

## T.D. II - Dénombrement

### I - Dés, Mots, Urnes,...

**Solution de l'exercice 1.** Le résultat obtenu à l'issu des lancers peut être modélisé par un couple d'entiers compris entre 1 et 6.

Il suffit ensuite de lister les décompositions de chacun de ces entiers :

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1,$$

$$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1,$$

$$8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2.$$

Il y a ainsi :

- \* 5 façons d'obtenir 6,
- \* 6 façons d'obtenir 7,
- \* 5 façons d'obtenir 8.

□

**Solution de l'exercice 2.** Comme un nombre de 4 chiffres ne peut pas commencer par un 0, tout nombre de 4 chiffres est un élément de

$$\llbracket 1, 9 \rrbracket \times \llbracket 0, 9 \rrbracket \times \llbracket 0, 9 \rrbracket \times \llbracket 0, 9 \rrbracket.$$

Il y a ainsi

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$$

nombre de 4 chiffres.

□

**Solution de l'exercice 3.** Un sonnet est une succession de 14 vers. Pour chacun des vers, il y a 10 façons de le choisir (une par page). Le nombre de sonnets pouvant être composé est donc égal à  $10^{14}$ .

Comme  $10^{14} = 10^5 \times 10^9 = 100\,000 \times 10^9$ , le livre contient bien *cent mille milliards* de poèmes.

□

**Solution de l'exercice 4.**

**1.** Le 0 ne peut pas figurer en première position. Il y a ainsi :

- \*  $9 \times 1 \times 9 \times 9 \times 9$  nombres pour lesquels le 0 est en deuxième position,

- \*  $9 \times 9 \times 1 \times 9 \times 9$  nombres pour lesquels le 0 est en troisième position,
- \*  $9 \times 9 \times 9 \times 1 \times 9$  nombres pour lesquels le 0 est en quatrième position,
- \*  $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 1$  nombres pour lesquels le 0 est en cinquième position.

Finalement, il y a

$$4 \times 9^4 = 26\,244$$

nombre de 5 chiffres qui ne contiennent qu'un seul zéro.

**2.** Le 0 ne peut pas figurer en première position. On choisit :

- \* la position du 0 parmi les 4 positions restantes :  $\binom{4}{2}$  possibilités,
- \* le numéro en première position parmi les entiers de 1 à 9 : 9 possibilités,
- \* les deux numéros restants parmi les entiers de 1 à 9 : 9 possibilités.

Finalement, il y a

$$\binom{4}{2} \times 9 \times 9 = 486$$

nombre de 5 chiffres qui contiennent exactement deux zéros.

**3.** On distingue en fonction du chiffre qui est répété :

- \* Si le premier chiffre est répété :
  - ★ il doit être choisi entre 1 et 9 : 9 possibilités,
  - ★ on choisit où il est répété : 4 possibilités,
  - ★ on choisit les 3 chiffres restants entre 0 et 9 (distincts) :  $9 \times 8 \times 7$ .

Il y a donc  $4 \times 9 \times 9 \times 8 \times 7$  possibilités.

- \* Si le premier chiffre n'est pas répété et que le chiffre répété n'est pas 0 :

- ★ on choisit le chiffre à répéter entre 1 et 9 : 9 possibilités,
- ★ on choisit la position des 2 répétitions parmi les 4 positions :  $\binom{4}{2}$  possibilités,
- ★ on choisit les chiffres distincts restants :  $8 \times 8 \times 7$ .

Il y a alors  $9 \times \binom{4}{2} \times 8 \times 8 \times 7$  possibilités.

\* Si le premier chiffre n'est pas répété et que le chiffre répété est 0 :

\* on choisit la position des 2 répétitions parmi les 4 positions :  $\binom{4}{2}$  possibilités,

\* on choisit les chiffres restants :  $9 \times 8 \times 7$ .

Il y a alors  $\binom{4}{2} \times 9 \times 8 \times 7$  possibilités.

Finalement, le nombre de nombres de 5 chiffres avec une unique répétition est égal à

$$\begin{aligned} & 4 \times 9^2 \times 8 \times 7 + 6 \times 8 \times 9 \times 8 \times 7 + 6 \times 9 \times 8 \times 7 \\ &= 4 \times 9^2 \times 8 \times 7 + 6 \times 9 \times 8 \times 7 \times (8 + 1) \\ &= 9^2 \times 8 \times 7 \times (4 + 6) = 10 \times 9^2 \times 8 \times 7 = 45\,360. \end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 5.

