

VII - Suites numériques

I - Suites usuelles

À Savoir

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr.$$

Exemple 1 - Une suite arithmétique

Soit (u_n) telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$.
Alors, (u_n) est une suite arithmétique de raison 3. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 3n.$$

À Savoir

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n.$$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0.$$

Exemple 2 - Une suite géométrique

Soit (u_n) telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$. Alors, (u_n) est une suite géométrique de raison 2. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \times 1 = 2^n.$$

À Savoir

La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n + r.$$

Exemple 3 - Une suite arithmético-géométrique

L'étude d'une suite arithmético-géométrique suit toujours le schéma suivant.

Soit (u_n) telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

* Recherche du réel ℓ tel que $\ell = 2\ell + 3$:

$$\ell = 2\ell + 3$$

$$0 = 2\ell - \ell + 3$$

$$\ell = -3.$$

* Étude de la suite définie par $v_n = u_n - \ell$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$$

$$= (2u_n + 3) - (2\ell + 3)$$

$$= 2u_n + 3 - 2\ell - 3$$

$$= 2(u_n - \ell)$$

$$= 2v_n.$$

De plus, $v_0 = u_0 - \ell = 1 - (-3) = 4$.

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n \times 4.$$

* Retour sur u_n . D'après la définition,

$$u_n - \ell = v_n$$

$$u_n = v_n + \ell$$

$$= 4 \times 2^n - 3.$$

II - Comportement des suites

À Savoir

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- * La suite (u_n) est croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

- * La suite (u_n) est décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

Exemple 4 - Études de monotonie

- * On définit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout entier naturel n non nul.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

- * Soit $t \in]0, 1[$. On définit $v_n = \ln(1 + t^n)$ pour tout entier naturel n .
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $t \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} t &\leq 1 \\ t^n \times t &\leq t^n \times 1, \text{ car } t^n \geq 0 \\ 1 + t^{n+1} &\leq 1 + t^n \\ \ln(1 + t^{n+1}) &\leq \ln(1 + t^n), \text{ car } \ln \text{ est croissante} \\ v_{n+1} &\leq v_n \\ v_{n+1} - v_n &\leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est croissante.

Attention! Il convient de travailler avec un entier naturel n **quelconque**. Montrer que $u_1 - u_0 \geq 0$ ou $u_2 - u_1 \geq 0$ n'est d'aucune utilité pour étudier la monotonie d'une suite.

À Savoir

Soit (u_n) une suite de réels.

- * La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- * La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

Exemple 5 - Étude de majorant

Soit $t \in]0, 1[$. On définit $v_n = \ln(1 + t^n)$ pour tout entier naturel n .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $t \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} t &\leq 1 \\ t^n &\leq 1^n, \text{ car les puissances sont croissantes sur } \mathbb{R}_+ \\ 1 + t^n &\leq 2 \\ \ln(1 + t^n) &\leq \ln(2), \text{ car } \ln \text{ est croissante} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est majorée par $\ln(2)$.

Attention! Le minorant ou le majorant **ne** doit **pas** dépendre de l'indice n .

À Savoir

La suite (u_n) est convergente s'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. Sinon, la suite (u_n) est dite divergente.

Exemple 6 - Limites classiques

Soit $a > 0$. Les limites suivantes sont à connaître :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^a} = 0, \text{ si } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a = +\infty, \text{ si } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t^n = 0, \text{ si } t \in]-1, 1[$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty, \text{ si } a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n^5 + 3n + 1}{n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n^5}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -4n^3 = -\infty$$

Les limites des polynômes ou des fractions rationnelles sont données par les limites des monômes de plus haut degré ou de leur quotient.

III - Opérations sur les limites

À Savoir

Si la case indique ??, la limite est indéterminée. Il faut transformer l'expression (factorisation, expression conjuguée, ...) pour pouvoir la déterminer.

* **Multiplication** par une constante.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	
$\lim_{n \rightarrow +\infty} ku_n =$	$k\ell$	$-\infty$	$+\infty$	si $k > 0$
	$k\ell$	$+\infty$	$-\infty$	si $k < 0$
	0	0	0	si $k = 0$

* **Addition** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ_1	$-\infty$	$+\infty$
ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$??
$+\infty$	$+\infty$??	$+\infty$

* **Multiplication** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 > 0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	??	??
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$??	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$??	$-\infty$	$+\infty$

* **Quotient** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 > 0$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 < 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\ell_2 > 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+
0^-	0^+	0^-	??	??	0^+	0^-
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$??	??
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$??	??

Exemple 7 - Opérations sur les limites

- * Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - 5 \ln(n)\right) = -\infty$.
- * Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{n^2} = 0$.
- * Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - n^5$ est une forme indéterminée. On va utiliser une factorisation pour lever l'indétermination :

$$n^3 - n^5 = n^5 \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) = -1$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) = -\infty.$$

À Savoir

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que, pour tout n entier naturel, $u_n \leq v_n$.

Si (u_n) converge et si (v_n) converge, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

À Savoir

Théorème d'encadrement Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites de réels tels que pour tout n entier naturel,

$$v_n \leq u_n \leq w_n.$$

- * Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ , alors

(u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

- * Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- * Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 8 - Théorème d'encadrement

- * Soit (u_n) une suite de réels telle que pour tout n entier naturel,

$$\frac{n^5 + n^3 + 1}{2n(1 + n^4)} \leq u_n \leq \frac{n^5 + n^4 + 1}{2n(1 + n^4)}.$$

Comme la limite d'une fraction rationnelle est égale au rapport de ses monômes de plus hauts degrés,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5 + n^3 + 1}{2n(1 + n^4)} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5 + n^4 + 1}{2n(1 + n^4)} = \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

- * Soit (u_n) une suite de réels telle que pour tout n entier naturel,

$$\frac{n^4 + n^3 + 1}{n^2} \leq u_n.$$

Comme la limite d'une fraction rationnelle est égale au rapport de ses monômes de plus hauts degrés,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + n^3 + 1}{n^2} = +\infty.$$

D'après le théorème d'encadrement, (u_n) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

IV - Existence de limites

À Savoir

Théorème de la limite monotone Soit (u_n) une suite de réels.

- * Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge.
- * Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.

Attention! Ce théorème **ne** fournit **pas** la valeur de la limite. Pour cela, il faudra se reporter à une des techniques précédentes.

Exemple 9 - Limite monotone

Soit (u_n) une suite telle que

$$u_0 = -2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3.$$

- * Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par 6.

Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = -2 \leq 6$ donc la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq 6$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + 3 \\ &\leq \frac{6}{2} + 3 \text{ d'après l'H.R.} \\ &\leq 6. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 6.$$

- * Étudions la monotonie de (u_n) . Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{2} + 3 - u_n \\ &= 3 - \frac{1}{2}u_n \\ &\geq 3 - \frac{1}{2}6, \text{ car } u_n \leq 6 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

- * La suite (u_n) est croissante et majorée par 6. D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.
- * Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et en passant à la limite dans l'égalité,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + 3 \\ \ell &= \frac{\ell}{2} + 3 \\ \frac{\ell}{2} &= 3 \\ \ell &= 6. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$.