

# X - Réduction

## I - Éléments propres

### Définition 1 - Valeur propre, Vecteur propre

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le réel  $\lambda$  est une *valeur propre* de  $M$  s'il existe un vecteur colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul tel que  $MX = \lambda X$ .

### Exemple 1 - Valeurs / Vecteurs propres

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$AX = \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ 1 + 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = 2X.$$

Ainsi,  $X$  est un vecteur non nul et  $AX = 2X$ , donc  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 2.

- Si  $\lambda$  est un vecteur propre de  $I_n$  et  $X$  est un vecteur propre associé, alors  $I_n X = \lambda X$  soit  $X = \lambda X$  et  $(\lambda - 1)X = 0_{n,1}$ . Comme  $X \neq 0_{n,1}$ , alors  $\lambda - 1 = 0$  soit  $\lambda = 1$ .

Ainsi, 1 est l'unique valeur propre de  $I_n$  et tout vecteur non nul est un vecteur propre associé.

- Soit  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda$  une valeur propre de  $D$  et

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  un vecteur propre associé. Comme  $DX = \lambda X$ ,

alors

$$\begin{cases} -x &= \lambda x \\ 2y &= \lambda y \\ -3z &= \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)x &= 0 \\ (2 - \lambda)y &= 0 \\ (-3 - \lambda)z &= 0 \end{cases}$$

Comme  $X$  est un vecteur propre, il est non nul et une de ses composantes est non nulle. Ainsi, soit  $\lambda - 1 = 0$ , soit  $2 - \lambda = 0$  soit  $-3 - \lambda = 0$ . Alors,  $\lambda \in \{-1, 2, -3\}$ .

Réciproquement, il est facile de trouver un vecteur propre correspondant aux valeurs propres  $-1$ ,  $2$  et  $-3$ .

L'ensemble des valeurs propres de  $D$  est donc  $\{-1, 2, 3\}$ .

### Proposition 1 - Valeurs propres & Inversibilité

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Le réel  $\lambda$  est une valeur propre de  $M$  si et seulement si  $M - \lambda I_n$  n'est pas inversible.

### Exemple 2 - Valeurs propres d'une matrice triangulaire

Soit  $T = \begin{pmatrix} 4 & 32 & -1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ . Le réel  $\lambda$  est valeur propre de  $T$  si

et seulement si la matrice  $T - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 32 & -1 \\ 0 & 9 - \lambda & -2 \\ 0 & 0 & -7 - \lambda \end{pmatrix}$

est inversible. D'après la caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires,  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$  si et seulement si  $\lambda \in \{4, 9, -7\}$ .

### Théorème 1 - Valeurs propres & Matrices triangulaires

Soit  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice triangulaire. Les valeurs propres de  $T$  sont ses éléments diagonaux.

**Théorème 2 - Recherche de valeurs propres**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Le réel  $\lambda$  est une valeur propre de  $M$  si et seulement si  $\text{Rg}(M - \lambda I_n) < n$ .

**Exemple 3 - Recherche de valeurs propres**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \text{Rg}(A - \lambda I_3) &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 8 & -4 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ 8 & -4 & -5-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 & -4 \\ 8 & -5-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_3 \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 8 & -5-\lambda & -4 \\ 7-\lambda & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 8 & -5-\lambda & -4 \\ 0 & -\lambda^2 + 2\lambda + 3 & -4(\lambda + 1) \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow 8L_2 - (7-\lambda)L_1 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$  si et seulement si

$$\begin{aligned} (-\lambda^2 + 2\lambda + 3)(-1 - \lambda) &= 0 \\ -(\lambda + 1)(\lambda - 3)(-\lambda - 1) &= 0 \\ \lambda &\in \{-1, 3\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs propres de  $A$  est donc  $\{-1, 3\}$ .

**Proposition 2 - Inversibilité & Valeur propre nulle**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La matrice  $M$  est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de  $M$ .

**Définition 2 - Sous-espace propre**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ . Le *sous-espace propre* de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$  est l'espace vectoriel  $E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$ .

**Exemple 4 - Calcul de sous-espace propre**

En reprenant l'exemple précédent,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-7}(T)$  si et seulement si

$$\begin{aligned} TX = -7X &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 32y - z = -7x \\ 9y - 2z = -7y \\ -7z = -7z \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 11x + 32y - z = 0 \\ 16y - 2z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = -\frac{3}{11}\lambda \\ y = \frac{1}{8}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_{-7}(T) = \text{Vect} \left\{ \left( -\frac{3}{11}, \frac{1}{8}, 1 \right) \right\} = \text{Vect} \{(-24, 11, 88)\}.$$

**Proposition 3 - Sous-espace propre**

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . L'ensemble  $E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . De plus,  $\dim E_\lambda(M) \geq 1$  si et seulement si  $\lambda$  est une valeur propre de  $M$ .

## II - Diagonalisation

### Définition 3 - Matrices diagonalisables

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée. La matrice  $A$  est *diagonalisable* s'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible et une matrice  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

### Exemple 5 - Matrice diagonalisable

Soit  $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- D'une part,  $AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ .
- D'autre part,  $PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ .
- En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on montre que  $P$  est inversible et  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

D'où,  $AP = PD$  et  $A = PDP^{-1}$ . La matrice  $A$  est donc diagonalisable.

