Stanislas
Exercices

Séries entières

Chapitre X

PSI
2021-2022

■ ■ ■

I. Séries entières

I.1 Rayons de convergence, Calculs de sommes

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence et, lorsqu'elle s'exprime simplement, la somme des séries entières de coefficients :

1. $n2^{-n}$.

2. $\frac{1}{(2n)!}$.

3. $\frac{1}{n(n+1)}$, $n \geqslant 1$.

4. $\frac{n^2+4n-1}{n+4} \cdot \frac{1}{n!}$.

5. $\frac{\sin n}{n}$, $n \geqslant 1$.

6. $\left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right)^{n^2}$, $n \geqslant 2$.

7. $\ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$, $n \geqslant 1$.

Exercice 2. Déterminer les rayons de convergence des séries entières :

1. $\sum \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$.

2. $\sum 3^n x^{2n}$.

3. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2} x^{2n}$.

4. $\sum \binom{2n}{n} x^{2n}$.

Exercice 3. Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier naturel non nul n. Déterminer le rayon de convergence de $\sum d(n) z^n$.

Exercice 4. [Mines] Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $(3 + (-1)^n)^n x^n$.

Exercice 5. Montrer que, pour tout t réel, $\cosh(t) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$.

Exercice 6. Soit α un réel tel que $t \mapsto (\arcsin t)^\alpha$ soit intégrable sur $]0,1]$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{1/n} (\arcsin(t))^\alpha \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\left| I_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} \right| \leqslant \frac{M}{n^{\alpha+3}}$.

2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum I_n(\alpha) x^n$ et étudier son comportement aux bornes.

Exercice 7. (✍) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer le rayon de convergence, puis calculer la somme de $\sum u_n z^n$.

Exercice 8. [Centrale] Soit la fonction définie par la série entière

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière. Déterminer le rayon de convergence R de cette série f.

2. Étudier la convergence de la série en $-R$ et en R.

3. Étudier $\lim\limits_{x\to R^-} f(x)$ puis la limite de $x \mapsto (R-x)f(x)$ en R^-.

Exercice 9. [Mines] On pose $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de g.

2. Déterminer la limite puis un équivalent simple de g aux bornes de son intervalle ouvert de convergence.

I.2 Équations différentielles

Exercice 10. (Telephone numbers) [Mines] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$. Déterminer f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

Exercice 11. Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Déterminer la nature puis la somme de la série entière $\sum u_n \frac{x^n}{n!}$. On utilisera une équation différentielle satisfaite par la série entière.

Exercice 12. On considère l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$.

1. Déterminer les solutions développables en séries entières au voisinage de 0.

2. En donner une expression à l'aide des fonctions élémentaires.

Exercice 13. Déterminer les solutions développables en séries entières de $4xy'' + 2y' - y = 0$.

I.3 Développements en série entière

Exercice 14. Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes :

1. $\ln\left(\frac{8-x^3}{2-x}\right)$.

2. $(1+x^2)\arctan(x)$.

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1+x\sin^2(t))\,\mathrm{d}t$.

4. $\sin(\alpha\arcsin(x))$.

Exercice 15. [Centrale] Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(ax)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et donner l'expression de $f^{(n)}$.

2. Montrer que f n'est pas développable en série entière si $|a| > 1$ et si $f(0)$ est non nul.

3. Montrer que f est développable en série entière si $|a| \leqslant 1$. Que dire plus particulièrement lorsque $|a| = 1$?

Exercice 16. [Mines] Soit q un réel tel que $|q| < 1$.

1. Trouver les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1+qx)f(qx)$.

2. Montrer que ces fonctions sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$.

II. Dénombrement & Probabilités

Exercice 17. (Nombre de dérangements) [Mines] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ sans point fixe. On pose $D_0 = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{D_k}{k!} x^k$ est au moins égal à 1.

3. Déterminer D_n.

Exercice 18.

1. On définit sur $\mathbb{C}$ la fonction $f(z) = \frac{1}{6}\sum\limits_{k=1}^{6} z^k$. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $\delta_n = \sum\limits_{k=1}^{4} f(\omega^k)^n$.

a) Pour tout entier $j \in [\![1,4]\!]$, déterminer $f(\omega^j)$.

b) Montrer que, s'il existe un entier k tel que $n = 5k$, alors $\delta_n = \frac{4}{6^n}$.

c) Déterminer la valeur de δ_n lorsque n n'est pas un multiple de 5.

Soit n un entier naturel non nul. On lance successivement n fois un dé équilibré. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k le numéro de la face obtenue au k-ème lancer et S_n la somme des n faces ainsi obtenues, i.e. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Pour tout entier naturel k appartenant à $S_n(\Omega)$, on note $p_k = \mathbb{P}(S_n = k)$ et q_n la probabilité que S_n soit un multiple de 5.

2. Montrer que

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \mathbb{E}\left[z^{S_n}\right] = f(z)^n.$$

3. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_{5k}$.

4. Déterminer la valeur de q_n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

Exercice 19. [X-ENS] Soit $\theta \in \mathbb{R}_+$. On considère une salle remplie d'un nombre infini de tables, toutes infiniment longues. Les invités arrivent les uns après les autres. Le premier s'assoit à la première table. Les autres se disposent suivant cette règle : soit le $(k+1)$-ème invité s'installe à une nouvelle table avec une probabilité $\frac{\theta}{k+\theta}$, soit il choisit un invité déjà présent et s'installe à sa table. On note K_n le nombre de tables non vides lorsque n invités sont assis.

1. Calculer $\mathbb{P}\left(K_n = 1\right)$.

2. Montrer que la fonction génératrice de K_n vaut

$$g_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\theta x + i}{\theta + i}.$$

3. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}\left[K_n\right]$ et de $\mathbb{V}\left(K_n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. En déduire que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{K_n}{\ln(n)} - \theta\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

5. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On note X_i la variable aléatoire qui retourne 1 si le i-ème invité s'est assis à une nouvelle table et 0 sinon. Trouver la loi de probabilité de X_i puis exprimer K_n en fonction des X_i.

6. Retrouver alors les résultats de la question **3**.

Exercice 20. [Mines] Soient X une variable aléatoire à valeurs entières définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et $t \in [0,1]$.

1. Montrer que $G_X(t)^2 \leqslant G_X(t^2)$.

2. Déterminer une condition d'égalité.

III. Avec Python

Exercice 21. [Centrale] On considère une marche aléatoire à une dimension : on part de 0 à $t = 0$ et on monte ou descend avec une probabilité 1/2.
On considère

- $*$ p_n la probabilité d'être de retour à 0 au rang n ; ainsi $p_0 = 1$.
- $*$ q_n la probabilité d'être de retour pour la première fois à 0 au rang n ; ainsi $q_0 = 0$.

1. Écrire un programme pour faire apparaître plusieurs trajectoires différentes.

2. Calculer p_{2n} et en déterminer un équivalent en $+\infty$.

On introduit les séries entières

$$P(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \text{ et } Q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n x^n.$$

3. Montrer que leur rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

4. Prouver que $P(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $P(x)Q(x) = P(x) - 1$.

5. En déduire $Q(x)$ et la valeur de q_n.