T.D. IX - Intégrales généralisées

I - Fonctions continues

Solution de l'exercice 1.

1. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-3}}{-3}\right]_1^x$$
$$= \frac{x^{-3}}{-3} - \frac{1}{-3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right).$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

2. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geqslant 2$,

$$\int_2^x \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int_2^x t^{-3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_2^x$$
$$= \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{2^{-2}}{-2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2x^2}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, alors $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}.$$

3. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geqslant 2$,

$$\int_2^x \frac{5}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int_2^x 5t^{-3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{5t^{-2}}{-2}\right]_2^x$$
$$= \frac{5x^{-2}}{-2} - \frac{5\times 2^{-2}}{-2} = \frac{5}{8} - \frac{5}{2x^2}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0$, alors $\int_2^{+\infty} \frac{5}{t^3}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_2^{+\infty} \frac{5}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{8}.$$

4. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x \frac{2}{t^4}\,\mathrm{d}t = \int_1^x 2t^{-4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2t^{-3}}{-3}\right]_1^x$$
$$= \frac{2x^{-3}}{-3} - \frac{2}{-3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3x^3}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^4}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

5. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-5t}}{-5}\right]_0^x = \frac{\mathrm{e}^{-5x}}{-5} - \frac{\mathrm{e}^{-5\times 0}}{-5}$$
$$= \frac{1}{5} - \frac{\mathrm{e}^{-5x}}{5}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-5x} = 0$, alors $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}.$$

6. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-3t}}{-3}\right]_1^x = \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{-3} - \frac{\mathrm{e}^{-3\times 1}}{-3}$$
$$= \frac{1}{3\,\mathrm{e}^3} - \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{3}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x} = 0$, alors $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3\,\mathrm{e}^3}.$$

7. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geqslant 2$,

$$\int_2^x 3\,\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3\,\mathrm{e}^{-5t}}{-5}\right]_2^x = \frac{3\,\mathrm{e}^{-5x}}{-5} - \frac{3\,\mathrm{e}^{-5\times 2}}{-5}$$
$$= \frac{3}{5\,\mathrm{e}^{10}} - \frac{3\,\mathrm{e}^{-5x}}{5}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-5x} = 0$, alors $\int_2^{+\infty} 3\,\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{5\,\mathrm{e}^{10}}.$$

8. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geqslant 3$,

$$\int_3^x 2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-2\,\mathrm{e}^{-t}\right]_3^x = -2\,\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{e}^{-3}$$
$$= \frac{2}{\mathrm{e}^3} - 2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, alors $\int_3^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_3^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\mathrm{e}^3}.$$

□

Solution de l'exercice 2.

1. D'après les primitives classiques, pour $x \leqslant 2$,

$$\int_x^2 \mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{3t}}{3}\right]_x^2 = \frac{\mathrm{e}^{3\times 2}}{3} - \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^6}{3} - \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}.$$

Comme $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{3x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^2 \mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^2 \mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^6}{3}.$$

2. D'après les primitives classiques, pour $x \leqslant -5$,

$$\int_x^{-5} 2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\left[\mathrm{e}^t\right]_x^{-5} = 2\left(\mathrm{e}^{-5} - \mathrm{e}^x\right).$$

Comme $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, alors $\int_{-\infty}^{-5} 2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{-5} 2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{e}^{-5}.$$

3. D'après les primitives classiques, pour $x \leqslant -1$,

$$\int_x^{-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{-1} = -\frac{1}{-1} - \left(-\frac{1}{x}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{x}.$$

Comme $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

4. On remarque que

$$\frac{1}{(1-t)^2} = (1-t)^{-2} = -\left[(-1)\times(1-t)^{-2}\right]$$

est de la forme $-u'(t)u(t)^{-2}$, où $u(t) = 1-t$. Ainsi, pour $x \leqslant 0$,

$$\int_x^0 \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-t}\right]_x^0 = 1 - \frac{1}{1-x}.$$

Comme $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. Comme $h(x) = \ln(u(x))$ où $u(x) = 1 + \mathrm{e}^x$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x$, alors

$$h'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

2. D'après la question précédente, h est une primitive de f. Ainsi, pour $x \leqslant 0$,

$$\begin{aligned}\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t &= [h(t)]_x^0 = h(0) - h(x)\\ &= \ln(1+\mathrm{e}^0) - \ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln(2) - \ln(1+\mathrm{e}^x).\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, alors $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln(1+0) = 0$.

Ainsi, $\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(2)$. Finalement, $\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(2).$$

□

II - Fonctions discontinues

Solution de l'exercice 4.

1. a) Soit $x < 5$. Comme f est nulle sur $]-\infty, x]$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

b) Soit $x \in]5, 10[$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 5[$, alors

$$\begin{aligned}F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^5 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_5^x f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^5 0\,\mathrm{d}t + \int_5^x \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + \left[\frac{t}{5}\right]_5^x = \frac{x}{5} - \frac{5}{5}\\ &= \frac{x-5}{5}.\end{aligned}$$

c) Soit $x > 10$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 5[$ et sur $]10, x[$, alors

$$\begin{aligned}F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^5 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_5^{10} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{10}^x f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^5 0\,\mathrm{d}t + \int_5^{10} \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t + \int_{10}^x 0\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + \left[\frac{t}{5}\right]_5^{10} + 0 = \frac{10}{5} - \frac{5}{5}\\ &= 1.\end{aligned}$$

d) D'après la question précédente, pour tout $x > 10$, $F(x) = 1$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

2. a) Soit $x < 5$. Comme f est nulle sur $]-\infty, x]$, alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

b) Soit $x \in]5, 10[$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 5[$, alors

$$\begin{aligned}G(x) &= \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{5} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{5}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{5} 0\,\mathrm{d}t + \int_{5}^{x} \frac{t}{5}\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + \left[\frac{t^2}{10}\right]_5^x = \frac{x^2}{10} - \frac{5^2}{10}\\ &= \frac{x^2-25}{10}.\end{aligned}$$

c) Soit $x > 10$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 5[$ et sur $]10, x[$, alors

$$\begin{aligned}G(x) &= \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{5} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{5}^{10} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{10}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{5} 0\,\mathrm{d}t + \int_{5}^{10} \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t + \int_{10}^{x} 0\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + \left[\frac{t^2}{10}\right]_5^{10} + 0 = \frac{10^2}{10} - \frac{5^2}{10}\\ &= 10 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2}.\end{aligned}$$

d) D'après la question précédente, pour tout $x > 10$, $G(x) = \frac{15}{2}$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{15}{2}$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{15}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. a) Soit $x < 2$. Comme f est nulle sur $]-\infty, x]$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

b) Soit $x \in]2, 4[$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 2[$, alors

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{2} 0\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{x} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + \left[\frac{t}{2}\right]_2^x = \frac{x}{2} - \frac{2}{2}\\ &= \frac{x-2}{2}.\end{aligned}$$

c) Soit $x > 4$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 2[$ et sur $]4, x[$, alors

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{4}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{2} 0\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{4} \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t + \int_{4}^{x} 0\,\mathrm{d}t\\ &= 0 + \left[\frac{t}{2}\right]_2^4 + 0 = \frac{4}{2} - \frac{2}{2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

d) D'après la question précédente, pour tout $x > 4$, $F(x) = 1$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

2. a) Soit $x < 2$. Comme f est nulle sur $]-\infty, x]$, alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

b) Soit $x \in]2,4[$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 2[$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{2} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{2} 0\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{x} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \left[\frac{t^2}{4}\right]_2^x = \frac{x^2}{4} - \frac{2^2}{4} \\ &= \frac{x^2-4}{4}. \end{aligned}$$

c) Soit $x > 4$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 2[$ et sur $]4, x[$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{2} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{4} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{4}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{2} 0\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{4} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \int_{4}^{x} 0\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \left[\frac{t^2}{4}\right]_2^4 + 0 = \frac{4^2}{4} - \frac{2^2}{4} \\ &= 4 - 1 = 3. \end{aligned}$$

d) D'après la question précédente, pour tout $x > 4$, $G(x) = 3$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 3$.
L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = 3.$$

□

Solution de l'exercice 6.

