

# T.D. IX - Variables aléatoires à densité

## I - Loix usuelles

**Solution de l'exercice 1.** Rappelons que

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}([3U \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[U \leq \frac{x}{3}\right]\right) \\ &= F_U\left(\frac{x}{3}\right). \end{aligned}$$

- \* Si  $\frac{x}{3} \leq 0$ , c'est-à-dire  $x \leq 0$ , alors  $F_X(x) = 0$ .
- \* Si  $0 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ , c'est-à-dire  $0 \leq x \leq 3$ , alors  $F_X(x) = \frac{x}{3}$ .
- \* Si  $\frac{x}{3} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 3$ , alors  $F_X(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{3} & \text{si } x \in [0, 3] \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

Une densité  $f_X$  de  $X$  est donnée par la dérivée de  $F_X$  en les points où  $F_X$  est dérivable, soit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x \in [0, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 3])$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leq x]) = \mathbf{P}([U + 1 \leq x]) = \mathbf{P}([U \leq x - 1]) \\ &= F_U(x - 1). \end{aligned}$$

- \* Si  $x - 1 \leq 0$ , c'est-à-dire  $x \leq 1$ , alors  $F_Y(x) = 0$ .
- \* Si  $0 \leq x - 1 \leq 1$ , c'est-à-dire  $1 \leq x \leq 2$ , alors  $F_Y(x) = x - 1$ .
- \* Si  $x - 1 \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 2$ , alors  $F_Y(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

Une densité  $f_Y$  de  $Y$  est donnée par la dérivée de  $F_Y$  en les points où  $F_Y$  est dérivable, soit

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 2])$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{2}X + 1 \leq x\right]\right) = \mathbf{P}([X \leq 2(x - 1)]) \\ &= F_U(2(x - 1)). \end{aligned}$$

- \* Si  $2(x - 1) \leq 0$ , c'est-à-dire  $x \leq 1$ , alors  $F_Z(x) = 0$ .
- \* Si  $0 \leq 2(x - 1) \leq 1$ , c'est-à-dire  $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ , alors  $F_Z(x) = 2(x - 1)$ .
- \* Si  $2(x - 1) \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq \frac{3}{2}$ , alors  $F_Z(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 2(x - 1) & \text{si } x \in [1, \frac{3}{2}] \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Une densité  $f_Z$  de  $Z$  est donnée par la dérivée de  $F_Z$  en les points où  $F_Z$  est dérivable, soit

$$f_Z(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [1, \frac{3}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que  $Z \hookrightarrow \mathcal{U} \left( \left[1, \frac{3}{2}\right] \right)$ .

4. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([W \leq x]) = \mathbf{P}([X^2 \leq x]) = \mathbf{P}([U^2 \leq x]).$$

- \* Si  $x \leq 0$ , alors  $[W^2 \leq x]$  est l'événement impossible et  $F_W(x) = 0$ .
- \* Si  $x \geq 0$ , comme la fonction racine carrée est croissante et bijective,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([U \leq \sqrt{x}]) = F_U(\sqrt{x}).$$

- ★ Si  $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$  c'est-à-dire  $0 \leq x \leq 1$ , alors  $F_W(x) = \sqrt{x}$ .
- ★ Si  $\sqrt{x} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 1$ , alors  $F_W(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Une densité  $f_W$  de  $W$  est donnée par la dérivée de  $F_W$  en les points où  $F_W$  est dérivable, soit

$$f_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_H(x) &= \mathbf{P}([H \leq x]) = \mathbf{P}([\ln(U) \leq x]) = \mathbf{P}([U \leq e^x]) \\ &= F_U(e^x). \end{aligned}$$

- \*  $e^x$  est une quantité toujours strictement positive.
- \* Si  $0 \leq e^x \leq 1$ , c'est-à-dire  $x \leq 0$ , alors  $F_H(x) = e^x$ .
- \* Si  $e^x \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 0$ , alors  $F_H(x) = 1$ .

