■ Chapitre 7 ■
Variables aléatoires discrètes

Notation.
■ $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.
■ X, Y désignent des variables aléatoires discrètes.

I. Variables aléatoires

I.1 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1 (Variable aléatoire discrète).

Une *variable aléatoire discrète* est une fonction $X : \Omega \to E$ telle que

(i). $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable ;

(ii). Pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ est un élément de $\mathscr{F}$.

La variable aléatoire X est une *variable aléatoire réelle* si E est une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.

1. Pour chacun des exemples suivants, déterminer les ensembles Ω et E. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $i \in [\![1, n]\!]$. On lance un dé équilibré à 6 faces n fois et on considère la variable aléatoire

a) X_i : résultat du i-ème lancer.

b) S : somme de tous les lancers.

2. Soient n et p deux entiers naturels. Déterminer le nombre de variables aléatoires définies de $([\![1, n]\!], \mathscr{P}([\![1, n]\!]))$ dans $([\![1, p]\!], \mathscr{P}([\![1, p]\!]))$.

3. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Montrer que $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire si et seulement si $A \in \mathscr{F}$.

Notations.
Soient $A \subset X(\Omega)$ et $x \in X(\Omega)$.
■ $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \in A\} = \{X \in A\} = (X \in A)$.
■ $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) = x\} = \{X = x\}$.

Exercice 2. Soit X une variable à valeurs réelles, $a \in \mathbb{R}$ et $t \geqslant 0$. Relier l'événement $\{X \leqslant a\}$ à

1. $\{-tX \geqslant -ta\}$.

2. $\left\{\mathrm{e}^X \leqslant \mathrm{e}^a\right\}$.

Définition 2 (Loi).

Soit X (resp. Y) une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ (resp. $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$).

(i). La *loi* de X, notée $\mathbb{P}_X$, est la probabilité définie sur $(E, \mathscr{P}(E))$ par

$$\forall\, x \in E,\ \mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}\left(X = x\right).$$

(ii). Deux variables aléatoires X et Y sont de même loi, noté $X \sim Y$, si $X(\Omega) = Y(\widetilde{\Omega})$ et pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}(X = x) = \widetilde{\mathbb{P}}(Y = x)$.

(iii). S'il existe $c \in E$ tel que $\mathbb{P}(X = c) = 1$, la variable aléatoire X est *presque sûrement constante*.

Notation.
La loi de X désigne indifféremment la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $\mathscr{P}(E)$, la fonction f_X qui à tout x de E associe $\mathbb{P}\left(X = x\right)$, ou si E est fini le vecteur $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$. Le terme de *distribution* de probabilité est un synonyme de *loi* de probabilité.

Exercice 3.

1. On reprend les notations de l'Exercice **1**.

a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de X_i.

b) Montrer que X_1 et X_2 suivent la même loi.

c) Déterminer la loi de $X_2 - X_1$.

d) Dans le cas où $n = 2$, déterminer la loi de S.

2. Soit $A \subset X(\Omega)$. Exprimer $\mathbb{P}(X \in A)$ en fonction de la loi de X.

Théorème 1.

Soit $f : X(\Omega) \to E$. Alors, $f \circ X$ est une variable aléatoire, notée $f(X)$, et

$$\forall\, y \in f(X(\Omega)),\, \mathbb{P}_{f(X)}(\{y\}) = \mathbb{P}_X(f^{-1}(\{y\})).$$

Exercice 4. On reprend les notations de l'Exercice **1.** Déterminer la loi de $(X_2 - X_1)^2$.

Théorème 2 (Admis).

Soient E un ensemble au plus dénombrable et $(p_x)_{x\in E}$ une famille de réels positifs tels que $\sum_{x\in E} p_x = 1$. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X tels que

$$X(\Omega) = E \text{ et } \forall\, x \in E,\, \mathbb{P}(X = x) = p_x.$$

I.2 Exemples

Définition 3 (Loi uniforme).

Soit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Une variable aléatoire X suit la *loi uniforme* sur E, noté $X \sim \mathscr{U}(E)$, si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\, \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

Exercice 5. Décrire un modèle où cette loi apparaît naturellement.

Définition 4 (Loi de Bernoulli).

Soit $p \in [0, 1]$. Une variable aléatoire X suit la *loi de Bernoulli* de paramètre p, noté $X \sim \mathscr{B}(p)$, si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0).$$

Exercice 6. Décrire un modèle où cette loi apparaît naturellement.

Définition 5 (Loi géométrique).

