Devoir en temps libre

À rendre le lundi 03/02/2025

■ ■ ■

Exercice 1.

Partie 1

Dans cette partie, on considère trois suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ définies par la donnée des premiers termes $a_1 = \dfrac{3}{8}$, $b_1 = 0$ et $c_1 = \dfrac{5}{8}$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} &= \frac{2}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{3}{11}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{4}{11}a_n + \frac{3}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{5}{11}a_n + \frac{5}{11}b_n + \frac{4}{11}c_n \end{cases}$$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n + b_n + c_n = 1$.

On définit trois suites auxiliaires $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ et $(z_n)_{n\geqslant 1}$ par les relations : pour tout entier naturel n non nul,

$$x_n = a_n + b_n + c_n,\ y_n = -a_n + 2b_n - c_n \text{ et } z_n = -5a_n - 5b_n + 7c_n.$$

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.

3. a) Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{11}$.

b) Donner, pour tout entier naturel n non nul, une expression de y_n en fonction de n.

4. a) Montrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.

b) Donner, pour tout entier naturel n non nul, une expression de z_n en fonction de n.

5. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{1}{3}(x_n + y_n)$ et que $c_n = \dfrac{1}{12}(5x_n + z_n)$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de x_n, de y_n et de z_n.

c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de a_n, de b_n et de c_n en fonction de n.

6. Déterminer les limites de $(a_n)_{n\geqslant 1}$, de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(c_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie 2

Un étang contient 3 goujons, 5 truites et 4 perches. Afin de ne pas vider l'étang, un pêcheur décide d'attraper un premier poisson et de le mettre dans son seau puis, à chaque fois qu'il attrape un poisson, il relâche sa dernière prise afin de placer la nouvelle dans son seau. On suppose qu'à chaque prise, le pêcheur attrape l'un des poissons disponibles dans l'étang avec équiprobabilité.

Cependant, pour le premier poisson pêché, les perches prennent peur lorsque le pêcheur lance sa ligne dans l'eau et elles se réfugient au fond de l'étang, ce qui fait qu'il devient impossible d'en attraper une. Après le premier poisson, les perches s'habituent au pêcheur et peuvent être attrapées comme n'importe quel autre poisson.

Pour tout entier naturel n non nul, on note

- G_n l'événement « le n^{e} poisson pêché est un goujon », de probabilité g_n,
- P_n l'événement « le n^{e} poisson pêché est une perche », de probabilité p_n,
- T_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ poisson pêché est une truite », de probabilité t_n.

7. Justifier que $g_1 = \dfrac{3}{8}$, $p_1 = 0$ et $t_1 = \dfrac{5}{8}$.

8. a) Donner les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}_{G_1}(G_2)$ et $\mathbf{P}_{T_1}(G_2)$.

b) En déduire la probabilité que le deuxième poisson attrapé soit un goujon.

9. Sachant que le pêcheur vient d'attraper son deuxième poisson et qu'il s'agit d'un goujon, quelle est la probabilité que le premier poisson pêché soit une truite ?

10. Soit n un entier naturel non nul.

a) Donner les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}_{G_n}(G_{n+1})$, $\mathbf{P}_{P_n}(G_{n+1})$ et $\mathbf{P}_{T_n}(G_{n+1})$.

b) Donner l'expression de g_{n+1} en fonction de g_n, t_n et de p_n à l'aide de la formule des probabilités totales.

c) De même, sans les justifier, donner une expression de p_{n+1} et de t_{n+1} en fonction de g_n, de t_n et de p_n.

11. À l'aide de la Partie 1, en déduire l'expression de g_n, de p_n et de t_n uniquement en fonction de n.

Partie 3

Sur un grand lac, le concours récompense les pêcheurs ayant attrapé le plus de poissons en trois heures. Le lac étant tellement grand qu'on suppose que les chances d'attraper un poisson quel qu'il soit sont identiques et sont indépendantes du nombre de poissons déjà pêchés par les concurrents. Notre pêcheur est sur le lac et se concentre pour faire le plus de prises.

