

# I - Analyse réelle

## I - Suites

### I.1 - Suites usuelles

#### Définition 1 - Suite arithmétique

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . La suite  $u$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + a$  est une suite *arithmétique* de raison  $a$ .

#### Proposition 1

Soit  $u$  une suite arithmétique de raison  $a$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

- $u_n = u_0 + na$ .
- $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}a$ .

**Exercice 1.** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = u_n + 12$ . Soit  $n$  un entier naturel.

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Exprimer  $\sum_{k=0}^n u_k$  en fonction de  $n$ .

#### Définition 2 - Suite géométrique

Soit  $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ . La suite  $u$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = qu_n$  est une suite *géométrique* de raison  $q$ .

#### Proposition 2

Soit  $u$  une suite géométrique de raison  $q$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

- $u_n = q^n u_0$ .
- $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ .

**Exercice 2.** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = 12 \cdot u_n$ . Soit  $n$  un entier naturel.

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Exprimer  $\sum_{k=0}^n u_k$  en fonction de  $n$ .

#### Définition 3 - Suite arithmético-géométrique

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ . La suite  $u$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = qu_n + a$  est une suite *arithmético-géométrique*.

#### Exemple 1 - Étude des suites arithmético-géométriques



Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = 2u_n + 3$ .

- Commençons par chercher une solution  $\ell$  de l'équation  $\ell = 2\ell + 3$ .  
On obtient  $\ell = -3$ .
- Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $v_n = u_n - \ell = u_n + 3$ .  
Montrons que  $(v_n)$  est une suite géométrique. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= (2u_n + 3) + 3 \\ &= 2u_n + 6 \\ &= 2(u_n + 3) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2.

De plus,  $v_0 = u_0 + 3 = 4$ .

- D'après les résultats sur les suites géométriques,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n v_0 = 2^{n+2}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+2} - 3.$$

**Exercice 3.** Reprendre l'exemple précédent avec la suite définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = 3u_n + 4$ .

## I.2 - Études locale & globale

### Définition 4 - Monotonie

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels.

- $(u_n)$  est croissante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ .
- $(u_n)$  est décroissante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ .
- $(u_n)$  est constante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$ .
- $(u_n)$  est stationnaire s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n$ .

### Exercice 4.

1. Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison 10. Quelle est la monotonie de cette suite ? Et si la raison vaut  $-3$  ?
2. Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison 3. Quelle est la monotonie de cette suite ? Et si la raison vaut 1 ? Et si la raison vaut  $\frac{1}{2}$  ?

### Définition 5 - Majorée, Minorée

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels.

- La suite  $(u_n)$  est *majorée* s'il existe un réel  $M$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .
- La suite  $(u_n)$  est *minorée* s'il existe un réel  $m$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$ .
- La suite  $(u_n)$  est *bornée* si elle est majorée et minorée.

**Exercice 5.** Montrer que la suite de terme général  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$  est bornée.

## I.3 - Limites

### Proposition 3 - Opérations sur les limites

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$ .

- La somme  $(u_n + v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\times$
$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$-\infty$

- Le produit  $(u_n v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$ab$	$\pm\infty$ ( $a \neq 0$ )	$\pm\infty$ ( $a \neq 0$ )
$+\infty$	$\pm\infty$ ( $b \neq 0$ )	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$ ( $b \neq 0$ )	$-\infty$	$+\infty$

- Le quotient  $(u_n/v_n)$

	$b \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a/b$	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$	$\times$	$\times$
$-\infty$	$\pm\infty$	$\times$	$\times$

**Exercice 6.** Déterminer la limite des suites de terme général :

1.  $u_n = n^2 + \sqrt{n}$ .

3.  $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ .

2.  $v_n = n^2 - \sqrt{n}$ .

### Proposition 4 - Limites classiques

Soit  $q \in \mathbb{R}$ .

- Si  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .
- Si  $-1 < q < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .

**Exercice 7.** Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Déterminer la limite de la suite  $(S_n)$  de terme général  $S_n = \sum_{k=0}^n x^k$ .

### Théorème 1 - Théorème d'encadrement

Soient  $u, v, w$  trois suites réelles et  $\ell \in \mathbb{R}$  telles que  $v$  et  $w$  convergent vers  $\ell$ . Si, à partir d'un certain rang,  $v \leq u \leq w$ , alors  $u$  est une suite convergente et sa limite vaut  $\ell$ .

### Exercice 8.

- Généraliser ce théorème au cas des suites de limites infinies.
- Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ .

### Théorème 2 - Théorème de la limite monotone - Cas croissant

Soit  $u$  une suite croissante.

- Si  $u$  est majorée, alors elle converge.
- Si  $u$  n'est pas majorée, alors elle tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 9.

- Écrire l'énoncé du théorème dans le cas de suites décroissantes.
- Montrer que la suite  $(S_n)$  de terme général  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  est convergente.

## II - Fonctions

### II.1 - Régularité

#### Définition 6 - Classe $\mathcal{C}^n$

Une fonction  $f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^n$  si :

- ses dérivées successives  $f, f', \dots, f^{(n)}$  existent,
- $f^{(n)}$  est continue.

### Exemple 2

La fonction  $f(x) = x^2$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . On dit aussi qu'elle est deux fois continûment dérivable.

## II.2 - Étude d'extrema

### Théorème 3 - Régularité & Variations

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  :


- Si  $f'$  est nulle sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .
- Si  $f'$  est strictement positive sur  $I$ , sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $f'$  est strictement négative sur  $I$ , sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

**Exercice 10.** Étudier les variations de la fonction  $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 1$ .

### Théorème 4 - Dérivation & Extrema

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un ouvert  $I$  et  $x_0 \in I$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .

### Exercice 11.

-  Montrer que la réciproque de ce théorème est fausse.
- Étudier les extrema sur  $[-2, +\infty[$  de la fonction  $f : x \mapsto -x^3 + x^2$ .

## II.3 - Formule de Taylor

### Théorème 5 - Théorème de Rolle

Soient  $a < b$  deux réels et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  telle que  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 12.** Montrer que ces hypothèses sont optimales.

### Définition 7 - Relations de comparaison

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f, g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$  telles que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ .

- $f$  et  $g$  sont équivalentes en  $a$ , noté  $f \sim_a g$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .
- $f$  est négligeable devant  $g$  en  $a$ , noté  $f = o_a(g)$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

### Proposition 5 - Croissances comparées

- Au voisinage de  $+\infty$  :  
★ Si  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ,

$$(\ln x)^\gamma = o(x^\beta), x^\beta = o(e^{\alpha x}).$$

- ★ Si  $\alpha, \beta, \gamma < 0$ ,

$$x^\beta = o((\ln x)^\gamma), e^{\alpha x} = o(x^\beta).$$

- Au voisinage de 0 : si  $\beta < 0, \gamma > 0$ ,

$$|\ln x|^\gamma = o(x^\beta).$$

**Exercice 13.**

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln \left( \frac{x^2}{1+x} \right)$ .
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)+x}{x^2+1}$ .

### Théorème 6 - Équivalent et dérivation

Si  $f$  est une fonction dérivable en  $a$  et  $f'(a) \neq 0$ , alors

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a) \cdot (x - a).$$

### Exemple 3 - Équivalents classiques en 0

- Comme  $x \mapsto \ln(1+x)$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  de dérivée  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ,

$$\ln(1+x) - \ln(1) \sim_0 \frac{1}{1+0}(x-0)$$

$$\ln(1+x) \sim_0 x.$$

- Comme  $x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $x \mapsto e^x$ ,

$$e^x - e^0 \sim_0 e^0(x-0)$$

$$e^x - 1 \sim_0 x.$$

- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Comme  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  de dérivée  $x \mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ ,

