■ ■ ■

## I. Suites de fonctions

**Indications pour l'exercice 1.**

**1.** La convergence simple est aisée à obtenir. Une étude de $\|f\|_\infty$ permet ensuite de montrer la convergence uniforme.

**2.** La convergence simple est aisée à obtenir. Une étude de $\|f\|_\infty$ permet de montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $a > 3$. Par ailleurs, on montre qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[b, +\infty[$ dès que $b > 0$.

**3.** La convergence simple est aisée à obtenir. Par une simple majoration, on montre ensuite la convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ dès que $a > 0$.
L'étude de $(f(\pi/2n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ permet de montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

**4.** On montre qu'il y a convergence simple si et seulement si $x \leqslant 0$.
On montre la convergence uniforme sur $]-\infty, a]$ dès que $a < 0$.
L'étude de la continuité montre qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_-$.

**5.** On montre à l'aide de développements limités que $f_n(x) = \sin\left(\frac{2n\pi x}{8n^2\pi^2} + o(1/n^2)\right)$, ce qui assure la convergence simple.
En choisissant $x_n$ judicieusement, on montre que $(f_n(x_n))$ est constante égale à 1 et que la convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
En considérant $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on montre que $\|]\|_{\infty,[a,b} f_n$ converge vers 0 et donc la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

**6.** On montre aisément la convergence simple.
On montre ensuite l'encadrement $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-x^2/2n})$ qui permet de montrer la convergence uniforme. □

**Indications pour l'exercice 2.** La convergence simple est aisée.
L'étude de $(f_n(n\pi))$ permet de montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. □

**Indications pour l'exercice 3.**

**1.** En distinguant ce qui se passe en 0, on montre la convergence simple vers une fonction $u$.

**2.** Pour des raisons de régularité, ou par l'étude de $(u_n(1/\sqrt{n}))$, on montre qu'il n'y a pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
On montre la majoration $|u_n(x) - u(x)| \leqslant \frac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-na^2}$ pour montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$. □

**Indications pour l'exercice 4.**

**1.** Il suffit d'appliquer les définitions.

**2.** On remarque que $1 + xy \leqslant 1 + |xy| \leqslant 1 + \max\{x, y\}^2$. On peut alors utiliser le fait que $1 + \min\{x, y\}^2 \geqslant 1$.

**3.** On majore $|g_n(x) - g(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$ en utilisant l'inégalité de la question précédente. □

**Indications pour l'exercice 5.**

**1.** On montre que $d_{n+1} = 2d_n$.

**2.** On montre que $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x))\left[1 - \frac{\sqrt{x}+P_n(x)}{2}\right]$.
Ainsi, $P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$ et $P_{n+1}(x) \geqslant P_n(x)$. On montre alors que $(P_n(x))$ est convergente vers $\sqrt{x}$.

**3.** On montre par récurrence que

$$0 \leqslant \sqrt{x} - P_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \leqslant \frac{\sqrt{x}}{1 + n\frac{\sqrt{x}}{2}}$$

**4.** En majorant le dernier membre par $\frac{2}{n}$, on montre la convergence uniforme sur $[0, 1]$. □

**Indications pour l'exercice 6.**

**1.** Penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange.

**2.** Utiliser la convergence simple et le fait que la somme soit finie.

**3.** Si $[a, b] \subset \mathbb{R}$, utiliser la norme infinie de $L_k$ sur $[a, b]$. □

**Indications pour l'exercice 7.**

**1.** Reconnaître une loi uniforme.

**2.** Montrer que $\{Z_n \leqslant x\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leqslant x\}$ puis utiliser l'indépendance des lancers.

**3.** Distinguer les cas $x < 6$ et $x \geqslant 6$ pour montrer la convergence simple. L'étude de $\|F_n - F\|_\infty$ permet de montrer la convergence uniforme (ne pas hésiter à recourir à une représentation graphique).

**4.** On montre que $F_{Y_n}(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$. Les convergences ont lieu comme dans la question précédente. □

**Indications pour l'exercice 8.**

**1.** Calculer $|G_n'|$.

**2.** Appliquer l'inégalité des accroissements finis.

**3.** Utiliser la convergence uniforme établie grâce à la question précédente.

**4.** On montre que $|I_n(x) - x| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}$ ce qui permet de montrer la convergence uniforme sur $[0, 1]$. □

**Indications pour l'exercice 9.**

**1. a)** Utiliser des intégrations par parties.

**b)** Utiliser une récurrence et des intégrations par parties.

**c)** Utiliser la question précédente et une récurrence.

**2. a)** Utiliser une récurrence en revenant à la définition de $(f_n)$.

**b)** Utiliser les théorèmes de croissances comparées pour montrer les convergences simple et uniforme sur tout segment.

