

IV - Variables aléatoires discrètes

Dans tout le cours, Ω désigne un univers muni d'une tribu \mathcal{F} et \mathbf{P} est une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) . Lorsque Ω est un ensemble fini, on choisira $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

I - Variables aléatoires réelles finies

I.1 - Définition

Définition 1 - Variable aléatoire réelle

On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est un ensemble fini. Une *variable aléatoire réelle* est une application de Ω dans \mathbb{R} .

Exemple 1 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

Un dé équilibré est lancé successivement 2 fois. On note les résultats obtenus à l'issue de chacun des lancers.

L'univers est $\Omega = \{(i, j), 1 \leq i, j \leq 6\} = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$.

La somme S des résultats obtenus à l'issue des 2 lancers est une variable aléatoire :

$$\begin{aligned} S : \quad \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (d_1, d_2) &\mapsto d_1 + d_2 \end{aligned}$$

Définition 2 - Notations

Si $x \leq y$ sont des réels, on notera

$$\begin{aligned} [X = x] &= \{\omega \in \Omega ; X(\omega) = x\} \\ [X \leq x] &= \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \leq x\} \\ [X \geq x] &= \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \geq x\} \\ [x \leq X \leq y] &= \{\omega \in \Omega ; x \leq X(\omega) \leq y\} \end{aligned}$$

Exemple 2 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.

$$\begin{aligned} [S = 3] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega ; d_1 + d_2 = 3\} \\ &= \{(1, 2), (2, 1)\} . \\ [S \leq 4] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega ; d_1 + d_2 \leq 4\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\} . \end{aligned}$$

Définition 3 - Système complet

Soit Ω un univers fini et X une variable aléatoire. Notons x_1, \dots, x_p les valeurs prises par X . Alors, $\{[X = x_i], i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ est un système complet d'événements. C'est le *système complet* associé à la variable aléatoire X .

Exemple 3 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent. Le système complet associé à S est :

$$\begin{aligned} \{[S = 2], [S = 3], [S = 4], [S = 5], [S = 6], [S = 7], \\ [S = 8], [S = 9], [S = 10], [S = 11], [S = 12]\} . \end{aligned}$$

I.2 - Loi de probabilité

Définition 4 - Loi de probabilité

La *loi* de la variable aléatoire X est la donnée :

- des valeurs x_1, \dots, x_p prises par X ,
- de la famille de probabilités

$$(\mathbf{P}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}([X = x_p])).$$

Exemple 4 - Somme de 2 dés équilibrés

On reprend les notations de l'exemple précédent. Nous obtenons successivement :

| k | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\mathbf{P}([S = k])$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Définition 5 - Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire. La *fonction de répartition* de X est la fonction F_X définie sur \mathbb{R} par $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$.

Exemple 5 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.

- Si $x < 2$. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leq x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

- Si $2 \leq x < 3$. Alors,

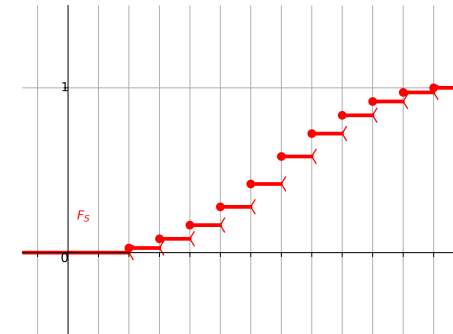
$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leq x]) = \mathbf{P}([S = 2]) = \frac{1}{36}.$$

• ...

- Si $x \geq 12$. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leq x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

On obtient le graphe suivant :



Proposition 1

Les variables aléatoires X et Y sont de même loi si et seulement si elles ont mêmes fonctions de répartition.

I.3 - Lois usuelles

Définition 6 - Loi certaine

Soit $c \in \mathbb{R}$. La variable aléatoire X suit une *loi certaine* de valeur c si $\mathbf{P}([X = c]) = 1$.

Définition 7 - Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

La variable aléatoire X suit une *loi uniforme* sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}([X = i]) = \frac{1}{n}.$$

Exemple 6 - Modélisation

La loi uniforme modélise une expérience où n résultats distincts sont possibles et équiprobables.

