

# T.D. X - Réduction

## I - Diagonalisation

### Solution de l'exercice 1.

1. La matrice  $A_1$  est diagonale, donc diagonalisable.
2. La matrice  $A_2$  est symétrique réelle donc diagonalisable.
3. La matrice  $A_3$  est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale et sont donc 1, 2 et 3. Comme  $A_3$  est de taille 3 et possède 3 valeurs propres distinctes, alors  $A$  est diagonalisable.
4. La matrice  $A_4$  est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc  $A_4$  possède comme seule valeur propre 2. Ainsi, si  $A_4$  était diagonalisable, il existerait une matrice  $P$  inversible telle que  $A_4 = P2I_3P^{-1} = 2I_3$ . Or,  $A \neq 2I_3$ . Ainsi,  $A_4$  n'est pas diagonalisable.  $\square$

### Solution de l'exercice 2.

1. La matrice  $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$  n'est pas inversible si et seulement si

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \times 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 4\}. \end{aligned}$$

2. La matrice  $A$  est de taille 2 et possède deux valeurs propres distinctes, donc  $A$  est diagonalisable.
3. Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 4.

Alors,

$$\begin{aligned} AX &= 4X \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y &= 4x \\ 2x + 2y &= 4y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) \in \text{Vect} \{(1, 1)\}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } E_4(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $-1$ .

Alors,

$$\begin{aligned} AX &= -X \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y &= -x \\ 2x + 2y &= -y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y &= 0 \\ 2x + 3y &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) \in \text{Vect} \{(-3, 2)\}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } E_{-1}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. En posant  $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , d'après les formules de changement de base,

$$A = PDP^{-1}.$$

$\square$

**Solution de l'exercice 3.** La matrice  $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$  n'est pas inversible si et seulement si

$$\begin{aligned} (2 - \lambda)(-\lambda) - (-1) \times 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda \in \{-1\}. \end{aligned}$$

1. D'après la question précédente, l'unique valeur propre de  $A$  est  $-1$ . Supposons par l'absurde que  $A$  soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice inversible  $P$  telle que

$$\begin{aligned} A &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P(-I_2)P^{-1} = -I_2. \end{aligned}$$

Or,  $A \neq -I_2$ , donc on obtient une contradiction et  $A$  n'est pas diagonalisable.  $\square$

**Solution de l'exercice 4.** Soit  $A$  diagonalisable dont l'unique valeur propre est  $\lambda_0$ . Alors, il existe une matrice inversible  $P$  telle que

$$\begin{aligned} A &= P(\lambda_0 I_n)P^{-1} \\ &= \lambda_0 I_n. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble recherché ne contient qu'un seul élément et vaut  $\{\lambda_0 I_n\}$ .  $\square$

**Solution de l'exercice 5.**

1. On remarque que

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 4X_1.$$

Comme  $X_1$  est non nul et  $AX_1 = 4X_1$ , alors  $X_1$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 4.

De même,

$$AX_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2X_2.$$

Comme  $X_2$  est non nul et  $AX_2 = -2X_2$ , alors  $X_2$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $-2$ .

Enfin,

$$AX_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = X_3.$$

Comme  $X_3$  est non nul et  $AX_3 = X_3$ , alors  $X_3$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 1.

2. En posant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , d'après les formules de changement de base,

$$A = PDP^{-1}.$$

$\square$

**Solution de l'exercice 6.**

1. La matrice  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable.

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Rg}(A - \lambda I_3) &= \text{Rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
 &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
 &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\
 &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 - \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_2 \\
 &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 2\lambda \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_3 - (1 - \lambda^2)L_2.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \text{Rg}(A - \lambda I_3) &< 3 \\
 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda &= 0 \\
 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}) &= 0
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc  $-\sqrt{2}$ ,  $0$  et  $\sqrt{2}$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) = \text{Ker}(A)$ . Alors,

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 0 \\ x + z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$E_0(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(A) = \text{Ker}(A)$ . Alors,

$$\begin{aligned}
 AX = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} y &= \sqrt{2}x \\ x + z &= \sqrt{2}y \\ y &= \sqrt{2}z \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{2}y + z &= 0 \\ -\sqrt{2}x + y &= 0 \\ y - \sqrt{2}z &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{2}y + z &= 0 \\ -y + \sqrt{2}z &= 0 \\ y - \sqrt{2}z &= 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2}L_1.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_{\sqrt{2}}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

