T.D. III - Intégrale sur un segment

I - Calculs d'intégrales par primitives

Solution de l'exercice 1.

1. On décompose la fonction en une somme :
- $*$ une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$,
- $*$ une primitive de x est $\frac{x^2}{2}$,
- $*$ une primitive de 1 est x.

Ainsi, une primitive de x^2+x+1 est

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2+x+1)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2\\ &= \left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\right)-\left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+1\right)\\ &= \frac{8}{3}+2+2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\\ &= \frac{7}{3}+3-\frac{1}{2}=\frac{16}{3}-\frac{1}{2}=\frac{32-3}{6}=\frac{29}{6}.\end{aligned}$$

2. On décompose la fonction en une somme :
- $*$ une primitive de $2x^3$ est $\frac{2x^4}{4}=\frac{x^4}{2}$,
- $*$ une primitive de $4x$ est $\frac{4x^2}{2}=2x^2$,
- $*$ une primitive de 2 est $2x$.

Ainsi, une primitive de $2x^3+4x+2$ est

$$\frac{x^4}{2}+2x^2+2x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2x^3+4x+2)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{2}+2x^2+2x\right]_0^2\\ &= \left(\frac{2^4}{2}+2\times 2^2+2\times 2\right)-\left(\frac{0^4}{2}-2\times 0^2+2\times 0\right)\\ &= 8+8+4-0=20.\end{aligned}$$

3. On décompose la fonction en une somme :
- $*$ une primitive de $4x^3$ est $4\frac{x^4}{4}=x^4$,
- $*$ une primitive de $2x^2$ est $2\frac{x^3}{3}$,
- $*$ une primitive de -1 est $-x$.

Ainsi, une primitive de $4x^3+2x^2-1$ est

$$x^4+\frac{2}{3}x^3-x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned}\int_1^2 (4x^3+2x^2-1)\,\mathrm{d}x &= \left[x^4+\frac{2}{3}x^3-x\right]_1^2\\ &= \left(2^4+\frac{2}{3}2^3-2\right)-\left(1^4+\frac{2}{3}1^3-1\right)\\ &= 16+\frac{16}{3}-2-1-\frac{2}{3}+1\\ &= 14+\frac{14}{3}=\frac{56}{3}.\end{aligned}$$

4. On décompose la fonction en une somme :
- $*$ une primitive de x^{10} est $\frac{x^{11}}{11}$,
- $*$ une primitive de $\frac{1}{5}x^4$ est $\frac{1}{5}\times\frac{x^5}{5}=\frac{1}{25}x^5$,
- $*$ une primitive de $\frac{1}{2}$ est $\frac{x}{2}$.

Ainsi, une primitive de $x^{10}+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{2}$ est

$$\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^5}{25}+\frac{x}{2}.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(x^{10}+\frac{x^4}{5}+\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^5}{25}+\frac{x}{2}\right]_0^1\\ &= \left(\frac{1^{11}}{11}+\frac{1^5}{25}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{0^{11}}{11}+\frac{0^5}{25}+\frac{0}{2}\right)\\ &= \frac{1}{11}+\frac{1}{25}+\frac{1}{2}-0\\ &= \frac{50+22+275}{550}=\frac{347}{550}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 2.

1. Une primitive de $x^{3/2}$ est donnée par

$$\frac{x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1}=\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}x^{5/2}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1=\frac{2}{5}1^{5/2}-\frac{2}{5}0^{5/2}=\frac{2}{5}.$$

2. Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-1/2}$ est donnée par

$$\frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}=\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\left[2\sqrt{x}\right]_0^1=2\sqrt{1}-2\sqrt{0}=2.$$

3. Une primitive de $\frac{1}{3x^2}=\frac{1}{3}x^{-2}$ est donnée par

$$\frac{1}{3}\times\frac{x^{-2+1}}{-2+1}=\frac{1}{3}\times\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{3x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{3x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{3x}\right]_1^2\\ &= \left(-\frac{1}{3\times 2}\right)-\left(-\frac{1}{3\times 1}\right)\\ &= -\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

