I - Suites & Fonctions

Dans tout le cours, on note :

- pour $a < b$ réels, $[a, b]$ l'ensemble des **réels** compris entre a et b :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leqslant x \leqslant b\} .$$

- pour $0 \leqslant a < b$ entiers, $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des **entiers** compris entre a et b :

$$[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ a \leqslant x \leqslant b\} .$$

I - Suites

I.1 - Suites usuelles

Définition 1 - Suite arithmétique

Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$ est une suite *arithmétique* de *raison* a.

Proposition 1

Soit u une suite arithmétique de raison a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $u_n = u_0 + na$.
- $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} a$.

Exemple 1 - Une suite arithmétique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 12$. Soit n un entier naturel.
D'après les propriétés des suites arithmétiques, pour tout n entier naturel,

$$u_n = 12n + 3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (12k + 3) = 12 \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 3 \\ = 12 \frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) \\ = 3(n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

Définition 2 - Suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$ est une suite *géométrique* de *raison* q.

Proposition 2

Soit u une suite géométique de raison q. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $u_n = q^n u_0$.
- $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exemple 2 - Une suite géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 12 \cdot u_n$. Soit n un entier naturel.
D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout n entier naturel,

$$u_n = 12^n u_0 = 3 \times 12^n.$$

En utilisant le résultat sur la somme des termes d'une suite géométrique dont la raison est différente de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 3 \times \frac{12^{n+1}-1}{12-1} = \frac{3}{11}\left(12^{n+1}-1\right).$$

Définition 3 - Suite arithmético-géométrique

Soient $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. La suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + a$ est une suite *arithmético-géométrique*.

Exemple 3 - Étude des suites arithmético-géométriques

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

- Commençons par chercher une solution ℓ de l'équation $\ell = 2\ell + 3$.
  On obtient $\ell = -3$.
- Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = u_n - \ell = u_n + 3$. Montrons que (v_n) est une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= (2u_n + 3) + 3 \\ &= 2u_n + 6 \\ &= 2(u_n + 3) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

  Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
  De plus, $v_0 = u_0 + 3 = 4$.
- D'après les résultats sur les suites géométriques,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n v_0 = 2^{n+2}.$$

  Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+2} - 3.$$

I.2 - Études locale & globale

Définition 4 - Monotonie

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- (u_n) est croissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- (u_n) est décroissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- (u_n) est constante si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.
- (u_n) est stationnaire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

Exemple 4 - Suites arithmétiques & géométriques

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout n entier naturel,

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

  Ainsi,
  - ⋆ Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
  - ⋆ Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.
  - ⋆ Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.
- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$. Alors, pour tout n entier naturel, $u_n = q^n u_0 > 0$. De plus,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

  Ainsi,
  - ⋆ Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
  - ⋆ Si $q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.
  - ⋆ Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Définition 5 - Majorée, Minorée

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- La suite (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que

$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant M$.

- La suite (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\, m \leqslant u_n$.
- La suite (u_n) est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exemple 5 - Une suite géométrique

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.

- Comme u_n est la somme de termes positifs, alors $u_n \geqslant 0$ et la suite (u_n) est minorée par 0.
- D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique, pour tout n entier naturel,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \times \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant 2.$$

Ainsi, la suite (u_n) est majorée par 2.

Finalement, la suite (u_n) est bornée.

I.3 - Limites

Proposition 3 - Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$.

- La somme $(u_n + v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\times$
$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$-\infty$

- Le produit $(u_n v_n)$

	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	ab	$\pm\infty\ (a \neq 0)$	$\pm\infty\ (a \neq 0)$
$+\infty$	$\pm\infty\ (b \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty\ (b \neq 0)$	$-\infty$	$+\infty$

- Le quotient (u_n/v_n)

	$b \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	a/b	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$	$\times$	$\times$
$-\infty$	$\pm\infty$	$\times$	$\times$

Exemple 6 - Calculs de limites

- Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $u_n = n^2 + \sqrt{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

- Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $v_n = n^2 - \sqrt{n}$. La forme obtenue ainsi est une forme indéterminée. Or, pour $n > 0$,

$$v_n = \sqrt{n}\left(n^{3/2} - 1\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2} = +\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

- Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $w_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0.$$

Proposition 4 - Limites classiques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Exemple 7 - Série géométrique

Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout n entier naturel, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.
D'après le résultat sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Comme $x \in]-1, 1[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{n+1} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - x}.$$

Théorème 1 - Théorème d'encadrement

Soient u, v, w trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$ telles que, à partir d'un certain rang,

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n.$$

- Si (v_n) et (w_n) convergent vers un même réel ℓ, alors (u_n) converge également vers ℓ.
- Si (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
- Si (w_n) tend vers $-\infty$, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Exemple 8 - Factorielle vs puissance

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{3^n}{n!}$.
Pour tout $n \geqslant 4$, $\frac{3}{n} \leqslant \frac{3}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n &= \frac{3 \times 3 \times \cdots \times 3}{1 \times 2 \times \cdots \times n} \\ &\leqslant \frac{3}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \frac{3}{4} \\ &\leqslant \frac{9}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{3}{4} \in]0, 1[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$. D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Théorème 2 - Théorème de la limite monotone

Soit u une suite croissante.

