

# II - Dénombrément

## Définition 1 - Ensembles disjoints

$E$  et  $F$  sont des ensembles *disjoints* si  $E \cap F = \emptyset$ .

## Définition 2 - Complémentaire

Si  $E$  est un ensemble et  $F$  est une partie de  $E$ , le *complémentaire* de  $F$ , noté  $\overline{F}$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  qui ne sont pas dans  $F$  :  $\overline{F} = E \setminus F = \{x \in E ; x \notin F\}$ .

Dans la suite,  $E$  désigne un ensemble de cardinal  $n$  et  $F$  un ensemble de cardinal  $p$  au sens des définitions suivantes.

## I - Ensembles finis

### I.1 - Définitions

#### Définition 3 - Ensemble fini

L'ensemble  $E$  est un *ensemble fini* si  $E = \emptyset$  ou s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et une application bijective  $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow E$ . Sinon,  $E$  est un ensemble *infini*.

#### Exemple 1

- $\llbracket 1, 5 \rrbracket$  est en bijection avec  $\llbracket 1, 5 \rrbracket$  donc c'est un ensemble fini.
- $f : \llbracket 1, 8 \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, 7 \rrbracket, x \mapsto x - 1$  est bijective. Ainsi,  $\llbracket 0, 7 \rrbracket$  est un ensemble fini.
- Plus généralement, soient  $n, m$  deux entiers tels que  $n \leq m$ . Les ensembles  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\llbracket n, m \rrbracket$  sont des ensembles finis.
- Comme la composée de deux bijections est une bijection,

si  $E$  est un ensemble fini et  $F$  est en bijection avec  $E$ , alors  $F$  est un ensemble fini.

#### Lemme 1

Soient  $p, q \in \mathbb{N}^*$ . Il existe une bijection de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, q \rrbracket$  si et seulement si  $p = q$ .

#### Définition 4 - Cardinal

Soient  $E$  un ensemble non vide et  $p, q \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $E$  est en bijection avec  $\llbracket 1, p \rrbracket$  et  $\llbracket 1, q \rrbracket$ . Alors,  $p = q$ . Cette valeur commune est le *cardinal* de  $E$  et est notée  $|E|$ . Par convention,  $|\emptyset| = 0$ .

#### Exemple 2

- On peut associer à chaque lettre de l'alphabet latin  $\mathcal{A} = \{a, b, \dots, z\}$  son rang dans l'alphabet. Ainsi,  $|\mathcal{A}| = 26$ .
- Soient  $n, m \in \mathbb{N}^*$  tels que  $n < m$ . Alors, l'application  $\varphi : x \mapsto x - n + 1$  réalise une bijection de  $\llbracket n, m \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, m - n + 1 \rrbracket$ . Ainsi,  $|\llbracket n, m \rrbracket| = m - n + 1$ .

### I.2 - Sous-ensembles et cardinaux

#### Lemme 2

Si  $x \in E$ , alors  $E \setminus \{x\}$  est un ensemble fini et  $|E \setminus \{x\}| = |E| - 1$ .

**Exemple 3**

Si  $\mathcal{A} = \{a, \dots, z\}$  est l'ensemble des lettres de l'alphabet, alors  $|\mathcal{A} \setminus \{z\}| = 25$ .

**Théorème 1 - Sous-ensemble**

Si  $F \subset E$ , alors  $F$  est un ensemble fini et  $|F| \leq |E|$ . De plus,  $|F| = |E|$  si et seulement si  $F = E$ .

**Exemple 4**

Supposons par l'absurde que  $\mathbb{N}$  soit de cardinal fini. Comme l'application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ ,  $x \mapsto 2x$  est une bijection, alors  $\mathbb{N}$  et  $2\mathbb{N}$  sont de même cardinal.

Or,  $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$  et  $2\mathbb{N} \neq \mathbb{N}$ . On obtient ainsi une contradiction. Finalement,  $\mathbb{N}$  est un ensemble infini.

**II - Dénombrement****II.1 - Produits cartésiens****Proposition 1 - Produit cartésien**

$E \times F$  est un ensemble fini et  $|E \times F| = |E| \cdot |F|$ . Plus généralement, si  $E_1, \dots, E_n$  sont des ensembles finis, alors

$$|E_1 \times \dots \times E_n| = |E_1| \times \dots \times |E_n|.$$

**Exemple 5**

- On souhaite dénombrer l'ensemble  $\mathcal{M}$  des mots de 4 lettres construits avec les 26 lettres de l'alphabet latin. Un mot de 4 lettres est un élément de l'ensemble  $\mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ . Ainsi, le nombre de mots de 4 lettres est égal à  $|\mathcal{M}| = 26^4$ .
- Soit  $U$  une urne contenant des boules numérotées de 1 à  $n$ .

On tire, **successivement et avec remise**,  $p$  boules dans l'urne et on note successivement les numéros obtenus.

