T.D. II - Intégrale sur un segment

I - Calcul de primitives

Exercice 1. (Fonctions polynomiales, ⚙) Déterminer des primitives des fonctions suivantes

1. $x^2 + x + 1$.
2. $2x^3 + 4x + 2$.
3. $4x^3 + 2x^2 - 1$.
4. $x^{10} + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}$.

Exercice 2. (Fonctions puissances, ⚙)

1. $x^{3/2}$.
2. $\frac{1}{\sqrt{x}}$.
3. $\frac{1}{3x^2}$.
4. $\frac{4}{x^5}$.
5. $(2x+1)(x^2+x)^5$.
6. $(x^2+1)(x^3+3x+4)$.

Exercice 3. (Logarithmes & Exponentielles, ⚙)

1. $\frac{3}{x}$.
2. $\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}$.
3. e^{2x}.
4. $\frac{1}{\mathrm{e}^{12x}}$.
5. $(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+x)^{22}$.
6. $\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}$.

Exercice 4. (Calculs d'intégrales, ⚙) Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+3x+1)\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_{-2}^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_1^{-1} \mathrm{e}^3\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_2^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

II - Propriétés de l'intégale

Exercice 5. (Loi uniforme) Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \notin [1,3]$ et $f(x) = \frac{1}{2}$ sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. Déterminer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{3/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{-4}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

e) $\displaystyle\int_{-5}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Si $x \in [1,3]$, déterminer $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6. (Loi exponentielle) Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x}$ sinon.

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. Déterminer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{3/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int_{-4}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

e) $\displaystyle\int_{-5}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Si $x \geqslant 0$, déterminer $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^5 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8. (⚙) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire la valeur de J.

Exercice 9. (⚙) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I.

2. Calculer $I+J$.

3. En déduire la valeur de J.

Exercice 10. (✐) Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. Montrer que (u_n) est minorée par 0.

3. En minorant $1-x^2$, montrer que $u_n \leqslant \frac{4}{3(n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 11. (✐) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.

2. Étudier les variations de la suite (I_n).

3. En déduire que la suite (I_n) converge.

III - Intégrations par parties

Exercice 12. (⚙) À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

2. $\displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

4. $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

5. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(t))^2\,\mathrm{d}t$.

6. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13. (✐) Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_0.

2. Montrer que $f(t) = (2-t)\,\mathrm{e}^t$ est une primitive de la fonction $g(t) = (1-t)\,\mathrm{e}^t$.

3. Déterminer la valeur de u_1.

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

5. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

6. Déterminer la limite de (nu_n).

Exercice 14. (✐) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t(\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_0.

2. a) Montrer que, pour tout $t \in [1,\mathrm{e}]$, $0 \leqslant \ln(t) \leqslant 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

3. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n$.

4. En déduire u_1, u_2 et u_3.