II - Dénombrement

Définition 1 - Ensembles disjoints

E et F sont des ensembles *disjoints* si $E \cap F = \emptyset$.

Définition 2 - Complémentaire

Si E est un ensemble et F est une partie de E, le *complémentaire* de F, noté $\overline{F}$ ou $\overline{F}$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F : $\overline{F} = E \backslash F = \{x \in E \ ; \ x \notin F\}$.

E désigne un ensemble de cardinal n et F un ensemble de cardinal p au sens des définitions suivantes.

I - Ensembles finis

I.1 - Définitions

Définition 3 - Ensemble fini

L'ensemble E est un *ensemble fini* si $E = \emptyset$ ou s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et une application bijective $f \ : \ [\![1, n]\!] \to E$. Sinon, E est un ensemble *infini*.

Exercice 1.

1. Donner des exemples d'ensembles finis.

2. Montrer que si E est un ensemble fini et F est en bijection avec E, alors F est un ensemble fini.

Lemme 1

Soit $p, q \in \mathbb{N}^\star$. Il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p = q$.

Définition 4 - Cardinal

Soit E un ensemble non vide et $p, q \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que E est en bijection avec $[\![1, p]\!]$ et $[\![1, q]\!]$. Alors, $p = q$. Cette valeur commune est le *cardinal* de E et est notée $|E| = \sharp E$. Par convention, $|\emptyset| = 0$.

Exemple 1

- On peut associer à chaque lettre de l'alphabet latin $\mathscr{A} = \{a, b, \ldots, z\}$ son rang dans l'alphabet. Ainsi, $|\mathscr{A}| = 26$.
- Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$. Alors, l'application $\varphi : x \mapsto x - n + 1$ réalise une bijection de $[\![n, m]\!]$ dans $[\![1, m - n + 1]\!]$. Ainsi, $|[\![n, m]\!]| = m - n + 1$.

Exercice 2. Montrer que tout ensemble en bijection avec un ensemble fini de cardinal n est fini et de cardinal n.

I.2 - Sous-ensembles et cardinaux

Lemme 2

Si $x \in E$, alors $E \backslash \{x\}$ est un ensemble fini et $|E \backslash \{x\}| = |E| - 1$.

Exemple 2

Si $\mathscr{A} = \{a, \ldots, z\}$ est l'ensemble des lettres de l'alphabet, alors $|\mathscr{A} \backslash \{z\}| = 25$.

Théorème 1 - Sous-ensemble

Si $F \subset E$, alors F est un ensemble fini et $|F| \leqslant |E|$. De plus, $|F| = |E|$ si et seulement si $F = E$.

Exercice 3. Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble de cardinal fini.

II - Dénombrement

II.1 - Produits cartésiens

Proposition 1 - Produit cartésien

$E \times F$ est un ensemble fini et $|E \times F| = |E| \cdot |F|$. Plus généralement, si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles finis, alors

$$|E_1 \times \cdots \times E_n| = |E_1| \times \cdots \times |E_n|.$$

Exemple 3

On souhaite dénombrer l'ensemble $\mathscr{M}$ des mots de 4 lettres construits avec les 26 lettres de l'alphabet latin.
Un mot de 4 lettres est un élément de l'ensemble $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \mathscr{A}$.
Ainsi, le nombre de mots de 4 lettres est égal à $|\mathscr{M}| = 26^4$.

Exercice 4. Soit U une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. On tire, avec remise, deux boules dans l'urne et on note successivement les numéros obtenus. Combien de résultats peut-on ainsi obtenir ?

II.2 - Réunions

Proposition 2 - Union disjointe

Si E et F sont deux ensembles disjoints, alors $E \cup F$ est fini et $|E \cup F| = |E| + |F|$.

Corollaire 2 - Cardinal du complémentaire

Si A est une partie de E, alors $|\overline{A}| = |E| - |A|$.

