T.D. VI - Espaces vectoriels

I - Systèmes linéaires

Solution de l'exercice 1.

1. On commence par mettre la ligne ayant le coefficient de x le plus simple

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z &= 6 \quad {\scriptstyle L_1\leftrightarrow L_2} \\ 2x-y+4z &= 2 \quad {\scriptstyle L_2\leftrightarrow L_1} \\ 4x+3y-2z &= 14 \end{cases}$$

On élimine ensuite la variable x dans les deuxième et troisième lignes

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z &= 6 \\ 5y-10z &= 10 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow 2L_1-L_2} \\ 5y-10z &= 10 \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow -4L_1+L_3} \end{cases}$$

On simplifie les équations

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z &= 6 \\ y-2z &= 2 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow \frac{1}{5}L_2} \\ -y+2z &= -2 \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow \frac{1}{5}L_3} \end{cases}$$

On élimine la variable y de la troisième ligne

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z &= 6 \\ y-2z &= 2 \\ 0 &= 0 \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow L_2+L_3} \end{cases}$$

En supprimant les équations triviales, on obtient un système triangulaire

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z &= 6 \\ y-2z &= 2 \end{cases}$$

La variable z est une variable libre.

$$\Leftrightarrow \exists\,\lambda\in\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x+2y-3z &= 6 \\ y-2z &= 2 \\ z &= \lambda \end{cases}$$

On résout alors

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \Leftrightarrow \exists\,\lambda\in\mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x &= 6-2\lambda+3\lambda \\ y &= 2+2\lambda \\ z &= \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$

Finalement, le système $(\mathscr{S})$ possède une infinité de solutions. L'ensemble de ces solutions est

$$\boxed{\{(2-\lambda, 2+2\lambda, \lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\} = \{(2,2,0)+\lambda(-1,2,1),\ \lambda\in\mathbb{R}\}.}$$

2. Les sytème possède deux variables libres. Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{(5-\lambda-\mu, \lambda, \mu),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

3. $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ est solution de $(\mathscr{S}_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z &= -1 \\ -7y+11z &= 10 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-3L_1} \\ -7y+11z &= 7 \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3-5L_1} \end{cases}$.

Les deuxième et troisième lignes sont incompatibles, le système ne possède aucune solution. L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\emptyset.}$$

4.

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ est solution de } (\mathscr{S}_4) \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+4z &= -11 \quad {\scriptstyle L_1\leftarrow L_2} \\ 2x-3y+5z &= 8 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+ \\ y+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\,\lambda\in\mathbb{R}\ ;\ \begin{cases} x &= -17-22\lambda \\ y &= -14-13\lambda \\ z &= \lambda \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions du système $(\mathscr{S}_4)$ est infini et est donné par

$$\boxed{\{(-17-22\lambda, -14-13\lambda, \lambda)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

□

Solution de l'exercice 2. On raisonne par équivalences

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4 &= 2 \quad {\scriptstyle L_1\leftarrow L_2} \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4 &= 1 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_1} \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4 &= \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4 &= 2 \quad {\scriptstyle L_1\leftarrow L_2} \\ -5x_2+3x_3-7x_4 &= -3 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-2L_1} \\ 5x_2-3x_3+7x_4 &= \lambda-2 \quad {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3-L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4 &= 2 \quad {\scriptstyle L_1\leftarrow L_2} \\ -5x_2+3x_3-7x_4 &= -3 \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-2L_1} \\ 0 &= \lambda-5 \end{cases}$$

Si $\lambda = 5$, le sytème possède une infinité de solution. Si $\lambda \neq 5$, l'ensemble des solutions est l'ensemble vide. Finalement, l'unique solution est

$$\boxed{\lambda = 5.}$$

□

II - Familles de vecteurs

III - Questions plus théoriques