T.D. VI - Espaces vectoriels

I - Systèmes linéaires

Solution de l'exercice 1. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 3x+4y-z &= 2 \\ x+3y+z &= 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ -2y+2z &= -1 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \\ y+2z &= 9 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ -2y+2z &= -1 \\ 6z &= 17 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -\frac{17}{6} \\ y &= \frac{10}{3} \\ z &= \frac{17}{6} \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est $\left\{\left(-\frac{17}{6}, \frac{10}{3}, \frac{17}{6}\right)\right\}$.

1. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{cases} 2x+3y+z &= 7 \\ x-y+2z &= -3 \\ 3x+y-z &= 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z &= -3 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ 2x+3y+z &= 7 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1} \\ 3x+y-z &= 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z &= -3 \\ 5y-3z &= 13 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ 4y-7z &= 15 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z &= -3 \\ 5y-3z &= 13 \\ 23z &= -23 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow -5L_3 + 4L_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= -1 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathscr{S}_1$ possède une unique solution et l'ensemble des solutions est $\{(1,2,-1)\}$.

2. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{cases} 2x-y+4z &= 2 \\ x+2y-3z &= 6 \\ 4x+3y-2z &= 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z &= 6 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ 2x-y+4z &= 2 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1} \\ 4x+3y-2z &= 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z &= 6 \\ -5y+10z &= -10 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ -5y+10z &= -10 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z &= 6 \\ -5y+10z &= -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x &= 2-\lambda \\ y &= 2+2\lambda \\ z &= \lambda \end{cases}$$

Le système $(\mathscr{S}_2)$ possède une infinité de solutions et l'ensemble des solutions est

$$\{(2-\lambda, 2+2\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2,2,0) + \lambda(-1,2,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

3. Le sytème est déjà échelonné et possède deux variables libres. Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\left\{(5-\lambda-\mu, \lambda, \mu),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
$$= \left\{(5,0,0) + \lambda(-1,1,0) + \mu(-1,0,1),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

4. $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est solution de $(\mathscr{S}_4)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z &= -1 \\ -7y+11z &= 10 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \\ -7y+11z &= 7 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1} \end{cases}$.

Les deuxième et troisième lignes sont incompatibles, le système ne possède aucune solution. L'ensemble des solutions est $\emptyset$.

5. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} -x+2y+4z & =-11 \quad {\scriptstyle L_1\leftarrow L_2} \\ 2x-3y+5z & =8 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+4z & =-11 \\ y+13z & =-14 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2+2L_1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda\in\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x & =-17-22\lambda \\ y & =-14-13\lambda \\ z & =\lambda \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions du système $(\mathscr{S}_5)$ est infini et est donné par

$$\{(-17-22\lambda,-14-13\lambda,\lambda)\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{(-17,-14,0)+\lambda(-22,-13,1)\}.$$

□

Solution de l'exercice 2. On raisonne par équivalences

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \text{ est solution de } (\mathscr{S})$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4 & =2 \quad {\scriptstyle L_1\leftarrow L_2} \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4 & =1 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_1} \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4 & =\lambda \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4 & =2 \quad {\scriptstyle L_1\leftarrow L_2} \\ -5x_2+3x_3-7x_4 & =-3 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-2L_1} \\ 5x_2-3x_3+7x_4 & =\lambda-2 \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3-L_1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4 & =2 \quad {\scriptstyle L_1\leftarrow L_2} \\ -5x_2+3x_3-7x_4 & =-3 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-2L_1} \\ 0 & =\lambda-5 \end{cases}$$

Si $\lambda=5$, le sytème possède une infinité de solution. Si $\lambda\neq 5$, l'ensemble des solutions est l'ensemble vide. Finalement, l'unique solution est $\lambda=5$. □

II - Familles de vecteurs

Solution de l'exercice 3.