1. Comme toutes les lettres du mot COMPTEER sont distinctes, il y a autant d'anagrammes que de mélanges de lettres, soit :

$$7! = 5040 \text{ anagrammes de COMPTEER.}$$

2. Tout anagramme de ANANAS est composé de 6 lettres. Pour constituer un anagramme, il faut choisir :

\* la position des 3 lettres A :  $\binom{6}{3}$  possibilités,

\* la position des 2 lettres N parmi les positions restantes :  $\binom{3}{2}$  possibilités,

\* la position du S sur la position restante : 1 possibilité.

Finalement, il y a

$$\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} = 20 \times 3 = 60 \text{ anagrammes d'ANANAS.}$$

3. Tout anagramme de DENOMBREMENT est composé de 12 lettres. Pour constituer un anagramme, il faut choisir :

\* la position des 3 lettres E :  $\binom{12}{3}$  possibilités,

\* la position des 2 lettres M parmi les positions restantes :  $\binom{9}{2}$  possibilités,

\* la position des 2 lettres N parmi les positions restantes :  $\binom{7}{2}$  possibilités,

\* la position des lettres D, O, B, R, T parmi les positions restantes :  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  possibilités.

Finalement, il y a

$$\begin{aligned} \binom{12}{3} \times \binom{9}{2} \times \binom{7}{2} \times 5! &= \frac{12!}{3!9!} \times \frac{9!}{7!2!} \times \left( \frac{7!}{5!2!} \right) \times 5! \\ &= \frac{12!}{3!2!2!} \\ &= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 2 \times 2} \\ &= 11 \times 5 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \\ &= 19\,958\,400 \end{aligned}$$

anagrammes de DENOMBREMENT.

□

### Solution de l'exercice 6.

1. Pour obtenir un tel tirage il faut choisir :

\* les  $p_1$  boules blanches parmi les  $n_1$  boules blanches :  $\binom{n_1}{p_1}$ ,

\* les  $p_2$  boules noires parmi les  $n_2$  boules noires :  $\binom{n_2}{p_2}$ .

Finalement, le nombre de tels tirages est égal à  $\binom{n_1}{p_1} \binom{n_2}{p_2}$ .

2. Un tirage est une succession de  $p$  boules numérotées. Pour obtenir  $p_1$  boules blanches et  $p_2$  noires, il faut :

\* choisir la position des boules blanches :  $\binom{p}{p_1}$  possibilités,

\* choisir les numéros (distincts) des boules blanches :  $n_1 \times (n_1 - 1) \times \dots \times (n_1 - p_1 + 1) = \frac{n_1!}{p_1!}$  possibilités,

\* choisir les numéros (distincts) des boules noires sur les emplacements restants :  $\frac{n_2!}{p_2!}$  possibilités.

Finalement, le nombre de tels tirages est égal à :

$$\binom{p}{p_1} \times \frac{n_1!}{p_1!} \times \frac{n_2!}{p_2!}.$$

3. Un tirage est une succession de  $p$  boules numérotées. Pour obtenir  $p_1$  boules blanches et  $p_2$  noires, il faut :

\* choisir la position des boules blanches :  $\binom{p}{p_1}$  possibilités,

\* choisir les numéros des boules blanches :  $n_1^{p_1}$  possibilités,

- \* choisir les numéros des boules noires sur les emplacements restants :  $n_2^{p_1}$  possibilités.

Finalement, le nombre de tels tirages est égal à :

$$\binom{p}{p_1} \times n_1^{p_1} \times n_2^{p_2}.$$

□

### Solution de l'exercice 7.

1. Lorsque toutes les figurines sont de la même couleur, il y a une unique façon de les arranger.

2. Pour aligner les figures il faut choisir :

- \* la position des 2 figures rouges :  $\binom{20}{2}$  façons,
- \* les figures blanches sont placées sur les emplacements restants.

Il y a ainsi  $\binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$  alignements possibles.

3. Pour aligner les figures il faut choisir :

- \* la position des 3 figures jaunes :  $\binom{20}{3}$  possibilités,
- \* la position des 5 figures rouges sur les emplacements restants :  $\binom{17}{5}$  possibilités,
- \* les figures blanches sont placées sur les emplacements restants.

Le nombre d'alignements possibles est donc égal à

$$\begin{aligned} \binom{20}{3} \times \binom{17}{5} &= \frac{20!}{3!12!5!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13}{6^2} \\ &= 19 \times 17 \times 8 \times 1514 \times 14 \times 13 = 7\,054\,320. \end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 8.

