■ ■ ■

Exercice 1. Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, numérotés 1, 2, 3 et 4, d'un carré selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet 1.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 0$) la puce se trouve sur le sommet 1, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 2, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 3, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 4, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet occupé par la puce à l'instant n et on a donc $\mathbf{P}([X_0 = 1]) = 1$.

1. a) Déterminer la loi de X_1.

b) Calculer l'espérance et la variance de X_1.

2. Déterminer la loi de X_2.

3. a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbf{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{2}{3}\mathbf{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{2}\mathbf{P}([X_n = 2]).$$

b) Exprimer de même, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\mathbf{P}([X_{n+1} = 2])$, $\mathbf{P}([X_{n+1} = 3])$ et $\mathbf{P}([X_{n+1} = 4])$ en fonction de $\mathbf{P}([X_n = 1])$, $\mathbf{P}([X_n = 2])$, $\mathbf{P}([X_n = 3])$ et $\mathbf{P}([X_n = 4])$.

c) Vérifier que les relations précédentes sont encore valables pour $n = 1$ et $n = 0$.

d) Que vaut pour tout n de $\mathbb{N}$, la somme : $\mathbf{P}([X_n = 1]) + \mathbf{P}([X_n = 2]) + \mathbf{P}([X_n = 3]) + \mathbf{P}([X_n = 4])$?

4. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on note U_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}([X_n = 1]) \\ \mathbf{P}([X_n = 2]) \\ \mathbf{P}([X_n = 3]) \end{pmatrix}.$$

De plus, on pose $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant les relations trouvées précédemment, établir pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation $U_{n+1} = AU_n + B$.

5. a) Déterminer une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant : $L = AL + B$.

b) Établir pour tout entier naturel n, la relation suivante : $U_n = A^n(U_0 - L) + L$.

6. On pose $C = 6A$. Soit R, D et Q les matrices d'ordre 3 définies par :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer RQ. En déduire que R est inversible et donner R^{-1}, où R^{-1} désigne la matrice inverse de la matrice R.

b) Calculer $CR - RD$.

c) En déduire pour tout entier naturel n, la relation suivante : $A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$.

7. On admet que la limite de la matrice U_n lorsque n tend vers $+\infty$, est une matrice U dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de U_n lorsque n tend vers $+\infty$. Déterminer U et préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}([X_n = 4])$.