

# XI - Fonctions de plusieurs variables

- $p$  désigne un entier naturel non nul.
- Si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  désigne la norme de  $x$ . Si  $n = 1$ ,  $\|x\| = |x|$  est la valeur absolue de  $x$ . Si  $n = 2$ , on retrouve la norme usuelle.
- $U$  désigne une partie de  $\mathbb{R}^n$  pour laquelle, en tout point  $x_0$ , tous les points suffisamment proches de  $x_0$  appartiennent à  $U$ . Formellement,

$$\forall x_0 \in U, \exists \varepsilon > 0 ; \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\| \leq \varepsilon \Rightarrow x_0 + h \in U.$$

Cela permet d'approcher les points de  $x_0$  dans toutes les directions et définir les notions de continuité et de dérivabilité.

- Lorsque  $n = 2$  et  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on peut représenter graphiquement  $f$  dans un repère à 3 dimensions : les arguments de  $f$  sont les abscisses et ordonnées, la valeur  $f(x, y)$  est représentée selon la composante de hauteur. On rencontre de telles surfaces par exemple pour représenter le relief d'un massif montagneux.

## Définition 1 - Continuité (H.P.)

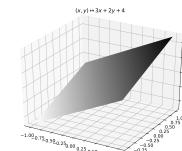
Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in U$ . La fonction  $f$  est *continue* en  $a$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'image par  $f$  de tout point suffisamment proche de  $a$  est à distance au plus  $\varepsilon$  de  $f(a)$ . Formellement,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 ; \forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

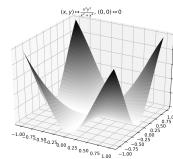
## Exemple 1 - Continuité des fonctions

- Lorsque  $n = 1$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la notion de continuité coïncide avec celle vue sur  $\mathbb{R}$ .
- Si  $f$  est une fonction constante, alors  $f(x) = f(a)$  pour tout  $(x, a) \in U^2$  donc l'application  $f$  est continue.

- La multiplication par un réel, la somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues est une fonction continue. Ainsi, les fonctions classiques sont continues.
- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$ . La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .



- Lorsque  $f$  est définie par morceaux, on tente de majorer  $|f(x) - f(a)|$  par une constante qui tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $a$ . Par exemple, soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$  et  $f(0, 0) = 0$ . Une représentation graphique de cette fonction est la suivante :



- ★ D'après les propriétés des fonctions continues, comme  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , la fonction  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- ★ Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Alors,

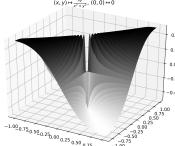
$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{\left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{\|(x, y)\|^2}{4} = \frac{\|(x, y) - (0, 0)\|^2}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $(x, y)$  est suffisamment proche de  $(0, 0)$ , alors  $f(x, y)$  est suffisamment proche de 0. La fonction  $f$  est

donc continue en  $(0, 0)$ .

Finalement, la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

- À titre d'exemple, la fonction définie par  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ . En effet,  $f(x, x) = \frac{1}{2}$  donc même si  $(x, x)$  est très proche de  $(0, 0)$  son image sera éloignée de  $f(0, 0) = 0$ . Sa représentation graphique est la suivante :



## I - Applications partielles

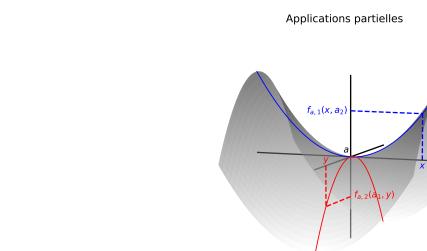
### I.1 - Définitions

#### Définition 2 - Application partielle

Pour tout  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'*application partielle* en  $a$  selon la  $i$ -ème composante est définie par  $f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ . De plus, il existe un intervalle ouvert non trivial  $U_{a,i}$  contenant  $a_i$  tel que  $f_{a,i}$  soit définie sur  $U_{a,i}$ .

#### Application partielle

Lorsque  $n = 2$ , la courbe représentative de la première (resp. seconde) application partielle est la courbe obtenue en effectuant la section de la surface avec un plan passant par l'axe des abscisses (resp. ordonnées) :



#### Exemple 2 - Applications partielles

- Si  $n = 1$ , alors  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et elle possède une seule application partielle (elle-même).
- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$ . Au point  $a = (2, 5)$ , la fonction  $f$  possède deux applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto 3x + 14 \\ f_{a,2} &: y \mapsto 2y + 10 \end{aligned}$$

- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$ . Au point  $a = (4, 3)$ , la fonction  $f$  possède deux applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto f(x, 3) = x^2 + 9 - 6x, \\ f_{a,2} &: y \mapsto f(4, y) = 16 + y^2 - 8y. \end{aligned}$$

- Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto e^x + 3ye^z$ . Au point  $a = (0, 4, 1)$ , la fonction  $f$  possède trois applications partielles :

$$\begin{aligned} f_{a,1} &: x \mapsto f(x, 4, 1) = e^x + 12e, \\ f_{a,2} &: y \mapsto f(0, y, 1) = 1 + 3e^y, \\ f_{a,3} &: z \mapsto f(0, 4, z) = 1 + 12e^z. \end{aligned}$$

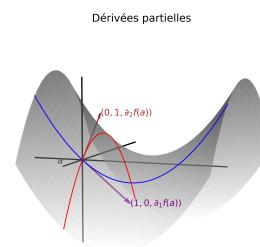
## I.2 - Dérivées partielles

### Définition 3 - Dérivées partielles

La fonction  $f$  admet une *dérivée partielle* en  $a$  par rapport à la  $i$ -ème variable si l'application partielle  $f_{a,i}$  admet une dérivée en  $a_i$ . Cette valeur est notée  $\partial_i f(a)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ .

### Dérivées partielles

Les dérivées partielles sont les dérivées au sens usuel des applications partielles :



### Exemple 3 - Calculs de dérivées partielles

- Si  $n = 1$ , alors  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et la notion de dérivée partielle correspond à la notion de dérivée.
- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$ . En tout point  $(x, y)$ , la fonction  $f$  possède deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f : x \mapsto 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f : y \mapsto 2$$

- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$ . En tout point

$(x, y)$ , la fonction  $f$  possède deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f : (x, y) \mapsto 2x - 2y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f : (x, y) \mapsto 2y - 2x.$$

- Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto e^x + 3y e^z$ . En tout point  $(x, y)$ , la fonction  $f$  possède trois dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_1 f : (x, y, z) \mapsto e^x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f : (x, y, z) \mapsto 3e^z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \partial_3 f : (x, y, z) \mapsto 3y e^z.$$

### Définition 4 - Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (H.P.)

Soit  $f$  une fonction définie sur  $U$ . La fonction  $f$  est de *classe  $\mathcal{C}^1$*  si ses dérivées partielles sont définies et continues sur  $U$ .

### Théorème 1 - Développement limité d'ordre 1

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $a \in U$ . Alors, il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow (0, \dots, 0)} \varepsilon(x) = 0$  et pour tout  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $a + h \in U$ ,

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a) + \|h\| \varepsilon(h).$$

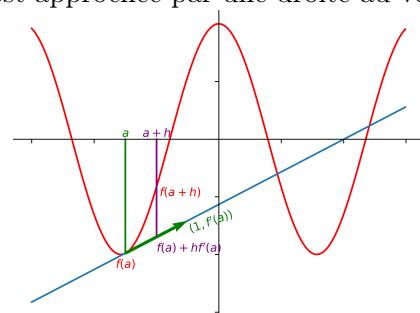
La fonction  $f$  admet un *développement limité* d'ordre 1 en  $a$ .

### Exemple 4 - Développement limité d'ordre 1

- Ce théorème est hors programme mais permettra ensuite de mieux comprendre la recherche d'extremums.
- Lorsque  $n = 1$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , le théorème s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + |h| \varepsilon(h).$$

On retrouve la formule de Taylor-Young à l'ordre 1. La fonction  $f$  est approchée par une droite au voisinage de  $a$ .



- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$ . Le développement limité d'ordre 1 s'écrit :

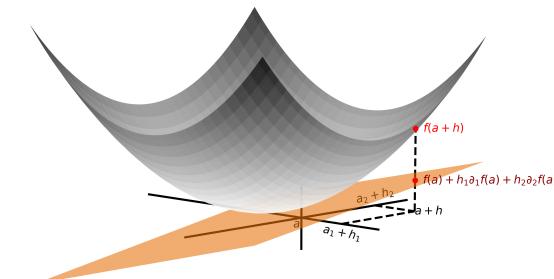
$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h_1 \partial_1 f(a) + h_2 \partial_2 f(a) + \|h\| \varepsilon(h) \\ 3(a_1 + h_1) + 2(a_2 + h_2) + 4 &= 3a_1 + 2a_2 + 4 + \cdots \\ &\quad \cdots + 3h_1 + 2h_2 + |h| \varepsilon(h). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on constate que  $\varepsilon(h) = 0$ .

### Approximation par un plan

Le théorème signifie que si  $h$  est petit, alors  $f(a+h)$  est environ égal à  $f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a)$ .

Lorsque  $n = 2$ , la surface représentant la fonction  $g : (h_1, h_2) \mapsto f(a) + h_1 \partial_1 f(a) + h_2 \partial_2 f(a)$  est celle d'un plan. La fonction  $f$  est approchée par un plan au voisinage du point  $a$ .



## II - Calcul différentiel d'ordre 2

### II.1 - Dérivées partielles d'ordre 2

#### Définition 5 - Dérivées partielles d'ordre 2

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . La fonction  $\partial_i f$  est une fonction définie sur  $U$  et à valeurs réelles. On peut donc lui appliquer les définitions de la partie précédente. Si  $\partial_i f$  admet une dérivée partielle en  $a$  selon la  $j$ -ème variable, on note

$$\partial_j (\partial_i f) = \partial_{j,i}^2 f.$$

Lorsque  $i = j$ , on note  $\partial_i^2 f$  cette dérivée.

Si toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$  sont continues,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ .

### Exemple 5 - Calculs de dérivées partielles d'ordre 2

- Si  $n = 1$ , alors  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La dérivée partielle d'ordre 2 correspond à la dérivée seconde de  $f$ .
- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto 3x + 2y + 4$ . En tout point  $(x, y)$ , la fonction  $f$  possède des dérivées partielles d'ordre 2 qui sont toutes nulles.
- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$ . En tout point  $(x, y)$ , la fonction  $f$  possède des dérivées partielles d'ordre 2.

★ Comme  $\partial_1 f : (x, y) \mapsto 2x - 2y$ , alors

$$\partial_{1,1}^2 f = \partial_1(\partial_1 f) : (x, y) \mapsto 2$$

$$\partial_{2,1}^2 f = \partial_2(\partial_1 f) : (x, y) \mapsto -2$$

★ Comme  $\partial_2 f : (x, y) \mapsto 2y - 2x$ , alors

$$\partial_{1,2}^2 f = \partial_1(\partial_2 f) : (x, y) \mapsto -2$$

$$\partial_{2,2}^2 f = \partial_2(\partial_2 f) : (x, y) \mapsto 2$$

- Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto e^x + 3y e^z$ . En tout point  $(x, y)$ , la fonction  $f$  possède des dérivées partielles d'ordre 2.

★ Comme  $\partial_1 f : (x, y, z) \mapsto e^x$ ,

$$\partial_{1,1}^2 f = \partial_1(\partial_1 f) : (x, y, z) \mapsto e^x$$

$$\partial_{2,1}^2 f = \partial_2(\partial_1 f) : (x, y, z) \mapsto 0$$

$$\partial_{3,1}^2 f = \partial_3(\partial_1 f) : (x, y, z) \mapsto 0$$

★ Comme  $\partial_2 f : (x, y, z) \mapsto 3e^z$ ,

$$\partial_{1,2}^2 f = \partial_1(\partial_2 f) : (x, y, z) \mapsto 0$$

$$\partial_{2,2}^2 f = \partial_2(\partial_2 f) : (x, y, z) \mapsto 0$$

$$\partial_{3,2}^2 f = \partial_3(\partial_2 f) : (x, y, z) \mapsto 3e^z$$

★ Comme  $\partial_3 f : (x, y, z) \mapsto 3y e^z$ ,

$$\partial_{1,3}^2 f = \partial_1(\partial_3 f) : (x, y, z) \mapsto 0$$

$$\partial_{2,3}^2 f = \partial_2(\partial_3 f) : (x, y, z) \mapsto 3e^z$$

$$\partial_{3,3}^2 f = \partial_3(\partial_3 f) : (x, y, z) \mapsto 3y e^z$$

### Théorème 2 - Théorème de Schwarz (H.P.)

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ . Alors, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $\partial_{i,j}^2 f = \partial_{j,i}^2 f$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut donc effectuer les dérivées partielles dans l'ordre que l'on souhaite.

## II.2 - Matrice hessienne

### Définition 6 - Matrice hessienne

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $a \in U$ . La hessienne de  $f$  en  $a$  est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par

$$H(f)(a) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(a) & \partial_{1,2}^2 f(a) & \cdots & \partial_{1,n}^2 f(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{n,1}^2 f(a) & \partial_{n,2}^2 f(a) & \cdots & \partial_{n,n}^2 f(a) \end{pmatrix}$$

### Exemple 6 - Calculs de hessiennes

- Si  $n = 1$ , alors  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La hessienne est une matrice d'ordre 1 et  $H(f)(a) = f''(a)$ .
- Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , le théorème de Schwarz assure que la hessienne est une matrice réelle symétrique.
- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$  et  $a \in \mathbb{R}^2$ . D'après les calculs précédents,

$$H(f)(a) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(a) & \partial_{1,2}^2 f(a) \\ \partial_{2,1}^2 f(a) & \partial_{2,2}^2 f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto e^x + 3y e^z$  et  $a = (0, 4, 1)$ .  
D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} H(f)(a) &= \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(a) & \partial_{1,2}^2 f(a) & \partial_{1,3}^2 f(a) \\ \partial_{2,1}^2 f(a) & \partial_{2,2}^2 f(a) & \partial_{2,3}^2 f(a) \\ \partial_{3,1}^2 f(a) & \partial_{3,2}^2 f(a) & \partial_{3,3}^2 f(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3e^1 \\ 0 & 3e^1 & 3 \cdot 4 \cdot e^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3e \\ 0 & 3e & 12e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Théorème 3 - Développement limité d'ordre 2

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $a \in U$ . Il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow (0, \dots, 0)} \varepsilon(x) = 0$  et pour tout  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $a + h \in U$ ,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \partial_{i,j}^2 f(a)}_{q_a(f)(h)} + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

La fonction  $f$  admet un *développement limité* d'ordre 2 en  $a$ .

Si  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ , on note

$$q_a(f)(h_1, \dots, h_n) = h^T H(f)(a)h.$$

### Exemple 7 - Cas particuliers de développements limités

- Si  $n = 1$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , la formule précédente s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + h^2 \varepsilon(h).$$

On retrouve le théorème de Taylor-Young à l'ordre 2.