1. Pour avoir une seule paire dans une main de 5 cartes, on choisit :

- \* la valeur faciale de la paire : 13 possibilités,
- \* les deux couleurs de chacune des cartes de la paire :  $\binom{4}{2}$  possibilités,
- \* les valeurs des autres cartes qui doivent être distinctes et distinctes de celles de la paire :  $\underbrace{\binom{12}{3}}_{4^3}$  possibilités,
- \* les couleurs des autres cartes :  $4^3$  possibilités.

Le nombre de mains emportant exactement une paire est donc égal à :

$$13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1\,098\,240.$$

2. Pour avoir 5 cartes consécutives (indépendamment de la couleur), on choisit :

- \* la plus petite des cartes qui doit être choisie parmi les cartes de 1 à 10 : 10 possibilités,
- \* la couleur de chacune des cartes :  $4^5$ .

Le nombre de mains comportant une suite de 5 cartes est donc égal à :

$$10 \times 4^5 = 10\,240.$$

3. Pour avoir 2 paires distinctes de cartes, on choisit :

- \* la valeur faciale de chacune des paires :  $\binom{13}{2}$  possibilités,
- \* la couleur de chacune des cartes de la première paire :  $\binom{4}{2}$  possibilités,
- \* la couleur de chacune des cartes de la seconde paire :  $\binom{4}{2}$  possibilités,
- \* la valeur faciale de la carte restante : 11 possibilités,
- \* la couleur de la carte restante : 4 possibilités.

Le nombre de mains comportant exactement 2 paires de valeurs distinctes est donc égal à

$$\binom{13}{2} \binom{4}{2}^2 \times 11 \times 4 = 123\,552.$$

4. Pour avoir 5 cartes de la même couleur, on choisit :

- \* la couleur des cartes : 4 possibilités,
- \* les 5 cartes de cette couleur :  $\binom{13}{5}$  possibilités.

Au final, le nombre de mains comportant 5 cartes de la même couleur est égal à

$$4 \binom{13}{5} = 5148.$$

La probabilité vaut environ 0.00198.

(on pourrait vouloir ici soustraire les 40 quintes flushes)

□

**Solution de l'exercice 9.** On modélise le problème en numérotant les figurines de 1 à 20.

**1.** On suppose que les oiseaux sont les figurines numérotées 1 et 2. Pour qu'elles soient côte à côte, il suffit de choisir :

- \* les positions  $(i, i+1)$  qu'elles prennent dans l'alignement : 19 possibilités,
- \* la position de la figure 1 et celle de la figure 2 sur ces 2 emplacements : 2 possibilités,
- \* la position des 18 figurines restantes sur les emplacements restants :  $18!$  possibilités.

Le nombre d'alignements est donc égal à

$$19 \cdot 2 \cdot 18!.$$

Étant donné qu'il y a  $20!$  alignements distincts, la proportion des alignements où les 2 oiseaux sont côte à côte est donc égale à :

$$\frac{2 \cdot 19!}{20!} = \frac{1}{10}.$$

**2ème méthode.** On place les deux oiseaux côte à côte. Ensuite,

- \* l'animal suivant peut être placé soit à gauche soit à droite du couple ;
- \* l'animal suivant a 3 positions possibles ;
- \* ...

Ainsi, le nombre de positions est égal à (en comptant qu'il y a deux manières de constituer le couple d'oiseaux) :

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 19$$

**2.** On étudie l'événement complémentaire où tous les oiseaux ont au moins une figurine entre eux. Il y a 5 oiseaux et 15 figurines d'autres animaux.

- \* Soit le dernier oiseau est en dernière position. Il faut alors placer 4 couples (oiseau, autre) et 11 (autres) parmi les 19 places restantes, i.e.  $\binom{15}{4}$ . Il y a, pour chacune de ces positions,  $5! \cdot 11!$  manières de disposer les figurines sur ces positions.

- \* Sinon, il y a 5 couples (oiseau, autre) et 10 (autres) à disposer parmi les 20 places, i.e.  $\binom{15}{5}$ . Il y a, pour chacune de ces positions,  $5! \cdot 15!$  manières de disposer les figurines sur ces positions.