Définition 8 - Loi de Bernoulli de paramètre p

Soit $p \in [0, 1]$. La variable aléatoire X suit une *loi de Bernoulli* de paramètre p , noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si

$$\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - p \text{ et } \mathbf{P}([X = 1]) = p.$$

Exemple 7 - Modélisation

La loi de Bernoulli modélise le nombre de succès d'une seule expérience qui a une probabilité de succès égale à p .

Définition 9 - Expérience de Bernoulli

Une *expérience de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui n'admet que deux issues, appelées généralement succès et échec.

Définition 10 - Loi binomiale de paramètres n et p

Soit $p \in [0, 1]$. La variable aléatoire X suit une *loi binomiale* de paramètres n et p , noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Exemple 8 - Modélisation

La loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la réalisation de n expériences de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès égale à p .

Définition 11 - Loi hypergéométrique de paramètres n, N et b

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leq n, b \leq N$. La variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique de paramètres n, N, b , noté $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, N, b/N)$, si

$$\forall k \in \llbracket 0, b \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{b}{k} \binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Exemple 9 - Modélisation

La loi hypergéométrique modélise, dans une urne contenant N boules dont b sont blanches, le nombre de boules blanches tirées lors d'un tirage simultané de n boules.

II - Espérance & Variance**II.1 - Espérance****Définition 12 - Espérance**

Soit X une variable aléatoire et x_1, \dots, x_p les valeurs prises par X . L'*espérance* de X , notée $\mathbf{E}[X]$, est le réel

$$\mathbf{E}[X] = x_1 \mathbf{P}([X = x_1]) + \dots + x_p \mathbf{P}([X = x_p]).$$

Proposition 2 - Lois usuelles

- Si X suit une loi certaine de paramètre c , alors $\mathbf{E}[X] = c$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $\mathbf{E}[X] = \frac{n+1}{2}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbf{E}[X] = p$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbf{E}[X] = np$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, N, b/N)$, alors $\mathbf{E}[X] = \frac{nb}{N}$.

Proposition 3 - Linéarité

Soit X, Y deux variables aléatoires et a, b deux réels. Alors,

$$\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y].$$

Exemple 10 - Somme de deux dés

Notons X_1 le résultat du premier lancer et X_2 le résultat du second. Alors, X_1 et X_2 suivent une loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ et $S = X_1 + X_2$. Ainsi,

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] = \frac{6+1}{2} + \frac{6+1}{2} = 7.$$

Proposition 4 - Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire, x_1, \dots, x_p les valeurs prises par X et g une fonction à valeurs réelles. On note $Y = g(X)$ la variable aléatoire définie par

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Alors,

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^p g(x_k) \mathbf{P}([X = x_k]).$$

Exemple 11 - Carré de la somme

On reprend les notations de l'exemple précédent. Posons $Y = S^2$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= 2^2 \frac{1}{36} + 3^2 \frac{2}{36} + 4^2 \frac{3}{36} + 5^2 \frac{4}{36} + 6^2 \frac{5}{36} + 7^2 \frac{6}{36} + \dots \\ &\quad \dots + 8^2 \frac{5}{36} + 9^2 \frac{4}{36} + 10^2 \frac{3}{36} + 11^2 \frac{2}{36} + 12^2 \frac{1}{36} \end{aligned}$$

II.2 - Variance**Définition 13 - Variance, Écart-type**

Soit X une variable aléatoire. La *variance* de X , notée $\mathbf{V}(X)$, est le réel :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2].$$

L'*écart-type* est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Théorème 1 - Formule de Kœnig-Huygens

Soit X une variable aléatoire. Alors,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Proposition 5 - Lois usuelles

- Si X suit une loi presque certaine, alors $\mathbf{V}(X) = 0$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, N, b/N)$, alors $\mathbf{V}(X) = n \frac{b}{N} \frac{N-b}{N} \frac{N-n}{N-1}$.

Proposition 6

Soit X une variable aléatoire et a, b deux réels. Alors,

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X).$$

Exemple 12

Soit Y une variable suivant une loi uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$. On pose $X = Y - 1$.

Déterminons la loi de X .

| k | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\mathbf{P}([Y = k])$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Comme $X = Y - 1$,

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|-----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\mathbf{P}([X = j])$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Ainsi, $X \sim \mathcal{U}([1, 11])$.

