

## T.D. IV - Variables aléatoires discrètes

### I - Lois usuelles finies

**Exercice 1.** (🔧) Soit  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de moyenne  $p$ . On note  $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$ . Déterminer la loi de  $Y_n$ .

**Exercice 2.** (🔧) Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètres respectifs  $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$ . On note  $N$  la variable aléatoire qui vaut 0 si  $X_1 = \dots = X_n = 1$  et  $\min \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket ; X_k = 0\}$  sinon. Déterminer la loi de  $N$ .

### II - Variables aléatoires finies

**Exercice 3.** (🔧) Un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 est lancé une fois. La probabilité d'apparition de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre obtenu.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .
3. Déterminer  $\mathbf{E} \left[ \frac{1}{X} \right]$ .

**Exercice 4.** (🔧) Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à vider l'urne. On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Calculer  $\mathbf{E}[X]$  et  $\mathbf{V}(X)$ .

**Exercice 5.** (🔧) On tire sans remise  $2n$  boules numérotées de 1 à  $2n$ .

1. Calculer la probabilité d'obtenir  $1, 3, \dots, 2n - 1$  dans cet ordre et consécutivement.

2. Déterminer la probabilité de tirer  $1, 3, \dots, 2n - 1$  dans cet ordre mais pas forcément consécutivement.

3. On note  $X$  la variable aléatoire associée au rang de la dernière boule impaire tirée. Calculer  $\mathbf{E}[X]$ .

On pourra utiliser la formule  $\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$ .

**Exercice 6.** (🔧) (🔧)

1. Soient  $p, q \in \mathbb{N}$ . En utilisant la formule du triangle de Pascal et une somme télescopique, montrer que  $\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$ .

2. Une urne contient  $b$  boules blanches et  $n$  boules noires. On retire une à une et sans remise les boules de l'urne. Soit  $X$  la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages effectués jusqu'au retrait de toutes les boules blanches. Déterminer la loi de  $X$ . Calculer  $\mathbf{E}[X]$  et  $\mathbf{V}(X)$ .

### III - Lois usuelles infinies

**Exercice 7.** (🔧) Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Calculer  $\mathbf{E}[X]$  et  $\mathbf{V}(X)$ .

**Exercice 8.** (🔧) Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note  $S$  la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

1. Quelle est la loi de  $S$ ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note  $T$  la

variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi de  $T$ ? Préciser l'espérance et la variance de  $T$ .

**Exercice 9.** Soit  $Y$  une variable aléatoire telle que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(Y = k) = e^{-k} - e^{-(k+1)}.$$

On pose  $Z = Y + 1$ .

1. Vérifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(Y = k) = 1$ .
2. Reconnaître la loi de  $Z$  puis en déduire son espérance et sa variance.
3. En déduire l'espérance et la variance de  $Y$ .
4. On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit inversible.

**Exercice 10.** On considère une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que

$$\forall n \geq 1, \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X = n]) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \mathbf{P}([X > n])$ .

1. Justifier que  $[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n]$ .
2. En déduire que  $u_{n-1} - u_n = \mathbf{P}([X = n])$ .
3. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul,

$$\mathbf{P}_{[X > n-1]}([X > n]) = 1 - \mathbf{P}_{[X > n-1]}([X = n]).$$

4. En déduire que pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ .
5. Exprimer, pour tout  $n$  entier naturel la valeur de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis reconnaître la loi de  $X$ .
6. Exprimer  $\mathbf{P}([X \leq n])$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 11.** ( $\star$ ) Soient  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $X_{i,m} = |\{k \in \llbracket 1, m \rrbracket ; U_k = i\}|$ .

1. Déterminer la loi de  $X_{i,m}$ .

2. Soit  $N$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  indépendante de la famille  $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $Y_i = X_{i,N}$ . Déterminer la loi de  $Y_i$ .

**Exercice 12.** ( $\star$ ) Un serveur téléphonique ouvre sa ligne chaque minute. Chaque minute, la probabilité qu'il prenne un client est constante et égale à  $\frac{1}{12}$ . On note  $X$  le nombre d'appels auxquels le serveur a répondu en 1 heure.

1. Déterminer la loi de  $X$ , son espérance  $\mathbf{E}[X]$  et sa variance  $\mathbf{V}(X)$ .

On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire  $X$  par la loi d'une variable aléatoire  $Z$  suivant une loi de Poisson de même espérance que  $X$ . On considère l'extrait de la table de la loi de Poisson de paramètre 5 suivant :

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}([Y = k])$	0,006	0,034	0,084	0,140	0,175	0,175	0,146

2. Déterminer des valeurs approchées de  $\mathbf{P}(X \leq 3)$  puis  $\mathbf{P}(X \geq 4)$ .

## IV - Variables aléatoires infinies

**Exercice 13.** Un sauteur tente de franchir successivement les hauteurs numérotées 1, 2, 3, ...,  $n$ , ... On suppose que les sauts sont mutuellement indépendants et que la probabilité de franchir la hauteur numéro  $n$  vaut  $\frac{1}{n}$ . Le sauteur est éliminé à son premier échec et on note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Calculer la loi de  $X$  et vérifier que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = 1$ .

