V - Variables aléatoires discrètes finies

Révisions

Probabilités.

Dans tout le cours, Ω désigne un univers et $\mathbf{P}$ est une probabilité.

I - Variables aléatoires réelles finies

I.1 - Définition

Définition 1 - Variable aléatoire réelle

On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est un ensemble fini. Une *variable aléatoire* est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

Un dé équilibré est lancé successivement 2 fois. On note les résultats obtenus à l'issue de chacun des lancers.
L'univers est $\Omega = \{(i, j),\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 6\} = [\![1, 6]\!]^2$.
La somme S des résultats obtenus à l'issue des 2 lancers est une variable aléatoire :

$$S : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (d_1, d_2) & \mapsto & d_1 + d_2 \end{array}$$

Notations

Si $x \leqslant y$ sont des réels, on notera

$$\begin{aligned} [X = x] &= \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) = x\} \\ [X \leqslant x] &= \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \leqslant x\} \\ [X \geqslant x] &= \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \geqslant x\} \\ [x \leqslant X \leqslant y] &= \{\omega \in \Omega\ ;\ x \leqslant X(\omega) \leqslant y\} \end{aligned}$$

Exemple 2 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.

$$\begin{aligned} [S = 3] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega\ ;\ d_1 + d_2 = 3\} \\ &= \{(1, 2), (2, 1)\}. \\ [S \leqslant 4] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega\ ;\ d_1 + d_2 \leqslant 4\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}. \end{aligned}$$

Définition 2 - Système complet

Soient Ω un univers fini et X une variable aléatoire. Notons $x_1, \dots, x_p$ les valeurs prises par X. Alors, $\{[X = x_i],\ i \in [\![1, p]\!]\}$ est un système complet d'événements. C'est le *système complet* associé à la variable aléatoire X.

Exemple 3 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent. Le système complet associé à S est :

$$\Big\{[S = 2],\ [S = 3],\ [S = 4],\ [S = 5],\ [S = 6],\ [S = 7],$$
$$[S = 8],\ [S = 9],\ [S = 10],\ [S = 11],\ [S = 12]\Big\}.$$

I.2 - Loi de probabilité

Définition 3 - Loi de probabilité

La *loi* de la variable aléatoire X est la donnée :
- des valeurs $x_1, \dots, x_p$ prises par X,
- de la famille de probabilités

$$(\mathbf{P}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}([X = x_p])).$$

La loi d'une variable aléatoire peut être représentée sous forme d'un tableau.

Lois usuelles - À connaître par cœur

- **Somme de deux dés équilibrés.** Nous obtenons successivement :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([S = k])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- **Loi certaine.** La variable aléatoire X ne prend qu'une seule valeur c et $\mathbf{P}([X = c]) = 1$. *L'expérience renvoie toujours le même résultat.*
- **Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.** Notée $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$.
L'expérience renvoie les résultats 1, 2, …, ou n et chacun de ces résultats a la même probabilité d'apparaître.
Les valeurs prises par X sont $1, \dots, n$ et

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}([X = i]) = \frac{1}{n}.$$

- **Loi de Bernoulli de paramètre p.** Notée $\mathscr{B}(p)$.
L'expérience (dite expérience de Bernoulli) renvoie le résultat 0 (on parle d'échec) ou 1 (on parle de succès). Le succès apparaît avec probabilité p.
Soit $p \in [0, 1]$. Les valeurs prises par X sont 0 et 1 et

$$\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - p \text{ et } \mathbf{P}([X = 1]) = p.$$

- **Loi binomiale de paramètres n et p.** Notée $\mathscr{B}(n, p)$.
La variable aléatoire compte de le nombre de succès dans une succession de n expériences de Bernoulli indépendantes (appelé schéma de Bernoulli) dont la probabilité de succès vaut p.
Soit $p \in [0, 1]$. Les valeurs prises par X sont $0, \dots, n$ et

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ \mathbf{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

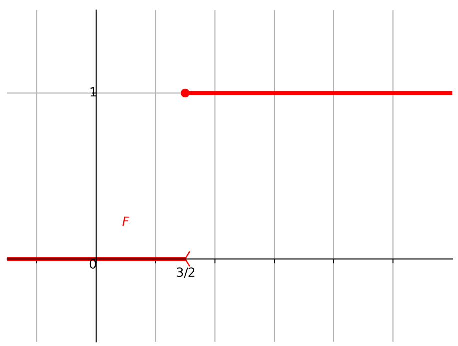
Définition 4 - Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire. La *fonction de répartition* de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leqslant x])$.

