T.D. IV - Variables aléatoires discrètes

I - Lois usuelles finies

Exercice 1. Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de moyenne p. On note $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer la loi de Y_n.

Exercice 2. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. On note N la variable aléatoire qui vaut 0 si $X_1 = \cdots = X_n = 1$ et $\min\{k \in [\![1,n]\!]\ ;\ X_k = 0\}$ sinon. Déterminer la loi de N.

II - Variables aléatoires finies

Exercice 3. Un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 est lancé une fois. La probabilité d'apparition de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu.

1. Déterminer la loi de X.

2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

3. Déterminer $\mathbf{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.

Exercice 4. Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à vider l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 5. On tire sans remise $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.

1. Calculer la probabilité d'obtenir $1, 3, \dots, 2n-1$ dans cet ordre et consécutivement.

2. Déterminer la probabilité de tirer $1, 3, \dots, 2n-1$ dans cet ordre mais pas forcément consécutivement.

3. On note X la variable aléatoire associée au rang de la dernière boule impaire tirée. Calculer $\mathbf{E}[X]$.

On pourra utiliser la formule $\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$.

Exercice 6.

1. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du triangle de Pascal et une somme télescopique, montrer que $\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.

2. Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On retire une à une et sans remise les boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages effectués jusqu'au retrait de toutes les boules blanches. Déterminer la loi de X. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

III - Lois usuelles infinies

Exercice 7. Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 8. Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note S la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

1. Quelle est la loi de S ?

On appelle *manche* l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note T la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 9. Soit Y une variable aléatoire telle que,

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}\left(Y = k\right) = \mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-(k+1)}.$$

On pose $Z = Y + 1$.

1. Vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(Y = k\right) = 1$.

2. Reconnaître la loi de Z puis en déduire son espérance et sa variance.

3. En déduire l'espérance et la variance de Y.

4. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 10. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \mathbf{P}_{[X>n-1]}\left([X = n]\right) = \frac{2}{3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathbf{P}\left([X > n]\right)$.

1. Justifier que $[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n]$.

2. En déduire que $u_{n-1} - u_n = \mathbf{P}\left([X = n]\right)$.

3. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul,

$$\mathbf{P}_{[X>n-1]}\left([X > n]\right) = 1 - \mathbf{P}_{[X>n-1]}\left([X = n]\right).$$

4. En déduire que pour tout n entier naturel non nul, $u_n = \frac{1}{3} u_{n-1}$.

5. Exprimer, pour tout n entier naturel la valeur de u_n en fonction de n puis reconnaître la loi de X.

6. Exprimer $\mathbf{P}\left([X \leqslant n]\right)$ en fonction de n.

Exercice 11. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $X_{i,m} = |\{k \in [\![1, m]\!]\ ;\ U_k = i\}|$.

1. Déterminer la loi de $X_{i,m}$.

2. Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de la famille $(U_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $Y_i = X_{i,N}$. Déterminer la loi de Y_i.

Exercice 12. Un serveur téléphonique ouvre sa ligne chaque minute. Chaque minute, la probabilité qu'il prenne un client est constante et égale à $\frac{1}{12}$. On note X le nombre d'appels auxquels le serveur a répondu en 1 heure.

1. Déterminer la loi de X, son espérance $\mathbf{E}\left[X\right]$ et sa variance $\mathbf{V}\left(X\right)$.

On suppose qu'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X. On considère l'extrait de la table de la loi de Poisson de paramètre 5 suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}\left([Y = k]\right)$	0,006	0,034	0,084	0,140	0,175	0,175	0,146

2. Déterminer des valeurs approchées de $\mathbf{P}\left(X \leqslant 3\right)$ puis $\mathbf{P}\left(X \geqslant 4\right)$.

