

# T.D. XI - Fonctions de plusieurs variables

## I - Extremums libres

### Solution de l'exercice 1.

1.  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 2y - x \end{pmatrix}$ . Ainsi, le seul point critique est  $(0, 0)$ .

La hessienne de  $f$  vaut  $H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Comme  $2^2 - (-1)^2 > 0$  et  $2 > 0$ , d'après le résultat de Monge,  $f$  atteint un minimum local en  $(0, 0)$ .

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et pour tout  $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} (h_1 \ h_2) H(f)(x, y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= 2h_1^2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 = 2 \left( h_1 - \frac{h_2}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}h_2^2 + 2h_2^2 \\ &= 2 \left( h_1 - \frac{h_2}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}h_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $f$  est convexe et le minimum est un minimum global.

2.  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 8xy + 6x^2 - 4y + 2 \\ 4x^2 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

\* Soit  $x = 0$  et  $y = 1/2$ .

\* Soit  $x = 1$  et  $y = -2$ .

De plus,

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 8y + 12x & 8x - 4 \\ 8x - 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

\* En  $(0, 1/2)$ ,  $rt - s^2 = -16 < 0$ . Ainsi,  $(0, 1/2)$  est un point selle.

\* En  $(1, -2)$ ,  $rt - s^2 = -16 < 0$ . Ainsi,  $(1, -2)$  est un point selle.

3.  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6x \\ -3y^2 - 6y \end{pmatrix}$ . Ainsi,  $(x, y)$  est un point critique si et seulement si  $\begin{cases} x(x+2) = 0 \\ y(y+2) = 0 \end{cases}$ .

On obtient ainsi 4 points critiques de coordonnées :  $(0, 0)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(-2, -2)$ .

De plus, la hessienne de  $f$  vaut

$$H(f)(x, y) = 6 \begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & -y-1 \end{pmatrix}.$$

\* Si  $(x, y) = (0, 0)$ , la hessienne est vaut  $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ . Les notations de Monge montrent que  $f$  atteint un point selle en  $(0, 0)$ .

\* Si  $(x, y) = (-2, -2)$ , la hessienne vaut  $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ . Les notations de Monge montrent que  $f$  atteint un point selle en  $(-2, -2)$ .

\* Si  $(x, y) = (0, -2)$ , la hessienne vaut  $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ . Comme  $rt - s^2 > 0$  et  $r > 0$ , les notations de Monge assurent que  $f$  atteint un minimum local en  $(0, -2)$ .

\* Si  $(x, y) = (-2, 0)$ , la hessienne vaut  $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ .

Comme  $rt - s^2 > 0$  et  $r < 0$ , les notations de Monge assurent que  $f$  atteint un maximum local en  $(-2, 0)$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = +\infty$ , alors  $f$  n'admet pas de maximum global.

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = -\infty$ , alors  $f$  n'admet pas de minimum global.

□

### Solution de l'exercice 2.

1.  $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2z \\ 2 - 6y \\ 2x - 6z \end{pmatrix}$ . Ainsi, le seul point critique est  $a_\star = (0, 1/3, 0)$ .

De plus,  $H(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$\begin{aligned} q_{(x,y,z)}(f)(h) &= h^T H(f)(x, y, z) h \\ &= 4h_1 h_3 - 6h_2^2 - 6h_3^2 \\ &= -6 \left( h_3 - \frac{2}{3} h_1 h_3 \right) - 6h_2^2 \\ &= -6 \left( h_3 - \frac{1}{3} h_1 \right)^2 + \frac{2}{3} h_1^2 - 6h_2^2. \end{aligned}$$

Comme  $q_{a_*}(h, 0, h/3) > 0$  et  $q_{a_*}(0, h, 0) < 0$ , alors  $f$  n'atteint pas d'extremum en  $a_*$ .

**2.** Le gradient vaut  $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z - yz \\ x + z - xz \\ y + x - xy \end{pmatrix}$ .

Soit  $(x, y, z)$  un point critique. Si  $z = 1$ , la première équation donne  $1 = 0$ , ce qui est impossible. Ainsi,  $z \neq 1$  et

$$\begin{cases} y &= -\frac{z}{1-z} \\ x &= -\frac{z}{1-z} \\ -2\frac{z}{1-z} - \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y &= -\frac{z}{1-z} \\ x &= -\frac{z}{1-z} \\ -\frac{z}{1-z} \left(2 + \frac{z}{1-z}\right) &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, si  $z = 0$ , alors  $x = y = 0$ . Sinon,  $2 + \frac{z}{1-z} = 0$ , soit  $z = 2$  et alors  $x = y = 2$ . Il y a donc deux points critiques :  $(0, 0, 0)$  et  $(2, 2, 2)$ .