12. On a accès à une base de données `SQL` répertoriant les espèces de poissons présentes dans le lac sous forme d'une table nommée `poissons` dont le schéma relationnel est le suivant.

`poissons`
`id` : INTEGER
`espece` : TEXT
`quantite` : INTEGER
`taille` : INTEGER
`protection` : INTEGER

Chaque enregistrement de la table correspond à une espèce de poissons. Les attributs de la table sont décrits de la manière suivante :

- `id` : un numéro permettant d'identifier une espèce,
- `espece` : le nom de l'espèce,
- `quantite` : le nombre d'individus,
- `taille` : la taille moyenne des individus (en mm),
- `protection` : le statut protégé ou non de l'espèce (1 si protégée ; 0 sinon).

a) Identifier la clef primaire de la table `poissons`.

b) Une étude du lac a été effectuée et il a été constaté une modification de la taille moyenne des goujons, valant désormais 610 mm.
Écrire une requête `SQL` permettant de mettre à jour la base de données concernant la taille moyenne des goujons (dont l'attribut `espece` est "goujon").

c) Écrire une requête `SQL` permettant d'afficher la liste des poissons que les pêcheurs peuvent pécher, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas protégés et dont la taille moyenne est supérieure ou égale à 125 mm.

13. Dans cette question, on découpe les trois heures en périodes de 20 minutes. Pendant chaque période qu'on supposera indépendante, le pêcheur attrape au plus un poisson et la probabilité d'attraper un poisson est de $1/4$.

a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire U donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant une période.

b) Reconnaître la loi de la variable aléatoire V donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant le concours.

c) Quelle est la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille, c'est-à-dire qu'il n'ait attrapé aucun poisson ?

14. Dans cette question, on suppose à présent que le nombre de poissons attrapés par le pêcheur sur toute la durée de l'épreuve est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a) Rappeler $X(\Omega), \mathbf{P}([X = k])$ pour tout $k \in X(\Omega)$, ainsi que l'espérance et la variance de X en fonction de λ.

b) Quelle valeur faut-il donner à λ pour que le nombre moyen de poissons attrapés par le pêcheur sur les trois heures soit identiques dans les **questions 13** et **14** ?

c) Avec la valeur de λ trouvée précédemment, quelle est la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille ?

15. À quelques mètres de sa barque, le pêcheur aperçoit son grand rival. On suppose toujours que le nombre de poissons attrapés par le pêcheur est donné par X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ quelconque. On suppose également que le nombre de poissons attrapés par le rival est donné par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. À la fin du concours, le pêcheur et son rival ont attrapé 15 poissons à eux deux.

a) Justifier que $[X+Y=15] = \bigcup\limits_{k=0}^{15} ([X=k] \cap [Y=15-k])$.

b) Montrer que $\mathbf{P}([X+Y=15]) = \frac{1}{15!} \sum\limits_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \lambda^k \mu^{15-k} \mathrm{e}^{-\lambda-\mu}$.

c) En déduire $\mathbf{P}([X+Y=15])$ en fonction de λ et μ.

d) Calculer, pour tout entier naturel k de $[\![0,15]\!]$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[X+Y=15]}([X=k])$ en fonction de λ, μ et k.

e) On admet qu'il existe une variable aléatoire Z telle que

$$\forall\, k \in [\![0,15]\!],\ \mathbf{P}_{[X+Y=15]}([X=k]) = \mathbf{P}([Z=k]) \,.$$

En remarquant que $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} = 1$, reconnaître la loi de Z.

f) Justifier que $\mathbf{P}_{[X+Y=15]}([X \geqslant Y]) = \mathbf{P}_{[X+Y=15]}([X \geqslant 8])$.
Exprimer, à l'aide d'une somme, la probabilité que le pêcheur ait battu son rival en fonction de λ et μ.