**3.** Noter par l'absurde $\pi^2 = \frac{p}{q}$. On montre en utilisant les questions précédentes que $\left|\pi P_n(\pi^2)\right| \leqslant \frac{\pi^n}{2^n(n!)}$. Ensuite, $(q^{2n}p\left|P_n(\pi^2)\right|)$ est une suite d'entiers qui tend vers 0 donc est stationnaire. On obtiendrait alors $f_n(\pi) = 0$, ce qui est impossible. □

**Indications pour l'exercice 10.**

**1.** Penser à l'espérance et aux lois binomiales.

**2.** Décomposer l'espérance en utilisant les indicatrices des événements $\{|S_n/n - x| < \delta\}$ et $\{|S_n/n - x| \geqslant \delta\}$.
On utilise ensuite le caractère lipschitzien d'une part et la continuité de $f$ en $x$ d'autre part.

**3.** Penser à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. □

## II. Séries de fonctions

**Indications pour l'exercice 11.**

**1.** On montre que la série converge uniquement sur $]0, +\infty[$.

**2.** En utilisant la monotonie des fonctions, on montre la convergence normale sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ dès que $a > 0$.

**3.** On commence par montrer la décroissance de $F$.
Le théorème de la double limite permet de montrer la limite de $F$ en $+\infty$.
En 0, on montre que $F(x) \geqslant \sum_{k=0}^{N} \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$ puis on passe à la limite lorsque $x \to 0$. □

**Indications pour l'exercice 12.**

**1.** La convergence normale permet de conclure.

**2.** Penser à la formule d'Euler puis à la linéarité de la somme des séries convergentes.

**3.** La convergence normale permet d'intervertir somme et intégrale. □

**Indications pour l'exercice 13.**

**1.** Si $x \leqslant 0$, utiliser la divergence grossière. Si $x > 0$, utiliser le théorème des séries alternées.

**2.** Utiliser les sommes partielles pour montrer que $F(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right)\zeta(x)$.

**3.** Utiliser une comparaison séries / intégrale.

**4.** Utiliser le théorème des séries alternées pour obtenir que $1 - 2^{-x} \leqslant F(x) \leqslant 1$. □

**Indications pour l'exercice 14.**

**1.** Commencer par restreindre le domaine d'étude à $[-\pi/2, \pi/2]$. Montrer ensuite la convergence simple vers une fonction $F$ en distinguant les cas $x \in \{-\pi/2, \pi/2\}$.

**2.** Montrer que $F$ n'est pas continue et en déduire qu'il n'y a pas de convergence uniforme.

**3.** Une étude de maximum permet de montrer la convergence normale sur $[0,a]$ et sur $[-a,0]$ dès que $-\pi/2 < a < \pi/2$.

**4.** Utiliser le reste des sommes géométriques pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$. $\square$

**Indications pour l'exercice 15.**

**1.** La fonction est définie sur $]-1,+\infty[$. On prouver alors qu'il y a convergence simple en effectuant un développement limité.

**2.** En utilisant le théorème des séries alternées, on montre la convergence uniforme de $\sum f_n'$ puis le caractère $\mathscr{C}^1$ de $f$.

**3.** En écrivant $f(x) = -\ln(1+x) + \sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \ln(1+x/n)$, on montre que la série converge uniformément sur $[-1,+\infty[$. On utilise alors le théorème de la double limite sur cette série pour montrer que $f(x) \sim_{-1^+} -\ln(1+x)$.

**4.** En utilisant des sommes partielles et en montrant la convergence de suites d'intégrales, on montre que $f'(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$. $\square$

**Indications pour l'exercice 16.**

**1.** En discutant le signe de $a(n)$, on montre que le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il y a convergence normale sur tout segment de la forme $[a,+\infty[$ dès que $a > 0$.

**2.** Montrer que $a$ est minorée par une valeur $\alpha$ et que $J = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ a(n) = \alpha\}$ est fini. Utiliser ensuite le théorème de la double limite pour montrer ensuite que $f(t) \sim |J|\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

**3.** Comme $b > 0$, utiliser une technique de comparaison série / intégrale puis, en utilisant la convergence d'intégrales généralisées que

$$f(t) \sim_0 \frac{1}{bt^{1/b}} \int_0^{+\infty} u^{1/b-1}\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

$\square$

**Indications pour l'exercice 17.**

**1.** Une majoration d'arctangente permet de montrer la convergence normale puis le caractère $\mathscr{C}^1$ de $S$.

**2.** On pourra remarquer que $t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^2}$ est décroissante puis utiliser une comparaison série / intégrale. $\square$

## III. Avec Python

**Indications pour l'exercice 18.**

**1.** Penser aux racines de l'unité pour montrer que $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. On montre ensuite que $E = D$.

**2.**

**3.** On conjecture une convergence uniforme sur $]-\infty, a]$ et sur $[b,+\infty[$ pour tout $a < -1$ et $b > -1$.
L'étude des variations de $f$ permet de montrer la convergence normale sur tout segment inclus dans $]-1,1]$.
Pour $x > 1$, l'étude des variations de $f_n - f$ permet de montrer les convergences uniformes sur $[a,+\infty[$. $\square$