■ ■ ■

Soit I un segment. Dans tout ce problème, φ désigne une fonction définie sur I et à valeurs dans I. Pour tout réel x_0, on note (x_p) la suite définie pour tout entier naturel p par $x_{p+1} = \varphi(x_p)$. Si (x_p) converge vers un réel ℓ, la convergence est

* au moins linéaire s'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$|x_p - \ell| = O(k^p).$$

* au moins quadratique s'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$|x_p - \ell| = O\left(k^{2^p}\right).$$

Partie I : L'égalité de TAYLOR-LAGRANGE

On suppose que φ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et admet une dérivée d'ordre n sur I. Soit $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que $\alpha < \beta$. Pour tout réel $t \in I$, on note

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k.$$

Soit M tel que $f(\beta) = P(\beta) + M(\beta-\alpha)^n$ et $g : t \mapsto f(t) - P(t) - M(t-\alpha)^n$.

1. Montrer que pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$g^{(k)}(\alpha) = 0.$$

2. Montrer qu'il existe un réel $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $g^{(n)}(\gamma) = 0$.

3. En déduire que

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-\alpha)^n.$$

Partie II : Un théorème de point fixe

On suppose dans cette partie que φ est contractante, i.e. il existe $k \in]0,1[$ telle que φ soit k-lipschitzienne.

4. Montrer que φ admet un unique point fixe, noté ℓ.

5. Montrer que pour tout entier naturel p,

$$|x_p - \ell| \leqslant k^p |x_0 - \ell|.$$

6. En déduire que (x_p) converge vers ℓ.

7. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p < q$,

$$|x_q - x_p| \leqslant \frac{k^p}{1-k}|x_1 - x_0| \text{ et } |\ell - x_p| \leqslant \frac{k^p}{1-k}|x_1 - x_0|.$$

Partie III : Points fixes attractifs & répulsifs

On suppose dans cette partie que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et possède un point fixe ℓ.

8. Point fixe attractif. On suppose dans cette question que $|\varphi'(\ell)| < 1$.

a) Montrer qu'il existe un réel $k \in]0,1[$ et un intervalle $J = [a-h, a+h]$ tel que φ soit k-lipschitzienne sur J.

b) En déduire que $\varphi(J) \subset J$.

c) Montrer que, pour tout $x_0 \in J$, la suite (x_p) converge vers ℓ.

9. Point fixe super attractif. On suppose dans cette question que $\varphi'(\ell) = 0$ et que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ et on note $M_2 = \sup_I |\varphi''|$.

a) Montrer que, pour tout $x \in I$ tel que $x > \ell$, il existe $c_x \in]\ell, x[$ tel que

$$\varphi(x) = \ell + \frac{\varphi''(c_x)}{2}(x-\ell)^2.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel p,

$$|x_p - \ell| \leqslant \frac{2}{M}\left[\frac{M_2|x_0 - \ell|}{2}\right]^{2^p}.$$

c) En déduire que, si x_0 est suffisamment proche de ℓ, alors (x_p) converge vers ℓ.

10. Point fixe répulsif. On suppose dans cette question que $|\varphi'(\ell)| > 1$.

a) Montrer qu'il existe un intervalle $J = [a-h, a+h]$ tel que

$$\forall\, x \in [a-h, a+h] \setminus \{a\}\,,\ |\varphi(x) - \ell| > |x - \ell|\,.$$

b) En déduire que, pour tout $x_0 \in J$, la suite (x_p) ne converge pas vers ℓ.

c) Montrer que la restriction de φ à J est bijective. En notant φ^{-1} sa bijection réciproque, montrer que ℓ est un point fixe attractif pour φ^{-1}.

11. a) Étudier la suite définie par $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi = \sin$.

b) Étudier la suite définie par $x_0 > 0$ et $\varphi = \sinh$.

c) Que peut-on conclure lorsque $\varphi'(\ell) = 1$?

