T.D. III - Probabilités

I - Tirages

Exercice 1. Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir deux numéros de même parité lorsque...

1. ... on tire les boules simultanément.

2. ... on tire les boules successivement et sans remise.

3. ... on tire les boules successivement et avec remise.

Exercice 2. Soient $n \geqslant 4$ et $k \in [\![1, n]\!]$. On tire successivement et sans remise 4 jetons d'une boîte contenant n jetons numérotés de 1 à n.

1. Déterminer la probabilité :

a) que le plus petit numéro tiré soit égal à 1.

b) que le plus petit numéro tiré soit égal à 3.

c) que le plus petit numéro tiré soit égal à k.

2. Reprendre la question **1.c)** en changeant « plus petit » en « plus grand ».

3. Reprendre la question **2.** en effectuant des tirages avec remise.

Exercice 3. Soit $n \geqslant 16$. Une urne contient n boules dont 10 sont rouges et $n - 10$ sont noires. On tire simultanément 10 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité p_n de l'événement : « quatre boules exactement sont rouges » ?

2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles p_n est maximale.

Exercice 4. Une urne contient n boules noires et r boules rouges. Ces boules sont tirées aléatoirement, successivement et sans remise. Montrer que la probabilité que la première boule rouge soit tirée lors du $(k+1)$-ème tirage vaut $\binom{r+n-k-1}{r-1}\binom{r+n}{n}^{-1}$.

Exercice 5. 50 boules noires et 50 boules rouges sont réparties dans 2 urnes. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule.

1. Est-ce que la probabilité que cette boule soit rouge dépend de la répartition initiale dans les urnes ?

2. Reprendre cette question si les deux urnes contiennent le même nombre de boules.

II - Arbres

Exercice 6. Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que :

* 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété ;
* 95% des tests ont donné un résultat positif alors que la personne contrôlée était en état d'ébriété ;
* 95% des tests ont donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que son résultat est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?

2. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est négatif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?

Exercice 7. On dispose d'un test pour déterminer si un individu est atteint par une maladie donnée. La probabilité qu'un individu soit malade est de 10^{-5}, la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu est malade est $99\,999 \cdot 10^{-5}$, la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu n'est pas malade est 10^{-4}. Déterminer la probabilité qu'un individu soit malade sachant que le test est positif.

Exercice 8. Soit $n \geqslant 3$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n telles que l'urne numérotée r contient $r-1$ boules rouges et $n-r$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on pioche dans celle-ci successivement deux boules sans remise. Déterminer les probabilités que...

1. ... la seconde boule soit noire.

2. ... la seconde boule soit noire, sachant que la première est noire.

Exercice 9. (Jeu de cartes) Soient 2 jeux de cartes, un de 32 cartes et un de 52 cartes. Le jeu de 32 cartes contient exactement 4 dames et le jeu de 52 cartes contient également exactement 4 dames. On prend un des jeux au hasard et on prend une carte dedans. On obtient une dame. Quelle est la probabilité que le jeu choisi contienne 32 cartes ?

III - Jeu de pile ou face

Exercice 10. Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile.

1. On note P_k l'événement « le premier joueur obtient exactement k piles ». Déterminer $\mathbf{P}\left(P_k\right)$.

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ?

Exercice 11. (Ruine du joueur) Maryam souhaite acheter un livre de mathématiques qui coûte N euros. Elle dispose d'une somme initiale de k euros où $0 \leqslant k \leqslant N$. Elle cherche ensuite à gagner l'argent manquant en jouant contre son banquier au jeu suivant : il lance une pièce de monnaie équilibrée ; si la pièce renvoie pile, Maryam gagne 1 euro ; si la pièce renvoie face elle perd 1 euro. Le jeu s'arrête soit quand Maryam est ruinée, soit quand elle dispose de N euros et peut acheter son livre.

1. On note A_k l'événement « Maryam dispose initialement d'une somme de k euros et termine ruinée », $p_k = \mathbf{P}\left(A_k\right)$ et P l'événement « le premier lancer renvoie pile ». En utilisant le système complet d'événements $(P, \overline{P})$, montrer que
$$p_k = \frac{p_{k+1} + p_{k-1}}{2}.$$

2. Déterminer les valeurs de p_0 et de p_N.

3. Pour $k \leqslant N-1$, on pose $v_k = p_{k+1} - p_k$. Montrer que (v_k) est une suite constante.

4. En déduire la probabilité, avec une somme de départ de k euros, que le jeu se termine avec la ruine de Maryam.

IV - Divers

Exercice 12. (Quelle est la taille du paquet ?) Un paquet de 10 cartes numérotées de 1 à 10 est mélangé. Trois cartes sont extraites tour à tour du paquet. Quelle est la probabilité que ces trois cartes soient triées par ordre croissant ?

Exercice 13. Soient $x \in]0,1[$ et $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose qu'il existe une famille d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n entier naturel,
$$\mathbf{P}\left(A_n \cap A_{n+1}\right) = x \cdot \mathbf{P}\left(A_n\right) \text{ et } \mathbf{P}\left(\overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}}\right) = x \cdot \mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right).$$
Montrer que $\left(\mathbf{P}\left(A_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
On pourra se ramener à l'étude d'une suite arithmético-géométrique.

Exercice 14. Un allumeur de réverbères a dans sa poche deux boîtes contenant respectivement n et $n+1$ allumettes. Chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il prend au hasard dans l'une des boîtes. Quelle est la probabilité que, lorsqu'il prend la dernière allumette d'une boîte, l'autre boîte contienne exactement k allumettes ?