

## II - Puissances

Le nombre réel  $x^a$  est défini différemment en fonction de la nature du nombre  $a$ . Cependant, les règles de calcul seront toujours les mêmes !

### I - Lorsque $a$ est un entier naturel (positif)

#### À Savoir

Si  $a$  est un entier naturel et  $x$  est un réel,

$$* x^0 = 1.$$

$$* x^a = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}}.$$

#### Exemple 1

$$3^0 = 1,$$

$$3^1 = 3,$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27.$$

#### À Savoir

Si  $a, b$  sont des entiers naturels et  $x$  est un réel,

$$\begin{aligned} x^a \times x^b &= \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{a \text{ facteurs}} \times \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{b \text{ facteurs}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{a+b \text{ facteurs}} \\ &= x^{a+b}. \end{aligned}$$

#### Exemple 2

$$3^2 \times 3^3 = 3^5,$$

$$6^2 \times 3^3 = 3^2 \times 2^2 \times 3^3 = 2^2 \times 3^5,$$

$$3^n \times 3 = 3^{n+1}.$$

#### À Savoir

Si  $a, b$  sont des entiers naturels et  $x$  est un réel,

$$\begin{aligned} (x^a)^b &= \underbrace{\left( \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}} \right)}_{a \text{ facteurs}}^b = \underbrace{\underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{a \text{ facteurs}} \times \cdots \times \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{a \text{ facteurs}}}_{b \text{ facteurs}} \\ &= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \times b \text{ facteurs}} \\ &= x^{a \times b}. \end{aligned}$$

#### Exemple 3

$$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6,$$

$$81^5 = (3^4)^5 = 3^{4 \times 5} = 3^{20}.$$

## II - Lorsque $a$ est un entier négatif

### À Savoir

Si  $a$  est un entier négatif et  $x$  un réel non nul, alors  $-a$  est un entier positif et

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{-a \text{ facteurs}}}.$$

### Exemple 4

$$\begin{aligned} 3^{-1} &= \frac{1}{3^{+1}} = \frac{1}{3}, \\ 3^{-2} &= \frac{1}{3^{+2}} = \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{3^{-3}} &= \frac{1}{\frac{1}{3^3}} = 3^3. \end{aligned}$$

### À Savoir

Si  $a, b$  sont des entiers,

$$x^a \times x^b = x^{a+b}.$$

### Exemple 5

$$\begin{aligned} 3^{-2} \times 3^5 &= 3^{-2+5} = 3^3, \\ 3^6 \times 3^{-12} &= 3^{6-12} = 3^{-6}, \\ \frac{3^5}{3^7} &= 3^5 \times \frac{1}{3^7} = 3^5 \times 3^{-7} = 3^{5-7} = 3^{-2}, \\ 3^5 3^{-5} &= 3^{5-5} = 3^0 = 1. \end{aligned}$$

### À Savoir

Si  $a, b$  sont des entiers,

$$(x^a)^b = x^{ab}.$$

### Exemple 6

$$\begin{aligned} (5^{-2})^3 &= 5^{-2 \times 3} = 5^{-6} \\ \left(\frac{1}{81}\right)^5 &= \left(\frac{1}{3^4}\right)^5 = (3^{-4})^5 = 3^{-20}, \\ \left(\frac{1}{25}\right)^{-3} &= (5^{-2})^{-3} = 5^{-2 \times (-3)} = 5^6. \end{aligned}$$

## III - Lorsque $a = 1/n$

### À Savoir

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f(y) = y^n$  est strictement croissante, continue sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$ . Comme  $x \in [0, +\infty[$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel  $y$  tel que  $y^n = x$ . Ce réel est noté  $x^{\frac{1}{n}}$ .

### Exemple 7

- \* Comme  $2^2 = 4$ , alors  $2 = 4^{1/2}$ .
- \* Si  $x \geq 0$ , alors  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ .

**Attention.** Dans ce cas, le nombre  $x$  doit être positif.

**À Savoir**

Si  $a$  est un entier,  $b$  est un entier naturel non nul et  $x$  est un réel positif,

$$\left(x^{1/b}\right)^a = x^{a/b}$$

**Exemple 8**

$$\left(2^{1/3}\right)^9 = 2^{9/3} = 2^3.$$

**IV - Lorsque  $a$  est un réel****À Savoir**

Si  $a$  est un réel et  $x$  est un réel strictement positif,

$$x^a = e^{a \ln(x)}.$$

Cette notion généralise les définitions précédentes.

**Exemple 9**

$$3^{1.5} = e^{\frac{3}{2} \ln(3)}$$

**Attention.** Dans ce cas, le nombre  $x$  doit être strictement positif.

**À Savoir**

Si  $a, b$  sont deux réels et  $x, y$  sont deux réels strictement positifs,

$$(x \times y)^a = x^a \times y^a,$$

$$x^a \times x^b = x^{a+b},$$

$$(x^a)^b = x^{a \times b}.$$

**Exemple 10**

Déterminons les réels  $x$  tels que  $3^{-x} = \frac{3}{2}$ . Alors,

$$e^{-x \ln(3)} = \frac{3}{2}$$

$$\ln(e^{-x \ln(3)}) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$-x \ln(3) = \ln(3) - \ln(2)$$

$$x = \frac{\ln(2) - \ln(3)}{\ln(3)}.$$

**V - Exercices**

**Exercice 1.** Factoriser par le réel indiqué puis simplifier si possible.

1.  $e^{n+1} - e^n$  par  $e^n$ .
2.  $2^{n+1} - 2^n$  par  $2^n$ .
3.  $(n+1)2^n - 2^{n+1}$  par  $2^n$ .