V - Dérivations
Stratégie

Lors du calcul des dérivées, il est important d'appliquer une stratégie de calculs pour *reconnaître* la formule à utiliser. Nous présentons et illustrons ces règles ci-dessous, de la plus élémentaire à la plus élaborée. Plutôt que d'écrire « La dérivée de la fonction $f(x) = \cdots$ est la fonction $f'(x) = \cdots$ », nous adopterons la notation **non standard** $f(x) \rightsquigarrow f'(x)$.

I - Fonctions élémentaires

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$c \in \mathbb{R}$, c	$\rightsquigarrow$	0

Exemple 1

$$3 \rightsquigarrow 0$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
x^n	$\rightsquigarrow$	nx^{n-1}

Exemple 2

$$\begin{array}{lcl}
x & \rightsquigarrow & 1 \\
x^2 & \rightsquigarrow & 2x \\
\sqrt{x} = x^{1/2} & \rightsquigarrow & \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
x^{1/3} & \rightsquigarrow & \frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} \\
\frac{1}{x^2} = x^{-2} & \rightsquigarrow & -2x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3} \\
\frac{1}{x^3} = x^{-3} & \rightsquigarrow & -3x^{-3-1} = -\frac{3}{x^4} \\
\frac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3} & \rightsquigarrow & -\frac{1}{3}x^{-1/3-1} = -\frac{1}{x^{4/3}}
\end{array}$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$\ln(x)$	$\rightsquigarrow$	$\frac{1}{x}$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
e^{ax}	$\rightsquigarrow$	$a\,\mathrm{e}^{ax}$

Exemple 3

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{e}^{x} & \rightsquigarrow & \mathrm{e}^{x} \\
\mathrm{e}^{3x} & \rightsquigarrow & 3\,\mathrm{e}^{3x}
\end{array}$$

II - Fonctions composées

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$\lambda u(x)$	$\rightsquigarrow$	$\lambda u'(x)$

Exemple 4

$$\frac{1}{3}x^2 \rightsquigarrow \frac{1}{3}\times 2x = \frac{2x}{3}$$
$$3x^{1/2} \rightsquigarrow 3\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$u(x)+v(x)$	$\rightsquigarrow$	$u'(x)+v'(x)$

Exemple 5

$$x^4+x^5 \rightsquigarrow 4x^3+5x^4$$
$$\mathrm{e}^{3x}+\frac{1}{x} \rightsquigarrow 3\,\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{x^2}$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$\lambda u(x)+\mu v(x)$	$\rightsquigarrow$	$\lambda u'(x)+\mu v'(x)$

Exemple 6

$$3x-2x^7 \rightsquigarrow 3-2\times 7x^6 = 3-14x^6$$
$$\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}+\frac{2}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{3}\times 3\,\mathrm{e}^{3x}+2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{e}^{3x}-\frac{2}{x^2}$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$u^n(x)$	$\rightsquigarrow$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$

Exemple 7

$$(x+2)^2 = (\underbrace{x+2}_{u(x)})^2 \rightsquigarrow 2\times 1\times(x+2)^{2-1} = 2(x+2)$$
$$\frac{1}{(x+3)^4} = (\underbrace{x+3}_{u(x)})^{-4} \rightsquigarrow -4\times 1\times(x+3)^{-4-1} = -\frac{4}{(x+3)^5}$$
$$(\underbrace{x^2+3}_{u(x)})^4 \rightsquigarrow 4\times 2x\times(x^2+3)^{4-1} = 8x(x^2+3)^3$$
$$\frac{1}{(x^2+3)^4} = (\underbrace{x^2+3}_{u(x)})^{-4} \rightsquigarrow -4\times(2x)\times(x^2+3)^{-4-1} = -\frac{8x}{(x^2+3)^5}$$
$$(\underbrace{x^3+\mathrm{e}^{2x}}_{u(x)})^3 \rightsquigarrow 3\times(3x^2+2\,\mathrm{e}^{2x})(x^3+\mathrm{e}^{2x})^2$$
$$(\underbrace{x^3+\mathrm{e}^{3x}}_{u(x)})^5 \rightsquigarrow 5(3x^2+3\,\mathrm{e}^{3x})(x^3+\mathrm{e}^{3x})^4$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$\ln\lvert u(x)\rvert$	$\rightsquigarrow$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple 8

$$\ln\lvert x+12\rvert \rightsquigarrow \frac{1}{x+12}$$
$$\ln\left(x^2+\mathrm{e}^{3x}\right) \rightsquigarrow \frac{2x+3\,\mathrm{e}^{3x}}{x^2+\mathrm{e}^{3x}}$$
$$\ln\left(3x^2+\mathrm{e}^{2x}\right) \rightsquigarrow \frac{3\times 2x+2\,\mathrm{e}^{2x}}{3x^2+\mathrm{e}^{2x}} = 2\frac{3x+\mathrm{e}^{2x}}{3x^2+\mathrm{e}^{2x}}$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$\mathrm{e}^{u(x)}$	$\rightsquigarrow$	$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$

Exemple 9

$$\mathrm{e}^{x+12} \rightsquigarrow \underbrace{1}_{u'(x)} \times \mathrm{e}^{x+12} = \mathrm{e}^{x+12}$$

$$\mathrm{e}^{x^2+\mathrm{e}^{3x}} \rightsquigarrow \underbrace{\left(2x+3\,\mathrm{e}^{3x}\right)}_{u'(x)} \mathrm{e}^{x^2+\mathrm{e}^{3x}}$$

$$\mathrm{e}^{3x^2+\mathrm{e}^{2x}} \rightsquigarrow \underbrace{\left(3\times 2x+2\,\mathrm{e}^{2x}\right)}_{u'(x)} \mathrm{e}^{3x^2+\mathrm{e}^{2x}} = 2\left(3x+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{e}^{3x^2+\mathrm{e}^{2x}}$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$u(x)\times v(x)$	$\rightsquigarrow$	$u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

