T.D. IX - Variables aléatoires à densité

I - Lois usuelles

Exercice 1. Soit $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier la loi des variables aléatoires suivantes :

1. $X = 3U$.

2. $Y = U + 1$.

3. $Z = \frac{1}{2}X + 1$.

4. $W = X^2$.

5. $H = \ln(X)$.

6. $E = -\ln(X)$.

Exercice 2. Un archer lance deux flèches en direction d'une cible de rayon d'un mètre. On suppose qu'il l'atteint systèmatiquement et que ses lancers sont indépendants. Pour tout $i \in \{1,2\}$, on note R_i la variable aléatoire égale à la distance (en mètres) de la flèche numéro i au centre de la cible et on suppose que $R_i \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$. On note $R = \min\{R_1, R_2\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([R > x]) = \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x])$.

2. En déduire, pour tout x réel, la fonction de répartition F de R.

3. Calculer la probabilité que la flèche la mieux lancée par l'archer soit située à moins de 50cm de la cible.

Exercice 3. Un appareil électronique utilise deux piles dont les durées de vie respectives sont T_1 et T_2. On suppose que T_1 et T_2 sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre 1. L'appareil cesse de fonctionner au bout d'un temps $T = \max\{T_1, T_2\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}([T_1 \leqslant x] \cap [T_2 \leqslant x])$.

2. En déduire, pour tout x réel, la fonction de répartition F de T.

3. Calculer la probabilité que l'appareil cesse de fonctionner, à cause de ses piles, au bout de 6 mois.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Déterminer la loi de Y.

2. On pose $Z = \sqrt{X}$. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

3. On pose $W = X^2$. Déterminer une densité de W.

Exercice 5. On note Φ la fonction définie pour tout x réel par

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

2. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Montrer qu'il existe un unique réel t_0 strictement positif tel que $\mathbf{P}(-t_0 < X < t_0) = 0.95$.

3. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(8,4)$. En utilisant la table de la loi normale, déterminer des valeurs approchées de :

a) $\mathbf{P}(X < 7.5)$.

b) $\mathbf{P}(X > 8.5)$.

c) $\mathbf{P}(6.5 < X < 10)$.

d) $\mathbf{P}_{[X>5]}(X > 6)$.

II - Densités

Exercice 6. On définit la fonction f pour tout t réel positif par

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet une espérance et une variance et les déterminer.

Exercice 7. Soit f la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

Soit φ la fonction définie pour tout x réel par $\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$.

3. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

4. Déterminer l'expression de φ^{-1}.

5. On pose $Y = \varphi(X)$. Montrer que Y est une variable aléatoire dont on précisera la densité.

Exercice 8. (Lois de Pareto) Soit $\alpha > 0$ et f_α la fonction définie pour tout t réel par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{C}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante C telle que f soit une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f_α.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Déterminer l'espérance et la variance de X en discutant selon les valeurs de α.

4. Soit $Y = X^2$. Déterminer une densité puis l'espérance (si elle existe) de Y.

5. Soit $T = \sqrt{X}$. Déterminer une densité puis l'espérance (si elle existe) de Y.

III - Estimation

Exercice 9. Soit $\theta > 0$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$. Pour estimer θ, on considère un 4-échantillon (X_1, X_2, X_3, X_4) de X et on propose les estimateurs suivants :

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} \text{ et } T_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4}{10}.$$

1. Calculer l'espérance de chacun de ces estimateurs.

2. Calculer le risque quadratique de chacun de ces estimateurs.

3. Lequel de ces deux estimateurs vous semble préférable ?

Exercice 10. Soit $\theta > 0$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\theta]$. Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de X. On pose $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

1. Déterminer la loi de M_n, calculer son espérance et sa variance.

2. En déduire que $U_n = \frac{n+1}{2n} M_n$ est un estimateur sans biais de θ.

3. On pose $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de θ.

4. Quel estimateur choisir entre U_n et $\overline{X}_n$?

Exercice 11. Soit θ un réel strictement positif et f la fonction définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-(t-\theta)}$ lorsque $\theta \leqslant t$ et $f(t) = 0$ sinon.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
Soit T une variable aléatoire de densité f, $n \geqslant 2$ et $(T_1, \dots, T_n)$ un n-échantillon de T.

2. Calculer l'espérance et la variance de T.

On pose $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i$.

3. Montrer que Y_n admet une espérance et une variance et les déterminer.

4. Montrer que $\hat{Y}_n = Y_n - 1$ est un estimateur sans biais de θ.

5. Déterminer le risque quadratique de $\hat{Y}_n$.

On pose $Z_n = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} T_i$.

6. Exprimer la fonction de répartition F_n de Z_n en fonction de celle, notée F, de T.

7. En déduire que Z_n est une variable à densité.

8. Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

9. En déduire que $\hat{Z}_n = Z_n - \frac{1}{n}$ est un estimateur sans biais de θ.

10. Déterminer le risque quadratique de $\hat{Z}_n$.

11. Comparer les risques quadratiques de $\hat{Y}_n$ et $\hat{Z}_n$.