# T.P. IV - Fonctions & Suites

## I - Fonctions

**Exercice 1. (Fonction définie par morceaux)** On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \mathrm{e}^{-2x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Compléter le script Python suivant pour que la fonction `g` prenne en entrée un réel $x$ et calcule $g(x)$.

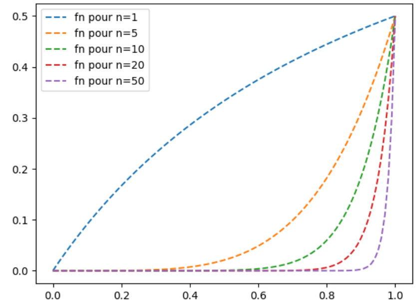
```
import numpy as np

def g(x):
    if x < 0:
        ....
    else:
        ....
```

**1.** Utilisez le script précédent pour afficher les valeurs de $g(-1)$ et $g(\ln(2))$.

```
print(...)
print(...)
```

**Exercice 2. (Une suite d'intégales)** Pour tout $n$ entier naturel, on note $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Le graphique ci-dessous contient des représentations graphiques des fonctions $f_1$, $f_5$, $f_{10}$, $f_{20}$ et $f_{50}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.




**1.** Compléter le code ci-dessous pour qu'il trace les courbes des fonctions ci-dessus.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return ...

X = np.linspace(0, 1, 100)

for n in [...]:
    plt.plot(..., ..., "--", label=r"fn pour n="+str(n))

plt.legend()
...
```

**2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, interpréter géométriquement l'intégrale $I_n$.

**3.** En utilisant le graphique ci-dessus, conjecturer la limite de la suite $(I_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

# II - Suites

**Exercice 3. (Étude de suite)** Pour tout $n$ entier naturel, on pose $c_n = 2 - \frac{3^n+25}{4^{n-1}}$.

**1.** Déterminer $\lim_{n\to+\infty} c_n$.

**2.** On considère le code Python suivant :

```
n = 1
c = 2 - (3**n + 25)/4**(n-1)
while c < 1.95 :
    n = n + 1
    c = 2 - (3**n + 25)/4**(n-1)

print(n)
```

On obtient l'affichage suivant : 16.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

**Exercice 4. (Suite récurrente double)** On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 4u_n + 2u_{n-1}$.
Complter les 3 lignes du script Python ci-dessous pour qu'il calcule et affiche la valeur de $u_{10}$.

```
v = 0
u = 1
for i in range(..., ...):
    a = u
    ...
    v = a

print(u)
```

# III - Suites et fonctions : la dichotomie

**Exercice 5. (Exemple de dichotomie)** On pose $h(x) = x^3 + 1 + \frac{1}{x^3} - 4$.

**1.** Montrer que $h$ est strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

**2.** Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[1,+\infty[$.

**3.** Compléter le code Python suivant pour qu'il renvoie une valeur approchée à $10^{-5}$ près de $\alpha$ par la méthode de dichotomie.

```
def h(x):
    return ....

a = ...
b = ...
while (b - a) ...:
    m = ...
    if h(m) * h(a) <= 0:
        b = ...
    else:
        ...

print(...)
```

# IV - Introduction au produit matriciel

Le module `numpy`, importé via la ligne de commande `import numpy as np` permet de manipuler les matrices avec Python.

* `A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])` permet de définir une matrice ligne par ligne et d'obtenir ainsi la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ qui sera ici stockée dans la variable `A`.
* `3 * A` permet de multiplier `A` par le nombre `3`.
* Si `A` et `B` sont des matrices de mêmes tailles, `A + B` permet d'en calculer la somme.
* Si `A` et `B` sont des matrices de tailles compatibles, `np.dot(A, B)` permet de multiplier les matrices `A` et `B`.

**Exercice 6. (Produit matriciel)** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} & = u_n + v_n \\ v_{n+1} & = 2u_n \end{cases}.$$

Pour tout $n$ entier naturel, on note $C_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

**1.** Calculer $C_0$.

**2.** Montrer que, pour tout $n$ entier naturel, $C_{n+1} = AC_n$.

**3.** Montrer par récurrence que, pour tout $n$ entier naturel, $C_n = A^n C_0$.

**4.** Compléter le script suivant pour qu'il calcule et affiche les termers $u_{12}$ et $v_{12}$.

```
import numpy as np

n = ...

A = np.array([[...], [...]])

C = np.array([1, 0])

for k in range(..., ...):
    C = ...

print(C[0], C[1])
```