■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.
Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. Sur le marché des véhicules d'occasion, on observe en général une baisse du prix de revente d'un véhicule lorsque le nombre de kilomètres parcourus augmente. Une bonne estimation de cette baisse permet au vendeur de fixer avec précision le prix de revente d'un véhicule.
On dispose d'une base de données comportant deux tables `vehicule` et `annonce` décrites ci-dessous.

- La table `vehicule` recense des informations sur les modèles de véhicules en vente sur le marché. Elle est composée des attributs suivants.
  - `id_vehicule` (de type `INTEGER`) : un code permettant d'identifier de façon unique chaque référence de véhicule (marque et modèle).
  - `marque` (de type `TEXT`) : le nom du constructeur du véhicule.
  - `modele` (de type `TEXT`) : le modèle du véhicule, un constructeur proposant en général plusieurs modèles de véhicules à la vente.
  - `prix_neuf` (de type `INTEGER`) : prix de vente du véhicule neuf.
- La table `annonce` regroupe des informations sur un grand nombre d'annonces de véhicules d'occasion. Chaque enregistrement correspond à une annonce et possède les attributs suivants.
  - `id_annonce` (de type `INTEGER`) : un code permettant d'identifier chaque annonce de façon précise.
  - `id_vehicule` (de type `INTEGER`) : l'identifiant du modèle de véhicule vendu, qui correspond à l'identifiant utilisé dans la table `vehicules`.
  - `annee` (de type `INTEGER`) : année de première mise en circulation du véhicule.
  - `km` (de type `INTEGER`) : nombre de kilomètres parcourus par le véhicule au moment de la revente.
  - `prix_occasion` (de type `INTEGER`) : prix de vente du véhicule d'occasion.

1. En justifiant brièvement, identifier une clef primaire dans chacune des tables `vehicule` et `annonce`, ainsi qu'une clé étrangère dans la table `annonce`.

2. Écrire une requête SQL permettant d'extraire les noms de tous les modèles de véhicules mis en vente par le constructeur `Dubreuil Motors`.

3. Écrire une requête SQL permettant d'extraire le prix moyen de vente d'un véhicule ayant parcouru 100 000 kilomètres.

4. Expliquer le fonctionnement de la requête SQL suivante et préciser l'effet éventuel de cette requête sur chacune des tables `vehicule` et `annonce`.

```sql
UPDATE annonce
SET prix_occasion = prix_neuf
FROM vehicule
WHERE vehicule.id_vehicule = annonce.id_vehicule
    AND vehicule.prix_neuf < annonce.prix_occasion
```

Exercice 2. Dans tout l'exercice, a désigne un réel strictement positif fixé.

Partie A

On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a) Calculer $f(\sqrt{a})$.

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x réel strictement positif.

2. a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Déterminer les limites de $f(x)$ et de $f(x) - \frac{x}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat.

3. a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x strictement positif.

b) En déduire que f est décroissante sur $]0,\sqrt{a}]$ et croissante sur $[\sqrt{a},+\infty[$.

c) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes horizontales ?

4. Tracer dans un même repère la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ ainsi que l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le cas où $a = 1$. On prendra soin de faire apparaître les éléments mis en valeur dans les questions **1**, **2** et **3**.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On admet que cette suite est ainsi bien définie.

5. Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

6. a) En utilisant l'étude de la fonction f faite en Partie A, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}.$$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera ℓ sa limite.

d) En remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$, déterminer une équation vérifiée par le réel ℓ, puis la valeur de ℓ.

7. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 \leqslant \ell - u_{n+1} \leqslant u_n - u_{n+1}$.

b) En déduire que s'il existe un entier naturel n non nul tel que $u_n - u_{n+1} \leqslant 10^{-5}$, alors u_{n+1} est une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.

8. Dans cette question, on suppose que $a = 3$.

a) Recopier et compléter la fonction Python suivante prenant en argument d'entrée un entier n, et renvoyant la valeur de u_n.

```python
def suite(n):
    u = ...
    for k in range(1, n+1):
        u = ...
    return ...
```

b) On considère la fonction Python `mystere` suivante :

```
def mystere():
    n = 0
    u = suite(0)
    v = suite(1)
    while u - v > 10**(-5):
        n = n + 1
        u = suite(n)
        v = suite(n+1)
    return v
```

Que renvoie cette fonction ? Expliquer votre réponse à l'aide des questions précédentes.

Exercice 3. On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, définie par $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $(I_3)^2$ et A^2.

b) En déduire que l'équation $M^2 = I_3$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet au moins quatre solutions.

2. Soit λ un réel strictement positif. On définit les matrices N et T par

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a) Calculer N^2.

b) Déterminer deux réels a et b tels que $T = aI_3 + bN$.

3. Soient x et y deux réels. On pose $M = xI_3 + yN$.

a) Calculer M^2.

b) En déduire que l'équation $M^2 = T$, d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions dans l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $xI_3 + yN$ avec x, y deux réels.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+t))^n \, dt$.

1. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : pour tout $t \geqslant 0$, $g(t) = (1+t)\ln(1+t) - t$.

a) On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

b) En déduire la valeur de u_1.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles telle que : $f(t) = \ln(1 + t)$.

a) On note f' et f'' respectivement, les dérivées première et seconde de f.
Calculer pour tout réel t de $[0, 1]$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

b) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 1]$ et tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on donne : $\ln 2 \simeq 0{,}7$).

c) Montrer que la fonction f est concave sur $[0, 1]$.

3. a) Justifier pour tout réel t de $[0, 1]$, l'encadrement suivant : $0 \leqslant \ln(1 + t) \leqslant \ln 2$.

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0.

4. a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$u_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n.$$

(On pourra remarquer qu'une primitive de la fonction $t \mapsto 1$ est $t \mapsto 1+t$)

b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $(n+1)u_n \leqslant 2(\ln 2)^{n+1}$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d) En utilisant la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $(n+2)u_n \geqslant 2(\ln 2)^{n+1}$.

e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}}$.

Exercice 5. Une matrice carrée M est dite *idempotente* si elle vérifie $M^2 = M$.

1. Exemple.

Vérifier que la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est idempotente. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie.

2. Quelques propriétés.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et M une matrice carrée d'ordre n idempotente.

a) Calculer $M^2 - M$.

b) On pose $N = I_n - M$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n. Montrer que N est idempotente.

3. Application à l'étude des puissances d'une matrice.

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = I_2 - C$.

a) Montrer que C et D sont idempotentes. Calculer CD et DC.

b) On pose $B = 2C + D$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $B^n = 2^n C + D$. Calculer, pour tout entier naturel n, les quatre coefficients de B^n.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Calculer P^2. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

d) Calculer $P^{-1}AP$ et vérifier que : $P^{-1}AP = B$.

e) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $A^n = PB^nP^{-1}$.

f) Déduire de la question précédente et de **3.b)**, en détaillant les calculs, que pour tout entier naturel n on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & -2^n + 1 \\ 6(2^n - 1) & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}.$$