



**Exercice 1.** On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule avec remise et on suppose qu'à chaque tirage, chacune des boules a la même probabilité d'être tirée.

On note pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus en  $n$  tirages. On a donc  $X_1 = 1$  et par exemple, si les premiers tirages donnent 2, 2, 1, 2, 1, 4, 3, alors on a :  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$ ,  $X_3 = 2$ ,  $X_4 = 2$ ,  $X_5 = 2$ ,  $X_6 = 3$ ,  $X_7 = 4$ .

La probabilité d'un événement  $H$  est notée  $\mathbf{P}(H)$ .

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $Z$  sont notées respectivement  $\mathbf{E}[Z]$  et  $\mathbf{V}(Z)$ .

Soit  $A$  la matrice carrée d'ordre 4 définie par :  $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$ .

On note pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $U_n$  la matrice à 4 lignes et 1 colonne définie par :  $U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}([X_n = 1]) \\ \mathbf{P}([X_n = 2]) \\ \mathbf{P}([X_n = 3]) \\ \mathbf{P}([X_n = 4]) \end{pmatrix}$ .

1. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X_2$ .  
b) Calculer  $\mathbf{E}[X_2]$  et  $\mathbf{V}(X_2)$ .  
c) On note  $F$  la fonction de répartition de  $X_2$ . Tracer la courbe représentative de  $F$ .
2. a) Déterminer  $U_1$ .  
b) Préciser l'ensemble des valeurs prises par  $X_n$ .  
c) Établir, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , la relation suivante :  $U_{n+1} = AU_n$ .
3. On considère les quatre matrices  $V_1, V_2, V_3, V_4$  à 4 lignes et 1 colonne, définies par :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Établir par récurrence, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , la relation suivante :

$$U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} V_1 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} V_2 + 3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} V_3 + V_4$$

- b) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X_n$ .
4. a) Calculer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , la valeur de  $\mathbf{E}[X_n]$ .  
b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}[X_n]$ . Commenter.