

T.D. VI - Espaces vectoriels

I - Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{array}{ll}
 1. (\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 2 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases} & 4. (\mathcal{S}_4) \begin{cases} x + y + z = 5 \end{cases} \\
 2. (\mathcal{S}_2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases} & 5. (\mathcal{S}_5) \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases} \\
 3. (\mathcal{S}_3) \begin{cases} 2x - y + 4z = 2 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases} & 6. (\mathcal{S}_6) \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 8 \\ -x + 2y + 4z = -11 \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 2. Identifier les réels λ pour lesquels le système d'équations suivant possède une solution.

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

II - Familles de vecteurs

Exercice 3. Soit $n \geq 3$. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- $E_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 = 0 \text{ ET } x_2 = 0\}$
- $E_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + x_2 = 0\}$
- $E_3 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 \neq 0\}$
- $E_4 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 = x_2\}$
- $E_5 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 x_2 = 0\}$

Exercice 4. (Familles libres) Montrer que les familles suivantes sont libres :

- $((-1, -1, 1, 2), (1, -1, 1, 5)).$
- $((8, 4, 1, -2), (1, 3, 0, 5)).$
- $((1, 1, 3, 2), (1, -1, 1, 3), (0, 1, 5, 2)).$
- $((1, 2, 3, 4), (-1, 3, 2, 1), (2, 1, -1, 1)).$

Exercice 5. (Familles génératrices) Déterminer une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

- $F_1 = \{(2\lambda, -\lambda, -3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}.$
- $F_2 = \{(2\lambda, 0, -3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}.$
- $F_3 = \{(2\lambda + \mu, 2\mu, 3\lambda - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$
- $F_4 = \{(2\lambda + \mu, 5\lambda + 2\mu, 3\lambda - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$

Exercice 6. (Bases) Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x - 3y + z = 0\}.$
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 4x + y + z = 0 \text{ ET } 3x + z = 0\}.$
- $F_3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases} \right\}.$
- $F_4 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ x + y - t = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \right\}.$

Exercice 7. (Équations cartésiennes) Pour chacune des questions suivantes, déterminer une équation cartésienne de l'espace vectoriel.

- $F_1 = \text{Vect} \{(1, 1, 2), (1, 0, 1)\}.$
- $F_2 = \text{Vect} \{(1, 2), (4, 6)\}.$
- $F_3 = \text{Vect} \{(1, 0, 1), (2, 3, 1)\}.$
- $F_4 = \text{Vect} \{(1, 1, 1)\}.$

Exercice 8. (Coordonnées)

1. Montrer que $\mathcal{B}_1 = ((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer les coordonnées du vecteur $(8, 4, 2)$ dans cette base.
2. Montrer que $\mathcal{B}_2 = ((-1, -1, 1), (1, -1, 1), (2, 2, -1))$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer les coordonnées du vecteur $(8, 4, 2)$ dans cette base.
3. Soient $\mathcal{B} = ((-1, -1, 1), (2, 2, -1))$ et $F = \text{Vect } \mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $(3, 3, -1)$ dans la base \mathcal{B} .

III - Questions plus théoriques

Exercice 9. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
2. On note $F + G = \{f + g, (f, g) \in F \times G\}$. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
3. Montrer que, en général, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Indication : Exhiber un contre-exemple lorsque $n = 2$.

Exercice 10. Soit $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Déterminer la dimension et une base de F .

IV - Calcul matriciel

Exercice 11. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = A - bJ$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer J^n .
2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n .

Exercice 12. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A - I_3$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer B^n .
2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n .

V - Matrices & Espaces vectoriels

Exercice 13. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; AM = MA\}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A .

1. Donner des exemples de matrices appartenant à $\mathcal{C}(A)$.
2. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un espace vectoriel.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (I_2, A) est libre.
2. Exprimer A^2 en fonction de I_2 et de A .
3. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $F = \text{Vect } \{I_2, A, A^2\}$.

Exercice 15. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \text{Vect } \{I_3, A, A^2\}$.

1. Montrer que (I_3, A, A^2) est une famille libre et en déduire la dimension de F .
2. Calculer $A^3 - 3A^2 - 4A + 3I_3$.
3. Montrer que A est inversible et montrer que $A^{-1} \in F$.
4. Montrer que, pour tout n entier naturel, $A^n \in F$.
5. En déduire la dimension de $\text{Vect } \{A^k, k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 16. (☞) On note $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille 3.

1. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
3. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Généraliser les questions précédentes à l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de taille n .

Exercice 17. (☞) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $(I_3, A, A^2, A^3, \dots, A^9)$ est liée.