4. Une primitive de $\frac{4}{x^5}=4x^{-5}$ est donnée par

$$4\frac{x^{-5+1}}{-5+1}=4\frac{x^{-4}}{-4}=-\frac{1}{x^4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{4}{x^5}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{x^4}\right]_1^2\\ &= \left(-\frac{1}{2^4}\right)-\left(-\frac{1}{1^4}\right)\\ &= -\frac{1}{16}+1=\frac{15}{16}.\end{aligned}$$

5. La fonction $(2x+1)(x^2+x)^5$ est de la forme $u'(x)u(x)^5$, avec $u(x)=x^2+x$. Ainsi, une primitive de $(2x+1)(x^2+x)^5$ est donnée par

$$\frac{1}{6}u(x)^6=\frac{(x^2+x)^6}{6}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 (2x+1)(x^2+x)^5\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(x^2+x)^6}{6}\right]_{-1}^0\\ &= \frac{(0^2+0)^6}{6}-\frac{((-1)^2+(-1))^6}{6}\\ &= 0-0=0.\end{aligned}$$

6. En posant $u(x)=x^3+3x+4$, alors $u'(x)=3x^2+3=3(x^2+1)$. Ainsi, la fonction

$$(x^2+1)(x^3+3x+4)=\frac{1}{3}3(x^2+1)(x^3+3x+4)$$

est de la forme $\frac{1}{3}u'(x)u(x)$. Ainsi, une de ses primitives est

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(x^3+3x+4)^2 = \frac{(x^3+3x+4)^2}{6}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}(x^2+1)(x^3+3x+4)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(x^3+3x+4)^2}{6}\right]_{-1}^{0}\\ &= \frac{(0^3+3\times 0+4)^2}{6} - \frac{((-1)^3+3\times(-1)+4)^2}{6}\\ &= \frac{4^2}{6} - 0 = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. Une primitive de $\frac{3}{x} = 3\frac{1}{x}$ est $3\ln(x)$. Ainsi,

$$\int_1^2 \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = [3\ln(x)]_1^2 = 3\ln(2) - 3\ln(1) = 3\ln(2).$$

2. En posant $u(x) = x^3+2x^2+1$, alors $u'(x) = 3x^2+4x$. Ainsi, $\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ et une primitive est donnée par

$$\ln\left|x^3+2x^2+1\right|.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \left[\ln\left|x^3+2x^2+1\right|\right]_1^2\\ &= \ln\left|2^3+2\times 2^2+1\right| - \ln\left|1^3+2\times 1^2+1\right|\\ &= \ln(17) - \ln(4) = \ln(17) - 2\ln(2).\end{aligned}$$

3. Une primitive de e^{2x} est donnée par $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_{-2}^{2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{2\times 2}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2\times(-2)}}{2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^{-4}}{2}.\end{aligned}$$

4. Une primitive de $\frac{1}{\mathrm{e}^{12x}} = \mathrm{e}^{-12x}$ est donnée par

$$\frac{\mathrm{e}^{-12x}}{-12} = -\frac{\mathrm{e}^{-12x}}{12}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\frac{1}{\mathrm{e}^{12x}}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-12x}}{12}\right]_{-2}^{2}\\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-12\times 2}}{12} - \left(-\frac{\mathrm{e}^{-12\times(-2)}}{12}\right)\\ &= \frac{-\mathrm{e}^{-24}+\mathrm{e}^{24}}{12} = \frac{\mathrm{e}^{24}-\mathrm{e}^{-24}}{12}.\end{aligned}$$

5. En posant $u(x) = \mathrm{e}^x + x$, alors $u'(x) = \mathrm{e}^x + 1$ et

$$(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+x)^{22} = u'(x)u(x)^{22}.$$

Ainsi, une primitive de cette fonction est donnée par

$$\frac{u(x)^{23}}{23} = \frac{(\mathrm{e}^x+x)^{23}}{23}.$$

En utilisant cette primitive, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+x)^{22}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(\mathrm{e}^x+x)^{23}}{23}\right]_0^1\\ &= \frac{(\mathrm{e}^1+1)^{23}}{23} - \frac{(\mathrm{e}^0+0)^{23}}{23}\\ &= \frac{(\mathrm{e}+1)^{23}-1}{23}.\end{aligned}$$