$$(1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha \sim_0 \alpha(1+0)^{\alpha-1}(x-0)$$



$$(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x.$$

### Proposition 6 - Relations de comparaison & Opérations

- $\sim_a$  est une relation d'équivalence.
- Si  $f(x) \sim_a g(x)$ , alors  $f$  et  $g$  sont de même signe sur un voisinage de  $a$ .
- $f \sim g$  si et seulement si  $f - g = o(g)$ .
- Si  $f_1 = o(g)$  et  $f_2 = o(g)$ , alors  $f_1 + f_2 = o(g)$ .
- Si  $f_1 = o(g_1)$  et  $f_2 = o(g_2)$ , alors  $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ .  
Si  $f_1 \sim g_1$  et  $f_2 \sim g_2$ , alors  $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ .
- Si  $f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2$  et  $g_1, g_2$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$ , alors  $\frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2}$ .

- Si  $f = o(g)$  et  $g = o(h)$ , alors  $f = o(h)$ .

**Exercice 14.**

1.  Ne pas composer des équivalents.  
Déterminer une fonction  $f$  telle que  $f(x)$  et  $f(2x)$  ne soient pas équivalentes en  $+\infty$ .
2.  Ne pas additionner des équivalents.  
Déterminer un équivalent en 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1+2x} - 1 + 2x$ .

**Définition 8 - Développement limité à l'ordre 1 ou 2**

Soit  $a$  un réel et  $f$  une fonction définie sur un voisinage de  $a$ .

- $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 s'il existe  $a_0$  et  $a_1$  réels tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o_a(x - a).$$

- $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 s'il existe  $a_0, a_1$  et  $a_2$  réels tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + o_a((x - a)^2).$$

**Exemple 4 - Polynômes et Inverse**

- Soit  $f : x \mapsto 3 + 2x + 4x^2 + 3x^5 + 25x^{72}$ . Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 2x + 4x^2 + x^2(3x^3 + 25x^{70}) \\ &= 3 + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . Ainsi,  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

- Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ . En utilisant la somme des termes d'une

suite géométrique,

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 &= \frac{1 - x^3}{1 - x} \\ \frac{1}{1 - x} &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1 - x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^2 \frac{x}{1 - x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . Ainsi,  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

**Exercice 15.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions

1.  $x \mapsto 4x^3 + 2x^2 + x + 1$ .
2.  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ .

**Proposition 7 - Développement limité & Régularité**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

- $f$  admet un développement limité à l'ordre 0 en  $a$  si et seulement si  $f$  est continue en  $a$ . En particulier, si  $f(x) = a_0 + o_a(1)$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = a_0$ .
- $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $a$ . En particulier, si  $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o_a(x - a)$ , alors  $a_0 = f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $a_1 = f'(a)$ . La tangente en  $f$  à  $a$  a donc pour équation  $a_0 + a_1(x - a)$ .

**Théorème 7 - Formule de Taylor-Young**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ . Alors, pour tout  $a \in I$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

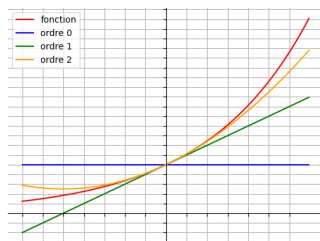
## Exemple 5 - Développement limités classiques en 0

- La fonction  $f : x \mapsto e^x$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto e^x, \\ f'' : x &\mapsto e^x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + e^0(x-0) + \frac{e^0}{2}(x-0)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$



- La fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] -1, +\infty[$  et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto \frac{1}{1+x}, \\ f'' : x &\mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(1+0) + \frac{1}{1+0}x - \frac{1}{(1+0)^2}x^2 + o(x^2) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^2$

sur  $] -1, +\infty[$  et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f'' : x &\mapsto \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ln(1+x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2).$$

**Exercice 16.** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$ .

## Proposition 8 - Développement limité &amp; Comportement local

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I$  contenant  $a$ .

- Si  $f''(a) > 0$ , alors  $f$  se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.
- Si  $f''(a) < 0$ , alors  $f$  se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.

## Exemple 6

Comportement au voisinage de 1 de  $f : x \mapsto e^{1-\sqrt{x}}$ . La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et

$$\begin{aligned} f' : x &\mapsto -\frac{e^{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, \\ f'' : x &\mapsto \frac{\sqrt{x}+1}{4x^{3/2}} e^{1-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Young,

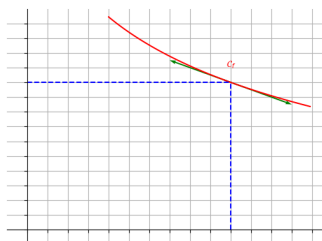
$$e^{1-\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2).$$

En particulier, il existe une fonction  $\varepsilon$  qui tend vers 0 en 0 telle

que

$$\begin{aligned}
 e^{1-\sqrt{x}} - \underbrace{\left[1 - \frac{1}{2}(x-1)\right]}_{\text{éq. de la tangente}} &= \frac{1}{4}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2) \\
 &= \frac{(x-1)^2}{4} + (x-1)^2\varepsilon(x-1) \\
 &= \frac{1}{4}(x-1)^2(1 + \varepsilon(x-1)).
 \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque  $x$  est proche de 1, alors  $1 + \varepsilon(x-1) > 0$  et  $(x-1)^2 \geq 0$ . Donc  $f(x) - [1 - \frac{1}{2}(x-1)] \geq 0$  et la courbe représentative de  $f$  se trouve au-dessus de la tangente.



## II.4 - Fonctions convexes

### Définition 9 - Convexité pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(I)$ .  $f$  est une fonction *convexe* si  $f'' \geq 0$ .

### Proposition 9 - Convexité & Tangentes

Soit  $f$  une fonction convexe et dérivable sur  $I$ . Alors,

$$\forall x, a \in I, f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a).$$

**Exercice 17.** Montrer les inégalités suivantes.

1.  $\forall u \in ]-1, +\infty[, \ln(1+u) \leq u.$

2.  $\forall u \in \mathbb{R}, 1+u \leq e^u.$

## II.5 - Plan d'étude de fonction

- (i). Ensemble de définition.
- (ii). Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
- (iii). Dérivabilité, Variations.
- (iv). Branches infinies.
- (v). Représentation graphique avec les tangentes remarquables.

### Exemple 7 - Étude de fonction

Soit  $f : x \mapsto x - 1 + \frac{1}{x-2}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- (i).  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .
- (ii).  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 2[$  et sur  $]2, +\infty[$ . Sur chacun de ces intervalles,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$	3	$+\infty$

La fonction  $f$  est deux fois dérivable et  $f''(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$ . Ainsi,  $f''(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 2$  et  $f$  est convexe sur  $]2, +\infty[$ . Comme  $f''(x) \leq 0$  pour tout  $x \leq 2$ , alors  $f$  est concave sur  $] -\infty, 2[$ .

- (iii). Étude des branches infinies.

- Comme  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ , alors la droite d'équation  $y = 2$  est une asymptote verticale à la courbe.
- Comme  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ , alors la droite d'équation  $y = 2$  est une asymptote verticale à la courbe.
- Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -1$ , alors la droite d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ . De plus,  $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \geq 0$  pour tout  $x > 2$ . Ainsi,  $\mathcal{C}_f$  se trouve au-dessus de son asymptote au voisinage de  $+\infty$ .
- Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = -1$ , alors la droite d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$ . De plus,  $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \leq 0$  pour tout  $x < 2$ . Ainsi,  $f$  se trouve au-dessous de son asymptote.

(iv). Tracé.