- Le développement limité à l'ordre 2 permet d'évaluer la distance entre  $f(a+h)$  et  $f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a)$  lorsque  $h$  est petit.

- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$ . D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h_1(2a_1 - 2a_2) + h_2(2a_2 - 2a_1) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{h_1^2}{2} \cdot 2 + \frac{h_1 h_2}{2} \cdot (-2) + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{h_2 h_1}{2} \cdot (-2) + \frac{h_2^2}{2} \cdot 2 + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ &= f(a) + 2(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) + \cdots \\ &\quad \cdots + h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2 + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ &= f(a) + 2(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) + (h_1 - h_2)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \|h\|^2 \varepsilon(h). \end{aligned}$$

- Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto e^x + 3y e^z$  et  $a = (0, 4, 1)$ .  
D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h_1 e^0 + h_2 \cdot 3 \cdot e^1 + h_3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot e^1 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{h_1^2}{2} \cdot 1 + \frac{h_2 h_3}{2} \cdot 3e + \frac{h_3 h_2}{2} \cdot 3e + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{h_2^2}{2} \cdot 12e + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ &= f(a) + h_1 + 3e h_2 + 12e h_3 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{h_1^2}{2} + 3e h_2 h_3 + 6e h_2^2 + \|h\|^2 \varepsilon(h). \end{aligned}$$

## II.3 - Convexité

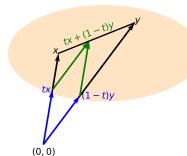
### Définition 7 - Ensemble convexe

L'ensemble  $U \subset \mathbb{R}^n$  est *convexe* si

$$\forall (x, y) \in U^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1-t)y \in U.$$

### Représentation d'un ensemble convexe

$U$  est convexe si, pour tous points  $x, y$  de  $U$ , le segment reliant ces points est également inclus dans  $U$ .



On peut montrer que les ensembles convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

### Définition 8 - Convexité / Concavité

Soit  $U$  un ensemble convexe et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

- La fonction  $f$  est *convexe* si

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

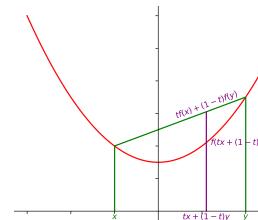
- La fonction  $f$  est *concave* si

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

On remarque que  $f$  est convexe si et seulement si  $-f$  est concave.

### Exemple 8 - Exemples de fonction convexe

- La convexité signifie que l'épi graphe de  $f$ , i.e. l'ensemble des points qui sont au-dessus du graphe de  $f$  est un ensemble convexe.



- Les fonctions linéaires sont à la fois convexes et concaves.

### Théorème 4 - Conditions sur la hessienne

Soit  $U$  un ensemble convexe et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

- La fonction  $f$  est concave si et seulement si

$$\forall a \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n, q_a(f)(h) \leq 0.$$

- La fonction  $f$  est convexe si et seulement si

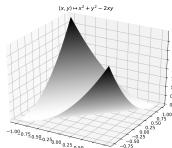
$$\forall a \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n, q_a(f)(h) \geq 0.$$

### Exemple 9 - Études de convexité

- Si  $n = 1$ , alors  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . D'après les calculs précédents,  $q_a(f)(h) = f''(a)h^2$ . Ainsi,
  - ★ Si  $f'' \leq 0$ , la fonction  $f$  est concave.
  - ★ Si  $f'' \geq 0$ , la fonction  $f$  est convexe.
- Soient  $f, g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ . Si  $f$  et  $g$  sont convexes (resp. concaves), alors  $f + g$  est convexe (resp. concave).
- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$ . D'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} q_a(f)(h) &= 2h_1^2 - 2h_1h_2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 \\ &= 2(h_1 - h_2)^2. \end{aligned}$$

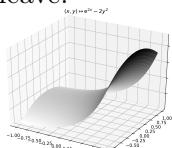
La fonction  $f$  est donc convexe.



- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto e^{2x} - 2y^2$  et  $a = (x, y, z)$ .  
Alors,  $H(f)(a) = \begin{pmatrix} 4e^{2x} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$  et

$$q_{(x,y,z)}(f)(h) = h_1^2 4e^{2x} - 4h_2^2.$$

Ainsi,  $q_a(f)(0, 1) = -4$  et  $q_a(f)(1, 0) = 4e^{2x}$ . Cette quantité n'est donc pas de signe constant et la fonction  $f$  n'est donc ni convexe ni concave.



### III - Recherche d'extremums

#### III.1 - Conditions d'existence

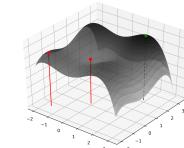
##### Définition 9 - Extremum local / global

Soit  $f$  une fonction définie sur  $U$  et  $a \in U$ .

- $f$  présente un *maximum local* en  $a_*$  s'il existe  $V \subset U$  contenant  $a$  tel que pour tout  $x \in V$ ,  $f(x) \leq f(a_*)$ .
- $f$  présente un *minimum local* en  $a_*$  s'il existe  $V \subset U$  contenant  $a$  tel que pour tout  $x \in V$ ,  $f(x) \geq f(a_*)$ .
- $f$  présente un *maximum global* en  $a$  si pour tout  $x \in U$ ,  $f(x) \leq f(a_*)$ .
- $f$  présente un *minimum global* en  $a$  si pour tout  $x \in U$ ,  $f(x) \geq f(a_*)$ .
- Un *extremum* est un maximum ou un minimum.

