

## T.D. III - Intégrale sur un segment

### I - Calculs d'intégrales par primitives

#### Solution de l'exercice 1.

1. On décompose la fonction en une somme :

- \* une primitive de  $x^2$  est  $\frac{x^3}{3}$ ,
- \* une primitive de  $x$  est  $\frac{x^2}{2}$ ,
- \* une primitive de 1 est  $x$ .

Ainsi, une primitive de  $x^2 + x + 1$  est

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 + x + 1) dx &= \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \\ &= \left( \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \right) - \left( \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{8}{3} + 2 + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{7}{3} + 3 - \frac{1}{2} = \frac{16}{3} - \frac{1}{2} = \frac{32 - 3}{6} = \frac{29}{6}. \end{aligned}$$

2. On décompose la fonction en une somme :

- \* une primitive de  $2x^3$  est  $\frac{2x^4}{4} = \frac{x^4}{2}$ ,
- \* une primitive de  $4x$  est  $\frac{4x^2}{2} = 2x^2$ ,
- \* une primitive de 2 est  $2x$ .

Ainsi, une primitive de  $2x^3 + 4x + 2$  est

$$\frac{x^4}{2} + 2x^2 + 2x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2x^3 + 4x + 2) dx &= \left[ \frac{x^4}{2} + 2x^2 + 2x \right]_0^2 \\ &= \left( \frac{2^4}{2} + 2 \times 2^2 + 2 \times 2 \right) - \left( \frac{0^4}{2} - 2 \times 0^2 + 2 \times 0 \right) \\ &= 8 + 8 + 4 - 0 = 20. \end{aligned}$$

3. On décompose la fonction en une somme :

- \* une primitive de  $4x^3$  est  $4 \frac{x^4}{4} = x^4$ ,
- \* une primitive de  $2x^2$  est  $2 \frac{x^3}{3}$ ,
- \* une primitive de  $-1$  est  $-x$ .

Ainsi, une primitive de  $4x^3 + 2x^2 - 1$  est

$$x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned} \int_1^2 (4x^3 + 2x^2 - 1) dx &= \left[ x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x \right]_1^2 \\ &= \left( 2^4 + \frac{2}{3}2^3 - 2 \right) - \left( 1^4 + \frac{2}{3}1^3 - 1 \right) \\ &= 16 + \frac{16}{3} - 2 - 1 - \frac{2}{3} + 1 \\ &= 14 + \frac{14}{3} = \frac{56}{3}. \end{aligned}$$

4. On décompose la fonction en une somme :

- \* une primitive de  $x^{10}$  est  $\frac{x^{11}}{11}$ ,
- \* une primitive de  $\frac{1}{5}x^4$  est  $\frac{1}{25}x^5$ ,
- \* une primitive de  $\frac{1}{2}$  est  $\frac{x}{2}$ .

Ainsi, une primitive de  $x^{10} + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}$  est

$$\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^5}{25} + \frac{x}{2}.$$

En utilisant la primitive précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(x^{10} + \frac{x^4}{5} + \frac{1}{2}\right) dx &= \left[\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^5}{25} + \frac{x}{2}\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1^{11}}{11} + \frac{1^5}{25} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{0^{11}}{11} + \frac{0^5}{25} + \frac{0}{2}\right) \\ &= \frac{1}{11} + \frac{1}{25} + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{50 + 22 + 275}{550} \\ &= \frac{347}{550}.\end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 2.

1. Une primitive de  $x^{3/2}$  est donnée par

$$\frac{x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^{5/2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{3/2} dx &= \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{5}1^{5/2} - \frac{2}{5}0^{5/2} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

2. Une primitive de  $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$  est donnée par

$$\frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= [2\sqrt{x}]_0^1 \\ &= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.\end{aligned}$$

3. Une primitive de  $\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}x^{-2}$  est donnée par

$$\frac{1}{3} \times \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{3} \times \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{3x^2} dx &= \left[-\frac{1}{3x}\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3 \times 2}\right) - \left(-\frac{1}{3 \times 1}\right) \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

4. Une primitive de  $\frac{4}{x^5} = 4x^{-5}$  est donnée par

$$4 \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = 4 \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{x^4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{4}{x^5} dx &= \left[-\frac{1}{x^4}\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2^4}\right) - \left(-\frac{1}{1^4}\right) \\ &= -\frac{1}{16} + 1 = \frac{15}{16}.\end{aligned}$$

