# VII - Variables aléatoires discrètes infinies

**Révisions**

Variables aléatoires discrètes finies.

## I - Variables aléatoires discrètes infinies

### I.1 - Loi de probabilité

**Définition 1 - Variable aléatoire discrète infinie**

Une variable aléatoire $X$ est *discrète infinie* si les valeurs prises par $X$ sont en nombre infini et peuvent être indexées par $\mathbb{N}$. On notera

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}.$$

Dans toute la suite, on se limitera aux variables aléatoires qui ne prennent que des valeurs positives.

**Exemple 1**

- Un dé est lancé jusqu'à obtenir la valeur 6. On note $T$ le rang du lancer où le premier 6 est obtenu. La variable aléatoire $T$ peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 1 si le 6 appraît au premier lancer,
  - ⋆ 2 si le 1^er^ lancer n'est pas un 6 et que le 2^e^ l'est,
  - ⋆ 3 si les 1^er^ et 2^e^ lancers ne sont pas des 6 et que le 3^e^ l'est,
  - ⋆ ...

  Ainsi, $T(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}^*$.
- Une étudiante collectionne les cartes de 23 joueurs de foot de son équipe nationale qui sont distribuées dans des tablettes de chocolat. On note $T$ le nombre de tablettes achetées pour que sa collection soit complète. La variable aléatoire $T$ peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 23 si elle a obtenu à chaque achat une carte différente,
  - ⋆ 24 si elle a obtenu exactement une carte en double,
  - ⋆ ...

Ainsi, $T(\Omega) = \{24, 25, 26, \ldots\}$.

**Définition 2 - Loi de probabilité**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie. La *loi de probabilité* de $X$ est la donnée :

- des valeurs $x_0$, $x_1$, $x_2, \ldots$ prises par $X$,
- de la famille infinie de probabilités $(\mathbf{P}([X = x_0]), \mathbf{P}([X = x_1]), \ldots, \mathbf{P}([X = x_n]), \ldots)$.

**Exemple 2 - Instant du premier Pile**

On note $T$ le numéro du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.
D'une part, $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
D'autre part,

- $[T = 1]$ correspond à obtenir un Pile lors du premier lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}.$$
- $[T = 2]$ correspond à obtenir Face lors du premier lancer et Pile lors du second lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = 2]) = \mathbf{P}(\{(F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$
- $[T = 3]$ correspond à obtenir Face lors des 2 premiers lan-

cers et Pile lors du troisième lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T=3]) = \mathbf{P}(\{(F,F,P)\}) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}.$$

- ...
- $[T=n]$ correspond à obtenir Face lors des $n-1$ premiers lancers et Pile lors du $n^e$ lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T=n]) = \mathbf{P}(\{(F,F,\ldots,F,P)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}.$$

Ainsi, $\forall\, k \geqslant 1$, $\mathbf{P}([T=k]) = \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$.
La loi de $T$ peut être représentée dans un tableau contenant une infinité de colonnes :

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}([X=x])$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$ | $\cdots$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}$ | $\cdots$ |

Si on n'obtient Pile à aucun des lancers, on peut noter $T=+\infty$. Cependant, la propriété suivante montre que cet événement est de probabilité nulle.

**Définition 3 - Système complet**

Si $X$ est une variable aléatoire discrète infinie, la famille d'événements $([X=x_0], [X=x_1], [X=x_2], \ldots)$ est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}([X=x_k]) = 1.$$

**Exemple 3 - Instant du premier Pile**

En reprenant l'exemple précédent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}([T=k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\times\frac{1}{3}\right]\\ &= \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.\end{aligned}$$

## I.2 - Fonction de répartition

**Définition 4 - Fonction de répartition**

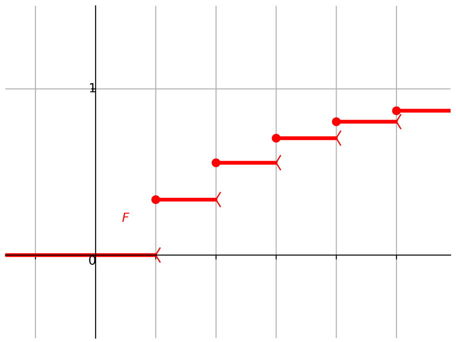
Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie. La *fonction de répartition* de $X$ est la fonction $F_X$ définie pour tout $x$ réel par $F_X(x) = \mathbf{P}([X\leqslant x])$.

**Exemple 4 - Instant du premier Pile**

On note $T$ le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

- Si $x<1$, $\mathbf{P}([T\leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- Si $1\leqslant x<2$, $\mathbf{P}([T\leqslant x]) = \mathbf{P}([T=1]) = \frac{1}{3}$.
- Si $2\leqslant x<3$,
  $\mathbf{P}([T\leqslant x]) = \mathbf{P}(T\in\{1,2\}) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.
- Si $3\leqslant x<4$,
  $\mathbf{P}([T\leqslant x]) = \mathbf{P}(T\in\{1,2,3\}) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{19}{27}$.
- ...
- Si $n\leqslant x<n+1$,
  $\mathbf{P}([T\leqslant x]) = \mathbf{P}(T\in[\![1,n]\!]) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- ...

