

# VIII - Réduction des matrices carrées

## Révisions

- Calcul matriciel.
- Matrices inversibles.

## I - Matrices diagonalisables

### I.1 - Diagonalisabilité

#### Définition 1 - Matrices diagonalisables

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée. La matrice  $A$  est *diagonalisable* s'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible et une matrice  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

#### Exemple 1 - Matrice diagonalisable

Soient  $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- D'après la définition du produit matriciel,

$$AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on montre que  $P$  est inversible :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

En reprenant l'égalité précédente et l'inversibilité de  $P$ ,

$$\begin{aligned} AP &= PD \\ APP^{-1} &= PDP^{-1}, \text{ en multipliant à droite par } P^{-1} \\ AI &= PDP^{-1}, \text{ car } PP^{-1} = I \\ A &= PDP^{-1}. \end{aligned}$$

La matrice  $A$  est donc diagonalisable.

### I.2 - Valeurs propres, Vecteurs propres

#### Définition 2 - Valeurs propres, Vecteurs propres

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée. Le réel  $\lambda$  est une *valeur propre* de la matrice  $A$  s'il existe une matrice colonne  $X$  telle que

- $X$  soit non nulle,
- $AX = \lambda X$ .

La matrice colonne  $X$  est un *vecteur propre* associé à la valeur propre  $\lambda$ .

#### Exemple 2 - Valeurs / Vecteurs propres

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$AX = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X.$$

Comme  $X$  est non nul et  $AX = 2X$ , alors  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 2.

**Proposition 1 - Vecteurs propres / Diagonalisation**

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On suppose que  $A$  possède 3 valeurs propres **distinctes**  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  associées aux vecteurs propres  $X_1, X_2, X_3$ . En notant  $P$  la matrice dont les colonnes sont  $X_1, X_2, X_3$  et  $D$  la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , alors

$$A = PDP^{-1}.$$

**Exemple 3**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- D'après la définition du produit matriciel,

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_1.$$

Comme  $X_1$  est non nul et  $AX_1 = -X_1$ , alors  $X_1$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $-1$ .

- D'après la définition du produit matriciel,

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2X_2.$$

Comme  $X_2$  est non nul et  $AX_2 = 2X_2$ , alors  $X_2$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $2$ .

- D'après la définition du produit matriciel,

$$AX_3 = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3X_3.$$

Comme  $X_3$  est non nul et  $AX_3 = 3X_3$ , alors  $X_3$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $3$ .

En posant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , on peut vérifier que  $A = PDP^{-1}$ .

**Proposition 2 - Diagonalisabilité et Valeurs propres (H.P.)**

Soient  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $P$  une matrice inversible dont les colonnes

sont notées  $X_1, X_2, X_3$  et  $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ .

Si  $A = PDP^{-1}$ , alors  $AX_1 = d_1X_1$ ,  $AX_2 = d_2X_2$  et  $AX_3 = d_3X_3$ .

**II - Polynômes annulateurs****II.1 - Définition****Définition 3 - Polynôme annulateur**

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée et  $Q(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$  un polynôme non nul. Le polynôme  $Q$  est un *polynôme annulateur* de  $A$  si

$$Q(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_pA^p = 0.$$

**Exemple 4 - Polynôme annulateur**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$  et  $Q(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$ . Alors,

$$\begin{aligned} Q(A) &= A^3 - 4A^2 + A + 6I \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}^3 - 4 \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}^2 + \dots \\ &\quad \dots + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 55 & -28 & -28 \\ 9 & -1 & -9 \\ 47 & -28 & -20 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 17 & -8 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 13 & -8 & -4 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $Q$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

En particulier, on obtient alors

$$A^3 - 4A^2 + A + 6I = 0$$

$$A(A^2 - 4A + I) = -6I$$

$$A \left[ -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I) \right] = I.$$

Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I)$ .

### Proposition 3 - Taille 2

Soient  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $Q(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - cb)$ . Alors,  $Q(A) = 0_2$ .

### Exemple 5 - Matrice de taille 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ . On pose

$$Q(X) = X^2 - (1+5)X + (1 \times 5 - (-1) \times 2)$$

$$= X^2 - 6X + 7.$$

$$\text{Alors, } Q(A) = A^2 - 6A + 7I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $Q$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

En particulier,

$$A^2 - 6A + 7I = 0_2$$

$$A(A - 6I) = -7I$$

$$A \left[ -\frac{1}{7}(A - 6I) \right] = I.$$

Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = -\frac{1}{7}(A - 6I)$ .

