V - Estimation

I - Définitions

Définition 1 - Échantillon

Soient n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire. Un *n-échantillon* de X est un n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$ tel que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ soient mutuellement indépendantes et de même loi que X.

Définition 2 - Estimateur

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité dépendant d'un paramètre θ variant dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de X. Un *estimateur* de θ est une variable aléatoire $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ où φ est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 - Estimateurs

- Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon d'une variable aléatoire X. Les quantités suivantes sont des estimateurs de $\mathbf{E}[X]$:
  - $\star$ $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.
  - $\star$ $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} X_k$.
  - $\star$ $T_3 = \frac{X_1+X_2}{2}$.
  - $\star$ $T_4 = \frac{X_1 X_2}{2}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, on peut chercher à estimer p (qui est égal à son espérance), sa variance $\sigma^2 = p(1-p)$,...
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, on peut chercher à estimer λ (qui est égal à son espérance), la quantité $\mathbf{P}([X=0]) = \mathrm{e}^{-\lambda}$,...
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, on peut chercher à estimer n : avec les résultats d'un dé, on peut estimer son nombre de faces.

Définition 3 - Biais

Soit T un estimateur de θ. Le *biais* de T est le réel $b_\theta(T) = \mathbf{E}[T] - \theta$. Si $b_\theta(T) = 0$, l'estimateur T est un estimateur *sans biais* de θ.

Exemple 2 - Calculs de biais

Reprenons l'exemple précédent en notant $m = \mathbf{E}[X]$.

- Soit $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$. D'après la linéarité de l'espérance,
$$\mathbf{E}[T_1] - m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[X_k] - m = \frac{nm}{n} - m = 0.$$
Ainsi, T_1 est un estimateur sans biais de m.
- Soit $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} X_k$. D'après la linéarité de l'espérance,
$$\mathbf{E}[T_2] - m = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[X_k] - m = \frac{nm}{n-1} - m = \frac{m}{n(n-1)}.$$
Ainsi, T_2 est un estimateur de m de biais $\frac{m}{n(n-1)}$.
- Soit $T_3 = \frac{X_1+X_2}{2}$. D'après la linéarité de l'espérance,
$$\mathbf{E}[T_3] - m = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]}{2} - m = 0.$$
Ainsi, T_3 est un estimateur sans biais de m.
- Soit $T_4 = \frac{X_1 X_2}{2}$. Les variables aléatoires étant indépendantes,
$$\mathbf{E}[T_4] - m = \frac{\mathbf{E}[X_1]\,\mathbf{E}[X_2]}{2} - m = \frac{m^2}{2} - m = \frac{m(m-2)}{2}.$$
Ainsi, T_4 est un estimateur de m de biais $\frac{m(m-2)}{2}$.

Définition 4 - Risque quadratique

Soit T un estimateur de θ. Le *risque quadratique* de T est défini par
$$R_\theta(T) = \mathbf{E}\left[(T-\theta)^2\right].$$
En particulier,
$$R_\theta(T) = b_\theta(T)^2 + \mathbf{V}(T).$$
Si T est un estimateur sans biais de θ, alors $R_\theta(T) = \mathbf{V}(T)$.

Exemple 3 - Calculs de risques quadratiques

Reprenons les exemples précédents, pour les estimateurs sans biais. On suppose que X admet une variance.

- Comme T_1 est un estimateur sans biais de m, alors les variables aléatoires étant indépendantes,
$$R_m(T_1) = \mathbf{V}(T_1) = \mathbf{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = \frac{\mathbf{V}(X)}{n}.$$
- Comme T_3 est sans biais et X_1 et X_2 sont indépendantes,
$$R_m(T_3) = \mathbf{V}(T_3) = \frac{\mathbf{V}(X_1)+\mathbf{V}(X_2)}{4} = \frac{\mathbf{V}(X)}{2}.$$

Définition 5 - Meilleur estimateur

L'estimateur T_1 est un *meilleur estimateur* que T_2 si
$$\forall\, \theta \in I,\ R_\theta(T_1) \leqslant R_\theta(T_2).$$

Exemple 4 - Comparaison d'estimateurs

En reprenant l'exemple précédent, T_1 est un meilleur estimateur de $\mathbf{E}[X]$ que T_3 dès que $n \geqslant 2$.

II - Estimation d'une proportion

Théorème 1 - Loi faible des grands nombres

Soit X une variable aléatoire admettant une moyenne m et une variance σ^2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Alors,
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Définition 6 - Estimateur convergent

Soit T_n un estimateur de θ. L'estimateur T_n est *convergent* si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|T_n-\theta| \geqslant \varepsilon) = 0$.

Théorème 2 - Estimation ponctuelle d'une proportion

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ un n-échantillon de X et $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i$. Alors, $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de p.

Exemple 5 - Sondage

On souhaite connaître la proportion de français favorables à une réforme donnée. On modélise la réponse d'un individu en considérant une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On interroge n français choisis indépendamment dans la population. On note X_i la réponse donnée par le i^{e} individu interrogé : 1 si l'individu est favorable et 0 sinon. On suppose que X_i suit la même loi que X. Pour estimer p, on va donc utiliser la quantité $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.