- Si u est majorée, alors elle converge.
- Si u n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Soit v une suite décroissante.

- Si v est minorée, alors elle converge.
- Si v n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Exemple 9 - Série exponentielle

Pour tout n entier naturel, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

- D'une part, pour tout n entier naturel,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

  Ainsi, la suite (S_n) est croissante.

- D'autre part, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} n! &= 1 \times 2 \times \cdots \times n \\ &\geqslant 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leqslant 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &\leqslant 2 + \frac{1}{2}\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leqslant 3. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (S_n) est majorée par 3.

La suite (S_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

Pour la culture, il est bon de savoir que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$.

II - Fonctions

II.1 - Régularité

Définition 6 - Continuité & Dérivabilité - Définition informelle

Soient f une fonction définie sur un intervalle I non vide et $x_0 \in I$.

- La fonction f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- La fonction f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe.}$$

Cette limite est le nombre dérivé de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

Définition 7 - Classe $\mathscr{C}^n$

Une fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^n$ si :

- ses dérivées successives $f, f', \dots, f^{(n)}$ existent,
- $f^{(n)}$ est continue.

II.2 - Étude d'extrema

Théorème 3 - Régularité & Variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en des points isolés en lesquels elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple 10

Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 1$.

La fonction f est dérivable comme fonction polynomiale et pour tout x réel,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4).$$

De plus, les fonctions polynomiales se comportent en l'infini comme leur terme de plus haut degré, donc

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-31	$\nearrow$	$+\infty$

Théorème 4 - Dérivation & Extrema

Soient f une fonction dérivable sur un ouvert I et $x_0 \in I$. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Exemple 11

- Soit $f : x \mapsto x^3$. La fonction f est dérivable et $f'(x) = 3x^2$. Ainsi, $f'(0) = 0$. Cependant,
$$f(-1) = -1 < 0 = f(0) < f(1).$$
Ainsi, f n'atteint pas d'extremum en 0.
- Sur $[-2, +\infty[$, on définit $f(x) = -x^3 + x^2$. La fonction f est dérivable et, pour tout x réel
$$f'(x) = -3x^2 + 2x = x(-3x + 2).$$
On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	-2		0		$2/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-16	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/27$	$\searrow$	$-\infty$

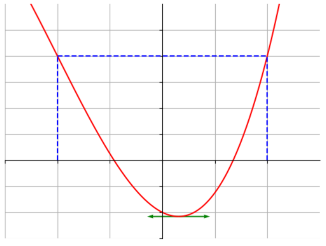
Ainsi, f ne possède pas de minimum et son maximum (atteint en $2/3$), vaut $\frac{4}{27}$.

II.3 - Inégalité des accroissements finis

Théorème 5 - Théorème de Rolle

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Illustration du théorème de Rolle

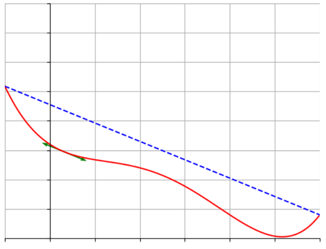


Théorème 6 - Théorème des accroissements finis

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors

$$\exists\, c \in]a, b[\ ;\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Illustration du théorème des accroissements finis



Théorème 7 - Inégalité des accroissements finis

Soient f une fonction dérivable sur I, m, M deux réels tels que pour tout $x \in I$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Alors, pour tout $(x,y) \in I^2$, si $x \leqslant y$, alors $m(y-x) \leqslant f(y)-f(x) \leqslant M(y-x)$.

Exemple 12 - Inégalité

Soit k un entier strictement positif. La fonction ln est continue et dérivable sur $[k, k+1]$. De plus, sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$. Ainsi,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

II.4 - Formule de Taylor

Définition 8 - Relations de comparaison

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a.