Exemple 4 - Fonctions de répartition

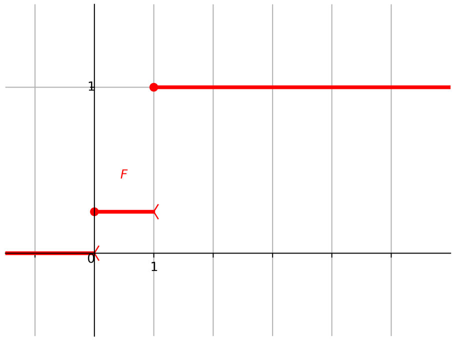
- Si X suit une loi certaine de valeur $\frac{3}{2}$.
  - ⋆ Si $x < \frac{3}{2}$, alors
$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$
  - ⋆ Si $x \geqslant \frac{3}{2}$, alors
$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}([X = 3/2]) = 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de X est :



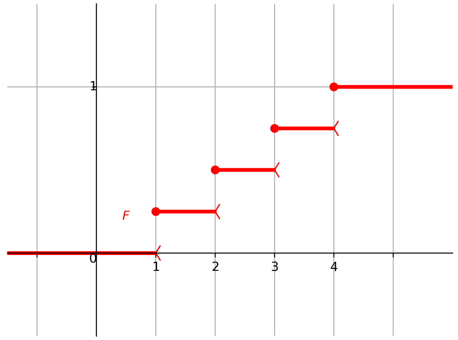
- Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{4}$.
  - $\star$ Si $x < 0$, alors
$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$
  - $\star$ Si $0 \leqslant x < 1$, alors
$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}([X = 0]) = \frac{1}{4}.$$
  - $\star$ Si $x \geqslant 1$, alors
$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

  Ainsi, la fonction de répartition de X est :



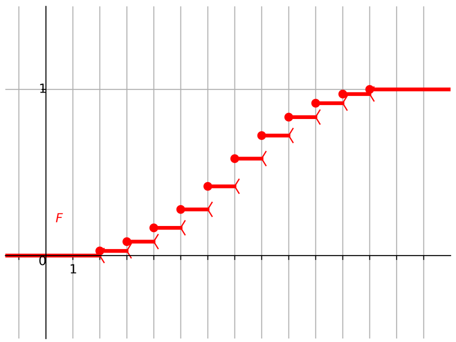
- Si X suit une loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$.
  - $\star$ Si $x < 1$, alors
$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$
  - $\star$ Si $1 \leqslant x < 2$, alors
$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}([X = 1]) = \frac{1}{4}.$$
  - $\star$ Si $2 \leqslant x < 3$, alors
$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}([X = 1] \sqcup [X = 2]) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$
  - $\star$ Si $3 \leqslant x < 4$, alors
$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}([X = 1] \sqcup [X = 2] \sqcup [X = 3]) = \frac{3}{4}.$$
  - $\star$ Si $x \geqslant 4$, alors
$$\mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

  Ainsi, la fonction de répartition de X est :



- Si S est la somme des résultats de 2 lancers successifs d'un dé équilibré à 6 faces.
  - $\star$ Si $x < 2$. Alors,
$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$
  - $\star$ Si $2 \leqslant x < 3$. Alors,
$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}([S = 2]) = \frac{1}{36}.$$
  - $\star$ Si $3 \leqslant x < 4$. Alors,
$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}([S = 2] \sqcup [S = 3]) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36}.$$
  - $\star$ ...
  - $\star$ Si $x \geqslant 12$. Alors,
$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de S est :



Proposition 1

Les variables aléatoires X et Y sont de même loi si et seulement si elles ont mêmes fonctions de répartition.

