■ Chapitre 5 ■
Intégration sur un intervalle quelconque

Notations.
■ $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
■ a, b désignent deux réels tels que $a < b$.
■ I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
■ f et g désignent deux fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Intégration sur un segment

I.1 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Définition 1 (Subdivision).
Une *subdivision* du segment $[a, b]$ est une suite finie $(x_0, \ldots, x_n)$, où $n \in \mathbb{N}^\star$, telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Le *pas* de la subdivision est le réel $\max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} (x_i - x_{i-1})$.

Exercice 1. La subdivision est *régulière* si la quantité $x_i - x_{i-1}$ est constante. Déterminer la valeur de x_i en fonction de i, a, b et n.

Définition 2 (Continuité par morceaux).
Soit $f \in \mathscr{F}([a, b], \mathbb{K})$. La fonction f est *continue par morceaux* sur $[a, b]$ si

(i). il existe une subdivision $\pi = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ soit continue,

(ii). f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $[a, b]$.

$\mathscr{C}^-([a, b], \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles.

Exercice 2.

1. Donner des exemples de fonctions continues par morceaux.

2. Montrer que toute fonction continue par morceaux est bornée. Ses bornes sont-elles nécessairement atteintes ?

3. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 1 (Structure).
L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ stable par multiplication et par passage à la valeur absolue.

Théorème 2 (Admis).
Il existe une application de $\mathscr{C}^-([a, b], \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, notée $f \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ telle que : pour toutes fonctions f et g continues par morceaux sur $[a, b]$.

(i). Si f est constante égale à c, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = c(b-a)$.

(ii). Si f et g coïncident sauf en nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

(iii). **Linéarité.** L'application $f \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} f$ est linéaire.

(iv). **Croissance.** Si f, g sont à valeurs réelles et pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

(v). **Inégalité triangulaire.** $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

(vi). **Relation de CHASLES.** Soit $c \in]a,b[$. $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

Exercice 3.

1. Soit f une fonction continue sur morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs positives. Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante.

2. Inégalité de la moyenne. Montrer que si f et g sont à valeurs réelles, alors

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |g| \int_{[a,b]} |f|\,.$$

3. Soient $a \in [1,+\infty[$ et $f \in \mathscr{C}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_1^a \lfloor t\rfloor\, f'(t)\,\mathrm{d}t = \lfloor a\rfloor\, f(a) - \sum_{k=1}^{\lfloor a\rfloor} f(k).$$

Théorème 3 (Théorème de RIEMANN).

Pour tout entier naturel n non nul, la *somme de Riemann* associée à f sur le segment $[a,b]$ est $S_n = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$. Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, alors,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.

1. Déterminer la limite de la suite de terme général $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

2. Déterminer une majoration de $\left|S_n - \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|$ lorsque f est K-lipschitzienne.

3. Rappeler la méthode des trapèzes.

I.2 Intégrale des fonctions continues. . . et plus !

Propriété 1.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si f est à valeurs positives, alors $f \equiv 0$ si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 5. Montrer que ce résultat est faux en général si la fonction est continue par morceaux.

Théorème 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^-([a,b],\mathbb{R})^2$.

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \sqrt{\int_{[a,b]} f^2}\sqrt{\int_{[a,b]} g^2}.$$

De plus, lorsque f et g sont continues sur $[a,b]$, il y a égalité si et seulement si f et g sont colinéaires.

Théorème 5 (Théorème fondamental du calcul différentiel).

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $a \in I$. La fonction $F : I \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exercice 6.

1. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. On suppose que f' est bornée sur I par une constante K. Montrer que f est lipschitzienne.

2. Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$. Montrer que

$$2\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 6 (Dérivation des bornes).

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton, $f \in \mathscr{C}(I)$ et α, β des fonctions dérivables de J dans I. La fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et

$$\forall\, x \in J,\ \varphi'(x) = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x)).$$

Théorème 7 (Intégration par parties).

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors,

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7.

1. Déterminer une primitive des fonctions ln et arctan.

2. Pour tout entier naturel n, on note $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur à 2, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

Théorème 8 (Changement de variable).

Soit $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ et φ une fonction de $[a,b]$ dans I de classe $\mathscr{C}^1$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. **2.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$.

3. Soit $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et φ la fonction définie pour tout $x \in]0,1]$ par $\varphi(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}$ et $\varphi(0) = 0$. Montrer que f est continue par morceaux, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ mais que $f \circ \varphi$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$.

II. Intégrales généralisées

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Définition 3 (Continuité par morceaux).

Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$. La fonction f est continue par morceaux sur I si pour tout $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$, la fonction f est continue par morceaux sur $[x,y]$.

II.1 Définition

Définition 4 (Convergence).

* Si $I = [a,b[$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque x tend vers b.
* Si $I =]a,b]$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque x tend vers a.
* Si $I =]a,b[$. L'*intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* s'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

Dans tous les cas, si l'intégrale ne converge pas, elle *diverge*.

Exercice 9.

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

3. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$. Que constatez-vous ?

4. Soit f la fonction définie, pour tout entier naturel n non nul par $f(n) = n$, qui est affine sur $[n-1/n^3, n+1/n^3]$ et qui vaut 0 sinon. Représenter graphiquement f puis montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge. Que constatez-vous ?

Théorème 9 (Intégrales de référence).

(i). **Intégrales de RIEMANN sur** $[1,+\infty[$**.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Alors, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$.

(ii). **Intégrales de RIEMANN sur** $]0,1]$**.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Alors, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$.

(*iii*). **Fonction exponentielle.** $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$. Alors, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

(*iv*). **Fonction logarithme.** $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$.

Exercice 10.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Montrer que, si f est continue par morceaux, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum f(n) \text{ converge.}$$

II.2 Propriétés

Propriété 2 (Intégrale faussement impropre).

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Alors, les intégrales de f sur $[a,b]$, $]a,b]$, $]a,b[$ et $[a,b[$ sont égales.

Exercice 11. Montrer que $\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Propriété 3 (Linéarité).

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Alors, $\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 4 (Relation de Chasles).

On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $c \in]a,b[$. Alors, $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

II.3 Fonctions à valeurs réelles

Propriétés 5.

On suppose que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

(*i*). **Positivité.** Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(*ii*). **Croissance.** Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 6 (Fonctions à valeurs positives).

Si f est valeurs positives sur $[a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

Propriété 7 (Domination locale).

Soient f, g deux fonctions continues de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}_+$. S'il existe un réel c tel que $\forall\, x \in [c,b[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et $\displaystyle\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Corollaire 10.

Soient f, g deux fonctions continues de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}_+$. Si $f(t) = O_b(g(t))$ et $\displaystyle\int_c^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

III. Absolue convergence, Fonctions intégrables

III.1 Définition

Définition 5 (Convergence absolue).

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *absolument convergente* si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Théorème 11 (Absolue convergence & Convergence, Intégrabilité).

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente. La fonction f est alors *intégrable* sur I. La valeur de son intégrale sera notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_I f$.

Exercice 12. Soit $\alpha > 1$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Théorème 12 (Inégalité triangulaire).

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 13.

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et intégrable sur I. Si $\displaystyle\int_I |f| = 0$, alors $f \equiv 0$ sur I.

Théorème 14 (Théorème de comparaison).

On suppose que $I = [a,b[$.

(i). Si $|f| \leqslant |g|$ sur I et g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

(ii). Si $f = O_b(g)$ et g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

(iii). Si $f(t) \sim_b g(t)$, alors f est intégrable sur I si et seulement si g est intégrable sur I.

Exercice 13. Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes.
1. $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$. **2.** $t \mapsto \frac{t\cos(t)}{\mathrm{e}^t - 1}$ sur $]0, +\infty[$. **3.** $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ sur $[0, 1[$.

III.2 Méthodes de calculs

Théorème 15 (Primitive).

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ possédant une primitive F. Alors, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F possède une limite finie en b. Si ces propriétés sont vérifiées,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a).$$

Exercice 14. Reprendre les exemples des intégrales de Riemann.

Théorème 16 (Intégration par parties).

