

T.D. IX - Variables aléatoires à densité

I - Études de densités

Exercice 1. Soit f la fonction définie pour tout t réel par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } t \in [5, 10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Représenter graphiquement la fonction f .
- b) Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f .

2. a) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- b) Représenter graphiquement la fonction F .

3. Déterminer les probabilités suivantes :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> a) $P(X < 7)$. b) $P(5 < X < 6)$. c) $P(3 < X < 9)$. d) $P(X \geq 8)$. | <ol style="list-style-type: none"> e) $P_{X>6}(X < 7)$. f) $P_{X<7}(X > 6)$. g) $P_{X>7}(X > 6)$. h) $P_{X<6}(X > 7)$. |
|--|--|

4. a) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
- b) Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 2. Soit f la fonction définie pour tout t réel par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } t \in [10, 13] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Représenter graphiquement la fonction f .
- b) Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire de densité f .

2. a) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- b) Représenter graphiquement la fonction F .
3. Déterminer les probabilités suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> a) $P(X < 10)$. b) $P(10 < X < 12)$. c) $P(9 < X < 11)$. d) $P(X \geq 11)$. | <ol style="list-style-type: none"> e) $P_{X>11}(X < 12)$. f) $P_{X<12}(X > 11)$. g) $P_{X>12}(X > 11)$. h) $P_{X<11}(X > 12)$. |
|---|--|

4. a) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
- b) Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 3. Soit a un réel et f la fonction définie pour tout t réel par

$$f(t) = \begin{cases} a e^{2-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Déterminer la valeur de a pour laquelle f est une densité de probabilité.
- b) Représenter graphiquement f .

Soit X une variable aléatoire de densité f .

2. Déterminer la fonction de répartition F de X .
 - a) Représenter graphiquement la fonction F .
 3. Déterminer les probabilités suivantes :
- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> a) $P(X \leq 3)$. b) $P(1 < X < 2)$. | <ol style="list-style-type: none"> c) $P(0 < X < 3)$. d) $P(X \geq 4)$. |
|---|---|

4. a) Si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, rappeler la formule et la valeur de $\mathbf{E}[Y]$.
- b) En déduire que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 4. Soit a un réel et f la fonction définie pour tout t réel par

$$f(t) = \begin{cases} a e^{3-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Déterminer la valeur de a pour laquelle f est une densité de probabilité.
- b) Représenter graphiquement f .

Soit X une variable aléatoire de densité f .

2. Déterminer la fonction de répartition F de X .

a) Représenter graphiquement la fonction F .

3. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $\mathbf{P}(X \leq 3)$.

c) $\mathbf{P}(0 < X < 3)$.

b) $\mathbf{P}(1 < X < 2)$.

d) $\mathbf{P}(X \geq 4)$.

4. a) Si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, rappeler la formule et la valeur de $\mathbf{E}[Y]$.

b) En déduire que X admet une espérance et la calculer.

II - Travail sur la fonction de répartition

Exercice 5. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier la loi des variables aléatoires suivantes :

1. $X = 3U$.

4. $W = X^2$.

2. $Y = U + 1$.

5. $H = \ln(X)$.

3. $Z = \frac{1}{2}X + 1$.

6. $E = -\ln(X)$.

Exercice 6. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier la loi des variables aléatoires suivantes :

1. $X = 4U$.

4. $W = X^2$.

2. $Y = U + 2$.

5. $H = \ln(X)$.

3. $Z = \frac{1}{2}X + 1$.

6. $E = -\ln(X)$.

III - Lois usuelles

Exercice 7. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 3)$. En utilisant la table de la loi normale, calculer

1. $\mathbf{P}([X \leq 2])$.

3. $\mathbf{P}([Y < 1])$.

2. $\mathbf{P}([X > 4])$.

4. $\mathbf{P}([3 < Y \leq 10])$.

Exercice 8. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 4)$. En utilisant la table de la loi normale, calculer

1. $\mathbf{P}([X \leq 2])$.

3. $\mathbf{P}([Y < 1])$.

2. $\mathbf{P}([X > 4])$.

4. $\mathbf{P}([3 < Y \leq 10])$.

Exercice 9. Un archer lance deux flèches en direction d'une cible de rayon d'un mètre. On suppose qu'il atteint systématiquement et que ses lancers sont indépendants. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on note R_i la variable aléatoire égale à la distance (en mètres) de la flèche numéro i au rayon de la cible et on suppose que $R_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. On note également $R = \min\{R_1, R_2\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([R > x]) = \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x])$.

2. En déduire, pour tout x réel, la fonction de répartition F de R .

3. Calculer la probabilité que la flèche la mieux lancée par l'archer soit située à moins de 50cm de la cible.

Exercice 10. Un appareil électronique utilise deux piles dont les durées de vie respectives sont T_1 et T_2 . On suppose que T_1 et T_2 sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre 1. L'appareil cesse de fonctionner au bout d'un temps $T = \max\{T_1, T_2\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbf{P}([T < x]) = \mathbf{P}([T_1 < x] \cap [T_2 < x])$.

2. En déduire, pour tout x réel, la fonction de répartition F de T .

3. Calculer la probabilité que l'appareil cesse de fonctionner, à cause de ses piles, au bout de 6 mois.