

■ Chapitre 9 ■

Suites et séries de fonctions

Notations.

- I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f désignent des fonctions définies sur I à valeurs dans \mathbb{K} (où \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

I. Modes de convergence

I.1 Convergence simple

Définition 1 (Convergence simple).

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction f si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, i.e.

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_{x,\varepsilon}, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Exercice 1. Étudier la convergence simple des fonctions définies par

1. $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ sur \mathbb{R}_+ .
2. $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ sur \mathbb{R} .
3. $f_n(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}$ sur \mathbb{R} .

Propriétés 1 (Propriétés stables par convergence simple).

On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f .

- (i). Si, à partir d'un certain, f_n est à valeurs positives, alors f est à valeurs positives.
- (ii). Si, à partir d'un certain rang, $x \mapsto f_n(x)$ est croissante, alors f est croissante.



Exercice 2.

1. Pour tout x réel et tout entier naturel non nul, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Prouver la convergence simple sur \mathbb{R} de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis étudier la convergence simple sur \mathbb{R} de la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout entier naturel n , on pose $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$. Prouver la convergence simple sur $[0, 1]$ de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis déterminer le comportement asymptotique de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Pour tout $x \in]0, 1]$ et tout entier naturel n non nul, on pose $f_n(x) = n^2 x$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = \frac{1}{x}$ si $\frac{1}{n} < x \leq 1$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, 1]$. Étudier la convergence des intégrales $\int_0^1 f_n(x) dx$ et $\int_0^1 f(x) dx$.

I.2 Convergence uniforme

Définition 2 (Convergence uniforme).

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall (x, n) \in I \times \mathbb{N}, [n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon].$$

Exercice 3. Pour tout entier naturel n , on pose $f_n : x \mapsto x^n$. Montrer que, pour tout réel $a \in]0, 1[$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, a]$ vers la fonction nulle.

Propriété 2 (Simple vs. Uniforme).

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f .



Exercice 4. Pour tout entier naturel n , on pose $f_n : x \mapsto x^n$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Définition 3 (Norme infinie).

Si f est une fonction bornée sur I , la *norme infinie* de f sur I est

$$\|f\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Propriété 3 (Norme de la convergence uniforme).

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction f si et seulement si, à partir d'un certain rang, la fonction $f_n - f$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, I} = 0$.

Exercice 5.

1. Pour tout réel positif x et tout entier naturel n , on pose $f_n(x) = \frac{x}{n} e^{-nx}$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

2. Pour tout réel x et tout entier naturel non nul n , on note $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur \mathbb{R} mais que f_n n'est pas bornée.

3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si $\sum f_n$ converge simplement sur I et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right\|_{\infty, I} = 0$.

Propriété 4 (Convergence uniforme & Majoration).

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f si et seulement s'il existe une suite numérique $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que, à partir d'un certain rang,

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq a_n.$$

Exercice 6.

1. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{x+k} \right)$ converge uniformément sur $[1, 2]$.

2. a) On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I . Alors, $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) Pour tout réel x et tout entier naturel n , on pose $f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément sur \mathbb{R}_+ .

Propriété 5 (Convergence uniforme sur tout segment).

On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f . Alors, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f .



Exercice 7. Montrer que la réciproque est fausse.

I.3 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 4 (Convergence normale).

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur I . La suite $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge normalement sur I si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, I}$ converge.

Exercice 8.



1. Montrer que s'il existe une suite (a_n) telle que $\sum a_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq a_n$, alors $\sum f_n$ converge normalement sur I .
2. Montrer que $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur \mathbb{R} .
3. Montrer que $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R} .

Propriété 6.

Si $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)$ converge normalement sur I , alors $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)$ converge uniformément sur I .



Exercice 9. En étudiant $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ sur $[1, 2]$, montrer que la réciproque de ce théorème est fausse.

Propriété 7 (Convergence normale sur tout segment).

On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur I . Alors, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.



Exercice 10. En utilisant la série géométrique, montrer que la réciproque de ce théorème est fausse.

II. Propriétés préservées par convergence uniforme

Notation.

■ Dans toute cette section, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction f .

Exercice 11.

1. a) Bornées. Si, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est bornée sur I , alors f est bornée sur I .

b) Pour tout réel $x \in]0, 1[$ et pour tout entier naturel n , on note $f_n(x) = \frac{n}{nx+1}$. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0, 1[$.

2. Combinaisons linéaires. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers g . Alors, $(\lambda f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\lambda f + g$.



3. Gare aux Produits. Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R} mais que (f_n^2) ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

II.1 Convergence uniforme & Continuité

Théorème 1 (Préservation de la continuité).

On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers f . Si, pour tout entier naturel n la fonction f_n est continue sur I , alors la fonction f est continue sur I .

Exercice 12.

