

III - Primitives : Stratégie

Lors du calcul de primitives, il est important d'appliquer une stratégie de calculs pour *reconnaître* la formule à utiliser. Nous présentons et illustrons ces règles ci-dessous, de la plus élémentaire à la plus élaborée. Plutôt que d'écrire « Une primitive de la fonction $f(x) = \dots$ est la fonction $F(x) = \dots$ », nous adopterons la notation **non standard** $f(x) \rightsquigarrow F(x)$.

I - Fonctions élémentaires

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	primitive
$c \in \mathbb{R}, c$	\rightsquigarrow	cx

$$3 \rightsquigarrow 3x$$

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	primitive
$n \neq -1, x^n$	\rightsquigarrow	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

x	\rightsquigarrow	$\frac{x^2}{2}$
x^2	\rightsquigarrow	$\frac{x^3}{3}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{1/2+1} x^{1/2+1} = \frac{2}{3} x^{3/2}$
$x^{1/3}$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{1/3+1} x^{1/3+1} = \frac{3}{4} x^{4/3}$
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} = -\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{-3+1} x^{-3+1} = -\frac{1}{2x^2}$
$\frac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3}$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{-1/3+1} x^{-1/3+1} = \frac{3x^{2/3}}{2}$

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	primitive
$\frac{1}{x}$	\rightsquigarrow	$\ln(x)$

À Savoir

fonction	\rightsquigarrow	primitive
$a \neq 0, e^{ax}$	\rightsquigarrow	$\frac{1}{a} e^{ax}$

e^x	\rightsquigarrow	e^x
e^{3x}	\rightsquigarrow	$\frac{1}{3} e^{3x}$

II - Fonctions composées

À Savoir

fonction \rightsquigarrow primitive

$$\lambda u'(x) \rightsquigarrow \lambda u(x)$$

$$\frac{1}{3}x^2 \rightsquigarrow \frac{1}{3} \times \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{9}$$

$$3x^{1/2} \rightsquigarrow 3 \times \frac{2x^{3/2}}{3} = 2x^{3/2}$$

À Savoir

fonction \rightsquigarrow primitive

$$u'(x) + v'(x) \rightsquigarrow u(x) + v(x)$$

$$x^4 + x^5 \rightsquigarrow \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$$

$$e^{3x} + \frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{e^{3x}}{3} + \ln(x)$$

À Savoir

fonction \rightsquigarrow primitive

$$\lambda u'(x) + \mu v'(x) \rightsquigarrow \lambda u(x) + \mu v(x)$$

$$3x - 2x^7 \rightsquigarrow 3 \times \frac{x^2}{2} - 2 \times \frac{x^8}{8} = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^8}{4}$$

$$\frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{3} \times \frac{e^{3x}}{3} + 2 \ln(x) = \frac{e^{3x}}{9} + 2 \ln(x)$$

À Savoir

fonction \rightsquigarrow primitive

$$n \neq -1, u'(x)u^n(x) \rightsquigarrow \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x)$$

$$(x+2)^2 = \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{(x+2)^2}_{u(x)} \rightsquigarrow \frac{1}{3}(x+2)^3$$

$$\frac{1}{(x+3)^4} = \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{(x+3)^{-4}}_{u(x)} \rightsquigarrow \frac{1}{-4+1}(x+3)^{-4+1} = -\frac{1}{3(x+3)^3}$$

$$\underbrace{2x}_{u'(x)} \underbrace{(x^2+3)^4}_{u(x)} \rightsquigarrow \frac{1}{4+1}(x^2+3)^5 = \frac{(x^2+3)^5}{5}$$

$$\frac{2x}{(x^2+3)^4} = \underbrace{2x}_{u'(x)} \underbrace{(x^2+3)^{-4}}_{u(x)} \rightsquigarrow \frac{1}{-4+1}(x^2+3)^{-4+1} = -\frac{1}{3(x^2+3)^3}$$

$$\underbrace{(3x^2+2e^{2x})}_{u'(x)} \underbrace{(x^3+e^{2x})^3}_{u(x)} \rightsquigarrow \frac{1}{3+1}(x^3+e^{2x})^{3+1} = \frac{(x^3+e^{2x})^4}{4}$$

$$(x^2+e^{3x})(x^3+e^{3x})^5 = \frac{1}{3} \underbrace{3(x^2+e^{3x})}_{u'(x)} \underbrace{(x^3+e^{3x})^5}_{u(x)} \rightsquigarrow \frac{1}{6}(x^3+e^{3x})^6$$

À Savoir

fonction \rightsquigarrow primitive

$$\frac{u'(x)}{u(x)} \rightsquigarrow \ln |u(x)|$$

$$\frac{1}{x+12} \rightsquigarrow \ln |x+12|$$

$$\frac{2x+3e^{3x}}{x^2+e^{3x}} \rightsquigarrow \ln |x^2+e^{3x}|$$

$$\frac{3x+e^{2x}}{3x^2+e^{2x}} = \frac{1}{2} \frac{\overbrace{2(3x^2+e^{2x})}^{u'(x)}}{\underbrace{3x^2+e^{2x}}_{u(x)}} \rightsquigarrow \frac{1}{2} \ln |3x^2+e^{2x}|$$

À Savoir

$$\begin{array}{lll} \text{fonction} & \rightsquigarrow & \text{primitive} \\ u'(x) e^{u(x)} & \rightsquigarrow & e^{u(x)} \end{array}$$

$$e^{x+12} \rightsquigarrow e^{x+12}$$

$$(2x + 3e^{3x}) e^{x^2+e^{3x}} \rightsquigarrow e^{x^2+e^{3x}}$$

$$(3x + e^{2x}) e^{3x^2+e^{2x}} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{2(3x^2 + e^{2x})}_{u'(x)} \right) e^{\underbrace{3x^2 + e^{2x}}_{u(x)}} \rightsquigarrow \frac{1}{2} e^{3x^2+e^{2x}}$$

À Savoir

Si la fonction est sous forme d'un **produit** $u'(x)v(x)$, on essaiera d'appliquer la formule d'intégration par parties.