Déterminons l'espérance et la variance de Y .

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X + 1] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[1] = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7,$$

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X + 1) = \mathbf{V}(X) = \frac{11^2 - 1}{2} = 60.$$

Définition 14 - Variable centrée, réduite

Soit X une variable aléatoire.

- X est une variable aléatoire *centrée* si $\mathbf{E}[X] = 0$.
- X est une variable aléatoire *réduite* si $\mathbf{V}(X) = 1$.

Proposition 7

Soit X une variable aléatoire qui ne soit pas de loi certaine. La variable $X^* = \frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

III - Couples de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire X qui prend les valeurs x_1, \dots, x_p et une variable aléatoire Y qui prend les valeurs y_1, \dots, y_q .

III.1 - Loi du couple

Définition 15 - Loi du couple

La *loi du couple* (X, Y) est la donnée :

- des valeurs (x_i, y_j) prises par le couple (X, Y) ,
- des probabilités $\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.

Exemple 13 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On dispose d'un bureau à 2 tiroirs et de 2 feuilles de papier. On dispose aléatoirement chacune des feuilles de papier dans l'un des tiroirs.

On note X le nombre de feuilles dans le premier tiroir et Y le nombre de tiroirs vides.

Le nombre de feuilles de papier dans le premier tiroir peut être égal à 0, 1 ou 2.

Le nombre de tiroirs vides peut être égal à 0 (il y a 1 feuille dans chaque tiroir) ou 1 (les 2 feuilles sont dans le même tiroir).

De plus,

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0, \mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 0]) = 0, \mathbf{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4}$$

On peut représenter ces résultats dans un tableau : à chaque ligne correspond une valeur x que peut prendre X ; à chaque colonne correspond une valeur y que peut prendre Y ; à l'intersection d'une ligne et d'une colonne se lit la probabilité $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$:

| $x \backslash y$ | 0 | 1 |
|------------------|---------------|---------------|
| 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| 2 | 0 | $\frac{1}{4}$ |

Définition 16 - Marginales

Les lois de X et de Y sont les *marginales* du couple (X, Y) .
En utilisant le système complet associé à la variable aléatoire Y (resp. X), on obtient

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \mathbf{P}([X = x_i]) = \sum_{j=1}^q \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \mathbf{P}([Y = y_j]) = \sum_{i=1}^p \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

Exemple 14 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les notations de l'exemple précédent, les marginales s'obtiennent en sommant les lignes / les colonnes du tableau.

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | $\mathbf{P}([X = x])$ |
|-----------------------|---------------|---------------|-----------------------|
| 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $\mathbf{P}([Y = y])$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |

La somme des cases de l'intérieur du tableau vaut 1.

Définition 17 - Loi conditionnelle

La *loi conditionnelle* de X sachant $[Y = y_j]$ est la donnée :

- des valeurs x_1, \dots, x_p prises par X ,
- des probabilités $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_p])$.

Exemple 15 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On reprend les notations de l'exercice précédent. La loi conditionnelle de X sachant $[Y = 0]$ est égale à

| i | 0 | 1 | 2 |
|-------------------------------|---|---|---|
| $\mathbf{P}_{[Y=0]}([X = i])$ | 0 | 1 | 0 |

C'est une loi presque certaine : *sachant qu'aucun des tiroirs n'est vide, on est certain qu'il y a une feuille dans le premier tiroir.*

La loi conditionnelle de X sachant $[Y = 1]$ est égale à

| i | 0 | 1 | 2 |
|-------------------------------|---------------|---|---------------|
| $\mathbf{P}_{[Y=1]}([X = i])$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |

Sachant qu'un des deux tiroirs est vide, il y a une chance sur deux que le premier tiroir contienne 0 feuille et une chance sur deux qu'il contienne les 2 feuilles.