II - Espérance & Variance

II.1 - Espérance

Définition 5 - Espérance

Soient X une variable aléatoire et $x_1, \dots, x_p$ les valeurs prises par X. L'*espérance* de X, notée $\mathbf{E}[X]$, est le réel

$$\mathbf{E}[X] = x_1\mathbf{P}([X = x_1]) + \cdots + x_p\mathbf{P}([X = x_p]).$$

Exemple 5 - Lois usuelles - À connaître par cœur

- **Loi certaine de valeur c.**

$$\mathbf{E}[X] = c\mathbf{P}([X = c]) = c.$$

- **Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.**

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 1\mathbf{P}([X = 1]) + 2\mathbf{P}([X = 2]) + \cdots + n\mathbf{P}([X = n])\\ &= 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + \cdots + n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1 + 2 + \cdots + n)\\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

- **Loi de Bernoulli de paramètre p.**

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 0 \times \mathbf{P}([X = 0]) + 1 \times \mathbf{P}([X = 1])\\ &= 0 \times (1-p) + 1 \times p = p.\end{aligned}$$

- **Loi binomiale de paramètres n et p.**

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n \times p.$$

Proposition 2 - Linéarité

Soient X, Y deux variables aléatoires et a, b deux réels. Alors, $\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y]$.

Exemple 6 - Somme de deux dés

Notons X_1 le résultat du premier lancer et X_2 le résultat du second. Alors, X_1 et X_2 suivent une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$ et $S = X_1 + X_2$. Ainsi,

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] = \frac{6+1}{2} + \frac{6+1}{2} = 7.$$

Proposition 3 - Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire, $x_1, \dots, x_p$ les valeurs prises par X et g une fonction à valeurs réelles. On note $Y = g(X)$ la variable aléatoire définie par

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Alors,

$$\mathbf{E}\left[Y\right] = \mathbf{E}\left[g(X)\right] = \sum_{k=1}^{p} g(x_k)\mathbf{P}\left([X = x_k]\right).$$

Exemple 7 - Carré de la somme

On reprend les notations de l'exemple précédent. Posons $Y = S^2$. Alors,

$$\mathbf{E}\left[Y\right] = 2^2\frac{1}{36} + 3^2\frac{2}{36} + 4^2\frac{3}{36} + 5^2\frac{4}{36} + 6^2\frac{5}{36} + 7^2\frac{6}{36} + \cdots$$
$$\cdots + 8^2\frac{5}{36} + 9^2\frac{4}{36} + 10^2\frac{3}{36} + 11^2\frac{2}{36} + 12^2\frac{1}{36}$$

II.2 - Variance

Définition 6 - Variance, Écart-type

Soit X une variable aléatoire. La *variance* de X, notée $\mathbf{V}\left(X\right)$, est le réel :

$$\mathbf{V}\left(X\right) = \mathbf{E}\left[\left(X - \mathbf{E}\left[X\right]\right)^2\right].$$

L'*écart-type* est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}\left(X\right)}$.

Variance

Comme l'espérance s'interprète comme une moyenne, la variance est la moyenne des écarts quadratiques (c'est-à-dire au carré) à la moyenne.

Exemple 8 - Lois usuelles - À connaître par cœur

- **Loi certaine de valeur c.**

$$\mathbf{V}\left(X\right) = 0.$$

- **Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.**

$$\mathbf{V}\left(X\right) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

- **Loi de Bernoulli de paramètre p.**

$$\mathbf{V}\left(X\right) = p(1 - p).$$

- **Loi binomiale de paramètres n et p.**

$$\mathbf{V}\left(X\right) = np(1 - p).$$

Proposition 4

Soient X une variable aléatoire et a, b deux réels. Alors,

$$\mathbf{V}\left(aX + b\right) = a^2\mathbf{V}\left(X\right).$$

Exemple 9

Soit Y une variable suivant une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. On pose $X = Y - 1$.
Déterminons la loi de X.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}\left([Y = k]\right)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Comme $X = Y - 1$,

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{P}\left([X = j]\right)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi, $X \sim \mathscr{U}\left([\![1, 11]\!]\right)$.

Déterminons l'espérance et la variance de Y.

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X+1] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[1] = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7,$$
$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X+1) = \mathbf{V}(X) = \frac{11^2 - 1}{2} = 60.$$

Théorème 1 - Formule de Kœnig-Huygens

Soit X une variable aléatoire. Alors,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Définition 7 - Variable centrée, réduite

Soit X une variable aléatoire.

