T.D. X - Variables aléatoires à densité

I - Densités

Solution de l'exercice 1.

* D'après les théorèmes usuels, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en $2a$.

  Comme $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.
  Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t}{2a^2} = \frac{0}{2a^2} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 0.
  En particulier, f est continue en 0.

  Comme $\lim\limits_{t\to 2a^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 2a^+} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à droite en $2a$.
  Comme $\lim\limits_{t\to 2a^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 2a^-} \frac{t}{2a^2} = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}$, alors f admet une limite finie à gauche en $2a$.
  En particulier, f n'est pas continue en $2a$.
* Comme $x \geqslant 0$ lorsque $x \in [0, 2a]$ alors f est positive sur $[0, 2a]$. De plus, elle est positive en dehors de $[0, 2a]$, donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
* Comme f est nulle en dehors de $[0, 2a]$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2a} \frac{t}{2a^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{(2a)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 1.$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité. □

Solution de l'exercice 2.

* D'après les théorèmes usuels, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.
  Comme $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 1.
  Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.
  En particulier, f est continue en 0.
* Comme la fonction ln est positive sur $[1, +\infty[$, alors f est positive sur $[1, +\infty[$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 1]$, alors $f \geqslant 0$ sur cet intervalle. Finalement, f est bien à valeurs positives sur $\mathbb{R}$.
* Soit $x \geqslant 1$.

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_1^{x} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}, \quad \text{d'après l'énoncé.}$$

  Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité. □

Solution de l'exercice 3.

* D'après les théorèmes généraux, f_n est continue sauf éventuellement en 0 et 1.

  Comme $\lim\limits_{t\to 0-} f_n(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$, alors f_n admet une limite finie à gauche en 0.
  Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} f_n(t) = n0^{n-1} = 0$, alors f_n admet une limite finie à droite en 0.
  En particulier, f_n est continue en 0.

  Comme $\lim\limits_{t\to 1^+} f_n(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} 0 = 0$, alors f_n admet une limite finie à droite en 1.

Comme $\lim_{t\to 1^-} f_n(t) = \lim_{t\to 1^+} nt^{n-1} = n1^{n-1} = n$, alors f_n admet une limite finie à gauche en 1.
En particulier, f_n n'est pas continue en 1.

* Comme $nt^{n-1} \geqslant 0$ sur $[0,1]$ et f_n est nulle en dehors de $[0,1]$, alors f_n est positive sur $\mathbb{R}$.
* Comme f_n est nulle en dehors de $[0,1]$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = n\left[\frac{t^n}{n}\right]_0^1\\ &= n\left(\frac{1}{n}-0\right) = 1.\end{aligned}$$

Finalement, f_n est bien une densité de probabilité. □

Solution de l'exercice 4.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 0, a et $2a$.

  Comme $\lim_{t\to 0^-} f(t) = \lim_{t\to 0^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.
  Comme $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{a^2} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 0.
  En particulier, f est continue en 0.

  Comme $\lim_{t\to a^-} f(t) = \lim_{t\to a^-} \frac{t}{a^2} = \frac{1}{a}$, alors f admet une limite finie à gauche en a.
  Comme $\lim_{t\to a^+} f(t) = \lim_{t\to a^+} \frac{2a-t}{a^2} = \frac{2a-a}{a^2} = \frac{1}{a}$, alors f admet une limite finie à droite en a.
  En particulier, f est continue en a.

  Comme $\lim_{t\to 2a^-} f(t) = \lim_{t\to 2a^-} \frac{2a-t}{a^2} = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en $2a$.
  Comme $\lim_{t\to 2a^+} f(t) = \lim_{t\to 2a^+} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à droite en $2a$.
  En particulier, f est continue en $2a$.
* Comme $t \geqslant 0$ sur $[0,a]$ et $2a-t \geqslant 0$ sur $[a,2a]$, alors f est positive sur $\mathbb{R}$.
* Comme f est nulle en dehors de $[0,2a]$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^a \frac{t}{a^2}\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a} \frac{2a-t}{a^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^a t\,\mathrm{d}t + \int_a^{2a}\frac{2a}{a^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{a^2}\int_a^{2a} t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^a + \frac{2}{a}[t]_a^{2a} - \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^{2a}\\ &= \frac{1}{2} + 2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 1.\end{aligned}$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité. □

Solution de l'exercice 5.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 0 et 1.

