

# IV - Espaces vectoriels

## I - Systèmes d'équations linéaires

### Définition 1 - Système linéaire

Soient  $(a_{1,1}, \dots, a_{1,p}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,p}, b_1, \dots, b_n)$  des réels. Le système  $(\mathcal{S})$

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$$

est un *système linéaire* d'inconnues  $x_1, \dots, x_p$ .

- Un  $p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p)$  est *solution* de  $(\mathcal{S})$  s'il est solution de chacune des lignes du système.
- Deux systèmes sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

### Exemple 1

Les systèmes suivants sont des systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{array}{l|l} \bullet \begin{cases} 2x + 3y + z &= 0 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{cases} & \bullet \begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ 2x + y &= 3 \\ x + 5y &= 2 \end{cases} \\ \bullet \begin{cases} 2x + 3y + 5z &= 2 \end{cases} & \end{array}$$

### Définition 2 - Opérations élémentaires

Nous noterons  $L_1, \dots, L_n$  les lignes du système et appellerons *opérations élémentaires* sur les lignes du système les transformations suivantes :

- Pour  $i \neq j$ , l'échange des lignes  $L_i$  et  $L_j$ , symbolisé par  $L_i \leftrightarrow L_j$ .
- Pour  $\alpha \neq 0$ , la multiplication de la ligne  $L_i$  par  $\alpha$ , symbolisée par  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ .
- Pour  $i \neq j$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , l'ajout à  $L_i$  de la ligne  $L_j$  multipliée par  $\beta$ , symbolisé par  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ .

### Théorème 1

Le système obtenu par application d'opérations élémentaires sur les lignes est équivalent au système initial.

**Principe de l'algorithme du pivot de Gauss :** On utilise les opérations élémentaires pour transformer le système en un système échelonné, c'est-à-dire dans lequel le nombre d'inconnues décroît strictement quand on passe d'une ligne à la suivante.

**Algorithme :**

- On cherche une ligne où le coefficient  $\alpha$  de  $x_1$  est non nul et simple. Notons cette ligne  $L_{i_0}$ .
- On échange les lignes 1 et  $i_0$ ,  $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$ .
- On utilise la nouvelle ligne  $L_1$  pour éliminer les occurrences de  $x_1$  dans les lignes suivantes, c'est la ligne pivot. Par exemple, si à la ligne  $L_2$  le coefficient de  $x_1$  est  $a$ , on effectue  $L_2 \leftarrow \alpha L_2 - a L_1$ .
- On reprend ensuite les étapes de l'algorithme en travaillant sur toutes les lignes sauf la première de manière à éliminer  $x_2, \dots$
- Enfin, on exprime les solutions en fonction des variables libres.

### Définition 3 - Rang d'un système linéaire

Le *rang* du système est le nombre d'équations non triviales du système échelonné.

### Théorème 2 - Ensemble de solutions

Soit  $S$  l'ensemble des solutions du système  $(\mathcal{S})$ .

- Soit  $S = \emptyset$ , les équations sont *incompatibles*.
- Soit  $S$  est un singleton, le rang est alors égal au nombre d'inconnues.
- Soit  $S$  est infini, le rang est alors strictement inférieur au nombre d'inconnues.

### Exemple 2 - Résolution de système

Résolvons le système suivant avec l'algorithme du pivot de Gauss :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  est solution de  $(\mathcal{S})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 5y - 3z = 13 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 4y - 7z = 15 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 5y - 3z = 13 \\ -23z = 23 & L_3 \leftarrow 5L_3 - 4L_2 \end{cases}$$

Le système  $(\mathcal{S})$  possède une unique solution. L'ensemble des solutions est

$$\{(1, 2, -1)\}.$$

**Exercice 1.** Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad \left| \quad 2. \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

## II - Espaces vectoriels

On note  $\vec{0}_n = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Les lettres  $n$  et  $p$  désignent des entiers naturels non nuls.