Ainsi, le nombre d'alignements où deux oiseaux sont côte à côte est égal à :

$$20! - 5! \cdot 15! \left( \binom{15}{4} + \binom{15}{5} \right).$$

**2ème méthode.** On note  $o_1$  (resp.  $o_2, \dots, o_5$ ) la position du premier (resp. deuxième, ..., cinquième) oiseau dans l'alignement. On note  $n_i$  le nombre d'animaux (non oiseaux) alignés avant la position  $o_i$ . Alors, en notant  $i_j = n_1 + \dots + n_j$ , on obtient

$$0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq 15.$$

Ainsi, il y a

- \*  $\binom{16}{5}$  manières de choisir le quintuplet  $(i_1, \dots, i_5)$  donc les positions des oiseaux.
- \*  $5!$  façons de choisir les oiseaux qui vont sur ces positions,
- \*  $15!$  façons de choisir les animaux qui vont sur les positions restantes.

Le nombre d'alignements où il y a deux oiseaux côte à côte est donc égal à

$$20! - \binom{16}{5} \times 15! \times 5! = 20! - \frac{16! \times 15!}{11!}.$$

**3ème méthode.** On place les animaux itérativement :

- \* on place les animaux qui ne sont pas des oiseaux : 15! possibilités,
- \* on place le premier oiseau dans cette succession (en comptant les extrémités) : 16 possibilités,
- \* on place le second oiseau, mais pas à côté du premier : 15 places,
- \* ...
- \* on place le cinquième oiseau, mais pas à côté des précédents : 12 possibilités.

On obtient ainsi  $20! - 15! \cdot 16 \cdots 12 = \frac{15! \cdot 16!}{11!}$  placements possibles.

La proportion des alignements où deux oiseaux sont côte à côte est donc égale à

$$1 - \frac{15! \cdot 16!}{11! \cdot 20!} = \frac{232}{323}$$

□

## II - Coefficients binomiaux

### Solution de l'exercice 10.

1. Constituer une équipe revient à choisir  $k$  étudiants parmi les  $n + p$  étudiants de la filière D2. Il y a ainsi  $\binom{n+p}{k}$  équipes différentes qui peuvent être constituées.

2. Dans l'équipe de  $k$  étudiants, si  $j$  sont en 1<sup>re</sup> année, les  $k - j$  restants sont en 2<sup>e</sup> année. On choisit donc :

- \*  $j$  étudiants en 1<sup>re</sup> année :  $\binom{n}{j}$  possibilités,
- \*  $k - j$  étudiants en 2<sup>e</sup> année :  $\binom{p}{k-j}$  possibilités.

Le nombre d'équipes où  $j$  étudiants sont en 1<sup>re</sup> et  $k - j$  étudiants sont en 2<sup>e</sup> année est donc égal à  $\binom{n}{j} \times \binom{p}{k-j}$ .

3. Pour constituer l'équipe, on a deux façons de faire :

- \* soit on choisit directement  $k$  étudiants parmi les  $n + p$ , soit  $\binom{n+p}{k}$  possibilités,
- \* soit on commence par choisir le nombre  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$  d'étudiants de 1<sup>re</sup> année qui constitueront l'équipe. Il y a alors  $\binom{n}{j} \binom{p}{k-j}$  équipes possibles. Comme  $j$  varie entre 0 et  $k$ , le nombre d'équipes possibles est égal à

$$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{p}{k-j}.$$

Finalement, on a utilisé deux stratégies pour compter le même nombre d'équipes et

$$\binom{n+p}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{p}{k-j}.$$

□

### Solution de l'exercice 11.

1. Effectuer un tirage revient à extraire  $k + 1$  éléments d'un ensemble à  $n + 1$  éléments. Le nombre de tirages possibles est donc égal à  $\binom{n+1}{k+1}$ .

2. a) Le numéro 1 étant choisi, les autres boules doivent être choisies comme une partie de  $\{2, \dots, n + 1\}$ . Il y a ainsi  $\binom{n}{k}$  tirages possibles.

b) Le numéro 2 étant choisi, les autres boules doivent être choisies comme une partie de  $\{3, \dots, n + 1\}$ . Il y a ainsi  $\binom{n-1}{k}$  tirages possibles.

c) Le numéro  $k$  étant choisi, les autres boules doivent être choisies comme une partie de  $\{k + 1, \dots, n + 1\}$ . Il y a ainsi  $\binom{n+1-k}{k}$  tirages possibles.

3. Sachant que  $k + 1$  boules sont extraites de l'urne,

- \* soit le plus petit numéro tiré est égal à 1,
- \* soit le plus petit numéro tiré est égal à 2,
- \* ...,
- \* soit le plus petit numéro tiré est égal à  $n - k + 1$ .

