X - Réduction

I - Éléments propres

Définition 1 - Valeur propre, Vecteur propre

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est une *valeur propre* de M s'il existe un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = \lambda X$.

Exemple 1 - Valeurs / Vecteurs propres

- Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors,
$$AX = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 1+1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = 2X.$$
Ainsi, X est un vecteur non nul et $AX = 2X$, donc X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.
- Si λ est un vecteur propre de I_n et X est un vecteur propre associé, alors $I_nX = \lambda X$ soit $X = \lambda X$ et $(\lambda - 1)X = 0_{n,1}$. Comme $X \neq 0_{n,1}$, alors $\lambda - 1 = 0$ soit $\lambda = 1$.
Ainsi, 1 est l'unique valeur propre de I_n et tout vecteur non nul est un vecteur propre associé.
- Soient $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, λ une valeur propre de D et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Comme $DX = \lambda X$, alors
$$\begin{cases} -x & = \lambda x \\ 2y & = \lambda y \\ -3z & = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda-1)x & = 0 \\ (2-\lambda)y & = 0 \\ (-3-\lambda)z & = 0 \end{cases}$$
Comme X est un vecteur propre, il est non nul et une de ses composantes est non nulle. Ainsi, soit $\lambda - 1 = 0$, soit $2 - \lambda = 0$ soit $-3 - \lambda = 0$. Alors, $\lambda \in \{-1, 2, -3\}$.
Réciproquement, il est facile de trouver un vecteur propre correspondant aux valeurs propres -1, 2 et -3.
L'ensemble des valeurs propres de D est donc $\{-1, 2, -3\}$.

Proposition 1 - Valeurs propres & Inversibilité

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Le réel λ est une valeur propre de M si et seulement si $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Exemple 2 - Valeurs propres d'une matrice triangulaire

Soit $T = \begin{pmatrix} 4 & 32 & -1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. Le réel λ est valeur propre de T si et seulement si la matrice $T - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 32 & -1 \\ 0 & 9-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -7-\lambda \end{pmatrix}$ est inversible. D'après la caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires, λ est une valeur propre de T si et seulement si $\lambda \in \{4, 9, -7\}$.

Théorème 1 - Valeurs propres & Matrices triangulaires

Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire. Les valeurs propres de T sont ses éléments diagonaux.

Théorème 2 - Recherche de valeurs propres

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Le réel λ est une valeur propre de M si et seulement si $\mathrm{Rg}(M - \lambda I_n) < n$.

Exemple 3 - Recherche de valeurs propres

Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 8 & -4 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ 8 & -4 & -5-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 0 \end{pmatrix} && {\scriptstyle L_2 \leftrightarrow L_3} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ 8 & -5-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} && {\scriptstyle C_2 \leftrightarrow C_3} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 8 & -5-\lambda & -4 \\ 7-\lambda & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} && {\scriptstyle L_1 \leftrightarrow L_2} \\
&= \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 8 & -5-\lambda & -4 \\ 0 & -\lambda^2+2\lambda+3 & -4(\lambda+1) \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} && {\scriptstyle L_2 \leftrightarrow 8L_2-(7-\lambda)L_1}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$ si et seulement si

$$
\begin{aligned}
(-\lambda^2 + 2\lambda + 3)(-1-\lambda) &= 0 \\
-(\lambda+1)(\lambda-3)(-\lambda-1) &= 0 \\
\lambda &\in \{-1, 3\}.
\end{aligned}
$$

L'ensemble des valeurs propres de A est donc $\{-1, 3\}$.

Proposition 2 - Inversibilité & Valeur propre nulle

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice M est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de M.

Définition 2 - Sous-espace propre

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de M. Le *sous-espace propre* de M associé à la valeur propre λ est l'espace vectoriel $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$.

Exemple 4 - Calcul de sous-espace propre

En reprenant l'exemple précédent, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-7}(T)$ si et seulement si

$$
TX = -7X \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 32y - z &= -7x \\ 9y - 2z &= -7y \\ -7z &= -7z \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} 11x + 32y - z &= 0 \\ 16y - 2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x &= -\frac{3}{11}\lambda \\ y &= \frac{1}{8}\lambda \\ z &= \lambda \end{cases}
$$

Ainsi,

$$
E_{-7}(T) = \mathrm{Vect}\left\{\left(-\frac{3}{11}, \frac{1}{8}, 1\right)\right\} = \mathrm{Vect}\left\{(-24, 11, 88)\right\}.
$$

Proposition 3 - Sous-espace propre

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, $\dim E_\lambda(M) \geqslant 1$ si et seulement si λ est une valeur propre de M.

II - Diagonalisation

Définition 3 - Matrices diagonalisables

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La matrice A est *diagonalisable* s'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exemple 5 - Matrice diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- D'une part, $AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
- D'autre part, $PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
- En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on montre que P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

D'où, $AP = PD$ et $A = PDP^{-1}$. La matrice A est donc diagonalisable.

