

T.D. V - Variables aléatoires discrètes finies

I - Lois usuelles

Solution de l'exercice 1. Les valeurs prises par X sont 1, 2, 3 ou 4. Sachant que ces nombres ont tous la même probabilité d'être tirés, alors X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 4 \rrbracket$.

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}, \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{4^2-1}{2} = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 2. Les valeurs prises par X sont les entiers compris entre 1 et 20. Sachant que ces nombres ont tous la même probabilité d'être tirés, alors X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 20 \rrbracket$.

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 20 \rrbracket)$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{1+20}{2} = \frac{21}{2}, \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{20^2-1}{2} = \frac{399}{2}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. Les valeurs prises par X sont 0 et 1. Ainsi, suit X suit une loi de Bernoulli. Comme la probabilité que X vaille 1 vaut $\frac{2}{3}$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{2}{3})$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{2}{3}, \\ \mathbf{V}(X) &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

2. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès lors d'une suite de 5 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès vaut $\frac{2}{3}$. Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{2}{3}$, noté

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{2}{3}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}, \\ \mathbf{V}(Y) &= 5 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= 5 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. Les valeurs prises par X sont 0 et 1. Ainsi, suit X suit une loi de Bernoulli. La variable aléatoire X vaut 1 si la lampe est défectueuse, donc elle vaut 1 avec probabilité 0,05. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(0,05)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= 0,05, \\ \mathbf{V}(X) &= 0,05(1 - 0,05) = 0,05 \times 0,95 = 0,0475. \end{aligned}$$

2. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès lors d'une suite de 30 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès vaut 0,05. Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres 30 et 0,05, noté

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(30, 0,05).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= 30 \times 0,05 = 1,5, \\ \mathbf{V}(Y) &= 30 \times 0,05 \times (1 - 0,05) \\ &= 30 \times 0,05 \times 0,95 = 1,425. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5. L'expérience est une suite de 4 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire de tirer une boule noire) vaut $\frac{5}{8}$.

Comme X compte le nombre de succès lors de ces 4 tirages, alors X suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{5}{8}$, noté

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(4, \frac{5}{8}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = 4 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{2},$$

$$\mathbf{V}(X) = 4 \times \frac{5}{8} \times \left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{16}.$$

□

Solution de l'exercice 6. L'expérience est une suite de 5 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire de tirer une boule noire) vaut $\frac{3}{10}$.

Comme X compte le nombre de succès lors de ces 5 tirages, alors X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{3}{10}$, noté

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{3}{10}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = 5 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{2},$$

$$\mathbf{V}(X) = 5 \times \frac{3}{10} \times \left(1 - \frac{3}{10}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{20}.$$

□

Solution de l'exercice 7. L'expérience est une suite de 2 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire de tirer une boule numérotée 1) vaut $\frac{1}{3}$.

Comme X compte le nombre de succès lors de ces 2 tirages, alors X suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{3}$, noté

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{3}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{V}(X) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

□

Solution de l'exercice 8. L'expérience est une suite de 5 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire d'obtenir le numéro 1) vaut $\frac{1}{6}$.

Comme X compte le nombre de succès lors de ces 5 tirages, alors X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{6}$, noté

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{6}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

$$\mathbf{V}(X) = 5 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

□

II - Calculs de lois

Solution de l'exercice 9. On pourra dessiner un arbre.

Comme les tirages s'effectuent sans remise, les différents tirages possibles sont

$$(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (4, 1), (4, 2).$$

Chaque tirage a la même probabilité d'être effectué :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

La variable aléatoire X est la somme des tirages. Les valeurs qu'elle peut prendre sont donc :

$$3, 5, 6.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X = 3]) &= \mathbf{P}(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \\ \mathbf{P}([X = 5]) &= \mathbf{P}(\{(1, 4), (4, 1)\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}([X = 6]) = \mathbf{P}(\{(2, 4), (4, 2)\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

On peut ainsi résumer la loi de X dans le tableau suivant :

k	3	5	6
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

En utilisant ce tableau, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 3 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{3+5+6}{3} = \frac{14}{3}, \\ \mathbf{E}[X^2] &= 3^2 \times \frac{1}{3} + 5^2 \times \frac{1}{3} + 6^2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{9+25+36}{3} = \frac{70}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{70}{3} - \left(\frac{14}{3}\right)^2 \\ &= \frac{210}{9} - \frac{196}{9} = \frac{14}{9}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 10. On pourra dessiner un arbre.