  Comme $\lim_{t\to 0^-} f(t) = \lim_{t\to 0^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.
  Comme $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{kt}{1+t} = \frac{k\times 0}{1+0} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 0.
  En particulier, f est continue en 0.

  Comme $\lim_{t\to 1^-} f(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{kt}{1+t} = \frac{k}{2}$, alors f admet une limite finie à gauche en 1.
  Comme $\lim_{t\to 1^+} f(t) = \lim_{t\to 1^+} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 1.
  En particulier, f est continue en 0. De plus, si $k \neq 0$, alors f n'est pas continue en 1.
* Comme $\frac{t}{1+t} \geqslant 0$ lorsque $t \in [0,1]$, alors $\frac{kt}{1+t} \geqslant 0$ si et seulement si $k \geqslant 0$. De plus, f est nulle, donc positive, en dehors de $[0,1]$. Ainsi, $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $k \geqslant 0$.
* Comme f est nulle en dehors du segment $[0,1]$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kt}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{kt}{1+t}\,\mathrm{d}t = k\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = k(1-\ln(2)).$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kt}{1+t}\,\mathrm{d}t = 1$ si et seulement si $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$.
Comme $1-\ln(2) \geqslant 0$, la fonction f est une densité de probabilité si et seulement si $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$. □

II - Fonctions de répartition, Espérances, Variances

Solution de l'exercice 6.

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

∗ D'après les théorèmes généraux, f est continue sauf éventuellement en 0.
Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$, la fonction f admet une limite finie à gauche en 0.
Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{(x+1)^2} = 1$, la fonction f admet une limite finie à droite en 0.
En particulier, la fonction f n'est pas continue en 0.

∗ Comme $\frac{1}{(x+1)^2} \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$ et $f(x)$ est nulle pour $x < 0$, alors la fonction f est à valeurs positives.

∗ Soit $A \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{A} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{A} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^A \\ &= 1 - \frac{1}{A+1}.\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A+1} = 0$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

2. D'après la définition, $F_T(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

∗ Si $x \leqslant 0$, alors

$$F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

∗ Si $x > 0$, alors d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}F_T(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_{0}^{x} \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{1+x}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{sinon.}\end{cases}$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

∗ Si $x \leqslant 0$, alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

∗ Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{x} \left(\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^x - \left[\frac{\mathrm{e}^{-t}}{-1}\right]_0^x \\ &= \left[-2\,\mathrm{e}^{-t/2}\right]_0^x - \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x \\ &= 2 - 2\,\mathrm{e}^{-x/2} - \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= 1 + \mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-x/2}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 + \mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

2. Si $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(a)$, alors sa densité est donnée par

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ a\,\mathrm{e}^{-at} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

En particulier, $\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{a}$.
D'après la définition de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= \frac{1}{a} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{a} \\ \int_0^{+\infty} at\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{a} \\ \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

3. Si l'intégrale converge, alors $\mathbf{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $A \geqslant 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{A} tf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^A t\left(\mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^A t\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t - \int_0^A t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$,
* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Ainsi,

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-\infty}^{A} tf(t)\,\mathrm{d}t = 4 - 1 = 3.$$

Donc, X admet une espérance et $\mathbf{E}[X] = 3$. □

Solution de l'exercice 8.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x < 1$, alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

* Si $x \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Posons $\begin{cases} u(t) &= \ln(t) \\ u'(t) &= \frac{1}{t} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(t) &= \frac{1}{t^2} \\ v(t) &= -\frac{1}{t} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, x]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} G(x) &= \left[\ln(t) \times \left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \left(-\frac{\ln(1)}{1}\right) + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1. \end{aligned}$$

Finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1, \\ 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

2. Sous réserve de convergence, $\mathbf{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $x \geqslant 1$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + \int_{1}^{x} t\frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\ln(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_1^x = \frac{\ln(x)^2}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et X n'admet pas d'espérance. □

Solution de l'exercice 9.

1. Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{2a} tf(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{2a} \frac{t^2}{2a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2a}\\ &= \frac{1}{2a^2}\times\frac{8a^3}{3} = \frac{4}{3}a.\end{aligned}$$

2. Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{2a} t^2f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{2a} \frac{t^3}{2a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{2a}\\ &= \frac{1}{2a^2}\times\frac{16a^4}{4} = 2a^2.\end{aligned}$$

D'après la définition de la variance,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = 2a^2 - \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{2}{9}a^2.$$

□

Solution de l'exercice 10.

1. Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{a} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{2a} tf(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{a} \frac{t^2}{a^2}\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{2a} t\frac{2a-t}{a^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{a^2}\int_{0}^{a} t^2\,\mathrm{d}t + \frac{2a}{a^2}\int_{a}^{2a} t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{a^2}t^2\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^a + \frac{2}{a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^{2a} - \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^{2a}\\ &= \frac{a}{3} + \frac{1}{a}\left((2a)^2 - a^2\right) - \frac{1}{3a^2}\left((2a)^3 - a^3\right)\\ &= a\left(\frac{1}{3} + 4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) = a.\end{aligned}$$

2. Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{a} \frac{t^3}{a^2}\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{2a} t^2\frac{2a-t}{a^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^a + \frac{2}{a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^{2a} - \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_a^{2a}\\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{2}{3a}\left(8a^3 - a^3\right) - \frac{1}{4a^2}\left(16a^4 - a^4\right)\\ &= a^2\left(\frac{1}{4} + \frac{14}{3} - \frac{15}{4}\right) = \frac{7}{6}a^2.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{7}{6}a^2 - a^2 = \frac{a^2}{6}.$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. Déterminons a pour que f soit une densité de probabilité.

∗ D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 2.
Comme $\lim_{t\to 2^-} f(t) = \lim_{t\to 2^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 2.
Comme $\lim_{t\to 2^+} f(t) = \lim_{t\to 2^+} a\,\mathrm{e}^{2-t} = a$, alors f admet une limite finie à droite en 2.
Finalement, f est bien continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 2 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.

∗ Comme la fonction exponentielle est positive, la fonction f est à valeurs positives si et seulement si $a \geqslant 0$.

∗ Comme f est nulle sur $]-\infty, 2[$, pour tout $x \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{2}^{x} a\,\mathrm{e}^{2-t}\,\mathrm{d}t &= a\,\mathrm{e}^2 \int_2^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= a\,\mathrm{e}^2\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_2^x = a\,\mathrm{e}^2\left(-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2}\right).\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = a\,\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-2} = a.$$

Ainsi, f est une densité de probabilité si et seulement si $a = 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

∗ Si $x \leqslant 2$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

∗ Si $x \geqslant 2$, alors

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^2\left(-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2}\right), \text{ d'après } \mathbf{1.} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{2-x}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 1 - \mathrm{e}^{2-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. a) D'après la définition de F,

$$\mathbf{P}([X \leqslant 3]) = F(3) = 1 - \mathrm{e}^{2-3} = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

b) D'après la définition de F,

$$\mathbf{P}([1 < X < 2]) = F(2) - F(1) = 0 - 0 = 0.$$

c) D'après la définition de F,

$$\mathbf{P}([0 < X < 3]) = F(3) - F(0) = 1 - \mathrm{e}^{-1} - 0 = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

d) D'après la définition de F,

$$\mathbf{P}([X \geqslant 4]) = 1 - F(4) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{2-4}\right) = \mathrm{e}^{-2}.$$

4. a) Comme $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, alors

$$\mathbf{E}[Y] = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leqslant x]) = \mathbf{P}([Y + 2 \leqslant x]) = \mathbf{P}([Y \leqslant x - 2]).$$

∗ Si $x - 2 \leqslant 0$, soit $x \leqslant 2$, alors

$$F_Z(x) = 0.$$

$*$ Si $x-2 \geqslant 0$, soit $x \geqslant 2$, alors

$$F_Z(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(x-2)} = 1 - \mathrm{e}^{2-x}.$$

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 1 - \mathrm{e}^{2-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

c) Comme X et Z ont même fonction de répartition, alors elles ont même loi. Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[Y+2] = \mathbf{E}[Y] + 2 = 3.$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. Déterminons a pour que f soit une densité de probabilité.

$*$ D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 3.
Comme $\lim\limits_{t \to 3^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 3^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 3.
Comme $\lim\limits_{t \to 3^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 3^+} a\,\mathrm{e}^{3-t} = a$, alors f admet une limite finie à droite en 3.
Finalement, f est bien continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 3 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.

$*$ Comme la fonction exponentielle est positive, la fonction f est positive si et seulement si $a \geqslant 0$.