IV - Variables aléatoires infinies

Exercice 13. Un sauteur tente de franchir successivement les hauteurs numérotées $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ On suppose que les sauts sont mutuellement indépendants et que la probabilité de franchir la hauteur numéro n vaut $\frac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Calculer la loi de X et vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X = n\right) = 1$.

2. Soit Y une variable aléatoire telle que $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$.

a) Exprimer $\mathbf{V}\left(Y\right)$ sous forme d'une somme.

b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-1)^2}{k!}$.

3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}\left(X = k\right) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

1. Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2. Vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X = k\right) = 1$.

3. En déduire la valeur de $\mathbf{P}\left(X = 0\right)$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}\left(X > n\right) = \frac{1}{n+1}$.

V - Fonctions de répartition

Exercice 15. Soit X (resp. Y) une variable aléatoire de fonction de répartition F (resp. G) et $p \in]0,1[$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left[\max\left\{X, Y\right\} \leqslant x\right] = \left[X \leqslant x\right] \cap \left[Y \leqslant x\right].$$

2. On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. On pose $Z = \max\left\{X, Y\right\}$. Exprimer la fonction de répartition F_Z de Z en fonction de celles de X et de Y.

4. En supposant que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, déterminer la fonction de répartition puis la loi de Z.

5. On pose $W = \min\left\{X, Y\right\}$. Exprimer la fonction de répartition F_W de W en fonction de celles de X et de Y.

6. En supposant que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, déterminer la fonction de répartition puis la loi de W.

Exercice 16. Soit X une variable aléatoire réelle et F sa fonction de répartition. On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ est un ensemble fini et que $x_1 < \cdots < x_p$.

1. Montrer que F est à valeurs dans $[0, 1]$.

2. Montrer que F est croissante.

3. Déterminer $F(x)$ pour tout $x < x_1$, puis pour tout $x \geqslant x_p$. En déduire les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. Soient $i \in [\![1, p-1]\!]$ et $x \in [x_i, x_{i+1}[$. Déterminer $F(x)$ et en déduire la valeur de $F(x_i^+) - F(x_i^-)$.

5. En déduire les points de discontinuité de F.

VI - Lois jointes

Exercice 17. Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par

$x \backslash y$	1	2	3	4
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1	p	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Déterminer la valeur de p.

2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) puis les espérances de X et de Y.

3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 1]$.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Calculer $\mathbf{P}\left([X = 0] \cup [Y = 1]\right)$.

6. Calculer la covariance de X et de Y.

7. Calculer $\mathbf{V}\left(X\right)$ et $\mathbf{V}\left(Y\right)$. En déduire $\rho(X, Y)$.

8. Calculer $\mathrm{Cov}\left(X + Y, X\right)$, $\mathrm{Cov}\left(X, X + Y\right)$, $\mathrm{Cov}\left(2X, X\right)$ et $\mathbf{V}\left(X + Y\right)$.

Exercice 18. On lance 2 fois un dé équilibré à 6 faces. On note X le plus grand des résultats obtenus et Y le plus petit.

1. Décrire l'ensemble des valeurs prises par (X, Y).

2. Décrire l'événement $[X = 1]$ puis calculer $\mathbf{P}\left([X = 1]\right)$.

3. Décrire l'événement $[Y = 1]$ puis calculer $\mathbf{P}([Y = 1])$.

4. Décrire puis calculer la probabilité de l'événement $[X = 1] \cap [Y = 1]$.

5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 19. (✐) Une pièce biaisée dont face apparaît avec probabilité p est lancée n fois. Une *excursion* est une série de lancers qui renvoient le même résultat. Par exemple, dans la séquence $FFPFPPF$, il y a 5 excursions : FF, P, F, PP, F. On note R le nombre d'excursions.
Montrer que $\mathbf{E}[R] = 1 + 2(n-1)p(1-p)$ puis calculer $\mathbf{V}(R)$.
Indication : Exprimer R en fonction des événements I_j : « le $(j+1)$-ème lancer est différent du j-ème ».