

# II - Calcul matriciel

## I - Matrices

### I.1 - Définition

#### Définition 1 - Matrices

Soit  $n, p$  deux entiers naturels non nuls.

- Une *matrice* de *taille*  $(n, p)$  est un tableau de nombres réels constitué de  $n$  lignes et de  $p$  colonnes.
- Le *coefficient* d'indice  $(i, j)$  d'une matrice est le coefficient situé à la  $i^{\text{e}}$  ligne et  $j^{\text{e}}$  colonne.
- L'ensemble des matrices de réels à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est noté  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On note généralement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

#### Exemple 1 - Matrices

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ .
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ .

#### Définition 2 - Matrices lignes / colonnes

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

- Si  $n = 1$ , alors  $A$  est une *matrice ligne*.
- Si  $p = 1$ , alors  $A$  est une *matrice colonne*.

#### Exemple 2

- Les matrices suivantes sont des matrices lignes :

$$(1 \quad -1), \left(\frac{1}{2} \quad 3 \quad -\frac{2}{3}\right).$$

- Les matrices suivantes sont des matrices colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

#### Définition 3 - Égalité entre matrices

Deux matrices  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  sont *égales* si elles ont même taille et si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $a_{i,j} = b_{i,j}$ .

### I.2 - Opérations

#### Définition 4 - Somme, Multiplication par un réel

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- L'*addition* de matrices de mêmes tailles est obtenue en additionnant les éléments de mêmes indices. Ainsi, la matrice  $A + B$  est la matrice de taille  $(n, p)$  et de coefficients  $(c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  définis par

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

- La *multiplication* d'une matrice par un réel est obtenue en multipliant chacun des coefficients de la matrice par ce

réel. Ainsi, la matrice  $\alpha A$  est la matrice de taille  $(n, p)$  et de coefficients  $(d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  définis par

$$d_{i,j} = \alpha a_{i,j}.$$

### Exemple 3

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 3 & -1 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

### Définition 5 - Matrice nulle

La matrice de taille  $(n, p)$  dont tous les coefficients sont nuls est la *matrice nulle*. Elle est notée  $0_{n,p}$ .

### Proposition 1 - Propriétés de l'addition et de la multiplication par un réel

Soit  $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- *Commutativité.*  $A + B = B + A$ .
- *Associativité.*  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ .
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ .
- $A + (-1)A = 0_{n,p}$ .

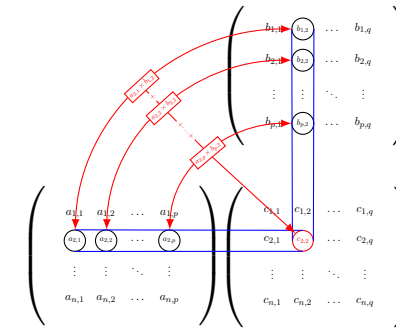
### Définition 6 - Produit de matrices de tailles compatibles

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ . La matrice  $C = A \times B$  est la matrice de taille  $(n, q)$  dont le coefficient d'indice  $(i, j)$  est donné par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

### Exemple 4 - Représentation du produit matriciel

Pour effectuer un produit matriciel on représente souvent les matrices sur deux étages :



### Exemple 5 - Calculs de produits

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y + z \\ 3x - 2y + z \end{pmatrix}.$
- On considère trois suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dé-

finies par  $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ .

En notant  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , alors

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n.$$

### Proposition 2 - Propriétés du produit matriciel

Soit  $A, B, C$  trois matrices dont les tailles sont compatibles et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- *Associativité.*  $(AB)C = A(BC)$ .
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ .
- *Distributivité.*  
 $(A + B)C = AC + BC$  et  $A(B + C) = AB + AC$ .

## II - Matrices carrées

### Définition 7 - Matrices carrées

Une *matrice carrée*  $M$  d'ordre  $p$  est une matrice dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes est égal à  $p$ . L'ensemble des matrices carrées d'ordre  $p$  est noté  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

### Exemple 6 - Matrices carrées

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

### Définition 8 - Triangulaires, Diagonales, Identité

- Une matrice est *triangulaire supérieure* si les coefficients en dessous de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *triangulaire inférieure* si les coefficients au dessus de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *diagonale* si les coefficients en dehors de sa diagonale sont nuls.
- La matrice *identité* est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. La matrice identité d'ordre  $p$  est notée  $I_p$ .
- La matrice *nulle* est la matrice dont tous les éléments valent 0. La matrice nulle d'ordre  $p$  est notée  $0_p$ .

