

T.D. VI - Calculs de sommes

Séries numériques

I - Calculs de sommes

Solution de l'exercice 1.

1. Le terme général de la somme est constant, donc

$$\sum_{k=0}^5 3 = (5+1) \times 3 = 18.$$

2. Le terme général de la somme est constant, donc

$$\sum_{n=3}^5 10 = (5-3+1) \times 10 = 30.$$

3. D'après les résultats sur la somme des premiers entiers,

$$\sum_{\ell=1}^7 \ell = \frac{7(7+1)}{2} = 28.$$

4. En développant le signe somme,

$$\sum_{\ell=2}^5 \ell^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 54.$$

On pourra éventuellement retenir les formules :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

5. On utilise le résultat concernant la somme des premiers entiers :

$$\begin{aligned} \sum_{k=12}^{27} k &= 12 + 13 + \dots + 27 = 1 + \dots + 11 + 12 + \dots + 27 - (1 + \dots + 11) \\ &= \frac{27(27+1)}{2} - \frac{11(11+1)}{2} = 312. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 2.

1. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique, $\sum_{k=5}^{12} 2^k = 2^5 \frac{1-2^{12-5+1}}{1-2} = 2^5 (2^8 - 1).$

2. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique, $\sum_{n=3}^{10} (-1)^n = (-1)^3 \frac{1-(-1)^{10-3+1}}{1-(-1)} = 0.$

3. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \frac{1}{2^{2k}} &= \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{2^2} \right)^k = \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{4} \right)^k = \frac{1}{4} \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1 - 4^{-5}}{\frac{3}{4}} = 3(1 - 4^{-5}). \end{aligned}$$

4. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^4 \frac{3^{2n+1}}{2^{2n}} &= \sum_{n=1}^4 \frac{9^n \times 3}{4^n} = 3 \sum_{n=1}^4 \left(\frac{9}{4} \right)^n \\ &= 3 \left(\frac{9}{4} \right) \frac{1 - \left(\frac{9}{4} \right)^4}{1 - \frac{9}{4}} \\ &= \frac{27}{4} \frac{1 - \left(\frac{9}{4} \right)^4}{-\frac{5}{4}} \\ &= -\frac{27}{5} \left(1 - \left(\frac{9}{4} \right)^4 \right) \\ &= \frac{27}{5} \left(\left(\frac{9}{4} \right)^4 - 1 \right). \end{aligned}$$

5. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^5 (3^\ell - 2) &= \sum_{\ell=1}^5 3^\ell - \sum_{\ell=1}^5 2 \\ &= 3 \frac{1 - 3^5}{1 - 3} - 5 \times 2 = \frac{3}{2} (3^5 - 1) - 10.\end{aligned}$$

6. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \left(\frac{2^k}{5^k} + \frac{1}{4^k} \right) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{5} \right)^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4} \right)^k \\ &= \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right) + \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) \\ &= \frac{5}{3} - \frac{2^{n+1}}{3 \times 5^n} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n} \\ &= \frac{9}{3} - \frac{2^{n+1}}{3 \times 5^n} - \frac{1}{3 \times 4^n}.\end{aligned}$$

7. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{3^k + 4^k}{5^k} &= \sum_{k=0}^n \left(\left(\frac{3}{5} \right)^k + \left(\frac{4}{5} \right)^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{5} \right)^k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{5} \right)^k \\ &= \frac{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} + \frac{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= \frac{5}{2} \left(1 - \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} \right) + 5 \left(1 - \left(\frac{4}{5} \right)^{n+1} \right) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{3^{n+1}}{2 \times 5^n} + 5 - \frac{4^{n+1}}{5^n} \\ &= \frac{15}{2} - \frac{3^{n+1} - 2 \times 4^{n+1}}{5^n}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. D'après les propriétés sur les suites arithmétiques,

$$u_n = n \times 4 + u_0 = 4n + 1.$$

2. D'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{10} u_k = \sum_{k=0}^{10} (4k + 1) = 4 \sum_{k=0}^{10} k + \sum_{k=0}^{10} 1 = 4 \frac{10(10+1)}{2} + 11 = 4 \times 5 \times 11 + 11 = 220$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. D'après les résultats sur les suites géométriques,

$$w_n = \left(\frac{1}{5} \right)^n w_0 = 4 \left(\frac{1}{5} \right)^n.$$

2. En utilisant les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{21} w_k &= \sum_{k=5}^{21} 4 \left(\frac{1}{5} \right)^k \\ &= 4 \left(\frac{1}{5} \right)^5 \frac{1 - \left(\frac{1}{5} \right)^{21-5+1}}{1 - \frac{1}{5}} \\ &= \frac{4}{5^5} \frac{1 - \left(\frac{1}{5} \right)^{21-5+1}}{\frac{4}{5}} \\ &= \frac{1}{5^4} \left(1 - \frac{1}{5^{17}} \right).\end{aligned}$$

