

T.D. VI - Probabilités

I - Tirages

Exercice 1. Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir deux numéros de même parité lorsque...

1. ...on tire les boules simultanément.
2. ...on tire les boules successivement et sans remise.
3. ...on tire les boules successivement et avec remise.

Exercice 2. Soit $n \geq 4$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On tire successivement et sans remise 4 jetons d'une boîte contenant n jetons numérotés de 1 à n .

1. Déterminer la probabilité :
 - a) que le plus petit numéro tiré soit égal à 1.
 - b) que le plus petit numéro tiré soit égal à 3.
 - c) que le plus petit numéro tiré soit égal à k .
2. Reprendre les questions précédentes en changeant « plus petit » en « plus grand ».
3. Reprendre les questions précédentes en effectuant des tirages avec remise.

Exercice 3. Soit $n \geq 16$. Une urne contient n boules dont 10 sont rouges et $n - 10$ sont noires. On tire simultanément 10 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité p_n de l'événement : « quatre boules exactement sont rouges » ?
2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles p_n est maximale.

Exercice 4. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. Ces boules sont tirées aléatoirement sans remise. Montrer que la probabilité que la première boule rouge soit tirée lors du $(k + 1)$ -ème tirage vaut $\binom{r+b-k-1}{r-1} \binom{r+b}{b}^{-1}$.

Exercice 5. 50 boules noires et 50 boules blanches sont réparties dans 2 urnes. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Est-ce que la probabilité que cette boule soit blanche dépend de la répartition initiale dans les urnes ? Reprendre cette question si les deux urnes contiennent le même nombre de boules.

II - Arbres

Exercice 6. Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que :

- * 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété ;
- * 95% des tests ont donné un résultat positif alors que la personne contrôlée était en état d'ébriété ;
- * 95% des tests ont donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que son résultat est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?

2. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est négatif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?

Exercice 7. On dispose d'un test pour déterminer si un individu est atteint par une maladie donnée. La probabilité qu'un individu soit malade est $1/100000$, la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu est malade est $99999/100000$, la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu n'est pas malade est $1/10000$. Déterminer la probabilité qu'un individu soit malade sachant que le test est positif.

Exercice 8. Soit $n \geq 3$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n telles que l'urne numérotée r contient $r-1$ boules rouges et $n-r$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on pioche dans celle-ci successivement deux boules sans remise. Déterminer les probabilités que...

1. ... la seconde boule soit noire.
2. ... la seconde boule soit noire, sachant que la première est noire.

Exercice 9. (Jeu de cartes) Soient 2 jeux de cartes, un de 32 cartes et un de 52 cartes. On prend un des jeux au hasard et on prend une carte dedans. On obtient une dame. Quelle est la probabilité que le jeu choisi contienne 32 cartes ?

III - Jeu de pile ou face

Exercice 10. Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ?

Exercice 11. (Ruine du joueur) Un homme souhaite acheter un livre de mathématiques qui coûte N euros. Il commence à épargner de l'argent avec une somme initiale de k euros où $0 < k < N$. Il cherche ensuite à gagner l'argent manquant en jouant contre son banquier au jeu suivant : il lance une pièce de monnaie équilibrée ; si elle renvoie pile, il gagne 1 euro ; si elle renvoie face il perd 1 euro. Quelle est la probabilité que le jeu se termine avec sa ruine ?

IV - Divers

Exercice 12. (Quelle est la taille du paquet ?) Un paquet de 10 cartes numérotées de 1 à 10 est mélangé. Trois cartes sont extraites tour à tour du paquet. Quelle est la probabilité que ces trois cartes soient triées par ordre croissant ?

Exercice 13. Soit $x \in]0, 1[$ et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose qu'il existe une famille d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n ,

$$\mathbf{P}(A_n \cap A_{n+1}) = x\mathbf{P}(A_n) \text{ et } \mathbf{P}(\overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}}) = x\mathbf{P}(\overline{A_n}).$$

Montrer que $(\mathbf{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 14. Un fumeur a dans sa poche deux boîtes contenant respectivement n et $n+1$ allumettes. Chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il prend au hasard dans l'une des boîtes. Quelle est la probabilité que, lorsqu'il prend la dernière allumette d'une boîte, l'autre boîte contienne exactement k allumettes ?