■ ■ ■

Cadre de travail

■ I désigne le segment $[a,b]$ et $t_0 \in I$.
■ $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $|||\cdot|||$ sa norme subordonnée. On rappelle que $|||A||| = \sup_{X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\setminus\{0\}} \|AX\|$. Alors,

$$\forall\, X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ \|AX\| \leqslant |||A||| \cdot \|X\|$$

■ Les fonctions $t \mapsto \|A(t)\|$ et $t \mapsto \|B(t)\|$ sont supposées sur le segment I. Ainsi, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, t \in I,\ |||A(t)||| \leqslant \alpha \text{ et } \|B(t)\| \leqslant \beta$$

■ Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $f : I \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

* (f_n) converge simplement vers f sur I si

$$\forall\, t \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$$

* (f_n) converge uniformément vers f sur I si

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in I} \|f_n(t) - f(t)\| = 0$$

* $\sum f_n$ converge normalement sur I si $\sum \sup_{t\in I} \|f_n(t) - f(t)\|$ converge.

Comme dans le cadre des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, la convergence normale implique la convergence uniforme qui implique la convergence simple.
De plus, les théorèmes de régularité des limites sont encore valides.
■ Si $X : I \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_p(t) \end{pmatrix}$ est une fonction continue, on définit son intégrale comme une intégration composante à composante.

$$\forall\, t \in I,\ \int_{t_0}^{t} X(s)\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} X_1(s)\,\mathrm{d}s \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} X_p(s)\,\mathrm{d}s \end{pmatrix}$$

L'intégrale satisfait l'inégalité triangulaire

$$\forall\, t \in I,\ \left\| \int_{t_0}^{t} X(s)\,\mathrm{d}s \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|X(s)\|\ \mathrm{d}s \right|$$

■ X est une solution de classe $\mathscr{C}^1$ de $X' = AX$ sur I si et seulement si

$$\forall\, t \in I,\ X(t) = \int_{t_0}^{t} \left(A(s)X(s) + B(s)\right)\ \mathrm{d}s$$

Préliminaire

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in I,\ Y_{n+1} = \int_{t_0}^{t} A(s)Y_n(s)\,\mathrm{d}s$$

1. Comme les fonctions A et Y_0 sont continues sur un segment, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, t \in I,\ |||A(t)||| \leqslant \alpha \text{ et } \|Y(t)\| \leqslant \beta$$

2. Majoration de Y_n. On montre par récurrence que $\|Y_n(t)\| \leqslant \beta \frac{\alpha^n |t-t_0|^n}{n!}$.
Initialisation. L'inégalité à l'ordre 0 est triviale.

Hérédité. Soit $n > 1$.

$$\begin{aligned}\|Y_{n+1}(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)Y_n(s)\| \, \mathrm{d}s\\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} |||A(s)||| \, \|Y_n(s)\| \, \mathrm{d}s\\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} \alpha\beta \frac{\alpha^{n-1}|s-t_0|^{n-1}}{(n-1)!}\\ &\leqslant \beta\frac{\alpha^n |t-t_0|^n}{n!}\end{aligned}$$

3. Convergence de $\sum Y_n$. D'après la question précédente,

$$\sup_{t\in[a,b]} \|Y_n(t)\| \leqslant \beta\frac{\alpha^n(b-a)^n}{n!}$$

Ainsi, $\sum Y_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

Existence d'une solution au problème de Cauchy

Soit $\widetilde{X}_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On définit par récurrence la suite de fonctions (X_n) par

$$\forall\, t \in I,\ \begin{cases} X_0(t) &= \widetilde{X}_0\\ X_{n+1} &= \widetilde{X}_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} [A(s)X_n(s) + B(s)] \, \mathrm{d}s\end{cases}$$

4. Contrôle des accroissements. En posant $Y_n = X_{n+1} - X_n$, alors

$$Y_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)(X_{n+1}(s) - X_n(s)) \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} A(s)Y_n(s) \, \mathrm{d}s$$

Ainsi, d'après la question précédente, $\sum Y_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

5. Modes de congergence. D'après le point précédent,

* D'une part, $\sum Y_n = \sum(X_{n+1}-X_n)$ converge simplement sur $[a,b]$ et (X_n) converge simplement vers une fonction notée X_∞.
* D'autre part, $X_\infty(t) - X_n(t) = \sum_{k=n}^{+\infty}(X_{k+1} - X_k)$. Ainsi, (X_n) converge uniformément vers X_∞.

6. Conclusion.
Comme, pour tout n entier naturel la fonction X_n est continue et (X_n) converge uniformément vers X_∞, alors X_∞ est continue sur $[a,b]$.
De plus, d'après le théorème d'inversion intégrale sur un segment / limite pour les suites de fonctions qui convergent uniformément sur un segment,

$$X_\infty(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} [A(x)X_\infty(s) + B(s)] \, \mathrm{d}s$$

Ainsi, X_∞ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie l'équation différentielle.

Unicité de la solution au problème de Cauchy

Soient X_1 et X_2 deux solutions du système différentiel. On pose $D = X_2 - X_1$. Comme D est continue sur le segment $[a,b]$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, t \in I$, $\|D(t)\| \leqslant M$. Alors,

$$\forall\, t \in I,\ D(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)D(s) \, \mathrm{d}s$$

La suite constante égale à D satisfait donc les conditions satisfaites par la suite (Y_n). Ainsi, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \|D(t)\| \leqslant \beta\frac{\alpha^n(b-a)^n}{n!}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} D(t) = 0$ et $D(t) = 0$. Donc D est la fonction identiquement nulle et $X_1 = X_2$.

Mathématiciens

Cauchy Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).