T.D. VII - Applications linéaires

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x_i)_{\in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1 = 0 \text{ ET } x_2 = 0\}$

2. $E_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1 + x_2 = 0\}$

3. $E_3 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1 \neq 0\}$

4. $E_4 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1 = x_2\}$

5. $E_5 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1 x_2 = 0\}$

I - Applications linéaires

Exercice 2. Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires. Le cas échéant, déterminer le noyau et l'image.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (-x + 2y, 2x - 3y + z)$

2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x - y + 3z, 4x + y - z)$

3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (y + z, x + y + z, x)$

4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto z(x + y, x - y)$

5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto 2(x + y + z, x - y)$

Exercice 3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 4. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une application linéaire non nulle. Montrer que f est surjective.

Exercice 5. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, la famille $(x, f(x))$ soit liée. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$.

1. Montrer qu'il existe $a_i \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_i) = a_i e_i$.

2. Montrer qu'il existe $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_i + e_j) = a_{i,j}(e_i + e_j)$.

3. Montrer que, $a_i = a_j$ puis qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que $f = a\,\mathrm{Id}$.

Exercice 6. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $d_k = \mathrm{Ker}(u^k)$.

2. Montrer que la suite (d_k) est croissante et majorée. En déduire que la suite (d_k) est convergente.

On admettra que la suite (d_k) est stationnaire et on note $p \in \mathbb{N}$ tel que $d_{p-1} \neq d_p$ et, pour tout $k \geqslant p$, $d_k = d_p$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u^{p-1} \neq \mathrm{Ker}\, u^p$ et, pour tout $k \geqslant p$, $\mathrm{Ker}\, u^k = \mathrm{Ker}\, u^p$.

II - Applications linéaires & Matrices

Exercice 7. Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0), (0, 1)\big)$.

2. $f_2 : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1), (1, 0)\big)$.

3. $f_3 : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 2), (3, 4)\big)$

4. $f_4 : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$

Exercice 8. Soit $\mathscr{B}_1 = ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1))$, $\mathscr{B}_2 = ((3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7))$ et $f : (x, y, z) \mapsto (2x + 2y + z, 3x + z, 5z)$. Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(f)$.

Exercice 9. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_1 = (e_3, e_2, e_1)$.

III - Calculs de puissances

Exercice 10. (Calcul de puissances) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Dterminer le rang de u.

2. Déterminer une base du noyau et de l'image de u. En déduire une nouvelle base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à $\mathscr{B}$.

4. Déterminer la matrice B de u dans la base $\mathscr{B}$.

5. Écrire une relation entre les matrices A, P et B.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n. En déduire la valeur de A^n.

Exercice 11. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A - bJ$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer J^n.

2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

Exercice 12. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A - I_3$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Cacluler B^n.

2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

IV - Rangs de matrices

Exercice 13. Sans calcul, déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

6. $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 14. Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

V - Questions plus théoriques

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et φ l'application définie sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par $\varphi : M \mapsto MA$. On note $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que φ est une application linéaire sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Écrire la matrice associée à φ dans la base canonique.

Exercice 16. Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note $E_{i,j}$ la matrice carrée de taille n dont le coefficient d'indice (k, ℓ) vaut 1 si $(k, \ell) = (i, j)$ et vaut 0 sinon. On note

$$Z_n = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ \forall\ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}\,.$$

1. Montrer que Z_n est un espace vectoriel.

2. Soit $A \in Z_n$.

a) Écrire les produits $E_{i,j}A$ et $AE_{i,j}$. En déduire que $a_{i,i} = a_{j,j}$ et $a_{k,i} = 0$ si $k \neq i$ et $a_{j,k} = 0$ si $k \neq j$.

b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I$.

3. Déterminer Z_n.

Exercice 17. Une matrice A est antisymétrique si $A^T = -A$. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (S, A) où S est symétrique et A est antisymétrique tel que $M = S + A$.

Exercice 18. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

2. Montrer que $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

4. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f \circ g = g \circ f$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.

5. En déduire que $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ commute avec f si et seulement s'il existe a, b, $c \in \mathbb{R}$ tels que $g = af^2 + bf + c\,\mathrm{Id}$.

Exercice 19. Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$.

1. Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$.

On suppose $X \neq 0$ et on note i_0 un indice tel que

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!],\ |x_k| \leqslant |x_{i_0}|\,.$$

2. Montrer que $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$.

3. En déduire que $X = 0$ puis que A est inversible.