

**Révisions.** Intégrales à paramètre.

### Espaces vectoriels préhilbertiens réels

## I. Produit scalaire

### I.1 Définitions

Produit scalaire.

Espace vectoriel préhilbertien / euclidien.

### I.2 Inégalités

Inégalité de Cauchy-Schwarz, de Minkowski (avec les cas d'égalité).

### I.3 Norme & Distance euclidiennes

Norme euclidienne, Identités du parallélogramme, de polarisation.

## II. Orthogonalité

### II.1 Définitions

Orthogonalité & Somme directe.

Théorème de Pythagore.

### II.2 Bases orthonormées

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Base orthonormée incomplète.

## III. Géométrie

### III.1 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Unicité du supplémentaire orthogonal.

Projection / Symétrie orthogonale.

Inégalité de Bessel.

## III.2 Distances

Distance à un sev, Expression dans une base orthonormée.

## III.3 Hyperplans

Théorème de représentation des formes linéaires, Normale.

Distance à un hyperplan.

## Endomorphismes d'un espace euclidien

## IV. Endomorphismes symétriques

Définitions, structure d'espace vectoriel.

Théorème spectral, version matricielle.

## V. Isométries vectorielles

Endomorphisme orthogonal (préservation du produit scalaire), Stabilité par composition et inverse.

Caractérisation en termes de norme.

Caractérisation en termes de b.o.n..

Groupe spécial orthogonal, Structure.

Réflexion.

Matrices orthogonales, Changements de bases orthonormées.

## VI. Dimensions 2 et 3

Orientation, Lien avec  $SO$ , Orientation d'un hyperplan.

Produit mixte, Produit vectoriel.

Automorphismes orthogonaux du plan : Décomposition, Rotations, Commutativité.

Automorphismes orthogonaux de l'espace : Description, Détermination pratique.