Soit $p \in]0, 1[$. Une variable aléatoire X suit la *loi géométrique* de paramètre p, noté $X \sim \mathscr{G}(p)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\, \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Exercice 7. On considère n lancers indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. Pour tout entier naturel n, on note A_n : *le n-ème lancer renvoie pile* et, pour tout $\omega \in \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$, on note $T(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N}\,;\, \omega \in A_n\}$ le temps d'attente du premier succès, où $\inf \emptyset = +\infty$.. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = n)$, puis $\mathbb{P}(T = +\infty)$.

Théorème 3 (Absence de mémoire).

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Alors, X suit une loi géométrique si et seulement si

$$\forall\ (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\left(X > n+k | X > n\right) = \mathbb{P}\left(X > k\right).$$

Définition 6 (Loi binomiale).

Soient $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Une variable aléatoire X suit la *loi binomiale*, noté $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et

$$\forall\ k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exercice 8.

1. Décrire un modèle où cette loi apparaît naturellement.

2. Loi multinomiale. On considère n lancers consécutifs d'un dé à 3 faces numérotées $1, 2, 3$ dont les probabilités d'occurrence sont p, q et $1-p-q$. On note X le vecteur constitué du nombre de 1, de 2 et de 3 accumulés au cours de ces n lancers. Déterminer la loi de X. Généraliser ce résultat à un dé à m faces.

Définition 7 (Loi de Poisson).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$. Une variable aléatoire X suit la *loi de Poisson* de paramètre λ, noté $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Théorème 4 (Approximation d'une Poisson par une binomiale).

Soient $\lambda > 0$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. Pour tout entier naturel n, soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres (n, p_n). Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

I.3 Fonctions de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition 8 (Fonction de répartition).

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. La *fonction de répartition* de X est la fonction F_X définie pour tout réel x par $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$.

Exercice 9. Soit X le nombre de piles obtenues lors du lancer d'une pièce de monnaie biaisée. Représenter graphiquement F_X.

Propriétés 1.

Soient X une variable aléatoire réelle discrète.

(i). F_X est croissante.

(ii). $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

Exercice 10. Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire X réelle.

1. Montrer que F_X est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash X(\Omega)$, montrer que F_X est continue en x.

3. On note $X(\Omega) = \{x_i,\, i \in I\}$ où I est au plus dénombrable et les (x_i) sont triés par ordre croissant. Exprimer, pour tout $i \in I$, la quantité $\mathbb{P}(X = x_i)$ en fonction de $F_X(x_i)$ et de $F_X(x_{i-1})$.

4. Soient X (resp. Y) des variables aléatoires réelles discrètes de fonctions de répartition F_Y (resp. F_Y). Montrer que $F_X = F_Y$ si et seulement si X et Y ont même loi.

II. Loi conjointe, Indépendance

Notation.

■ X et Y désignent deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

II.1 Loi conjointe

Définition 9 (Loi conjointe).

Si $X(\Omega) \subset E$ et $Y(\Omega) \subset F$, alors la *loi conjointe* du couple (X,Y) est la fonction définie sur $E \times F$ par $f_{X,Y} : (x,y) \mapsto \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$.

Propriété 2 (Marginales).

Soit $f_{X,Y}$ la loi de conjointe du couple (X,Y). Les *lois lois marginales* du couple (X,Y) satisfont :

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$$
$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

Exercice 11.

1. Loi de Benford. Soient D_1 et D_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1,9]\!] \times [\![0,9]\!]$ de loi conjointe

$$\mathbb{P}(\{D_1 = d_1\} \cap \{D_2 = d_2\}) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d_2 + 10d_1}\right).$$

a) Avec les notations de l'exercice précédent, déterminer la première loi marginale du couple (D_1, D_2).

b) Vérifier que $\mathbb{P}((D_1, D_2) \in [\![1,9]\!] \times [\![0,9]\!]) = 1$.

2. Soient $\lambda > 0$ et X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2,\, \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = a\frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!j!}.$$

a) Déterminer les lois marginales de (X,Y).

b) Déterminer a.

c) Déterminer la loi de $X + Y$.

3. Lors d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès $p \in]0,1[$, on note X (resp. Y) le rang du premier (resp. second) succès. Déterminer la loi de (X,Y) et en déduire les lois de X puis de Y.

4. Construire deux couples (X,Y) et $(\widetilde{X},\widetilde{Y})$ tels que $X \sim \widetilde{X}$, $Y \sim \widetilde{Y}$ mais (X,Y) et $(\widetilde{X},\widetilde{Y})$ n'ont pas même loi.