De manière analogue,

$$E_{-\sqrt{2}}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finalement, en posant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$A = PDP^{-1}.$$

□

## II - Réduction & Application

### Solution de l'exercice 7.

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En utilisant des opérations élémentaires,

$$\begin{aligned}
 \text{Rg}(A - \lambda I_3) &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 3 - \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_1 \\
 &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - (2 - \lambda)(3 - \lambda) & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - (3 - \lambda)L_1 \\
 &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \\ 0 & -\lambda^2 + 5\lambda - 7 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_2 \\
 &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 1 - (-\lambda^2 + 5\lambda - 7)(1 - \lambda) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (-\lambda^2 + 5\lambda - 7)L_2.
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$  si et seulement si

$$\begin{aligned}
 -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 &= 0 \\
 -(\lambda - 2)^3 &= 0 \\
 \lambda &= 2.
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique valeur propre de  $A$  est 2.

Supposons par l'absurde que  $A$  est diagonalisable. Il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $A = P(2I_3)P^{-1} = 2I_3$ . On obtient ainsi une contradiction et  $A$  n'est pas inversible.

2. Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A)$ . Alors,

$$\begin{aligned}
 AX &= 2X \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z &= 2x \\ x + 2y &= 2y \\ y + z &= 2z \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

3. a) D'après la question précédente, on cherche  $e_1$  tel que  $e_1 \in E_2(f)$ . On pose donc  $e_1 = (0, 1, 1)$ .

b) D'après la définition de  $f$ ,

$$\begin{aligned}
 f(e_2) &= e_1 + 2e_2 \\
 (3a - b - 1, a + 2b, b - 1) &= (0, 1, 1) + 2(a, b, -1).
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} 3a - b - 1 &= 2a \\ a + 2b &= 1 + 2b \\ b - 1 &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b &= 1 \\ a &= 1 \\ b &= 0 \end{cases}$$

On pose ainsi  $e_2 = (1, 0, -1)$ .

c) D'après la définition de  $f$ ,

$$\begin{aligned}
 f(e_3) &= e_2 + 2e_3 \\
 (3c - d + 2, c + 2d, d + 2) &= (1, 0, -1) + 2(c, d, 2).
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} 3c - d + 2 &= 1 + 2c \\ c + 2d &= 2d \\ d + 2 &= -1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - d &= -1 \\ c &= 0 \\ d &= 1 \end{cases}$$

On pose ainsi  $e_3 = (0, 1, 2)$ .

**d)** Montrons que  $(e_1, e_2, e_3)$  est libre. Soit  $\lambda, \mu, \nu$  des réels tels que

$$\begin{aligned} \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= 0 \\ \lambda + \nu &= 0 \\ \lambda - \mu + 2\nu &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \mu &= 0 \\ \lambda + \nu &= 0 \\ \lambda + 2\nu &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

soit  $\lambda = \mu = \nu = 0$ .

Ainsi,  $\mathcal{B}$  est une famille libre composée de 3 vecteurs de  $\mathbb{R}$ , espace vectoriel de dimension 3, donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

De plus, d'après les questions précédentes,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$ .

**4.** D'après les questions précédentes,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons l'inverse de  $T$  en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & L_2 \leftarrow L_1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\text{Ainsi, } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**5.** Posons  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors,  $T = 2I_3 + B$ .

Comme  $2I_3$  et  $B$  commutent, d'après la formule du binôme de Newton,

$$T^n = (2I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} B^k.$$

Or,  $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B^3 = 0_3$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n B + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. En utilisant les formules de changement de base,

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) &= P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ A &= P T P^{-1}. \end{aligned}$$

On montre ainsi par récurrence que

$$A^n = P T^n P^{-1}.$$

En utilisant la question précédente et en effectuant un produit matriciel,

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \times 3^n & 1 - 3^n & 3^n - 1 \\ -2(2^n - 3^n) & 2^{n+2} - 3^n - 1 & -2^{n+1} + 3^n + 1 \\ -2(2^n - 3^n) & 2^{n+2} - 3^n - 3 & -2^{n+1} + 3^n + 3 \end{pmatrix}.$$

□

### Solution de l'exercice 8.

1. D'après la définition, pour tout  $n$  entier naturel,  $v_{n+1} = 2v_n$  et  $v_0 = -1$ . Ainsi,  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme  $-1$ . Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2^n.$$

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A - \lambda I_3$  ne soit pas inversible, i.e.  $\text{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$ .

