

IX - Intégrales généralisées

I - Intégrales des fonctions continues

Définition 1 - Intégrale sur $[a, +\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

- L'intégrale de f est *convergente* sur $[a, +\infty[$ si la fonction $F(y) = \int_a^y f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$.
- Si l'intégrale est convergente, on note

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f(t) dt.$$

- Si F n'admet pas de limite finie en $+\infty$, l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est *divergente*.

Exemple 1 - Sur $[a, +\infty[$

- **Étude de** $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$. Soit $y > 0$. Alors,

$$F(y) = \int_2^y \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_2^y = -\frac{1}{y} + \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = \frac{1}{2}$. Donc, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge et

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

- **Étude de** $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} dt$. Soit $y > 0$. Alors,

$$F(y) = \int_2^y \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_2^y = \ln(y) - \ln(2).$$

Ainsi, $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = +\infty$. Donc, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ diverge.

Définition 2 - Intégrale sur $] - \infty, a]$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $] - \infty, a]$.

- L'intégrale de f est *convergente* sur $] - \infty, a]$ si la fonction $F(y) = \int_y^a f(t) dt$ admet une limite finie en $-\infty$.
- Si l'intégrale est convergente, on note

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt = \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^a f(t) dt.$$

- Si F n'admet pas de limite finie en $-\infty$, l'intégrale de f sur $] - \infty, a]$ est *divergente*.

Exemple 2 - Sur $] - \infty, a]$

- **Étude de** $\int_{-\infty}^0 e^t dt$. Soit $y < 0$. Alors,

$$F(y) = \int_y^0 e^t dt = [e^t]_y^0 = e^0 - e^y.$$

Ainsi, $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = 1$. Donc, $\int_{-\infty}^0 e^t dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^0 e^t dt = 1.$$

- **Étude de** $\int_{-\infty}^{-1} e^{-t} dt$. Soit $y < -1$. Alors,

$$F(y) = \int_y^{-1} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_y^{-1} = -e^1 + e^{-y}.$$

Ainsi, $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = +\infty$. Donc, $\int_{-\infty}^0 e^{-t} dt$ diverge.

Définition 3 - Intégrale sur $] -\infty, +\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur \mathbb{R} .

- L'intégrale de f est *convergente* sur $] -\infty, +\infty[$ si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ sont convergentes.
- Si l'intégrale est convergente, on note

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

- Si l'une des intégrales $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ ou $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge, l'intégrale de f sur $] -\infty, +\infty[$ est *divergente*.

Exemple 3 - Sur $] -\infty, +\infty[$

- **Étude de** $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt$.

★ D'une part,

$$\int_y^0 t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_y^0 = -\frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{2} e^{-y^2}.$$

Ainsi, $\lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^0 t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}$. Donc, $\int_{-\infty}^0 t e^{-t^2} dt$

converge et

$$\int_{-\infty}^0 t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}.$$

★ D'autre part,

$$\int_0^y t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^y = -\frac{1}{2} e^{-y^2} + \frac{1}{2} e^0.$$

Ainsi, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$. Donc, $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

- **Étude de** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$.

★ D'une part,

$$F(y) = \int_y^0 e^t dt = [e^t]_y^0 = e^0 - e^y$$

Ainsi, $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = 1$. Donc, $\int_{-\infty}^0 e^t dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^0 e^t dt = 1.$$

★ D'autre part,

$$F(y) = \int_0^y e^t dt = [e^t]_0^y = e^y - e^0$$

Ainsi, $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = +\infty$. Donc, $\int_0^{+\infty} e^t dt$ diverge.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$ diverge.

II - Fonctions continues par morceaux

Définition 4 - Fonction continue par morceaux

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et f une fonction définie sur I . La fonction f est *continue sauf en un nombre fini de points* si

- f est continue en tout point de I , sauf en un nombre fini de points a_0, \dots, a_n ,
- f admet des limites finies à gauche et à droite en chaque point a_0, \dots, a_n .

Exemple 4

- Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, alors f est continue sur \mathbb{R} sauf en 0 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.

- Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, alors f est continue sur \mathbb{R} sauf en -1 et 1 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.

Définition 5 - Intégrales des fonctions continues par morceaux

Soit f une fonction continue sauf en un nombre fini de points sur I . Alors, l'intégrale de f , si elle converge, est égale à la somme

des intégrales de f sur chacun des intervalles sur lesquels elle est continue.

Exemple 5

En reprenant les définitions précédentes.

•

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt \\ &= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2} + \int_{-1}^1 0 dt + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \\ &= 1 + 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$