1. D'une part, E_1 est inclus dans $\mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{0_n}\in E_1$.
D'autre part, si $u=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $v=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ sont deux vecteurs de E_1 et α est un réel, alors

$$\alpha u+v=(\alpha x_1+y_1,\alpha x_2+y_2,\dots,\alpha x_n+y_n).$$

Comme $u\in E_1$, alors $x_1=x_2=0$. De même, $y_1=y_2=0$.
Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha x_1+y_1 & =0 \\ \alpha x_2+y_2 & =0 \end{cases}$$

Les deux composantes de $\alpha u+v$ sont nulles, donc $\alpha u+v\in E_1$.
Finalement, E_1 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2e méthode. En posant $f:(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_1,x_2)$, alors f est linéaire et $E_1=\operatorname{Ker} f$. Ainsi, E_1 est un espace vectoriel.

2. D'une part, E_2 est inclus dans $\mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{0_n}\in E_2$.
D'autre part, si $u=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $v=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ sont deux vecteurs de E_2 et α est un réel, alors

$$\alpha u+v=(\alpha x_1+y_1,\alpha x_2+y_2,\dots,\alpha x_n+y_n).$$

Comme $u\in E_2$, alors $x_1+x_2=0$. De même, $y_1+y_2=0$.
Ainsi,

$$\begin{cases} (\alpha x_1+y_1)+(\alpha x_2+y_2) & =\alpha(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=0. \end{cases}$$

Donc, $\alpha u+v\in E_2$.
Finalement, E_2 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2e méthode. En posant $f:(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1+x_2$, alors f est linéaire et $E_2=\operatorname{Ker} f$. Ainsi, E_2 est un espace vectoriel.

3. Comme $(0,\dots,0)\notin E_3$, alors E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

4. D'une part, E_4 est inclus dans $\mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{0_n}\in E_4$.

D'autre part, si $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont deux vecteurs de E_4 et α est un réel, alors

$$\alpha u + v = (\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2, \ldots, \alpha x_n + y_n).$$

Comme $u \in E_4$, alors $x_1 = x_2$. De même, $y_1 = y_2$.
Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha x_1 + y_1 & = \alpha x_2 + y_2. \end{cases}$$

Donc, $\alpha u + v \in E_4$.
Finalement, E_4 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2e méthode. En posant $f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 - x_2$, alors f est linéaire et $E_4 = \operatorname{Ker} f$. Ainsi, E_4 est un espace vectoriel.

5. On remarque que

$$\begin{aligned} u &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \in E_5 \\ v &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \in E_5 \end{aligned}$$

Cependant, $u + v = (1, 1, 0, \ldots)$ donc $u + v \notin E_5$.
Ainsi, E_5 n'est pas un espace vectoriel. □

Solution de l'exercice 4.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a(-1, -1, 1, 2) + b(1, -1, 1, 5) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} -a + b & = 0 \\ -a - b & = 0 \\ a + b & = 0 \\ 2a + 5b & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b & = 0 \\ a + 2b & = 0 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1 - L_2} \\ a + b & = 0 \\ 2a + 5b & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $a = b = 0$ et la famille est libre.

2e méthode. Comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, alors ils forment une famille libre.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a(8, 4, 1, -2) + b(1, 3, 0, 5) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} 8a + b & = 0 \\ 4a + 3b & = 0 \\ a & = 0 \\ -2a + 5b & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $a = b = 0$ et la famille est libre.

2e méthode. Comme les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, alors ils forment une famille libre.

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a(1, 1, 3, 2) + b(1, -1, 1, 3) + c(0, 1, 5, 2) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} a + b & = 0 \\ a - b + c & = 0 \\ 3a + b + 5c & = 0 \\ 2a + 3b + 2c & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + a - b & = 0 & {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_2} \\ a + b & = 0 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1} \\ 5c + 3a + b & = 0 \\ 2c + 2a + 3b & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c + a - b & = 0 \\ a + b & = 0 \\ -2a + 6b & = 0 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1} \\ 5b & = 0 & {\scriptstyle L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1} \end{cases}$$

Ainsi, $a = b = c = 0$ et la famille est libre.

