I. Natures de séries entières

Exercice 1. (✍) Soit $a > 0$. Déterminer la nature des séries de terme général

1. $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1$
2. $\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$
3. $\frac{\sinh(n)}{\sinh(2n)}$
4. $\exp\{-\cosh(1/n)\}$
5. $\exp\{-\cosh(n)\}$
6. $\frac{1}{\sqrt[3]{n^3-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$
7. $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
8. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
9. $(-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$
10. $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
11. $\arctan\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice 2. Déterminer la nature des séries de terme général
$u_n = \sin\left[\pi(2-\sqrt{3})^n\right]$ et $v_n = \sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right]$.

Exercice 3. [Mines] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\sin(n)}$. **2.** $\frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n n^\alpha}$. **3.** $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+x^2}\right)$.

Exercice 4. [Mines] Étudier la convergence des séries de termes généraux :

1. $(-1)^n \frac{\cos(\ln(n))}{n}$. **2.** $\frac{\cos(\ln(n))}{n}$. **3.** $\frac{\cos(\ln(n))}{\ln(n)}$.

Exercice 5. (Fonction Zeta) Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que ζ est décroissante et en déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $\lim_{1^+} \zeta = \ell$.

2. Si $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\ell \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

3. En déduire la valeur de ℓ.

4. Montrer que $\lim_{x \to 1^+} (x-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1$.

Exercice 6. [Mines] Pour tout $(p,q) \in (\mathbb{R}_+)^2$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^p \ln^q(k) \sim_{n\to+\infty} \frac{n^{p+1}\ln^q(n)}{p+1}$.

Exercice 7. (➳) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer, en fonction du couple (α, β), la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$.

Exercice 8. Étudier la convergence de la série obtenue à partir de la série harmonique en supprimant tous les entiers n dont l'écriture en base 10 contient le nombre 5.

Exercice 9. [Mines] Pour tout $n \geqslant 1$, on note (E_n) l'équation
$x^3 + \frac{1}{n}x^2 + x - 2 = 0$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n qui soit solution de (E_n).

2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

3. Déterminer la nature de $\sum(1 - x_n)$.

Exercice 10. Soit $\lambda \in]0,1[$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n solution de
$\lambda e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

II. Calculs de sommes

Exercice 11. (À partir de la constante d'Euler, ♡) On admet qu'il existe un réel γ tel que $\lim_{n\to+\infty} (H_n - \ln n) = \gamma$.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}$. En déduire que $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge et déterminer sa somme.

2. Dans cette question, on suppose que $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 1$ et $a_{3n+3} = -1$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{a_k}{k}$.

3. On suppose maintenant que $a_{4n+1} = a_{4n+2} = 1$ et $a_{4n+3} = a_{4n+4} = -1$.

a) Montrer que, pour tout N entier naturel,

$$\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+3}\right)=\int_0^1\frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

b) En déduire que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+3}\right)=\frac{\pi}{4}$.

c) En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(2)$.

Exercice 12. (Décompositions en éléments simples, ♡)

1. Déterminer des réels α, β, γ, δ tels que pour tout entier naturel n,

$$u_n=\frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}=\frac{\alpha}{n+1}+\frac{\beta}{2n+3}+\frac{\gamma}{2n+5}+\frac{\delta}{n+4}.$$

2. Montrer la convergence puis déterminer la somme de la série de terme général u_n.

Exercice 13. En utilisant un produit de Cauchy, déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}$.

III. Découverte d'autres méthodes

Exercice 14. (Critère de condensation de Cauchy)

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite décroissante de réels positifs. Montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.

2. Retrouver le critère de convergence des séries de **Riemann**.

3. Montrer que la série de **Bertrand** $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta>1$.

Exercice 15. (Règle de Duhamel) Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs.

1. Montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors

(i). si $\beta>1$, alors $\sum u_n$ converge.

(ii). si $\beta<1$, alors $\sum u_n$ diverge.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $n!\ln(1+1)\cdots\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 16. (Produit infini) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\prod\limits_{q=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{q-1}}{\sqrt{q}}\right)$.

1. En étudiant la suite $\ln(u_n)$, montrer que (u_n) converge vers 0.

2. Montrer qu'il existe $a>0$ tel que $u_n\sim\frac{a}{\sqrt{n}}$.
*On pourra utiliser l'existence de la constante d'***Euler**.

Exercice 17. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Montrer que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(1-z)^p}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{p+n-1}{n}z^n.$$

IV. Avec Python

Exercice 18. [Centrale] On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Prouver que la série de terme général u_n est convergente. Donner une approximation de sa somme S à 10^{-6} près.

2. Prouver que $S=\ln(2)$.

3. Soit (v_n) une suite obtenue en permutant les termes de la suite (u_n) : on prend alternativement deux signes positifs puis un négatif, $(v_n)=\left(1,\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{7},-\frac{1}{4},\ldots\right)$. Calculer v_{250}, v_{251} et v_{252}.

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$ et $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n}v_k$.

4. Calculer T_{250}, T_{251} et T_{252}. Conjecture ?

5. Conjecturer la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{T_n}\right)$ puis démontrer la conjecture.