

T.P. XI - Exercice d'annales

Solution de l'exercice 1. [BCE ESCP - 2016 - Exercice 4]

1. À l'issue du premier saut, la puce a sauté de 1, 2 ou 3 abscisses. Ainsi, la loi de A_1 est donnée par :

| k | 1 | 2 | 3 |
|-------------------------|-----------------|---------------|---------------|
| $\mathbf{P}([A_1 = k])$ | $= \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

En utilisant la description de la loi,

$$\mathbf{E}[A_1] = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

De même,

$$\mathbf{E}[A_1^2] = \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(A_1) &= \mathbf{E}[A_1^2] - \mathbf{E}[A_1]^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \frac{60}{16} - \frac{49}{16} = \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

2. a) À l'issue du premier saut, la puce saute de 1, 2 ou 3 unités. Comme le premier saut se situe soit à l'abscisse 1, soit à l'abscisse 2, soit à l'abscisse 3, alors

$$A_2(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

De plus, en utilisant le système complet d'événements $([A_1 = 1], [A_1 = 2], [A_1 = 3])$,

* Si $A_2 = 2$, alors la puce a effectué deux sauts de longueur 1. Ainsi, $\mathbf{P}([A_2 = 2]) = \frac{1}{4}$.

* Si $A_2 = 3$, alors soit la puce a effectué un saut de 1 puis un saut de 2 ; soit elle a effectué un saut de 2 puis un saut de 1. Ainsi,

$$\mathbf{P}([A_2 = 3]) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

* Si $A_2 = 4$, alors soit la puce a effectué un saut de 1 puis un saut de 3 ; soit elle a effectué deux sauts de 2 ; soit elle a effectué un saut de 3 puis un saut de 1. Ainsi,

$$\mathbf{P}([A_2 = 4]) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

* Si $A_2 = 5$, alors soit la puce a effectué un saut de 2 puis un saut de 3 ; soit elle a effectué un saut de 3 puis un saut de 2. Ainsi,

$$\mathbf{P}([A_2 = 5]) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

* Si $A_2 = 6$, alors la puce a effectué deux sauts de longueur 3. Ainsi, $\mathbf{P}([A_2 = 2]) = \frac{1}{16}$.

b) En utilisant la description de la loi précédente,

$$\mathbf{E}[A_2] = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4 \cdot 5}{16} + \frac{5}{8} + \frac{6}{16} = \frac{7}{2}.$$

3. a) Z_2 est égal au nombre de sauts de trois unités effectués lors des 2 premiers sauts. Ainsi, $Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

* Si $Z_2 = 2$, alors deux sauts de trois unités ont été effectués et $A_2 = 6$. Ainsi,

$$\mathbf{P}([Z_2 = 2] \cap [A_2 = 6]) = \mathbf{P}([Z_2 = 2]) = \frac{1}{16},$$

$$\mathbf{P}([Z_2 = 2] \cap [A_2 = k]) = 0, \forall k \neq 6.$$

* Si $Z_2 = 1$, alors un saut de trois unités a été effectué ; l'autre saut est alors égal à 1 ou 2 unités. De plus, le saut de trois unités peut

avoir été effectué au premier ou au deuxième instant. Ainsi,

$$\mathbf{P}([Z_2 = 1] \cap [A_2 = 4]) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}([Z_2 = 1] \cap [A_2 = 5]) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

* Si $Z_2 = 0$, les deux sauts effectués peuvent être d'une ou deux unités. Ainsi,

$$\mathbf{P}([Z_2 = 0] \cap [A_2 = 2]) = \mathbf{P}([A_2 = 2]) = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}([Z_2 = 0] \cap [A_2 = 3]) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}([Z_2 = 0] \cap [A_2 = 4]) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

On obtient ainsi la loi de couple suivante :

| $\begin{array}{c} z \\ \backslash \\ a \end{array}$ | 0 | 1 | 2 | $\mathbf{P}([A_2 = a])$ |
|---|----------------|---------------|----------------|-------------------------|
| 2 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 3 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{5}{16}$ |
| 5 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ |
| 6 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| $\mathbf{P}([Z_2 = z])$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | |

D'après la loi de Z_2 ,

$$\mathbf{E}[Z_2] = 0 \cdot \frac{9}{16} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

b) D'après la loi du couple (A_2, Z_2) ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[A_2 Z_2] &= 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{16} \\ &= \frac{4 \cdot 2 + 5 + 6}{8} = \frac{19}{8}. \end{aligned}$$

D'après la définition de la covariance,

$$\text{Cov}(A_2, Z_2) = \mathbf{E}[A_2 Z_2] - \mathbf{E}[A_2] \mathbf{E}[Z_2] = \frac{19}{8} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Comme $\text{Cov}(A_2, Z_2) \neq 0$, alors A_2 et Z_2 ne sont pas indépendantes.