Finalement,

$$F_H(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Une densité  $f_H$  de  $H$  est donnée par la dérivée de  $F_H$  en les points où  $F_H$  est dérivable, soit

$$f_H(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

6. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_E(x) &= \mathbf{P}([E \leq x]) = \mathbf{P}([-\ln(U) \leq x]) = \mathbf{P}([U \geq e^{-x}]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([U \leq e^{-x}]) \\ &= 1 - F_U(e^{-x}). \end{aligned}$$

- \*  $e^{-x}$  est une quantité toujours strictement positive.
- \* Si  $0 \leq e^{-x} \leq 1$ , c'est-à-dire  $x \geq 0$ , alors  $F_E(x) = 1 - e^{-x}$ .
- \* Si  $e^{-x} \geq 1$ , c'est-à-dire  $x \leq 0$ , alors  $F_E(x) = 0$ .

Finalement,

$$F_E(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité  $f_E$  de  $E$  est donnée par la dérivée de  $F_E$  en les points où  $F_E$  est dérivable, soit

$$f_E(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît  $E \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ . □

### Solution de l'exercice 2.

1.  $R(\omega)$  est le plus petit des réels  $R_1(\omega)$  et  $R_2(\omega)$ . Ainsi,  $R(\omega) > x$  si et seulement si  $R_1(\omega)$  et  $R_2(\omega)$  sont strictement supérieurs à  $x$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} [R > x] &= [R_1 > x] \cap [R_2 > x] \\ \mathbf{P}([R > x]) &= \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]). \end{aligned}$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En utilisant les propriétés de la fonction de répartition

et la question précédente,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \mathbf{P}([R \leq x]) = 1 - \mathbf{P}([R > x]) \\
 &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]), \text{ d'après 1.} \\
 &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x]) \times \mathbf{P}([R_2 > x]), \text{ par indépendance} \\
 &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x])^2, \text{ car } R_1 \text{ et } R_2 \text{ ont même loi} \\
 &= 1 - (1 - \mathbf{P}([R_1 \leq x]))^2.
 \end{aligned}$$

Comme  $R_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ , sa fonction de répartition satisfait :

$$\mathbf{P}([R_1 \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Ainsi,

\* Si  $x \leq 0$ , alors

$$F(x) = 1 - (1 - 0)^2 = 0.$$

\* Si  $0 \leq x \leq 1$ , alors

$$F(x) = 1 - (1 - x)^2 = x(2 - x).$$

\* Si  $x \geq 1$ , alors

$$F(x) = 1 - (1 - 1)^2 = 1.$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x(2 - x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**3.** On cherche la probabilité que le minimum des deux distances soit inférieur à 50cm, soit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([R \leq 0,5]) &= 1 - \mathbf{P}([R > 0,5]) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

□

**Solution de l'exercice 3.** On note  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$ .

**1.** Comme  $X$  est à valeurs positives, alors  $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Y = n) &= \mathbf{P}(\lfloor X \rfloor + 1 = n) = \mathbf{P}(\lfloor X \rfloor = n - 1) = \mathbf{P}(n - 1 \leq X < n) \\
 &= F_X(n) - F_X(n - 1) \\
 &= (1 - e^{-n}) - (1 - e^{-(n-1)}) \\
 &= e^{-(n-1)} - e^{-n} = e^{-(n-1)} \left( 1 - \frac{1}{e} \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - \frac{1}{e})$ .

**2.** On note  $F_Z$  la fonction de répartition de  $Z$ . Alors,

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(Z \leq x) = \mathbf{P}(\sqrt{X} \leq x).$$

\* Si  $x \leq 0$ , l'événement  $[\sqrt{Z} \leq x]$  est impossible et  $F_Z(x) = 0$ .