1. Lors du premier lancer, le joueur remporte 10 ou -5 euros.
Lors du second lancer, le joueur remporte 10 ou -5 euros.
Lors du troisième lancer, le joueur remporte 10 ou -5 euros.
Ainsi, les suites de gains possibles sont :

$$(10, 10, 10), (10, 10, -5), (10, -5, 10), (10, -5, -5), \\ (-5, 10, 10), (-5, 10, -5), (-5, -5, 10), (-5, -5, -5),$$

Les valeurs prises par S , la somme des gains sont donc

$$30, 15, 0, -15.$$

De plus, en représentant ces expériences dans un arbre, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([S = 30]) &= \mathbf{P}(\{(10, 10, 10)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}, \\ \mathbf{P}([S = 15]) &= \mathbf{P}(\{(10, 10, -5), (10, -5, 10), (-5, 10, 10)\}) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= 3 \times \frac{4}{27} = \frac{4}{9}, \\ \mathbf{P}([S = 0]) &= \mathbf{P}(\{(10, -5, -5), (-5, 10, -5), (-5, -5, 10)\}) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= 3 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}, \\ \mathbf{P}([S = -15]) &= \mathbf{P}(\{(-5, -5, -5)\}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.\end{aligned}$$

On peut représenter la loi de S dans le tableau suivant :

k	-15	0	15	30
$\mathbf{P}([S = k])$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

2. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= -15 \times \frac{1}{27} + 0 \times \frac{2}{9} + 15 \times \frac{4}{9} + 30 \times \frac{8}{27} \\ &= \frac{-15 + 3 \times 15 \times 4 + 30 \times 8}{27} = \frac{405}{27} = \frac{45}{3}, \\ \mathbf{E}[X^2] &= (-15)^2 \times \frac{1}{27} + 0^2 \times \frac{2}{9} + 15^2 \times \frac{4}{9} + 30^2 \times \frac{8}{27} \\ &= \frac{10\,125}{27} = \frac{1125}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{1125}{3} - \left(\frac{45}{3}\right)^2 \\ &= \frac{3375}{9} - \frac{2025}{9} = \frac{1350}{9} = 150.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. On distingue en fonction des valeurs prises par X :

- * lorsque X vaut -2 , alors Y vaut 4 ,
- * lorsque X vaut -1 , alors Y vaut 1 ,
- * lorsque X vaut 0 , alors Y vaut 0 ,
- * lorsque X vaut 3 , alors Y vaut 9 .

Ainsi, $Y(\Omega) = \{0, 1, 4, 9\}$.

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y = 0]) &= \mathbf{P}([X = 0]) = \frac{1}{3}, \\ \mathbf{P}([Y = 1]) &= \mathbf{P}([X = -1]) = \frac{1}{6}, \\ \mathbf{P}([Y = 4]) &= \mathbf{P}([X = -2]) = \frac{1}{4}, \\ \mathbf{P}([Y = 9]) &= \mathbf{P}([X = 3]) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

La loi de Y peut donc être représentée dans le tableau suivant :

k	0	1	4	9
$\mathbf{P}([Y = k])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= -2 \times \frac{1}{4} - 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{-6 - 2 + 9}{12} = \frac{1}{12}, \\ \mathbf{E}[X^2] &= (-2)^2 \times \frac{1}{4} + (-1)^2 \times \frac{1}{6} + 0^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{4} \\ &= 1 + \frac{1}{6} + \frac{9}{4} = \frac{12 + 2 + 27}{12} = \frac{41}{12}.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X^2] - E[X]^2 = \frac{41}{12} - \frac{1}{12^2} \\ &= \frac{41 \times 12 - 1}{144} \\ &= \frac{491}{144}. \end{aligned}$$