4. Comme t prend la valeur 1 ou 2 avec probabilité $1/2$, la valeur 3 avec probabilité $1/4$ et la valeur 4 avec probabilité $1/4$, alors

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

A = np.zeros((1, 101))
for k in range(1, 102):
    t = rd.randint(1, 5)
    if t <= 2:
        A[0, k] = 1
    elif t == 3:
        A[0, k] = 2
    elif t == 4:
        A[0, k] = 3

print(A)
```

5. X_n compte le nombre de 1 lors d'une série de n sauts indépendants pour lesquels la probabilité d'obtenir 1 vaut $\frac{1}{2}$. Ainsi, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Y_n compte le nombre de 2 lors d'une série de n sauts indépendants pour lesquels la probabilité d'obtenir 2 vaut $\frac{1}{4}$. Ainsi, $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$. Z_n compte le nombre de 3 lors d'une série de n sauts indépendants pour lesquels la probabilité d'obtenir 3 vaut $\frac{1}{4}$. Ainsi, $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$. $X_n + Y_n$ compte le nombre de 1 ou de 2 lors d'une série de n sauts indépendants pour lesquels la probabilité d'obtenir 1 ou 2 vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Ainsi, $X_n + Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{3}{4})$.

6. a) Le nombre de sauts effectués lors des n premiers sauts vaut n . De plus, ces sauts sont de 1, 2 ou 3 unités. Ainsi, $X_n + Y_n + Z_n = n$. En utilisant cette relation ainsi que les propriétés de la covariance,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n) &= \text{Cov}(n - X_n - Y_n, X_n + Y_n) \\ &= \text{Cov}(n, X_n + Y_n) - \text{Cov}(X_n + Y_n, X_n + Y_n) \\ &= 0 - \mathbf{V}(X_n + Y_n) = -n \frac{3}{4} \left(1 - \frac{3}{4}\right) = -\frac{3n}{16}. \end{aligned}$$

b) D'après les propriétés de la variance,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X_n + Y_n) &= \mathbf{V}(X_n) + \mathbf{V}(Y_n) + 2\text{Cov}(X_n, Y_n) \\ \frac{3n}{16} &= \frac{n}{4} + \frac{3n}{16} + 2\text{Cov}(X_n, Y_n) \\ \text{Cov}(X_n, Y_n) &= -\frac{n}{8}.\end{aligned}$$

c) D'après la définition,

$$\begin{aligned}\rho(X_n, Y_n) &= \frac{\text{Cov}(X_n, Y_n)}{\sqrt{\mathbf{V}(X_n)}\sqrt{\mathbf{V}(Y_n)}} \\ &= -\frac{\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{n}{4}}\sqrt{\frac{3n}{16}}} \\ &= -\frac{\frac{n}{8}}{\frac{\sqrt{3n}}{2 \cdot 8}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

7. a) A_n est l'abscisse du point à l'instant n . Comme il y a X_n sauts de 1 unité, Y_n sauts de 2 unités et Z_n sauts de 3 unités, alors

$$A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n.$$

En utilisant la linéarité de l'espérance et les lois obtenues précédemment,

$$\mathbf{E}[A_n] = \mathbf{E}[X_n] + 2\mathbf{E}[Y_n] + 3\mathbf{E}[Z_n] = \frac{n}{2} + 2\frac{n}{4} + 3\frac{n}{4} = \frac{7n}{4}.$$

b) En utilisant les questions **6.a)** et **7.a)**,

$$\begin{aligned}A_n &= X_n + 2Y_n + 3(n - X_n - Y_n) \\ &= 3n - 2X_n - Y_n.\end{aligned}$$

D'après les propriétés de la variance,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(A_n) &= \mathbf{V}(3n - 2X_n - Y_n) = \mathbf{V}(2X_n + Y_n) = 4\mathbf{V}(X_n) + \mathbf{V}(Y_n) + 4\text{Cov}(X_n, Y_n) \\ &= 4\frac{n}{4} + \frac{3n}{4} - 4\frac{n}{8} \\ &= \frac{5n}{8}.\end{aligned}$$

Toujours d'après cette relation,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(A_n + 2X_n) &= \mathbf{V}(3n + Y_n) \\ \mathbf{V}(A_n) + 4\mathbf{V}(X_n) + 4\text{Cov}(A_n, X_n) &= \mathbf{V}(Y_n) \\ \frac{5n}{8} + 4\frac{n}{4} + 4\text{Cov}(A_n, X_n) &= \frac{3n}{4} \\ \text{Cov}(A_n, X_n) &= -\frac{7n}{32}.\end{aligned}$$

8. La commande `np.cumsum` permet d'effectuer les sommes des sauts successifs. Ainsi, on obtient le tracé de la position de la puce en fonction du temps. \square