5. La fonction  $(2x+1)(x^2+x)^5$  est de la forme  $u'(x)u(x)^5$ , avec  $u(x) = x^2+x$ . Ainsi, une primitive de  $(2x+1)(x^2+x)^5$  est donnée par

$$\frac{1}{6}u(x)^6 = \frac{(x^2+x)^6}{6}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 (2x+1)(x^2+x)^5 dx &= \left[\frac{(x^2+x)^6}{6}\right]_{-1}^0 \\ &= \frac{(0^2+0)^6}{6} - \frac{((-1)^2+(-1))^6}{6} \\ &= 0 - 0 = 0.\end{aligned}$$

6. En posant  $u(x) = x^3 + 3x + 4$ , alors  $u'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$ . Ainsi, la fonction

$$(x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4) = \frac{1}{3}3(x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4)$$

est de la forme  $\frac{1}{3}u'(x)u(x)$ . Ainsi, une de ses primitives est

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(x^3 + 3x + 4)^2 = \frac{(x^3 + 3x + 4)^2}{6}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4) dx &= \left[ \frac{(x^3 + 3x + 4)^2}{6} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{(0^3 + 3 \times 0 + 4)^2}{6} - \frac{((-1)^3 + 3 \times (-1) + 4)^2}{6} \\ &= \frac{4^2}{6} - 0 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 3.

1. Une primitive de  $\frac{3}{x} = 3\frac{1}{x}$  est  $3\ln(x)$ . Ainsi,

$$\int_1^2 \frac{3}{x} dx = [3\ln(x)]_1^2 = 3\ln(2) - 3\ln(1) = 3\ln(2).$$

2. En posant  $u(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ , alors  $u'(x) = 3x^2 + 4x$ . Ainsi,  $\frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 1}$  est de la forme  $\frac{u'(x)}{u(x)}$  et une primitive est donnée par

$$\ln |x^3 + 2x^2 + 1|.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 1} dx &= [\ln |x^3 + 2x^2 + 1|]_1^2 \\ &= \ln |2^3 + 2 \times 2^2 + 1| - \ln |1^3 + 2 \times 1^2 + 1| \\ &= \ln(17) - \ln(4) = \ln(17) - 2\ln(2). \end{aligned}$$

3. Une primitive de  $e^{2x}$  est donnée par  $\frac{e^{2x}}{2}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 e^{2x} dx &= \left[ \frac{e^{2x}}{2} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{e^{2 \times 2}}{2} - \frac{e^{2 \times (-2)}}{2} \\ &= \frac{e^4 - e^{-4}}{2}. \end{aligned}$$

4. Une primitive de  $\frac{1}{e^{12x}} = e^{-12x}$  est donnée par

$$\frac{e^{-12x}}{-12} = -\frac{e^{-12x}}{12}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{1}{e^{12x}} dx &= \left[ -\frac{e^{-12x}}{12} \right]_{-2}^2 \\ &= -\frac{e^{-12 \times 2}}{12} - \left( -\frac{e^{-12 \times (-2)}}{12} \right) \\ &= \frac{-e^{-24} + e^{24}}{12} = \frac{e^{24} - e^{-24}}{12}. \end{aligned}$$

5. En posant  $u(x) = e^x + x$ , alors  $u'(x) = e^x + 1$  et  $(e^x + 1)(e^x + x)^{22} = u'(x)u(x)^{22}$ .

Ainsi, une primitive de cette fonction est donnée par

$$\frac{u(x)^{23}}{23} = \frac{(e^x + x)^{23}}{23}.$$

En utilisant cette primitive, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^x + 1)(e^x + x)^{22} dx &= \left[ \frac{(e^x + x)^{23}}{23} \right]_0^1 \\ &= \frac{(e^1 + 1)^{23}}{23} - \frac{(e^0 + 0)^{23}}{23} \\ &= \frac{(e + 1)^{23} - 1}{23}. \end{aligned}$$

6. En posant  $u(x) = e^x + x$ , alors  $u'(x) = e^x + 1$  et

$$\frac{e^x + 1}{e^x + x} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Ainsi, une primitive de cette fonction est donnée par

$$\ln |e^x + x|.$$

En utilisant cette primitive, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx &= [\ln |e^x + x|]_0^1 \\ &= \ln |e^1 + 1| - \ln |e^0 + 0| \\ &= \ln(e+1) - \ln(1) = \ln(e+1). \end{aligned}$$

□

#### Solution de l'exercice 4.

1. En décomposant la fonction en une somme de fonctions :

- \* une primitive de  $x^2$  est donnée par  $\frac{x^3}{3}$ ,
- \* une primitive de  $3x$  est donnée par  $\frac{3x^2}{2}$ ,
- \* une primitive de 1 est donnée par  $x$ .