- X est une variable centrée si $\mathbf{E}[X] = 0$.
- X est une variable réduite si $\mathbf{V}(X) = 1$.

Proposition 5

Soit X une variable aléatoire qui ne soit pas de loi certaine. La variable $X^* = \frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.

III - Couple de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire X qui prend les valeurs $x_1, \dots, x_p$ et une variable aléatoire Y qui prend les valeurs $y_1, \dots, y_q$.

III.1 - Loi du couple

Définition 8 - Loi du couple

La *loi du couple* (X, Y) est la donnée :

- des valeurs (x_i, y_j) prises par le couple (X, Y),
- des probabilités $\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.

Exemple 10 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On dispose d'un bureau à 2 tiroirs et de 2 feuilles de papier. On dispose aléatoirement chacune des feuilles de papier dans l'un des tiroirs.
On note X le nombre de feuilles dans le premier tiroir et Y le nombre de tiroirs vides.
Le nombre de feuilles de papier dans le premier tiroir peut être égal à 0, 1 ou 2.
Le nombre de tiroirs vides peut être égal à 0 (il y a 1 feuille dans chaque tiroir) ou 1 (les 2 feuilles sont dans le même tiroir).
De plus,

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0$$
$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$$
$$\mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 0]) = 0$$
$$\mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4}$$

On peut représenter ces résultats dans un tableau : à chaque ligne correspond une valeur x que peut prendre X ; à chaque colonne correspond une valeur y que peut prendre Y ; à l'intersection d'une ligne et d'une colonne se lit la probabilité $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$:

$x \backslash y$	0	1
0	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$

Définition 9 - Marginales

Les lois de X et de Y sont les *marginales* du couple (X, Y).
En utilisant le système complet associé à la variable aléatoire Y (resp. X), on obtient

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!],\ \mathbf{P}([X = x_i]) = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

$$\forall\, j \in [\![1, q]\!],\ \mathbf{P}([Y = y_j]) = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

Exemple 11 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les notations de l'exemple précédent, les marginales s'obtiennent en sommant les lignes / les colonnes du tableau.

$x \backslash y$	0	1	$\mathbf{P}([X = x])$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}([Y = y])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Définition 10 - Loi conditionnelle

La *loi conditionnelle* de X sachant $[Y = y_j]$ est la donnée :

- des valeurs $x_1, \ldots, x_p$ prises par X,
- des probabilités $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_1]), \ldots, \mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_p])$.

Exemple 12 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On reprend les notations de l'exercice précédent. La loi conditionnelle de X sachant $[Y = 0]$ est égale à

i	0	1	2
$\mathbf{P}_{[Y=0]}([X = i])$	0	1	0

C'est une loi presque certaine : *sachant qu'aucun des tiroirs n'est vide, on est certain qu'il y a une feuille dans le premier tiroir.*
La loi conditionnelle de X sachant $[Y = 1]$ est égale à

i	0	1	2
$\mathbf{P}_{[Y=0]}([X = i])$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Sachant qu'un des deux tiroirs est vide, il y a une chance sur deux que le premier tiroir contienne 0 feuille et une chance sur deux qu'il contienne les 2 feuilles.

III.2 - Indépendance

Définition 11 - Indépendance

Les variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$,

$$\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \mathbf{P}([X = x_i]) \times \mathbf{P}([Y = y_j]).$$

Exemple 13

- On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi est définie par

$x \backslash y$	0	1	$\mathbf{P}([X = x])$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{P}([Y = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

On étudie le comportement de **tous** les couples de valeurs possibles :

$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \mathbf{P}([X=0])\times\mathbf{P}([Y=0])$$
$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \mathbf{P}([X=0])\times\mathbf{P}([Y=1])$$
$$\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \mathbf{P}([X=1])\times\mathbf{P}([Y=0])$$
$$\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \mathbf{P}([X=1])\times\mathbf{P}([Y=1])$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

- 2 **feuilles et** 2 **tiroirs.** En reprenant la loi du couple,

$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=0]) = 0 \neq \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \mathbf{P}([X=0])\times\mathbf{P}([Y=0]).$$

Les variables aléatoires X et Y **ne** sont **pas** indépendantes.

