T.D. X - Convergence Estimation

Exercice 1. [D'après ESC 18] Soit $a > 0$. On note f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

Un fabriquant de téléphones portables veut étudier l'autonomie de ses téléphones. Étant donné un téléphone pris au hasard et chargé au maximum, on note X le nombre d'heures écoulées lorsque le téléphone s'éteint. On suppose que X est une variable aléatoire de densité f. On allume en même temps n téléphones pris au hasard que l'on a chargés au maximum et on note X_i la durée en heures écoulées lorsque le i^{e} téléphone s'éteint. On suppose que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

3. Proposer un estimateur ponctuel de $\frac{3a}{2}$.

4. On suppose que $n = 100$ et on mesure $\sum_{i=1}^{100} X_i = 603$. À quelle valeur peut-on estimer a ?
TODO : tester l'exercice suivant

Exercice 2. [D'après ESC 16] On note N le nombre total de loups dans le massif alpin. On cherche à estimer N à l'aide de différents protocoles. On commence par prélever 10 loups que l'on munit d'une puce puis qu'on relâche. On suppose que la population de loup n'évolue pas et que la probabilité de prélever un loup pucé est toujours égale à $\frac{10}{N}$.

1. Premier protocole. On prélève successivement 30 loups en relâchant à chaque fois le loup prélevé. On note X le nombre de loups pucés prélevés.

a) Reconnaître la loi de X.

b) Donner l'espérance et la variance de X en fonction de N.

c) Montrer que $\frac{X}{300}$ est un estimateur ponctuel de $\frac{1}{N}$.

d) Proposer un intervalle dans lequel $\frac{1}{N}$ se trouve avec probabilité au moins égale à 0.95%.

2. Second protocole. On prélève successivement des loups en les relâchant à chaque fois jusqu'à ce qu'on trouve un loup pucé. On note Y_1 le nombre de loups prélevés lorsqu'on trouve le premier loup pucé.

a) Reconnaître la loi de Y_1.

b) Donner l'espérance et la variance de X en fonction de N.

c) Proposer un intervalle dans lequel $\frac{1}{N}$ se trouve avec probabilité au moins égale à 0.95%.

Exercice 3. [D'après Ecricome 19]

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \mathrm{e}^{a-x} & \text{si } x \geqslant a \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f et $Y = X - a$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Y.

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c) Donner l'espérance et la variance de Y. En déduire l'espérance et la variance de X.
Soit n un entier naturel on nul et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X. On note $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - 1)$.

3. Calculer l'espérance puis la variance de S_n.