Exemple 10

$$\underbrace{(x+1)}_{u(x)}\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{v(x)} \rightsquigarrow \underbrace{1}_{u'(x)}\times\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{v(x)}+\underbrace{(x+1)}_{u(x)}\underbrace{2\,\mathrm{e}^{2x}}_{v'(x)} = (2x+3)\,\mathrm{e}^{2x}$$

$$\underbrace{(x+1)}_{u(x)}\underbrace{\ln|x|}_{v(x)} \rightsquigarrow \underbrace{1}_{u'(x)}\times\underbrace{\ln|x|}_{v(x)}+\underbrace{(x+1)}_{u(x)}\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)} = \ln|x|+\frac{x+1}{x}$$

$$\underbrace{(x^2+1)}_{u(x)}\underbrace{\mathrm{e}^{3x+4}}_{v(x)} \rightsquigarrow \underbrace{2x}_{u'(x)}\underbrace{\mathrm{e}^{3x+4}}_{v(x)}+\underbrace{(x^2+1)}_{u(x)}\underbrace{3\,\mathrm{e}^{3x+4}}_{v'(x)}=(3x^2+2x+3)\,\mathrm{e}^{3x+4}$$

À Savoir

fonction	$\rightsquigarrow$	dérivée
$\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$	$\rightsquigarrow$	$f(x)$

Exemple 11

$$\int_3^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^4}\,\mathrm{d}t \rightsquigarrow \frac{\mathrm{e}^x}{x^4}$$

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^5}\,\mathrm{d}t \rightsquigarrow \frac{\ln(x)}{1+x^5}$$

III - Exercices

Solution de l'exercice 1.

1. La fonction $f(x)=3$ est constante. Sa dérivée vaut $f'(x)=0$.
2. La fonction $f(x)=\mathrm{e}$ est constante. Sadérivée vaut $f'(x)=0$.
3. La fonction $f(x)=x^{10}$ est une fonction puissance. Sa dérivée vaut
$$f'(x)=10\times x^{10-1}=10\times x^9.$$
4. La fonction $f(x)=x^{3/4}$ est une fonction puissance. Sa dérivée vaut
$$f'(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}.$$
5. La fonction $f(x)=\frac{1}{x^5}=x^{-5}$ est une fonction puissance. Sa dérivée vaut
$$f'(x)=-5x^{-5-1}=-5x^{-6}=-\frac{5}{x^6}.$$
6. La fonction $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ est une fonction puissance. Sa dérivée vaut
$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
7. La fonction $f(x)=\ln|x|$ est la fonction logarithme népérien. Sa dérivée vaut $f'(x)=\frac{1}{x}$.
8. La fonction $f(x)=\mathrm{e}^x$ est la fonction exponentielle. Sa dérivée vaut $f'(x)=\mathrm{e}^x$.
9. La fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ est la fonction inverse. Sa dérivée vaut $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

On peut également remarquer que $f(x) = x^{-1}$ et appliquer la formule pour les fonctions puissances :

$$f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2}.$$

10. La fonction $f(x) = \ln|2x|$ est de la forme $\ln|u(x)|$ en posant $u(x) = 2x$. Comme $u'(x) = 2$, on obtient

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}.$$

11. La fonction $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$ est une fonction exponentielle. Sa dérivée vaut $f'(x) = 5\,\mathrm{e}^{5x}$. □

Solution de l'exercice 2.

1. La fonction $f(x) = 4x + 3$ est de la forme $f(x) = \lambda u(x) + v(x)$ avec $\lambda = 4$, $u(x) = x$, $v(x) = 3$. Comme $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 0$, alors $f'(x) = 4$.

2. La fonction $f(x) = 2x^2 + x^5$ est de la forme $f(x) = \lambda u(x) + v(x)$ avec $\lambda = 2$, $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^5$. Comme $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 5x^4$, alors

$$f'(x) = 2 \times 2x + 5x^4 = 4x + 5x^4.$$

3. La fonction $f(x) = 3\,\mathrm{e}^x + \frac{4}{5}\ln(x) + 2\sqrt{x}$ est de la forme $f(x) = \lambda u(x) + \mu v(x) + \nu w(x)$, avec $\lambda = 3$, $u(x) = \mathrm{e}^x$, $\mu = 5$, $v(x) = x^5$ et $\nu = 2$ et $w(x) = \sqrt{x}$. Comme $u(x) = \mathrm{e}^x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ et $w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, alors

$$f'(x) = 3\,\mathrm{e}^x + \frac{4}{5x} + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3\,\mathrm{e}^x + \frac{4}{5x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4. La fonction $f(x) = (2x)^3$ est de la forme $f(x) = u(x)^n$, avec $n = 3$ et $u(x) = 2x$. Comme $u'(x) = 2$, alors

$$f'(x) = \underbrace{3}_{n} \times \underbrace{2}_{u'(x)} \times \underbrace{(2x)^4}_{u(x)^{n-1}} = 6(2x)^4.$$

5. La fonction $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x} - (4x)^4$ est de la forme $f(x) = \lambda u(x) + v(x)$, avec $\lambda = 3$, $u(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $v(x) = (4x)^4$. Comme $u'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$ et $v'(x) = 4 \times 4 \times (4x)^3 = 4^2(4x)^3$, alors

$$f'(x) = 3 \times 2\,\mathrm{e}^{2x} - 4^2(4x)^3 = 6\,\mathrm{e}^{2x} - 4^2 \times 4^3 \times x^3 = 6\,\mathrm{e}^{2x} - 4^5x^3.$$

□