4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a(1, 2, 3, 4) + b(-1, 3, 2, 1) + c(2, 1, -1, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} a-b+2c &= 0 \\ 2a+3b+c &= 0 \\ 3a+2b-c &= 0 \\ 4a+b+c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+2c &= 0 & \\ 5b-3c &= 0 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2-2L_1} \\ 5b-7c &= 0 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3-3L_1} \\ 5b-7c &= 0 & {\scriptstyle L_4 \leftarrow L_4-4L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+2c &= 0 & \\ 5b-3c &= 0 & \\ 4c &= 0 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_2-L_3} \end{cases}$$

Ainsi, $a=b=c=0$ et la famille est libre. □

Solution de l'exercice 5.

1. Comme $F_1 = \text{Vect}\{(2,-1,-3)\}$, alors $((2,-1,-3))$ est une famille génératrice de F_1.

2. Comme $F_2 = \text{Vect}\{(2,0,-3)\}$, alors $((2,0,-3))$ est une famille génératrice de F_2.

3. Comme $F_3 = \text{Vect}\{(2,0,3),(1,2,-1)\}$, alors $((2,0,3),(1,2,-1))$ est une famille génératrice de F_3.

4. Comme $F_4 = \text{Vect}\{(2,5,3),(1,2,-1)\}$, alors $((2,5,3),(1,2,-1))$ est une famille génératrice de F_4. □

Solution de l'exercice 6.

1. $(x,y,z) \in F_1$ si et seulement si $2x-3y+z=0$ si et seulement s'il existe λ, μ réels tels que

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= \mu \\ z &= -2\lambda+3\mu \end{cases}.$$

Ainsi, $F_1 = \text{Vect}\{(1,0,-2),(0,1,3)\}$.
La famille $((1,0,-2),(0,1,3))$ est une famille génératrice de F_1 et elle est libre, donc c'est une base de F_1.

Remarque. $\dim F_1 = 2$, donc F_1 est un plan de $\mathbb{R}^3$.

2. Le système étant déjà échelonné,

$$(x,y,z) \in F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+y+z &= 0 \\ 3x+z &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \;; \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= -\lambda \\ z &= -3\lambda \end{cases}$$

Ainsi, $F_2 = \text{Vect}\{(1,-1,-3)\}$. Comme $(1,-1,-3)$ est non nul, alors la famille $((1,-1,-3))$ est une famille libre de F_2. De plus, c'est une famille génératrice de F_2, donc c'est une base de F_2.

Remarque. $\dim F_2 = 1$ donc F_2 est une droite de $\mathbb{R}^3$.

3. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss,

$$(x,y,z,t) \in F_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z &= 0 \\ 2x+3y+z &= 0 \\ 5x+5y+2z &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z &= 0 & \\ 5y+3z &= 0 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2-2L_1} \\ 10y+6z &= 0 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3-4L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z &= 0 & \\ 5y+3z &= 0 & \\ 0 &= 0 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3-5L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \;; \begin{cases} x &= 2\lambda \\ y &= -3\lambda \\ z &= 5\lambda \end{cases}$$

Ainsi, $F_3 = \text{Vect}\{(2,-3,5)\}$. Comme $((2,-3,5))$ est une famille génératrice de F_3 composée d'un seul vecteur non nul, alors c'est une base de F_3.

Remarque. Comme $\dim F_3 = 1$, alors F_3 est une droite de $\mathbb{R}^3$.

4. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss,

$$(x,y,z,t)\in F_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z+t &= 0\\ x+y-t &= 0\\ 2x+3y+2z &= 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z+t &= 0\\ y+3z+2t &= 0 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_1-L_2}\\ y+4z+2t &= 0 \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow 2L_1-L_3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z+t &= 0\\ y+3z+2t &= 0\\ z &= 0 \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3-L_2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda\in\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x &= 3\lambda\\ y &= -2\lambda\\ z &= 0\\ t &= \lambda\end{cases}$$

Ainsi, $F_4 = \operatorname{Vect}\{(3,-2,0,1)\}$. Comme $((3,-2,0,1))$ est une famille génératrice de F_4 composée d'un seul vecteur non nul, alors c'est une base de F_4.

Remarque. Comme $\dim F_4 = 1$, alors F_4 est une droite de $\mathbb{R}^4$. □

Solution de l'exercice 7.