6. En posant $u(x) = \mathrm{e}^x + x$, alors $u'(x) = \mathrm{e}^x + 1$ et

$$\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Ainsi, une primitive de cette fonction est donnée par

$$\ln\left|\mathrm{e}^x+x\right|.$$

En utilisant cette primitive, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\,\mathrm{d}x &= [\ln|\mathrm{e}^x+x|]_0^1\\ &= \ln\left|\mathrm{e}^1+1\right| - \ln\left|\mathrm{e}^0+0\right|\\ &= \ln(\mathrm{e}+1) - \ln(1) = \ln(\mathrm{e}+1).\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. En décomposant la fonction en une somme de fonctions :
- ∗ une primitive de x^2 est donnée par $\frac{x^3}{3}$,
- ∗ une primitive de $3x$ est donnée par $\frac{3x^2}{2}$,
- ∗ une primitive de 1 est donnée par x.

Ainsi, une primitive de x^2+3x+1 est donnée par

$$\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x.$$

En utilisant cette primitive,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+3x+1)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x\right]_0^1\\ &= \left(\frac{1^3}{3}+\frac{3\times 1^2}{2}+1\right)-\left(\frac{0^3}{3}+\frac{3\times 0^2}{2}+0\right)\\ &= \frac{1}{3}+\frac{3}{2}+1\\ &= \frac{2+9+6}{6}=\frac{17}{6}.\end{aligned}$$

2. Une primitive de e^{3x} est donnée par $\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\right]_{-2}^1\\ &= \frac{\mathrm{e}^{3\times 1}}{3}-\frac{\mathrm{e}^{3\times(-2)}}{3}\\ &= \frac{\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{-6}}{3}.\end{aligned}$$

3. La fonction e^3 est constante donc une de ses primitives est $\mathrm{e}^3 x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^{-1} \mathrm{e}^3\,\mathrm{d}x &= \left[\mathrm{e}^3 x\right]_1^{-1}\\ &= \mathrm{e}^3(-1)-\mathrm{e}^3\times 1 = -2\,\mathrm{e}^3.\end{aligned}$$

4. Une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_2^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)]_2^1\\ &= \ln(1)-\ln(2) = -\ln(2).\end{aligned}$$

5. En décomposant la fonction sous forme de somme,
- ∗ une primitive de e^x est e^x,
- ∗ une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$.

Ainsi, une primitive de $2\,\mathrm{e}^x+3x^2$ est

$$2\,\mathrm{e}^x+3\frac{x^3}{3}=2\,\mathrm{e}^x+x^3.$$

En utilisant cette primitive, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\,\mathrm{e}^x+3x^2\,\mathrm{d}x &= \left[2\,\mathrm{e}^x+x^3\right]_0^1\\ &= 2\,\mathrm{e}^1+1^3-\left(2\,\mathrm{e}^0+0^3\right)\\ &= 2\,\mathrm{e}+1-2 = 2\,\mathrm{e}-1.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5. En posant $u(x)=\ln(x)$, alors $u'(x)=\frac{1}{x}$. Ainsi, $\frac{\ln(x)}{x}$ est de la forme $u'(x)\times u(x)$ et une primitive est donnée par

$$\frac{1}{2}u(x)^2=\frac{(\ln(x))^2}{2}.$$

Ainsi,

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^1 = \frac{\ln(A)^2}{2}-\frac{\ln(1)^2}{2}=\frac{\ln(A)^2}{2}.$$

□

II - Fonctions définies par morceaux

Solution de l'exercice 6.

1. TODO

x		1		3	
$f(x)$	0	|	$\frac{1}{2}$	|	0

2. a) Comme f est nulle sur $[-2,0]$,

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

b) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3/2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3/2} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3/2} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[\frac{x}{2}\right]_1^{3/2}\\ &= \frac{\frac{3}{2}}{2} - \frac{1}{2}\\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

c) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[\frac{x}{2}\right]_1^{2}\\ &= \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

d) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-4}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-4}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[\frac{x}{2}\right]_1^{3}\\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

e) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned}\int_{-5}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-5}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-5}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{10} 0\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[\frac{x}{2}\right]_1^{3} + 0\\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

