T.D. I - Études de fonctions

I - Inégalités

Solution de l'exercice 1. Comme $\frac{1}{n} \geqslant 0$, alors

$$n+1 \leqslant n+1+\frac{1}{n}.$$

Comme la fonction inverse est décroissante,

$$\frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

$\square$

Solution de l'exercice 2. D'après les hypothèses,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 1 \\ 1 &\leqslant 1+x \leqslant 2. \end{aligned}$$

Comme la fonction logarithme est croissante,

$$\ln(1) = 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln(2).$$

Comme $x \geqslant 0$, alors $x^n \geqslant 0$ et

$$0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n \ln(2).$$

$\square$

II - Étude de trinômes

Solution de l'exercice 3. Le discriminant du trinôme x^2+x+1 vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$. Ainsi, le discriminant est strictement négatif et le trinôme est toujours du signe de son coefficient de plus haut degré, soit

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\, x^2+x+1 \geqslant 0.$$

$\square$

Solution de l'exercice 4. Comme un carré est toujours positif, $h(x)$ est du signe de x^2-x+1.
Le discriminant de x^2-x+1 vaut $(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Ainsi, le discriminant est strictement négatif et le trinôme est toujours du signe de son coefficient de plus haut degré, soit

$$\forall\, x > 0,\, x^2-x+1 \geqslant 0.$$

Finalement,

$$\forall\, x > 0,\, h(x) \geqslant 0.$$

$\square$

Solution de l'exercice 5. Comme un carré est toujours positif, $f(x)$ est du signe de $-2x^2-2x+1$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 4+8 = 12$. Ainsi, ses racines sont

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{2+2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

D'après les propriétés sur les signes des trinômes, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\square$

III - Étude de signes

Solution de l'exercice 6.

$$\begin{aligned} & 1-\ln(x) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(x) \leqslant 1 \\ \Leftrightarrow\ & x \leqslant \mathrm{e} \end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est croissante.
On obtient ainsi le tableau de signes suivant :

x	0		e		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	

□

Solution de l'exercice 7. Comme un carré est toujours positif, $g(x)$ est du signe de $x+2$. On obtient ainsi le tableau de signe suivant :

x	-1		-2		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

□

Solution de l'exercice 8. Comme $x \geqslant 1$, alors $x^3 \geqslant 0$. Ainsi, $g(x)$ est du signe de $-3+2\ln(x)$. Or,

$$\begin{aligned} & -3+2\ln(x) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\ln(x) \geqslant 3 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(x) \geqslant \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x \geqslant \mathrm{e}^{3/2}, \end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est croissante.
On obtient ainsi le tableau de signes suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{3/2}$		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

□

Solution de l'exercice 9. Comme exponentielle est à valeurs positives, alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3} \geqslant 0.$$

Ainsi, $f(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 1$. Or,

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

car la fonction logarithme est croissante.
On obtient ainsi le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

□

Solution de l'exercice 10. Si $t<0$, alors $f(t)=0$.
Comme $t \geqslant 0$, alors

$$\begin{aligned} & \frac{t}{2} \leqslant t \\ \Leftrightarrow\ & -t \leqslant -\frac{t}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t/2}, \quad \text{car l'exponentielle est croissante} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{t/2} - \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est à valeurs positives. □

IV - Calculs de dérivées

Solution de l'exercice 11. La dérivée de $\ln(u(x))$ est $\frac{u'(x)}{u(x)}$. Ici, $u(x)=1+\mathrm{e}^x$ donc $u'(x)=\mathrm{e}^x$. Ainsi,

$$h'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. La fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = 1 + \mathrm{e}^x$. Ainsi, $u'(x) = \mathrm{e}^x$, $v'(x) = \mathrm{e}^x$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}. \end{aligned}$$

2. Comme la fonction exponentielle est à valeurs positives, alors $f'(x)$ est toujours positive et f est donc strictement croissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

