Calcul de $\zeta(2)$
Deux démonstrations

■ ■ ■

On cherche dans cet exercice à calculer $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Partie I : Avec des polynômes

Pour tout entier naturel n, on pose

$$Q_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right].$$

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

1. a) Montrer que $Q_n \in \mathbb{R}[X]$.

b) Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de Q_n.

2. a) Déterminer les racines de Q_n.

b) En déduire que

$$Q_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

3. Une somme de sinus.

a) Montrer que $Q_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}X^{2n-2k}$.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.

c) Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$.

4. Calcul de la limite.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{cotan}\ x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.

b) En déduire $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

5. Approximations.

a) Montrer que $0 \leqslant \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{2(2n+1)}$.

b) Écrire, en `Python`, une fonction `approx(p)` qui prend comme argument un entier naturel `p` et renvoie une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à $10^{-\mathtt{p}}$ près.

Partie II : Avec la fonction cotangente

On rappelle que :

* la fonction cotangente est le rapport $\operatorname{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$.
* Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $a_n \neq 0$ et $P(x) = a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polynôme de degré n. Le polynôme P possède au plus n racines et si $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ sont les racines du polynôme P, alors $P(x) = a_n\prod_{k=1}^{n}(x-\zeta_k)$.

6. Étude de fonction.

a) Déterminer le domaine de définition puis la parité de la fonction cotan.

b) Déterminer le domaine de dérivabilité puis la valeur de la dérivée de la fonction cotan.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction cotan sur $]-\pi,\pi[$, puis sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

7. Identifier les fonctions f à valeurs réelles deux fois dérivables solutions de l'équation différentielle $y''-2y = 2\operatorname{cotan}^3 x$ sur $]0,\pi[$ telles que $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

8. Quelques formules trigonométriques. Soient x, y deux réels.

a) Exprimer $\operatorname{cotan}(x+y)$ en fonction de $\operatorname{cotan} x$ et $\operatorname{cotan} y$, lorsque ces quantités sont définies.

b) Exprimer $\operatorname{cotan} x - 2\operatorname{cotan}(2x)$ en fonction de $\tan x$, lorsque ces quantités sont définies.

9. Bijection réciproque.

a) Justifier l'existence d'une bijection réciproque de la fonction cotangente à valeurs dans $]0,\pi[$. Préciser son domaine de définition et sa monotonie. Celle-ci sera notée Acotan.

b) Préciser le domaine de définition et la valeur de la dérivée de la fonction Acotan.

c) Pour tout $x \in]-\pi, \pi[\backslash\{0\}$, déterminer les valeurs $\text{cotan}(\text{Acotan}(x))$ et $\text{Acotan}(\text{cotan}(x))$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sin \text{Acotan}(x)$.

10. Calcul d'un produit. Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et x un réel positif n'appartenant pas à l'ensemble $\{\frac{k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}\}$.

a) Pour tout nombre complexe $\lambda = e^{2inx}$ de module 1, déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $(z-1)^n - \lambda(1+z)^n = 0$.

b) En déduire, en fonction de la parité de n, la valeur de

$$\prod_{k=0}^{n-1} \text{cotan}\left(x + \frac{k\pi}{n}\right).$$

11. Calcul de $\zeta(2)$.
Soit m un entier naturel et x un réel.

a) Montrer que

$$\sin\{(2m+1)x\} = (\sin x)^{2m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (\text{cotan}\, x)^{2m-2k}.$$

b) On considère le polynôme : $P_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k X^{m-k}$.

Déterminer le terme de plus haut degré de P_m puis démontrer que l'ensemble des racines de P_m est $\left\{\text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2m+1}, k \in [\![1, m]\!]\right\}$.

c) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{m} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

d) En définissant la fonction cosécante par $\csc = \frac{1}{\sin}$, en déduire que $\sum\limits_{k=1}^{m} \csc^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m+2)}{3}$.

e) Montrer que pour tout $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\text{cotan}^2 y < \frac{1}{y^2} < \csc^2 y$.

f) En déduire un encadrement de $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$.

g) Déterminer la limite de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}\right)_{m \in \mathbb{N}^\star}$.