La hessienne de  $f$  vaut

$$H(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1-z & 1-y \\ 1-z & 0 & 1-x \\ 1-y & 1-x & 0 \end{pmatrix}.$$

\* Si  $a_* = (0, 0, 0)$ , alors  $H(f)(a_*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ainsi,

$$q_{a_*}(h) = 2(h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3).$$

$$\star q_{a_*}(h, h, 0) = 2h^2 > 0.$$

$$\star q_{a_*}(-h, h, 0) = -2h^2 < 0.$$

Ainsi,  $f$  ne présente pas d'extremum en  $(0, 0, 0)$ .

\* Si  $a_* = (2, 2, 2)$ . Alors  $H(f)(a_*) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . On conclut

comme précédemment. □

### Solution de l'exercice 3.

**1. a)**  $(x, y)$  est un point critique de  $f$  si et seulement si

$$\begin{cases} 2x - 6 &= 0 \\ 2y - 14 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 3 \\ y &= 7 \end{cases}.$$

Ainsi,  $M(3, 7)$  est l'unique point critique de  $f$ .

**b)** Comme  $H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , alors  $rt - s^2 > 0$  et  $r > 0$ . Ainsi, la fonction  $f$  admet un minimum local en  $(3, 7)$ .

**2. a)** Soit  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$  non nul. Alors,

$$q_{(x,y)}(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 2h_2^2 > 0.$$

Ainsi,  $f$  est strictement convexe sur  $\mathbb{R}^2$ .

**b)** Comme  $f$  est strictement convexe et  $(3, 7)$  est un point critique de  $f$ , alors  $f$  atteint un minimum global en  $(3, 7)$ .

**3. a)** D'après la définition de la distance,

$$\|(x, y) - (3, 7)\|^2 = (x - 3)^2 + (y - 7)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 14y + 58.$$

**b)** D'après la question précédente,  $f(x, y) \geq 0$ . De plus,  $f(x, y) = 0$  si et seulement si  $(x, y) = (3, 7)$ . On obtient bien que  $(3, 7)$  est un minimum global de  $f$ . □

### Solution de l'exercice 4.

**1.** D'après la définition  $(x, y)$  est un point critique de  $f$  si et seulement si

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique point critique de  $f$  est  $(0, 0)$ .

2. D'après la définition,

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme  $H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , en utilisant les notations de Monge,  $rt - s^2 = 0$  et on ne peut donc pas conclure.

3. Comme

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^4 + y^2 - 0 \geq 0,$$

alors  $f$  atteint un minimum global en  $(0, 0)$ .  $\square$

## II - Extremums sous contraintes

### Solution de l'exercice 5.

1. On se ramène à l'étude de  $\varphi : x \mapsto (x + 1) \ln(x + 1)$ . Comme  $\varphi'(x) = \ln(x + 1) + 1$ , alors  $\varphi$  est décroissante sur  $] -1, e^{-1} - 1]$  puis croissante sur  $[e^{-1} - 1, +\infty[$ .

Le minimum de  $f$  sous contrainte est donc atteint en  $(e^{-1} - 1, e^{-1})$ .

2. On se ramène à l'étude de  $\varphi : x \mapsto 2x e^x$ . Comme  $\varphi'(x) = 2(x + 1) e^x$ , alors  $\varphi$  est décroissante sur  $] -\infty, -1]$  puis croissante sur  $[-1, +\infty[$ .

Le minimum de  $f$  sous contrainte est donc atteint en  $(-1, -1)$ .

3. Comme  $x^2 = \frac{3-y^2}{2}$ , on se ramène à l'étude de  $\varphi : y \mapsto \frac{3-y^2}{2} y$  où  $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ . Comme  $\varphi'(x) = 3\frac{1-y^2}{2}$ , alors  $\varphi$  est décroissante sur  $[-\sqrt{3}, -1]$ , croissante sur  $[-1, 1]$  puis décroissante sur  $[1, \sqrt{3}]$ .

De plus,  $\varphi(1) = 1$  et  $\varphi(-1) = -1$ .

Comme  $\varphi(-\sqrt{3}) = \varphi(\sqrt{3}) = 0$ ,  $\varphi$  ne possède pas d'extremum global en  $-\sqrt{3}$  et  $\sqrt{3}$ .

Le minimum de  $f$  sous contrainte est donc atteint en  $(1, -1)$  et  $(-1, -1)$ .