Un tirage correspond ainsi à une suite  $(a_1, \dots, a_p)$  de numéros dont chacun appartient à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Il y a donc  $n^p$  tirages distincts pouvant être obtenus.

**II.2 - Réunions****Proposition 2 - Union disjointe**

Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles disjoints, alors  $E \cup F$  est fini et  $|E \cup F| = |E| + |F|$ .

**Corollaire 2 - Cardinal du complémentaire**

Si  $A$  est une partie de  $E$ , alors  $|\overline{A}| = |E| - |A|$ .

**Exemple 6**

On souhaite dénombrer l'ensemble  $\mathcal{M}_{q,z}$  des mots de 4 lettres construits avec les 26 lettres de l'alphabet latin et qui contiennent une des lettres  $q$  ou  $z$ .

On s'intéresse au complémentaire  $\overline{\mathcal{M}_{q,z}}$  de cet ensemble qui est constitué des mots qui ne contiennent ni la lettre  $q$  ni la lettre  $z$ . En notant  $\mathcal{B} = \mathcal{A} \setminus \{q, z\}$ , alors  $\overline{\mathcal{M}_{q,z}} = \mathcal{B}^4$ . Ainsi,  $|\overline{\mathcal{M}_{q,z}}| = 24^4$ . Finalement,  $|\mathcal{M}_{q,z}| = 26^4 - 24^4$ .

**Définition 5 - Partition**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une famille d'ensembles de  $E$ . La famille  $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une partition de  $E$  si

- $\bigcup_{k=1}^n A_k = E$ ,
- $\forall 1 \leq i \neq j \leq n, A_i \cap A_j = \emptyset$ .

**Proposition 3**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A_k)_{k \in [1, n]}$  des ensembles deux à deux disjoints.  
Alors,  $\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n |A_k|$ .

**Exemple 7**

On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des mots de  $\mathcal{M}$  qui contiennent exactement une fois la lettre  $a$ . Notons  $\mathcal{R}_i$  l'ensemble des mots de  $\mathcal{R}$  où le  $a$  est en  $i^{\text{e}}$  position. Alors,  $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4)$  forme une partition de  $\mathcal{R}$ . De plus,  $\mathcal{R}_1 = \{a\} \times (\mathcal{A} \setminus \{a\})^3$ . Ainsi,  $|\mathcal{R}_1| = 25^3$ . On calcule de même  $|\mathcal{R}_2| = |\mathcal{R}_3| = |\mathcal{R}_4| = 25^3$ . Finalement,  $|\mathcal{R}| = 4 \times 25^3$ .

On peut également utiliser une méthode plus descriptive :

- soit la lettre  $a$  est située en première position. Il y a  $1 \times 25^3$  tels mots ;
- soit la lettre  $a$  est située en deuxième position. Il y a  $25 \times 1 \times 25^2$  tels mots ;
- soit la lettre  $a$  est située troisième position. Il y a  $25^2 \times 1 \times 25$  tels mots ;
- soit la lettre  $a$  est située en quatrième position. Il y a  $25^3 \times 1$  tels mots.

Finalement, l'ensemble des mots recherché est égal à  $4 \times 25^3$ .

**Proposition 4 - Réunion**

Soient  $A, B \subset E$ . Alors,  $A \cup B$  est un ensemble fini et

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

**Exemple 8**

On souhaite dénombrer l'ensemble  $\mathcal{M}_a$  des mots de 2 lettres contenant la lettre  $a$ .

On note  $A_1$  l'ensemble des mots contenant la lettre  $a$  en première position et  $A_2$  l'ensemble des mots contenant la lettre  $a$  en seconde position.

Alors,  $A_1 \cap A_2 = \{aa\}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_a| &= |A_1 \cup A_2| \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \\ &= 1 \times 26 + 26 \times 1 - 1 \\ &= 51. \end{aligned}$$

**Proposition 5 - Formule du crible / de Poincaré (H.P.)**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A_i)_{i \in [1, n]}$  une famille de parties de  $E$ . Généraliser la formule précédente pour calculer  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$  puis  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ .

Plus généralement, on peut montrer que

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right|.$$

**II.3 - Compter les applications****Proposition 6 - Applications**

L'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$  est un ensemble fini de cardinal  $|F|^{|E|}$ .

**Applications & Tirages**

- Soit  $U$  une urne contenant des boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire, **successivement et avec remise**,  $p$  boules dans l'urne et on note successivement les numéros obtenus. Combien de résultats peut-on ainsi obtenir ?
  - ★ au premier tirage, on associe le numéro  $n_1$  de la première boule tirée ;
  - ★ au deuxième tirage, on associe le numéro  $n_2$  de la deuxième boule tirée ;

★ ...;

★ au  $p^{\text{e}}$  tirage, on associe le numéro  $n_p$  de la  $p^{\text{e}}$  boule tirée.

Ainsi, un tirage correspond à une application de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et il y a donc  $p^n$  tirages possibles.

- En particulier, le nombre d'applications de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vaut  $n^n$ .