1. $(x,y,z)\in F_1$ si et seulement s'il existe λ, μ réels tels que

$$(x,y,z) = \lambda(1,1,2)+\mu(1,0,1)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda+\mu &= x\\ \lambda &= y\\ 2\lambda+\mu &= z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu+\lambda &= x\\ \lambda &= y\\ \lambda &= z-x \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3-L_1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu+\lambda &= x\\ \lambda &= y\\ 0 &= z-x-y \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3-L_2}\end{cases}$$

Ainsi, le système possède une solution si et seulement si $z-x-y=0$. Une équation cartésienne de F_1 est donc $x+y-z=0$.

2. $(x,y)\in F_2$ si et seulement s'il existe λ, μ réels tels que

$$(x,y) = \lambda(1,2)+\mu(4,6)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda+4\mu &= x\\ 2\lambda+6\mu &= y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+4\mu &= x\\ -2\mu &= y-2x \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-2L_1}\end{cases}$$

Ainsi, le système possède toujours une solution et $F_2=\mathbb{R}^2$.

3. $(x,y,z)\in F_3$ si et seulement s'il existe λ, μ réels tels que

$$(x,y,z) = \lambda(1,0,1)+\mu(2,3,1)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda+2\mu &= x\\ 3\mu &= y\\ \lambda+\mu &= z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+2\mu &= x\\ 3\mu &= y\\ \mu &= x-z \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow L_1-L_3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+2\mu &= x\\ 3\mu &= y\\ 0 &= 3x-3z-y \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow 3L_3-L_2}\end{cases}$$

Ainsi, le système possède une solution si et seulement si $3x-3z-y=0$. Une équation cartésienne de F_3 est donc $3x-y-3z=0$.

4. $(x,y,z)\in F_4$ si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$(x,y,z)=\lambda(1,1,1)$$

si et seulement si le système suivant possède une solution :

$$\begin{cases} \lambda &= x\\ \lambda &= y\\ \lambda &= z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= x\\ 0 &= x-y \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_1-L_2}\\ 0 &= x-z \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow L_1-L_3}\end{cases}$$

Ainsi, le système possède une solution si et seulement si $\begin{cases} x-y &= 0\\ x-z &= 0\end{cases}$

et une équation cartésienne de F_4 est donc $\begin{cases} x-y &= 0\\ x-z &= 0\end{cases}$. □

Solution de l'exercice 8.

1. Comme nous devons déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}_1$, montrons que $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$ en montrant que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}_1$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et a, b, c des réels tels que

$$(x, y, z) = a(-1, 1, 1) + b(1, -1, 1) + c(1, 1, -1).$$

Alors,

$$\begin{cases} x &= -a+b+c \\ y &= a-b+c \\ z &= a+b-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b+c &= x \\ 2c &= x+y \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1+L_2} \\ 2b &= x+z \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3+L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{y+z}{2} \\ b &= \frac{x+z}{2} \\ c &= \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

Ainsi, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaires des vecteurs de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_1$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
De plus,

$$(x, y, z) = \frac{y+z}{2}(-1, 1, 1) + \frac{x+z}{2}(1, -1, 1) + \frac{x+y}{2}(1, 1, -1)$$

soit ici

$$(8, 4, 2) = 3(-1, 1, 1) + 5(1, -1, 1) + 6(1, 1, -1).$$

Les coordonnées de $(8, 4, 2)$ dans la base $\mathscr{B}_1$ sont donc $(3, 5, 6)$.

2. Comme nous devons déterminer les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}_2$, montrons que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$ en montrant que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}_2$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et a, b, c des réels tels que

$$(x, y, z) = a(-1, -1, 1) + b(1, -1, 1) + c(2, 2, -1).$$

Alors,

$$\begin{cases} x &= -a+b+2c \\ y &= -a-b+2c \\ z &= a+b-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b+2c &= x \\ 2b &= x-y \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1-L_2} \\ 2b+c &= x+z \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3+L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+2c+b &= x \\ c+2b &= x+z \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_2} \\ 2b &= x-y \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{-x+3y+4z}{2} \\ b &= \frac{x-y}{2} \\ c &= y+z \end{cases}$$

Ainsi, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaires des vecteurs de $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_2$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
De plus,

$$(x, y, z) = \frac{-x+3y+4z}{2}(-1, -1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1, 1) + (y+z)(2, 2, -1)$$

soit ici

$$(8, 4, 2) = 6(-1, -1, 1) + 2(1, -1, 1) + 6(2, 2, -1).$$

Les coordonnées de $(8, 4, 2)$ dans la base $\mathscr{B}_1$ sont donc $(6, 2, 6)$.