Le maximum de  $f$  sous contrainte est donc atteint en  $(1, 1)$  et  $(-1, 1)$ .

L'étude précédente de recherche des points critiques n'est valable que sur l'ouvert  $] -\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ . Pour conclure l'étude, nous devons étudier le comportement de la fonction aux voisinages de  $-\sqrt{3}$  et de  $\sqrt{3}$ .

On remarque que si  $(x, y)$  est proche de  $(0, \sqrt{3})$ , alors

$$f(x, y) = x^2 y \geq 0 = f(0, \sqrt{3})$$

donc  $f$  atteint un minimum local en  $(0, \sqrt{3})$ .

Enfin, si  $(x, y)$  est proche de  $(0, -\sqrt{3})$ , alors

$$f(x, y) = x^2 y \leq 0 = f(0, -\sqrt{3})$$

donc  $f$  atteint un maximum local en  $(0, -\sqrt{3})$ .  $\square$

### Solution de l'exercice 6.

1. Contrainte de qualification : La jacobienne  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est de rang 2 car ses deux premières colonnes sont linéairement indépendantes. Condition du premier ordre : il existe  $x, y, z, t, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2z - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2t + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x + y + z - t = 3 \\ 2x - y + z + t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ t = -2 \\ \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Comme la hessienne réduite du lagrangien est  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , alors

$h^T \tilde{H} h = 2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2) > 0$  pour tout vecteur  $h$  non nul et  $f$  atteint sous contrainte un minimum en  $(-1, 2, 0, -2)$ .

2. Contrainte de qualification : la jacobienne  $(2x \ 2y)$  est de rang 1 sauf en  $(0, 0)$  qui n'appartient pas au domaine étudié.

Condition du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} - 2\lambda x = 0 \\ -\frac{1}{x-y} - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi,  $2\lambda(x + y) = 0$ .

- \* Si  $\lambda = 0$ , alors  $\frac{1}{x-y} = 0$ , ce qui est impossible.
- \* Si  $x = -y$ , comme  $x^2 + y^2 = 2$ , alors  $x^2 \in \{-1, 1\}$ . On obtient ainsi les points  $(-1, 1)$  et  $(1, -1)$ . Comme  $-1 - 1 = -2 < 0$ , alors  $f$  n'est pas définie en  $(-1, 1)$ .  
Ainsi, le seul point à étudier est le point  $(1, -1)$  avec  $\lambda = \frac{1}{2x(x-y)} = \frac{1}{4}$ . La hessienne réduite du lagrangien vaut

$$\overline{H}(\mathcal{L})(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x-y)^2} - 2\lambda & \frac{1}{(x-y)^2} \\ \frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-y)^2} - 2\lambda \end{pmatrix}.$$

En  $a_\star = (1, -1)$ . Alors,

$$\overline{H}_\star = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } J_\star = \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}$$

soit  $\text{Ker } J_\star = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Ainsi, pour  $h = h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  non nul,

$$h^T \overline{H}_\star h = \frac{h^2}{4}(-4) = -h^2 < 0.$$

Ainsi,  $f$  atteint un maximum local sous contrainte en  $(1, -1)$ .  $\square$

### Solution de l'exercice 7.

1.  $P(x, y) = x + 3y - C(x, y)$ . La hessienne vaut  $\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$ . Comme  $q_a(P)(h) = -10h_1^2 + 4h_1h_2 - 10h_2^2 = -10(h_1 - \frac{1}{5}h_2)^2 - \frac{48}{5}h_2^2 \leq 0$ , le profit est une fonction concave.

2. L'entreprise peut fabriquer 20 jouets par jour, soit la condition  $x + y = 20$ .

Condition de qualification : la jacobienne  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$  est de rang 1.

Conditions du premier ordre :

$$\begin{cases} -10x + 2y + 3 - \lambda = 0 \\ -10y + 2x + 3 - \lambda = 0 \\ x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \\ \lambda = -77 \end{cases}$$

Comme la contrainte est linéaire, la hessienne réduite du lagrangien vaut  $\overline{H}(\mathcal{L}) = H(P)$ . Comme  $P$  est concave, alors  $P$  atteint un maximum sous contrainte en  $(10, 10)$ .

Ainsi, le profit sera maximal en produisant 10 camions et 10 voitures par jour.  $\square$

### Solution de l'exercice 8.

1. Comme  $U_1, U_2$  et  $U_3$  sont sans biais, d'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[T_1] = \frac{c + c + c}{3} = c,$$

$$\mathbf{E}[T_2] = c,$$

$$\mathbf{E}[T_3] = \frac{3c + c + c}{5} = c.$$

Ainsi,  $T_1, T_2$  et  $T_3$  sont sans biais.