### Corollaire 3

À chaque partie  $F$  de  $E$  correspond de manière unique une application de  $F$  dans  $\{0, 1\}$ , appelée *fonction indicatrice* de  $F$ , définie par

$$\mathbb{1}_F : F \rightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, le nombre de parties de  $E$  est un ensemble fini de cardinal  $2^{|E|}$ .

## II.4 - Arrangements

### Définition 6 - Arrangements

Un *arrangement* de longueur  $p$  d'éléments de  $E$  est une liste de longueur  $p$  constituée d'éléments de  $E$  deux à deux distincts. On note  $A_n^p$  le nombre d'arrangements de  $E$  de longueur  $p$ .

### Proposition 7

Pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$ ,

$$A_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Arrangements & Tirages

Soit  $U$  une urne contenant des boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire, **successivement et sans remise**,  $p$  boules dans l'urne et on note successivement les numéros obtenus. Combien de résultats peut-on ainsi obtenir ?

Si  $p > n$ , comme les tirages s'effectuent sans remise, on ne peut pas tirer successivement  $p$  boules et il y a donc 0 résultat.

Si  $p \leq n$ .

- Au premier tirage, on obtient un numéro  $n_1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  ;
- au deuxième tirage, on obtient un numéro  $n_2 \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{n_1\}$  ;
- ...;
- au  $p^{\text{e}}$  tirage, on associe un numéro  $n_p \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{n_1, \dots, n_{p-1}\}$ .

Comme les tirages s'effectuent sans remise, les numéros  $n_1, \dots, n_p$  sont deux à deux distincts. Ainsi, à chaque résultat, on associe un  $p$ -arrangement  $(n_1, \dots, n_p)$ .

Le nombre de résultats possibles est donc égal à  $n(n-1) \dots (n-p+1)$ .

### Théorème 4 - Arrangements & Injections

Soient  $E$  un ensemble de cardinal  $p$  et  $F$  un ensemble de cardinal  $n$ .

- Il y a  $A_n^p$  injections de  $E$  dans  $F$ .
- Si  $p = n$ , il y a  $n!$  bijections de  $E$  dans  $F$ . Les bijections de  $E$  sont appelées des *permutations*.

### Exemple 9 - Anagrammes

Un anagramme est un mot obtenu en permutant les lettres d'un mot de départ. Ainsi, le nombre d'anagrammes de MATHS est égal à  $5!$ .

## II.5 - Combinaisons

### Théorème 5 - Lemme des bergers

Soient  $p$  un entier naturel non nul,  $E$  et  $F$  deux ensembles finis et  $f : E \rightarrow F$ . On suppose que pour tout  $y \in F$ ,  $|f^{-1}(\{y\})| = p$ . Alors,  $|E| = p|F|$ .

### Définition 7 - Combinaisons

Soient  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et  $p$  un entier naturel. Une *combinaison* de  $p$  éléments de  $E$  est une partie de  $E$  de cardinal  $p$ . On note  $\binom{n}{p}$  le nombre de combinaisons de  $p$  éléments de  $E$ .

### Proposition 8

Pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$ .

### Combinaisons & Tirages

Soit  $U$  une urne contenant des boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire **simultanément**  $p$  boules dans l'urne et on note les numéros obtenus. Combien de résultats peut-on ainsi obtenir ?

Tout tirage contient au plus  $n$  boules. Ainsi, si  $p > n$ , le nombre de résultats possible est 0.

Si  $p \leq n$ , un tirage revient à obtenir une partie  $\{n_1, \dots, n_p\}$  à  $p$  éléments de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$  des numéros des boules. Ainsi, il y a  $\binom{n}{p}$  résultats possibles.

### Exemple 10 - Anagrammes

Déterminons le nombre d'anagrammes du mot BISONRAVI.

Le mot BISONRAVI contient 9 lettres. On constate que les lettres sont deux à deux distinctes, à l'exception du I qui est présent 2 fois. On choisit :

- la position des 2 lettres I :  $\binom{9}{2}$  choix ;

- la position de la lettre B parmi les positions libres : 7 choix ;
- la position de la lettre S parmi les positions libres : 6 choix ;
- la position de la lettre O parmi les positions libres : 5 choix ;
- la position de la lettre N parmi les positions libres : 4 choix ;
- la position de la lettre R parmi les positions libres : 3 choix ;
- la position de la lettre A parmi les positions libres : 2 choix ;
- la position de la lettre V parmi les positions libres : 1 choix.

Finalement, il y a  $\binom{9}{2}7! = \frac{9!}{2!}$  anagrammes possibles.

### Théorème 6 - Relations sur les coefficients binomiaux

$$(i). \forall n, p \in \mathbb{N}, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

$$(ii). \text{Formule du capitaine. } \forall n, p \in \mathbb{N}^*, p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

$$(iii). \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

$$(iv). \text{Triangle de Pascal. } \forall n, p \in \mathbb{N}^*, \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

$$(v). \text{Binôme de Newton.}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, (x+y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p y^{n-p}.$$