Ainsi, une primitive de  $x^2 + 3x + 1$  est donnée par

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x.$$

En utilisant cette primitive,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + 3x + 1) dx &= \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x \right]_0^1 \\ &= \left( \frac{1^3}{3} + \frac{3 \times 1^2}{2} + 1 \right) - \left( \frac{0^3}{3} + \frac{3 \times 0^2}{2} + 0 \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 \\ &= \frac{2 + 9 + 6}{6} = \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

2. Une primitive de  $e^{3x}$  est donnée par  $\frac{e^{3x}}{3}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 e^{3x} dx &= \left[ \frac{e^{3x}}{3} \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{e^{3 \times 1}}{3} - \frac{e^{3 \times (-2)}}{3} \\ &= \frac{e^3 - e^{-6}}{3}. \end{aligned}$$

3. La fonction  $e^3$  est constante donc une de ses primitives est  $e^3 x$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^{-1} e^3 dx &= [e^3 x]_1^{-1} \\ &= e^3(-1) - e^3 \times 1 = -2e^3. \end{aligned}$$

4. Une primitive de  $\frac{1}{x}$  est  $\ln(x)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_2^1 \frac{1}{x} dx &= [\ln(x)]_2^1 \\ &= \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2). \end{aligned}$$

5. En décomposant la fonction sous forme de somme,

- \* une primitive de  $e^x$  est  $e^x$ ,
- \* une primitive de  $x^2$  est  $\frac{x^3}{3}$ .

Ainsi, une primitive de  $2e^x + 3x^2$  est

$$2e^x + 3\frac{x^3}{3} = 2e^x + x^3.$$

En utilisant cette primitive, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 2e^x + 3x^2 dx &= [2e^x + x^3]_0^1 \\ &= 2e^1 + 1^3 - (2e^0 + 0^3) \\ &= 2e + 1 - 2 = 2e - 1. \end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 5.** En posant  $u(x) = \ln(x)$ , alors  $u'(x) = \frac{1}{x}$ . Ainsi,  $\frac{\ln(x)}{x}$  est de la forme  $u'(x) \times u(x)$  et une primitive est donnée par

$$\frac{1}{2}u(x)^2 = \frac{(\ln(x))^2}{2}.$$

Ainsi,

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[ \frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_1^A = \frac{\ln(A)^2}{2} - \frac{\ln(1)^2}{2} = \frac{\ln(A)^2}{2}.$$

□

## II - Fonctions définies par morceaux

**Solution de l'exercice 6.**

1. TODO

2. a) Comme  $f$  est nulle sur  $[-2, 0]$ ,

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 0 dx = 0.$$

b) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3/2} f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^{3/2} f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 0 dx + \int_1^{3/2} \frac{1}{2} dx \\ &= 0 + \left[ \frac{x}{2} \right]_1^{3/2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

c) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 0 dx + \int_1^2 \frac{1}{2} dx \\ &= 0 + \left[ \frac{x}{2} \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

d) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_{-4}^3 f(x) dx &= \int_{-4}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \\ &= \int_{-4}^1 0 dx + \int_1^3 \frac{1}{2} dx \\ &= 0 + \left[ \frac{x}{2} \right]_1^3 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

e) On utilise la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{10} f(x) dx &= \int_{-5}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^{10} f(x) dx \\ &= \int_{-5}^1 0 dx + \int_1^3 \frac{1}{2} dx + \int_3^{10} 0 dx \\ &= 0 + \left[ \frac{x}{2} \right]_1^3 + 0 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

3. Comme  $1 \leq x \leq 3$ , en utilisant le calcul précédent,

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t) dt &= \int_1^x \frac{1}{2} dt \\ &= \left[ \frac{t}{2} \right]_1^x \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}. \end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 7.****1.** TODO**2.** Une primitive de  $2e^{-2x}$  est donnée par

$$2 \frac{e^{-2x}}{-2} = \frac{e^{-2x}}{-1} = -e^{-2x}.$$

**a)** En utilisant la définition de  $f$ ,

$$\int_{-2}^0 f(x) \, dx = \int_{-2}^0 0 \, dx = 0.$$

**b)** En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3/2} f(x) \, dx &= \int_{-1}^0 f(x) \, dx + \int_0^{3/2} f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^{3/2} 2e^{-2x} \, dx \\ &= 0 + [-e^{-2x}]_0^{3/2} \\ &= -e^{-2 \times \frac{3}{2}} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= -e^{-3} + 1 = 1 - e^{-3}. \end{aligned}$$

**c)** En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) \, dx &= \int_{-1}^0 f(x) \, dx + \int_0^2 f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^2 2e^{-2x} \, dx \\ &= 0 + [-e^{-2x}]_0^2 \\ &= -e^{-2 \times 2} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= -e^{-4} + 1 = 1 - e^{-4}. \end{aligned}$$

**d)** En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-4}^3 f(x) \, dx &= \int_{-4}^0 f(x) \, dx + \int_0^3 f(x) \, dx \\ &= \int_{-4}^0 0 \, dx + \int_0^3 2e^{-2x} \, dx \\ &= 0 + [-e^{-2x}]_0^3 \\ &= -e^{-2 \times 3} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= -e^{-6} + 1 = 1 - e^{-6}. \end{aligned}$$

**e)** En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{10} f(x) \, dx &= \int_{-5}^0 f(x) \, dx + \int_0^{10} f(x) \, dx \\ &= \int_{-5}^0 0 \, dx + \int_0^{10} 2e^{-2x} \, dx \\ &= 0 + [-e^{-2x}]_0^{10} \\ &= -e^{-2 \times 10} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= -e^{-20} + 1 = 1 - e^{-20}. \end{aligned}$$

**f)** Soit  $x \geq 0$ . D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) \, dt &= \int_0^x 2e^{-2t} \, dt \\ &= [-e^{-2t}]_0^x \\ &= -e^{-2x} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= -e^{-2x} + 1 = 1 - e^{-2x}. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) \, dt = 1.$$

□

**Solution de l'exercice 8.** On remarque que  $x - 2 \geq 0$  si et seulement si  $x \geq 2$ . Ainsi,

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{si } x \leq 2 \end{cases}.$$

En utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^5 |x - 2| \, dx &= \int_{-1}^2 |x - 2| \, dx + \int_2^5 |x - 2| \, dx \\ &= \int_{-1}^2 -(x - 2) \, dx + \int_2^5 (x - 2) \, dx \\ &= \left[ -\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \right]_{-1}^2 + \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^5 \\ &= -\left(\frac{2^2}{2} - 2 \times 2\right) + \frac{(-1)^2}{2} - 2 \times (-1) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{5^2}{2} - 2 \times 5 - \left(\frac{2^2}{2} - 2 \times 2\right) \\ &= 2 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{25}{2} - 10 + 2 = -4 + \frac{26}{2} \\ &= 13 - 4 = 9. \end{aligned}$$

**2<sup>e</sup> méthode.** On aurait pu remarquer qu'en posant  $u(x) = x - 2$ , alors  $u'(x) = 1$  et  $x - 2 = u'(x)u(x)$ . Ainsi, une primitive de  $x - 2$  est  $\frac{(x-2)^2}{2}$ . Les calculs sont alors plus simples.  $\square$

### III - Linéarité de l'intégrale

#### Solution de l'exercice 9.

1. Soit  $t \in [0, 1]$ . En mettant sous le même dénominateur,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1+t} &= \frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t} \\ &= \frac{1+t-1}{1+t} = \frac{t}{1+t}. \end{aligned}$$

2. En utilisant la question précédente puis la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t}{1+t} \, dt &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) \, dt \\ &= \int_0^1 1 \, dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, dt \\ &= [t]_0^1 - [\ln |1+t|]_0^1 \\ &= 1 - 0 - (\ln(1+1) - \ln(1+0)) \\ &= 1 - \ln(2). \end{aligned}$$

$\square$

**Solution de l'exercice 10.** En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \, dt + \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{t^{n+1}}{1+t} + \frac{t^n}{1+t} \right) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{n+1} + t^n}{1+t} \, dt \\ &= \int_0^1 t^n \frac{1+t}{1+t} \, dt \\ &= \int_0^1 t^n \, dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

$\square$

#### Solution de l'exercice 11.

1. En posant  $u(x) = 1 + x$ , alors  $u'(x) = 1$  et  $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{1+x}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx \\ &= [\ln |1+x|]_0^1 \\ &= \ln |1+1| - \ln |1+0| = \ln(2). \end{aligned}$$

2. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+x}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

3. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} I + J &= 1 \\ J &= 1 - I = 1 - \ln(2). \end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 12.

1. En posant  $u(x) = 1 + x^2$ , alors  $u'(x) = 2x$  et

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right]_0^1 \\ &= \frac{\ln |1+1^2|}{2} - \frac{\ln |1+0^2|}{2} = \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

2. En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 x \frac{1+x^2}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} I + J &= \frac{1}{2} \\ J &= \frac{1}{2} - I = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{1 - \ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

□

## IV - Dérivation par rapport aux bornes

**Solution de l'exercice 13.** La fonction  $F$  est dérivable et

$$F'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Ainsi,  $F' \geq 0$  et la fonction  $F$  est croissante.

□

**Solution de l'exercice 14.**

1. La fonction  $f$  est dérivable et  $f'(x) = \frac{e^x}{x}$ .

2. La tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1 a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= \frac{e^1}{1}(x-1) + \int_1^1 \frac{e^t}{t} dt \\ &= e(x-1) + 0 = e(x-1). \end{aligned}$$



3. La fonction  $f'$  est de la forme  $f'(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ , où  $u(x) = e^x$  et  $v(x) = x$ .  
Comme  $u'(x) = e^x$  et  $v'(x) = 1$ , alors

$$f''(x) = \frac{e^x x - e^x \times 1}{x^2} = e^x \frac{x-1}{x^2}.$$

□

## V - Inégalités

### Solution de l'exercice 15.

1. En posant  $u(x) = e^x$  et  $v(x) = x^3$ , alors  $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{e^x x^3 - e^x(3x^2)}{(x^3)^3} \\ &= e^x x^2 \frac{x-3}{x^6} \\ &= e^x \frac{x-3}{x^4}. \end{aligned}$$

2. Comme  $e^x \geq 0$  et  $x^4 \geq 0$ ,  $g'$  est du signe de  $x-3$ .  
D'après le théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ .  
On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

$x$	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	e	$\searrow \frac{e^3}{27}$	$\nearrow +\infty$

3. D'après le tableau de variations, la fonction  $g$  est décroissante sur

$[1, 3]$ . Ainsi, pour tout  $x \in [1, 3]$ ,

$$\begin{aligned} g(3) &\leq g(x) \leq g(1) \\ 0 &\leq \frac{e^3}{27} \leq g(x) \leq e \\ \int_1^3 0 \, dx &\leq \int_1^3 g(x) \, dx \leq \int_1^3 e \, dx, \text{ car } 1 \leq 3 \\ 0 &\leq \int_1^3 g(x) \, dx \leq e[x]_1^3 \\ 0 &\leq \int_1^3 g(x) \, dx \leq e(3-1) \\ 0 &\leq \int_1^3 g(x) \, dx \leq 2e. \end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 16.

1. Comme la fonction inverse est décroissante,

$$\begin{aligned} 1 &\leq t \leq x \\ \frac{1}{x} &\leq \frac{1}{t} \leq 1 \\ \frac{e^t}{x} &\leq \frac{e^t}{t}, \text{ car } e^t \geq 0 \\ \int_1^x \frac{e^t}{x} \, dt &\leq \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt, \text{ car } 1 \leq x \\ \frac{1}{x} \int_1^x e^t \, dt &\leq f(x) \\ \frac{1}{x} [e^t]_1^x &\leq f(x) \\ \frac{e^x - e}{x} &\leq f(x). \end{aligned}$$

2. En factorisant par  $e^x$ ,

$$\frac{e^x - e}{x} = \frac{e^x}{x} (1 - e^{1-x}).$$

D'après le théorème des croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{1-x} = 1$ .

Finalement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e}{x} = +\infty$ .

D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

□

### Solution de l'exercice 17.

1. Comme  $x \in [0, 1/2]$ , alors  $x^2 \in [0, 1]$  et  $1 - x^2 \geq 0$ .

Ainsi,

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x \times x^{n-1} \leq 1 \times x^{n-1}, \text{ car } x^{n-1} \geq 0$$

$$0 \leq x^n \leq x^{n-1}$$

$$0 \leq \frac{x^n}{1 - x^2} \leq \frac{x^{n-1}}{1 - x^2}, \text{ car } 1 - x^2 \geq 0$$

$$\int_0^{1/2} 0 \, dx \leq \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1 - x^2} \, dx \leq \int_0^{1/2} \frac{x^{n-1}}{1 - x^2} \, dx, \text{ car } 0 \leq 1/2$$

$$0 \leq u_n \leq u_{n-1}.$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est décroissante.

2. On a montré à la question précédente que  $(u_n)$  est minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, comme  $(u_n)$  est décroissante et minorée, alors  $(u_n)$  converge.

3. En utilisant les propriétés sur  $x$ ,

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} \leq -x^2 \leq 0$$

$$1 - \frac{1}{4} \leq 1 - x^2 \leq 0$$

$$\frac{1}{1 - x^2} \leq \frac{4}{3}, \text{ car la fonction inverse est décroissante}$$

$$\frac{x^n}{1 - x^2} \leq \frac{4}{3} x^n, \text{ car } x^n \geq 0$$

$$\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1 - x^2} \, dx \leq \frac{4}{3} \int_0^{1/2} x^n \, dx$$

$$u_n \leq \frac{4}{3} \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{1/2}$$

$$\leq \frac{4 \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} - 0^{n+1}}{3(n+1)}$$

$$\leq \frac{4}{3(n+1)} \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}.$$

4. Comme  $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} = 0$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ .

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3(n+1)} \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} = 0.$$

Comme, pour tout  $n$  entier naturel,

$$0 \leq u_n \leq \frac{4}{3(n+1)} \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1},$$

d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

□

**Solution de l'exercice 18.**

1. En utilisant la croissance des fonctions puissances puis du logarithme,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x \leq 1 \\
 0 &\leq x^n \leq 1^n \\
 1 &\leq 1 + x^n \leq 1 + 1 \\
 \ln(1) &\leq \ln(1 + x^n) \leq \ln(2) \\
 \int_0^1 0 \, dx &\leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx \leq \int_0^1 \ln(2) \, dx, \quad \text{car } 0 \leq 1 \\
 0 &\leq I_n \leq [\ln(2)x]_0^1 \\
 0 &\leq I_n \leq \ln(2) \times 1 - \ln(2) \times 0 \\
 0 &\leq I_n \leq \ln(2).
 \end{aligned}$$

2. En reprenant la stratégie précédente,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x \leq 1 \\
 0 &\leq x \times x^{n-1} \leq 1 \times x^{n-1}, \quad \text{car } x^{n-1} \geq 0 \\
 1 &\leq 1 + x^n \leq 1 + x^{n-1} \\
 0 &\leq \ln(1 + x^n) \leq \ln(1 + x^{n-1}) \\
 \int_0^1 0 \, dx &\leq \int_0^1 \ln(1 + x^n) \, dx \leq \int_0^1 \ln(1 + x^{n-1}) \, dx, \quad \text{car } 0 \leq 1 \\
 0 &\leq I_n \leq I_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(I_n)$  est décroissante.

3. La suite  $(I_n)$  est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, la suite  $(I_n)$  converge.  $\square$

**VI - Intégrations par parties****Solution de l'exercice 19.**

1. On pose  $u(x) = x$ , soit  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = e^x$ , soit  $v'(x) = e^x$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[0, 1]$ . Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x e^x \, dx &= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x \, dx \\
 &= 1 e^1 - 0 - [e^x]_0^1 \\
 &= e - (e^1 - e^0) = 1.
 \end{aligned}$$

2. On pose  $u(x) = x$ , soit  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$  soit  $v'(x) = e^{2x}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[1, 2]$ . Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 x e^{2x} \, dx &= \left[ x \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 1 \times \frac{e^{2x}}{2} \, dx \\
 &= 2 \times \frac{e^{2 \times 2}}{2} - 1 \times \frac{e^{2 \times 1}}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 \\
 &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2} \right] \\
 &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} \\
 &= \frac{3e^4 - e^2}{4}.
 \end{aligned}$$

3. On pose  $u(x) = \frac{x^2}{2}$ , soit  $u'(x) = x$  et  $v(x) = \ln(x)$ , soit  $v'(x) = \frac{1}{x}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[1, e]$ . Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
 \int_1^e x \ln(x) \, dx &= \left[ \frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx \\
 &= \frac{e^2 \ln(e)}{2} - \frac{1^2 \ln(1)}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right] \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.
 \end{aligned}$$

4. On pose  $u(x) = x^2$ , soit  $u'(x) = 2x$  et  $v(x) = e^x$ , soit  $v'(x) = e^x$ .  
Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[0, 1]$ .  
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - 0 - 2 \int_0^1 x e^x dx.$$

On pose  $u(x) = x$ , soit  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = e^x$ , soit  $v'(x) = e^x$ .  
Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[0, 1]$ .  
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x dx &= e - 2 \left[ [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx \right] \\ &= e - 2 \left[ e^1 - 0 - [e^x]_0^1 \right] \\ &= e - 2 \left[ e - (e - e^0) \right] \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

5. On pose  $u(x) = \frac{x^3}{3}$ , soit  $u'(x) = x^2$  et  $v(x) = \ln(x)$ , soit  $v'(x) = \frac{1}{x}$ .  
Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[1, 2]$ .  
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 \ln(x) dx &= \left[ \frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{2^3 \ln(2)}{3} - \frac{1^3 \ln(1)}{3} - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx \\ &= \frac{8 \ln(2)}{3} - \frac{1}{3} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{8 \ln(2)}{3} - \frac{1}{3} \left[ \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right] \\ &= \frac{3 \times 8 \ln(2) - 7}{9} = \frac{8 \ln(8) - 7}{9}. \end{aligned}$$

6. On pose  $u(x) = x$ , soit  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = (\ln(x))^2$ , soit  $v'(x) = 2 \frac{\ln(x)}{x}$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[1, e]$ .  
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln(t))^2 dt &= \int_1^e 1 \times (\ln(t))^2 dt \\ &= [t(\ln(t))^2]_1^e - \int_1^e t \times 2 \times \frac{\ln(t)}{t} dt \\ &= e \ln(e)^2 - 1 \ln(1)^2 - 2 \int_1^e \ln(t) dt \\ &= e - 2 \int_1^e \ln(t) dt. \end{aligned}$$

On pose  $u(x) = x$ , soit  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = \ln(x)$ , soit  $v'(x) = \frac{1}{x}$ .  
Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[1, e]$ .  
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^e 1 \times (\ln(t))^2 dt &= e - 2 \left[ [t \ln(t)]_1^e - \int_1^e t \times \frac{1}{t} dt \right] \\ &= e - 2 [e \ln(e) - 1 \ln(1) - [t]_1^e] \\ &= e - 2 [e - (e - 1)] = e - 2. \end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 20.** On pose  $u(x) = -\frac{1}{x}$ , soit  $u'(x) = \frac{1}{x^2}$  et  $v(x) = \ln(x)$  soit  $v'(x) = \frac{1}{x}$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[1, A]$ .  
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx &= \left[ -\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^A - \int_1^A \left( -\frac{1}{x} \right) \times \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} - \left( -\frac{\ln(1)}{1} \right) + \int_1^A \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^A \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[ -\frac{1}{A} - \left( -\frac{1}{1} \right) \right] \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1 = 1 - \frac{\ln(A) + 1}{A}. \end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 21.**

1. On pose  $u(t) = e^t$ , soit  $u'(t) = e^t$  et  $v(t) = \frac{1}{t}$  soit  $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt &= \left[ e^t \times \frac{1}{t} \right]_1^x - \int_1^x e^t \times \left( -\frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{e^x}{x} - \frac{e^1}{1} + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt \\ &= \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

2. On pose  $u(t) = e^t$ , soit  $u'(t) = e^t$  et  $v(t) = \frac{1}{t^2}$ , soit  $v'(t) = -\frac{2}{t^3}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt &= \left[ e^t \frac{1}{t^2} \right]_1^x - \int_1^x e^t \times \left( -\frac{2}{t^3} \right) dt \\ &= \frac{e^x}{x^2} - \frac{e^1}{1^2} + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \\ &= \frac{e^x}{x^2} - e + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt \\ &= \frac{e^x}{x} - e + \frac{e^x}{x^2} - e + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \\ &= \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt. \end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 22.**

1. En utilisant la définition,

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 (1-t)^0 e^t dt = \int_0^1 e^t dt \\ &= [e^t]_0^1 = e^1 - e^0 \\ &= e - 1. \end{aligned}$$

2. On pose  $f(t) = (2-t)e^t$ . La fonction  $f$  est dérivable comme produit de fonctions dérivables et en appliquant la formule de la dérivée d'un produit,

$$\begin{aligned} f'(t) &= -e^t + (2-t)e^t = e^t(-1+2-t) \\ &= (1-t)e^t = g(t). \end{aligned}$$

Ainsi,  $f' = g$  et  $f$  est une primitive de  $g$ .

3. En utilisant la primitive trouvée précédemment,

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 (1-t)^1 e^t dt = \int_0^1 (1-t)e^t dt = \int_0^1 g(t) dt \\ &= [f(t)]_0^1 = [(2-t)e^t]_0^1 \\ &= (2-1)e^1 - (2-0)e^0 \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

4. On pose  $u(t) = e^t$  soit  $u'(t) = e^t$  et  $v(t) = (1-t)^{n+1}$ , soit  $v'(t) = -(n+1)(1-t)^n$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[0, 1]$ .

Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt = [e^t(1-t)^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 e^t [-(n+1)(1-t)^n] dt \\ &= e^1(1-1)^{n+1} - e^0(1-0)^{n+1} + \dots \\ &\quad \dots + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \\ &= -1 + (n+1)u_n = (n+1)u_n - 1. \end{aligned}$$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt - \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \\ &= \int_0^1 [(1-t)^{n+1} e^t - (1-t)^n e^t] dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^n e^t [1-t-1] dt \\ &= - \int_0^1 (1-t)^n t e^t dt. \end{aligned}$$

Comme  $(1-t)^n t e^t \geq 0$  et  $0 \leq 1$ , alors

$$\int_0^1 (1-t)^n t e^t dt \geq 0$$

et  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est décroissante.

Comme  $(1-t)^n e^t \geq 0$ , alors  $u_n \geq 0$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée, donc convergente. On note  $\ell$  sa limite. Comme  $0 \leq u_n \leq u_0$ , alors  $0 \leq \ell \leq u_0$ .

Supposons que  $\ell \neq 0$ . Alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)u_n = \infty$ . Comme  $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ , en passant à la limite dans l'égalité, on obtient  $\ell = \infty$ , ce qui est impossible. Ainsi,  $\ell = 0$ .

6. En utilisant la question 4.,

$$nu_n = u_{n+1} - u_n + 1.$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0 - 0 + 1 = 1$ . □

### Solution de l'exercice 23.

1. En utilisant la définition,

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_1^e t(\ln(t))^0 dt = \int_1^e t dt \\ &= \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{2}. \end{aligned}$$

2. a) La fonction logarithme népérien étant croissante,

$$\begin{aligned} 1 &\leq t \leq e \\ \ln(1) &\leq \ln(t) \leq \ln(e) \\ 0 &\leq \ln(t) \leq 1. \end{aligned}$$

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant les définitions ainsi que la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_1^e t(\ln(t))^{n+1} dt - \int_1^e t(\ln(t))^n dt \\ &= \int_1^e [t(\ln(t))^{n+1} - t(\ln(t))^n] dt \\ &= \int_1^e t(\ln(t))^n (\ln(t) - 1) dt. \end{aligned}$$

Comme  $t \in [1, e]$ ,

$$\begin{aligned} t(\ln(t))^n (\ln(t) - 1) &\leq 0 \\ \int_1^e t(\ln(t))^n (\ln(t) - 1) dt &\leq \int_1^e 0 dt \\ u_{n+1} - u_n &\leq 0 \\ u_{n+1} &\leq u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(u_n)$  est décroissante.

3. On pose  $u(t) = \frac{t^2}{2}$ , soit  $u'(t) = t$  et  $v(t) = (\ln(t))^{n+1}$ , soit  $v'(t) = (n+1) \frac{(\ln(t))^n}{t}$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[1, e]$ . Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_1^e t(\ln(t))^{n+1} dt \\ &= \left[ \frac{t^2}{2} (\ln(t))^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \times (n+1) \frac{(\ln(t))^n}{t} dt \\ &= \frac{e^2}{2} (\ln(e))^{n+1} - \frac{1^2}{2} (\ln(1))^{n+1} - \frac{n+1}{2} \int_1^e t(\ln(t))^n dt \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} u_n. \end{aligned}$$

4. En utilisant la question 1. et la question précédente,

$$\begin{aligned}u_1 = u_{0+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{0+1}{2}u_0 \\&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} \\&= \frac{e^2+1}{4}, \\u_2 = u_{1+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{1+1}{2}u_1 \\&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2+1}{4} = \frac{e^2-1}{4}, \\u_3 = u_{2+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{2+1}{2}u_2 \\&= \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2}{2} - \frac{3e^2-3}{8} \\&= \frac{e^2+3}{8}.\end{aligned}$$

□