### Théorème 3 - Diagonalisation & Endomorphisme

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  l'endomorphisme canoniquement associé. La matrice  $M$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  soit diagonale.

### Exemple 6 - Endomorphisme

Soit  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ ,  $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$ . Posons  $u = (2, 1)$

et  $v = (-1, 1)$ . Alors,

$$f(u) = (3 \times 2 + 2 \times 1, 1 \times 2 + 2 \times 1) = (8, 4) = 4u$$

$$f(v) = (3 \times (-1) + 2 \times 1, 1 \times (-1) + 2 \times 1) = (-1, 1) = v$$

Comme  $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible, alors  $\mathcal{B} = (u, v)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

De plus,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$ .

Ainsi, d'après les formules de changement de bases,  $M = PDP^{-1}$  et  $M$  est diagonalisable.

### Théorème 4 - Construction de $P$

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $(X_1, \dots, X_n)$  est une base de vecteurs propres de  $M$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  sont les valeurs propres associées. En notant  $P$  la matrice de la famille  $(X_1, \dots, X_n)$  dans la base canonique et  $D$  la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors  $M = PDP^{-1}$ .

## II.1 - Critères

### Théorème 5 - Condition suffisante (admis)

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si  $M$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $M$  est diagonalisable.

### Exemple 7 - Une matrice diagonalisable

- Soit  $T = \begin{pmatrix} 4 & 32 & -1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ . Comme  $T$  est triangulaire supérieure, les valeurs propres de  $T$  se lisent sur la diagonale (voir l'exemple précédent). Ainsi, les valeurs propres de  $T$  sont 4, 9 et  $-7$ . Comme  $T$  possède 3 valeurs propres dis-

tinctes, alors  $T$  est diagonalisable.

Pour identifier une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $T = PDP^{-1}$ , il faut identifier des vecteurs propres associés aux différentes valeurs propres.

- La réciproque de ce théorème est fausse car, par exemple, la matrice identité est diagonalisable et elle possède une unique valeur propre qui est 1.

### Théorème 6 - Matrices symétriques - C. S. (admis)

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

### Exemple 8 - Une matrice diagonalisable

Soit  $S = \begin{pmatrix} 4 & 32 & -1 \\ 32 & 9 & -2 \\ -1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ . Comme  $S$  est une matrice symétrique

à coefficients réels, alors  $S$  est diagonalisable.

Pour identifier une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $T = PDP^{-1}$ , il faut commencer par rechercher les valeurs propres avec une des techniques vues précédemment (ou via la partie suivante), puis identifier des vecteurs propres associés aux différentes valeurs propres.

## III - Polynômes annulateurs (H.P.)

### III.1 - Définition

#### Définition 4 - Polynôme annulateur

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée et  $Q(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$  un polynôme non nul. Le polynôme  $Q$  est un *polynôme annulateur* de  $A$  si

$$Q(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_pA^p = 0.$$

### Exemple 9 - Polynôme annulateur

Soit  $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$  et  $Q(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6$ . Alors,

$$\begin{aligned} Q(A) &= A^3 - 4A^2 + A + 6I \\ &= \begin{pmatrix} 55 & -28 & -28 \\ 9 & -1 & -9 \\ 47 & -28 & -20 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 17 & -8 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 13 & -8 & -4 \end{pmatrix} + \dots \\ &\quad \dots + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $Q$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

En particulier, on obtient alors

$$\begin{aligned} A^3 - 4A^2 + A + 6I &= 0 \\ A(A^2 - 4A + I) &= -6I \end{aligned}$$

Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I)$ .

#### Proposition 4 - Taille 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $Q(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - cb)$ . Alors,  $Q(A) = 0_2$ .

**Exemple 10 - Matrice de taille 2**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ . On pose

$$\begin{aligned} Q(X) &= X^2 - (1+5)X + (1 \times 5 - (-1) \times 2) \\ &= X^2 - 6X + 7. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} Q(A) &= A^2 - 6A + 7I \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -6 & 23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $Q$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

En particulier,

$$\begin{aligned} A^2 - 6A + 7I &= 0 \\ A(A - 6I) &= -7I. \end{aligned}$$

Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = -\frac{1}{7}(A - 6I)$ .

**Exemple 11 - Identification de valeurs propres potentielles**

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . On constate que  $A^2 = 2A$ . Alors,  $X^2 - 2X$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Les valeurs propres **possibles** de  $A$  sont donc 0 et 2. On montre ensuite  $E_0(A)$  et  $E_2(A)$  sont de dimension supérieure ou égale à 1 pour en déduire que 0 et 2 sont bien valeurs propres de  $A$ .
- Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice non nulle telle qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N^p = 0_n$ . Alors,  $X^p$  est un polynôme annulateur et la seule valeur propre possible de  $N$  est 0. En supposant par l'absurde que  $N$  est inversible, on montre que  $N^{p-1} = 0_n$ , puis par itération que  $N = 0_n$ , ce qui est impossible. Ainsi,  $N$  n'est pas inversible et 0 est donc valeur propre de  $N$ .  
Finalement, l'unique valeur propre de  $N$  est 0.

**III.2 - Polynômes annulateurs et Valeurs propres****Proposition 5 - Valeurs propres & Racines de polynômes annulateurs**

Soit  $A$  une matrice et  $Q$  un polynôme annulateur de  $A$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $\lambda$  est une racine de  $Q$  (c'est-à-dire  $Q(\lambda) = 0$ ).