Lycée Ozenne
DL n°16

# Devoir en temps libre

À rendre le lundi 18/03/2024

**ECT 2**
11/03/2024

■ ■ ■

**Exercice 1.**

**1.** Soit $f$ la fonction qui à tout réel $x$ associe

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 4x(1-x^2) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Véfifier que $f$ est une densité de probabilité.

*On considère désormais une variable aléatoire $X$ de densité $f$ et on note $F_X$ sa fonction de répartition.*

**2. a)** Montrer que $X$ possède une espérance et donner sa valeur.

**b)** Montrer que $X$ possède une variance et vérifier qu'elle est égale à $\frac{11}{225}$.

**3.** Montrer que l'on a : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x^2)^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

**4.** Soit $U$ et $V$ deux variables aléatoires à densité, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $M = \min(U,V)$, c'est-à-dire que, pour tout réel $x$, on a $\mathbf{P}(M > x) = \mathbf{P}(U > x)\,\mathbf{P}(V > x)$. On admet que $M$ est une variable aléatoire à densité et on note $F_M$ sa fonction de répartition.

**a)** En notant $G$ la fonction de répartition commune à $U$ et $V$, rappeler l'expression de $G(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x > 1$.

**b)** En déduire, pour tout réel $x$, les expressions de $\mathbf{P}(M > x)$ et de $F_M(x)$ en fonction de $G(x)$.

**c)** Donner enfin explicitement $F_M(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x > 1$.

**5.** On considère la variable aléatoire $Z$ définie par $Z = \sqrt{M}$ et on note $F_Z$ sa fonction de répartition.

**a)** Déterminer $F_Z(x)$ selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x > 1$.

**b)** En déduire que $X$ et $Z$ suivent la même loi.

**6.** Compléter le script `Python` suivant qui simule la variable $M$ à la ligne 3, afin qu'il simule la variable $X$ à la ligne 4.

```
1 U = rd.random()
2 V = rd.ranom()
3 M = np.min(U, V)
4 X = ...
```