##### Représentation graphique d'extremums

Sur le schéma suivant, des extrema locaux sont matérialisés par des traits pleins et un maximum global est matérialisé par un trait pointillé.



##### Définition 10 - Point critique

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $a \in U$ . Le point  $a$  est un *point critique* de  $f$  si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \partial_i f(a) = 0.$$

Le vecteur  $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix}$  est le *gradient* de  $f$  en  $a$ .

$\nabla$

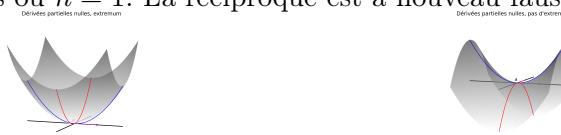
Le symbole  $\nabla$  se lit « gradient » ou « nabla ». Il s'agit d'un  $\Delta$  (lettre grecque delta) renversée, le mot nabla provenant d'un nom d'une harpe hébraïque de l'antiquité.

##### Théorème 5 - Extremum : condition nécessaire

Soit  $f$  une application admettant des dérivées partielles selon chacune de ses variables. Si  $f$  présente un extremum local en  $a$ , alors  $a$  est un point critique de  $f$ , i.e.  $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

### Exemple 10 - Calculs de points critiques

- Soit  $n = 1$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Si  $f$  admet un extremum en  $a_*$ , alors  $f'(a_*) = 0$ . Cependant, la fonction  $f : x \mapsto x^3$  montre que  $f'(0) = 0$  mais  $f$  n'admet pas d'extremum en 0 : la réciproque du théorème est fausse.
- La démonstration de ce théorème est très simple : si  $f$  admet un extremum local en  $a_*$ , alors chacune de ses applications partielles admet un extremum. Nous sommes ramenés au cas où  $n = 1$ . La réciproque est à nouveau fausse :



- Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$ .

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique point critique de  $f$  est  $(-1, 1)$ . Nous devons maintenant étudier ce point pour savoir si  $f$  atteint un extremum en  $(-1, 1)$ .

De plus, si  $(h, k) \neq (0, 0)$ , alors

$$\begin{aligned} & f(-1 + h, 1 + k) - f(-1, 1) \\ &= (-1 + h)^2 + (-1 + h)(1 + k) + (1 + k)^2 + \dots \\ &\quad \dots + (-1 + h) - (1 + k) + 3 - f(-1, 1) \\ &= h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{4}k^2 + k^2 \\ &= \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  possède un maximum en  $(-1, 1)$ . Cette dernière méthode de factorisation est fastidieuse. On introduit la hessienne pour gagner en efficacité.

### Théorème 6 - Conditions locales sur la hessienne

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $a_*$  un point critique de  $f$ . D'après le développement limité à l'ordre 2 en  $a_*$ ,

- Si  $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $q_{a_*}(f)(h) > 0$ , alors  $f$  admet en  $a_*$  un minimum local.
- Si  $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $q_{a_*}(f)(h) < 0$ , alors  $f$  admet en  $a_*$  un maximum local.
- S'il existe  $h_1$  et  $h_2$  tels que  $q_{a_*}(f)(h_1) > 0$  et  $q_{a_*}(f)(h_2) < 0$ , alors  $f$  n'admet pas d'extremum en  $a_*$ .

### Exemple 11 - Calculs de hessiennes

- Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$  et  $a_* = (-1, 1)$ .

On vérifie que  $\nabla(f)(a_*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et

$$H(f)(a_*) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et pour  $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} q_{a_*}(f)(h) &= h_1^2 \cdot 2 + h_1 h_2 \cdot 1 + h_2 h_1 \cdot 1 + h_2^2 \cdot 2 \\ &= 2(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) = 2 \left[ \left( h_1 + \frac{1}{2}h_2 \right)^2 + \frac{3}{4}h_2^2 \right] \\ &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  possède un minimum local en  $(-1, 1)$ .

- Soit  $f : (x, y, z) \mapsto \frac{x^3}{3} - xy - 4y + \frac{5}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2$ . Alors,

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y, z) = 0 \\ \partial_2 f(x, y, z) = 0 \\ \partial_3 f(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ -x - 4 + 5y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 5x^2 - x - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \text{ ou } z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = \frac{16}{25} \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les points critiques de  $f$  sont  $(1, 1, 0)$  et  $(-\frac{4}{5}, \frac{16}{25}, 0)$ .

De plus,

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

★ Si  $a_* = (1, 1, 0)$ , alors pour  $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} q_{a_*}(f)(h) &= 2h_1^2 - 2h_1h_2 + 5h_2^2 + 3h_3^2 \\ &= 2(h_1^2 - h_1h_2) + 5h_2^2 + 3h_3^2 \\ &= 2\left(h_1 - \frac{1}{2}h_2\right)^2 + \frac{9}{2}h_2^2 + 3h_3^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  admet un minimum local en  $(1, 1, 0)$ .