Définition 10 (Loi conditionnelle).

La *loi conditionnelle* de Y sachant $X = x$, notée $f_{Y|X}(\cdot|x)$ est définie, pour tout x tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$ par $f_{Y|X}(\cdot|x) : y \mapsto \mathbb{P}(Y = y|X = x)$.

Exercice 12. En reprenant le **3.** de l'exercice précédent, déterminer, pour $i \geqslant 1$ et pour tout $k \geqslant 2$, la loi conditionnelle de...

1. ...X sachant $\{Y = k\}$.

2. ...$Y - i$ sachant $\{X = i\}$.

Propriété 3.

Soit $x \in X(\Omega)$. Alors,

(i). $f_{X,Y} = f_{X|Y} \cdot f_Y$.

(ii). $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y) \cdot \mathbb{P}(X = x | Y = y)$.

Exercice 13. Soient $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et Y une variable aléatoire telle que la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = n\}$ est une loi binomiale de paramètre (n, p). Déterminer la loi de Y.

II.2 Indépendance

Définition 11 (Indépendance).

Les variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* si, pour tout couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants.

Définition 12 (Schéma de Bernoulli).

Soit $p \in [0, 1]$. Une *épreuve de Bernoulli* de paramètre p est une expérience aléatoire qui admet deux issues : le succès avec paramètre p et l'échec avec paramètre $1 - p$.
Un *schéma de Bernoulli* à n épreuves est une suite de n d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exercice 14. Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On réalise une suite de N épreuves de Bernoulli de probabilité de succès égale à p. On note X (resp. Y) le nombre de succès (resp. d'échecs) obtenus lors de ces lancers. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Théorème 5.

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B).$$

Corollaire 6.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, g une fonction définie sur $X(\Omega)$ et h une fonction définie sur $Y(\Omega)$. Alors, $g(X)$ et $h(Y)$ sont indépendantes.

Théorème 7 (Somme de v.a. indépendantes).

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières. Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k).$$

Exercice 15.

1. Soient $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m, p)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

2. Soient $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

Définition 13 (Indépendance mutuelle).

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires discrètes. La famille $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires *indépendantes* si pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$, les événements $(\{X_i = x_i\})_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants.

Exercice 16.

1. Montrer que si $(X_1, \dots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes.

2. Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres respectifs $p_1, \dots, p_n$.

a) Soit $Z = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Calculer la fonction de répartition puis la loi de Z.

b) Montrer que $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ suit une loi géométrique.

3. Lemme des coalitions. Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes et f, g deux fonctions. Alors, $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Théorème 8 (Admis).

Soient $(\mathbb{P}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n soit égale à $\mathbb{P}_n$.

Exercice 17. Identifier deux exemples d'application de ce théorème.

III. Moments d'une variable aléatoire réelle

Notation.

■ X, Y désignent deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

III.1 Espérance

Définition 14 (Espérance).

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $X(\Omega) = \{x_k,\, k \in \mathbb{N}\}$. Si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k\mathbb{P}(X = x_k)$ est absolument convergente, l'*espérance*, ou *moyenne*, de X, notée $\mathbb{E}[X]$, est le réel

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k\mathbb{P}(X = x_k).$$

Si $\mathbb{E}[X] = 0$, la variable aléatoire est *centrée*.

Exercice 18.

1. Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire de loi ...

a) ... constante presque sûrement.

b) ... uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

c) ... de Bernoulli.

d) ... binomiale.

e) ... de Poisson.

2. Montrer que toute variable aléatoire presque sûrement bornée admet une espérance.

3. Déterminer une variable aléatoire qui n'admet pas d'espérance.

Propriété 4.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs entières et admettant une espérance. Alors,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Exercice 19. Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

Propriété 5 (Probabilité & Espérance).

Pour tout $A \in \mathscr{F}$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A]$.

Théorème 9 (Théorème de transfert).

Soient X une variable aléatoire discrète et f définie sur $X(\Omega) = \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs réelles. Alors, $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $\sum \mathbb{P}(X = x_n) f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n).$$

Propriétés 6.

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant une espérance et $a \in \mathbb{R}$.

(i). $\mathbb{E}[1] = 1$.

(ii). Si $X \geqslant 0$, alors $\mathbb{E}[X] \geqslant 0$.

(iii). $|\mathbb{E}[X]| \leqslant \mathbb{E}[|X|]$.

Théorème 10 (Inégalité de Markov).

