Fonction continue dérivable nulle part

■ ■ ■

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i). f est dérivable en x_0.

(ii). $g : (h,k) \to \frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}$ admet une limite lorsque $(h,k) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tend vers $(0,0)$.

2. Montrer que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ peut admettre une limite lorsque h tend vers 0 sans que f soit dérivable en x_0.

On pose $I=[0,1]$ et (f_n) la suite de fonctions définie par

* $f_0(x)=x$.
* f_n est affine sur $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ pour tout $k \in [\![0, 3^n-1]\!]$.
* f_n et f_{n-1} sont égales en $\frac{3k}{3^n}$, $\frac{3k+1}{3^n}$ et $\frac{3k+2}{3^n}$ pour tout $k \in [\![0, 3^n-1]\!]$.

3. Représenter graphiquement f_0, f_1 et f_2.

4. Convergence uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la pente maximale de f_n vaut 2^n.

b) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, 3^n-1]\!]$ et $x \in \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$,

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{2^n}{3^n}.$$

c) Montrer que $\sum(f_n n+1-f_n)$ converge normalement vers une limite notée f.

d) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

e) Montrer que f est une fonction continue.

5. Non dérivabilité. Soit $x_0 \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer qu'il existe $(h,k) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $x_0+h = \frac{p+1}{3^n}$ et $x_0-k=\frac{p}{3^n}$.

On pose, avec les notations de la question précédente, $\Delta_n = 3^n\left[f_n\left(\frac{p+1}{3^n}\right) - f\left(\frac{p}{3^n}\right)\right]$.

b) Montrer que $\Delta_{n+1} \in \{2\Delta_n, -\Delta_n\}$.

c) En déduire que $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

d) Montrer que f n'est dérivable en x_0.

6. Écriture sous forme de série. Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 1/3 \\ -2x+1 & \text{si } 1/3 \leqslant x \leqslant 2/3 \\ x-1 & \text{si } 2/3 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

On prolonge g par 1-périodicité et on pose

$$g_n(x) = \frac{(-1)^{\lfloor 3^n x\rfloor}}{3^n} g(3^n x).$$

a) Montrer que $f_{n+1}-f_n = g_n$.

b) En déduire que $f(x) = x + \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.