3. D'après la définition de Y ainsi que la question précédente,

$$E[Y] = E[X^2] = \frac{41}{12}.$$

D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= E[X^4] = (-2)^4 \times \frac{1}{4} + (-1)^4 \times \frac{1}{6} + 0^4 \times \frac{1}{3} + 3^4 \times \frac{1}{4} \\ &= 4 + \frac{1}{6} + \frac{81}{4} = \frac{48 + 2 + 243}{12} = \frac{293}{12}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned} V(Y) &= E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{293}{12} - \left(\frac{41}{12}\right)^2 \\ &= \frac{293 \times 12 - 41^2}{144} = \frac{1835}{144}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. On distingue en fonction des valeurs prises par X :

- * lorsque X vaut 0, alors Y vaut 0,
- * lorsque X vaut 1, alors Y vaut 1,
- * lorsque X vaut 4, alors Y vaut 2,
- * lorsque X vaut 9, alors Y vaut 3.

Ainsi, $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

De plus,

$$\begin{aligned} P([Y = 0]) &= P([X = 0]) = \frac{1}{4}, \\ P([Y = 1]) &= P([X = 1]) = \frac{1}{6}, \\ P([Y = 2]) &= P([X = 4]) = \frac{1}{3}, \\ P([Y = 3]) &= P([X = 9]) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

La loi de Y peut donc être représentée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P([Y = k])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

2. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned} E[X] &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} \\ &= \frac{2 + 16 + 27}{12} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}, \\ E[X^2] &= 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{3} + 9^2 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{16}{3} + \frac{81}{4} = \frac{2 + 16 \times 4 + 81 \times 3}{12} = \frac{309}{12} = \frac{103}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X^2] - E[X]^2 = \frac{103}{4} - \left(\frac{15}{4}\right)^2 \\ &= \frac{103 \times 4 - 15^2}{16} \\ &= \frac{187}{16}. \end{aligned}$$

3. D'après la définition de Y ainsi que la formule de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y] &= \mathbf{E}[\sqrt{X}] \\ &= \sqrt{0} \times \frac{1}{4} + \sqrt{1} \times \frac{1}{6} + \sqrt{2} \times \frac{1}{3} + \sqrt{9} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2+8+9}{12} = \frac{19}{12}.\end{aligned}$$

D'après la définition,

$$\mathbf{E}[Y^2] = \mathbf{E}[\sqrt{X}^2] = \mathbf{E}[X] = \frac{15}{4}.$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}[Y^2] - \mathbf{E}[Y]^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{19}{12}\right)^2 \\ &= \frac{15 \times 36 - 19^2}{144} = \frac{179}{144}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 13.

1. On commence par déterminer les valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y :

- * si $X(\omega) = 1$, alors $Y(\omega) = 2$,
- * si $X(\omega) = 2$, alors $Y(\omega) = 1$,
- * si $X(\omega) = 3$, alors $Y(\omega) = 0$,
- * si $X(\omega) = 4$, alors $Y(\omega) = 1$,
- * si $X(\omega) = 5$, alors $Y(\omega) = 2$.

Ainsi,

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

D'après l'étude précédente,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = 0) &= \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{10}, \\ \mathbf{P}(Y = 1) &= \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 4) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}, \\ \mathbf{P}(Y = 2) &= \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

On peut représenter la loi de Y dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

En utilisant la formule de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{13}{10}.$$

2. En utilisant le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}[Y] = |1 - 3| \frac{1}{5} + |2 - 3| \frac{1}{10} + |3 - 3| \frac{1}{10} + |4 - 3| \frac{2}{5} + |5 - 3| \frac{1}{5}.$$

□

Solution de l'exercice 14.

1. On commence par déterminer les valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y :

- * si $X(\omega) = -1$, alors $Y(\omega) = 2$,
- * si $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = 1$,
- * si $X(\omega) = 1$, alors $Y(\omega) = 0$,
- * si $X(\omega) = 2$, alors $Y(\omega) = 1$,
- * si $X(\omega) = 3$, alors $Y(\omega) = 2$.