Ainsi, en reprenant les résultats de la question précédente,

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n-j+1}{k} = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k}.$$

□

### Solution de l'exercice 12.

1. Pour choisir un  $k$ -uplet où les répétitions sont possibles, on choisit :

- \* le premier élément du  $k$ -uplet :  $n$  possibilités,
- \* le deuxième élément du  $k$ -uplet :  $n$  possibilités,
- \* ...,
- \* le dernier élément du  $k$ -uplet :  $n$  possibilités.

Finalement, le nombre de  $k$  uplet avec répétitions éventuelles est égal à  $n^k$ .

**Remarque.** Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des fonctions de  $\llbracket 1, k \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

2. Pour choisir un  $k$ -uplet où les répétitions sont impossibles, on choisit :

- \* le premier élément du  $k$ -uplet :  $n$  possibilités,
- \* le deuxième élément du  $k$ -uplet, distinct du précédent :  $n - 1$  possibilités,
- \* ...,
- \* le dernier élément du  $k$ -uplet, distinct des précédents :  $n - k + 1$  possibilités.

Finalement, le nombre de  $k$ -uplets sans répétition est égal à

$$n \times (n - 1) \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

**Remarque.** Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des applications injectives de  $\llbracket 1, k \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**3.** Soit  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ . Alors,  $\{i_1, \dots, i_k\}$  est une partie de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $k$  éléments.

Réciproquement, si on considère une partie de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $k$  éléments, il existe une unique manière de les ordonner de manière strictement croissante.

Ainsi, cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $k$  éléments. Son cardinal est donc égal à :  $\binom{n}{k}$ .  $\square$

### III - Compter autrement

#### Solution de l'exercice 13.

**1.** Pour les petites valeurs de  $n$  :

- \* il existe un unique mur constitué d'une brique, donc  $M_1 = 1$ .
- \* il existe deux murs constitués de deux briques : soit les briques sont côte à côte, soit elles sont l'une sur l'autre. Ainsi,  $M_2 = 2$ .
- \* en décrivant le mur selon le nombre de briques par colonnes, on obtient les combinaisons : 3, 2/1, 1/2, 1/1/1. Ainsi,  $M_3 = 4$ .

**2.** On peut conjecturer que  $M_n = 2^{n-1}$ .

**3.** Étant donné un mur, on pose la première brique au sol. La deuxième sera soit sur la première, soit à côté. La troisième sera soit sur la deuxième, soit sur le sol juste à droite. La quatrième sera soit sur la troisième, soit sur le sol juste à droite,...

Un mur peut ainsi être décrit par une succession d'instructions *dessus*, *sol* décrivant la position des briques à partir de la deuxième.

**4.** Comme la succession de *dessus* / *sol* permet de construire  $2^{n-1}$ , il y a  $2^{n-1}$  murs possibles et  $M_n = 2^{n-1}$ .

**5.** La première colonne de briques est constituée d'un nombre  $k$  de briques variant entre 1 et  $n$ . La suite des colonnes constitue ensuite un mur contenant  $n - k$  briques.

Ainsi, en effectuant le changement de variables  $j = k - 1$ ,

$$M_n = \sum_{k=1}^n M_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} M_j.$$

$\square$

#### Solution de l'exercice 14.

**1.** Soit  $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{C}_{0,p}$ . Alors,  $\sum_{i=1}^p u_i = 0$ . Comme une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul, alors  $u_1 = \dots = u_p = 0$ .

Ainsi,  $\mathcal{C}_{0,p} = \{(0, \dots, 0)\}$  et  $C_{0,p} = 1$ .

**2.** Soit  $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{C}_{1,p}$ . Alors,  $\sum_{i=1}^p u_i = 1$  donc il existe un entier  $i_0$  tel que  $u_{i_0} = 1$  et pour tout  $i \neq i_0$ ,  $u_i = 0$ .

Ainsi,  $\mathcal{C}_{1,p} = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$  et  $C_{1,p} = p$ .

**3.** Étant donné  $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{C}_{n,p}$ , on construit la suite de symboles :

$$\underbrace{\circ \dots \circ}_{u_1 \text{ symboles}} \mid \underbrace{\circ \dots \circ}_{u_2 \text{ symboles}} \mid \dots \mid \underbrace{\circ \dots \circ}_{u_p \text{ symboles}},$$

On associe ainsi à tout élément de  $\mathcal{C}_{n,p}$  une unique succession de symboles  $\circ$  et  $\mid$  contenant exactement  $\sum_{i=1}^n u_i = n$  symboles  $\circ$  et  $p - 1$  symboles  $\mid$ .

