

T.D. XI - Fonctions de plusieurs variables

I - Extremums libres

Solution de l'exercice 1.

1. $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 2y - x \end{pmatrix}$. Ainsi, le seul point critique est $(0, 0)$.

La hessienne de f vaut $H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $2^2 - (-1)^2 > 0$ et $2 > 0$, d'après le résultat de Monge, f atteint un minimum local en $(0, 0)$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (h_1 \ h_2) H(f)(x, y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= 2h_1^2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 = 2 \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}h_2^2 + 2h_2^2 \\ &= 2 \left(h_1 - \frac{h_2}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}h_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est convexe et le minimum est un minimum global.

2. $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 8xy + 6x^2 - 4y + 2 \\ 4x^2 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

* Soit $x = 0$ et $y = 1/2$.

* Soit $x = 1$ et $y = -2$.

De plus,

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 8y + 12x & 8x - 4 \\ 8x - 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

* En $(0, 1/2)$, $rt - s^2 = -16 < 0$. Ainsi, $(0, 1/2)$ est un point selle.

* En $(1, -2)$, $rt - s^2 = -16 < 0$. Ainsi, $(1, -2)$ est un point selle.

3. $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6x \\ -3y^2 - 6y \end{pmatrix}$. Ainsi, (x, y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases} x(x+2) = 0 \\ y(y+2) = 0 \end{cases}$.

On obtient ainsi 4 points critiques de coordonnées : $(0, 0)$, $(0, -2)$, $(-2, 0)$, $(-2, -2)$.

De plus, la hessienne de f vaut

$$H(f)(x, y) = 6 \begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & -y-1 \end{pmatrix}.$$

* Si $(x, y) = (0, 0)$, la hessienne est vaut $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. Les notations de Monge montrent que f atteint un point selle en $(0, 0)$.

* Si $(x, y) = (-2, -2)$, la hessienne vaut $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Les notations de Monge montrent que f atteint un point selle en $(-2, -2)$.

* Si $(x, y) = (0, -2)$, la hessienne vaut $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Comme $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, les notations de Monge assurent que f atteint un minimum local en $(0, -2)$.

* Si $(x, y) = (-2, 0)$, la hessienne vaut $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Comme $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, les notations de Monge assurent que f atteint un maximum local en $(-2, 0)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = +\infty$, alors f n'admet pas de maximum global.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = -\infty$, alors f n'admet pas de minimum global.

□

Solution de l'exercice 2.

1. $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2z \\ 2 - 6y \\ 2x - 6z \end{pmatrix}$. Ainsi, le seul point critique est $a_* = (0, 1/3, 0)$.

De plus, $H(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} q_{(x,y,z)}(f)(h) &= h^T H(f)(x, y, z) h \\ &= 4h_1 h_3 - 6h_2^2 - 6h_3^2 \\ &= -6 \left(h_3 - \frac{2}{3} h_1 h_3 \right) - 6h_2^2 \\ &= -6 \left(h_3 - \frac{1}{3} h_1 \right)^2 + \frac{2}{3} h_1^2 - 6h_2^2. \end{aligned}$$

Comme $q_{a_*}(h, 0, h/3) > 0$ et $q_{a_*}(0, h, 0) < 0$, alors f n'atteint pas d'extremum en a_* .

2. Le gradient vaut $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z - yz \\ x + z - xz \\ y + x - xy \end{pmatrix}$.

Soit (x, y, z) un point critique. Si $z = 1$, la première équation donne $1 = 0$, ce qui est impossible. Ainsi, $z \neq 1$ et

$$\begin{cases} y &= -\frac{z}{1-z} \\ x &= -\frac{z}{1-z} \\ -2\frac{z}{1-z} - \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y &= -\frac{z}{1-z} \\ x &= -\frac{z}{1-z} \\ -\frac{z}{1-z} \left(2 + \frac{z}{1-z}\right) &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $z = 0$, alors $x = y = 0$. Sinon, $2 + \frac{z}{1-z} = 0$, soit $z = 2$ et alors $x = y = 2$. Il y a donc deux points critiques : $(0, 0, 0)$ et $(2, 2, 2)$.

