

# ■ Chapitre 2 ■

## Séries numériques

### Notation.

■  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I. Séries

#### Définition 1 (Série).

Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ . La *série* de terme général  $u_n$  est la suite  $(s_p)$  où pour tout  $p$  entier naturel,  $s_p = \sum_{n=0}^p u_n$ . Elle est notée  $\sum u_n = \left( \sum_{n=0}^p u_n \right)_{p \in \mathbb{N}}$ . L'élément  $s_p$  est la *somme partielle* d'ordre  $p$  de la série  $\sum u_n$ .

**Exercice 1.** Soit  $\rho \in \mathbb{C}$ . Décrire le comportement asymptotique des séries  $\sum \frac{1}{n}$  et  $\sum \rho^n$ .

#### Propriété 1.

En posant  $v_0 = u_0$  et  $u_n = v_n - v_{n-1}$  pour tout entier naturel  $n$ , alors  $s_n = v_n$ .

#### Exercice 2.

1. Déterminer, sous une forme simple, la somme partielle de la série de terme général  $\frac{1}{n(n+1)}$ .
2. Déterminer le comportement asymptotique de la série de terme général  $\arctan \frac{2}{n^2}$ .

#### Définition 2 (Convergence).

La série  $\sum u_n$  est *convergente* si la suite  $(s_p)$  est convergente. La limite de cette suite, notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ , est appelée la *somme* de la série.

#### Propriété 2 (Divergence grossière).

Si  $(u_n)$  ne converge pas vers 0, alors la série  $\sum u_n$  diverge.

#### Exercice 3.



1. Montrer que la réciproque est fausse.
2. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{(-1)^n \sinh(n)}{\cosh(n)}$ .

#### Propriété 3 (Structure).

L'ensemble des séries convergentes est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Exercice 4.** Déterminer la somme de la série de terme général  $\frac{\cos(n)}{2^n}$ .

#### Définition 3 (Reste).

Si  $\sum u_n$  est une série convergente, l'élément  $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$  est le *reste* d'ordre  $p$  de la série.

**Exercice 5.** Soit  $\rho \in \mathbb{C}$  tel que  $|\rho| < 1$ . Déterminer le reste de la série géométrique de raison  $\rho$ .

## II. Séries de termes réels

### **Théorème 1 (Théorème des séries alternées).**



Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels telle que

- (i).  $u_n u_{n+1} < 0$ , (ii).  $(|u_n|)$  soit décroissante, (iii).  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Alors,  $\sum u_n$  est convergente. De plus, le reste  $r_p$  est du signe de  $u_{p+1}$  et  $|r_p| \leq |u_{p+1}|$ .

#### Exercice 6.

1. Montrer que la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  est convergente.
2. Déterminer la nature puis la somme de la série de terme général  $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ .

### II.1 Séries de termes réels positifs

#### **Théorème 2.**

La série  $\sum u_n$  de nombres réels positifs converge si et seulement si la suite  $(s_p)$  des sommes partielles est majorée.

#### **Propriété 4.**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes réels positifs.

- (i). On suppose que, à partir d'un certain rang,  $0 \leq u_n \leq v_n$ .
- (a) Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.
  - (b) Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge.
- (ii). Si  $u_n \sim v_n$ , alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

#### Exercice 7.

1. Montrer que, si à partir d'un certain rang,  $0 \leq u_n \leq a\rho^n$  et  $\rho \in ]0, 1[$ , alors  $\sum u_n$  converge.
2. Déterminer la nature de la série de terme général  $n \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ .
3. En considérant la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ , montrer que ce résultat est faux sans l'hypothèse de positivité.



#### **Propriété 5 (Séries de RIEMANN).**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Exercice 8.** Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . Déterminer la nature des séries de terme général  $\frac{1}{n^2+a^2}$ , puis  $\frac{a^n}{n^2}$ .

#### **Théorème 3 (Règle de d'ALEMBERT).**



On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ .

- (i). Si  $\ell < 1$ , alors  $\sum u_n$  converge.
- (ii). Si  $\ell > 1$ , alors  $\sum u_n$  diverge.

#### Exercice 9.

1. Montrer que, lorsque  $\ell = 1$  dans le théorème précédent, on ne peut en général pas conclure.
2. Soit  $x > 0$ . Étudier la convergence des séries de terme général
  - a)  $\binom{n+4}{n} x^n$ .
  - b)  $\frac{x^n}{n!}$ .
  - c)  $n! x^{n^2}$ .





3. Déterminer une suite  $(u_n)$  à valeurs strictement positive telle que  $\sum u_n$  converge et  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  n'admet pas de limite.

## II.2 Développement décimal

### Définition 4.

Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite d'entiers naturels compris entre 0 et 9. Alors, la série  $\sum_{n \geq 1} a_n 10^{-n}$  converge. La série  $\sum a_n 10^{-n}$  est un *développement décimal* du réel  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$ .  
Ce développement décimal est *propre* si la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  n'est pas stationnaire de limite égale à 9.