★ Si  $a_* = (-\frac{4}{5}, \frac{16}{25}, 0)$ , alors

$$q_{a_*}(f)(h) = -\frac{8}{5}h_1^2 - 2h_1h_2 + 5h_2^2 + 3h_3^2.$$

Comme  $q_{a_*}(f)(1, 0, 0) = -\frac{8}{5}$  et  $q_{a_*}(f)(0, 0, 1) = 3$ , alors  $f$  n'admet pas d'extremum en  $a_* = (1, 1, 0)$ .

### Théorème 7 - Notations de Monge (cas $n = 2$ )

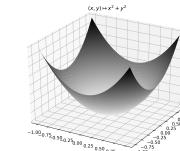
Soit  $n = 2$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a_*$  un point critique de  $f$ . On note

$$H(f)(a_*) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

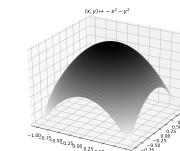
- Si  $rt - s^2 > 0$ , alors  $f$  possède un extremum local en  $a_*$ .
  - ★ Si  $r > 0$ , il s'agit d'un minimum local.
  - ★ Si  $r < 0$ , il s'agit d'un maximum local.
- Si  $rt - s^2 < 0$ , alors  $f$  ne possède pas d'extremum en  $a_*$ . Il s'agit d'un *point col* (ou *point selle*).
- Si  $rt - s^2 = 0$ , on ne peut pas conclure.

### Exemple 12 - La dimension 2

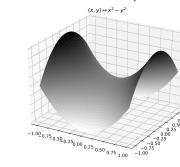
- Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ . Le seul point critique de  $f$  est  $(0, 0)$  et  $H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Comme  $2 \times 2 - 0 > 0$  et  $2 > 0$ , alors  $f$  admet un minimum local en  $(0, 0)$ .



- Soit  $f : (x, y) \mapsto -x^2 - y^2$ . Le seul point critique de  $f$  est  $(0, 0)$  et  $H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Comme  $-2 \times (-2) - 0 > 0$  et  $-2 < 0$ , alors  $f$  admet un maximum local en  $(0, 0)$ .



- Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ . Le seul point critique de  $f$  est  $(0, 0)$  et  $H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Comme  $2 \times (-2) - 0 < 0$ , alors  $f$  admet un point col en  $(0, 0)$ .



- Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$  et  $a_* = (-1, 1)$ . On a vu que  $a_*$  est un point critique de  $f$  et que

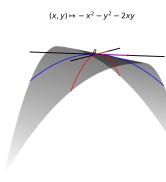
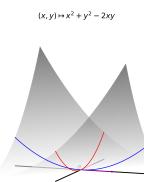
$$H(f)(a_*) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme  $2 \times 2 - 1 \times 1 > 0$  et  $2 > 0$ , alors  $f$  possède un minimum local en  $(-1, 1)$ .

- Si  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy$ , alors  $(0, 0)$  est un point

critique et  $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  soit  $rt - s^2 = 0$ . Cependant,  $f(x,y) = (x-y)^2 \geq 0$  donc  $f$  admet un minimum en  $(0,0)$ .

Si  $f : (x,y) \mapsto -x^2 - y^2 - 2xy$ , alors  $(0,0)$  est un point critique et  $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$  soit  $rt - s^2 = 0$ . Cependant,  $f(x,y) = -(x+y)^2 \leq 0$  donc  $f$  admet un maximum en  $(0,0)$ . Lorsque  $rt - s^2 = 0$ , on ne peut pas conclure de manière générale.



### Théorème 8 - Condition globale

Soit  $U$  un ensemble convexe,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $a_\star \in U$  un point critique de  $f$ .

- Si  $f$  est convexe sur  $U$ , alors  $f$  admet en  $a_\star$  un minimum global.
- Si  $f$  est concave sur  $U$ , alors  $f$  admet en  $a_\star$  un maximum global.

### Exemple 13 - Extremums & Convexité

- Soit  $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ . Le seul point critique de  $f$  est  $(0,0)$  et c'est un minimum local. De plus,  $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $q_{(x,y)}(f)(h) = 2(h_1^2 + h_2^2) > 0$  pour  $(h_1, h_2) \neq (0,0)$ . Ainsi,  $f$  est convexe. Donc  $(0,0)$  est le minimum global de  $f$ .
- Soit  $f : (x,y) \mapsto -x^2 - y^2$ . Le seul point

critique de  $f$  est  $(0,0)$  et c'est un maximum local. De plus,  $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $q_{(x,y)}(f)(h) = -2(h_1^2 + h_2^2) < 0$  pour  $(h_1, h_2) \neq (0,0)$ . Ainsi,  $f$  est concave. Donc  $(0,0)$  est le maximum global de  $f$ .

- Soit  $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$  et  $a_\star = (-1,1)$ . On a vu que  $a_\star$  est un minimum local de  $f$ . De plus,  $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et pour  $(h_1, h_2) \neq (0,0)$ ,

$$\begin{aligned} q_{(x,y)}(f)(h) &= 2h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_2^2 \\ &= 2\left(h_1 + \frac{1}{2}h_2\right)^2 + \frac{3}{2}h_2^2 > 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  est convexe. Donc  $(-1,1)$  est le minimum global de  $f$ .