**4.** D'après la question précédente, à tout élément de  $\mathcal{C}_{n,p}$  est associée une unique suite de  $n + p - 1$  symboles constituée d'exactly  $n$  symboles  $\circ$  et  $p - 1$  symboles  $\mid$ .

Il y a ainsi autant de suites différentes que de façon de placer les  $n$  symboles  $\circ$  parmi les  $n + p - 1$  symboles. Finalement,

$$C_{n,p} = \binom{n+p-1}{n}.$$

$\square$

**Solution de l'exercice 15.** On distingue les couples  $(X, Y)$  tels que  $X \subset Y$  en fonction du cardinal de la partie  $Y$ . Si le cardinal de  $Y$  vaut  $k$  :

- \* on choisit la partie  $Y$  de cardinal  $k$  :  $\binom{n}{k}$  possibilités ;
- \* on choisit la partie  $X$  incluse dans  $Y$  :  $2^k$  possibilités.

Comme  $k$  varie entre 0 et  $n$ , on obtient

$$\begin{aligned} |\{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 ; X \subset Y\}| &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \\ &= 3^n, \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

**2<sup>e</sup> méthode.** Définir  $X \subset Y \subset E$  revient, pour chaque élément de  $E$ , à choisir :

- \* s'il appartient à  $X$  et à  $Y$ ,
- \* s'il appartient à  $Y$  mais pas à  $X$ ,
- \* s'il n'appartient ni à  $X$  ni à  $Y$ .

Ainsi, pour chaque élément de  $E$ , on a 3 possibilités et le nombre de parties telles que  $X \subset Y \subset E$  est égale à

$$\underbrace{3 \times \cdots \times 3}_{n \text{ facteurs}} = 3^n.$$

□

### Solution de l'exercice 16.

**1.** Décrire une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $E$  revient à indiquer, pour tout couple  $(x, y) \in E^2$  si  $x\mathcal{R}y$  ou si  $x \not\mathcal{R}y$ . Ainsi, pour chaque couple, il y a 2 possibilités. Comme il y a  $n^2$  couples, le nombre de relations binaires est donc égal à  $2^{n^2}$ .

On peut représenter ces relations binaires dans un tableau, où si  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ , on indique un 1 à l'intersection de la  $i^e$  ligne et de la  $j^e$  colonne si et seulement si  $x_i\mathcal{R}x_j$ .

**2.** Si la relation est symétrique et  $x_i\mathcal{R}x_j$ , alors  $x_j\mathcal{R}x_i$ . Ainsi, la détermination du tableau précédent pour un numéro de colonne supérieur ou égal au numéro de la ligne, permet de construire automatiquement l'autre partie du tableau.

Dans le demi-tableau supérieur, le nombre de cases est égal à

$$n + (n - 1) + \cdots + 1 = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Ainsi, le nombre de relations binaires symétriques est égal à  $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ .

**3.** Si la relation est symétrique et réflexive, le tableau contient des 1 sur sa diagonale principale (par réflexivité :  $x_i\mathcal{R}x_i$ ) et la détermination de la partie supérieure permet de définir la partie inférieure (par symétrie). Dans le demi-tableau strictement supérieur, le nombre de cases est égal à

$$(n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1 = \frac{(n - 1)n}{2}.$$

Ainsi, le nombre de relations binaires symétriques et réflexives est égal à  $2^{\frac{(n-1)n}{2}}$ .

**4.** Si la relation est réflexive, le tableau contient des 1 sur toute sa diagonale principale car  $x_i\mathcal{R}x_i$ .

Si la relation est antisymétrique, alors

$$x_i\mathcal{R}x_j \text{ et } x_j\mathcal{R}x_i \Rightarrow i \neq j.$$

Ainsi, si  $i \neq j$ ,

- \* soit la case  $(i, j)$  vaut 0 et la case  $(j, i)$  vaut 0,
- \* soit la case  $(i, j)$  vaut 1 et la case  $(j, i)$  vaut 1,
- \* soit la case  $(i, j)$  vaut 0 et la case  $(j, i)$  vaut 0.

Ainsi, pour chaque case  $(i, j)$  telle que  $i < j$ , il y a 3 possibilités.

Le nombre de relations réflexives et antisymétriques est donc égal à  $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ . □