

# XIII - Relations binaires

## I - Relations binaires

### Définition 1 - Relation binaire

Soit  $E$  un ensemble et  $G \subset E \times E$ . Le couple  $\mathcal{R} = (E, G)$  est une *relation binaire* sur  $E$ .

Soit  $(x, y) \in E \times E$ . Si  $(x, y) \in G$ , l'élément  $x$  est *en relation avec*  $y$ , noté  $x\mathcal{R}y$ .

L'ensemble  $G$  est le *graphe* de la relation binaire.

### Exemple 1 - Exemples de relations

- Si  $E$  est l'ensemble des élèves d'un lycée et  $G$  est l'ensemble des couples d'élèves qui sont dans une même classe. On notera alors  $x\mathcal{R}y$  si et si  $x$  et  $y$  sont dans la même classe (par ex. en 2D2).
- Si  $E$  est l'ensemble des mots et  $G$  est l'ensemble des couples de mots où le premier mot est classé avant dans l'alphabet. On note alors  $x \preceq y$  si  $x$  est avant  $y$  dans l'alphabet. Par exemple, (chat  $\preceq$  chien) ou (chien  $\preceq$  fourmi).
- Si  $E$  est l'ensemble des réels, vous connaissez les relations :
  - ★ d'égalité, noté  $x = y$ .
  - ★ d'infériorité, noté  $x \leq y$ .
  - ★ d'infériorité stricte, noté  $x < y$ .
  - ★ ...
- Si  $E$  est l'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  est *équivalente* à la matrice  $B$  s'il existe deux matrices  $P, Q$  inversibles telle que  $A = PBQ$ .
- Si  $E$  est l'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  des matrices d'ordre  $n$ . La matrice  $A$  est *semblable* à la matrice  $B$  s'il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ .
- En microéconomie, les *relations de préférence* et les rela-

*tions d'indifférences* sont des relations binaires sur l'ensemble des options disponibles dans le cadre d'une prise de décision.

### Définition 2 - Réflexivité, (Anti)symétrie, Transitivité

Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur un ensemble  $E$ . La relation  $\mathcal{R}$  est

- (i). *réflexive* si pour tout  $x \in E$ ,  $x\mathcal{R}x$ .
- (ii). *symétrique* si pour tous  $x, y \in E$ , si  $x\mathcal{R}y$ , alors  $y\mathcal{R}x$ .
- (iii). *antisymétrique* si pour tous  $x, y \in E$ , si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$ , alors  $x = y$ .
- (iv). *transitive* si pour tous  $x, y, z \in E$ , si  $[x\mathcal{R}y \text{ ET } y\mathcal{R}z]$ , alors  $x\mathcal{R}z$ .

## II - Relations d'ordre

### Définition 3 - Relation d'ordre

Une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est une *relation d'ordre* sur  $E$  si elle est réflexive, antisymétrique, transitive.

### Exemple 2 - Relations d'ordre

- Soit l'ensemble des réels muni de la relation binaire  $\leq$ .
  - ★ Pour tout  $x$  réel,  $x \leq x$  donc la relation est réflexive.
  - ★ Pour tous  $x, y$  réels, si  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , alors  $x = y$ . Ainsi, la relation est antisymétrique.
  - ★ Pour tous  $x, y, z$  réels, si  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , alors  $x \leq z$ . Ainsi, la relation est transitive.La relation *inférieur ou égal* est donc une relation d'ordre.

- La relation *être avant dans l'ordre alphabétique* est également une relation d'ordre sur l'ensemble des mots.
- Les *relations de préférence* sont également des relations d'ordre.

#### Définition 4 - Majorant, Minorant

- (i). L'élément  $x$  est un *majorant* de  $A$  si  $\forall a \in A, a \preceq x$ . La partie  $A$  est *majorée*.  
Un majorant de  $A$  est un élément qui est plus grand que tous les éléments de  $A$ .
- (ii). L'élément  $x$  est un *minorant* de  $A$  si  $\forall a \in A, x \preceq a$ . La partie  $A$  est *minorée*.  
Un minorant de  $A$  est un élément qui est plus petit que tous les éléments de  $A$ .
- (iii). Si  $A$  possède un majorant et un minorant, la partie  $A$  est *bornée*.

#### Exemple 3 - Exemples de majorants

On munit  $\mathbb{R}$  de la relation binaire  $\leq$ .

- 3, 10, 100 sont des majorants de l'ensemble  $] - \infty, 3]$ .
- 1,  $\sqrt{2}$ , 12 sont des majorants de l'ensemble  $] - 1, 1[$ .

#### Définition 5 - Plus grand / petit élément

- (i). L'élément  $x$  est le *plus grand élément* de  $A$  si

$$\forall a \in A, a \preceq x \text{ ET } x \in A.$$

S'il existe, le plus grand élément de  $A$  est l'unique élément qui est plus grand que tous les éléments de  $A$  et qui appartient à  $A$ .