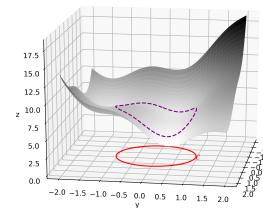
## III.2 - Extremums sous contraintes

### Définition 11 - Optimisation sous contraintes

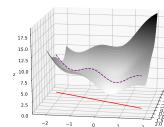
Soit  $f, g_1, \dots, g_p$  des fonctions définies sur  $U$  et à valeurs réelles. Optimiser  $f$  sous les *contraintes*  $g_1, \dots, g_p$  consiste à déterminer les extremums de la restriction de  $f$  à l'ensemble  $\mathcal{C} = \{u \in U ; g_1(u) = \dots = g_p(u) = 0\}$ .

### Exemple 14 - Exemples de contraintes

- On a représenté ci-dessous la surface d'une fonction  $f$  sous l'unique contrainte  $x^2+y^2 = 1$ . L'ensemble  $\mathcal{C}$  des points satisfaisant cette contrainte est représenté par un trait plein. La fonction à minimiser est représentée par un trait en pointillés.



- On a représenté ci-dessous la surface d'une fonction  $f$  sous la contrainte  $y - 2x + \frac{1}{4} = 0$ . L'ensemble  $\mathcal{C}$  des points satisfaisant cette contrainte est représenté par un trait plein. La fonction à minimiser est représentée par un trait en pointillés.



- Considérons la fonction  $f : (x, y) \mapsto x e^y + y e^x$  sous la contrainte  $x - y = 1$ . Une des variables s'exprime en fonction de l'autre. Il s'agit donc d'optimiser la fonction

$$g(y) = f(y+1, y) = (y+1) e^y + y e^{y+1}.$$

La fonction  $g$  est dérivable et

$$g'(y) = e^y(1 + y + 1 + e + e y) = e^y((1 + e)y + 2 + e).$$

La fonction  $g$  admet donc un minimum en  $y_* = -\frac{2+e}{1+e}$ . La fonction  $f$ , sous la contrainte  $x - y = 1$ , admet donc un minimum en  $(-\frac{1}{1+e}, -\frac{2+e}{1+e})$ .

### Définition 12 - Jacobienne

Soit  $g_1, \dots, g_p$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  définies sur  $U$  et à valeurs réelles. La matrice *jacobienne* des contraintes est la matrice

$$J(g_1, \dots, g_p)(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x) & \cdots & \partial_n g_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_p(x) & \cdots & \partial_n g_p(x) \end{pmatrix}.$$

### Exemple 15 - Exemples de jacobiniennes

- Matrice jacobienne lorsque  $p = 1$ ,  $g_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$  :

$$J(g_1)(x, y) = (\partial_1 g_1(x, y) \quad \partial_2 g_1(x, y)) = (2x \quad 2y).$$

- Si  $p = 2$ ,  $g_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$  et  $g_2 : (x, y) \mapsto y - 2x + \frac{1}{4}$ ,

$$J(g_1, g_2)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x, y) & \partial_2 g_1(x, y) \\ \partial_1 g_2(x, y) & \partial_2 g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Définition 13 - Lagrangien

Soit  $f$  une fonction définie sur  $U$  et  $g_1, \dots, g_p$  des contraintes. Le *lagrangien* du problème d'optimisation est la fonction :

$$\begin{aligned} L : \quad U \times \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \lambda_1, \dots, \lambda_p) &\mapsto f(x) - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x). \end{aligned}$$

### Théorème 9 - Conditions du premier ordre

Soit  $f, g_1, \dots, g_p$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . Si  $f$  admet un extremum local en un point  $a_* \in U$  sous les contraintes  $g_1(a_*) = \dots = g_p(a_*) = 0$  et  $\text{Rg } J(g_1, \dots, g_p)(a_*) = p$  (contrainte de *qualification*), alors il existe  $\lambda_{1,*}, \dots, \lambda_{p,*} \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, p+n \rrbracket, \partial_i L(a_*, \lambda_{1,*}, \dots, \lambda_{p,*}) = 0.$$

Les réels  $\lambda_{1,*}, \dots, \lambda_{p,*}$  sont les *multiplicateurs de Lagrange*.

### Theorème 10 - Condition suffisante d'extrémalité

Soit  $f, g_1, \dots, g_p$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ . Notons  $(a_*, \lambda_{1,*}, \dots, \lambda_{p,*})$  un point qui satisfait aux conditions du théorème précédent.

On note  $H_*$  la matrice hessienne du lagrangien par rapport aux seules variables  $x$ , évaluée en  $(a_*, \lambda_{1,*}, \dots, \lambda_{p,*})$  :

$$H_* = (\partial_{i,j}^2 L(a_*, \lambda_{1,*}, \dots, \lambda_{p,*}))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

- Si, pour tout  $h \in \text{Ker } J(g_1, \dots, g_p)(a_*)$  non nul,
  - ★  $h^T H_* h > 0$ , alors  $f$  admet un minimum sous contraintes en  $a_*$ .
  - ★  $h^T H_* h < 0$ , alors  $f$  admet un maximum sous contraintes en  $a_*$ .
- S'il existe  $h_1, h_2 \in \text{Ker } J(g)(a_*)$  tels que  $h_1^T H_* h_1 < 0$  et  $h_2^T H_* h_2 > 0$ , alors  $f$  n'admet ni maximum ni minimum en  $a_*$ .