Ainsi,

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

D'après l'étude précédente,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = 0) &= \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{10}, \\ \mathbf{P}(Y = 1) &= \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}, \\ \mathbf{P}(Y = 2) &= \mathbf{P}(X = -1) + \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

On peut représenter la loi de Y dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

En utilisant la formule de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{13}{10}.$$

2. En utilisant le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}[Y] = |-1 - 1| \frac{1}{5} + |0 - 1| \frac{1}{10} + |1 - 1| \frac{1}{10} + |2 - 1| \frac{2}{5} + |3 - 1| \frac{1}{5}.$$

□

III - Espérance & Variance sans calcul de loi

Solution de l'exercice 15. Remarquons que X_i est le résultat du i^{e} lancer d'un dé équilibré, donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$. Ainsi,

$$\mathbf{E}[X_i] = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2},$$

$$\mathbf{V}(X_i) = \frac{6^2 - 1}{12} = \frac{35}{12}.$$

1. D'après la définition de S ,

$$S = \sum_{i=1}^{30} X_i.$$

En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S] &= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right] = \sum_{i=1}^{30} \mathbf{E}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{30} \frac{7}{2} = 30 \times \frac{7}{2} = 15 \times 7 = 105. \end{aligned}$$

D'après les propriétés de la variance, comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(S) &= \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} \mathbf{V}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{30} \frac{35}{12} = 30 \times \frac{35}{12} = \frac{5 \times 35}{2} = \frac{175}{2}. \end{aligned}$$

2. Comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[P] &= \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{30} X_i\right] = \prod_{i=1}^{30} \mathbf{E}[X_i] \\ &= \prod_{i=1}^{30} \frac{7}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)^{30}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 16. La variable aléatoire X_i prend les valeurs 10 et -5 . De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X_i = 10]) &= \frac{2}{3}, \\ \mathbf{P}([X_i = -5]) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

D'après les définitions,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_i] &= 10 \times \frac{2}{3} - 5 \times \frac{1}{3} = \frac{15}{3} = 5, \\ \mathbf{E}[(X_i)^2] &= 10^2 \times \frac{2}{3} + 5^2 \times \frac{1}{3} = 75. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X_i) = \mathbf{E}[(X_i)^2] - \mathbf{E}[X_i]^2 = 75 - 5^2 = 50.$$

1. D'après la définition de S ,

$$S = \sum_{i=1}^{50} X_i.$$

En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S] &= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{50} X_i\right] = \sum_{i=1}^{50} \mathbf{E}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{50} 5 = 50 \times 5 = 250. \end{aligned}$$

D'après les propriétés de la variance, comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S) &= \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = \sum_{i=1}^{50} \mathbf{V}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{50} 50 = 50 \times 50 = 2500.\end{aligned}$$

2. Comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[P] &= \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{50} X_i\right] = \prod_{i=1}^{50} \mathbf{E}[X_i] \\ &= \prod_{i=1}^{50} 5 = 5^{50}.\end{aligned}$$

□

IV - Loïs de couple

Solution de l'exercice 17.

1. Comme la somme des probabilités vaut 1, alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + p + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} &= 1 \\ 1 + p &= 1 \\ p &= 0.\end{aligned}$$

2. On complète le tableau précédent :

$x \backslash y$	1	2	3	4	$\mathbf{P}(X = x)$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}(Y = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

On obtient ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 0 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \\ \mathbf{E}[Y] &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} = 2.\end{aligned}$$

3. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=1]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=1])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0, \\ \mathbf{P}_{[X=1]}([Y=2]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=2])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0, \\ \mathbf{P}_{[X=1]}([Y=3]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=3])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \\ \mathbf{P}_{[X=1]}([Y=4]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=4])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On peut donc résumer la loi de Y sachant $[X=1]$ dans le tableau suivant :

k	3	4
$\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=k])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4. On remarque que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) &= 0 \\ \mathbf{P}(X=1) \times \mathbf{P}(Y=1) &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \neq 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) \neq \mathbf{P}(X=1) \times \mathbf{P}(Y=1)$$

et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

5. D'après les propriétés des probabilités,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X=0] \cup [Y=1]) &= \mathbf{P}(X=0) + \mathbf{P}(Y=1) - \mathbf{P}([X=0] \cap [Y=1]) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

