

## T.D. XIV - Nombres complexes

### I - Écritures

**Exercice 1.** Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- |   |   |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>(2 + 6i)(6 + i)</math>.</li> <li>2. <math>(4 - 3i)^2</math>.</li> <li>3. <math>(1 - 2i)(1 + 2i)</math>.</li> <li>4. <math>(2 - 3i)^4</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>5. <math>\frac{1}{3-i}</math>.</li> <li>6. <math>\frac{1-\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i}</math>.</li> <li>7. <math>\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}</math>.</li> </ol> |
|---|---|

**Exercice 2.** Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

- |  |   |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 12.</li> <li>2. <math>\frac{3}{2}i</math>.</li> <li>3. -3.</li> <li>4. <math>-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i</math>.</li> <li>5. -2i.</li> <li>6. <math>\frac{1+i}{1-i}</math>.</li> <li>7. <math>\left(\frac{i}{1+i}\right)^4</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>8. <math>-3(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)</math>.</li> <li>9. <math>2(\cos(2\theta) - \sin(2\theta)i)</math>.</li> <li>10. <math>\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(1-i)</math>.</li> <li>11. <math>\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{1-\sqrt{3}i}</math>.</li> <li>12. <math>\sin(\theta) + \cos(\theta)i</math>.</li> </ol> |
|--|---|

**Exercice 3.** Soit  $z = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$ .

1. Calculer  $|z|$ .
2. Mettre  $z$  sous forme algébrique.
3. Calculer  $z^{2021}$ .

**Exercice 4. (Angle moitié)** Soit  $a, b \in \mathbb{C}$  de modules 1 tels que  $a \neq b$ . Montrer que  $\frac{a+b}{a-b}$  est un nombre imaginaire pur.

*On pourra écrire  $a = e^{i\theta}$  et  $b = e^{i\varphi}$  sous forme trigonométrique puis factoriser par  $e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}$ .*

**Exercice 5.** Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Calculer  $\sum_{k=0}^n e^{kxi}$ .
2. En déduire  $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ .

### II - Résolution d'équations

**Exercice 6.** Déterminer les nombres complexes  $z$  solutions des équations suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>z^2 + 9 = 0</math></li> <li>2. <math>z^2 - z + 1 = 0</math>.</li> <li>3. <math>z^2 + z + 1 = 0</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>4. <math>3z^2 - 6z + 6 = 0</math>.</li> <li>5. <math>z^4 + z^2 + 1 = 0</math>.</li> <li>6. <math>z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0</math>.</li> </ol> |
|---|---|

**Exercice 7.** Soit  $n \geq 2$  un entier naturel. Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $z^n = 1$ .

1. Montrer que  $|z| = 1$ . On pose dans la suite  $z = e^{i\theta}$ .
2. Déterminer les valeurs possibles pour  $\theta$ .
3. Représenter graphiquement les solutions des équations :

<ol style="list-style-type: none"> <li>a) <math>z^2 = 1</math>.</li> <li>b) <math>z^3 = 1</math>.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>c) <math>z^4 = 1</math>.</li> <li>d) <math>z^5 = 1</math>.</li> </ol>
--	--

### III - Géométrie

**Exercice 8.** Soit  $z$  un nombre complexe de module 1.

- a) Calculer  $|1+z|^2 + |1-z|^2$ .
- b) Représenter géométriquement les points d'affixes 1,  $z$ ,  $1-z$  et  $1+z$  puis interprétez le résultat obtenu.

**Exercice 9.** Décrire les transformations du plan complexe définies par :

1.  $z \mapsto e^{\frac{\pi}{4}i}(z - (1 + i)) + 1 + i.$
2.  $z \mapsto z + 12 + 16i.$
3.  $z \mapsto iz + 1.$

**Exercice 10.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  tels que  $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$  soit réel.