### Théorème 4.

Tout réel  $x \in ]0, 1[$  possède un unique développement décimal propre.

**Exercice 10.** Écrire sous forme de fraction le nombre rationnel  $3,142857\,142857\,\dots$

## II.3 Comparaison d'une série à une intégrale

### Théorème 5 (Intégrale & Séries à termes positifs).



Soit  $f$  une fonction continue par morceaux, décroissante de  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Alors, la série de terme général  $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$  est convergente. En particulier,  $\sum f(n)$  converge si et seulement si  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  admet une limite finie en  $+\infty$ .

### Exercice 11. (Séries de BERTRAND)

1. Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ .
2. Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série de terme général  $\sqrt{n}$ .
3. Déterminer un équivalent du reste de la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$ .

## III. Séries absolument convergentes

### III.1 Absolue convergence

### Définition 5 (Convergence absolue).

La série  $\sum u_n$  est absolument convergente si la série  $\sum |u_n|$  converge.



**Exercice 12.** Donner un exemple de série convergente mais non absolument convergente.

### Théorème 6.

Si la série  $\sum u_n$  converge absolument, alors elle est convergente.

**Exercice 13.** Montrer que la réciproque est fausse.

### Théorème 7 (Comparaison à une série à termes positifs).



Soient  $(u_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $(b_n)$  soit à termes réels positifs et  $u_n = O(b_n)$ . Si  $\sum b_n$  converge, alors  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.

**Exercice 14.**

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Déterminer la nature des séries de terme général  $\left| \tan \frac{a}{n} - \sin \frac{a}{n} \right|^{\frac{1}{2}}$ .
2. Montrer que la suite  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$  est convergente. Sa limite, notée  $\gamma$  est la constante d'**EULER**.
3. Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Montrer que  $\sum u_n$  converge.

**Théorème 8 (Formule de STIRLING).**

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

**Exercice 15.** Déterminer un équivalent de la suite  $(2^{-2n} \binom{2n}{n})$ .

**III.2 Produit de CAUCHY****Définition 6 (Série produit).**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries. Leur *série produit* (ou produit de *Cauchy*) est la série de terme général

$$\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

**Exercice 16.** Soit  $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ . Déterminer le produit de Cauchy des suites de terme général  $\frac{x^n}{n!}$  et  $\frac{y^n}{n!}$ .

**Théorème 9.**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries telles que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent absolument. Alors, leur produit de Cauchy, noté  $\sum w_n$  converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

**Exercice 17.**

1. On pose  $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ . Montrer que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent alors que leur produit de Cauchy diverge.
2. Soit  $x \in ]-1, 1[$ . En étudiant  $\left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)^2$ , montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

**Exemple d'étude asymptotique de suite récurrente**

**Exercice 18.** Soit  $x_0 > 0$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on définit  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ .

1. Montrer que la suite  $(x_n)$  est monotone et préciser sa monotonie.
2. Montrer que la suite  $(x_n)$  admet une limite et la déterminer.
3. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{1}{x_n}$ .
4. Montrer que la suite  $(x_{n+1}^2 - x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
5. **Intermède.** Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  des suites de réels strictement positifs tels que  $a_n \sim b_n$  et  $\sum a_n$  diverge

- a) Montrer que  $\sum b_n$  diverge vers  $+\infty$ .
- b) Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|a_n - b_n| \leq \varepsilon b_n$ .
- c) En déduire qu'il existe un entier  $n_1$  tel que pour tout  $n \geq n_1$ ,

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^n b_k.$$

- d) En déduire que  $\sum_{k=0}^n a_k \sim \sum_{k=0}^n b_k$ .
6. Montrer que la suite  $\left(\frac{x_n^2}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et en déduire un équivalent de  $(x_n)$ .
7. Déterminer un équivalent de  $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_k^2}\right)$ .
8. En déduire que  $x_n = \sqrt{2n} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ .



### Programme officiel (PCSI)

Séries numériques (p. 28)



### Programme officiel (PSI)

Suites et Séries - A - Séries numériques (p. 12)

## Mathématiciens

**WALLIS** John (23 nov. 1616 à Ashford-28 oct. 1703 à Oxford).

**STIRLING** James (mai 1692 à Garden-5 déc. 1779 à Edimbourg).

**EULER** Leonhard (15 avr. 1707 à Basel-18 sept. 1783 à St Pétersbourg).

**ALEMBERT** Jean Le Rond d' (17 nov. 1717 à Paris-29 oct. 1783 à Paris).

**CAUCHY** Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).

**BERTRAND** Joseph (11 mar. 1822 à Paris-3 avr. 1900 à Paris).

**RIEMANN** Georg Friedrich Bernhard (17 sept. 1826 à Breselenz-20 juil. 1866 à Selasca).