6. En utilisant la définition,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[XY] &= 0 \times 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 2 \times \frac{1}{8} + 0 \times 3 \times \frac{1}{8} + 0 \times 4 \times 0 + \dots \\ &\quad \dots + 1 \times 1 \times 0 + 1 \times 2 \times 0 + 1 \times 3 \times \frac{1}{8} + 1 \times 4 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{8}.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la question 1.,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X] \mathbf{E}[Y] \\ &= \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \times 2 = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

7. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2] &= 0^2 \times \frac{3}{4} + 1^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \\ \mathbf{E}[Y^2] &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{8} = \frac{21}{4}.\end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{21}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{83}{16} \\ \mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}[Y^2] - \mathbf{E}[Y]^2 = \frac{21}{4} - 2^2 = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \mathbf{V}(Y)}} \\ &= \frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{\frac{83}{16} \times \frac{5}{4}}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

8. En utilisant la linéarité de la covariance par rapport à son premier argument,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X + Y, X) &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(Y, X) = \mathbf{V}(X) + \text{Cov}(X, Y) \\ &= \frac{83}{16} + \frac{3}{8} = \frac{89}{16}.\end{aligned}$$

En utilisant la symétrie de la covariance,

$$\text{Cov}(X, X + Y) = \text{Cov}(X + Y, X) = \frac{89}{16}.$$

En utilisant la linéarité de la covariance par rapport à son premier argument,

$$\text{Cov}(2X, X) = 2\text{Cov}(X, X) = 2\mathbf{V}(X) = 2 \times \frac{89}{16} = \frac{89}{8}.$$

En utilisant la variance d'une somme,

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{81}{16} + \frac{5}{4} + 2 \times \frac{5}{8} = \frac{121}{16}.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. En fonction des valeurs obtenus pour chacun des lancers, les valeurs obtenues par le couple (X, Y) sont

$$\{(i, j), 1 \leq i \leq j \leq 6\}.$$

2. Si $Y = 1$, la plus grande valeur renvoyée est 1, donc les deux dés ont renvoyé la valeur 1. Ainsi,

$$[X = 1] = \{(1, 1)\}.$$

En utilisant l'équiprobabilité des lancers,

$$\mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{36}.$$

3. Si $Y = 1$, alors un des deux dés a renvoyé 1 :

$$[Y = 1] = \{(1, 1), (1, i), (j, 1), 2 \leq i, j \leq 6\}.$$

Comme $|[Y = 1]| = 11$, en utilisant l'équiprobabilité,

$$\mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{11}{36}.$$

4. Si le plus petit et le plus grand des résultats obtenus vaut 1, alors les deux lancers ont renvoyé 1. Ainsi,

$$[X = 1] \cap [Y = 1] = \{(1, 1)\}.$$

D'où,

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{36}.$$

5. Comme $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) \neq \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 1)$, alors X et Y ne sont pas indépendantes. \square

Solution de l'exercice 19.

1. Les résultats obtenus au cours des 4 lancers peuvent varier entre 0 (tous les résultats sont identiques) et 3 (le résultat change à chaque lancer). De plus,

$$\mathbf{P}([X = 0]) = \mathbf{P}(\{FFFF, PPPP\}) = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^3},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = 1]) &= \mathbf{P}(\{FPPP, FFPP, FFFP, PFFF, PPFF, PPPF\}) \\ &= \frac{6}{2^4} = \frac{3}{2^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = 2]) &= \mathbf{P}(\{PFPP, PFFP, PPFP, FPF, FPPF, FFPP\}) \\ &= \frac{6}{2^4} = \frac{3}{2^3}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}([X = 3]) = \mathbf{P}(\{PFPF, FPFP\}) = \frac{2}{2^4} = \frac{1}{2^3}.$$

La loi de X peut être représentée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

En utilisant le tableau,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{3 + 6 + 3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}, \\ \mathbf{E}[X^2] &= 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{3 + 12 + 9}{8} = \frac{24}{8} = 3. \end{aligned}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{12 - 9}{4} = \frac{3}{4}.$$

2. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès dans une suite de 4 expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès égale à $\frac{1}{2}$. Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(4, 1/2)$.