\* Si  $x \geq 0$ , comme la fonction carrée est croissante et bijective sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(X \leq x^2) = 1 - e^{-x^2}.$$

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Une densité de  $Z$  est donnée par

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Soit  $x > 0$ .

$$\int_{-\infty}^x t f_Z(t) dt = \int_0^x 2t^2 e^{-t^2} dt.$$

On pose  $u(t) = t$  et  $v'(t) = t e^{-t^2}$ , soit  $u'(t) = 1$  et  $v(t) = -\frac{e^{-t^2}}{2}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, x]$  donc d'après la formule

d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x t f_Z(t) dt &= \left[ t \times \left( -\frac{e^{-t^2}}{2} \right) \right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{dt} \\ &= \frac{x e^{-x^2}}{2} + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2} dt. \end{aligned}$$

Or,  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$  est une densité de la loi  $\mathcal{N}(0, 1/2)$  donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ . D'après la symétrie de cette densité, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ainsi,  $Z$  admet une espérance et

$$\mathbf{E}[Z] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De plus,  $\mathbf{E}[Z^2] = \mathbf{E}[X] = 1$ . Ainsi,

$$\mathbf{V}(Z) = \mathbf{E}[Z^2] - \mathbf{E}[Z]^2 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

**3.** On note  $F_W$  la fonction de répartition de  $W$ . Alors,

$$F_W(x) = \mathbf{P}(W \leq x) = \mathbf{P}(X^2 \leq x).$$

- \* Si  $x \leq 0$ , l'événement  $[X^2 \leq x]$  est impossible et  $F_W(x) = 0$ .
- \* Si  $x \geq 0$ , comme la fonction racine carrée est croissante et bijective sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$$F_W(x) = \mathbf{P}(X \leq \sqrt{x}) = 1 - e^{-\sqrt{x}}.$$

Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Une densité de  $W$  est donnée par

$$f_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

□

#### Solution de l'exercice 4.

**1.** La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème des croissances comparées,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^{-t^2/2} = 0$ , le théorème de comparaison aux intégrales de Riemann assure que  $\int_{-\infty}^x f(t) dt$  converge. Notons  $F$  la primitive de  $f$  qui s'annule en 0. D'après la question précédente,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x f(t) dt$  existe et est finie. Notons  $\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ . Alors,  $\Phi(x) = F(x) - \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t)$ . Ainsi, la fonction  $\Phi$  est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi'(x) = f(x).$$

Comme  $f > 0$ , la fonction  $\Phi$  est strictement croissante. De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0$  et, d'après la propriété de la loi normale,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

D'après le théorème de la bijection monotone,  $\Phi$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, 1[$ .

**2.** En utilisant la notation précédente, pour tout  $x > 0$ ,

$$g(x) = \mathbf{P}(-x < X < x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1.$$

Comme  $\Phi$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, 1[$ , alors  $g$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, 1[$  (car  $g(0) = 0$ ). Ainsi, il existe un unique réel  $t_0$  tel que  $g(t_0) = 0,95$ .

**3.** Comme  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8, 4)$ , alors  $\frac{X-8}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

**a)** En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X < 7,5) &= \mathbf{P}(X - 8 < -0,5) = \mathbf{P}\left(\frac{X-8}{2} < -0,25\right) \\ &= 1 - \Phi(0,25) \\ &\simeq 1 - 0,5987 \simeq 0,4013. \end{aligned}$$

**b)** En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > 8,5) &= \mathbf{P}(X - 8 > 0,5) = \mathbf{P}\left(\frac{X - 8}{2} > 0,25\right) \\ &= 1 - \Phi(0,25) \\ &\simeq 1 - 0,5987 \simeq 0,4013.\end{aligned}$$

**c)** En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(6,5 < X < 10) &= \mathbf{P}(-2,5 < X - 8 < 2) = \mathbf{P}\left(-1,25 < \frac{X - 8}{2} < 1\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1,25) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1,25)) \\ &\simeq 0,8413 - 1 + 0,8943 \\ &\simeq 0,7356.\end{aligned}$$