## II.2 - Polynômes annulateurs et Valeurs propres

### Proposition 4 - Valeurs propres & Racines de polynômes annulateurs

Soient  $A$  une matrice et  $Q$  un polynôme annulateur de  $A$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $\lambda$  est une racine de  $Q$  (c'est-à-dire que  $Q(\lambda) = 0$ ).

### Exemple 6 - Reprise de l'exemple précédent

- En posant  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$  et  $Q(X) = X^2 - 6X + 7$ , alors  $Q(A) = 0$ .

Or, le discriminant du trinôme  $Q$  est  $6^2 - 4 \times 7 = 8$  et  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ . Les racines de  $Q$  sont donc

$$\frac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2} \text{ et } \frac{6 + 2\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2}.$$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc incluses dans l'ensemble  $\{3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$ .

- Posons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$  et  $R(X) = X^3 - 7X^2 + 13X - 7$ .

Un simple calcul montre que  $R(A) = 0$ .

Or, 1 est une racine évidente de  $R$  et une division euclidienne montre que

$$R(X) = (X - 1)(X^2 - 6X + 7).$$

D'après le calcul du point précédent,

$$R(X) = (X - 1)(X - (3 - \sqrt{2}))(X - (3 + \sqrt{2})).$$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc incluses dans l'ensemble  $\{1, 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$ .

Un polynôme annulateur permet d'identifier les valeurs propres **possibles** pour une matrice.

## II.3 - Recherche de valeurs / vecteurs propres

### Proposition 5 - Recherche de vecteurs propres

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pour montrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  il faut déterminer les vecteurs  $X$  solutions du système linéaire  $AX = \lambda X$  et montrer qu'il existe une solution non nulle.

### Exemple 7 - Recherche de valeurs / vecteurs propres

Soient  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $Q(X) = (X - 5)(X + 1)(X + 2)$ .

- **Un polynôme annulateur.** En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} Q(A) &= (A - 5I)(A + I)(A + 2I) \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 & 28 \\ 14 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $Q$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

- **Recherche des valeurs propres éventuelles.** Comme les racines de  $Q$  sont 5,  $-1$  et  $-2$ , les valeurs propres possible sont 5,  $-1$  et  $-2$ .

### • Recherche des vecteurs propres.

- ★ Résolvons le système  $AX = 5X$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 5x \\ 2x + y = 5y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{aligned}$$

Ainsi,  $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  satisfait  $AX_1 = 5X_1$ . Comme  $X_1$  est non nul et  $AX_1 = 5X_1$ , alors 5 est valeur propre de  $A$  et  $X_1$  est un vecteur propre associé.

- ★ Résolvons le système  $AX = -X$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{aligned}$$

Ainsi,  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  satisfait  $AX_2 = -X_2$ . Comme  $X_2$  est non nul et  $AX_2 = -X_2$ , alors  $-1$  est valeur propre de  $A$  et  $X_2$  est un vecteur propre associé.

- ★ Résolvons le système  $AX = -2X$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -2x \\ 2x + y = -2y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ 7y = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 5L_2 - 2L_1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du système  $AX = -2X$  est le vecteur nul. Le réel  $-2$  n'est donc pas une valeur propre de  $A$ .

Finalement, les valeurs propres de  $A$  sont  $-1$  et  $5$ .

- **Diagonalisation.** On pose  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Comme  $2 \times (-1) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$ , alors  $P$  est inversible et  $P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En posant  $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , alors

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= D \\ PP^{-1}AP &= PD, \text{ en mult. à droite par } P \\ IAPP^{-1} &= PDP^{-1}, \text{ en mult. à gauche par } P^{-1} \\ A &= PDP^{-1}. \end{aligned}$$

- **Application.** Une récurrence classique permet alors de montrer que pour tout  $n$  entier naturel,

$$A^n = PD^nP^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont les suites définies par  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 1$  et

$$\forall n \geq 0, \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

On peut définir le vecteur  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ , puis

- (i). montrer que  $X_{n+1} = AX_n$  ;
- (ii). à l'aide d'une récurrence, montrer que pour tout  $n$  entier naturel,  $X_n = A^n X_0$  ;
- (iii). en déduire l'expression de  $u_n$  et de  $v_n$  en fonction de  $n$ .