T.D. VIII - Intégration

I - Calculs d'intégrales

Exercice 1. (⚙) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}$.

2. $f_2(x) = \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}$.

3. $f_3(x) = x\sqrt{1-2x^2}$.

4. $f_4(x) = (\mathrm{e}^x+1)^3 \mathrm{e}^x$.

5. $f_5(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

6. $f_6(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}$.

7. $f_7(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

8. $f_8(x) = \frac{\ln^{27}(x)}{x}$.

Exercice 2. (Changements de variables, ⚙) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$.
$\varphi : u \mapsto \ln(u)$, $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}$.

2. $f_2(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.
$\varphi : u \mapsto u^2$.

3. $f_3(x) = \frac{1}{2x\ln(x)+x}$.
$\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^u$.

4. $f_4(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}$.
$\varphi : u \mapsto \sqrt{u-2}$.

Exercice 3. (Intégrations par parties, ⚙) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x\,\mathrm{e}^x$.

2. $f_2(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$.

3. $f_3(x) = x^2\ln(x)$.

Exercice 4. (⚙)

1. Montrer qu'il existe a, b réels tels que

$$\forall\, x \in [0,1],\ \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5. (Fonction bêta) Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

1. Pour q non nul, déterminer une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.

2. Exprimer la valeur de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

II - Inégalités

Exercice 6. (⚙) Montrer que $\frac{1}{3} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} \leqslant 1$.

Exercice 7. (✈)

1. Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t + \ln(n).$$

3. En utilisant une primitive de ln, en déduire la limite de la suite de terme général $\frac{\ln(n!)}{n\ln(n)}$.

Exercice 8. (✈) Pour tout $x \in [0,1]$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. En utilisant la concavité du logarithme, montrer que

$$\forall\, x \in]0,1[,\ \forall\, t \in]x^2,1[,\ \frac{2\ln(x)}{x^2-1}(t-1) \leqslant \ln(t) \leqslant t-1.$$

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1.

3. Montrer que f est dérivable sur $[0,1[$ et calculer sa dérivée.

Exercice 9. Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.

2. Étudier les variations de la suite (I_n).

3. En déduire que la suite (I_n) converge.

4. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

5. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 10. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. a) Calculer J_1.

b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire que (J_n) converge et déterminer sa limite.

2. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

b) Montrer que la suite (I_n) converge.

c) Montrer que la suite (nI_n) converge et déterminer sa limite.

III - Intégrales généralisées

Exercice 11. En comparant l'intégrande avec une fonction de référence, montrer que les intégrales suivantes convergent :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12. Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x\ln^2(x)\,\mathrm{d}x$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(t)\,\mathrm{d}t$.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$.
$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.

IV - Intégrales classiques

Exercice 13. (Expression intégrale de la factorielle,) Pour tout n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0.

2. Montrer que l'intégrale I_n converge.

3. Montrer que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

4. En déduire, pour tout n entier naturel, une expression simple de I_n.

Exercice 14. (Fonction Gamma d'Euler,) Pour tout réel x strictement positif, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $x > 0$.

a) Pour tout $t \in]0,1]$, rappeler la définition de t^{x-1}.

b) Déterminer un équivalent, lorsque $t \to 0$ de $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

d) Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$\forall\, t \geqslant a,\ t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t/2}.$$

e) En déduire que $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

f) En déduire que la fonction Γ est bien définie.

2. En utilisant une intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, M]$ puis en faisant tendre ε vers 0 et M vers $+\infty$, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. En déduire, pour tout n entier naturel, la valeur de $\Gamma(n+1)$.