### Définition 4 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

On définit sur  $\mathbb{R}^n$  une addition et une multiplication par un réel de la manière suivante :

**Addition.** Si  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

**Multiplication par un réel.** Si  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

### Exemple 3 - Cas où $n = 2, 3$

- Si  $n = 2$ .

$$(1, 2) + (3, 4) = (4, 6)$$

$$(1, 5) + (-1, 0) = (0, 5)$$

$$3 \cdot (4, 2) = (12, 6)$$

- Si  $n = 3$ .

$$(1, -1, 2) + (4, 5, -5) = (5, 4, -3)$$

$$(1, 0, -1) + (3, 1, 2) = (4, 1, 1)$$

$$2 \cdot (4, 1, -2) = (8, 2, -4)$$

### Proposition 1 - Structure d'espace vectoriel

- Propriétés de l'addition. Soit  $x, y, z$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .
  - ★ Associativité :  $x + (y + z) = (x + y) + z$ .
  - ★ Élément neutre :  $x + \vec{0}_n = \vec{0}_n + x = x$ .
  - ★ Existence d'un opposé :  $x + (-1) \cdot x = (-1) \cdot x + x = \vec{0}_n$ .
  - ★ Commutativité :  $x + y = y + x$ .

- Propriétés de la multiplication par un réel. Soit  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x \quad \left| \quad \begin{array}{l} (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ 1 \cdot x = x \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \end{array} \right.$$

$\mathbb{R}^n$  est un *espace vectoriel*. Les éléments de  $\mathbb{R}^n$  sont des *vecteurs*.

### III - Familles de vecteurs

Dans tout ce chapitre,  $p$  désigne un entier naturel non nul.

#### III.1 - Sous-espace vectoriel

##### Définition 5 - Sous-espace vectoriel

Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  est un *sous-espace vectoriel* si

- $\vec{0}_n \in A$ ,
- pour tout  $x, y \in A$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha x + \beta y \in A$ .

##### Exemple 4 - Exemple de sous-espaces vectoriels

- $\mathbb{R}^n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
- $\{\vec{0}_n\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
- Géométriquement,
  - ★ les droites sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ .
  - ★ les droites sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
  - ★ les plans sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

##### Exercice 2.

1. On note  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0 \text{ et } 2x + 3y + 5z = 0\}$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
2. On note  $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 1 \text{ et } 2x + 3y + 5z = 3\}$ . Montrer que  $\mathcal{F}$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

##### Définition 6 - Combinaison linéaire

Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

- si  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ , le vecteur  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p$  est une *combinaison linéaire* des vecteurs  $(x_1, \dots, x_p)$ .
- L'ensemble des combinaisons linéaires de  $(x_1, \dots, x_p)$  est noté :

$$\text{Vect}\{x_1, \dots, x_p\} = \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R} \right\}.$$

##### Proposition 2

Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Alors,  $\text{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

##### Exemple 5 - Un peu de géométrie

- $D = \text{Vect}\{(1, 2)\} = \{\alpha(1, 2), \alpha \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .
- $D = \text{Vect}\{(1, 0)\} = \{\alpha(1, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .
- $D = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\} = \{\alpha(1, 0, 1), \alpha \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
- $P = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} = \{(\alpha, 0, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$  est un plan de  $\mathbb{R}^3$ .

##### Exemple 6 - Équation cartésienne $\rightarrow$ Combinaison linéaire

Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0 \text{ et } 2x + 3y + 5z = 0\}$ . Écrivons  $F$  comme un ensemble de combinaisons linéaires.

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ainsi,

$$F = \{\lambda \cdot (2, -3, 1), \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect} \{(2, -3, 1)\}.$$

### Exemple 7 - Combinaison linéaire $\rightarrow$ Équation cartésienne

Soit  $F = \text{Vect} \{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 2, 4)\}$ .

Déterminons une équation cartésienne de  $F$ .