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant une espérance. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}[|X|]}{\varepsilon}.$$

Exercice 20.

1. Une pièce biaisée renvoie face avec probabilité $1/10$. Cette pièce est lancée successivement 200 fois. Déterminer une majoration de la probabilité qu'elle renvoie face au moins 120 fois.

2. Dans une journée, un postier trie en moyenne 10 000 lettres par jour. Majorer la probabilité qu'il traite au moins 15 000 lettres aujourd'hui.

III.2 Lois conjointes

Propriété 7 (Linéarité de l'espérance).

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance et $a \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathbb{E}[aX + Y] = a\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

Exercice 21.

1. Retrouver l'égalité $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ puis revisiter la formule du crible.

2. Croissance. Montrer que si $X \leqslant Y$ sont deux variables aléatoires admettant une espérance, alors $\mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[Y]$.

Définition 15 (Moment d'ordre k).

Soit k un entier positif. Le *moment d'ordre k* de X est, lorsqu'il est défini, le réel $\mathbb{E}[X^k]$.

Exercice 22.

1. Donner un exemple de variable aléatoire admettant une espérance finie mais pas de moment d'ordre 2.

2. Déterminer le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

3. Montrer que si $r \leqslant s$, alors toute variable aléatoire admettant un moment d'ordre s admet un moment d'ordre r.

4. Montrer que si X et Y admettent des moments d'ordre 2, alors XY admet une espérance.

Théorème 11 (Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes possédant un moment d'ordre 2. Alors, XY admet une espérance et

$$|\mathbb{E}[XY]| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \cdot \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

Exercice 23. Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 12 (Espérance & Indépendance).

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Alors,

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Exercice 24. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer $\mathbb{E}\left[(S_n - np)^3\right]$.

III.3 Variance

Définition 16 (Moment, Variance).

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Si X admet un moment d'ordre 2, la *variance* de X, notée $\mathbb{V}(X)$ ou $Var(x)$, est le réel

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right].$$

Si $\mathbb{V}(X) = 1$, la variable aléatoire est *réduite*.

Exercice 25. Déterminer la variance d'une variable aléatoire de loi …

1. … constante presque sûrement.

2. … uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

3. … de Bernoulli.

4. … binomiale.

5. … de Poisson.

6. … géométrique.

Propriétés 8.

Soient X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2 et a, $b \in \mathbb{R}$.

(i). $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si X est presque sûrement constante.

(ii). **KÖNIG-HUYGENS.** $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

(iii). $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.

Définition 17 (Écart-type).

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. L'*écart-type* de X, noté $\sigma(X)$, est le réel $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Exercice 26. Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2. Montrer que $\frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Théorème 13 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Exercice 27.

1. Un postier traite en moyenne 10 000 lettres par jour avec une variance de 2 000.

a) Minorer la probabilité qu'il traite entre 8 000 et 12 000 lettres aujourd'hui.

b) Majorer la probabilité qu'il traite plus de 15 000 lettres aujourd'hui.

2. Soient $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction strictement croissante (par exemple, exp, $x \mapsto x^2$) et X une variable aléatoire telle que $g(X)$ admette une espérance. Montrer que

$$\forall\, a > 0,\ \mathbb{P}\left(|X| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[g(|X|)\right]}{g(a)}.$$

Définition 18 (Covariance).

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant des moments d'ordre 2. La *covariance* de X et Y, notée $\mathscr{C}ov\,(X,Y)$ est le réel

$$\mathscr{C}ov\,(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])\right].$$

Si $\mathscr{C}ov\,(X,Y) = 0$, les variables aléatoires sont *décorrélées*.
Lorsque les variables aléatoires ne sont pas constantes presque sûrement, le *coefficient de corrélation* de X et Y est la quantité

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathscr{C}ov\,(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X) \cdot \mathbb{V}(Y)}}$$

Propriétés 9.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2.

(i). $\mathscr{C}ov\,(X,Y) = \mathscr{C}ov\,(Y,X)$.

(ii). $\mathscr{C}ov\,(aX+b,Y) = a \cdot \mathscr{C}ov\,(X,Y)$.

(iii). $\mathscr{C}ov\,(X,X) = \mathbb{V}(X)$.

(iv). $\mathscr{C}ov\,(X,Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

(v). $\rho(X,Y) \in [-1,1]$.

(vi). Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathscr{C}ov\,(X,Y) = 0$.

Exercice 28.