1. a) Soit $x < 0$. Comme f est nulle sur $]-\infty, x]$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

b) Soit $x > 0$. Comme f est nulle sur $]-\infty, x[$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \left[-\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x = -\mathrm{e}^{-2x} - \left(-\mathrm{e}^{-2\times 0}\right) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-2x}. \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x}$.
Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

2. a) Soit $x < 0$. Comme f est nulle sur $]-\infty, x]$, alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

b) Soit $x > 0$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} t(2\,\mathrm{e}^{-2t})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{x} t(2\,\mathrm{e}^{-2t})\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = 2\,\mathrm{e}^{-2t}$ soit $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-2t}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0, x]$ donc d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} G(x) &= \left[-t\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x - \int_0^x 1(-\mathrm{e}^{-2t})\,\mathrm{d}t \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-2x} - 0 + \left[-\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right]_0^x \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-2x} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} + \mathrm{e}^{-2\times 0}\,2 \\ &= \frac{1}{2} - \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}. \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $G(x) = \frac{1}{2} - x\,\mathrm{e}^{-2x} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}$.
D'après les croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x} = 0$ et d'après les propriétés de la fonction exponentielle, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$.
Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{1}{2}$.
L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. a) Soit $x < 0$. Comme f est nulle sur $]-\infty, x]$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

b) Soit $x > 0$. Comme f est nulle sur $]-\infty, x[$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = -\mathrm{e}^{-x} - \left(-\mathrm{e}^0\right) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
Comme $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

2. a) Soit $x < 0$. Comme f est nulle sur $]-\infty, x]$, alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

b) Soit $x > 0$. Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ soit $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0, x]$ donc d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} G(x) &= \left[-t\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x - \int_0^x 1\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-x} - 0 + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-0} \\ &= 1 - (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $G(x) = 1 - x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$.
D'après les croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ et d'après les propriétés de la fonction exponentielle, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.
Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. La fonction $g(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ est de la forme $-u(t)^{-1}$ où $u(t) = 1+t^2$, soit $u'(t) = 2t$.
Ainsi,

$$g'(t) = -(-1) \times (2t)(1+t^2)^{-1-1} = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

2. Soit $x \geqslant 0$. En utilisant la définition de la fonction f,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \left[-\frac{1}{1+t^2}\right]_0^x \\
&= -\frac{1}{1+x^2} - \left(-\frac{1}{1+0^2}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, pour tout $x > 0$,

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

D'après les limites classiques, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$. Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. Soit $A \geqslant 1$. D'après la définition de f,

$$\begin{aligned}
I(A) &= \int_{-\infty}^{A} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{1} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{A} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{1} \frac{0}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{A} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_{1}^{A} \frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On reconnaît une forme $u'(x)u(x)$ où $u(x) = \ln(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I(A) &= \left[\frac{\ln(x)^2}{2}\right]_1^A = \frac{\ln(A)^2}{2} - \frac{\ln(1)^2}{2} \\
&= \frac{\ln(A)^2}{2}.
\end{aligned}$$

2. Comme $\lim_{A\to+\infty} \ln(A)^2 = +\infty$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

3. Soit $A \geqslant 1$. D'après la définition de f,

$$\begin{aligned}
J(A) &= \int_{-\infty}^{A} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{1} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{A} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{1} \frac{0}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{A} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_{1}^{A} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$ soit $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, A]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
J(A) &= \left[\ln(x) \times \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln(A)}{A} - \left(-\frac{\ln(1)}{1}\right) + \int_1^A \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A \\
&= -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.
\end{aligned}$$

4. D'après les croissances comparées, $\lim_{A \to +\infty} \frac{\ln(A)}{A} = 0$. De plus, $\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A} = 0$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} \mathrm{d}x$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} \mathrm{d}x = 1.$$

□