Devoir en temps libre

À rendre le mardi 04/03/2025

■ ■ ■

Exercice 1. Dans cet exercice, on considère l'espace E des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables et de dérivée continue, telles que $f(0) = f(1) = 0$.
Les propriétés élémentaires des fonctions cosinus (notée cos), sinus (notée sin) et cotangente (notée cotan) sont les suivantes et pourront être utilisées sans justification :

- Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques :
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x+2\pi) = \sin(x).$$
- Pour tout réel x,
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \text{ et } \sin(\pi - x) = \sin(x).$$
- Les fonctions cosinus et sinus sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \sin'(x) = \cos(x).$$
- La fonction cosinus est paire et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. De plus,
$$\cos(0) = 1,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } \cos(\pi) = -1.$$
- La fonction sinus est impaire, strictement croissante sur $[0,\pi/2]$ et strictement décroissante sur $[\pi/2,\pi]$. De plus,
$$\sin(0) = \sin(\pi) = 0 \text{ et } \sin(\pi/2) = 1.$$
- Sur son intervalle de définition, $\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Dans tout l'exercice, la fonction f désigne un élément de E.

Partie I : Limites et Équivalents

1. a) Donner le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \text{cotan}(\pi x)$ et déterminer un équivalent de $\text{cotan}(\pi x)$ lorsque x est au voisinage de 0, $x > 0$.

b) De même, montrer que $\text{cotan}(\pi x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} \frac{1}{\pi(x-1)}$.

c) Montrer que la dérivée de la fonction $x \mapsto \text{cotan}(\pi x)$ sur $]0,1[$ est égale à $x \mapsto -\pi(1+\text{cotan}(\pi x)^2)$.
Tracer la courbe représentative de $x \mapsto \text{cotan}(\pi x)$ sur $]0,1[$.

2. Soit $f \in E$.

a) On définit la fonction g sur $]0,1]$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g tend vers $f'(0)$ lorsque x tend vers 0, $x > 0$.

b) De même, calculer la limite de la fonction h, définie sur $[0,1[$ par $h(x) = \frac{f(x)}{x-1}$, lorsque x tend vers 1, $x < 1$.

Partie II : Inégalité de Poincaré

3. Considérons l'intégrale suivante
$$I = \int_0^1 f(x)f'(x)\,\text{cotan}(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

a) En utilisant les questions précédentes, montrer que la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0 et en 1. En déduire que l'intégrale I est bien définie.

b) Soit $0 < a < b < 1$. Appliquer une intégration par parties à l'intégrale

$$\int_a^b f(x)f'(x)\cotan(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

c) En considérant les limites $a \to 0$, $b \to 1$, en déduire que l'on a

$$2\pi I = \pi^2 \int_0^1 f(x)^2(1+\cotan(\pi x)^2)\,\mathrm{d}x.$$

4. On considère l'intégrale J définie par

$$J = \int_0^1 \left(f'(x) - \pi f(x)\cotan(\pi x)\right)^2\,\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0 et en 1. En déduire que J est bien définie.

b) En développant J, montrer que pour toute fonction f de E, on a la relation

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. Soit $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et $I \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice identité. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A, aussi appelé le commutant de A, c'est-à-dire

$$C(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})\ ;\ AM = MA\}\,.$$

1. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

a) Donner deux éléments évidents de $C(A)$.

b) Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel.

c) Montrer que si M et M' sont des éléments de $C(A)$ alors MM' est aussi un élément de $C(A)$

d) Montrer que si $M \in C(A)$ est inversible, alors son inverse M^{-1} est aussi un élément de $C(A)$.

2. Soit D une matrice diagonale appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$.

a) Soit $M = \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Quelles conditions doit-elle vérifier pour appartenir à $C(D)$?

b) On suppose que les trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont distincts deux à deux. Montrer que M est nécessairement une matrice diagonale.

c) On suppose à présent que $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_3$. Déterminer $C(D)$. Donner une base et la dimension de $C(D)$.

d) Enfin, déterminer $C(D)$ dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

3. On s'intéresse à présent au commutant de la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et une matrice P que l'on déterminera.

b) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence

$$M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(D).$$

c) En déduire la dimension de $C(A)$.

d) Montrer que la famille $\left\{I, A, A^2\right\}$ est une base de $C(A)$.