3. D'après la définition, l'équation de la tangente est donnée par :

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= \frac{\mathrm{e}^0}{(1+\mathrm{e}^0)^2}x + \frac{\mathrm{e}^0}{1+\mathrm{e}^0} \\ &= \frac{x}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. En posant $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = (1+\mathrm{e}^x)^2$, la fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$. De plus, $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 2\,\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x \cdot (1+\mathrm{e}^x)^2 - \mathrm{e}^x\, 2\,\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^4} \\ &= \mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)\frac{1+\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^4} \\ &= \mathrm{e}^x\,\frac{1-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 13.

1. La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

Les racines du trinôme f' sont donc 0 et 2.
De plus, $f(0) = -\frac{9}{4}$ et

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 3 \times 2^2 - \frac{9}{4} = 8 - 12 - \frac{9}{4} \\ &= \frac{32 - 48 - 9}{4} = -\frac{25}{4}. \end{aligned}$$

Enfin, comme la limite en l'infini du polynôme f est identique à celle de son terme de plus haut degré x^3, alors

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\frac{25}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après le tableau de variations, f est toujours négative sur $]-\infty, 2]$. Ensuite, f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[2, +\infty[$ dans $[f(2), +\infty[$. Comme $0 \in [f(2), +\infty[$, il existe un unique réel λ tel que $f(\lambda) = 0$. □

Solution de l'exercice 14.

1. La fonction f est de la forme $\ln(u)$ où $u(x) = x^2 + x + 1$. Ainsi, $u'(x) = 2x + 1$. On obtient ainsi,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

2. La fonction f' est de la forme $\frac{u}{v}$ où $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x^2+x+1$. Ainsi, $u'(x) = 2$, $v'(x) = 2x+1$ et

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{2x^2+2x+2-4x^2-4x-1}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 15.

1. La fonction f est de la forme uv où $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1+x)$. Comme $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{1+x}$, alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \ln(1+x) + x\frac{1}{1+x}.$$

2. La fonction $g(x) = \frac{x}{1+x}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ où $u(x) = x$ et $v(x) = 1+x$. Ainsi,

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Finalement,

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{2+x}{(1+x)^2}.$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$. Comme $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$, alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)}{x^2} \qquad = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.
\end{aligned}$$

2. D'après la définition, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\mathrm{e}^{3/2}$ a pour équation

$$\begin{aligned}
y &= f'\left(\mathrm{e}^{3/2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\mathrm{e}^{3/2}\right) \\
&= \frac{1-\ln \mathrm{e}^{3/2}}{\left(\mathrm{e}^{3/2}\right)^2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{\ln \mathrm{e}^{3/2}}{\mathrm{e}^{3/2}} \\
&= \frac{1-\frac{3}{2}}{\mathrm{e}^3}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{\frac{3}{2}}{\mathrm{e}^{3/2}} \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{-3}}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3/2}
\end{aligned}$$

3. La fonction f' est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 1-\ln(x)$ et $v(x) = x^2$. Comme $u'(x) = -\frac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$, alors

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln(x))2x}{x^4} \\
&= \frac{-x - 2x(1-\ln(x))}{x^4} \\
&= -\frac{1+2(1-\ln(x))}{x^3} \\
&= -\frac{1+2-2\ln(x)}{x^3} \\
&= -\frac{3-2\ln(x)}{x^3}.
\end{aligned}$$

□

V - Calculs de limites

Solution de l'exercice 17.

1. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, d'après les opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0}{1+0} = 0.$$

2. En factorisant le dénominateur par e^x, qui est une quantité non nulle,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1\right)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'après les opérations sur les limites, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1+0} = 1$. □

Solution de l'exercice 18.

1. Comme f est une fraction rationnelle, elle se comporte comme le rapport des termes de plus haut degré. De plus, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+.$$

2. Comme f est une fraction rationnelle, elle se comporte comme le rapport des termes de plus haut degré. De plus, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-.$$

□

Solution de l'exercice 19.

