

# T.D. I - Études de fonctions

## I - Inégalités

**Exercice 1.** Montrer que pour tout  $n$  entier naturel non nul,

$$\frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n+1}.$$

**Exercice 2.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2).$$

## II - Étude de trinômes

**Exercice 3.** Soit  $f : x \mapsto x^2 + x + 1$ . Étudier le signe de  $f$ .

**Exercice 4.** Soit  $h$  définie pour tout  $x > 0$  par  $h(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2}$ . Déterminer, en fonction de  $x$ , le signe de  $h(x)$ .

**Exercice 5.** Soit  $f : x \mapsto \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ . Déterminer, en fonction de  $x$ , le signe de  $f(x)$ .

## III - Étude de signes

**Exercice 6.** Soit  $g$  la fonction définie pour tout  $x > 0$  par  $g(x) = 1 - \ln(x)$ . Dresser le tableau de signes de  $g$ .

**Exercice 7.** Soit  $g$  la fonction définie pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$  par  $g(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$ . Dresser le tableau de signe de  $g$ .

**Exercice 8.** Soit  $g$  la fonction définie pour tout  $x > 0$  par  $g(x) = \frac{-3+2\ln(x)}{x^3}$ . Dresser le tableau de signes de  $g$ .

**Exercice 9.** Soit  $f : x \mapsto \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$ . Dresser le tableau de signes de  $f$ .

**Exercice 10.** Soit  $f$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t/2} - e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer le signe de  $f$ .

## IV - Calculs de dérivées

**Exercice 11.** Pour tout  $x$  réel, on pose  $h(x) = \ln(1 + e^x)$ . Déterminer la dérivée de  $h$ .

**Exercice 12.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .

1. Montrer que la dérivée de  $f$  vérifie pour tout  $x$  réel,  $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ .
2. En déduire le tableau de variations de  $f$ .
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0.
4. Calculer la dérivée seconde  $f''$  de  $f$ .

**Exercice 13.** Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x$  réel par  $f(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}$ .

1. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
2. Déterminer le nombre de réels  $\lambda$  tels que  $f(\lambda) = 0$ .

**Exercice 14.** Soit  $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ .

1. Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$ .
2. Déterminer la dérivée seconde de  $f''$  de  $f$ .

**Exercice 15.** Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$  par  $f(x) = x \ln(1+x)$ .

1. Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$ .
2. Déterminer la dérivée seconde de  $f''$  de  $f$ .

**Exercice 16.** Soit  $f$  définie pour tout  $x \geq 1$  par  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .

1. Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$ .
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $e^{3/2}$ .
3. Déterminer la dérivée  $f''$  de  $f$ .

## V - Calculs de limites

**Exercice 17.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
2. Montrer que pour tout  $x$  réel  $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
3. Interpréter graphiquement ce résultat ?

**Exercice 18.** Soit  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$ .

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

**Exercice 19.** Soit  $h$  définie pour tout  $x > 0$  par  $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$ .

1. Factoriser l'expression de  $h(x)$  par le réel  $\frac{1}{x}$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ .
2. Factoriser l'expression de  $h(x)$  par le réel  $x$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .

**Exercice 20.** Soit  $g$  définie pour tout  $x > 0$  par  $g(x) = x - \ln(x)$ .

1. Calculer  $g(1)$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

**Exercice 21.** Soit  $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

## VI - Limites à droite / à gauche

**Exercice 22.** Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $f_n$  définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} nt^{n-1} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les limites à gauche et à droite de  $f_n$  en 0.
2. Déterminer les limites à gauche et à droite de  $f_n$  en 1.

**Exercice 23.** Soit  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Déterminer les limites à gauche et à droite de  $f$  en 0.

**Exercice 24.** Soit  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 25.** Soit  $k$  un réel non nul. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(t) = \begin{cases} k \frac{t}{1+t} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .