Devoir en temps libre

À rendre le lundi 02/10/2023

■ ■ ■

Exercice 1. On considère les matrices carrées A, I, O et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - 3I.$$

1. a) Calculer B, B^2, B^3.

b) En déduire B^k pour tout entier k supérieur ou égal à 3.

2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$A^n = 3^n \left(I + \frac{n}{3}B + \frac{n(n-1)}{18}B^2 \right).$$

Est-ce encore vrai pour $n \in \{0, 1\}$?

3. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par les relations :

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2w_n,\ v_{n+1} = u_n + 3v_n,\ w_{n+1} = -u_n + 3w_n.$$

On note pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

c) Déduire des questions précédentes l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n, v_n, w_n en fonction de n, puis les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.