

T.D. IX - Intégrales généralisées

I - Fonctions continues

Exercice 1. (✳) Pour chacune des intégrales suivantes, montrer qu'elle converge et déterminer sa valeur.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt.$

2. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt.$

3. $\int_2^{+\infty} \frac{5}{t^3} dt.$

4. $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^4} dt.$

5. $\int_0^{+\infty} e^{-5t} dt.$

6. $\int_1^{+\infty} e^{-3t} dt.$

7. $\int_2^{+\infty} 3e^{-5t} dt.$

8. $\int_3^{+\infty} 2e^{-t} dt.$

Exercice 2. (✳) Pour chacune des intégrales suivantes, montrer qu'elle converge et déterminer sa valeur.

1. $\int_{-\infty}^2 e^{3t} dt.$

2. $\int_{-\infty}^{-5} 2e^t dt.$

3. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt.$

4. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-t)^2} dt.$

Exercice 3. Pour tout x réel, on pose $h(x) = \ln(1 + e^x)$ et $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

1. Déterminer la dérivée de h .

2. Montrer que $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ converge et déterminer sa valeur.

II - Fonctions discontinues

Exercice 4. (✳) Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } t \in [5, 10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Pour tout x réel, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

a) Pour tout $x < 5$, déterminer la valeur de $F(x)$.

b) Pour tout $x \in]5, 10[$, déterminer la valeur de $F(x)$.

c) Pour tout $x > 10$, déterminer la valeur de $F(x)$.

d) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt.$

a) Pour tout $x < 5$, déterminer la valeur de $G(x)$.

b) Pour tout $x \in]5, 10[$, déterminer la valeur de $G(x)$.

c) Pour tout $x > 10$, déterminer la valeur de $G(x)$.

d) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 5. (✳) Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t \in [2, 4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Pour tout x réel, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

a) Pour tout $x < 2$, déterminer la valeur de $F(x)$.

b) Pour tout $x \in]2, 4[$, déterminer la valeur de $F(x)$.

c) Pour tout $x > 4$, déterminer la valeur de $F(x)$.

d) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt$.
- Pour tout $x < 2$, déterminer la valeur de $G(x)$.
 - Pour tout $x \in]2, 4[$, déterminer la valeur de $G(x)$.
 - Pour tout $x > 4$, déterminer la valeur de $G(x)$.
 - Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 6. (✱) Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2e^{-2t} & \text{sinon} \end{cases}$.

- Pour tout x réel, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.
 - Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.
 - Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.
 - Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.
- Pour tout x réel, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt$.
 - Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.
 - Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

On pourra utiliser une intégration par parties.

 - Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 7. (✱) Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$.

- Pour tout x réel, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.
 - Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.
 - Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $F(x)$.
 - Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

- Pour tout x réel, on pose $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt$.
 - Pour tout $x < 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.
 - Pour tout $x > 0$, déterminer la valeur de $G(x)$.

On pourra utiliser une intégration par parties.

 - Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et g la fonction définie pour tout $t \geq 0$ par $g(t) = -\frac{1}{1+t^2}$.

- Pour tout réel $t \geq 0$, déterminer $g'(t)$.
- Pour tout $x \geq 0$, déterminer la valeur de $\int_{-\infty}^x f(t) dt$.
- En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 9. (✱) Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} \ln(t) & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout réel A supérieur ou égal à 1, on pose $I(A) = \int_{-\infty}^A \frac{f(x)}{x} dx$ et $J(A) = \int_{-\infty}^A \frac{f(x)}{x^2} dx$.

- Pour tout $A \geq 1$, déterminer la valeur de $I(A)$.
- Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ diverge.
- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $A \geq 1$,

$$J(A) = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.$$

- En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx$ converge et déterminer sa valeur.