2. D'après les hypothèses, en notant  $\sigma_1^2$  la variance de l'estimateur  $U_1$ , alors  $\sigma_2^2 = 4\sigma_1^2$  et  $\sigma_3^2 = 9\sigma_1^2$ . Comme les estimateurs sont indépendants,

$$\mathbf{V}(T_1) = \frac{\sigma_1^2 + 4\sigma_1^2 + 9\sigma_1^2}{9} = \frac{14}{9}\sigma_1^2,$$

$$\mathbf{V}(T_2) = \sigma_1^2,$$

$$\mathbf{V}(T_3) = \frac{9 + 4 + 9}{25}\sigma_1^2 = \frac{22}{25}\sigma_1^2.$$

Comme  $\frac{22}{25} < 1 < \frac{14}{9}$ , c'est le troisième estimateur qui est le meilleur.

3. D'une part,  $\mathbf{E}[T] = (\alpha + \beta + \gamma)c$ . Comme le coût moyen est non nul (sinon le coût, quantité positive, serait nul et on n'aurait pas besoin de cabinets d'étude pour s'en apercevoir...) et  $T$  est sans biais, alors  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

D'autre part, en utilisant l'indépendance des estimateurs,

$$\mathbf{V}(T) = (\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2)\sigma_1^2.$$

On cherche donc à minimiser  $f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2$  sous la contrainte  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

Condition de qualification : la jacobienne vaut

$$J(g)(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est bien de rang 1.

Conditions du premier ordre : il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} 2\alpha - \lambda = 0 \\ 8\beta - \lambda = 0 \\ 18\gamma - \lambda = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \lambda = 0 \\ 8\beta - \lambda = 0 \\ 18\gamma - \lambda = 0 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{18}\right)\lambda = 1 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4 - \left(\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{8}L_2 + \frac{1}{18}L_3\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{36}{49} \\ \beta = \frac{9}{49} \\ \gamma = \frac{4}{49} \\ \lambda = \frac{72}{49} \end{cases}$$

La hessienne de  $f$  est égale à  $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$  et pour tout vecteur  $h$

non nul,  $h^T H h = 2(h_1^2 + 4h_2^2 + 9h_3^2) > 0$ .

Ainsi,  $f$  est convexe et la contrainte est linéaire donc  $f$  atteint un minimum sous contrainte en  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

L'estimateur linéaire sans biais de variance minimale est donc :

$$T = \frac{36U_1 + 9U_2 + 4U_3}{49}.$$

□

### Solution de l'exercice 9.

1. La condition de qualification est triviale car la jacobienne est une matrice ne contenant que des 1.

Les premières conditions de premier ordre donnent  $x_i = \frac{\lambda}{2}$ . Or,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , donc  $\lambda = \frac{2}{n}$ . Ainsi,  $x_i = \frac{1}{n}$ .

Comme  $f$  est convexe et la contrainte est linéaire,  $f$  atteint un minimum.

2. L'estimateur  $T$  est de la forme  $\sum_{i=1}^n x_i X_i$ . Comme  $T$  est sans biais,

alors  $\sum_{i=1}^n x_i \lambda = \lambda$  soit  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ .

Comme les variables sont indépendantes,  $\mathbf{V}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i^2$ . Ainsi, déterminer l'estimateur de variance minimale revient à optimiser  $\sum_{i=1}^n x_i^2$  sous

la contrainte  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ .

D'après la question précédente, l'estimateur recherché est donc  $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . C'est l'estimateur usuel de la moyenne empirique. □

### Solution de l'exercice 10.

1. Comme  $x^3 = y^2$ , alors  $x$  est à valeurs positives. Ainsi, le minimum de  $f$  est atteint pour  $x = 0$  et vaut 0.

2. Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda x^2 = 0 \\ -2\lambda y = 0 \\ x^3 - y^2 = 0 \end{cases}$$

En utilisant la seconde équation,

\* soit  $y = 0$  et  $x = 0$  et la première équation est impossible.

\* soit  $\lambda = 0$  et la première équation est impossible.

Ainsi, les conditions du premier ordre ne permettent pas d'obtenir une solution.

3. Il n'y a pas de solution aux conditions du premier ordre et pourtant le problème d'optimisation admet une solution.

On constate que la jacobienne vaut  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$  au point  $(0, 0)$ . La condition de qualification n'est pas satisfaite et le théorème ne s'applique pas. □