3. Comme $F = \operatorname{Vect} \mathscr{B}$, alors $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de F. Montrons que $\mathscr{B}$ est une famille libre. Soit a, b réels tels que

$$a(-1, -1, 1) + b(2, 2, -1) = (0, 0, 0).$$

Alors,

$$\begin{cases} -a+2b &= 0 \\ -a+2b &= 0 \\ a-b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b &= 0 \\ 0 &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, $a = b = 0$ et $\mathscr{B}$ est bien une famille libre.
Finalement, $\mathscr{B}$ est bien une base de F.
Remarque. On aurait pu montrer la liberté en utilisant la non colinéarité des deux vecteurs. De plus, on a montré que $\dim F = 2$, donc que F est un plan.

Soit λ, μ des réels tels que

$$(3, 3, -1) = \lambda(-1, -1, 1) + \mu(2, 2, -1).$$

Alors,

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu & = 3 \\ -\lambda + 2\mu & = 3 \\ \lambda - \mu & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\mu & = 3 \\ 0 & = 0 \\ \mu & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = 1 \\ \mu & = 2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$(3, 3, -1) = (-1, -1, 1) + 2(2, 2, -1)$$

et les coordonnées de $(3, 3, -1)$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $(1, 2)$. $\square$

III - Questions plus théoriques

Solution de l'exercice 9.

1. D'une part, $F \cap G \subset \mathbb{R}^n$.
Comme $\overrightarrow{0_n} \in F$ et $\overrightarrow{0_n} \in G$, alors $\overrightarrow{0_n} \in F \cap G$.
Soit u, $v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $*$ Comme u, $v \in F$ et F est un espace vectoriel, alors $\lambda u + v \in F$.
- $*$ Comme u, $v \in G$ et G est un espace vectoriel, alors $\lambda u + v \in G$.

Ainsi, $\lambda u + v \in F \cap G$.
Finalement, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. Comme $\overrightarrow{0_n} \in F$ et $\overrightarrow{0_n} \in G$, alors

$$\overrightarrow{0_n} + \overrightarrow{0_n} = \overrightarrow{0_n} \in F + G.$$

Soit u, $v \in F + G$ et $\lambda \in R$.

- $*$ Comme $u \in F+G$, il existe $f_1 \in F$ et $g_1 \in G$ tels que $u = f_1+g_1$.
- $*$ Comme $v \in F+G$, il existe $f_2 \in F$ et $g_2 \in G$ tels que $v = f_2+g_2$.

Comme F est un espace vectoriel, alors $\lambda f_1 + f_2 \in F$.
Comme G est un espace vectoriel, alors $\lambda g_1 + g_2 \in G$.
Finalement,

$$\lambda u + v = (\underbrace{\lambda f_1 + f_2}_{\in F}) + (\underbrace{\lambda g_1 + g_2}_{\in G}) \in F + G.$$

Ainsi, $F + G$ est bien un espace vectoriel.

3. D'une part, $D_1 = \text{Vect}\,\{(1, 0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
D'autre part, $D_2 = \text{Vect}\,\{(0, 1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
Ainsi,

- $*$ $(1, 0) \in D_1$ donc $(1, 0) \in D_1 \cup D_2$,
- $*$ $(0, 1) \in D_2$ donc $(0, 1) \in D_1 \cup D_2$.