2. Soit  $Y$  une variable aléatoire telle que  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ .

a) Exprimer  $\mathbf{V}(Y)$  sous forme d'une somme.

b) En déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-1)^2}{k!}$ .

3. Calculer l'espérance de  $X$ .

**Exercice 14.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Simplifier  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .
2. Vérifier que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$ .
3. En déduire la valeur de  $\mathbf{P}(X = 0)$ .
4. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{P}(X > n) = \frac{1}{n+1}$ .

## V - Fonctions de répartition

**Exercice 15. (✱✱)** Soient  $X$  (resp.  $Y$ ) une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$  (resp.  $G$ ) et  $p \in ]0, 1[$ . On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$[\max\{X, Y\} \leq x] = [X \leq x] \cap [Y \leq x].$$

2. On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ . Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .
3. On pose  $Z = \max\{X, Y\}$ . Exprimer la fonction de répartition  $F_Z$  de  $Z$  en fonction de celles de  $X$  et de  $Y$ .
4. En supposant que  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ , déterminer la fonction de répartition puis la loi de  $Z$ .
5. On pose  $W = \min\{X, Y\}$ . Exprimer la fonction de répartition  $F_W$  de  $W$  en fonction de celles de  $X$  et de  $Y$ .
6. En supposant que  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ , déterminer la fonction de répartition puis la loi de  $W$ .

**Exercice 16. (✱✱)** Soient  $X$  une variable aléatoire réelle et  $F$  sa fonction de répartition. On suppose que  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$  est un ensemble fini et que  $x_1 < \dots < x_p$ .

1. Montrer que  $F$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ .
2. Montrer que  $F$  est croissante.
3. Déterminer  $F(x)$  pour tout  $x < x_1$ , puis pour tout  $x \geq x_p$ . En déduire les limites de  $F$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
4. Soient  $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$  et  $x \in [x_i, x_{i+1}[$ . Déterminer  $F(x)$  et en déduire la valeur de  $F(x_i^+) - F(x_i^-)$ .
5. En déduire les points de discontinuité de  $F$ .

## VI - Lois jointes

**Exercice 17. (✱✱✱)** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

$x \backslash y$	1	2	3	4
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1	$p$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Déterminer la valeur de  $p$ .
2. Déterminer les lois marginales du couple  $(X, Y)$  puis les espérances de  $X$  et de  $Y$ .
3. Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = 1]$ .
4. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
5. Calculer  $\mathbf{P}([X = 0] \cup [Y = 1])$ .
6. Calculer la covariance de  $X$  et de  $Y$ .
7. Calculer  $\mathbf{V}(X)$  et  $\mathbf{V}(Y)$ . En déduire  $\rho(X, Y)$ .
8. Calculer  $\text{Cov}(X + Y, X)$ ,  $\text{Cov}(X, X + Y)$ ,  $\text{Cov}(2X, X)$  et  $\mathbf{V}(X + Y)$ .

**Exercice 18. (✱✱)** On lance 2 fois un dé équilibré à 6 faces. On note  $X$  le plus grand des résultats obtenus et  $Y$  le plus petit.

1. Décrire l'ensemble des valeurs prises par  $(X, Y)$ .
2. Décrire l'événement  $[X = 1]$  puis calculer  $\mathbf{P}([X = 1])$ .

3. Décrire l'événement  $[Y = 1]$  puis calculer  $\mathbf{P}([Y = 1])$ .
4. Décrire puis calculer la probabilité de l'événement  $[X = 1] \cap [Y = 1]$ .
5. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 19.** () Une pièce biaisée dont face apparaît avec probabilité  $p$  est lancée  $n$  fois. Une *excursion* est une série de lancers qui renvoient le même résultat. Par exemple, dans la séquence  $FFPFPPF$ , il y a 5 excursions :  $FF$ ,  $P$ ,  $F$ ,  $PP$ ,  $F$ . On note  $R$  le nombre d'excursions.

Montrer que  $\mathbf{E}[R] = 1 + 2(n-1)p(1-p)$  puis calculer  $\mathbf{V}(R)$ .

*Indication : Exprimer  $R$  en fonction des événements  $I_j$  : « le  $(j+1)$ -ème lancer est différent du  $j$ -ème ».*