Indépendance en pratique

- Pour montrer que X et Y **ne** sont **pas** indépendantes, il suffit de trouver une case du tableau telle que

$$\mathbf{P}([X = x_k]\cap[Y = y_j]) \neq \mathbf{P}([X = x_k])\times\mathbf{P}([Y = y_j]).$$

- Pour montrer que X et Y sont indépendantes, il faut montrer que cette égalité est vraie **pour toutes** les cases du tableau.

Proposition 6 - Loi certaine

Si Y est une variable aléatoire certaine, alors X et Y sont indépendantes.

III.3 - Covariance

Proposition 7 - Espérance d'un produit

En utilisant la loi du couple,

$$\mathbf{E}[X\times Y] = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i\times y_j\times\mathbf{P}([X = x_i]\cap[Y = y_j]).$$

Exemple 14 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant l'exemple des feuilles et des tiroirs,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[XY] &= 0\times 0\times 0 + 0\times 1\times\frac{1}{4} + \cdots \\ &\quad \cdots + 1\times 0\times\frac{1}{2} + 1\times 1\times 0 + \cdots \\ &\quad \cdots + 2\times 0\times 0 + 2\times 1\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Théorème 2 - Espérance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbf{E}[X\times Y] = \mathbf{E}[X]\times\mathbf{E}[Y].$$

Définition 12 - Covariance

La *covariance* de X et Y, notée $\text{Cov}(X, Y)$, est le réel

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])\times(Y - \mathbf{E}[Y])].$$

Proposition 8 - Propriétés de la covariance

Soient a, b, c trois réels et X, Y, Z trois variables aléatoires.

- $\text{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}[X \times Y] - \mathbf{E}[X] \times \mathbf{E}[Y]$.
- $\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(Y,X)$.
- $\text{Cov}(X,X) = \mathbf{V}(X)$.
- $\text{Cov}(X,c) = 0$.
- $\text{Cov}(aX+bY,Z) = a\text{Cov}(X,Z) + b\text{Cov}(Y,Z)$.

Exemple 15 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les calculs précédents,

$$\mathbf{E}[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1,$$
$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$\text{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0.$$

Proposition 9 - Covariance et Somme

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X,Y).$$

Exemple 16 - Variance d'une somme

On considère le couple (X_1, X_2) dont la loi est définie par :

x_1 \ x_2	0	1	$\mathbf{P}([X_1 = x_1])$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\mathbf{P}([X_2 = x_2])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

X_1 et X_2 ont même loi, donc ils ont même espérance et même variance. De plus,

$$\mathbf{E}[X_1] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \mathbf{E}\left[X_1^2\right],$$
$$\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{E}\left[X_1^2\right] - \mathbf{E}[X_1]^2 = \frac{3}{16},$$
$$\mathbf{E}[X_1X_2] = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X_1,X_2) = \mathbf{E}[X_1X_2] - \mathbf{E}[X_1]\,\mathbf{E}[X_2] = \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{16}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X_1+X_2) &= \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1,X_2)\\ &= \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Proposition 10 - Convariance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X,Y) = 0$. En particulier, $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y]$.

Exemple 17 - 2 feuilles et 2 tiroirs

L'exemple des feuilles et des tiroirs montre que la covariance peut être nulle alors que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

Définition 13 - Coefficient de corrélation linéaire

Le *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y, noté $\rho(X,Y)$, est défini par

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\,\mathbf{V}(Y)}}.$$

Exemple 18

En reprenant l'exemple précédent,

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{Cov}\left(X_1, X_2\right)}{\sqrt{\mathbf{V}\left(X_1\right)\mathbf{V}\left(X_2\right)}} = \frac{\frac{-1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{3}{16}}} = -\frac{1}{3}.$$

Proposition 11

- $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.
- $|\rho(X, Y)| = 1$ signifie qu'il existe trois réels a, b et c tels que $\mathbf{P}\left(aX + bY + c = 0\right) = 1$. Les variables X et Y sont reliées presque sûrement par une relation *affine*.