

# T.D. IX - Variables aléatoires à densité

## I - Lois usuelles

**Exercice 1.** Soit  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ . Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier la loi des variables aléatoires suivantes :

- |                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>X = 3U</math>.</li> <li>2. <math>Y = U + 1</math>.</li> <li>3. <math>Z = \frac{1}{2}X + 1</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>4. <math>W = X^2</math>.</li> <li>5. <math>H = \ln(X)</math>.</li> <li>6. <math>E = -\ln(X)</math>.</li> </ol> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Exercice 2.** Un archer lance deux flèches en direction d'une cible de rayon d'un mètre. On suppose qu'il l'atteint systématiquement et que ses lancers sont indépendants. Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , on note  $R_i$  la variable aléatoire égale à la distance (en mètres) de la flèche numéro  $i$  au centre de la cible et on suppose que  $R_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ . On note  $R = \min\{R_1, R_2\}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Justifier que  $\mathbf{P}([R > x]) = \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x])$ .
2. En déduire l'expression de la fonction de répartition  $F$  de  $R$ .
3. Calculer la probabilité que la flèche la mieux lancée par l'archer soit située à moins de 50cm de la cible.

**Exercice 3.** Un appareil électronique possède un compartiment accueillant deux piles dont les durées de vie (en mois) respectives sont  $T_1$  et  $T_2$ . On suppose que  $T_1$  et  $T_2$  sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre 1. L'appareil cesse de fonctionner lorsque les deux piles sont vides, i.e. au bout d'un temps  $T = \max\{T_1, T_2\}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Justifier que  $\mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}([T_1 \leq x] \cap [T_2 \leq x])$ .
2. En déduire l'expression de la fonction de répartition  $F$  de  $T$ .
3. Calculer la probabilité que l'appareil cesse de fonctionner, à cause de ses piles, au bout de 6 mois.

**Exercice 4.** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

1. On pose  $Y = \lfloor X \rfloor$ , où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière. Déterminer la loi de  $Y$ .

2. On pose  $Z = \sqrt{X}$ . Déterminer la loi de  $Z$ , son espérance et sa variance.

3. On pose  $W = X^2$ . Déterminer une densité de  $W$ .

**Exercice 5.** On note  $\Phi$  la fonction définie pour tout  $x$  réel par

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

1. Montrer que  $\Phi$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, 1[$ .
2. Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Montrer qu'il existe un unique réel  $t_0$  strictement positif tel que  $\mathbf{P}(-t_0 < X < t_0) = 0.95$ .
3. Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8, 4)$ . En utilisant la table de la loi normale, déterminer des valeurs approchées de :

- |                                                                                                                                            |                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>a) <math>\mathbf{P}(X &lt; 7.5)</math>.</li> <li>b) <math>\mathbf{P}(X &gt; 8.5)</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>c) <math>\mathbf{P}(6.5 &lt; X &lt; 10)</math>.</li> <li>d) <math>\mathbf{P}_{[X &gt; 5]}(X &gt; 6)</math>.</li> </ol> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## II - Densités

**Exercice 6.** On définit la fonction  $f$  pour tout  $t$  réel positif par

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.
2. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ . Montrer que  $X$  admet une espérance et une variance et les déterminer.

**Exercice 7.** Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x$  réel par  $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ .

1. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .

2. Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .

Soit  $\varphi$  la fonction définie pour tout  $x$  réel par  $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

3. Montrer que  $\varphi$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$ .

4. Déterminer l'expression de  $\varphi^{-1}$ .

5. On pose  $Y = \varphi(X)$ . Montrer que  $Y$  est une variable aléatoire dont on précisera la densité.

**Exercice 8. (Lois de Pareto)** Soit  $\alpha > 0$  et  $f_\alpha$  la fonction définie pour tout  $t$  réel par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{C}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante  $C$  telle que  $f$  soit une densité de probabilité.

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f_\alpha$ .

2. Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .

3. Déterminer l'espérance et la variance de  $X$  en discutant selon les valeurs de  $\alpha$ .

4. Soit  $Y = X^2$ . Déterminer une densité puis l'espérance (si elle existe) de  $Y$ .

5. Soit  $T = \sqrt{X}$ . Déterminer une densité puis l'espérance (si elle existe) de  $Y$ .

### III - Estimation

**Exercice 9.** Soit  $\theta > 0$  et  $X$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle  $[0, \theta]$ . Pour estimer  $\theta$ , on considère un 4-échantillon  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  de  $X$  et on propose les estimateurs suivants :

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} \text{ et } T_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4}{10}.$$

1. Calculer l'espérance de chacun de ces estimateurs.

2. Calculer le risque quadratique de chacun de ces estimateurs.

3. Lequel de ces deux estimateurs vous semble préférable ?

**Exercice 10.** Soit  $\theta > 0$  et  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 2\theta]$ . Soit  $n \geq 1$  et  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de  $X$ . On pose  $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ .

1. Déterminer la loi de  $M_n$ , calculer son espérance et sa variance.

2. En déduire que  $U_n = \frac{n+1}{2n} M_n$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ .

3. On pose  $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ . Montrer que  $\bar{X}_n$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ .

4. Quel estimateur choisir entre  $U_n$  et  $\bar{X}_n$  ?

**Exercice 11.** Soit  $\theta$  un réel strictement positif et  $f$  la fonction définie par  $f(t) = e^{-(t-\theta)}$  lorsque  $\theta \leq t$  et  $f(t) = 0$  sinon.

1. Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité.

Soit  $T$  une variable aléatoire de densité  $f$ ,  $n \geq 2$  et  $(T_1, \dots, T_n)$  un  $n$ -échantillon de  $T$ .

2. Calculer l'espérance et la variance de  $T$ .

On pose  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ .

3. Montrer que  $Y_n$  admet une espérance et une variance et les déterminer.

4. Montrer que  $\hat{Y}_n = Y_n - 1$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ .

5. Déterminer le risque quadratique de  $\hat{Y}_n$ .

On pose  $Z_n = \min_{1 \leq i \leq n} T_i$ .

6. Exprimer la fonction de répartition  $F_n$  de  $Z_n$  en fonction de celle, notée  $F$ , de  $T$ .

7. En déduire que  $Z_n$  est une variable à densité.

8. Déterminer l'espérance et la variance de  $Z_n$ .

9. En déduire que  $\hat{Z}_n = Z_n - \frac{1}{n}$  est un estimateur sans biais de  $\theta$ .

10. Déterminer le risque quadratique de  $\hat{Z}_n$ .

11. Comparer les risques quadratiques de  $\hat{Y}_n$  et  $\hat{Z}_n$ .