Exemple 4

On souhaite dénombrer l'ensemble $\mathscr{M}_{q,z}$ des mots de 4 lettres construits avec les 26 lettres de l'alphabet latin et qui contiennent une des lettres q ou z.
On s'intéresse au complémentaire $\overline{\mathscr{M}_{q,z}}$ de cet ensemble qui est constitué des mots contenants les lettres q ou z.
En notant $\mathscr{B} = \mathscr{A} \setminus \{q, z\}$, alors $\overline{\mathscr{M}_{q,z}} = \mathscr{B}^4$. Ainsi, $|\overline{\mathscr{M}_{q,z}}| = 24^4$.
Finalement, $|\mathscr{M}_{q,z}| = 26^4 - 24^4$.

Définition 5 - Partition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ une famille d'ensembles de E. La famille $(A_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une partition de E si

- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$,
- $\forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\ A_i \cap A_j = \emptyset$.

Proposition 3

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ des ensembles deux à deux disjoints. Alors, $\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$.

Exemple 5

On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des mots de $\mathscr{M}$ qui contiennent exactement une fois la lettre a. Notons $\mathscr{R}_i$ l'ensemble des mots de $\mathscr{R}$ où le a est en i^{e} position. Alors, $(\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3, \mathscr{R}_4)$ forme une partition de $\mathscr{R}$.
De plus, $\mathscr{R}_1 = \{a\} \times (\mathscr{A} \setminus \{a\})^3$. Ainsi, $|\mathscr{R}_1| = 25^3$. On calcule de même $|\mathscr{R}_2| = |\mathscr{R}_3| = |\mathscr{R}_4| = 25^3$. Finalement, $|\mathscr{R}| = 4 \times 25^3$.

On peut également utiliser une méthode plus descriptive.

- Soit la lettre a est située en première position. Il y a 1×25^3 tels mots.
- Soit la lettre a est située en deuxième position. Il y a $25 \times 1 \times 25^2$ tels mots.
- Soit la lettre a est située troisième position. Il y a $25^2 \times 1 \times 25$ tels mots.
- Soit la lettre a est située en quatrième position. Il y a $25^3 \times 1$ tels mots.

Finalement, l'ensemble des mots recherché est égal à 4×25^3.

Proposition 4 - Réunion

Soit A, $B \subset E$. Alors, $A \cup B$ est un ensemble fini et $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Exemple 6

On souhaite dénombrer l'ensemble $\mathscr{M}_a$ des mots de 2 lettres contenant la lettre a.
On note A_1 l'ensemble des mots contenant la lettre a en première position et A_2 l'ensemble des mots contenant la lettre a en seconde position.

Alors, $A_1 \cap A_2 = \{aa\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
|\mathscr{M}_a| &= |A_1 \cup A_2| \\
&= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \\
&= 1 \times 26 + 26 \times 1 - 1 \\
&= 51.
\end{aligned}$$

Exercice 5. (Formule du crible / de Poincaré) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de parties de E. Généraliser la formule précédente pour calculer $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ puis $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$.
Plus généralement, on peut montrer que

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|.$$

II.3 - Compter les applications

Proposition 5 - Applications

L'ensemble des applications de E dans F est un ensemble fini de cardinal $|F|^{|E|}$.

Exemple 7 - Tirage avec remise

Soit U une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. On tire, avec remise, p boules dans l'urne et on note successivement les numéros obtenus. Combien de résultats peut-on ainsi obtenir ?

- Au premier tirage, on associe le numéro n_1 de la première boule tirée.
- Au deuxième tirage, on associe le numéro n_2 de la deuxième boule tirée.
- $\cdots$
- Au p^{e} tirage, on associe le numéro n_p de la p^{e} boule tirée.

Ainsi, un tirage correspond à une application de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$

et il y a donc p^n tirages possibles.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Corollaire 3

Le nombre de parties de E est un ensemble fini de cardinal $2^{|E|}$.

II.4 - Arrangements

Définition 6 - Arrangements

Un *arrangement* de longueur p d'éléments de E est une liste de longueur p constituée d'éléments de E deux à deux distincts. On note A_n^p le nombre d'arrangements de E de longueur p.