**d)** En utilisant la table de la loi normale,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X>5]}(X > 6) &= \frac{\mathbf{P}([X < 6] \cap [X > 5])}{\mathbf{P}(X > 5)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(5 < X < 6)}{\mathbf{P}(X > 5)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(-1,5 < \frac{X-8}{2} < -1)}{\mathbf{P}(\frac{X-8}{2} > -1,5)} \\ &= \frac{\Phi(-1) - \Phi(-1,5)}{1 - \Phi(-1,5)} \\ &= \frac{1 - \Phi(1) - (1 - \Phi(1,5))}{1 - (1 - \Phi(1,5))} \\ &= \frac{\Phi(1,5) - \Phi(1)}{\Phi(1,5)} \\ &\simeq \frac{0,9332 - 0,8413}{0,9332} \simeq 0,0985.\end{aligned}$$

□

## II - Densités

### Solution de l'exercice 5.

**1.**

\* D'après les théorèmes généraux,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en  $-1$  et  $1$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow -1^-} f(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) = 1 - 1 = 0$ , alors  $f$  est continue en  $-1$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 1 - 1 = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 0$ , alors  $f$  est continue en  $1$ .

Finalement,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

\* Pour tout  $t \in [-1, 1]$ , alors  $|t| \in [0, 1]$  et  $1 - |t| \geq 0$ . Ainsi, comme  $f$  est nulle en dehors du segment  $[-1, 1]$ , alors  $f$  est positive ou nulle sur  $\mathbb{R}$ .

\* Comme  $f$  est nulle en dehors d'un segment, alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_{-1}^1 (1 - |t|) dt = \int_{-1}^0 (1 - |t|) dt + \int_0^1 (1 - |t|) dt \\ &= \int_{-1}^0 (1 + t) dt + \int_0^1 (1 - t) dt \\ &= \left[ \frac{(1+t)^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[ -\frac{(1-t)^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1-0}{2} + \frac{-0+1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Finalement, la fonction  $f$  est bien une densité de probabilité.

**2.** Comme  $f$  est nulle en dehors d'un segment, alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-1}^1 t f(t) dt = \int_{-1}^0 t(1 - |t|) dt + \int_0^1 t(1 - |t|) dt \\ &= \int_{-1}^0 t(1 + t) dt + \int_0^1 t(1 - t) dt.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [-1, 0]$ ,  $u \mapsto -u$  dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_1^0 -u(1 - u)(-1) du + \int_0^1 t(1 - t) dt \\ &= - \int_0^1 u(1 - u) du + \int_0^1 t(1 - t) dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \mathbf{E}[X^2] - 0 \\
 &= \int_{-1}^1 t^2 f(t) dt = \int_{-1}^0 t^2(1 - |t|) dt + \int_0^1 t^2(1 - |t|) dt \\
 &= \int_{-1}^0 t^2(1 + t) dt + \int_0^1 t^2(1 - t) dt. \\
 &= \int_0^1 u^2(1 - u) du + \int_0^1 t(1 - t) dt \\
 &= 2 \left( \int_0^1 t^2 dt - \int_0^1 t^3 dt \right) \\
 &= 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

□

### Solution de l'exercice 6.

1.

- \* Comme l'exponentielle est à valeurs strictement positives, le dénominateur de  $f$  ne s'annule pas et la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- \* Comme l'exponentielle est à valeurs strictement positives, alors  $f$  est à valeurs strictement positives.
- \* Soit  $y < 0 < x$ . Alors,

$$\begin{aligned}
 \int_y^x f(t) dt &= \int_y^x \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} dt \\
 &= \left[ \frac{1}{1 + e^{-t}} \right]_y^x \\
 &= \frac{1}{1 + e^{-x}} - \frac{1}{1 + e^{-y}}.
 \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle,

$$\begin{aligned}
 \int_y^{+\infty} f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_y^x f(t) dt = 1 - \frac{1}{1 + e^{-y}} \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^{+\infty} f(t) dt = 1 - 0 = 1.
 \end{aligned}$$

Finalement,  $f$  est bien une densité de probabilité.

