T.D. VIII - Intégration

Solution de l'exercice 1.

1. a) 0

b)

2. a) On dérive par rapport à y, puis on évalue en $y=1$. On obtient $k = f'(1)$.

b) $x \mapsto \lambda x + 4x\ln x$.

c) $f(1) = \lambda = 0$.

d) Non.

3. a) On intègre par rapport à y, sur $\mathbb{R}_+^\star$, puis sur $\mathbb{R}_-^\star$ et enfin en 0.

b)

4. $\square$

I - Primitives & Intégrales

II - Suites d'intégrales

III - Calculs d'intégrales généralisées

IV - Intégrations par parties - Changement de variable

Solution de l'exercice 20. f est continue sur $]0,1[$.
$f(x) \to 0$ lorsque x tend vers 0, donc elle est prolongeable par continuité en 0.
Sous réserve d'existence, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{u}{\ln(1-u)}\,\mathrm{d}u$. Or, $g(u) \to 1$ lorsque $u \to 0$ donc g est prolongeable par continuité en 1.
En effectuant le changement de variables $\varphi(u) = \mathrm{e}^{-u}$, on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Or, $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$. Ainsi,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout ε, il existe ε_0 et M_0 tel que pour tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et tout $M \geqslant M_0$, $\displaystyle\left|\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \ln(2)$ et $\displaystyle\left|\int_M^{2M} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\right| \leqslant \varepsilon\ln(2)$. Ainsi,

$$I = \ln(2).$$

$\square$

V - Calculs d'équivalents