La hessienne de f vaut

$$H(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1-z & 1-y \\ 1-z & 0 & 1-x \\ 1-y & 1-x & 0 \end{pmatrix}.$$

* Si $a_* = (0, 0, 0)$, alors $H(f)(a_*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$q_{a_*}(h) = 2(h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3).$$

$$\star q_{a_*}(h, h, 0) = 2h^2 > 0.$$

$$\star q_{a_*}(-h, h, 0) = -2h^2 < 0.$$

Ainsi, f ne présente pas d'extremum en $(0, 0, 0)$.

* Si $a_* = (2, 2, 2)$. Alors $H(f)(a_*) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On conclut

comme précédemment. □

Solution de l'exercice 3.

1. a) (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 2x - 6 &= 0 \\ 2y - 14 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 3 \\ y &= 7 \end{cases}.$$

Ainsi, $M(3, 7)$ est l'unique point critique de f .

b) Comme $H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$. Ainsi, la fonction f admet un minimum local en $(3, 7)$.

2. a) Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ non nul. Alors,

$$q_{(x,y)}(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 2h_2^2 > 0.$$

Ainsi, f est strictement convexe sur \mathbb{R}^2 .

b) Comme f est strictement convexe et $(3, 7)$ est un point critique de f , alors f atteint un minimum global en $(3, 7)$.

3. a) D'après la définition de la distance,

$$\|(x, y) - (3, 7)\|^2 = (x - 3)^2 + (y - 7)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 14y + 58.$$

b) D'après la question précédente, $f(x, y) \geq 0$. De plus, $f(x, y) = 0$ si et seulement si $(x, y) = (3, 7)$. On obtient bien que $(3, 7)$ est un minimum global de f . □

Solution de l'exercice 4.

1. D'après la définition (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique point critique de f est $(0, 0)$.

2. D'après la définition,

$$H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, en utilisant les notations de Monge, $rt - s^2 = 0$ et on ne peut donc pas conclure.

3. Comme

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^4 + y^2 - 0 \geq 0,$$

alors f atteint un minimum global en $(0, 0)$. \square

II - Extremums sous contraintes

Solution de l'exercice 5.

1. On se ramène à l'étude de $\varphi : x \mapsto (x + 1) \ln(x + 1)$. Comme $\varphi'(x) = \ln(x + 1) + 1$, alors φ est décroissante sur $] -1, e^{-1} - 1]$ puis croissante sur $[e^{-1} - 1, +\infty[$.

Le minimum de f sous contrainte est donc atteint en $(e^{-1} - 1, e^{-1})$.

2. On se ramène à l'étude de $\varphi : x \mapsto 2x e^x$. Comme $\varphi'(x) = 2(x + 1) e^x$, alors φ est décroissante sur $] -\infty, -1]$ puis croissante sur $[-1, +\infty[$.

Le minimum de f sous contrainte est donc atteint en $(-1, -1)$.

3. Comme $x^2 = \frac{3-y^2}{2}$, on se ramène à l'étude de $\varphi : y \mapsto \frac{3-y^2}{2} y$ où $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Comme $\varphi'(x) = 3 \frac{1-y^2}{2}$, alors φ est décroissante sur $[-\sqrt{3}, -1]$, croissante sur $[-1, 1]$ puis décroissante sur $[1, \sqrt{3}]$.

De plus, $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(-1) = -1$.

Comme $\varphi(-\sqrt{3}) = \varphi(\sqrt{3}) = 0$, φ ne possède pas d'extremum global en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

Le minimum de f sous contrainte est donc atteint en $(1, -1)$ et $(-1, -1)$.

Le maximum de f sous contrainte est donc atteint en $(1, 1)$ et $(-1, 1)$.

L'étude précédente de recherche des points critiques n'est valable que sur l'ouvert $] -\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. Pour conclure l'étude, nous devons étudier le comportement de la fonction aux voisinages de $-\sqrt{3}$ et de $\sqrt{3}$.