2. En utilisant la question précédente, pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt \\
 &= \int_1^0 (-u)^2(1 - u)(-1) du + \int_0^1 t^2(1 - t) dt = \frac{1}{1 + e^{-x}}.
 \end{aligned}$$

3. On remarque que

$$\varphi(x) = \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}.$$

Ainsi, la fonction  $\varphi$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$ .

Ainsi,  $\varphi$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $] -1, 1[$ .

4. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in ] -1, 1[$  tels que :

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= y \\
 1 - \frac{2}{e^x + 1} &= y \\
 \frac{2}{e^x + 1} &= 1 - y \\
 e^x + 1 &= \frac{2}{1 - y} \\
 e^x &= \frac{2}{1 - y} - 1 = \frac{1 + y}{1 - y} \\
 x &= \ln \frac{1 + y}{1 - y}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $\varphi$  est bijective et  $\varphi^{-1} : y \mapsto \ln \frac{1+y}{1-y}$ .

5. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- \* Comme  $Y$  est à valeurs dans  $[-1, 1]$ ,
  - ★ Si  $x \leq -1$ , alors  $G(x) = 0$ .
  - ★ Si  $x \geq 1$ , alors  $G(x) = 1$ .

\* Si  $x \in ]-1, 1[$ , comme  $\varphi^{-1}$  est strictement croissante et bijective,

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbf{P}(Y \leq x) = \mathbf{P}(\varphi(X) \leq x) \\ &= \mathbf{P}(X \leq \varphi^{-1}(x)) = F(\varphi^{-1}(x)) \\ &= \frac{1}{1 + \exp\left(-\ln \frac{1+x}{1-x}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{1+x}{1+x+1-x} \\ &= \frac{1+x}{2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1+x}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Une densité  $g$  est donnée par la dérivée de  $G$  en tout point où  $G$  est dérivable, soit

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi,  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$ .  $\square$

### Solution de l'exercice 7.

1.

\* La fonction  $f_\alpha$  est continue sauf en 1, point en lequel elle admet des limites finies à gauche et à droite car

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = C.$$

\* Comme  $f_\alpha$  est non nulle pour  $t \geq 1$ , et que  $t^{\alpha+1}$  est positif pour  $t \geq 1$ , alors  $f_\alpha$  est positive si et seulement si  $C \geq 0$ .

\* Soit  $x \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f_\alpha(t) dt &= \int_1^x \frac{C}{t^{\alpha+1}} dt \\ &= C \left[ -\frac{1}{\alpha t^\alpha} \right]_1^x \\ &= \frac{C}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{x^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Comme  $\alpha > 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$  et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t) dt = \frac{C}{\alpha}.$$

Finalement,  $f_\alpha$  est une densité de probabilité si et seulement si  $C = \alpha$ .

2. En utilisant le calcul précédent,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^\alpha} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. Soit  $x \geq 1$ . Alors,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x t f_\alpha(t) dt &= \int_1^x \frac{\alpha}{t^\alpha} dt = \left[ -\frac{\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} \right]_1^x \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \left( 1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,  $X$  admet une espérance si et seulement si  $\alpha > 1$ . Alors,

$$\mathbf{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Soit  $x \geq 1$ . Alors,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x t^2 f_\alpha(t) dt &= \int_1^x \frac{\alpha}{t^{\alpha-1}} dt = \left[ -\frac{\alpha}{(\alpha-2)t^{\alpha-2}} \right]_1^x \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-2} \left( 1 - \frac{1}{x^{\alpha-2}} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,  $X$  admet une variance si et seulement si  $\alpha > 2$ . Alors,

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\alpha(t) dt = \frac{\alpha}{\alpha - 2}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X) &= \frac{\alpha}{\alpha - 2} - \left( \frac{ag}{\alpha - 1} \right)^2 \\ &= \alpha \frac{(\alpha - 1)^2 - \alpha(\alpha - 2)}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} \\ &= \frac{\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}. \end{aligned}$$

4. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $F_Y$  la fonction de répartition de  $Y$ .

$$F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leq x) = \mathbf{P}(X^2 \leq x).$$

- \* Si  $x \leq 0$ , alors  $[X^2 \leq x]$  est impossible et  $F_Y(x) = 0$ .
- \* Si  $x \geq 0$ , comme la fonction racine carrée est croissante et bijective, alors

$$F_Y(x) = \mathbf{P}(X \leq \sqrt{x}).$$

- ★ Si  $\sqrt{x} \leq 1$ , soit  $x \leq 1$ , alors  $F_Y(x) = 0$ .
- ★ Si  $\sqrt{x} \geq 1$ , soit  $x \geq 1$ , alors

$$F_Y(x) = F(\sqrt{x}) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha/2}}$$

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{\alpha/2}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité  $f_Y$  de  $Y$  est donnée par

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\alpha/2}{x^{\alpha/2+1}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi,  $Y$  suit une loi de Pareto de paramètre  $\frac{\alpha}{2}$ . Elle admet une espérance si et seulement si  $\frac{\alpha}{2} > 1$ , soit  $\alpha > 2$  et alors

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 2}.$$

5. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $F_T$  la fonction de répartition de  $T$ .

$$F_T(x) = \mathbf{P}(T \leq x) = \mathbf{P}(\sqrt{X} \leq x).$$

- \* Si  $x \leq 0$ , alors  $[\sqrt{X} \leq x]$  est impossible et  $F_T(x) = 0$ .
- \* Si  $x \geq 0$ , comme la fonction carrée est croissante et bijective, alors

$$F_T(x) = \mathbf{P}(X \leq x^2).$$

- ★ Si  $x^2 \leq 1$ , soit  $x \leq 1$ , alors  $F_T(x) = 0$ .
- ★ Si  $x^2 \geq 1$ , soit  $x \geq 1$ , alors

$$F_T(x) = F(x^2) = 1 - \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

Finalement,

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{2\alpha}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité  $f_T$  de  $T$  est donnée par

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2\alpha}{x^{2\alpha+1}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi,  $T$  suit une loi de Pareto de paramètre  $2\alpha$ . Elle admet une espérance si et seulement si  $2\alpha > 1$ , soit  $\alpha > \frac{1}{2}$  et alors

$$\mathbf{E}[T] = \frac{2\alpha}{2\alpha - 1}.$$

□

### III - Estimation

#### Solution de l'exercice 8.

1. En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[T_1] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] + \mathbf{E}[X_3] + \mathbf{E}[X_4]}{4} = \mathbf{E}[X_1] = \frac{2\theta}{2} = \theta,$$

$$\mathbf{E}[T_2] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + 2\mathbf{E}[X_2] + 3\mathbf{E}[X_3] + 4\mathbf{E}[X_4]}{10} = \mathbf{E}[X_1] = \frac{2\theta}{2} = \theta.$$



Ainsi,  $T_1$  et  $T_2$  sont des estimateurs sans biais de  $\theta$ .

2. Comme les estimateurs sont sans biais, leur risque quadratique est égal à leur variance. De plus, comme les v.a. sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(T_1) &= \frac{\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + \mathbf{V}(X_3) + \mathbf{V}(X_4)}{16} = \frac{\mathbf{V}(X_1)}{4} = \frac{\theta^2}{48}, \\ \mathbf{V}(T_2) &= \frac{\mathbf{V}(X_1) + 4\mathbf{V}(X_2) + 9\mathbf{V}(X_3) + 16\mathbf{V}(X_4)}{100} = \frac{30\mathbf{V}(X_1)}{100} = \frac{\theta^2}{40}.\end{aligned}$$