- (ii). L'élément  $x$  est le *plus petit élément* de  $A$  si

$$\forall a \in A, x \preceq a \text{ ET } x \in A.$$

S'il existe, le plus petit élément de  $A$  est l'unique élément qui est plus petit que tous les éléments de  $A$  et qui appartient à  $A$ .

#### Exemple 4 - Exemples de plus petits/grands éléments

- Si  $\mathbb{R}$  est muni de la relation d'ordre  $\leq$ .
  - ★  $-1$  est le plus petit élément de  $[-1, 100]$ .
  - ★  $3$  est le plus petit élément de  $[3, \sqrt{13}]$ .
  - ★  $] - \infty, \sqrt{2}]$  ne possède pas de plus petit élément (il ne possède pas de minorant).
  - ★  $] - 1, 1]$  ne possède pas de plus petit élément (aucun des minorants de  $] - 1, 1]$  n'appartient à  $] - 1, 1]$ ).
- Le mot  $a$  est le premier mot du dictionnaire. C'est le plus petit élément pour l'ordre alphabétique.  
Il n'y a pas de plus grand élément car, par exemple, le mot  $zzzzzz$  est plus petit que le mot  $zzzzzzz$ .

### III - Relations d'équivalence

#### Définition 6 - Relation d'équivalence

Une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est une *relation d'équivalence* sur  $E$  si elle est réflexive, symétrique et transitive.

#### Exemple 5 - Relations d'équivalence

- La relation *être dans la même classe* est une relation d'équivalence sur l'ensemble des élèves.
  - ★ Un élève est dans la même classe que lui-même. Donc la relation est réflexive.
  - ★ Si *Alice* est dans la même classe que *Bob*, alors *Bob* est dans la même classe qu'*Alice*. Donc la relation est symétrique.
  - ★ Si *Alice* est dans la même classe que *Bob* et *Bob* est

dans la même classe que *Claire*, alors *Alice* est dans la même classe que *Claire*. Donc la relation est transitive.

- La relation *être équivalente* est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . En effet, pour  $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,
  - ★  $A = I_n A I_p$  et  $I_n, I_p$  sont inversibles donc  $A$  est équivalente à  $A$ . La relation est réflexive.
  - ★ Si  $A$  est équivalente à  $B$ , il existe  $P, Q$  inversibles telles que  $A = PBQ$ . Alors,  $B = P^{-1} A Q^{-1}$ . Comme  $P^{-1}$  et  $Q^{-1}$  sont inversibles, alors  $B$  est équivalente à  $A$ . La relation est donc symétrique.
  - ★ Si  $A$  est équivalente à  $B$  et  $B$  est équivalente à  $C$ , il existe  $P, Q, R, S$  inversibles telles que  $A = PBQ$  et  $B = RCS$ . Alors,  $A = PRCSQ$ . Comme  $PR$  et  $SQ$  sont inversibles, alors  $A$  est équivalente à  $C$ . La relation est donc transitive.
- La relation *être semblable* est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . En effet, pour  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,
  - ★  $A = I_n A I_n$  et  $I_n$  est inversible donc  $A$  est semblable à  $A$ . La relation est réflexive.
  - ★ Si  $A$  est semblable à  $B$ , il existe  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ . Alors,  $B = P^{-1}AP$ . Comme  $Q = P^{-1}$  est inversible et  $B = QAQ^{-1}$ , alors  $B$  est semblable à  $A$ . La relation est donc symétrique.
  - ★ Si  $A$  est semblable à  $B$  et  $B$  est semblable à  $C$ , il existe  $P, Q$  inversibles telles que  $A = PBP^{-1}$  et  $B = QCQ^{-1}$ . Alors,  $A = (PQ)C(PQ)^{-1}$  et  $A$  est semblable à  $C$ . La relation est donc transitive.
- La relation *d'indifférence* est une relation d'équivalence.

### Définition 7 - Classe d'équivalence

Soient  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$  et  $x \in E$ . La *classe d'équivalence* de l'élément  $x$ , notée  $\bar{x}$  ou  $\text{cl}(x)$ , est l'ensemble  $\{y \in E ; x\mathcal{R}y\}$ .

### Exemple 6 - Classe d'équivalence

- Si *Alice* est une élève, la classe d'équivalence d'Alice est l'ensemble des élèves qui sont dans la même classe qu'Alice.
- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $A = \lambda I_n$ . La matrice  $B$  est semblable à  $A$  s'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $B = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda I_n$ . Ainsi, la classe d'équivalence de  $A$  est réduite à  $A$  elle-même.

### Théorème 1 - Partition

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$ . L'ensemble des classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  forme une partition de  $E$ .

### Exemple 7

Les classes d'un lycée forment une partition de l'ensemble des élèves :

- deux classes distinctes n'ont aucun élève en commun. Autrement dit, deux classes distinctes sont disjointes.
- tout élève appartient à une classe. Autrement dit, la réunion des classes est égale à l'ensemble des élèves.