1. Montrer que $\rho(X,Y) \in \{-1,1\}$ si et seulement s'il existe a, b, c réels tels que $\mathbb{P}(aX+bY = c) = 1$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Montrer que $X+Y$ et $|X-Y|$ sont dépendantes mais décorrélées.

III.4 Somme de variables aléatoires

Théorème 14 (Variance d'une somme).

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2. Alors,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathscr{C}ov(X_i, X_j).$$

Théorème 15 (Somme & Indépendance).

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2 et indépendantes deux à deux. Alors,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k).$$

Exercice 29. Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi Bernoulli de paramètre p. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer $\mathbb{V}(S_n)$ et retrouver la variance d'une loi binomiale.

2. Déterminer $\mathbb{E}\left[(S_n - np)^4\right]$.

Théorème 16 (Loi faible des grands nombres).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes deux à deux possédant un moment d'ordre 2. On suppose que ces variables aléatoires ont même espérance $m = \mathbb{E}[X_1]$ et variance $\sigma = \mathbb{V}(X_1)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 30. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Les variables aléatoires (Y_n) sont-elles mutuellement indépendantes ?

2. Calculer l'espérance et la variance de M_n.

3. Énoncer la loi faible des grands nombres. Peut-on démontrer un résultat analogue ici ?

IV. Résumé concernant les lois classiques

En notant $q = 1 - p$.

Nom	Paramètres	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{V}(X)$	G_X	ρ
Constante	c	$\{c\}$	1	c	0	t^c $(c \in \mathbb{N})$	$+\infty$
Uniforme	$a < b \in \mathbb{N}$	$[\![a, b]\!]$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\frac{t^a - t^{b+1}}{(b-a+1)(1-t)}$	$+\infty$
Bernoulli	$p \in]0,1[$	$\{0,1\}$	p $(k=1)$	p	pq	$q + pt$	$+\infty$
Binomiale	$(n,p) \in \mathbb{N} \times]0,1[$	$[\![0, n]\!]$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq	$(q+pt)^n$	$+\infty$
Géométrique	$p \in]0,1[$	$\mathbb{N}^*$	pq^{k-1}	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-qt}$	$\frac{1}{q}$
Poisson	$\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$	$\mathbb{N}$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$	$+\infty$

Le problème du collectionneur

Exercice 31. On considère un jeu de cartes constitué de N cartes distinctes numérotées de 1 à N. Les cartes peuvent être achetées, à l'unité, dans un emballage opaque. On suppose que, lors de l'achat, chacune des cartes peut être obtenue avec équiprobabilité.

1. On note Y le nombre de cartes à acheter pour obtenir la carte numéro 1. Déterminer la loi de Y.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Y_n le nombre de cartes à acheter avant d'obtenir, pour la première fois, exactement n cartes numérotées 1. Déterminer la loi de Y_n. Cette loi est la loi *binomiale négative*.
On note $X_0 = 0$ et X_i le nombre de cartes à acheter pour obtenir exactement i cartes distinctes. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on note $T_i = X_i - X_{i-1}$.

3. Déterminer la loi de T_1.

4. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, déterminer la loi de T_i.

On note $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$ le nombre de cartes à acheter pour obtenir la collection complète des N cartes.

5. Déterminer $\mathbb{E}[T]$ et en déduire un équivalent de $\mathbb{E}[T]$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Programme officiel (PCSI)

Probabilités - B - Variables aléatoires sur un univers fini (p. 31)

Programme officiel (PSI)

Probabilités - B - Variables aléatoires discrètes (p. 21) - sauf c) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Mathématiciens

Huygens Christiaan (14 avr. 1629 à La Haye-8 juil. 1695 à La Haye).
Bernoulli Jacob (6 jan. 1655 à Basel-16 août 1705 à Basel).

KÖNIG Johann Samuel (31 juil. 1712 à Büdingen-21 août 1757 à Zuilenstein).
POISSON Siméon Denis (21 juin 1781 à Pithiviers-25 avr. 1840 à Sceaux).
CAUCHY Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).
BIENAYMÉ Irénée-Jules (28 août 1796 à Paris-19 oct. 1878 à Paris).
TCHEBYCHEV Pafnouti Lvovitch (16 mai 1821 à Borovsk-8 déc. 1894 à St Pétersbourg).
SCHWARZ Hermann (25 jan. 1843 à Hermsdorf-30 nov. 1921 à Berlin).
MARKOV Andrei Andreyevich (14 juin 1856 à Ryazan-20 juil. 1922 à St Pétersbourg).
BENFORD Frank (29 mai 1883 à Johnstown-4 déc. 1948 à Schenectady).