3. Ainsi,  $T_1$  a un risque quadratique plus faible que  $T_2$  et semble donc préférable.  $\square$

### Solution de l'exercice 9.

1. Notons  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$  et  $F_n$  la fonction de répartition de  $M_n$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \mathbf{P}(M_n \leq x) = \mathbf{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq x) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x]\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(X_k \leq x), \text{ d'après l'indépendance} \\ &= F_n(x)^n.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{2\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0, 2\theta] \\ 1 & \text{si } x \geq 2\theta \end{cases}.$$

Ainsi, une densité  $f_n$  de  $M_n$  est donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{(2\theta)^n} x^{n-1} & \text{si } x \in [0, 2\theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme  $f_n$  est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[M_n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = \int_0^{2\theta} t \times \frac{n}{(2\theta)^n} t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{(2\theta)^n} \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^{2\theta} = \frac{n}{n+1} 2\theta.\end{aligned}$$

Comme  $f_n$  est nulle en dehors d'un segment,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[M_n^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t) dt = \int_0^{2\theta} t^2 \times \frac{n}{(2\theta)^n} t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{(2\theta)^n} \left[ \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^{2\theta} = \frac{n}{n+2} (2\theta)^2.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huyggens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(M_n) &= \mathbf{E}[M_n^2] - \mathbf{E}[M_n]^2 = \frac{n}{n+2} (2\theta)^2 - \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 (2\theta)^2 \\ &= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} (2\theta)^2.\end{aligned}$$

2. Comme  $U_n$  est une fonction du  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$ , alors  $U_n$  est un estimateur.

D'après la question précédente,

$$\mathbf{E}[U_n] = \frac{n+1}{2n} \mathbf{E}[M_n] = \theta.$$

Ainsi,  $U_n$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ .

3. Comme  $\bar{X}_n$  est une fonction du  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$ , alors  $\bar{X}_n$  est un estimateur de  $\theta$ .

D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i]}{n} = \frac{n \frac{2\theta}{2}}{n} = \theta.$$

Ainsi,  $\bar{X}_n$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ .

4. Comme les variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_n)$  sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(\bar{X}_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i)}{n^2} = \frac{1}{n} \times \frac{(2\theta)^2}{12} = \frac{(2\theta)^2}{12n}.$$

Comme  $\bar{X}_n$  et  $U_n$  sont des estimateurs sans biais de  $\theta$ , nous recherchons celui qui a le biais quadratique (i.e. la variance) la plus faible. Or,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}(\bar{X}_n)}{\mathbf{V}(U_n)} &= \frac{\frac{(2\theta)^2}{12n}}{\frac{n}{(n+1)^2(n+2)} (2\theta)^2} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)}{12n^2}.\end{aligned}$$

Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , cette quantité tend vers  $+\infty$ , donc  $\mathbf{V}(U_n)$  est négligeable devant  $\overline{X}_n$  et  $U_n$  est donc un meilleur estimateur.

Plus précisément,

$$\begin{aligned}(n+1)^2(n+2) - 12n^2 &= (n-1)(n^2 - 7n - 2) \\ &= (n-1) \left( n - \frac{7 - \sqrt{57}}{2} \right) \left( n - \frac{7 + \sqrt{57}}{2} \right).\end{aligned}$$

Comme  $\frac{7+\sqrt{57}}{2} \simeq 7,27$ , alors le biais de  $U_n$  est inférieur à celui de  $\overline{X}_n$  dès que  $n \geq 8$ .  $\square$

### Solution de l'exercice 10.

1.

\* D'après les théorèmes généraux, la fonction  $f$  est continue sauf éventuellement en  $\theta$ .

De plus,  $\lim_{t \rightarrow \theta^-} f(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \theta^+} f(t) = e^{-(\theta-\theta)} = 1$  donc la fonction  $f$  admet des limites finies à gauche et à droite en  $\theta$ .

\* Comme la fonction exponentielle est à valeurs positives, alors  $f$  est à valeurs positives.