1. Pour tout réel $x \in [0, 1]$ et tout entier naturel n , on pose $f_n(x) = x^n$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.
2. Montrer que ce résultat reste vrai si (f_n) converge uniformément sur tout segment de I .
3. Pour tout x réel, on définit sur $[0, 1]$ la fonction continue par morceaux f_n par $f_n(x) = 0$ si $x \leq \frac{1}{n}$ et, pour tout $k \in [1, n-1]$, $f_n(x) = \frac{1}{k}$ si $x \in \left] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ mais que sa limite n'est pas continue par morceaux.

**Corollaire 2.**

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I telles que $\sum f_n$ converge uniformément sur I . Alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Exercice 13.

1. Montrer que ce résultat reste vrai si (f_n) converge uniformément sur tout segment de I .
2. Montrer que $\exp : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est continue sur \mathbb{R} .
3. Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

Théorème 3 (Théorème de la double limite, Admis).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I vers une fonction f et $x_0 \in \bar{I}$. S'il existe une suite de réels $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n , $\lim_{t \rightarrow x_0} f_n(t) = \ell_n$, alors $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n.$$

Corollaire 4.

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et $x_0 \in \bar{I}$. Si, pour tout entier naturel n , f_n converge en x_0 et $\sum f_n$ converge uniformément sur I , alors $\sum \left(\lim_{t \rightarrow x_0} f_n(t) \right)$ converge vers un scalaire ℓ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \ell$.

Exercice 14.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.
2. En utilisant la série géométrique, montrer que ce résultat ne s'applique pas si la convergence est uniforme sur tout segment de I .

**II.2 Convergence uniforme & Intégration****Théorème 5 (Interversion limite / intégrale).**

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur le segment $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

**Exercice 15.**

1. Montrer que ce résultat peut être faux si la convergence est simple mais non uniforme.
2. Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n , on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{x-k}{n} & \text{si } x \in [k, k + \frac{1}{2}], k \leq n \\ 2 \cdot \frac{k+1-x}{n} & \text{si } x \in [k + \frac{1}{2}, k+1], k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- a) Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ est convergente et déterminer sa valeur.
- b) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction nulle.

Corollaire 6 (Intervention série / intégrale).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues telle que $\sum f_n$ converge uniformément sur le segment $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Exercice 16.

1. Montrer que, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
2. Montrer que, sur un ensemble à préciser,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

II.3 Convergence uniforme & Dérivation**Théorème 7 (Limite de dérivées).**

Soit h une fonction définie sur I telle que

- (i). $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n soit de classe \mathcal{C}^1 sur I ,
- (ii). $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f ,
- (iii). $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers h .

Alors, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 et $f' = h$. De plus, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f .

**Exercice 17.**

1. En étudiant la suite $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ sur $[-1, 1]$, montrer que (f_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction valeur absolue, mais que (f'_n) ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.
2. En étudiant la suite $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, montrer que (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R} vers 0 mais que la suite des dérivées ne converge pas simplement sur \mathbb{R} .
3. En étudiant la suite $f_n(x) = e^{-\frac{x}{n}}$, montrer que (f_n) converge simplement mais non uniformément sur \mathbb{R}_+ alors que (f'_n) converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

Corollaire 8 (Extension \mathcal{C}^k).

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et (g_0, \dots, g_k) des fonctions sur I tels que

- (i). $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^k sur I ,
- (ii). $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers g_k ,
- (iii). pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers g_j .

Alors, la fonction g_0 est de classe \mathcal{C}^k et pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $g_j = g_0^{(j)}$.

Corollaire 9.

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I telles que

- (i). Pour tout entier naturel n , la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I ,
- (ii). $\sum f_n'$ converge uniformément sur I .
- (iii). $\sum f_n$ converge simplement sur I ,

Alors, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Exercice 18.

- Étendre le résultat précédent aux fonctions de classe \mathcal{C}^k .
- Montrer que la fonction ζ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et que $\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout réel t , on pose $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tz)^k}{k!}$. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et que pour tout entier naturel k , $g^{(k)} : t \mapsto z^k e^{tz}$.

**Convergence d'une suite de fonctions de répartition**

Exercice 19. (Cas particulier du deuxième théorème de Dini) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- (i). X_n est à valeurs dans $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$.
- (ii). $\mathbb{P}(X_n = \frac{k}{n}) = \alpha_n (e^{\frac{k}{n}} - 1)$, où $\alpha_n = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{k}{n}} - 1)}$.
- (iii). F_n est la fonction de répartition de X_n .

- Déterminer un équivalent de (α_n) .
- Déterminer une expression de F_n sans signe somme.
- Montrer que (F_n) converge simplement vers une fonction continue f .
- Montrer que cette convergence est uniforme.

**Programme officiel (PSI)**

Suites et séries - B - Suites et séries de fonctions (p. 13)