Cependant, $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$ n'appartient ni à D_1, ni à D_2. Ainsi, $(1, 1) \notin D_1 \cup D_2$.
Ainsi, $D_1 \cup D_2$ n'est pas un espace vectoriel. $\square$

Solution de l'exercice 10. L'équation cartésienne de F est

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n & = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'une système échelonné de rang 1, donc il possède $n - 1$ variables libres. Ainsi, $\dim F = n - 1$ et une base de F est

$$((1, -1, 0, \ldots, 0), (1, 0, -1, 0, \ldots,), \ldots, (1, 0, \ldots, 0, -1)).$$

$\square$

IV - Calcul matriciel

Solution de l'exercice 11. On décompose,

$$A = (a - b)I_3 + bJ.$$

De plus, on remarque que $J^2 = 3J$, puis on montre par récurrence que pour tout $k \geqslant 1$, $J^k = 3^{k-1}J$.
Comme $I_3 J = J I_3 = J$, les matrices $(a - b)I_3$ et J commutent. Ainsi,

d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((a-b)I_3)^{n-k} (bJ)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} b^k J^k \\ &= \binom{n}{0}(a-b)^n b^0 J^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(a-b)^{n-k} b^k 3^{k-1} J \\ &= (a-b)^n I_3 + \left(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(a-b)^{n-k}(3b)^k\right) J \\ &= (a-b)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a-b)^{n-k}(3b)^k - \binom{n}{0}(a-b)^n\right) J \\ &= (a-b)^n I_3 + \frac{(a-b+3b)^n - (a-b)^n}{3} J \\ &= (a-b)^n I_3 + \frac{(a+2b)^n - (a-b)^n}{3} J. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 12. D'après les notations,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $k \geqslant 3$,

$$B^k = B^{k-3} \times B^3 = 0_3.$$

De plus, $I_3 B = B I_3 = B$. Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= (B + I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + 0_3 \\ &= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2. \end{aligned}$$

On obtient ainsi les coefficients de A^n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & n\beta + \frac{n(n-1)}{2}\alpha\gamma \\ 0 & 1 & n\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que cette formule reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$. □

V - Matrices & Espaces vectoriels

Solution de l'exercice 13.

1. Comme $AI_n = A$ et $I_n A = A$, alors $I_n \in \mathscr{C}(A)$.
Comme $A0_n = 0_n$ et $0_n A = 0_n$, alors $0_n \in \mathscr{C}(A)$.
Comme $A \times A = A \times A$, alors $A \in \mathscr{C}(A)$.
Plus généralement, tout polynôme en A appartient à $\mathscr{C}(A)$.

2. On montre que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

* Comme $0_n A = A 0_n$, alors $0_n \in \mathscr{C}(A)$.
* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M,\ M' \in \mathscr{C}(A)$. Montrer que $\lambda M + M' \in \mathscr{C}(A)$, i.e. $A(\lambda M + M') = (\lambda M + M')A$. En effet,

$$\begin{aligned} A(\lambda M + M') &= \lambda AM + AM', \text{ par distributivité du produit matriciel} \\ &= \lambda MA + M'A, \text{ car } M,\ M' \in \mathscr{C}(A) \\ &= (\lambda M + M')A. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{C}(A)$ est un espace vectoriel.

2ᵉ méthode. On pose $\varphi : M \mapsto AM - MA$. D'après la distributivité du produit matriciel, l'application φ est une application linéaire.
Comme $\mathscr{C}(A) = \operatorname{Ker}\varphi$, alors $\mathscr{C}(A)$ est un espace vectoriel. □

Solution de l'exercice 14.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$aI_2 + bA = 0.$$

Alors,

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b & = 0\\ 4a & = 0\\ -3a+2b & = 0\\ 2a & = 0\end{cases}$$

Ainsi, $a = b = 0$ et la famille (I_2, A) est libre.

2ᵉ méthode. Comme A et I_2 ne sont pas colinéaires, alors la famille (I_2, A) est libre.

2. D'après la définition du produit matriciel,

$$A^2 = \begin{pmatrix}-11 & 12\\ -9 & -8\end{pmatrix}.$$

Comme $12 = 3 \times 4$ et $-9 = 3 \times (-3)$, on étudie

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix}-14 & 0\\ 0 & -14\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^2 = 3A - 14I_2.$$

3. Comme $A^2 = 3A - 14I_2$, alors $\operatorname{Vect}\left\{I_2, A, A^2\right\} = \operatorname{Vect}\{I_2, A\}$.
Ainsi, (I_2, A) est une famille génératrice de F.
D'après la question **1.**, (I_2, A) est une famille libre.
Ainsi, (I_2, A) est une base de F et $\dim F = 2$. □

Solution de l'exercice 15.