III.2 - Indépendance**Définition 18 - Indépendance**

Les variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \mathbf{P}([X = x_i]) \times \mathbf{P}([Y = y_j]).$$

Exemple 16

- On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi est définie par

| $y \backslash x$ | 0 | 1 | $\mathbf{P}([X = x])$ |
|-----------------------|---------------|---------------|-----------------------|
| 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathbf{P}([Y = y])$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | |

On étudie le comportement de **tous** les couples de valeurs possibles :

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 0])$$

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 1])$$

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{P}([X = 1]) \times \mathbf{P}([Y = 0])$$

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{P}([X = 1]) \times \mathbf{P}([Y = 1])$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

- **2 feuilles et 2 tiroirs.** En reprenant la loi du couple,

$$\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0 \neq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 0]).$$

Les variables aléatoires X et Y **ne** sont **pas** indépendantes.

Définition 19 - Schéma de Bernoulli

Un *schéma de Bernoulli* est la succession d'un nombre fini d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

Proposition 8 - Loi certaine

Si Y est une variable aléatoire certaine, alors X et Y sont indépendantes.

Théorème 2 - Stabilité de la loi binomiale

Soit m, n deux entiers naturels, $p \in [0, 1]$, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p).$$

III.3 - Covariance

Proposition 9 - Espérance d'un produit

En utilisant la loi du couple,

$$\mathbf{E}[X \times Y] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q x_i \times y_j \times \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

Exemple 17 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant l'exemple des feuilles et des tiroirs,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[XY] &= 0 \times 0 \times 0 + 0 \times 1 \times \frac{1}{4} + \dots \\ &\quad \dots + 1 \times 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 \times 0 + \dots \\ &\quad \dots + 2 \times 0 \times 0 + 2 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Théorème 3 - Espérance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbf{E}[X \times Y] = \mathbf{E}[X] \times \mathbf{E}[Y].$$

Définition 20 - Covariance

La *covariance* de X et Y , notée $\text{Cov}(X, Y)$, est le réel

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X]) \times (Y - \mathbf{E}[Y])].$$

Proposition 10 - Propriétés de la covariance

Soit a, b, c trois réels et X, Y, Z trois variables aléatoires.

- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[X \times Y] - \mathbf{E}[X] \times \mathbf{E}[Y]$.
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.
- $\text{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X)$.
- $\text{Cov}(X, c) = 0$.
- $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z)$.

Exemple 18 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les calculs précédents,

$$\mathbf{E}[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1,$$

$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X] \mathbf{E}[Y] \\ &= \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Proposition 11 - Covariance et Somme

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Exemple 19 - Variance d'une somme

On considère le couple (X_1, X_2) dont la loi est définie par :

| $x_1 \backslash x_2$ | 0 | 1 | $\mathbf{P}([X_1 = x_1])$ |
|---------------------------|---------------|---------------|---------------------------|
| | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $\mathbf{P}([X_2 = x_2])$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | |

X_1 et X_2 ont même loi, donc ils ont même espérance et même

variance. De plus,

$$\mathbf{E}[X_1] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \mathbf{E}[X_1^2],$$

$$\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{E}[X_1^2] - \mathbf{E}[X_1]^2 = \frac{3}{16},$$

$$\mathbf{E}[X_1 X_2] = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= \mathbf{E}[X_1 X_2] - \mathbf{E}[X_1] \mathbf{E}[X_2] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X_1 + X_2) &= \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2) \\ &= \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Proposition 12 - Covariance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Exemple 20 - 2 feuilles et 2 tiroirs

L'exemple des feuilles et des tiroirs montre que la covariance peut être nulle alors que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

Définition 21 - Coefficient de corrélation linéaire

Le *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y , noté $\rho(X, Y)$, est défini par

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Exemple 21

En reprenant l'exemple précédent,

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{V}(X_1)\mathbf{V}(X_2)}} = \frac{\frac{-1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{3}{16}}} = -\frac{1}{3}.$$

Proposition 13

- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
- $|\rho(X, Y)| = 1$ signifie qu'il existe des réels a, b et c tels que $\mathbf{P}(aX + bY + c = 0) = 1$.

III.4 - Vecteurs de variables aléatoires discrètes**Définition 22 - Vecteur aléatoire**

X est un *vecteur de variables aléatoires* s'il existe X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes telles que :

$$X : \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

Les définitions de loi, loi marginale s'étendent au cas des vecteurs aléatoires. De manière analogue, on définit l'indépendance de n variables aléatoires indépendantes.

