

■ Chapitre 12 ■

Intégrales à paramètre

Notations.

- \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- I, J désignent des intervalles de \mathbb{R} non vides et non réduits à un point.



Exercice 1.

1. Soit $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R} . Déterminer $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n$ puis $\int_{\mathbb{R}} \left(\lim_n f_n \right)$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $f(x) = n^2 x$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$ et $f(x) = n^2 (\frac{2}{n} - x)$ si $x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$. Déterminer $\lim_n \left(\int_{[0,1]} f_n \right)$ puis $\int_{[0,1]} \left(\lim_n f_n \right)$.

I. Suites & Séries de fonctions

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée, Admis).

Soient (f_n) et f des fonctions de I dans \mathbb{K} telles que

- (i). **Régularité.** $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^-(I, \mathbb{K})$.
- (ii). **Convergence.** (f_n) converge simplement vers f .
- (iii). **Régularité de la limite.** f est continue par morceaux.
- (iv). **Domination.** Il existe une fonction φ définie sur I telle que
 - * φ est à valeurs positives.
 - * $\varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$.
 - * $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$.

Alors, pour tout entier naturel n , f_n est intégrable, f est intégrable et

$$\int_I \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n \right).$$

Exercice 2.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dt}{1 + nt^n} = 1$.
2. **Intégrale de GAUSS.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0, \sqrt{n}]}(x)$.
 - a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+} f_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
 - b) Déterminer $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

On rappelle le résultat sur les intégrales de **WALLIS** : $\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t) dt \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Théorème 2 (Théorème d'intégration terme à terme, Admis).

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans \mathbb{K} telle que

(i). **Régularité & Intégrabilité.** $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.

(ii). **Convergence.** $\sum f_n$ converge simplement sur I .

(iii). **Régularité de la limite.** $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^-(I, \mathbb{K})$.

(iv). **Domination.** $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right).$$

Exercice 3. Montrer que

1. $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n^2} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$

2. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.$ Déterminer une approximation à 10^{-3} près de cette intégrale.

3. On souhaite montrer que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-\sqrt{nt}} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$

a) Montrer que le théorème précédent ne s'applique pas.

b) Conclure en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles.

II. Intégrales dépendant d'un paramètre**Théorème 3 (Continuité sous le signe intégral).**

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

(i). **Régularité en le paramètre.** $\forall t \in J, x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .

(ii). **Régularité.** $\forall x \in I, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J .

(iii). **Domination.** Il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R}_+)$ tel que $\forall (x, t) \in I \times J, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Alors, $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

Exercice 4.

1. Soit $F : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{x+t^3}.$

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+.$

b) Déterminer un équivalent de F en $+\infty.$

On pourra utiliser le changement de variables $\varphi : u \mapsto u/\sqrt[3]{x}.$

2. Fonction Gamma. Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

3. Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sinh(t)}{t} dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de F .



b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

Théorème 4 (Dérivation sous le signe intégral).

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

(i). **Régularité en le paramètre.** $\forall t \in J, x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

(ii). **Intégrabilité.** $\forall x \in I, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .

(iii). **Régularité de la dérivée.** $\forall x \in I, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .

(iv). **Domination de la dérivée.** Il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$.

Alors, $F : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall x \in I, F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sinh t}{t} e^{-xt} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$.

2. Soit $F_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^{n+1}}$. Montrer que $F'_n(x) = -2(n+1)x F_{n+1}(x)$. En déduire que, pour tout réel non nul, $F_n(x) = \frac{\pi(2n)!}{(2x)^{2n+1}(n!)^2}$.

Corollaire 5.

Soient $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que

(i). **Régularité en le paramètre.** $\forall t \in J, x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^k sur I .

(ii). **Régularité des dérivées.** $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in I, t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .

(iii). **Domination des dérivées.**

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \exists \varphi_j \in \mathcal{L}^1(J, \mathbb{R}_+) ; \forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) \right| \leq \varphi_j(t).$$

Alors, $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k sur I et

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in I, g^{(j)}(x) = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt.$$

Exercice 6.

1. Calculer les dérivées successives de la fonction Γ .

2. Fonction de STIELTJES. Calculer les dérivées successives sur \mathbb{R}_+ de $S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$.



Transformée de LAPLACE

Exercice 7. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on note, lorsqu'elle converge, $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$. La fonction $\mathcal{L}(f)$ est la transformée de LAPLACE de f .

1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leur transformée de LAPLACE en précisant son domaine de définition :

a) $t \mapsto 1$.

b) $t \mapsto e^{\lambda t}$.

c) $t \mapsto t^n$.

2. On suppose que f est bornée. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

3. **Théorème de la valeur finale.** On suppose qu'il existe un réel ℓ non nul tel que $\lim_{+\infty} f(x) = \ell$. Déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)$ en 0.

On suppose qu'il existe $p_0 > 0$ tel que, pour tout $p > p_0$, $t \mapsto e^{-pt} f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

4. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est définie et continue sur $]p_0, +\infty[$.

5. **Théorème de la valeur initiale.** On note $\ell = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$. Déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)$ en $+\infty$.



Programme officiel (PSI)

Intégration - e, f (p. 18, 19)

Mathématiciens

WALLIS John (23 nov. 1616 à Ashford-28 oct. 1703 à Oxford).

LAPLACE Pierre-Simon (23 mar. 1749 à Beaumont-en-Auge-5 mar. 1827 à Paris).

GAUSS Johann Carl Friedrich (30 avr. 1777 à Brunswick-23 fév. 1855 à Göttingen).

STIELTJES Thomas Jan (29 déc. 1856 à Zwolle-31 déc. 1894 à Toulouse).