3. Comme $1 \leqslant x \leqslant 3$, en utilisant le calcul précédent,

$$\int_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{x} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2}\right]_1^{x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. TODO

x		0	
$f(x)$	0	|	$2\,\mathrm{e}^{-2x}$

2. Une primitive de $2\,\mathrm{e}^{-2x}$ est donnée par

$$2\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2} = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-1} = -\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

a) Comme f est nulle sur $[-2,0]$,

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

b) En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3/2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3/2} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3/2} 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[-\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^{3/2}\\ &= -\mathrm{e}^{-2\times\frac{3}{2}} - \left(-\mathrm{e}^{-2\times 0}\right)\\ &= -\mathrm{e}^{-3}+1 = 1-\mathrm{e}^{-3}.\end{aligned}$$

c) En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[-\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^{2}\\ &= -\mathrm{e}^{-2\times 2} - \left(-\mathrm{e}^{-2\times 0}\right)\\ &= -\mathrm{e}^{-4}+1 = 1-\mathrm{e}^{-4}.\end{aligned}$$

d) En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-4}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-4}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[-\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^{3}\\ &= -\mathrm{e}^{-2\times 3} - \left(-\mathrm{e}^{-2\times 0}\right)\\ &= -\mathrm{e}^{-6}+1 = 1-\mathrm{e}^{-6}.\end{aligned}$$

e) En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_{-5}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-5}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-5}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{10} 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \left[-\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^{10}\\ &= -\mathrm{e}^{-2\times 10} - \left(-\mathrm{e}^{-2\times 0}\right)\\ &= -\mathrm{e}^{-20}+1 = 1-\mathrm{e}^{-20}.\end{aligned}$$

f) Soit $x \geqslant 0$. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{0}^{x} 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[-\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^{x}\\ &= -\mathrm{e}^{-2x} - \left(-\mathrm{e}^{-2\times 0}\right)\\ &= -\mathrm{e}^{-2x}+1 = 1-\mathrm{e}^{-2x}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

□

Solution de l'exercice 8. On remarque que $x-2 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 2$. Ainsi,

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geqslant 2\\ -(x-2) & \text{si } x \leqslant 2\end{cases}.$$

On peut représenter les valeurs de la fonction dans le tableau suivant :

x		2	
$\lvert x-2\rvert$	$-(x-2)$	$\lvert$	$x-2$

En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5} |x-2|\ \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} |x-2|\ \mathrm{d}x + \int_{2}^{5} |x-2|\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} -(x-2)\ \mathrm{d}x + \int_{2}^{5} (x-2)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[-\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{5} \\ &= -\left(\frac{2^2}{2}-2\times 2\right) + \frac{(-1)^2}{2} - 2\times(-1) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{5^2}{2} - 2\times 5 - \left(\frac{2^2}{2} - 2\times 2\right) \\ &= 2 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{25}{2} - 10 + 2 = -4 + \frac{26}{2} \\ &= 13 - 4 = 9.\end{aligned}$$

2^e^ méthode. On aurait pu remarquer qu'en posant $u(x) = x-2$, alors $u'(x) = 1$ et $x - 2 = u'(x)u(x)$. Ainsi, une primitive de $x-2$ est $\frac{(x-2)^2}{2}$. Les calculs sont alors plus simples.

3^e^ méthode. On remarque que l'aire sous la courbe est égale à l'aire de deux triangles rectangles dont la base est de longueur 2 et la hauteur de longueur 3. □

III - Linéarité de l'intégrale

Solution de l'exercice 9.

1. Soit $t \in [0,1]$. En mettant sous le même dénominateur,

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t} = \frac{1+t-1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

2. En utlisant la question précédente puis la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{1+t}\ \mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 1\ \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t \\ &= [t]_0^1 - [\ln|1+t|]_0^1 \\ &= 1 - 0 - (\ln(1+1) - \ln(1+0)) \\ &= 1 - \ln(2).\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 10. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\ \mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} + \frac{t^n}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}+t^n}{1+t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^n \frac{1+t}{1+t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^n\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. En posant $u(x) = 1+x$, alors $u'(x) = 1$ et $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{1+x}$. Ainsi,

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln|1+1| - \ln|1+0| = \ln(2).$$

2. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1+x}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1-0 = 1. \end{aligned}$$

3. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} I+J &= 1 \\ J &= 1-I = 1-\ln(2). \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. En posant $u(x)=1+x^2$, alors $u'(x)=2x$ et

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\times\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right]_0^1 \\ &= \frac{\ln\left|1+1^2\right|}{2} - \frac{\ln\left|1+0^2\right|}{2} = \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

2. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\frac{1+x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} I+J &= \frac{1}{2} \\ J &= \frac{1}{2}-I = \frac{1}{2}-\frac{\ln(2)}{2} = \frac{1-\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

□

IV - Dérivation par rapport aux bornes

Solution de l'exercice 13. La fonction F est dérivable et

$$F'(x) = x^2-2x+1 = (x-1)^2.$$

Ainsi, $F' \geqslant 0$ et la fonction F est croissante. □

Solution de l'exercice 14.

1. La fonction f est dérivable et $f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

2. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1)+f(1) \\ &= \frac{\mathrm{e}^1}{1}(x-1)+\int_1^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}(x-1)+0 = \mathrm{e}(x-1). \end{aligned}$$

3. La fonction f' est de la forme $f'(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, où $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$. Comme $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$, alors

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x\, x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \mathrm{e}^x\,\frac{x-1}{x^2}.$$

□

V - Inégalités

Solution de l'exercice 15.

1. En posant $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^3$, alors $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x\, x^3 - \mathrm{e}^x(3x^2)}{(x^3)^2} \\ &= \mathrm{e}^x\, x^2 \frac{x-3}{x^6} = \mathrm{e}^x\,\frac{x-3}{x^4}. \end{aligned}$$

2. Comme $\mathrm{e}^x \geqslant 0$ et $x^4 \geqslant 0$, g' est du signe de $x-3$.
De plus, $x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$.
D'après le théorème de croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = +\infty$.
On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	e	$\searrow$	$\frac{\mathrm{e}^3}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. D'après le tableau de variations, la fonction g est décroissante sur $[1,3]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant x \leqslant 3 \\ g(3) &\leqslant g(x) \leqslant g(1), \quad \text{car } g \text{ est décroissante} \\ 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^3}{27} &\leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e} \\ \int_1^3 0\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 \mathrm{e}\,\mathrm{d}x, \quad \text{car } 1 \leqslant 3 \text{ et l'intégrale est croissante} \\ 0 &\leqslant \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}\,[x]_1^3 \\ 0 &\leqslant \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}(3-1) \\ 0 &\leqslant \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\,\mathrm{e}\,. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. Comme la fonction inverse est décroissante,

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant t \leqslant x \\ \frac{1}{x} &\leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1 \\ \frac{\mathrm{e}^t}{x} &\leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{t}, \quad \text{car } \mathrm{e}^t \geqslant 0 \\ \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{x}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}, \quad \text{car } 1 \leqslant x \text{ et l'intégrale est croissante} \\ \frac{1}{x}\int_1^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t &\leqslant f(x), \quad \text{car } x \text{ est indépendant de } t \\ \frac{1}{x}\left[\mathrm{e}^t\right]_1^x &\leqslant f(x) \\ \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x} &\leqslant f(x). \end{aligned}$$

2. En factorisant par e^x,

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x} = \frac{\mathrm{e}^x}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{1-x}\right).$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
Comme $\lim_{x\to+\infty} 1-x = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} 1-e^{1-x} = 1$.
Finalement, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e}{x} = +\infty$.
D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

□

Solution de l'exercice 17.

1. Comme $x \in [0,1/2]$, alors $x^2 \in [0,1]$ et $1-x^2 \geqslant 0$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant x \leqslant 1\\
0 &\leqslant x \times x^{n-1} \leqslant 1 \times x^{n-1}, \text{ car } x^{n-1} \geqslant 0\\
0 &\leqslant x^n \leqslant x^{n-1}\\
0 &\leqslant \frac{x^n}{1-x^2} \leqslant \frac{x^{n-1}}{1-x^2}, \text{ car } 1-x^2 \geqslant 0\\
\int_0^{1/2} 0 \,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{1/2} \frac{x^{n-1}}{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \text{ car } 0 \leqslant 1/2\\
0 &\leqslant u_n \leqslant u_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

2. On a montré à la question précédente que (u_n) est minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, comme (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.