1. En utilisant les règles de factorisation,

$$h(x) = \frac{1}{x}\left(x^2 - x\ln(x) - 1\right).$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x\to0} x\ln(x) = 0$. D'après les opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to0^+} x^2 - x\ln(x) - 1 = 0 - 0 - 1 = -1.$$

Comme $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, alors

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = -\infty.$$

2. En utilisant les règles de factorisation,

$$h(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. D'après les opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2} = 1 - 0 - 0 = 1.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

□

Solution de l'exercice 20.

1. D'après les propriétés du logarithme,

$$g(1) = 1 - \ln(1) = 1.$$

2. Comme $\lim_{x\to0} x = 0$ et $\lim_{x\to0} \ln(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x\to0} g(x) = +\infty.$$

3. En factorisant par x,

$$g(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right).$$

D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1$. Finalement,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

□

Solution de l'exercice 21.

1. Comme un polynôme se comporte en l'infini comme son terme de plus haut degré,

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Comme un polynôme se comporte en l'infini comme son terme de plus haut degré,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 + x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

□

VI - Limites à droite / à gauche

Solution de l'exercice 22.

1. Si $t < 0$, alors $f(t) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{t\to0^-} f(t) = \lim_{t\to0^-} 0 = 0.$$

Si $t \in [0, 1]$, alors $f(t) = nt^{n-1}$. Ainsi,

$$\lim_{t\to0^+} f(t) = \lim_{t\to0^+} nt^{n-1} = 0.$$

La fonction f est donc continue en 0.

2. Si $t > 1$, alors $f(t) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{t\to1^+} f(t) = \lim_{t\to1^+} 0 = 0.$$

Si $t \in [0, 1]$, alors $f(t) = nt^{n-1}$. Ainsi,

$$\lim_{t\to1^-} f(t) = \lim_{t\to1^-} nt^{n-1} = n.$$

Comme $n \neq 0$, la fonction n'est pas continue en 1.

□

Solution de l'exercice 23. Si $x < 0$, alors $f(x) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 0 = 0.$$

Si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Ainsi,

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{x+1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

La fonction f est donc continue en 0. □

Solution de l'exercice 24. Comme f est constante sur $]-\infty, 1[$, alors f est continue sur $]-\infty, 1[$.
D'après les théorèmes usuels, f est continue sur $[1, +\infty[$.
De plus, si $x < 1$, alors $f(x) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} 0 = 0.$$

Si $x \geqslant 1$, alors $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$. Ainsi,

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0.$$

Ainsi, f est continue en 1.
Finalement, f est bien continue sur $\mathbb{R}$. □

Solution de l'exercice 25. La fonction f est constante donc continue sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$. D'après les propiétés des fonctions usuelles, la fonction f est continue sur $[0, 1]$. Étudions la continuité en 0 et en 1.

$*$ Si $t < 0$, alors $f(t) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{t\to0^-} f(t) = \lim_{t\to0^-} 0 = 0.$$

Si $t \in [0, 1]$, alors $f(t) = \frac{kt}{1+t}$. Ainsi,

$$\lim_{t\to0^+} f(t) = \lim_{t\to0^+} \frac{kt}{1+t} = k\frac{0}{1+0} = 0.$$

Ainsi, f est continue en 0.

$*$ Si $t \geqslant 1$, alors $f(t) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{t\to 1^+} f(t) = \lim_{t\to 1^+} 0 = 0.$$

Si $t \in [0,1]$, alors $f(t) = \frac{kt}{1+t}$. Ainsi,

$$\lim_{t\to 1^-} f(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{kt}{1+t} = k\frac{1}{1+1} = \frac{k}{2}.$$

Comme $k \neq 0$, alors f n'est pas continue en 1.

Finalement, f est continue en tout point de $\mathbb{R}$ différent de 1. $\square$