■ ■ ■

## I. Familles de vecteurs

**Indications pour l'exercice 1.** On commence par montrer que $(f_1, f_2)$ est libre. Ensuite, on vérifie que $f_3 \in \operatorname{Vect}\{f_1, f_2\}$ et qu'il en va de même pour $f_4$. ☐

**Indications pour l'exercice 2.** Considérer $x_1 < \cdots < x_p$, écrire une combinaison linéaire de $(S_{x_1}, \dots, S_{x_p})$, puis factoriser par $x_p^n$ et faire tendre $n$ vers l'infini pour montrer que la famille est libre. ☐

**Indications pour l'exercice 3.** On peut raisonner par récurrence sur $n$. Pour l'hérédité, dériver deux fois la combinaison linéaire pour, ensuite, se séparer des termes en $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$. ☐

**Indications pour l'exercice 4.** Écrire la matrice de cette famille dans la base $(\cos, \sin)$ puis discuter le rang de cette matrice en fonction des valeurs de $a_1$, $a_2$ et $a_3$. ☐

## II. Matrices & Applications linéaires

**Indications pour l'exercice 5.** Exprimer $A^2$ en fonction de $A$ et de $I_n$. ☐

**Indications pour l'exercice 6.**

**1.** Classique. On écrit $f(x) = \lambda_x x$ et il faut montrer que si $x \neq y$, alors $\lambda_x = \lambda_y$. On distingue les cas $(x, y)$ liée et $(x, y)$ libre pour lequel on introduira le vecteur $x + y$.

**2.** On applique le résultat précédent à $u^2$ et $u^2 = \lambda \operatorname{Id}_E$. On distingue alors les cas $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$ Pour lequel on montre qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale par blocs.

**3.** Le cas $n \leqslant 2$ est aisé. Ensuite, on montre qu'il existe un scalaire $\mu$, un vecteur $y$ et une application linéaire $\varphi$ tels que $u : x \mapsto \varphi(x)y + \mu x$. ☐

**Indications pour l'exercice 7.**

**1.** Soit $H$ un sous-espace vectoriel de dimension $k+1$. En exhibant une base de $H$, on peut écrire $H$ comme sous-espaces vectoriels de dimension $k$.

**2.** Effectuer une récurrence.

**3.** Montrer que, pour toute droite $D$, $u(D) \subset D$. En utilisant un raisonnement classique, montrer alors que $u$ est une homothétie. ☐

**Indications pour l'exercice 8.**

**1.** On montre que $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

**2.** Raisonner par analyse / synthèse pour obtenir la décomposition. Ou alors, utiliser que $g \circ f$ est un projecteur.

**3.** Utiliser le théorème du rang pour montrer l'égalité.

**4.** On montre de la bijectivité.

**5.** Penser à l'application nulle. ☐

**Indications pour l'exercice 9.** Commencer par vérifier que $\mathscr{H}$ est bien un espace vectoriel.
Traiter en premier le cas où $\dim E = \dim F = \operatorname{Rg} f$.
En général, si $g \in \mathscr{H}$, étudier ses restrictions sur $\operatorname{Im} f$ ainsi que sur un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$. ☐

**Indications pour l'exercice 10.** Soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_E$. En travaillant dans la base (le vérifier) $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$, montrer que $g$ commute avec $f$ si et seulement si $g \in \operatorname{Vect}\left\{\operatorname{Id}_E, f, f^2\right\}$. ☐

## III. Géométrie

**Indications pour l'exercice 11.**

**1.** Déterminer une base de $P$ puis une base de $D$ et montrer que la réunion de ces deux familles forme une famille base de $\mathbb{R}^3$.

**2.** On peut décomposer tout vecteur $(x, y, z)$ dans la base trouvée à la question précédente. ☐

**Indications pour l'exercice 12.** Le sens réciproque est trivial.
Pour le sens direct, utiliser que $q(x) - x \in \operatorname{Ker} q$. ☐

**Indications pour l'exercice 13.**

**1.** Calculer $q \circ q(x)$ en étant précis sur les indices de sommation et en étudiant l'effet des compositions sur le vecteur $x$.

**2.** Montrer que $E = \operatorname{Im} q$. ☐

**Indications pour l'exercice 14.**

**1.** Montrer l'inclusion des images puis utiliser l'égalité des dimensions.

**2.** Montrer que $\operatorname{Im} p_i \subset \operatorname{Ker} p_j$. Pour cela, montrer que, si $x \in \operatorname{Im} p_i$, alors $\sum_{j \neq i} p_j(x) = 0$. En déduire que $p_j(x) = 0$ puis conclure. ☐

## IV. Formes linéaires & Hyperplans

**Indications pour l'exercice 15.** Penser aux applications coordonnées et à la formule de Taylor polynomiale. ☐

**Indications pour l'exercice 16.** Utiliser la base d'interpolation de Lagrange pour montrer que $(f_a, f_b, f_c)$ est libre.
Évaluer ensuite la relation $f_4 = \alpha f_a + \beta f_b + \gamma f_c$ sur la famille $(1, X - a, (X-a)^2, (X-a)^3)$ pour déterminer si cette relation possède des solutions. ☐

**Indications pour l'exercice 17.** Raisonner par l'absurde en exhibant ensuite une forme linéaire qui ne s'annule pas en $v$. ☐

**Indications pour l'exercice 18.**

**1.** On remarque que $\Delta H_k = H_{k-1}$.

**2.** On raisonner par l'absurde en considérant une combinaison linéaire nulle qu'on évalue ensuite en $H_{i_0}$, où $i_0$ est bien choisi. ☐

## V. Avec Python

**Indications pour l'exercice 19.**

**1.** Utiliser les propriétés sur les séries convergentes.

**2.** Utiliser le module `numpy.polynomial`.

**3.** Penser aux polynômes de degrés étagés.

**4.** En écrivant $H_n(k)$ sous forme factorielle, on obtient $S(H_n) = \mathrm{e}$.

**5.** ☐

## Mathématiciens

**Kronecker** Leopold (7 déc. 1823 à Liegnitz-29 déc. 1891 à Berlin).