T.D. X - Variables aléatoires à densité

I - Densités

Exercice 1. (⚙) Soit $a > 0$ et f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2a^2} & \text{si } t \in [0, 2a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est une densité de probabilité.

Exercice 2. (⚙) Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

On admettra que pour tout $A \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1$.

Exercice 3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f_n définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} nt^{n-1} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f_n est une densité de probabilité.

Exercice 4. Soit $a \in]0, 1]$ et f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a^2} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant a \\ \frac{2a-t}{a^2} & \text{si } a < t \leqslant 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est une densité de probabilité.

Exercice 5. (➶) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} k\frac{t}{1+t} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la valeur de k pour laquelle f est une fonction de densité.

On admettra que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t}\, dt = 1 - \ln(2)$.

II - Fonctions de répartition, Espérances, Variances

Exercice 6. (⚙) Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit T une variable aléatoire de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition de T.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t/2} - e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

2. Si Y est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a > 0$, rappeler une densité et l'espérance de Y. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, e^{-at}\, dt$.

3. En déduire l'espérance de X.

Exercice 8. (➶) Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition G de X.

2. Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Exercice 9. Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2a^2} & \text{si } t \in [0, 2a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer $\mathbf{E}[X]$.

2. Déterminer $\mathbf{E}\left[X^2\right]$ et en déduire $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 10. Soit $a \in]0, 1]$ et X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a^2} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant a \\ \frac{2a-t}{a^2} & \text{si } a < t \leqslant 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer $\mathbf{E}[X]$.

2. Déterminer $\mathbf{E}\left[X^2\right]$ et en déduire $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 11. Soit a un réel et f la fonction définie pour tout t réel par

$$f(t) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{2-t} & \text{si } t \geqslant 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. a) Déterminer la valeur de a pour laquelle f est une densité de probabilité.

b) Représenter graphiquement f.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Représenter graphiquement la fonction F.

3. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $\mathbf{P}([X \leqslant 3])$.

b) $\mathbf{P}([1 < X < 2])$.

c) $\mathbf{P}([0 < X < 3])$.

d) $\mathbf{P}([X \geqslant 4])$.

4. Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

a) Rappeler la formule (avec une intégrale) et la valeur de $\mathbf{E}[Y]$.

b) On pose $Z = Y + 2$. Déterminer la fonction de répartition puis une densité de Z.

c) En déduire que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 12. Soit a un réel et f la fonction définie pour tout t réel par $f(t) = \begin{cases} a\,\mathrm{e}^{3-t} & \text{si } t \geqslant 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. a) Déterminer la valeur de a pour laquelle f est une densité de probabilité.

b) Représenter graphiquement f.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Représenter graphiquement la fonction F.

3. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $\mathbf{P}([X \leqslant 3])$.

b) $\mathbf{P}([1 < X < 2])$.

c) $\mathbf{P}([0 < X < 5])$.

d) $\mathbf{P}([X \geqslant 4])$.

4. Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

a) Rappeler la formule (avec une intégrale) et la valeur de $\mathbf{E}[Y]$.

b) On pose $Z = Y + 3$. Déterminer une fonction de répartition puis une densité de Z.

c) En déduire que X admet une espérance et la calculer.

III - Transformation de variables aléatoires

Exercice 13. Soit $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0, 1])$. Déterminer la fonction de répartition, une densité, puis identifier éventuellement la loi des variables aléatoires suivantes :

1. $X = 3U$.

2. $Y = U + 1$.

3. $Z = \frac{1}{2}X + 1$.

4. $W = X^2$.

5. $H = \ln(X + 1)$.

6. $E = -\ln(X + 1)$.

Exercice 14. Soit $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. Déterminer la fonction de répartition, une densité, puis identifier éventuellement la loi des variables aléatoires suivantes :

1. $X = 4U$.

2. $Y = U + 2$.

3. $Z = \frac{1}{2}X + 1$.

4. $W = X^2$.

5. $H = \ln(X+1)$.

6. $E = -\ln(X+1)$.

Exercice 15. Soit n un entier naturel non nul et f_n définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} nt^{n-1} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que f_n est une densité de probabilité et on note X_n est une variable aléatoire de densité f_n.

1. Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n.

2. Déterminer $\mathbf{E}[X_n]$.

On pose $Y_n = -\ln(X_n)$.

3. Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n.

4. Reconnaître la loi de Y_n.

5. En déduire $\mathbf{E}[Y_n]$ et $\mathbf{V}(Y_n)$.

Exercice 16. Soit $a \geqslant 0$ et f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 2\,\mathrm{e}^{2a}\,\mathrm{e}^{-2t} & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que f est une densité de probabilité et on considère une variable aléatoire X de densité f. On pose $Y = X - a$.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.

2. Déterminer la fonction de répartition G de Y.

3. Reconnaître la loi de Y, en déduire son espérance et sa variance.

4. Déterminer l'espérance et la variance de X.

IV - Lois usuelles

Exercice 17. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(5,4)$. En utilisant la table de la loi normale, calculer

1. $\mathbf{P}([X \leqslant 2])$.

2. $\mathbf{P}([X > 2{,}51])$.

3. $\mathbf{P}([Y < 1])$.

4. $\mathbf{P}([3 < Y \leqslant 10])$.

Exercice 18. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(2,9)$. En utilisant la table de la loi normale, calculer

1. $\mathbf{P}([X \leqslant 2{,}5])$.

2. $\mathbf{P}([X > 1{,}49])$.

3. $\mathbf{P}([Y < 1])$.

4. $\mathbf{P}([3 < Y \leqslant 6])$.

Exercice 19. Un archer lance deux flèches en direction d'une cible de rayon d'un mètre. On suppose qu'il atteint systématiquement la cible et que ses lancers sont indépendants. Pour tout $i \in \{1,2\}$, on note R_i la variable aléatoire égale à la distance (en mètres) de la flèche numéro i au centre de la cible et on suppose que $R_i \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. On note également $R = \min\{R_1, R_2\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([R > x]) = \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x])$.

2. En déduire, pour tout x réel, la fonction de répartition F de R.

3. Calculer la probabilité que la flèche la mieux lancée par l'archer soit située à moins de 50cm de la cible.

Exercice 20. Un appareil électronique utilise deux piles dont les durées de vie (en années) respectives sont T_1 et T_2. On suppose que T_1 et T_2 sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre 1. Pour le fonctionnement, une seule pile suffit et l'appareil cesse donc de fonctionner au bout d'un temps $T = \max\{T_1, T_2\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}([T_1 \leqslant x] \cap [T_2 \leqslant x])$.

2. En déduire, pour tout x réel, la fonction de répartition F de T.

3. Calculer la probabilité que l'appareil fonctionne, en excluant toute autre panne, durant au moins 6 mois.