On obtient le graphe suivant :




**Proposition 1 - Fonction de répartition**

Soit $F$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète infinie et à valeurs positives.

- $F$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
- $\forall\, x < 0,\ F(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

## I.3 - Espérance et Variance

**Définition 5 - Espérance**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$.
La variable aléatoire $X$ admet une espérance si la série $\sum x_i \mathbf{P}([X = x_i])$ est convergente. L'*espérance* de $X$ est alors :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}([X = x_i]).$$

**Exemple 5 - Instant du premier pile**

On note $T$ le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.
On admet que pour tout $x \in [0, 1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Alors, comme $\frac{2}{3} \in [0, 1[$, $\sum n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ converge et

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 3.$$

**Proposition 2 - Linéarité de l'espérance**

Soient $X$, $Y$ deux variables aléatoires discrètes infinies admettant une espérance et $a$ un réel. Alors,

$$\mathbf{E}[aX + Y] = a\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y].$$

**Exemple 6 - Instant du premier pile**

Un joueur joue à Pile ou Face, avec une pièce qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$, contre son banquier qui lui propose le contrat suivant :

- le joueur paye 40 euros pour jouer,
- la pièce de monnaie est lancée successivement jusqu'à obtenir Pile. Il gagne 10 euros lors de chacun de ces lancers.

En notant $G$ le gain du joueur et $T$ le nombre de lancers effectués, alors $G = 10 \times T - 40$. En utilisant les propriétés précédentes,

$$\mathbf{E}[G] = 10 \times \mathbf{E}[T] - 40 = 10 \times 3 - 40 = -10.$$

**Théorème 1 - Théorème de transfert**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives et $f$ une fonction réelle à valeurs positives. Notons

$X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i]).$$

**Définition 6 - Variance, Écart-type**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum x_i^2\mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors $X$ admet une *variance* et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right].$$

L'*écart-type* de $X$ est la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

**Proposition 3 - Propriétés de la variance**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète infinie qui admet une variance et $a$, $b$ deux réels.

- Formule de **Kœnig-Huygens**. $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2$.
- $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$.

**Exemple 7 - Pile/Face contre le banquier**

On reprend l'exemple précédent et on admet que $\mathbf{V}(T) = 6$. Alors,

$$\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(10T - 40) = 10^2\mathbf{V}(T) = 600$$

et $\sigma(G) \simeq 24{,}5$.

# II - Lois usuelles

## II.1 - Loi géométrique

**Définition 7 - Loi géométrique**

Soit $p \in ]0, 1[$. La variable aléatoire $T$ suit une loi *géométrique* de paramètre $p$ si

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

On note $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

**Loi géométrique**

Si $X$ est le premier instant de succès dans un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut $p$, alors $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$.

**Proposition 4 - Espérance, Variance**

Soit $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. On admet que

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1-p}{p^2}.$$

**Exemple 8 - Instant du premier pile**

Reprendre les exemples de la partie précédente.

## II.2 - Loi de Poisson

**Définition 8 - Loi de Poisson**

Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire $Z$ suit une loi de *Poisson* de paramètre $\lambda$ si
- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Z = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

On note $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

**Loi de Poisson**

Étant donnée une suite de $N$ épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $p$. Si $N$ est grand et $p$ est petit, la variable aléatoire égale au *nombre de succès* suit approximativement une loi de Poisson de paramètre $\lambda = Np$.

**Proposition 5 - Espérance, Variance**

Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On admet que

$$\mathbf{E}[Z] = \lambda \text{ et } \mathbf{V}(Z) = \lambda.$$

**Exemple 9 - Accidentés**

Une banque accorde quotidiennement des crédits. Étant donné un crédit, la probabilité qu'il revienne au service contentieux dans un laps de temps d'un an est égale à 4%. On suppose que 100 crédits ont été accordés au mois de janvier.

On note $X$ le nombre de ces crédits qui sont revenus au service contentieux un an plus tard. Comme $X$ compte le nombre de succès (contentieux) lors d'une suite de 100 épreuves de Bernoulli de probabilité de succès 4%, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{4}{100}\right)$. Ainsi, $\mathbf{E}[X] = 4$.

On suppose que $X$ peut être approchée par une variable aléatoire $Z$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\mathbf{E}[X]$. On donne la table approchée d'une loi de Poisson de paramètre 4 ci-dessous :

| $z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}([Z = z])$ | 0,018 | 0,073 | 0,147 | 0,195 | 0,195 | 0,156 | $\cdots$ |

Alors,
- $\mathbf{P}(X = 0) \simeq \mathbf{P}(Z = 0) \simeq 0{,}018$.
- $\mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq \mathbf{P}(Z \leqslant 3) \simeq 0{,}018 + 0{,}073 + 0{,}147 + 0{,}195$
  $\simeq 0{,}433$.
- $\mathbf{P}(X > 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq 1 - 0{,}433 \simeq 0{,}567$.