IV - Variables aléatoires discrètes infinies**IV.1 - Loi de probabilité****Définition 23 - Variable aléatoire discrète infinie**

Une variable aléatoire X est *discrète infinie* si les valeurs prises par X sont en nombre infini et peuvent être indexées par \mathbb{N} . On

notera

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\} = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

Dans toute la suite, on se limitera aux variables aléatoires qui ne prennent que des valeurs positives.

Exemple 22 - Variables aléatoires discrètes infinies

- Un dé est lancé jusqu'à obtenir la valeur 6. On note T le rang du lancer où le premier 6 est obtenu. La variable aléatoire T peut prendre les valeurs :
 - ★ 1 si le 6 apparaît au premier lancer,
 - ★ 2 si le 1^{er} lancer n'est pas un 6 et que le 2^e l'est,
 - ★ 3 si les 1^{er} et 2^e lancers ne sont pas des 6 et que le 3^e l'est,
 - ★ ...
- Une étudiante collectionne les cartes de 23 joueurs de foot de son équipe nationale qui sont distribuées dans des tablettes de chocolat. On note T le nombre de tablettes achetées pour que sa collection soit complète. T peut prendre les valeurs :
 - ★ 23 si elle a obtenu à chaque achat une carte différente,
 - ★ 24 si elle a obtenu exactement une carte en double,
 - ★ ...

Définition 24 - Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *loi de probabilité* de X est la donnée :

- des valeurs x_0, x_1, x_2, \dots prises par X ,
- de la famille de probabilités $(\mathbf{P}([X = x_0]), \mathbf{P}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}([X = x_n]), \dots)$.

Exemple 23 - Instant du premier Pile

On note T le numéro du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

D'une part, $T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

D'autre part,

- $[T = 1]$ correspond à obtenir un Pile lors du premier lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}.$$

- $[T = 2]$ correspond à obtenir Face lors du premier lancer et Pile lors du second lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = 2]) = \mathbf{P}(\{(F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$

- ...
- $[T = n]$ correspond à obtenir Face lors des $n - 1$ premiers lancers et Pile lors du n^e lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T = n]) = \mathbf{P}(\{(F, F, \dots, F, P)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = n]) = 1$, alors $\mathbf{P}([T = +\infty]) = 0$. La loi de T peut être représentée dans un tableau contenant une infinité de colonnes :

| x | 1 | 2 | 3 | ... | n | ... |
|-----------------------|---------------|----------------------------------|---|-----|---|-----|
| $\mathbf{P}([X = x])$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3}$ | ... | $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}$ | ... |

Définition 25 - Système complet

Si X est une variable aléatoire discrète infinie, la famille d'événements $([X = x_0], [X = x_1], [X = x_2], \dots)$ est un système complet

d'événements. En particulier,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = x_k]) = 1.$$

Exemple 24 - Instant du premier Pile

En reprenant l'exemple précédent,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

IV.2 - Fonction de répartition**Définition 26 - Fonction de répartition**

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *fonction de répartition* de X est la fonction F_X définie pour tout x réel par $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x])$.

Exemple 25 - Instant du premier Pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

- Si $x < 1$, $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- Si $1 \leq x < 2$, $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}$.
- Si $2 \leq x < 3$,

$$\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(T \in \{1, 2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}.$$

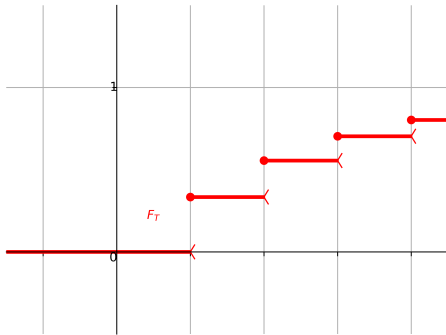
• ...

• Si $n \leq x < n+1$,

$$\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}(T \in \llbracket 1, n \rrbracket) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

• ...

On obtient le graphe suivant :



Proposition 14 - Fonction de répartition

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète infinie.

- F est à valeurs dans $[0, 1]$.
- F est croissante.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

IV.3 - Espérance et Variance

Définition 27 - Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$.

