 0.

5. $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ en 0.

Exercice 24. On considère la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f.

2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in D \setminus \{-1,1\}$, $f'(x)$ et $f(x)$ sont de même signe.

4. Déterminer les variations de f sur $[1,+\infty[$.

5. Montrer que, pour tout $x \in D$, $f(x)f(-x) = -1$ et en déduire les variations de f sur $]-\infty,-1]$.

6. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

7. Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ.

II.3 - Équations fonctionnelles

Exercice 25. (Isométries de $\mathbb{R}$) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)| = |x-y|\,.$$

1. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \{-1,1\}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \varepsilon(x)\cdot x + f(0).$$

2. Soit x un réel non nul. En calculant de deux manières $(f(x)-f(1))^2$, montrer que $\varepsilon(x)\varepsilon(1) = 1$. En déduire que $\varepsilon(x) = \varepsilon(1)$.

3. En déduire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfont la relation :

$$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R},\ |f(x)-f(y)| = |x-y|\,.$$

Exercice 26. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que

$$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(x)+f(y).$$

1. Montrer que $f(0) \in \{0,2\}$.

2. Si $f(0) = 0$, montrer que f est la fonction nulle.

3. Si $f(0) = 2$, montrer que f est la fonction constante égale à 2.

4. En déduire l'ensemble des fonctions f qui satisfont la relation :

$$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(x)+f(y).$$

Exercice 27. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R},\; f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.

3. En déduire que, si f est une fonction bornée, alors f est la fonction nulle.

4. Montrer que f est une fonction impaire.

5. Montrer que, pour tout n entier naturel,

$$f(n) = nf(1) \text{ et } f(-n) = -nf(1).$$

6. Montrer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$.

7. On suppose que, pour tout x réel, il existe deux suites d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$.
Montrer que, si f est une fonction continue, alors $f(x) = xf(1)$.