VIII - Fonctions

I - Fonctions particulières

I.1 - Polynômes

À Savoir

Soit a, b, c des réels tels que $a \neq 0$.

* Si $f : x \mapsto ax + b$, alors f est un *polynôme de degré* 1 et de coefficient dominant égal à a. Il s'annule en $-\frac{b}{a}$.
* Si $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, alors f est un *polynôme de degré* 2 (appelé également *trinôme*) et de coefficient dominant égal à a. Le discriminant de f est égal à $\Delta = b^2 - 4ac$.
  * Si $\Delta > 0$, la fonction f possède deux racines distinctes :
  $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
  Alors, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.
  * Si $\Delta = 0$, la fonction f possède une unique racine :
  $$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

À Savoir

Si f est un polynôme et si a est une racine de f (c'est-à-dire $f(a) = 0$), alors il existe un polynôme $g(x)$ tel que
$$f(x) = (x - a)g(x).$$

I.2 - Valeur absolue

À Savoir

Soit a un réel. La *valeur absolue* de a, notée $|a|$, est égale à
$$\begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$
Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :
$$\lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty,$$
$$\lim_{x \to +\infty} |x| = +\infty.$$

À Savoir

Soit a, b deux réels. La valeur $|a - b|$ est la *distance* entre les réels a et b.

I.3 - Logarithme

À Savoir

La fonction *logarithme népérien*, notée ln, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 :
$$\forall\, x > 0,\ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t.$$
La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Ses valeurs remarquables sont :

$$\ln(1) = 0,$$
$$\ln(\mathrm{e}) = 1.$$

À Savoir

La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall\ x > 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

À Savoir

Pour tous a, $b > 0$,

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b),$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

I.4 - Exponentielle

À Savoir

La fonction *exponentielle*, notée exp, définie sur $\mathbb{R}$, est la fonction réciproque de la fonction logarithme. On note $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x,$$
$$\forall\ x > 0,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x.$$

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

Ses valeurs remarquables sont :

$$\mathrm{e}^0 = 1,$$
$$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}\,.$$

À Savoir

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x).$$

À Savoir

Pour tous a, $b \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b,$$
$$\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}.$$

II - Généralités

À Savoir

$*$ Si f est *croissante* sur I et x, $y \in I$. Alors,

$$x \leqslant y$$
$$\Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)$$

∗ Si f est *décroissante* sur I et $x, y \in I$. Alors,

$$x \leqslant y$$
$$\Rightarrow \ f(y) \leqslant f(x)$$

II.1 - Limites

À Savoir

∗ La *limite à droite* de f en a est la valeur que prend $f(x)$ lorsque x tend vers a tout en restant supérieur à a. On la note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

∗ La *limite à gauche* de f en a est la valeur que prend $f(x)$ lorsque x tend vers a tout en restant inférieur à a. On la note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

À Savoir

∗ La limite en $-\infty$ ou en $+\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

∗ La limite en $-\infty$ ou en $+\infty$ d'un quotient de polynômes est égale à la limite du quotient de leurs termes de plus haut degré.

À Savoir

Si la case indique ? ?, la limite est indéterminée. Il faut transformer l'expression (factorisation, expression conjuguée, croissances comparées,...) pour pouvoir la déterminer.

∗ **Multiplication** par une constante.

$\lim f =$	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	
$\lim kf =$	$k\ell$	$-\infty$	$+\infty$	si $k > 0$
	$k\ell$	$+\infty$	$-\infty$	si $k < 0$
	0	0	0	si $k = 0$

∗ **Addition** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim(f+g)$.

$\lim f$ \ $\lim g$	ℓ_1	$-\infty$	$+\infty$
ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	? ?
$+\infty$	$+\infty$	? ?	$+\infty$

∗ **Multiplication** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim(f \times g)$.

$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 > 0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	? ?	? ?
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ?	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ?	$-\infty$	$+\infty$

∗ **Quotient** de limites. Dans le tableau est indiquée la valeur de $\lim \frac{f}{g}$.

$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 > 0$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 < 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\ell_2 > 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+
0^-	0^+	0^-	? ?	? ?	0^+	0^-
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ?	? ?
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	? ?	? ?

À Savoir

Théorème des *croissances comparées*. Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0}(x^\alpha \ln(x)) = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$$

À Savoir

* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f.
* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une droite asymptote à la courbe représentative de f.
* Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

II.2 - Continuité

À Savoir

* La fonction f est *continue* au point a si
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$
* Si f, g sont continues en a et $k \in \mathbb{R}$, alors
  * $f + kg$ est continue en a,
  * $f \times g$ est continue en a,
  * $\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$,
  * $x \mapsto f(g(x))$ est continue en a si elle est définie.

À Savoir

Théorème des *valeurs intermédiaires*. Si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$, alors il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

À Savoir

Théorème de la *bijection monotone*. Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$, alors il existe un unique $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

À Savoir

Si f est continue et strictement croissante sur $[a,b]$, alors il existe une unique fonction h telle que

$$\forall\, y \in [f(a), f(b)],\ f(h(y)) = y$$
et
$$\forall\, x \in [a,b],\ h(f(x)) = x.$$

La fonction h est la *bijection réciproque* de f.

À Savoir

Algorithme de *dichotomie*. Soit f telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$. Pour trouver une valeur approchée à ε près d'un réel c tel que $f(c) = 0$, on procède itérativement comme suit :

* si $b - a \leqslant \varepsilon$, on renvoie la valeur a.
* sinon on pose $m = \frac{a+b}{2}$.
  * Si $f(a)f(m) \leqslant 0$, on recommence en remplaçant b par m.
  * Sinon on recommence en remplaçant a par m.

II.3 - Dérivabilité

À Savoir

Si f est une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormée, l'équation de la *tangente* à $\mathscr{C}_f$ au point a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

À Savoir

Soit I un intervalle de f.

- Si $\forall\, x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si $\forall\, x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.

À Savoir

Si f admet un *maximum* ou un *minimum* en a, alors $f'(a) = 0$.

II.4 - Convexité

À Savoir

La fonction f est *convexe* si sa courbe représentative se situe au-dessous de chacune de ses cordes.
Si f est deux fois dérivable :

- f est *convexe* si et seulement si $f'' \geqslant 0$.
- f est *concave* si et seulement si $f'' \leqslant 0$.

À Savoir

La courbe représentative de f admet un *point d'inflexion* en a si $f''(a) = 0$ et si f'' change de signe en a.