■ ■ ■

Exercice 1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$, A non nulle.

1. a) Soit λ une valeur propre de A. Quelles sont les valeurs possibles pour λ ?

b) Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$.

2. On suppose que $\dim \operatorname{Ker} A = 1$.

a) En prenant $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Ker} A$, construire un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

b) En déduire que A est diagonalisable et exprimer A dans une base de diagonalisation.

3. On suppose que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Montrer que $A = \mathrm{Id}$.

4. Finalement, décrire toutes les matrices A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$.

Exercice 2. Soient les deux applications linéaires suivantes :

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (2z_1 - z_3, 3z_1 + z_2 + 2z_3)$$
$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (z_1, z_2) \mapsto (z_1 + z_2, -z_2, 2z_1 - z_2).$$

1. Déterminer H la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer K la matrice de v dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer le noyau de u. u est-elle injective ?

4. Déterminer l'image de u. u est-elle surjective ?

5. Calculer HK.

6. Montrer que $(HK)^2 = \lambda \times I_2$ où I_2 est la matrice identité de dimension 2 et λ est un scalaire (appartenant à $\mathbb{R}$) à déterminer.

7. En déduire sans (long) calcul que HK est inversible.

8. Déterminez $(u \circ v)^2$.