3. En utilisant les propriétés sur x,

$$\begin{aligned}
0 \leqslant x &\leqslant \frac{1}{2}\\
0 \leqslant x^2 &\leqslant \frac{1}{4}\\
-\frac{1}{4} &\leqslant -x^2 \leqslant 0\\
1-\frac{1}{4} &\leqslant 1-x^2 \leqslant 0\\
\frac{1}{1-x^2} &\leqslant \frac{1}{\frac{3}{4}}, \text{ car la fonction inverse est décroissante}\\
\frac{x^n}{1-x^2} &\leqslant \frac{4}{3}x^n, \text{ car } x^n \geqslant 0\\
\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &\leqslant \frac{4}{3}\int_0^{1/2} x^n \,\mathrm{d}x, \text{ par croissance de l'intégrale}\\
u_n &\leqslant \frac{4}{3}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{1/2}\\
&\leqslant \frac{4}{3}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1}\\
&\leqslant \frac{4}{3(n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

4. Comme $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{3(n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0.$$

Comme, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{3(n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. En utilisant la croissance des fonctions puissances puis du logarithme,

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant x \leqslant 1\\
0 &\leqslant x^n \leqslant 1^n, \text{ par croissance des fonctions puissances sur } \mathbb{R}_+\\
1 &\leqslant 1+x^n \leqslant 1+1\\
\ln(1) &\leqslant \ln(1+x^n) \leqslant \ln(2), \text{ car ln est croissante}\\
\int_0^1 0\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln(2)\,\mathrm{d}x, \text{ car } 0\leqslant 1\\
0 &\leqslant I_n \leqslant [\ln(2)x]_0^1\\
0 &\leqslant I_n \leqslant \ln(2)\times 1 - \ln(2)\times 0\\
0 &\leqslant I_n \leqslant \ln(2).
\end{aligned}$$

2. En reprenant la stratégie précédente,

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant x \leqslant 1\\
0 &\leqslant x\times x^n \leqslant 1\times x^n, \text{ car } x^n \geqslant 0\\
1 &\leqslant 1+x^{n+1} \leqslant 1+x^n\\
0 &\leqslant \ln(1+x^{n+1}) \leqslant \ln(1+x^n)\\
\int_0^1 0\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 \ln(1+x^{n+1})\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x, \text{ car } 0\leqslant 1\\
0 &\leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (I_n) est décroissante.

3. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, la suite (I_n) converge. □

VI - Intégrations par parties

Solution de l'exercice 19.

1. On pose $\begin{cases} u(x) &= x\\ v'(x) &= \mathrm{e}^x\end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= 1\\ v(x) &= \mathrm{e}^x\end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0,1]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= [x\,\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 1\times\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\
&= 1\,\mathrm{e}^1 - 0 - [\mathrm{e}^x]_0^1\\
&= \mathrm{e} - \left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0\right) = 1.
\end{aligned}$$

2. On pose $\begin{cases} u(x) &= x\\ v'(x) &= \mathrm{e}^{2x}\end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= 1\\ v(x) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1,2]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 1\times\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\times\frac{\mathrm{e}^{2\times 2}}{2} - 1\times\frac{\mathrm{e}^{2\times 1}}{2} - \frac{1}{2}\int_1^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_1^2\\
&= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^4}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2}\right)\\
&= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{4} = \frac{4\,\mathrm{e}^4 - 2\,\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2}{4}\\
&= \frac{3\,\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2}{4}.
\end{aligned}$$

3. On pose $\begin{cases} u(x) &= \ln(x)\\ v'(x) &= x\end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= \frac{1}{x}\\ v(x) &= \frac{x^2}{2}\end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1,\mathrm{e}]$.

Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\mathrm{e}^2\ln(\mathrm{e})}{2} - \frac{1^2\ln(1)}{2} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.\end{aligned}$$

4. On pose $\begin{cases} u(x) &= x^2 \\ v'(x) &= \mathrm{e}^x \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= 2x \\ v(x) &= \mathrm{e}^x \end{cases}$.
Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0,1]$.
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 0 - 2\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Pour calculer cette nouvelle intégrale, on effectue une nouvelle intégration par parties. On pose $\begin{cases} u(x) &= x \\ v'(x) &= \mathrm{e}^x \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= \mathrm{e}^x \end{cases}$.
Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0,1]$.
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e} - 2\left(\left[x\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 1\times\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{e} - 2\left(\mathrm{e}^1 - 0 - \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1\right)\\ &= \mathrm{e} - 2\left(\mathrm{e} - (\mathrm{e} - \mathrm{e}^0)\right) = \mathrm{e} - 2(\mathrm{e} - \mathrm{e} + 1)\\ &= \mathrm{e} - 2.\end{aligned}$$

5. On pose $\begin{cases} u(x) &= \ln(x) \\ v'(x) &= x^2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v(x) &= \frac{x^3}{3} \end{cases}$.
Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1,2]$.
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2^3\ln(2)}{3} - \frac{1^3\ln(1)}{3} - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2\\ &= \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right)\\ &= \frac{3\times 8\ln(2) - 7}{9} = \frac{8\ln(8) - 7}{9}.\end{aligned}$$

6. On pose $\begin{cases} u(t) &= (\ln(t))^2 \\ v'(t) &= 1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(t) &= 2\times\frac{1}{t}\times\ln(t) \\ v(t) &= t \end{cases}$.
Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1,\mathrm{e}]$.
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(t))^2\,\mathrm{d}t &= \int_1^{\mathrm{e}} 1\times(\ln(t))^2\,\mathrm{d}t\\ &= \left[t(\ln(t))^2\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} t\times 2\times\frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{e}\ln(\mathrm{e})^2 - 1\ln(1)^2 - 2\int_1^{\mathrm{e}}\ln(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{e} - 2\int_1^{\mathrm{e}}\ln(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On pose $\begin{cases} u(t) &= \ln(t) \\ v'(t) &= 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v(t) &= t \end{cases}$.
Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1,\mathrm{e}]$.
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} 1\times(\ln(t))^2\,\mathrm{d}t &= \mathrm{e} - 2\left(\left[t\ln(t)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{e} - 2\left(\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - 1\ln(1) - [t]_1^{\mathrm{e}}\right)\\ &= \mathrm{e} - 2\left(\mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1)\right) = \mathrm{e} - 2.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 20. On pose $\begin{cases} u(x) &= \ln(x) \\ v'(x) &= \frac{1}{x^2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v(x) &= -\frac{1}{x} \end{cases}$.
Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, A]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A \left(-\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln(A)}{A} - \left(-\frac{\ln(1)}{1}\right) + \int_1^A \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A \\
&= -\frac{\ln(A)}{A} + \left(-\frac{1}{A} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) \\
&= -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1 = 1 - \frac{\ln(A)+1}{A}.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 21.

1. On pose $\begin{cases} u(t) &= \frac{1}{t} \\ v'(t) &= \mathrm{e}^t \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(t) &= -\frac{1}{t^2} \\ v(t) &= \mathrm{e}^t \end{cases}$.
Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, x]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t &= \left[\mathrm{e}^t \times \frac{1}{t}\right]_1^x - \int_1^x \mathrm{e}^t \times \left(-\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^1}{1} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

2. On pose $\begin{cases} u(t) &= \frac{1}{t^2} \\ v'(t) &= \mathrm{e}^t \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(t) &= -\frac{2}{t^3} \\ v(t) &= \mathrm{e}^t \end{cases}$.
Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, x]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\mathrm{e}^t \frac{1}{t^2}\right]_1^x - \int_1^x \mathrm{e}^t \times \left(-\frac{2}{t^3}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - \frac{\mathrm{e}^1}{1^2} + 2\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - \mathrm{e} + 2\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - \mathrm{e} + 2\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 2\,\mathrm{e} + 2\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^3}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 22.

1. En utilisant la définition,

$$\begin{aligned}
u_0 &= \int_0^1 (1-t)^0\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 \\
&= \mathrm{e} - 1.
\end{aligned}$$

2. On pose $f(t) = (2-t)\,\mathrm{e}^t$. La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables et en appliquant la formule de la dérivée d'un produit,

$$\begin{aligned}
f'(t) &= -\mathrm{e}^t + (2-t)\,\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t(-1+2-t) \\
&= (1-t)\,\mathrm{e}^t = g(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, $f' = g$ et f est une primitive de g.

3. Comme f est une primitive de g,

$$\begin{aligned}
u_1 = \int_0^1 (1-t)^1 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [f(t)]_0^1 = \left[(2-t)\,\mathrm{e}^t\right]_0^1 \\
&= (2-1)\,\mathrm{e}^1 - (2-0)\,\mathrm{e}^0 \\
&= \mathrm{e} - 2.
\end{aligned}$$

4. On pose $\begin{cases} u(t) & = (1-t)^{n+1} \\ v'(t) & = \mathrm{e}^t \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(t) & = -(n+1)(1-t)^n \\ v(t) & = \mathrm{e}^t \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0,1]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t (1-t)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t \left(-(n+1)(1-t)^n\right) \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^1 (1-1)^{n+1} - \mathrm{e}^0 (1-0)^{n+1} + \cdots \\
&\quad \cdots + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \\
&= -1 + (n+1)u_n = (n+1)u_n - 1.
\end{aligned}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left((1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t - (1-t)^n \mathrm{e}^t\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,(1-t-1)\, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 (1-t)^n t\,\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Comme $(1-t)^n t\,\mathrm{e}^t \geqslant 0$ et $0 \leqslant 1$, alors $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n t\,\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \geqslant 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
Finalement, la suite (u_n) est décroissante.
Comme $(1-t)^n \mathrm{e}^t \geqslant 0$, alors $u_n \geqslant 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) converge. Notons ℓ sa limite. Comme $0 \leqslant u_n \leqslant u_0$, alors $0 \leqslant \ell \leqslant u_0$.
Supposons que $\ell \neq 0$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} (n+1)u_n = \infty$. Comme $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$, en passant à la limite dans l'égalité, on obtient $\ell = \infty$, ce qui est impossible. Ainsi, $\ell = 0$.

6. En utilisant la question **4.**,

$$nu_n = u_{n+1} - u_n + 1.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0 - 0 + 1 = 1$. □

Solution de l'exercice 23.

1. En utilisant la définition,

$$u_0 = \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln(t))^0 \, \mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}.$$

2. a) La fonction logarithme népérien étant croissante,

$$\begin{aligned}
1 \leqslant t \leqslant \mathrm{e} \\
\ln(1) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(\mathrm{e}) \\
0 \leqslant \ln(t) \leqslant 1.
\end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les définitions ainsi que la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln(t))^{n+1} \, \mathrm{d}t - \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln(t))^n \, \mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \left(t(\ln(t))^{n+1} - t(\ln(t))^n\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln(t))^n (\ln(t) - 1) \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Comme $t \in [1, \mathrm{e}]$,

$$\begin{aligned}
t(\ln(t))^n (\ln(t) - 1) \leqslant 0 \\
\int_1^{\mathrm{e}} t(\ln(t))^n (\ln(t) - 1) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} 0 \, \mathrm{d}t \\
u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \\
u_{n+1} \leqslant u_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

3. On pose $\begin{cases} u(t) &= (\ln(t))^{n+1} \\ v'(t) &= t \end{cases}$, soit $\begin{cases} u'(t) &= (n+1) \times \frac{1}{t} \times (\ln(t))^n \\ v(t) &= \frac{t^2}{2} \end{cases}$.
Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, \mathrm{e}]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} t(\ln(t))^{n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2}(\ln(t))^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^2}{2} \times (n+1)\frac{(\ln(t))^n}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2}(\ln(\mathrm{e}))^{n+1} - \frac{1^2}{2}(\ln(1))^{n+1} - \frac{n+1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} t(\ln(t))^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n. \end{aligned}$$

4. En utilisant la question **1.** et la question précédente,

$$\begin{aligned} u_1 = u_{0+1} &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{0+1}{2}u_0 \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}, \\ u_2 = u_{1+1} &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1+1}{2}u_1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}, \\ u_3 = u_{2+1} &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{2+1}{2}u_2 \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{3\,\mathrm{e}^2 - 3}{8} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2 + 3}{8}. \end{aligned}$$

□