Théorème de Stone-Weierstrass

■ ■ ■

Le théorème de Stone-Weierstrass s'énonce ainsi. Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite (P_n) de polynômes à coefficients réels.

On suppose dans la suite que $[a,b]=[0,1]$ et que f est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)=1$. On prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash[0,1]$, $f(x)=0$.

On admettra que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, i.e.

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \eta>0\ ;\ \forall\ (x,y)\in[0,1]^2,\ (|x-y|\leqslant\eta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon)\,.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer la valeur de I_n.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction polynomiale

$$P_n(x)=\frac{1}{I_n}(1-x^2)^n.$$

2. Soit $\alpha\in]0,1[$. Montrer que la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[-1,-\alpha]\cup[\alpha,1]$ vers la fonction nulle.

Pour tout entier naturel n, on définit

$$Q_n(x)=\int_{-1}^{1}f(x+t)P_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que $(Q_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions polynomiales.

4. Montrer que $(Q_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

5. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g.

a) Montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall\ n,\ m\geqslant n_0,\ \|S_n-S_m\|_\infty\leqslant 1.$$

b) En déduire qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ telle que

$$\forall\ n\geqslant n_0,\ S_n=S_{n_0}+a_n.$$

c) Montrer que (a_n) converge et en déduire que g est une fonction polynomiale.

d) En déduire que le théorème de Weierstrass est faux si le segment est remplacé par un intervalle non borné.