12. Résoudre numériquement l'équation $x^3 + x - 1 = 0$, en utilisant (lorsque c'est possible), la méthode du point fixe avec

a) $\varphi_1(x) = -x^3 + 1$.

b) $\varphi_2(x) = \sqrt[3]{-x+1}$.

c) $\varphi_3(x) = x^3 + 2x - 1$.

d) $\varphi_4(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

e) $\varphi_5(x) = \frac{2x^3+1}{3x^2+1}$.

Partie IV : Méthode de Newton

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I telle que $f(\ell) = 0$ et $f'(\ell) \neq 0$. Sur un voisinage de ℓ, on définit $\varphi : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

13. Interpréter géométriquement la construction de la suite (x_p).

14. Montrer que, pour x_0 suffisamment proche de ℓ, la suite (x_p) converge vers ℓ.

15. Déterminer une estimation de la rapidité de convergence.

Partie V : Méthode de la sécante

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I telle que $f(\ell) = 0$ et $f'(\ell) \neq 0$. Soient x_0 et x_1 tels que $x_0 < \ell < x_1$. Pour tout entier naturel p non nul, on pose

$$\tau(x_p, x_{p-1}) = \frac{f(x_p) - f(x_{p-1})}{x_p - x_{p-1}} \text{ et } x_{p+1} = x_p - \frac{f(x_p)}{\tau(x_p, x_{p-1})}.$$

On notera $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

16. Interpréter géométriquement la construction de cette suite.

17. Soit (r_n) une suite de réels positifs tels que $r_{n+1} \leqslant r_n r_{n-1}$. On suppose que $0 < r_0 < 1$ et $0 < r_1 < 1$.

a) Montrer par récurrence que (r_n) est bornée par 1.

On pose $s_0 = r_0$, $s_1 = r_1$ et $s_{n+1} = s_n s_{n-1}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $r_n \leqslant s_n$.

c) Montrer qu'il existe deux réels α, β tels que pour tout entier naturel n,

$$\ln(s_n) = \alpha\rho^n + \beta(-\rho)^{-n}.$$

d) En déduire que $\alpha > 0$, puis que pour tout entier naturel n,

$$\ln(s_n) \geqslant \alpha\rho^n - |\beta|.$$

e) Montrer qu'il existe deux constantes strictement positives r et C telles que $r < 1$ et pour tout entier naturel n,

$$r_n \leqslant C r^{\rho^n}.$$

18. Montrer que pour tout entier naturel p,

$$x_{p+1} - \ell = (x_p - \ell)\frac{\tau(x_p, x_{p-1}) - \tau(x_p, \ell)}{\tau(x_p, x_{p-1})}.$$

19. Soit $M \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer qu'il existe un intervalle $J = [\ell - h, \ell + h]$ tel que

$$\forall\, x \in J,\ \left|f'(x)\right| \geqslant M.$$

20. En déduire que dès que x_p, x_{p-1} sont dans J,

$$|\tau(x_p, x_{p-1})| \geqslant M.$$

On note $M_2 = \sup\limits_I |f''|$.

21. Montrer que L est bien définie.

22. En déduire que si x_p et x_{p-1} sont dans J, alors

$$\left|\frac{\tau(x_p, x_{p-1}) - \tau(x_{p-1}, \ell)}{\ell - x_p}\right| \leqslant \frac{M_2}{2}.$$

23. En posant $r_p = \frac{M_2}{2M}|x_p - x|$ et $\varepsilon < \min\{\alpha, 2M/M_2\}$, montrer que pour tout $(x_0, x_1) \in J^2$, (x_p) converge vers ℓ et déterminer une majoration de la rapidité de convergence.

Mathématiciens

Newton Isaac (4 jan. 1643 à Woolsthorpe-31 mar. 1727 à Londres).
Taylor Brook (18 août 1685 à Edmonton-29 déc. 1731 à Londres).
Lagrange Joseph-Louis (25 jan. 1736 à Turin-10 avr. 1813 à Paris).