1. D'après la définition du produit matriciel, $A^2 = \begin{pmatrix}12 & 5 & 7\\ -1 & 0 & -2\\ 5 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

Soit a, b, c des réels tels que $aI_2 + bA + cA^2 = 0_3$. Alors,

$$\begin{pmatrix}a+3b+12c & b+5c & 2b+7c\\ -b-c & a & b-2c\\ 2b+5c & b+2c & a+5c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+12c & = 0\\ b+5c & = 0\\ 2b+7c & = 0\\ -b-c & = 0\\ a & = 0\\ b-2c & = 0\\ 2b+5c & = 0\\ b+2c & = 0\\ a+5c & = 0\end{cases}$$

Ainsi, $a = 0$ puis la dernière ligne fournit $c = 0$ puis $b = 0$. La famille (I_3, A, A^2) est donc libre.
Comme (I_3, A, A^2) est une famille génératrice de F, alors $\dim F = 3$.

2. D'après la définition du produit matriciel,

$$A^3 = \begin{pmatrix}45 & 19 & 29\\ -7 & -3 & -2\\ 23 & 10 & 12\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^3 - 3A^2 + 4A - I_3 = 0_3.$$

3. En utilisant la relation précédente,

$$\begin{aligned} A^3 - 3A^2 + 4A - I_3 &= 0\\ A^3 - 3A^2 + 4A &= I_3\\ A(A^2 - 3A + 4I_3) &= I_3.\end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = A^2 - 3A + 4I_3$.

4. On raisonne par récurrence.
Initialisation. Pour $n = 0$, $A^0 = 1I_3 + 0A + 0A^2 \in F$.
Hérédité. Soit $n \in\geqslant 3$. On suppose que $A^{n-1} \in F$. Alors, il existe a, b, c tels que

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= aI_3 + bA + cA^2 \\ A \times A^{n-1} &= A(aI_3 + bA + cA^2) \\ A^n &= aA + bA^2 + cA^3 \\ &= aA + bA^2 + c(3A^2 - 4A + 3I_3) \\ &= (3c + b)A^2 + (a - 4)A + 3cI_3 \\ &\in F. \end{aligned}$$

5. D'après la question précédente,

$$\mathrm{Vect}\left\{A^k,\, k \in \mathbb{N}\right\} = \mathrm{Vect}\left\{I_3, A, A^2\right\} = F.$$

Ainsi,

$$\dim \mathrm{Vect}\left\{A^k,\, k \in \mathbb{N}\right\} = \dim F = 3.$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. D'une part, $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et la matrice nulle est une matrice symétrique.
D'autre part, soit A, $B \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $A^T = A$ et $B^T = B$. Ainsi, comme la transposée est une application linéaire,

$$(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T = \lambda A + B.$$

La matrice $\lambda A + B$ est donc symétrique.
Finalement, $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. L'ensemble des matrices symétriques de taille 3 est

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) &= \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix},\, a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f \in R\right\} \\ &= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right. \\ &= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \right. \end{aligned}$$

Soit $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right.$
On vérifie très rapidement que $\mathscr{B}$ est une famille libre. De plus, il s'agit d'une famille génératrice de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\dim \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) = 6$.

3. On vérifie comme pour la question **1.** que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On montre ensuite que

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left\{E_{i,j} + E_{j,i},\, E_{\ell,\ell},\, 1 \leqslant i < j \leqslant n,\, 1 \leqslant \ell \leqslant n\right\}$$

Comme cette famille est libre et génératrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, son nombre d'éléments est égal à la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Or,

$$\begin{aligned} |\{\ell \;;\; 1 \leqslant \ell \leqslant n\}| &= n \\ |\{(i,j) \;;\; 1 \leqslant i < j \leqslant n\}| &= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 17. La matrice A appartient à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension $3^2 = 9$.
Comme la famille $(I_3, A, \dots, A^9)$ est une famille de 10 vecteurs appartenant à un espace vectoriel de dimension 9, alors cette famille est liée. $\square$