$*$ Comme f est nulle sur $]-\infty, 3[$, pour tout $x \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_3^x a\,\mathrm{e}^{3-t}\,\mathrm{d}t = a\,\mathrm{e}^3 \int_3^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= a\,\mathrm{e}^3 \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_3^x = a\,\mathrm{e}^3\left(-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-3}\right).\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = a\,\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-3} = a.$$

Ainsi, f est une densité de probabilité si et seulement si $a = 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$*$ Si $x \leqslant 3$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

$*$ Si $x \geqslant 3$, alors

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_3^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^3\left(-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-3}\right), \text{ d'après } \mathbf{1.} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{3-x}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 3 \\ 1 - \mathrm{e}^{3-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. a) D'après la définition de F,

$$\mathbf{P}([X \leqslant 3]) = F(3) = 0.$$

b) D'après la définition de F,

$$\mathbf{P}([1 < X < 2]) = F(2) - F(1) = 0 - 0 = 0.$$

c) D'après la définition de F,

$$\mathbf{P}([0 < X < 5]) = F(5) - F(0) = 1 - \mathrm{e}^{3-5} - 0 = 1 - \mathrm{e}^{-2}.$$

d) D'après la définition de F,

$$\mathbf{P}([X \geqslant 4]) = 1 - F(4) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{3-4}\right) = \mathrm{e}^{-1}.$$

4. a) Comme $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, alors

$$\mathbf{E}[Y] = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leqslant x]) = \mathbf{P}([Y + 3 \leqslant x]) = \mathbf{P}([Y \leqslant x - 3]).$$

$*$ Si $x-3 \leqslant 0$, soit $x \leqslant 3$, alors

$$F_Z(x) = 0.$$

$*$ Si $x-3 \geqslant 0$, soit $x \geqslant 3$, alors

$$F_Z(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(x-3)} = 1 - \mathrm{e}^{3-x}.$$

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 3 \\ 1 - \mathrm{e}^{3-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

c) Comme X et Z ont même fonction de répartition, alors elles ont même loi. Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[Y+3] = \mathbf{E}[Y] + 3 = 4.$$

□

III - Transformation de variables aléatoires

Solution de l'exercice 13. Rappelons que

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$F_X(x) = \mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}([3U \leqslant x]) = \mathbf{P}\left(\left[U \leqslant \frac{x}{3}\right]\right) = F_U\left(\frac{x}{3}\right).$$

$*$ Si $\frac{x}{3} \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 0$, alors $F_X(x) = 0$.
$*$ Si $0 \leqslant \frac{x}{3} \leqslant 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant x \leqslant 3$, alors $F_X(x) = \frac{x}{3}$.
$*$ Si $\frac{x}{3} \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 3$, alors $F_X(x) = 1$.

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{3} & \text{si } x \in [0,3] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}.$$

Une densité f_X de X est donnée par la dérivée de F_X en les points où F_X est dérivable, soit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x \in [0,3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,3])$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leqslant x]) = \mathbf{P}([U+1 \leqslant x]) = \mathbf{P}([U \leqslant x-1]) \\ &= F_U(x-1). \end{aligned}$$

$*$ Si $x-1 \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 1$, alors $F_Y(x) = 0$.
$*$ Si $0 \leqslant x-1 \leqslant 1$, c'est-à-dire $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $F_Y(x) = x-1$.
$*$ Si $x-1 \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 2$, alors $F_Y(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{si } x \in [1,2] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

Une densité f_Y de Y est donnée par la dérivée de F_Y en les points où F_Y est dérivable, soit

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([1,2])$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leqslant x]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{2}X + 1 \leqslant x\right]\right) = \mathbf{P}([X \leqslant 2(x-1)]) \\ &= F_X(2(x-1)). \end{aligned}$$

$*$ Si $2(x-1) \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 1$, alors $F_Z(x) = 0$.
$*$ Si $0 \leqslant 2(x-1) \leqslant 3$, c'est-à-dire $1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$, alors $F_Z(x) = \frac{2(x-1)}{3}$.
$*$ Si $2(x-1) \geqslant 3$, c'est-à-dire $x \geqslant \frac{5}{2}$, alors $F_Z(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{2}{3}(x-1) & \text{si } x \in \left[1, \frac{5}{2}\right] \\ 1 & \text{si } x \geqslant \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Une densité f_Z de Z est donnée par la dérivée de F_Z en les points où F_Z est dérivable, soit