On remarque que si (x, y) est proche de $(0, \sqrt{3})$, alors

$$f(x, y) = x^2 y \geq 0 = f(0, \sqrt{3})$$

donc f atteint un minimum local en $(0, \sqrt{3})$.

Enfin, si (x, y) est proche de $(0, -\sqrt{3})$, alors

$$f(x, y) = x^2 y \leq 0 = f(0, -\sqrt{3})$$

donc f atteint un maximum local en $(0, -\sqrt{3})$. \square

Solution de l'exercice 6.

1. Contrainte de qualification : La jacobienne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car ses deux premières colonnes sont linéairement indépendantes. Condition du premier ordre : il existe $x, y, z, t, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2z - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2t + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x + y + z - t = 3 \\ 2x - y + z + t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ t = -2 \\ \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Comme la hessienne réduite du lagrangien est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors

$h^T \tilde{H} h = 2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2) > 0$ pour tout vecteur h non nul et f atteint sous contrainte un minimum en $(-1, 2, 0, -2)$.

2. Contrainte de qualification : la jacobienne $(2x \ 2y)$ est de rang 1 sauf en $(0, 0)$ qui n'appartient pas au domaine étudié.

Condition du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} - 2\lambda x = 0 \\ -\frac{1}{x-y} - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $2\lambda(x + y) = 0$.

- * Si $\lambda = 0$, alors $\frac{1}{x-y} = 0$, ce qui est impossible.
- * Si $x = -y$, comme $x^2 + y^2 = 2$, alors $x^2 \in \{-1, 1\}$. On obtient ainsi les points $(-1, 1)$ et $(1, -1)$. Comme $-1 - 1 = -2 < 0$, alors f n'est pas définie en $(-1, 1)$.
Ainsi, le seul point à étudier est le point $(1, -1)$ avec $\lambda = \frac{1}{2x(x-y)} = \frac{1}{4}$. La hessienne réduite du lagrangien vaut

$$\overline{H}(\mathcal{L})(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x-y)^2} - 2\lambda & \frac{1}{(x-y)^2} \\ \frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-y)^2} - 2\lambda \end{pmatrix}.$$

En $a_\star = (1, -1)$. Alors,

$$\overline{H}_\star = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } J_\star = \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}$$

soit $\text{Ker } J_\star = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi, pour $h = h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non nul,

$$h^T \overline{H}_\star h = \frac{h^2}{4}(-4) = -h^2 < 0.$$

Ainsi, f atteint un maximum local sous contrainte en $(1, -1)$. \square

Solution de l'exercice 7.

1. $P(x, y) = x + 3y - C(x, y)$. La hessienne vaut $\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$. Comme $q_a(P)(h) = -10h_1^2 + 4h_1h_2 - 10h_2^2 = -10(h_1 - \frac{1}{5}h_2)^2 - \frac{48}{5}h_2^2 \leq 0$, le profit est une fonction concave.

2. L'entreprise peut fabriquer 20 jouets par jour, soit la condition $x + y = 20$.

Condition de qualification : la jacobienne $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1.

Conditions du premier ordre :

$$\begin{cases} -10x + 2y + 3 - \lambda = 0 \\ -10y + 2x + 3 - \lambda = 0 \\ x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \\ \lambda = -77 \end{cases}$$

Comme la contrainte est linéaire, la hessienne réduite du lagrangien vaut $\overline{H}(\mathcal{L}) = H(P)$. Comme P est concave, alors P atteint un maximum sous contrainte en $(10, 10)$.

Ainsi, le profit sera maximal en produisant 10 camions et 10 voitures par jour. \square

Solution de l'exercice 8.

1. Comme U_1, U_2 et U_3 sont sans biais, d'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[T_1] = \frac{c + c + c}{3} = c,$$

$$\mathbf{E}[T_2] = c,$$

$$\mathbf{E}[T_3] = \frac{3c + c + c}{5} = c.$$

Ainsi, T_1, T_2 et T_3 sont sans biais.

