

# T.D. XI - Fonctions de plusieurs variables

## I - Extremums libres

**Exercice 1. (Extrema libres, dimension 2)** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points critiques ainsi que leur nature (extremum local, extremum global) :

1.  $(x, y) \mapsto x^2 - xy + y^2$ .
2.  $(x, y) \mapsto 4x^2y + 2x^3 - 4xy + 2x + 1$ .
3.  $(x, y) \mapsto x^3 - y^3 + 3x^2 - 3y^2$ .

**Exercice 2. (Extrema libres, dimension 3)** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points critiques ainsi que leur nature :

1.  $(x, y, z) \mapsto 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2$ .
2.  $(x, y, z) \mapsto xy + yz + zx - xyz$ .

**Exercice 3.** On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 6x - 14y + 53$$

1. a) Montrer que  $f$  admet un unique point critique  $M$ .  
b) Montrer que  $f$  admet en  $M$  un minimum local.
2. a) La fonction  $f$  est-elle convexe ?  
b) Que peut-on en déduire ?
3. a) Vérifier que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = \|(x, y) - (x_M, y_M)\|^2$ .  
b) En déduire une seconde démonstration du résultat établi en 2.

**Exercice 4.** Soit  $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^2$ .

1. Déterminer les points critiques de  $f$ .
2. Déterminer la matrice hessienne de  $f$ . Que nous apporte le théorème de Monge ?
3. Montrer que  $f$  admet un minimum local en le point critique.
4. Montrer que la fonction  $f$  est convexe. Que peut-on en déduire ?
5. Montrer directement que l'unique minimum global de  $f$  est atteint en  $(0, 0)$ .

## II - Extremums sous contraintes

**Exercice 5. (Extrema liés simples)** Optimiser les fonctions suivantes sous la contrainte indiquée :

1.  $(x, y) \mapsto (x + 1) \ln(y)$  sous  $x - y + 1 = 0$ .
2.  $(x, y) \mapsto x e^y + y e^x$  sous  $x - y = 0$ .
3.  $(x, y) \mapsto x^2 y$  sous  $2x^2 + y^2 = 3$ .

**Exercice 6. (Extremas liés avec lagrangien)** Optimiser les fonctions sous la contrainte indiquée :

1.  $(x, y, z, t) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + t^2$  sous  $\begin{cases} x + y + z - t = 3 \\ 2x - y + z + t = -6 \end{cases}$ .
2.  $(x, y) \mapsto \ln(x - y)$  sous  $x^2 + y^2 - 2 = 0$ .

**Exercice 7. (Optimisation de production)** Une entreprise de jouets fabrique  $x$  voitures et  $y$  camions. La voiture est vendue 1 euro alors que le camion est vendu 3 euros. Le coût de fabrication est estimé par  $C(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000$ .

1. Établir le profit  $P(x, y)$  réalisé par l'entreprise et étudier sa convexité.
2. L'entreprise peut fabriquer 20 jouets par jour. Déterminer la répartition optimale de sa production entre les voitures et les camions.

**Exercice 8.** Trois cabinets d'étude sont chargés d'évaluer, de manière indépendante, le coût moyen  $c$  de fabrication de la production d'une entreprise. L'entreprise 1 (resp. 2, 3) propose une estimation sans biais de ce coût moyen à partir d'un estimateur noté  $U_1$  (resp.  $U_2, U_3$ ). L'écart-type de  $U_1$  est la moitié de celui de  $U_2$  et un tiers de celui de  $U_3$ . En fin de contrat, les trois cabinets se réunissent et proposent comme estimateur global l'une des combinaisons suivantes :

$$T_1 = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{3}, T_2 = U_1, T_3 = \frac{3U_1 + U_2 + U_3}{5}.$$

1. Parmi ces estimateurs, lesquels sont sans biais ?
2. Calculer la variance de chacun de ces estimateurs.
3. Quel est le meilleur de ces estimateurs ?

On impose que l'estimateur global soit une combinaison linéaire de  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  i.e. il existe  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $T = \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3$ .

4. Déterminer les réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  donnant l'estimateur sans biais d'efficacité maximale.

**Exercice 9.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  définie pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  par  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

1. Déterminer les extremums de  $f$  sous la contrainte  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ .

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

2. Montrer que, parmi les combinaisons linéaires de  $(X_1, \dots, X_n)$ , il existe un unique estimateur sans biais de  $\lambda$  dont la variance est minimale.

**Exercice 10. (Importance de la qualification)** Soit  $f : (x, y) \mapsto x$  sous la contrainte  $x^3 - y^2 = 0$ .

1. Déterminer le minimum de  $f$ .
2. Écrire les conditions du premier ordre.
3. En déduire que la stratégie utilisant le lagrangien ne fonctionne pas et expliquer pourquoi.