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } x \in \left[1, \frac{5}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Z \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\left[1, \frac{5}{2}\right]\right)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$F_W(x) = \mathbf{P}\left([W \leqslant x]\right) = \mathbf{P}\left(\left[X^2 \leqslant x\right]\right).$$

* Si $x \leqslant 0$, alors $[X^2 \leqslant x]$ est l'événement impossible et $F_W(x) = 0$.
* Si $x \geqslant 0$, comme la fonction racine carrée est croissante et bijective,

$$F_W(x) = \mathbf{P}\left(\left[X \leqslant \sqrt{x}\right]\right) = F_X\left(\sqrt{x}\right).$$

  ⋆ Si $\sqrt{x} \leqslant 3$ c'est-à-dire $0 \leqslant x \leqslant 9$, alors $F_W(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}$.
  ⋆ Si $\sqrt{x} \geqslant 3$, c'est-à-dire $x \geqslant 9$, alors $F_W(x) = 1$.

Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{3} & \text{si } x \in [0, 9] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 9 \end{cases}.$$

Une densité f_W de W est donnée par la dérivée de F_W en les points où F_W est dérivable, soit

$$f_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 9] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_H(x) &= \mathbf{P}\left([H \leqslant x]\right) = \mathbf{P}\left([\ln(X+1) \leqslant x]\right) = \mathbf{P}\left([X \leqslant \mathrm{e}^x - 1]\right) \\ &= F_X\left(\mathrm{e}^x - 1\right). \end{aligned}$$

* Si $\mathrm{e}^x - 1 \leqslant 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x \leqslant 1$, soit $x \leqslant 0$, alors $F_H(x) = 0$.
* Si $0 \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant 3$, c'est-à-dire $0 \leqslant x \leqslant \ln(4)$, alors $F_H(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{3}$.
* Si $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 3$, c'est-à-dire $x \geqslant \ln(4)$, alors $F_H(x) = 1$.

Finalement,

$$F_H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{\mathrm{e}^x - 1}{3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ln(4) \\ 1 & \text{si } x \geqslant \ln(4) \end{cases}.$$

Une densité f_H de H est donnée par la dérivée de F_H en les points où F_H est dérivable, soit

$$f_H(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ln(4) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_E(x) &= \mathbf{P}\left([E \leqslant x]\right) = \mathbf{P}\left([-\ln(X+1) \leqslant x]\right) = \mathbf{P}\left(\left[X \geqslant \mathrm{e}^{-x} - 1\right]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\left[X \leqslant \mathrm{e}^{-x} - 1\right]\right) \\ &= 1 - F_X\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right). \end{aligned}$$

* Si $\mathrm{e}^{-x} - 1 \leqslant 0$, c'est-à-dire $-x \leqslant 0$ soit $x \geqslant 0$, alors

$$F_E(x) = 1 - 0 = 1.$$

* Si $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - 1 \leqslant 3$, c'est-à-dire $-\ln(4) \leqslant x \leqslant 0$, alors

$$F_E(x) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{3}.$$

* Si $\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 3$, c'est-à-dire $x \leqslant -\ln(4)$, alors $F_E(x) = 1 - 1 = 0$.

Finalement,

$$F_E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -\ln(4) \\ 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{3} & \text{si } -\ln(4) \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f_E de E est donnée par la dérivée de F_E en les points où F_E est dérivable, soit

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{3} & \text{si } -\ln(4) \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

□

Solution de l'exercice 14. Rappelons que

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$F_X(x) = \mathbf{P}([X \leqslant x]) = \mathbf{P}([4U \leqslant x]) = \mathbf{P}\left(\left[U \leqslant \frac{x}{4}\right]\right) = F_U\left(\frac{x}{4}\right).$$

* Si $\frac{x}{4} \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 0$, alors $F_X(x) = 0$.
* Si $0 \leqslant \frac{x}{4} \leqslant 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant x \leqslant 4$, alors $F_X(x) = \frac{x}{4}$.
* Si $\frac{x}{4} \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 4$, alors $F_X(x) = 1$.