D'après le cours,

$$\mathbf{E}[Y] = 4 \times \frac{1}{2} = 2,$$

$$\mathbf{V}(Y) = 4 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

3. En utilisant l'étude effectuée précédemment pour établir la loi de X , on peut, pour chaque série de lancers, calculer les valeurs de X et de Y . On obtient ainsi le tableau suivant :

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
3	0	0	$\frac{1}{8}$	0	0

4. En utilisant le tableau,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[XY] &= 1 \times 1 \times \frac{1}{8} + 1 \times 2 \times \frac{1}{8} + 1 \times 3 \times \frac{1}{8} + \dots \\ &\quad \dots + 2 \times 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times 3 \times \frac{1}{8} + \dots \\ &\quad \dots + 3 \times 2 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6 + 6}{8} = \frac{24}{8} = 3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = 3 - \frac{3}{2} \times 2 = 0.$$

5. D'après la définition du coefficient de corrélation,

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \mathbf{V}(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{3}{4} \times 1}} = 0.$$

6. D'une part,

$$\mathbf{P}([X = 0, Y = 1]) = 0.$$

D'autre part,

$$\mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X = 0, Y = 1]) \neq \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 1])$$

et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

7. En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y] = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}.$$

En utilisant la formule sur la variance d'une somme,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X + Y) &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{3}{4} + 1 + 0 = \frac{7}{4}, \\ \mathbf{V}(X - Y) &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(-Y) + 2\text{Cov}(X, -Y) \\ &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 20.

1. Les valeurs qui peuvent être prises par le couple (X, Y) sont :

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1).$$

La loi du couple (X, Y) est ainsi :

* si les deux premières boules tirées sont numérotées 1 :

$$\mathbf{P}([X = 1, Y = 1]) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

* si la première boule est numérotée 1 et la seconde est numérotée 2 :

$$\mathbf{P}([X = 1, Y = 2]) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

* si la première boule est numérotée 2 et la seconde est numérotée 1 :

$$\mathbf{P}([X = 2, Y = 1]) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{3}.$$

La loi du couple peut être représentée dans le tableau suivant :

$x \backslash y$	1	2
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0

2. En utilisant les marginales, on obtient :

$x \backslash y$	1	2	$\mathbf{P}([X = x])$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$\mathbf{P}([Y = y])$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	

3. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \\ \mathbf{E}[Y] &= 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

4. Toujours à l'aide du tableau, on obtient :

$$\mathbf{E}[XY] = 1 \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ainsi, d'après la définition de la covariance,

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X] \mathbf{E}[Y] = \frac{5}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{15 - 16}{9} = -\frac{1}{9}.$$

5. D'une part,

$$\mathbf{P}([X = 2, Y = 2]) = 0.$$

D'autre part,

$$\mathbf{P}([X = 2]) \times \mathbf{P}([Y = 2]) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X = 2, Y = 2]) \neq \mathbf{P}([X = 2]) \times \mathbf{P}([Y = 2])$$

et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

6. D'une part,

$$\mathbf{E}[X^2] = 1^2 \frac{2}{3} + 2^2 \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{18 - 16}{9} = \frac{2}{9}.$$

Comme X et Y ont la même loi, alors $\mathbf{V}(Y) = \frac{2}{9}$.

D'après la définition du coefficient de corrélation,

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X) \mathbf{V}(Y)}} \\ &= \frac{-\frac{1}{9}}{\sqrt{\frac{2}{9} \times \frac{2}{9}}} \\ &= -\frac{1}{9} \times \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

7. En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y] = \frac{8}{3}.$$

En utilisant la formule sur la variance d'une somme,

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\mathbf{V}(X - Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(-Y) + 2\text{Cov}(X, -Y)$$

$$= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

□