Or,

$$\begin{aligned} \text{Rg}(A - \lambda I_3) &= \text{Rg} \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 4 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} -3 - \lambda & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \\ 0 & -2 - \lambda & -4 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_3 \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} -3 - \lambda & -1 & 4 \\ 0 & -2 - \lambda & -4 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$  si et seulement si  $\lambda \in \{-3, -2, 2\}$ .

3. D'après la question précédente,  $A$  possède trois valeurs propres distinctes, donc  $A$  est diagonalisable.

En résolvant des systèmes linéaires, on obtient

$$\begin{aligned} E_{-3}(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_{-2}(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_2(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , alors

$$A = P D P^{-1}.$$

4. Montrons par récurrence que  $A^n = P D^n P^{-1}$  pour tout  $n$  entier naturel.

**Initialisation.** Lorsque  $n = 0$ . D'une part,  $A^0 = I_3$ . D'autre part,  $P D^0 P^{-1} = P I_3 P^{-1} = P P^{-1} = I_3$ . Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $A^n = PD^nP^{-1}$ . Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= PD^nP^{-1}A, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \text{ d'après la question 3.} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre  $n + 1$ .

**Conclusion.** Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.$$

5. Comme la matrice  $D$  est diagonale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour tout  $n$  entier naturel,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

6. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3u_n + 4v_n - w_n \\ 2v_n \\ -4v_n + 2w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= AU_n. \end{aligned}$$

7. Montrons par récurrence que  $U_n = A^nU_0$  pour tout  $n$  entier naturel.

**Initialisation.** Lorsque  $n = 0$ . Comme  $A^0 = I_3$ , alors  $A^0U_0 = I_3U_0 = U_0$ . La propriété est donc vraie à l'ordre 0.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $U_n = A^nU_0$ . Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n, \text{ d'après la question 6} \\ &= AA^nU_0, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= A^{n+1}U_0, \text{ d'après la définition des puissances} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre  $n + 1$ .

**Conclusion.** Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^nU_0.$$

8. En reprenant le résultat de la question 5.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= A^nU_0 \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n - 2^n + (-2)^n + 2(-3)^n - 2(-2)^n \\ -2^n \\ -(-2)^n + 2^n + 2(-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n$  entier naturel,

$$\begin{cases} u_n &= -2^n - (-2)^n - (-3)^{n+1} \\ v_n &= -2^n \\ w_n &= 2^n + (-2)^n \end{cases}$$

□

**Solution de l'exercice 9.**

1. On utilise la définition du produit matriciel,

**2.** D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^3 - 4A^2 + A + 6I_3 &= 0 \\ A^3 - 4A^2 + A &= -6I_3 \\ A \left[ -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I_3) \right] &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi,  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I_3).$$

**3.** On remarque que

$$R(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 8 = 0.$$

En utilisant une division euclidienne, on obtient

$$R(X) = (X - 2)(X^2 - 2X - 3).$$

**4.** On remarque que

$$R(X) = (X - 2)(X + 1)(X - 3).$$

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , il existe un vecteur  $X$  non nul tel que

$$\begin{aligned} AX &= \lambda X \\ A^2X &= A(\lambda X) = \lambda^2 X \\ A^3X &= A(A^2X) = \lambda^2 AX = \lambda^3 X. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question **1.**,

$$\begin{aligned} (A^3 - 4A^2 + A + 6I_3)X &= 0_3X \\ A^3X - 4A^2X + AX + 6X &= 0_{3,1} \\ \lambda^3X - 4\lambda^2X + \lambda X + 6X &= 0_{3,1} \\ (\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6)X &= 0_{3,1} \end{aligned}$$

Comme  $X$  est non nul, alors  $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$ , soit  $R(\lambda) = 0$ .  
Ainsi,  $\lambda \in \{-1, 2, 3\}$ .

**5.** En résolvant des équations, on obtient

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_2(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_3(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

**6.** Ainsi,  $A$  possède trois valeurs propres distinctes et  $A$  est diagonalisable.  $\square$