La variable aléatoire X admet une espérance si la série $\sum x_i \mathbf{P}([X = x_i])$ est convergente. L'espérance de X est alors :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}([X = x_i]).$$

Exemple 26 - Instant du premier pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

On admet que pour tout $x \in [0, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Alors, comme $\frac{2}{3} \in [0, 1[$, $\sum n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ converge et

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 3.$$

Proposition 15 - Propriétés de l'espérance

Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes infinies admettant une espérance et a un réel. Alors,

- $\mathbf{E}[a] = a$.
- $\mathbf{E}[aX + Y] = a\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$.

Exemple 27 - Instant du premier pile

Un joueur joue à Pile ou Face, avec une pièce qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$, contre son banquier qui lui propose le contrat suivant :

- le joueur paye 40 euros pour jouer,
 - la pièce de monnaie est lancée successivement jusqu'à obtenir Pile. Il gagne 10 euros lors de chacun de ces lancers.
- En notant G le gain du joueur et T le nombre de lancers effectués, alors $G = 10 \times T - 40$. En utilisant les propriétés précédentes,

$$\mathbf{E}[G] = 10\mathbf{E}[T] - 40 = 10 \times 3 - 40 = -10.$$

Théorème 4 - Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives et f une fonction réelle à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i]).$$

Définition 28 - Variance, Écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. Notons $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum x_i^2 \mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors X admet une *variance* et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2].$$

L'*écart-type* de X est la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Proposition 16 - Propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire discrète infinie qui admet une variance.

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$.
- $\mathbf{V}(a) = 0$.
- $\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$.

Exemple 28 - Pile/Face contre le banquier

On reprend l'exemple précédent et on admet que $\mathbf{V}(T) = 6$. Alors,

$$\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(10T - 40) = 10^2 \mathbf{V}(T) = 600.$$

IV.4 - Lois usuelles

Définition 29 - Loi géométrique

Soit $p \in [0, 1]$. La variable aléatoire T suit une loi *géométrique* de paramètre p , noté $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(T = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

Exemple 29 - Modélisation

Étant donné un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès de chaque expérience est égale à p , la variable aléatoire égale au *rang du premier succès* suit une loi géométrique de paramètre p .

Proposition 17 - Espérance, Variance

Soit $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On admet que

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Définition 30 - Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire Z suit une loi de *Poisson* de paramètre λ , noté $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, si

- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Exemple 30 - Modélisation

Étant donnée une suite de N épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à p . Si N est grand et p est petit, la variable aléatoire égale au *nombre de succès* suit approximativement une loi de Poisson de paramètre λ .

Proposition 18 - Espérance, Variance

Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On admet que

$$\mathbf{E}[Z] = \lambda \text{ et } \mathbf{V}(Z) = \lambda.$$

Exemple 31 - Accidentés

Une banque accorde quotidiennement des crédits. Étant donné un crédit, la probabilité qu'il revienne au service contentieux dans un laps de temps d'un an est égale à 4%. On suppose que 100 crédits ont été accordés au mois de janvier.

On note X le nombre de crédits qui sont revenus au service contentieux un an plus tard. X compte le nombre de succès (contentieux) lors d'une suite de 100 épreuves de Bernoulli de probabilité de succès 4%. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, \frac{4}{100})$ et $\mathbf{E}[X] = 4$.

On suppose que X peut être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de paramètre $\mathbf{E}[X]$. On donne la table d'une loi de Poisson de paramètre 4 ci-dessous :

| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $\mathbf{P}([Z = z])$ | 0,018 | 0,073 | 0,147 | 0,195 | 0,195 | 0,156 | ... |

Alors,

- $\mathbf{P}(X = 0) \simeq \mathbf{P}(Z = 0) \simeq 0,018$.
- $\mathbf{P}(X \leq 3) \simeq \mathbf{P}(Z \leq 3) \simeq 0,018 + 0,073 + 0,147 + 0,195 \simeq 0,433$.
- $\mathbf{P}(X > 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 3) \simeq 1 - 0,433 \simeq 0,567$.

Théorème 5 - Stabilité de la loi de Poisson

Soit λ, μ deux réels strictement positifs, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

IV.5 - Vecteurs de variables aléatoires

Les notions vues dans le cadre fini se généralisent aux variables aléatoires discrètes infinies.