■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.
Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. On observe un échantillon X_1, $X_2, \dots, X_n$ indépendant et identiquement distribué de loi uniforme sur $[0, 2a]$ où a est un réel strictement positif, de densité

$$f_a(x) = \frac{1}{2a} \text{ pour } x \in [0, 2a].$$

Dans ce problème, on étudie deux estimateurs de a.

1. Soit $\hat{a} = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, la moyenne des observations.

a) Calculez l'espérance d'une variable aléatoire de densité f_a.

b) Montrez que $\hat{a}$ est un estimateur sans biais de a.

c) Calculez la variance de $\hat{a}$.

2. Soit $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ l'observation maximale.

a) i. Calculez la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité f_a.

ii. Pour tout $t \geqslant 0$, calculez $\mathbf{P}(M \leqslant t)$.

iii. En déduire la densité de M.

b) i. Pour tout réel c, calculez l'espérance de cM.

ii. En déduire un estimateur sans biais de a, que l'on notera $\widetilde{a}$.

iii. Calculez la variance de $\widetilde{a}$.

3. Conclure : quel est le meilleur estimateur ?

Exercice 2. Soit $B = (e_1, e_3, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible, où I est la matrice identité.

2. Pour cette valeur de λ, déterminer alors le noyau de l'application linéaire associée à $(A - \lambda I)$.

3. Soit $a = (-3, 1, 2)$. Calculer $v(a)$.

4. Déterminer $b = (b_1, b_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $v(b) = a - b$.

5. Déterminer $c = (c_1, c_2, 1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $v(c) = b - c$.

6. Montrer que $B' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

7. Déterminer T la matrice de v dans la base B'.

8. Montrer que $(T + I)^3 = 0$.

9. En déduire que $(A + I)^3 = 0$.

10. Déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.

Exercice 3. Soit $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et $I \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice identité. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A, aussi appelé le commutant de A, c'est-à-dire

$$C(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ ; \ AM = MA\}.$$

1. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

a) Donner deux éléments évidents de $C(A)$.

b) Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel.

c) Montrer que si M et M' sont des éléments de $C(A)$ alors MM' est aussi un élément de $C(A)$

d) Montrer que si $M \in C(A)$ est inversible, alors son inverse M^{-1} est aussi un élément de $C(A)$.

2. Soit D une matrice diagonale appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

a) Soit $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Quelles conditions doit-elle vérifier pour appartenir à $C(D)$?

b) On suppose que les trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont distincts deux à deux. Montrer que M est nécessairement une matrice diagonale.

c) On suppose à présent que $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_3$. Déterminer $C(D)$. Donner une base et la dimension de $C(D)$.

d) Enfin, déterminer $C(D)$ dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

3. On s'intéresse à présent au commutant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et une matrice P que l'on déterminera.

b) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence

$$M \in C(A) \ \Leftrightarrow \ P^{-1}MP \in C(D).$$

c) En déduire la dimension de $C(A)$.

d) Montrer que la famille $\{I, A, A^2\}$ est une base de $C(A)$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p et Y une variable aléatoire dont le comportement est conditionnel à la valeur de X :

- Si $X = 1$, alors on tire Y suivant une loi exponentielle de paramètre m, et de médiane a ;
- Si $X = 0$, on tire Y suivant une loi uniforme sur $[0, a]$.

On rappelle que la loi exponentielle de paramètre m a pour densité sur $\mathbb{R}_+$: $f_m(x) = \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{m}}$. On rappelle également qu'une variable aléatoire continue Z a pour médiane a si et seulement si $\mathbf{P}(Z \leqslant a) = \mathbf{P}(Z \geqslant a) = \frac{1}{2}$.

1. Exprimer a en fonction de m.

2. Calculer $\mathbf{P}(Y > a)$. En déduire $\mathbf{P}(Y \leqslant a)$.

3. Calculer $\mathbf{P}(Y \leqslant x)$ pour tout x strictement inférieur à a. Vérifier que $\mathbf{P}(Y \leqslant a)$ correspond à la valeur calculée à la question **2**.

4. Calculer $\mathbf{P}(Y \leqslant x)$ pour tout x.

5. En déduire la densité de Y. Vérifier que son intégrale vaut 1 sur le support de Y.

Exercice 5. Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de Γ.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Soit $f_n(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{-u}\, u^{n-1}}{\Gamma(n)} & \text{si } u \geqslant 0. \end{cases}$
Montrer que $f_n(u)$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

5. Soient $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que $\mathbf{P}\left(Y < n\right) = \mathbf{P}\left(X > \lambda\right)$.