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Si la fonction fg a une limite finie en a et en b, alors les intégrales $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Si ces quantités sont convergentes, en notant

$$[f(t)g(t)]_a^b = \lim_{x \to b^-} (f(x)g(x)) - \lim_{x \to a^+} (f(x)g(x)),$$

on obtient la relation

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 15. (Fonction Gamma d'Euler) Pour tout nombre réel x, on pose, sous réserve d'existence,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition de Γ.

2. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. Pour tout entier naturel n, déterminer $\Gamma(n+1)$.

Théorème 17 (Changement de variable).

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et φ telle que

(i). $\varphi(]\alpha, \beta[) =]a, b[$,

(ii). φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$,

(iii). φ est strictement monotone.

Alors, les intégrales

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature. Si ces quantités sont convergentes,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 16. Soient $a < b$. Calculer...

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)}$.

2. $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$.

III.3 Espaces fonctionnels

Définition 6 ($\mathscr{L}^1$, $\mathscr{L}^2$).

(*i*). L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, est noté $\mathscr{L}^1(I,\mathbb{K})$.

(*ii*). L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, de *carré intégrable*, i.e. pour lesquelles $|f|^2$ est intégrable sur I est noté $\mathscr{L}^2(I,\mathbb{K})$.

Exercice 17.

1. Déterminer une fonction f qui appartienne à $\mathscr{L}^1(]0,1],\mathbb{R})$ mais pas à $\mathscr{L}^2(]0,1],\mathbb{R})$.

2. Déterminer une fonction f qui appartienne à $\mathscr{L}^2([1,+\infty[,\mathbb{R})$ mais pas à $\mathscr{L}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$.

Théorème 18 (Structure d'espace vectoriel).

$\mathscr{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

Propriété 8 (Structure préhilbertienne).

(*i*). Si f et g appartiennent à $\mathscr{L}^2(I,\mathbb{K})$, leur produit $f\cdot g$ appartient à $\mathscr{L}^1(I,\mathbb{K})$.

(*ii*). L'ensemble $\mathscr{L}^2(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(*iii*). **Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.** Pour tout $(f,g)\in\mathscr{L}^2(I,\mathbb{R})$,

$$\left|\int_I fg\right| \leqslant \sqrt{\int_I |f|^2}\cdot\sqrt{\int_I |g|^2}.$$

De plus, si f et g sont continues, $(f,g)\mapsto \displaystyle\int_I fg$ est un produit scalaire. La norme associée est notée

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 18. Montrer que $\mathscr{L}^2([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}^1([0,1],\mathbb{R})$.

IV. Plan d'étude

On suppose qu'il faille étudier l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier la régularité de f en identifiant les points où f n'est pas continue.

2. Découper l'intervalle I en intervalles d'études dont les points incertains sont des bornes.

3. Choisir entre les stratégies suivantes :

a) Prolongement par continuité ?

b) Calcul d'une primitive ?

c) Si la fonction est de signe constant, déterminer une comparaison à une intégrale de référence : équivalent, majoration,...

d) Si la fonction n'est pas de signe constant,

i. étude d'intégrabilité (se ramener au point précédent).

ii. effectuer un changement de variable, une intégration par parties vers une fonction intégrable.

iii. ...

Autour de l'intégrale de Dirichlet

Exercice 19.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. Deux méthodes.

a) Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer directement que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

4. Pour tout entier naturel n, montrer que $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$.

5. En déduire que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

6. Soit $x > 0$. Appliquer la formule d'intégration par parties avec $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[x, 2\pi]$. Que dire lorsque $x \to 0$?

Programme officiel (PCSI)

Intégration (p. 27)

Programme officiel (PSI)

Intégration - a, b, c (p. 17)

Mathématiciens

Euler Leonhard (15 avr. 1707 à Basel-18 sept. 1783 à St Pétersbourg).
Cauchy Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).
Chasles Michel (15 nov. 1793 à Epernon-18 déc. 1880 à Paris).
Dirichlet Johann Peter Gustav Lejeune (13 fév. 1805 à Düren-5 mai 1859 à Göttingen).
Riemann Georg Friedrich Bernhard (17 sept. 1826 à Breselenz-20 juil. 1866 à Selasca).
Schwarz Hermann (25 jan. 1843 à Hermsdorf-30 nov. 1921 à Berlin).