### Exemple 16 - Optimisation sous contrainte

- Lorsque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et les fonctions  $g_1, \dots, g_p$  sont linéaires, la hessienne du lagrangien par rapport à la variable  $x$  est égale à la hessienne de  $f$  et il suffit que  $f$  soit convexe (resp. concave) pour que  $f$  atteigne, sous contrainte, en le point critique obtenu un minimum (resp. maximum).
- Optimisons la fonction  $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$  sous les contraintes  $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 4 \end{cases}$ . On introduit le lagrangien

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + 2y + z - 1) + \dots \\ &\quad \dots - \lambda_2(2x - y - 3z - 4). \end{aligned}$$

- ★ Contrainte de qualification :

$$J(g_1, g_2)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 car  $(1, 2)$  et  $(2, -1)$  ne sont pas colinéaires.

- ★ Conditions du premier ordre : si  $(x, y, z)$  est un extrémum local de  $f$  sous les contraintes  $g_1, g_2$ , il existe  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} \partial_1 L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ \partial_2 L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ \partial_3 L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ \partial_4 L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ \partial_5 L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2y - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2z - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2y - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2z - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -6\lambda_1 + \lambda_2 = -2 \\ -25\lambda_2 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{15} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{11}{15} \\ \lambda_1 = \frac{52}{75} \\ \lambda_2 = \frac{18}{25} \end{cases}$$

- ★ Étude de la hessienne : Comme les contraintes sont linéaires,  $H_*$  est la hessienne de  $f$  qui vaut  $2I_3$ . Ainsi,  $h^T H_* h = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 > 0$  et  $f$  admet sous contrainte un minimum en  $(\frac{16}{15}, \frac{1}{3}, -\frac{11}{15})$ .

Géométriquement, ce point est le point de la droite définie par  $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 4 \end{cases}$  qui soit le plus proche de l'origine.

- Optimisons la fonction  $f : (x, y) \mapsto x^2 y$  sous la contrainte  $g_1(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3 = 0$ . On introduit le lagrangien :

$$L : (x, y, \lambda) \mapsto x^2 y - \lambda(2x^2 + y^2 - 3).$$

- ★ Contrainte de qualification :

$$J(g_1)(x, y) = (4x \quad 2y)$$

est de rang 1 (elle est de rang 0 en  $(0,0)$  qui est un point qui ne satisfait pas la contrainte).

- ★ Condition du premier ordre : si  $(x,y)$  est un extremum local de  $f$  sous la contrainte  $g_1$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \partial_1 L(x,y,\lambda) = 2xy - 4\lambda x = 0 \\ \partial_2 L(x,y,\lambda) = x^2 - 2\lambda y = 0 \\ \partial_3 L(x,y,\lambda) = 2x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2\lambda y = 0 \text{ ou } \\ y^2 = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 2\lambda \\ x^2 = 4\lambda^2 \\ 2x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \text{ ou } \\ \lambda = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y \in \{-1, 1\} \\ x \in \{-1, 1\} \\ \lambda = \frac{y}{2} \end{cases}$$

Les 6 candidats pour des extrema sont donc :  $(0, -\sqrt{3}, 0)$ ,  $(0, \sqrt{3}, 0)$ ,  $(1, 1, 1/2)$ ,  $(1, -1, -1/2)$ ,  $(-1, 1, 1/2)$ ,  $(-1, -1, -1/2)$ .

- ★ Étude de la hessienne. D'après la définition de  $L$ ,

$$H_\star = \begin{pmatrix} 2y_\star - 4\lambda_\star & 2x_\star \\ 2x_\star & -2\lambda_\star \end{pmatrix} \text{ et } J_\star = (4x_\star \ 2y_\star).$$

- ◊ Si  $(x_\star, y_\star, \lambda_\star) = (0, -\sqrt{3}, 0)$ , alors

$$H_\star = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \text{Ker } J_\star = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi, pour tout  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker } J_\star$  non nul,

$$h^T H_\star h = -2\sqrt{3}h_1^2 < 0.$$

La fonction  $f$  admet donc un maximum sous contrainte en  $(0, -\sqrt{3})$ .

- ◊ On montre de même que  $f$  admet un minimum sous contrainte en  $(0, \sqrt{3})$ .

- ◊ Si  $(x_\star, y_\star, \lambda_\star) = (-1, -1, -1/2)$ , alors

$$H_\star = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{Ker } J_\star = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi, si  $h = h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \text{Ker } J_\star$  non nul,

$$h^T H_\star h = 12h_1^2 > 0.$$

Ainsi, la fonction  $f$  admet un minimum sous contrainte en  $(-1, -1)$ .

- ◊ Les autres cas se traitent de manière analogue.