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } x \in [0,4] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}.$$

Une densité f_X de X est donnée par la dérivée de F_X en les points où F_X est dérivable, soit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [0,4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,4])$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leqslant x]) = \mathbf{P}([U+2 \leqslant x]) = \mathbf{P}([U \leqslant x-2]) \\ &= F_U(x-2). \end{aligned}$$

* Si $x-2 \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 2$, alors $F_Y(x) = 0$.
* Si $0 \leqslant x-2 \leqslant 1$, c'est-à-dire $2 \leqslant x \leqslant 3$, alors $F_Y(x) = x-2$.
* Si $x-2 \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 3$, alors $F_Y(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ x-2 & \text{si } x \in [2,3] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}.$$

Une densité f_Y de Y est donnée par la dérivée de F_Y en les points où F_Y est dérivable, soit

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [2,3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([2,3])$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leqslant x]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{2}X + 1 \leqslant x\right]\right) = \mathbf{P}([X \leqslant 2(x-1)]) \\ &= F_X(2(x-1)). \end{aligned}$$

* Si $2(x-1) \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 1$, alors $F_Z(x) = 0$.
* Si $0 \leqslant 2(x-1) \leqslant 4$, c'est-à-dire $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $F_Z(x) = \frac{2(x-1)}{4}$.
* Si $2(x-1) \geqslant 4$, c'est-à-dire $x \geqslant 3$, alors $F_Z(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{si } x \in [1,3] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}.$$

Une densité f_Z de Z est donnée par la dérivée de F_Z en les points où F_Z est dérivable, soit

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1,3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Z \hookrightarrow \mathscr{U}([1,3])$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([W \leqslant x]) = \mathbf{P}\left([X^2 \leqslant x]\right).$$

* Si $x < 0$, alors $[X^2 \leqslant x]$ est l'événement impossible et $F_W(x) = 0$.
* Si $x \geqslant 0$, comme la fonction racine carrée est croissante et bijective,

$$F_W(x) = \mathbf{P}\left(\left[X \leqslant \sqrt{x}\right]\right) = F_X\left(\sqrt{x}\right).$$

  ⋆ Si $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 4$ c'est-à-dire $0 \leqslant x \leqslant 16$, alors $F_W(x) = \frac{\sqrt{x}}{4}$.

$\star$ Si $\sqrt{x} \geqslant 4$, c'est-à-dire $x \geqslant 16$, alors $F_W(x) = 1$.
Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{4} & \text{si } x \in [0, 16] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 16 \end{cases}.$$

Une densité f_W de W est donnée par la dérivée de F_W en les points où F_W est dérivable, soit

$$f_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{8\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 16] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_H(x) &= \mathbf{P}([H \leqslant x]) = \mathbf{P}([\ln(X+1) \leqslant x]) = \mathbf{P}([X \leqslant \mathrm{e}^x - 1]) \\ &= F_X(\mathrm{e}^x - 1). \end{aligned}$$

$*$ Si $\mathrm{e}^x - 1 \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant 0$, alors $F_H(x) = 0$.
$*$ Si $0 \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant 4$, c'est-à-dire $0 \leqslant x \leqslant \ln(5)$, alors $F_H(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{4}$.
$*$ Si $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 4$, c'est-à-dire $x \geqslant \ln(5)$, alors $F_H(x) = 1$.
Finalement,

$$F_H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{\mathrm{e}^x - 1}{4} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ln(5) \\ 1 & \text{si } x \geqslant \ln(5) \end{cases}.$$

Une densité f_H de H est donnée par la dérivée de F_H en les points où F_H est dérivable, soit

$$f_H(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x}{4} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ln(5) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_E(x) &= \mathbf{P}([E \leqslant x]) = \mathbf{P}([-\ln(X+1) \leqslant x]) = \mathbf{P}\left(\left[X \geqslant \mathrm{e}^{-x} - 1\right]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\left[U \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{4}\right]\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{4}\right). \end{aligned}$$

$*$ Si $\mathrm{e}^{-x} - 1 \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant 0$, alors $F_E(x) = 1 - 0 = 1$.
$*$ Si $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} - 1 \leqslant 4$, c'est-à-dire $-\ln(5) \leqslant x \leqslant 0$, alors

$$F_E(x) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{4}.$$

$*$ Si $\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 4$, c'est-à-dire $x \leqslant -\ln(5)$, alors $F_E(x) = 0$.
Finalement,

$$F_E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -\ln(5) \\ 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{4} & \text{si } -\ln(5) \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f_E de E est donnée par la dérivée de F_E en les points où F_E est dérivable, soit

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{4} & \text{si } -\ln(5) \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

□

Solution de l'exercice 15.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

$*$ Si $x \leqslant 0$, alors

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

$*$ Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_0^x n t^{n-1}\,\mathrm{d}t = n\left[\frac{t^n}{n}\right]_0^x \\ &= x^n. \end{aligned}$$

$*$ Si $x \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_0^1 n t^{n-1}\,\mathrm{d}t + 0 = n\left[\frac{t^n}{n}\right]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

2. Comme f_n est nulle en dehors d'un segment, X_n admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t \times n t^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= n \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = n\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les définitions,

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbf{P}([Y_n \leqslant x]) = \mathbf{P}([-\ln(X_n) \leqslant x]) = \mathbf{P}\left(\left[X_n \geqslant \mathrm{e}^{-x}\right]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\left[X_n \leqslant \mathrm{e}^{-x}\right]\right) \\ &= 1 - F_n\left(\mathrm{e}^{-x}\right). \end{aligned}$$

* La quantité e^{-x} est toujours strictement positive.
* Si $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 0$, alors

$$G_n(x) = 1 - \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^n = 1 - \mathrm{e}^{-nx}.$$

* Si $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \leqslant 0$, alors

$$G_n(x) = 1 - 1 = 0.$$

Finalement,

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-nx} & \text{sinon} \end{cases}.$$

4. D'après la question précédente, Y_n est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre n.

5. D'après les propriétés des lois exponentielles,

$$\mathbf{E}[Y_n] = \frac{1}{n} \text{ et } \mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}.$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

* Si $x < a$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

* Si $x \geqslant a$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_a^x 2\,\mathrm{e}^{2a}\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\,\mathrm{e}^{2a}\left[\frac{1}{-2}\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_a^x \\ &= 2\,\mathrm{e}^{2a}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2a}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{2a-2x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ 1 - \mathrm{e}^{2(a-x)} & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les définitions,

$$G(x) = \mathbf{P}([Y \leqslant x]) = \mathbf{P}([X \leqslant x + a]) = F(x+a).$$

* Si $x + a \leqslant a$, c'est-à-dire $x \leqslant 0$, alors $G(x) = 0$.
* Si $x + a \geqslant a$, c'est-à-dire $x \geqslant 0$, alors

$$G(x) = 1 - \mathrm{e}^{2(a-(x+a))} = 1 - \mathrm{e}^{-2x}.$$

Finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-2x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. D'après la question précédente, $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$. Ainsi,

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{1}{4}.$$

4. En utilisant les définitions,

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y+a] = \mathbf{E}[Y] + a = \frac{1}{2} + a.$$
$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y+a) = \mathbf{V}(Y) = \frac{1}{4}.$$

□

IV - Lois usuelles

Solution de l'exercice 17.

1. Comme X suit une loi normale centrée réduite, $\mathbf{P}([X \leqslant 2]) \simeq 0{,}9772$.

2. D'après les propriétés des probabilités,

$$\mathbf{P}([X > 2{,}51]) = 1 - \mathbf{P}([X \leqslant 2{,}51]).$$

Comme X suit une loi normale centrée réduite,

$$\mathbf{P}([X > 2{,}51]) \simeq 1 - 0{,}9940 \simeq 0{,}006.$$

3. Comme $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(5,4)$, alors $\frac{Y-5}{2} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y < 1]) = \mathbf{P}([Y-5 < -4]) &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y-5}{2} < -2\right]\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y-5}{2} < -2\right]\right)\\ &= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \simeq 1 - 0{,}9772\\ &\simeq 0{,}0228.\end{aligned}$$

4. Comme $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(5,4)$, alors $\frac{Y-5}{2} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([3 < Y \leqslant 10]) = \mathbf{P}([-2 < Y-5 \leqslant 5]) &= \mathbf{P}\left(\left[-1 < \frac{Y-5}{2} \leqslant \frac{5}{2}\right]\right)\\ &= \Phi(2{,}5) - \Phi(-1) = \Phi(2{,}5) - (1 - \Phi(1))\\ &\simeq 0{,}9938 - 1 + 0{,}8413\\ &\simeq 0{,}8351.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. Comme X suit une loi normale centrée réduite, $\mathbf{P}([X \leqslant 2{,}5]) \simeq 0{,}9938$.