□

II - Sommes télescopiques

Solution de l'exercice 5. En utilisant une somme télescopique puis la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= \frac{1}{2} w_k = \frac{1}{2^{k+1}} \\ \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \\ u_{n-1+1} - u_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ u_n - 0 &= \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ u_n &= 1 - \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 6. En utilisant une somme télescopique puis la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} w_{k-1} \\ u_n - u_0 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \\ u_n - 0 &= \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{5}\right)^k \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} \times \frac{2}{5} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}} \\ &= \frac{5}{12} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7. En utilisant une somme télescopique puis la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ u_n - u_0 &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ u_n - 0 &= 2 \times \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 8. En utilisant une somme télescopique puis la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n (-8)^{k-1} \\ v_n - v_0 &= \frac{1}{-8} \sum_{k=1}^n (-8)^k \\ v_n - 0 &= -\frac{1}{8} (-8) \frac{1 - (-8)^n}{1 - (-8)} \\ &= \frac{1 - (-8)^n}{9}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. En utilisant la définition de b_n ,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n - 3^n &= (n+1)3^{n+1-1} - n3^{n-1} - 3^n \\ &= (n+1)3^n - n3^{n-1} - 3^n \\ &= (n+1)3 \times 3^{n-1} - n3^{n-1} - 3 \times 3^{n-1} \\ &= (3n+3-n-3)3^{n-1} = 2n3^{n-1} = 2b_n. \end{aligned}$$

2. En utilisant la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

3. En utilisant une somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0 = b_{n+1}.$$

4. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k3^{k-1} &= \sum_{k=0}^n b_k &&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k - 3^k) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) - \sum_{k=0}^n 3^k \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(b_{n+1} - \frac{3^{n+1}-1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((n+1)3^n - \frac{3^{n+1}-1}{2} \right) \\ &= \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 10.

1. D'après les propriétés du logarithme,

$$u_k = \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

2. En utilisant les sommes télescopiques,

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

3. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, d'après la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = +\infty.$$

Ainsi, $\sum u_k$ diverge.

□

Solution de l'exercice 11.

1. En utilisant la définition de la suite,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k e^{-1/u_k} \\ \frac{u_{k+1}}{u_k} &= e^{-1/u_k} \\ \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \ln e^{-1/u_k} \\ \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) &= -\frac{1}{u_k} \\ \sum_{k=0}^n [\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)] &= -\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} \\ \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) &= -\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} \\ \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} &= -\ln(u_{n+1}). \end{aligned}$$

□

III - Séries géométriques... et plus

Solution de l'exercice 12.

1. On remarque que $\frac{1}{5^k} = \left(\frac{1}{5}\right)^k$. Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}.$$

2. On remarque que $\frac{3^k}{5^k} = \left(\frac{3}{5}\right)^k$. Comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{5^k} = \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{5}{2}.$$

3. On remarque que $\frac{1}{2^{2k}} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$. Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

4. On remarque que

$$\frac{3^{2\ell+1}}{10^\ell} = \frac{3^{2\ell} \times 3}{10^\ell} = 3 \times \frac{9^\ell}{10^\ell} = 3 \left(\frac{9}{10}\right)^\ell.$$

Comme $-1 < \frac{9}{10} < 1$, alors

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{3^{2\ell+1}}{10^\ell} = 3 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^\ell = 3 \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = \frac{3}{\frac{1}{10}} = 30.$$

□

Solution de l'exercice 13.

1. Si $\sum(\alpha - u_n)$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha - u_n) = 0$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

Ainsi, $\alpha = \frac{2}{3}$.

Réciproquement, si $\alpha = \frac{2}{3}$, alors $\alpha - u_n = -5 \left(\frac{1}{7}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{7} < 1$, alors $\sum(\alpha - u_n)$ converge.

Ainsi, $\alpha_0 = \frac{2}{3}$.

2. En utilisant la propriété précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_0 - u_n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-5 \left(\frac{1}{7}\right)^n\right) \\ &= -5 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = -5 \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} = -\frac{5}{\frac{6}{7}} = -\frac{35}{6}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 14. Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{4}$. Ainsi, $\alpha = \frac{1}{4}$.

Réciproquement, si $\alpha = \frac{1}{4}$, alors $u_n = -\frac{1}{4 \times 3^n} = -\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, alors $\sum u_n$ converge. □

Solution de l'exercice 15.

1. Comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$, alors $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}.$$

Comme $-1 < \frac{9}{25} < 1$, alors $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{9}{25}\right)^n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{1}{\frac{16}{25}} = \frac{25}{16}.$$

2. En utilisant les calculs précédents,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} - \frac{16}{25} \times \frac{25}{16} \\ &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} &= \sum_{k=0}^n k \left(1 - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\
 &= \sum_{k=0}^n k \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \left(\frac{3}{4}\right)^k \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\left(k \frac{3}{4}\right)^{k-1} - k \left(\frac{3}{4}\right)^k \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^k.
 \end{aligned}$$

2. En effectuant un changement de variable,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\
 &= \sum_{k-1=0}^{k-1=n-1} (k-1+1) \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\ell=n-1} (\ell+1) \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell} \\
 &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}.
 \end{aligned}$$

3. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} &= \sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
 &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
 &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell} - \sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
 &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell} - \sum_{k=0}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{3}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1} k \left(\frac{3}{4}\right)^k - n \left(\frac{3}{4}\right)^n \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k - n \left(\frac{3}{4}\right)^n.
 \end{aligned}$$

4. D'après les théorèmes sur les croissances comparées,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

En utilisant les résultats sur les séries géométriques, comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 4 - 0 = 4.$$

□