- f et g sont équivalentes en a, noté $f \sim_a g$ si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- f est négligeable devant g en a, si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Proposition 5 - Croissances comparées

- Au voisinage de $+\infty$:
  - ⋆ Si α, β, $\gamma > 0$,
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} = 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{\mathrm{e}^{\alpha x}} = 0.$$
  - ⋆ Si α, β, $\gamma < 0$,
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{(\ln x)^\gamma} = 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = 0.$$
- Au voisinage de 0 : si $\beta < 0$, $\gamma > 0$,
$$\lim_{x \to 0} \frac{|\ln x|^\gamma}{x^\beta} = 0.$$

Exemple 13

- Soit $f : x \mapsto \sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$.
On remarque que
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x}\left[\ln(x^2) - \ln(1+x)\right] \\ &= \sqrt{x}\left[2\ln(x) - \ln(1+x)\right]. \end{aligned}$$
D'une part, d'après le théorème des croissances comparées,
$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} 2 \ln(x) = 0.$$
D'autre part, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{x \to 0} \ln(1+x) = 0$.
Finalement,
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$
- Soit $g : x \mapsto \frac{\ln(x)+x}{x^2+1}$.
On remarque que
$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{\ln(x)}{x} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} + \frac{1}{x+\frac{1}{x}}.$$
D'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. D'après les opérations sur les limites, $\lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$.
Finalement,
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Théorème 8 - Équivalent et dérivation

Si f est une fonction dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a) \cdot (x - a).$$

Exemple 14 - Équivalents classiques en 0

- Comme $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x}$,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \ln(1) &\sim_0 \frac{1}{1+0}(x-0) \\ \ln(1+x) &\sim_0 x. \end{aligned}$$

- Comme $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \mathrm{e}^x$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0 &\sim_0 \mathrm{e}^0(x-0) \\ \mathrm{e}^x - 1 &\sim_0 x. \end{aligned}$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \alpha(1+x)^{\alpha-1}$,

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha &\sim_0 \alpha(1+0)^{\alpha-1}(x-0) \\ (1+x)^\alpha - 1 &\sim_0 \alpha x. \end{aligned}$$

Proposition 6 - Relations de comparaison & Opérations

- $\sim_a$ est une relation d'équivalence.
- Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors f et g sont de même signe sur un voisinage de a.
- Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.
- Si $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ et g_1, g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a, alors $\frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2}$.

Exemple 15

- On remarque que

$$1 + x \sim_0 1 \text{ et } 1 + 2x \sim_0 1.$$

Cependant,

$$\ln(1+x) \sim_0 x \text{ et } \ln(1+2x) \sim_0 2x.$$

Ainsi, il **ne** faut **pas** composer des équivalents.

- On remarque que

$$\frac{1}{1+2x} \sim_0 1 \text{ et } 1 - 2x \sim_0 1.$$

Cependant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2x} - 1 + 2x &= \frac{1+2x-2x}{1+2x} - 1 + 2x \\ &= 1 - 2\frac{x}{1+2x} - 1 + 2x \\ &= 2x\left(1 - \frac{1}{1+2x}\right) \\ &= 2x\frac{2x}{1+2x} \\ &\sim_0 4x^2. \end{aligned}$$

Ainsi, il **ne** faut **pas** additionner des équivalents.

Définition 9 - Développement limité à l'ordre 1 ou 2

Soient a un réel et f une fonction définie sur un voisinage de a.

- f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 s'il existe a_0 et a_1 réels et ε une fonction satisfaisant $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x).$$

- f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 s'il existe

a_0, a_1 et a_2 réels et ε une fonction satisfaisant $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x).$$

Exemple 16 - Polynômes et Inverse

- Soit $f : x \mapsto 3 + 2x + 4x^2 + 3x^5 + 25x^{72}$. Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 2x + 4x^2 + x^2\left(3x^3 + 25x^{70}\right) \\ &= 3 + 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

- Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 &= \frac{1-x^3}{1-x} \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^2\frac{x}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

- Soit $f : x \mapsto 4x^3 + 2x^2 + x + 1$. On remarque que

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + x^2 \times x = 1 + x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

- Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On remarque que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x}{1+x} \\ &= 1 - x\frac{1}{1+x} = 1 - x\frac{1+x-x}{1+x} \\ &= 1 - x + x^2\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2\frac{1+x-x}{1+x} \\ &= 1 - x + x^2 - x^2\frac{x}{1+x} \\ &= 1 - x + x^2 - x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Proposition 7 - Développement limité & Régularité

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- f admet un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si f est continue en a.
  En particulier, si $f(x) = a_0 + \varepsilon(x)$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = a_0$.
- f ademt un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a.
  En particulier, si $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$, alors $a_0 = f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$ et $a_1 = f'(a)$. La tangente en f à a a donc pour équation $a_0 + a_1(x-a)$.

