



Partie I : Préliminaires

Soient q, k, p trois entiers tels que $0 \leq q \leq k \leq p$.

1. Montrer que $\binom{p}{k} \cdot \binom{k}{q} = \binom{p}{q} \cdot \binom{p-q}{p-k}$.

2. En déduire $\sum_{\ell=q}^p (-1)^{p-\ell} \binom{p}{\ell} \binom{\ell}{q} = \delta_{p,q}$, où $\delta_{p,q} = 0$ si et seulement si $p \neq q$.

3. Soient n un entier naturel, $(a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et $(b_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ deux familles de réels. On suppose que pour tout entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{q=0}^p \binom{p}{q} a_q = b_p$. Pour tout entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, exprimer $\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b_k$ en fonction de a_p .

Partie II : Nombre de surjections

Pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note S_n^p le nombre d'applications surjectives de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Par convention, on pose $S_n^0 = S_0^n = 0$ et $S_0^0 = 1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer S_n^1, S_n^2, S_n^n .

b) Soit $p > n$. Déterminer S_n^p .

c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p^n = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} S_n^k$.

d) On suppose n différent de 0. En déduire que

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, S_n^p = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

5. a) On suppose que $2 \leq p \leq n$. En considérant la restriction à $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ d'une surjection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, montrer que

$$S_n^p = p \left(S_{n-1}^p + S_{n-1}^{p-1} \right).$$

b) Cette relation est-elle encore vraie lorsque $1 \leq p \leq n$?

c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $S_{n+1}^n = \frac{n}{2}(n+1)!$.

Partie III : Nombre de partitions

Soit n un entier naturel quelconque, E un ensemble de cardinal n et k un entier naturel non nul. On dit que $\{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E en k classes si et seulement si

$$(i). \bigcup_{i=1}^k A_i = E,$$

$$(ii). \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, A_i \neq \emptyset,$$

$$(iii). \forall i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket, A_i \cap A_j = \emptyset.$$

On note R_n^k le nombre de partitions de E en k classes. On convient que $R_n^0 = 0$ si $n \geq 1$ et $R_0^0 = 1$. On note $R(n)$ le nombre de partitions de E et on convient que $R(0) = 1$.

6. Montrer que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < k$, alors $R_n^k = 0$.

7. a) Montrer que pour tout entier naturel n , $R(n) = \sum_{k=0}^n R_n^k$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $R(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} R(k)$.

c) Calculer $R(n)$ pour $n \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

d) Montrer que pour tout entier $n \geq 5$, alors $R(n) \geq 2^n$.

e) Montrer que pour tout entier naturel n , $R(n) \leq n^n$.

8. Montrer que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $R_n^k = \frac{S_n^k}{k!}$.