

T.D. IV - Espaces vectoriels

I - Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{array}{ll}
 1. (\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 2 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases} & 4. (\mathcal{S}_4) \begin{cases} x + y + z = 5 \end{cases} \\
 2. (\mathcal{S}_2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases} & 5. (\mathcal{S}_5) \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases} \\
 3. (\mathcal{S}_3) \begin{cases} 2x - y + 4z = 2 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases} & 6. (\mathcal{S}_6) \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 8 \\ -x + 2y + 4z = -11 \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 2. Identifier les réels λ pour lesquels le système d'équations suivant possède une solution.

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

II - Familles de vecteurs

Exercice 3. (Familles libres) Montrer que les familles suivantes sont libres :

- $((-1, -1, 1, 2), (1, -1, 1, 5)).$
- $((8, 4, 1, -2), (1, 3, 0, 5)).$
- $((1, 1, 3, 2), (1, -1, 1, 3), (0, 1, 5, 2)).$
- $((1, 2, 3, 4), (-1, 3, 2, 1), (2, 1, -1, 1)).$

Exercice 4. (Familles génératrices) Déterminer une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

- $F = \{(2\lambda, -\lambda, -3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}.$
- $F = \{(2\lambda, 0, -3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}.$
- $F = \{(2\lambda + \mu, 2\mu, 3\lambda - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$
- $F = \{(2\lambda + \mu, 5\lambda + 2\mu, 3\lambda - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$

Exercice 5. (Bases) Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 2x - 3y + z = 0\}.$
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 4x + y + z = 0 \text{ ET } 3x + z = 0\}.$
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y - z = 0 \text{ ET } 2x + 3y + z = 0 \text{ ET } 5x + 5y + z = 0\}.$
- $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 0 \\ x + y - t = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \right\}.$

Exercice 6. (Équations cartésiennes) Pour chacune des questions suivantes, déterminer une équation cartésienne de l'espace vectoriel.

- Vect $\{(1, 1, 2), (1, 0, 1)\}.$
- Vect $\{(1, 2), (4, 6)\}.$
- Vect $\{(1, 0, 1), (2, 3, 1)\}.$
- Vect $\{(1, 1, 1)\}.$

Exercice 7. (Coordonnées)

- Montrer que $\mathcal{B}_1 = ((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer les coordonnées du vecteur $(8, 4, 2)$ dans cette base.
- Montrer que $\mathcal{B}_2 = ((-1, -1, 1), (1, -1, 1), (2, 2, -1))$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer les coordonnées du vecteur $(8, 4, 2)$ dans cette base.
- Soit $\mathcal{B} = ((-1, -1, 1), (2, 2, -1))$ et $F = \text{Vect } \mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $(3, 3, -1)$ dans la base \mathcal{B} .

III - Questions plus théoriques

Exercice 8. Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n .

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
2. On note $F + G = \{f + g, (f, g) \in F \times G\}$. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
3. Montrer que, en général, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Indication : Exhiber un contre-exemple lorsque $n = 2$.

Exercice 9. Soient $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (1, 1, 1, 3)$, $u_3 = (2, 1, 1, 1)$, $u_4 = (-1, 0, -1, 2)$ et $u_5 = (2, 3, 0, 1)$. On considère les sous-espaces vectoriels U, V de \mathbb{R}^4 définis par $U = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ et $V = \text{Vect}\{u_4, u_5\}$. Quelles sont les dimensions de $U, V, U \cap V$ et $U + V$?

Exercice 10. Soit $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Déterminer la dimension et une base de F .