Théorème 9 - Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. Pour tout $a \in I$, il existe une fonction ε_a telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon_a(x) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

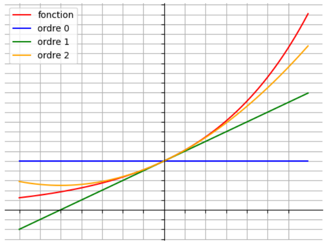
Exemple 17 - Développements limités classiques en 0

- La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f' : x \mapsto \mathrm{e}^x,$$
$$f'' : x \mapsto \mathrm{e}^x.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0(x-0) + \frac{\mathrm{e}^0}{2}(x-0)^2 + x^2\varepsilon(x)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).\end{aligned}$$



- La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$ et

$$f' : x \mapsto \frac{1}{1+x},$$
$$f'' : x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln(1+0) + \frac{1}{1+0}x - \frac{\frac{1}{(1+0)^2}}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).\end{aligned}$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$ et

$$\begin{aligned}f' : x \mapsto &\alpha(1+x)^{\alpha-1},\\ f'' : x \mapsto &\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

- On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$. On utilise les développements limités classiques et on note ε, ε_1,... des fonctions qui tendent vers 0 en 0 mais dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre :

$$\begin{aligned}f(x) &= \exp\left(\sqrt{1+x}\right)\\ &= \exp\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right)\\ &= \mathrm{e}\exp\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right) + \cdots\right.\\ &\cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right)^2 + \cdots\\ &\left.\cdots + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right)\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, en factorisant par x^2 et en regroupant les termes qui tendent vers 0, on obtient

$$\begin{aligned}f(x) &= \mathrm{e}\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right)\\ &= \mathrm{e}\left(1 + \frac{1}{2}x + x^2\varepsilon(x)\right)\\ &= \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}x + x^2\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Proposition 8 - Développement limité & Comportement local

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I contenant a.

- Si $f''(a) > 0$, alors f se situe au-dessus de sa tangente sur un voisinage de 0.
- Si $f''(a) < 0$, alors f se situe au-dessous de sa tangente sur un voisinage de 0.

Si $f''(a) = 0$ et si f est suffisamment régulière, on effectuera un développement limité à un ordre supérieur.

Exemple 18

Comportement au voisinage de 1 de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ et

$$f' : x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}},$$
$$f'' : x \mapsto \frac{\sqrt{x}+1}{4x^{3/2}}\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}}.$$

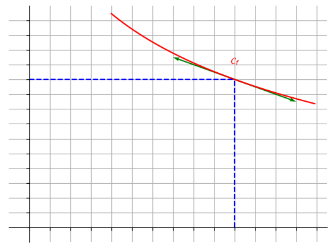
D'après la formule de Taylor-Young,

$$\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1).$$

En particulier, il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0 telle que

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{1-\sqrt{x}} - \underbrace{\left[1 - \frac{1}{2}(x-1)\right]}_{\text{éq. de la tangente}} &= \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1)\\ &= \frac{(x-1)^2}{4} + (x-1)^2\varepsilon(x-1)\\ &= \frac{1}{4}(x-1)^2(1+\varepsilon(x-1)).\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque x est proche de 1, alors $1+\varepsilon(x-1) > 0$ et $(x-1)^2 \geqslant 0$. Donc $f(x) - \left[1 - \frac{1}{2}(x-1)\right] \geqslant 0$ et la courbe représentative de f se trouve au-dessus de la tangente.



II.5 - Fonctions convexes

Définition 10 - Convexité pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Soit $f \in \mathscr{C}^2(I)$. f est une fonction *convexe* si $f'' \geqslant 0$.

Proposition 9 - Convexité & Tangentes

Soit f une fonction convexe et dérivable sur I. Alors,

$$\forall\ x, a \in I,\ f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a).$$

II.6 - Plan d'étude de fonction

(i). Ensemble de définition.
(ii). Limites aux bornes de l'ensemble d'étude.
(iii). Dérivabilité, Variations.
(iv). Branches infinies.
(v). Représentation graphique avec les tangentes remarquables.

Exemple 19 - Étude de fonction

Soient $f : x \mapsto x - 1 + \frac{1}{x-2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(i). f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

(*ii*). f est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$. Sur chacun de ces intervalles,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est deux fois dérivable et $f''(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$. Ainsi, $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 2$ et f est convexe sur $]2, +\infty[$. Comme $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \leqslant 2$, alors f est concave sur $]-\infty, 2[$.

(*iii*). Étude des branches infinies.

- Comme $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote verticale à la courbe.
- Comme $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote verticale à la courbe.
- Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -1$, alors la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. De plus, $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \geqslant 0$ pour tout $x > 2$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
- Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = -1$, alors la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. De plus, $f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-2} \leqslant 0$ pour tout $x < 2$. Ainsi, f se trouve au-dessous de son asymptote.

(*iv*). Tracé.