### Exemple 7

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  est diagonale.
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice identité d'ordre 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice identité d'ordre 3.

### III - Opérations sur les matrices carrées

#### Proposition 3

Si  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées d'ordre  $p$ , alors

- $A+B$  et  $AB$  sont bien définies et appartiennent à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- $AI_p = I_p A = A$ .
- $A0_p = 0_p A = 0_p$ .

#### Exemple 8

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ .

- $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 10 & 10 & -2 \end{pmatrix}$ .
- $AB = \begin{pmatrix} 2 & 60 & 16 \\ 13 & 20 & -1 \\ -13 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ .
- $BA = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 5 \\ -5 & -19 & -3 \\ 0 & 87 & 44 \end{pmatrix}$ .

- $AI_3 = A =$
- $I_3 A = A$ .

### IV - Calculs de puissances

#### Exemple 9 - Pourquoi calculer des puissances de matrices ?

On considère les suites définies par  $x_0 = y_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n \end{cases}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Alors,

$$\begin{aligned} U_1 &= A \times U_0 \\ U_2 &= A \times U_1 \\ &= \underbrace{A \times A}_{2 \text{ facteurs}} \times U_0 \\ U_3 &= A \times U_2 \\ &= A \times A \times U_1 \\ &= \underbrace{A \times A \times A}_{3 \text{ facteurs}} U_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

#### Définition 9 - Puissance d'une matrice

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $p$  et  $n$  un entier naturel. Alors,

- $A^0 = I_p$ .
- $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$ .

## Exemple 10

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Alors,
  - ★  $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - ★  $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .
  - ★  $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .
  - ★  $A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ .
- Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors,
  - ★  $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - ★  $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
  - ★  $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - ★  $A^3 = A \times A^2 = A \times I_2 = A$ .

## IV.1 - Matrices diagonales

## Proposition 4 - Puissance d'une matrice diagonale

Soit  $D$  une matrice diagonale d'ordre  $p$  et  $n$  un entier naturel. La matrice  $D^n$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de  $D$  élevés à la puissance  $n$ .

## Exemple 11 - Puissances &amp; Diagonales ⚙️

Soit  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ . Cette propriété se prouve par récurrence.

**Initialisation.** Pour  $n = 0$ , on a bien  $D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et

$$\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie à l'ordre  $n$ , c'est-à-dire  $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ . Alors,

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D^n \times D \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre  $n + 1$ .

**Conclusion.** Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

## IV.2 - Formule du binôme de Newton

On rappelle que les coefficients binomiaux s'obtiennent rapidement à l'aide du triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

Ce tableau correspond aux coefficients binomiaux suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} \binom{0}{0} & & & & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \end{array}$$

On obtient ainsi par exemple

$$\begin{array}{l} \bullet \binom{1}{1} = 1, \\ \bullet \binom{2}{1} = 2, \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \bullet \binom{4}{2} = 6, \\ \bullet \binom{5}{4} = 5. \end{array} \right.$$

### Proposition 5 - Coefficients binomiaux

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors,

$$\begin{array}{l} \bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \\ \bullet \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \\ \bullet \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{n(n-1)}{2}, \\ \bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \\ \bullet \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{array} \right.$$

### Théorème 1 - Formule du binôme de Newton

Soit  $a$  et  $b$  deux réels et  $n$  un entier naturel. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

### Exemple 12

- $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ .
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ .

### Définition 10 - Matrices qui commutent

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $p$ . Les matrices  $A$  et  $B$  *commutent* si  $AB = BA$ .

### Exemple 13 - Commutativité

- $I_2$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  commutent.

$$\bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix} \text{ ne commutent pas.}$$

### Théorème 2 - Formule du binôme de Newton

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $p$  qui commutent. Alors, pour tout  $n$  entier naturel,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

### Exemple 14 - Application de la formule du binôme

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- D'une part,  $A = I_2 + N$ .
- D'autre part,  $I_2 N = N I_2 = N$ . Ainsi,  $I_2$  et  $N$  commutent.
- On remarque ensuite que  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_2^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k, \text{ car } I_2^{n-k} = I_2 \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + 0_2 + \dots + 0_2 \\ &= I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$