2. D'après les hypothèses, en notant σ_1^2 la variance de l'estimateur U_1 , alors $\sigma_2^2 = 4\sigma_1^2$ et $\sigma_3^2 = 9\sigma_1^2$. Comme les estimateurs sont indépendants,

$$\mathbf{V}(T_1) = \frac{\sigma_1^2 + 4\sigma_1^2 + 9\sigma_1^2}{9} = \frac{14}{9}\sigma_1^2,$$

$$\mathbf{V}(T_2) = \sigma_1^2,$$

$$\mathbf{V}(T_3) = \frac{9 + 4 + 9}{25}\sigma_1^2 = \frac{22}{25}\sigma_1^2.$$

Comme $\frac{22}{25} < 1 < \frac{14}{9}$, c'est le troisième estimateur qui est le meilleur.

3. D'une part, $\mathbf{E}[T] = (\alpha + \beta + \gamma)c$. Comme le coût moyen est non nul (sinon le coût, quantité positive, serait nul et on n'aurait pas besoin de cabinets d'étude pour s'en apercevoir...) et T est sans biais, alors $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

D'autre part, en utilisant l'indépendance des estimateurs,

$$\mathbf{V}(T) = (\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2)\sigma_1^2.$$

On cherche donc à minimiser $f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2$ sous la contrainte $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Condition de qualification : la jacobienne vaut

$$J(g)(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est bien de rang 1.

Conditions du premier ordre : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} 2\alpha - \lambda = 0 \\ 8\beta - \lambda = 0 \\ 18\gamma - \lambda = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \lambda = 0 \\ 8\beta - \lambda = 0 \\ 18\gamma - \lambda = 0 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{18}\right)\lambda = 1 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4 - \left(\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{8}L_2 + \frac{1}{18}L_3\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{36}{49} \\ \beta = \frac{9}{49} \\ \gamma = \frac{4}{49} \\ \lambda = \frac{72}{49} \end{cases}$$

La hessienne de f est égale à $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$ et pour tout vecteur h

non nul, $h^T H h = 2(h_1^2 + 4h_2^2 + 9h_3^2) > 0$.

Ainsi, f est convexe et la contrainte est linéaire donc f atteint un minimum sous contrainte en (α, β, γ) .

L'estimateur linéaire sans biais de variance minimale est donc :

$$T = \frac{36U_1 + 9U_2 + 4U_3}{49}.$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. La condition de qualification est triviale car la jacobienne est une matrice ne contenant que des 1.

Les premières conditions de premier ordre donnent $x_i = \frac{\lambda}{2}$. Or, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, donc $\lambda = \frac{2}{n}$. Ainsi, $x_i = \frac{1}{n}$.

Comme f est convexe et la contrainte est linéaire, f atteint un minimum.

2. L'estimateur T est de la forme $\sum_{i=1}^n x_i X_i$. Comme T est sans biais,

alors $\sum_{i=1}^n x_i \lambda = \lambda$ soit $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Comme les variables sont indépendantes, $\mathbf{V}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i^2$. Ainsi, déterminer l'estimateur de variance minimale revient à optimiser $\sum_{i=1}^n x_i^2$ sous

la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

D'après la question précédente, l'estimateur recherché est donc $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. C'est l'estimateur usuel de la moyenne empirique. □

Solution de l'exercice 10.

1. Comme $x^3 = y^2$, alors x est à valeurs positives. Ainsi, le minimum de f est atteint pour $x = 0$ et vaut 0.

2. Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda x^2 = 0 \\ -2\lambda y = 0 \\ x^3 - y^2 = 0 \end{cases}$$

En utilisant la seconde équation,

* soit $y = 0$ et $x = 0$ et la première équation est impossible.

* soit $\lambda = 0$ et la première équation est impossible.

Ainsi, les conditions du premier ordre ne permettent pas d'obtenir une solution.

3. Il n'y a pas de solution aux conditions du premier ordre et pourtant le problème d'optimisation admet une solution.

On constate que la jacobienne vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ au point $(0, 0)$. La condition de qualification n'est pas satisfaite et le théorème ne s'applique pas. □