\* Soit  $x \geq \theta$ . Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_{\theta}^x e^{-(t-\theta)} dt \\ &= e^{\theta} [-e^{-t}]_{\theta}^x \\ &= e^{\theta} (e^{-\theta} - e^{-x}) \\ &= 1 - e^{\theta-x}.\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Finalement,  $f$  est bien une densité de probabilité.

2. En posant  $Y = X - \theta$ , on remarque que  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ . Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y + \theta] = 1 + \theta \text{ et } \mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y + \theta) = 1.$$

3. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y_n] = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{E}[T_i]}{n} = \mathbf{E}[T] = 1 + \theta.$$

Comme les variables aléatoires  $(T_1, \dots, T_n)$  sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(T_i) = \frac{1}{n}.$$

4. Comme  $\hat{Y}_n$  est une fonction du  $n$ -échantillon  $(T_1, \dots, T_n)$ , alors  $\hat{Y}_n$  est un estimateur de  $\theta$ .

D'après la question précédente,  $\mathbf{E}[\hat{Y}_n] = \mathbf{E}[Y_n] - 1 = \theta$ .

Ainsi,  $\hat{Y}_n$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ .

5. Comme  $\hat{Y}_n$  est un estimateur sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance et, d'après les questions précédentes,

$$\mathbf{V}(\hat{Y}_n) = \mathbf{V}(Y_n - 1) = \mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n}.$$

6. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \mathbf{P}(\min\{T_1, \dots, T_n\} \leq x) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\max\{T_1, \dots, T_n\} > x) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [T_i > x]\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(T_i > x), \text{ d'après l'indépendance} \\ &= 1 - (1 - F(x))^n.\end{aligned}$$

7. En utilisant la densité  $f$ , on remarque que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \theta \\ 1 - e^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta \end{cases}.$$

Ainsi,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \theta \\ 1 - e^{-n(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta \end{cases}.$$

La variable aléatoire  $Z_n$  admet donc comme densité

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \theta \\ n e^{-n(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta \end{cases}.$$

8. Soit  $x \geq \theta$ . En utilisant la densité précédente puis une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x t f_n(t) dt &= n e^{n\theta} \int_{\theta}^x t e^{-nt} dt \\ &= n e^{n\theta} \frac{(n\theta + 1) e^{-n\theta} - (nx + 1) e^{-nx}}{n^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $Z_n$  admet une espérance et

$$\mathbf{E}[Z_n] = \frac{n\theta + 1}{n}.$$

De manière analogue,

$$\int_{-\infty}^x t^2 f(t) dt = n e^{n\theta} \frac{(n^2\theta^2 + 2n\theta + 2) e^{-n\theta} - (n^2x^2 + 2nx + 2) e^{-nx}}{n^3},$$

soit  $\mathbf{E}[Z_n^2] = \frac{n^2\theta^2 + 2n\theta + 2}{n^2}$ .

Ainsi,

$$\mathbf{V}(Z_n) = \mathbf{E}[Z_n^2] - \mathbf{E}[Z_n]^2 = \frac{1}{n^2}.$$

**Remarque.** On aurait également pu constater que  $Z_n - \theta \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$ .

9. Comme  $\hat{Z}_n$  est une fonction de  $T_1, \dots, T_n$ , alors  $Z_n$  est un estimateur de  $\theta$ .

Comme  $\mathbf{E}[Z_n] = \theta + \frac{1}{n}$ , alors  $\mathbf{E}[Z_n - \frac{1}{n}] = \theta$  et  $\hat{Z}_n$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ .

10. D'après les propriétés de la variance,

$$\mathbf{V}(\hat{Z}_n) = \mathbf{V}\left(Z_n - \frac{1}{n}\right) = \mathbf{V}(Z_n) = \frac{1}{n^2}.$$

11. Comme  $\hat{Y}_n$  est  $\hat{Z}_n$  sont deux estimateurs sans biais de  $\theta$ , alors leurs risques quadratiques sont égaux à leurs variances. De plus, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathbf{V}(\hat{Z}_n) = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} = \mathbf{V}(\hat{Y}_n).$$

□