$(x, y, z) \in F$  si et seulement s'il existe  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 2, 3) + \mu(1, 0, 1) + \nu(2, 2, 4)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = x \\ 2\lambda + 2\nu = y \\ 3\lambda + \mu + 4\nu = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = x \\ -2\mu - 2\nu = y - 2x \leftarrow L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2\mu - 2\nu = z - 3x \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = x \\ -2\mu - 2\nu = y - 2x \\ 0 = x - 2y + z \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Ainsi, une description de  $F$  via une équation cartésienne est

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y + z = 0\}.$$

### Proposition 3 - S

Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(\alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$  et  $\alpha_1 \neq 0$ . Alors,

- $\text{Vect} \{x_1, \dots, x_p\} = \text{Vect} \left\{ \alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i x_i, x_2, \dots, x_p \right\}$ .
- Si  $x_p \in \text{Vect} \{x_1, \dots, x_{p-1}\}$ , alors  $\text{Vect} \{x_1, \dots, x_p\} = \text{Vect} \{x_1, \dots, x_{p-1}\}$ .

## III.2 - Bases

Dans cette partie,  $(x_1, \dots, x_p)$  désigne une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

### Définition 7 - Famille libre

La famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est *libre* si, pour tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = \vec{0}_n \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_i = 0.$$

La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille de vecteurs *linéairement indépendants*.

### Exemple 8

La famille  $((1, 2), (3, 4))$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^2$ .

En effet, soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha(1, 2) + \beta(3, 4) = (0, 0)$ . Alors,

$$(\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0)$$

De même,

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ -2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

**Exercice 3.** Montrer que  $((1, 2, -1), (2, 1, 1))$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 8 - Famille génératrice**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . La famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille *génératrice* de  $F$  si, pour tout  $x \in F$ , il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$  tels que  $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$ .

**Exercice 4.** Montrer que  $((1, 0), (0, 1))$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 9 - Base**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . La famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est une *base* de  $F$  si elle est génératrice et que ses vecteurs sont linéairement indépendants.

**Exemple 9 - Bases canoniques**

- $((1, 0), (0, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
- $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition 4 - Dimension**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $(x_1, \dots, x_p)$  et  $(y_1, \dots, y_q)$  sont des bases de  $F$ , alors  $p = q$ . L'entier  $p$  est la *dimension* de l'espace vectoriel  $F$ , noté  $\dim F$ . Par convention,  $\dim \{\vec{0}_n\} = 0$ .

**Exercice 5.**

1. Déterminer la dimension de  $\mathbb{R}^2$ , de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer la dimension de  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + 2y + z = 0\}$ .

**Proposition 5 - Caractérisation des bases**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $q$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs de  $F$ . Il y a équivalence entre :

- (i).  $(x_1, \dots, x_p)$  est une base de  $F$ .

(ii).  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille de vecteurs linéairement indépendants et  $p = q$ .

(iii).  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille génératrice de  $F$  et  $p = q$ .

**Exercice 6.** Montrer que  $((1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, -1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Théorème 3 - Théorème de la base incomplète**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille libre de  $F$ . Il existe une famille  $(y_{p+1}, \dots, y_q)$  telle que  $(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_q)$  soit une base de  $F$ .

**Définition 10 - Coordonnées**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(x_1, \dots, x_p)$  une base de  $F$  et  $x \in F$ . Il existe un unique  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$  tel que  $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ .

**Exemple 10 - Calcul de coordonnées**

Déterminons les coordonnées de  $(3, 1, 2)$  dans la base  $((1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, -1))$ .  
Il existe  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$(3, 2, 1) = \lambda(1, 2, 3) + \mu(1, 0, 1) + \nu(0, 1, -1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3 \\ 2\lambda + \nu &= 2 \\ 3\lambda + \mu - \nu &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3 \\ -2\mu + \nu &= -4 \\ -2\mu - \nu &= -8 \end{cases} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3 \\ -2\mu + \nu &= -4 \\ -4\mu &= -12 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= 0 \\ \nu &= 2 \\ \mu &= 3 \end{cases}$$

Ainsi,

$$(3, 2, 1) = 0 \cdot (1, 2, 3) + 3 \cdot (1, 0, 1) + 2 \cdot (0, 1, -1).$$