Théorème 3 - Diagonalisation & Endomorphisme

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé. La matrice M est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale.

Exemple 6 - Endomorphisme

Soient $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à M. Posons $u = (2, 1)$ et $v = (-1, 1)$. Alors,

$$\begin{aligned} f(u) &= (3 \times 2 + 2 \times 1, 1 \times 2 + 2 \times 1) = (8, 4) = 4u \\ f(v) &= (3 \times (-1) + 2 \times 1, 1 \times (-1) + 2 \times 1) = (-1, 1) = v \end{aligned}$$

Comme $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, alors $\mathscr{B} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

De plus, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$.

Ainsi, d'après les formules de changement de bases, $M = PDP^{-1}$ et M est diagonalisable.

Théorème 4 - Construction de P

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de vecteurs propres de M et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les valeurs propres associées. En notant P la matrice de la famille $(X_1, \dots, X_n)$ dans la base canonique et D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors $M = PDP^{-1}$.

II.1 - Critères

Théorème 5 - Condition suffisante (admis)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si M possède n valeurs propres distinctes, alors M est diagonalisable.

Exemple 7 - Une matrice diagonalisable

- Soit $T = \begin{pmatrix} 4 & 32 & -1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. Comme T est triangulaire supérieure, les valeurs propres de T se lisent sur la diagonale (voir l'exemple précédent). Ainsi, les valeurs propres de T

sont 4, 9 et -7. Comme T possède 3 valeurs propres distinctes, alors T est diagonalisable.
Pour identifier une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $T = PDP^{-1}$, il faut identifier des vecteurs propres associés aux différentes valeurs propres.

- La réciproque de ce théorème est fausse car, par exemple, la matrice identité est diagonalisable et elle possède une unique valeur propre qui est 1.

Théorème 6 - Matrices symétriques - C. S. (admis)

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

Exemple 8 - Une matrice diagonalisable

Soit $S = \begin{pmatrix} 4 & 32 & -1 \\ 32 & 9 & -2 \\ -1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$. Comme S est une matrice symétrique à coefficients réels, alors S est diagonalisable.
Pour identifier une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $S = PDP^{-1}$, il faut commencer par rechercher les valeurs propres avec une des techniques vues précédemment (ou via la partie suivante), puis identifier des vecteurs propres associés aux différentes valeurs propres.

III - Polynômes annulateurs (H.P.)

III.1 - Définition

Définition 4 - Polynôme annulateur

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $Q(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ un polynôme non nul. Le polynôme Q est un *polynôme annulateur* de A si

$$Q(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_p A^p = 0.$$

Exemple 9 - Polynôme annulateur

Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $Q(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$. Alors,

$$\begin{aligned} Q(A) &= A^3 - 4A^2 + A + 6I \\ &= \begin{pmatrix} 55 & -28 & -28 \\ 9 & -1 & -9 \\ 47 & -28 & -20 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 17 & -8 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 13 & -8 & -4 \end{pmatrix} + \cdots \\ &\quad \cdots + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, Q est un polynôme annulateur de A.

En particulier, on obtient alors

$$\begin{aligned} A^3 - 4A^2 + A + 6I &= 0 \\ A(A^2 - 4A + I) &= -6I \end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I)$.

Proposition 4 - Taille 2

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Q(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - cb)$. Alors, $Q(A) = 0_2$.

Exemple 10 - Matrice de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. On pose

$$\begin{aligned} Q(X) &= X^2 - (1+5)X + (1 \times 5 - (-1) \times 2) \\ &= X^2 - 6X + 7. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} Q(A) &= A^2 - 6A + 7I \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -6 & 23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, Q est un polynôme annulateur de A.

En particulier,

$$\begin{aligned} A^2 - 6A + 7I &= 0 \\ A(A - 6I) &= -7I. \end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{7}(A - 6I)$.

III.2 - Polynômes annulateurs et valeurs propres

Proposition 5 - Valeurs propres & Racines de polynômes annulateurs

Soient A une matrice et Q un polynôme annulateur de A. Si λ est une valeur propre de A, alors λ est une racine de Q (c'est-à-dire $Q(\lambda) = 0$).

Exemple 11 - Identification de valeurs propres potentielles

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On constate que $A^2 = 2A$. Alors, $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de A. Les valeurs propres **possibles** de A sont donc 0 et 2.
  On montre ensuite que $E_0(A)$ et $E_2(A)$ sont de dimension supérieure ou égale à 1 pour en déduire que 0 et 2 sont bien valeurs propres de A.
- Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$. Alors, X^p est un polynôme annulateur et la seule valeur propre possible de N est 0.
  En supposant par l'absurde que N est inversible, on montre que $N^{p-1} = 0_n$, puis par itération que $N = 0_n$, ce qui est impossible. Ainsi, N n'est pas inversible et 0 est donc valeur propre de N.
  Finalement, l'unique valeur propre de N est 0.