Proposition 6

Pour tous n, $p \in \mathbb{N}$,

$$A_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 8 - Tirage sans remise

Soit U une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. On tire, sans remise, p boules dans l'urne et on note successivement les numéros obtenus. Combien de résultats peut-on ainsi obtenir ?
Si $p > n$, comme les tirages s'effectuent sans remise, on ne peut pas tirer successivement p boules et il y a donc 0 résultat.
Si $p \leqslant n$.

- Au premier tirage, on obtient un numéro $n_1 \in [\![1,n]\!]$,
- au deuxième tirage, on obtient un numéro $n_2 \in [\![1,n]\!] \setminus \{n_1\}$,
- $\cdots$,
- Au p^e tirage, on associe un numéro $n_p \in [\![1,n]\!] \setminus \{n_1,\ldots,n_{p-1}\}$.

Comme les tirages s'effectuent sans remise, les numéros $n_1,\ldots,n_p$ sont deux à deux distincts. Ainsi, à chaque résultat, on associe un p-arrangement $(n_1,\ldots,n_p)$.
Le nombre de résultats possibles est donc égal à $n(n-1)\ldots(n-p+1)$.

Théorème 4 - Arrangements & Injections

Soit E un ensemble de cardinal p et F un ensemble de cardinal n.

(i). Il y a A_n^p injections de E dans F.

(ii). Si $p = n$, il y a $n!$ bijections de E dans F. Les bijections de E sont appelées des *permutations*.

Exemple 9 - Anagrammes

Un anagramme est un mot obtenu en permuttant les lettres d'un mot de départ. Ainsi, le nombre d'anagrammes de MATHS est égal à 5!.

II.5 - Combinaisons

Théorème 5 - Lemme des bergers

Soit p un entier naturel non nul, E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$. On suppose que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(\{y\})| = p$. Alors, $|E| = p|F|$.

Définition 7 - Combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel. Une *combinaison* de p éléments de E est une partie de E de cardinal p. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments de E.

Proposition 7

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.

Exemple 10 - Tirage simultané, Anagrammes

- Soit U une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément p boules dans l'urne et on note les numéros obtenus. Combien de résultats peut-on ainsi obtenir ?
  Tout tirage contient au plus n boules. Ainsi, si $p > n$, le nombre de résultats possible est 0.
  Si $p \leqslant n$, un tirage revient à obtenir une partie $\{n_1, \ldots, n_p\}$ à p éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ des numéros des boules. Ainsi, il y a $\binom{n}{p}$ résultats possibles.
- Déterminer le nombre d'anagrammes du mot BISONRAVI.
  Le mot BISONRAVI contient 9 lettres. On constate que les lettres sont deux à deux distinctes, à l'exception du I qui est présent 2 fois. On choisit :
  - ⋆ la position des 2 lettres I : $\binom{9}{2}$ choix,
  - ⋆ la position de la lettre B : 7 choix,
  - ⋆ la position de la lettre S : 6 choix,
  - ⋆ la position de la lettre O : 5 choix,
  - ⋆ la position de la lettre N : 4 choix,
  - ⋆ la position de la lettre R : 3 choix,
  - ⋆ la position de la lettre A : 2 choix,
  - ⋆ la position de la lettre V : 1 choix.

  Finalement, il y $\binom{9}{2}7! = \frac{9!}{2}$ anagrammes possibles.

Théorème 6 - Relations sur les coefficients binomiaux

(i). $\forall\, n, p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

(ii). **Formule du capitaine.** $\forall\, n, p \in \mathbb{N}^\star$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

(iii). $\forall\, p \in \mathbb{N}^\star$, $n \in \mathbb{N}$, $p\binom{n}{p} = (n-p+1)\binom{n}{p-1}$.

(iv). $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(v). **Triangle de Pascal.** $\forall\, n, p \in \mathbb{N}^\star$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

(vi). **Binôme de Newton.** $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$.