2. D'après les propriétés des probabilités,

$$\mathbf{P}([X > 1{,}49]) = 1 - \mathbf{P}([X \leqslant 1{,}49]).$$

Comme X suit une loi normale centrée réduite,

$$\mathbf{P}([X > 1{,}49]) \simeq 1 - 0{,}9319 \simeq 0{,}0681.$$

3. Comme $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(2,9)$, alors $\frac{Y-2}{3} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y < 1]) = \mathbf{P}([Y-2 < -1]) &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y-2}{3} < -\frac{1}{3}\right]\right)\\ &\simeq \Phi(-0{,}33) \simeq 1 - \Phi(0{,}33) \simeq 1 - 0{,}6293\\ &\simeq 0{,}3707.\end{aligned}$$

4. Comme $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(2,9)$, alors $\frac{Y-2}{3} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([3 < Y \leqslant 6]) = \mathbf{P}([1 < Y-2 \leqslant 4]) &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{3} < \frac{Y-5}{2} \leqslant \frac{4}{3}\right]\right)\\ &\simeq \Phi(1{,}33) - \Phi(0.33)\\ &\simeq 0{,}9082 - 0{,}6293\\ &\simeq 0{,}2789.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 19.

1. R est le plus petit des réels R_1 et R_2. Ainsi, $R > x$ si et seulement si R_1 et R_2 sont strictement supérieurs à x. Ainsi,

$$[R > x] = [R_1 > x] \cap [R_2 > x]$$
$$\mathbf{P}([R > x]) = \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les propriétés de la fonction de répartition et la question précédente,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{P}([R \leqslant x]) = 1 - \mathbf{P}([R > x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]), \text{ d'après } \mathbf{1.} \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x]) \times \mathbf{P}([R_2 > x]), \text{ par indépendance} \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x])^2, \text{ car } R_1 \text{ et } R_2 \text{ ont même loi} \\ &= 1 - (1 - \mathbf{P}([R_1 \leqslant x]))^2. \end{aligned}$$

Comme $R_1 \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, sa fonction de répartition satisfait :

$$\mathbf{P}([R_1 \leqslant x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Ainsi,

* Si $x \leqslant 0$, alors
$$F(x) = 1 - (1-0)^2 = 0.$$
* Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors
$$F(x) = 1 - (1-x)^2 = x(2-x).$$
* Si $x \geqslant 1$, alors
$$F(x) = 1 - (1-1)^2 = 1.$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x(2-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. On cherche la probabilité que le minimum des deux distances soit inférieur à 50cm, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([R \leqslant 0{,}5]) &= F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 20.

1. T est le plus grand des réels T_1 et T_2. Ainsi, $T \leqslant x$ si et seulement si T_1 et T_2 sont inférieurs à x. Ainsi,

$$\begin{gathered} [T \leqslant x] = [T_1 \leqslant x] \cap [T_2 \leqslant x] \\ \mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}([T_1 \leqslant x] \cap [T_2 \leqslant x]). \end{gathered}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les propriétés de la fonction de répartition et la question précédente,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}([T_1 \leqslant x] \cap [T_2 \leqslant x]), \text{ d'après } \mathbf{1.} \\ &= \mathbf{P}([T_1 \leqslant x]) \times \mathbf{P}([T_2 \leqslant x]), \text{ par indépendance} \\ &= \mathbf{P}([T_1 \leqslant x])^2, \text{ car } T_1 \text{ et } T_2 \text{ ont même loi} \end{aligned}$$

Comme $T_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, sa fonction de répartition satisfait :

$$\mathbf{P}([T_1 \leqslant x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ainsi,

* Si $x \leqslant 0$, alors
$$F(x) = 0^2 = 0.$$
* Si $x \geqslant 0$, alors
$$F(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x})^2.$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. On cherche la probabilité que le maximum de la durée de vie des piles soit supérieur à 6 mois, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([T \geqslant 0{,}5]) &= 1 - \mathbf{P}([T \leqslant 0{,}5]) \\ &= 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-1/2}\right)^2 \\ &= 2\,\mathrm{e}^{-1/2} - \mathrm{e}^{-1} \simeq 0{,}845. \end{aligned}$$

□