T.D. VI - Espaces vectoriels

I - Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants.

1. $(\mathscr{S}_1)\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 3x+4y-z &= 2 \\ x+3y+z &= 10 \end{cases}$.

2. $(\mathscr{S}_2)\begin{cases} 2x+3y+z &= 7 \\ x-y+2z &= -3 \\ 3x+y-z &= 6 \end{cases}$.

3. $(\mathscr{S}_3)\begin{cases} 2x-y+4z &= 2 \\ x+2y-3z &= 6 \\ 4x+3y-2z &= 14 \end{cases}$.

4. $(\mathscr{S}_4)\begin{cases} x+y+z &= 5 \end{cases}$.

5. $(\mathscr{S}_5)\begin{cases} x+2y-3z &= -1 \\ 3x-y+2z &= 7 \\ 5x+3y-4z &= 2 \end{cases}$.

6. $(\mathscr{S}_6)\begin{cases} 2x-3y+5z &= 8 \\ -x+2y+4z &= -11 \end{cases}$.

Exercice 2. Identifier les réels λ pour lesquels le système d'équations suivant possède une solution.

$$(\mathscr{S})\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4 &= 1 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4 &= 2 \\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4 &= \lambda \end{cases}$$

II - Familles de vecteurs

Exercice 3. Soit $n \geqslant 3$. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ ;\ x_1 = 0 \text{ ET } x_2 = 0\}$

2. $E_2 = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ ;\ x_1 + x_2 = 0\}$

3. $E_3 = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ ;\ x_1 \neq 0\}$

4. $E_4 = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ ;\ x_1 = x_2\}$

5. $E_5 = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ ;\ x_1x_2 = 0\}$

Exercice 4. (Familles libres) Montrer que les familles suivantes sont libres :

1. $\big((-1,-1,1,2),(1,-1,1,5)\big)$.

2. $\big((8,4,1,-2),(1,3,0,5)\big)$.

3. $\big((1,1,3,2),(1,-1,1,3),(0,1,5,2)\big)$.

4. $\big((1,2,3,4),(-1,3,2,1),(2,1,-1,1)\big)$.

Exercice 5. (Familles génératrices) Déterminer une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

1. $F_1 = \{(2\lambda,-\lambda,-3\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. $F_2 = \{(2\lambda,0,-3\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3. $F_3 = \{(2\lambda+\mu,2\mu,3\lambda-\mu),\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\}$.

4. $F_4 = \{(2\lambda+\mu,5\lambda+2\mu,3\lambda-\mu),\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6. (Bases) Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F_1 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ 2x-3y+z = 0\big\}$.

2. $F_2 = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ 4x+y+z = 0 \text{ ET } 3x+z = 0\big\}$.

3. $F_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ \begin{cases} x-y-z &= 0 \\ 2x+3y+z &= 0 \\ 5x+5y+z &= 0 \end{cases}\right\}$.

4. $F_4 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ;\ \begin{cases} x+2y+3z+t &= 0 \\ x+y-t &= 0 \\ 2x+3y+2z &= 0 \end{cases}\right\}$.

Exercice 7. (Équations cartésiennes) Pour chacune des questions suivantes, déterminer une équation cartésienne de l'espace vectoriel.

1. $F_1 = \operatorname{Vect}\{(1,1,2),(1,0,1)\}$.

2. $F_2 = \operatorname{Vect}\{(1,2),(4,6)\}$.

3. $F_3 = \operatorname{Vect}\{(1,0,1),(2,3,1)\}$.

4. $F_4 = \operatorname{Vect}\{(1,1,1)\}$.

Exercice 8. (Coordonnées)

1. Montrer que $\mathscr{B}_1 = \big((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(8,4,2)$ dans cette base.

2. Montrer que $\mathscr{B}_2 = \big((-1,-1,1),(1,-1,1),(2,2,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(8,4,2)$ dans cette base.

3. Soit $\mathscr{B} = ((-1,-1,1),(2,2,-1))$ et $F = \operatorname{Vect} \mathscr{B}$. Déterminer les coordonnées de $(3,3,-1)$ dans la base $\mathscr{B}$.

III - Questions plus théoriques

Exercice 9. Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. On note $F + G = \{f + g,\ (f,g) \in F \times G\}$. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que, en général, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
Indication : Exhiber un contre-exemple lorsque $n = 2$.

Exercice 10. Soit $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ ;\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. Déterminer la dimension et une base de F.

IV - Calcul matriciel

Exercice 11. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A - bJ$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer J^n.

2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

Exercice 12. Soit α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A - I_3$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Cacluler B^n.

2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

V - Matrices & Espaces vectoriels

Exercice 13. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ AM = MA\}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

1. Donner des exemples de matrices appartenant à $\mathscr{C}(A)$.

2. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un espace vectoriel.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (I_2, A) est libre.

2. Exprimer A^2 en fonction de I_2 et de A.

3. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}\left\{I_2, A, A^2\right\}$.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \operatorname{Vect}\left\{I_3, A, A^2\right\}$.

1. Montrer que (I_3, A, A^2) est une famille libre et en déduire la dimension de F.

2. Calculer $A^3 - 3A^2 - 4A + 3I_3$.

3. Montrer que A est inversible et montrer que $A^{-1} \in F$.

4. Montrer que, pour tout n entier naturel, $A^n \in F$.

5. En déduire la dimension de $\operatorname{Vect}\left\{A^k,\ k \in \mathbb{N}\right\}$.

Exercice 16. (✎) On note $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille 3.

1. Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$.

3. En déduire la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$.

4. Généraliser les questions précédentes à l'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de taille n.

Exercice 17. (✎) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $\left(I_3, A, A^2, A^3, \dots, A^9\right)$ est liée.