

# ■ Chapitre 3 ■

## Algèbre linéaire

### Notations.

- $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .
- $I$  désigne un ensemble non vide.
- $(m, n)$  désigne un couple d'entiers naturels tels que  $m \neq 0$ .
- $E, F$  désignent des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

## I. Espaces vectoriels

### I.1 Familles de vecteurs

#### Définition 1 (Combinaison linéaire).

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ . Le vecteur  $x$  est une *combinaison linéaire* de la famille  $(e_i)_{i \in I}$  s'il existe une famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  de scalaires presque tous nuls (i.e.  $\{i \in I ; \lambda_i \neq 0\}$  est fini, noté  $\{\lambda_{i_j}, j \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ ) telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^p \lambda_{i_j} e_{i_j}.$$

#### Remarque.

On étend, de la même manière, les notions de famille libre, génératrice, base, coordonnées à des familles quelconques de vecteurs de  $E$ .

#### ⚙ Exercice 1.

1. Soit  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille de polynômes non nuls et à degrés échelonnés, i.e. pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \deg(P_i) < \deg(P_{i+1})$ . Alors,  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille libre.
2. Montrer que la famille  $(f_a : x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$  est libre.

### I.2 Produit d'espaces vectoriels

#### Propriété 1.

Soit  $(E_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  une famille d'espaces vectoriels. Alors,  $E_1 \times \cdots \times E_m$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Exercice 2.** Montrer que  $\mathbb{K}^n$  est un espace vectoriel.

#### Propriété 2.

Soit  $(E_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  une famille d'espaces vectoriels. Si, pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , l'espace vectoriel  $E_i$  est de dimension finie, alors  $E_1 \times \cdots \times E_m$  est de dimension finie et

$$\dim \left( \bigtimes_{i=1}^m E_i \right) = \sum_{i=1}^m \dim(E_i).$$

**Exercice 3.** Déterminer la dimension du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$ .

### I.3 Somme de sous-espaces vectoriels

#### Définition 2 (Somme & Somme directe).

Soit  $(E_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

(i). La *somme*  $\sum_{i=1}^m E_i$  est l'ensemble

$$\sum_{i=1}^m E_i = \left\{ \sum_{i=1}^m x_i, (x_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \in \prod_{i=1}^m E_i \right\}.$$

(ii). La somme  $\sum_{i=1}^m E_i$  est *directe*, notée  $\bigoplus_{i=1}^m E_i$ , si la décomposition de tout vecteur  $x \in \sum_{i=1}^m E_i$  sous la forme  $\sum_{i=1}^m x_i$  est unique.

(iii). Si  $E = E_i \oplus E_j$ , les sous-espaces vectoriels  $E_i$  et  $E_j$  sont des sous-espaces vectoriels *supplémentaires* de  $E$ .

#### Exercice 4.

1. Montrer que  $\mathbb{K}_n[X] = \sum_{k=0}^n \text{Vect} \{X^k\}$ .

2. Représenter graphiquement 3 sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  qui sont en somme directe.

#### Proposition 3.

La somme  $\sum_{i=1}^m E_i$  est directe si et seulement si

$$\forall (x_i) \in \prod_{i=1}^m E_i, \left( \sum_{i=1}^m x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, x_i = 0_E \right)$$



**Exercice 5.** Montrer que si  $\bigoplus_{i=1}^m E_i$ , alors pour tout  $(i, j) \in I^2$  tel que  $i \neq j$ ,  $E_i \cap E_j = \{0_E\}$ . Montrer que la réciproque est fausse.

#### Définition 3 (Base adaptée).

On suppose que  $E$  est de dimension finie.

(i). Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . La famille  $(e_i)$ , base de  $E$ , est une *base adaptée* à  $F$  s'il existe une renumérotation des vecteurs et un entier naturel  $p$  non nul tels que  $(e_1, \dots, e_p)$  soit une base de  $F$ .

(ii). On suppose que  $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ . La famille  $(e_{i,j})$  est une *base adaptée* à la décomposition en somme directe de  $E$  si, pour tout entier  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , la famille  $(e_{i,j})_{j \in \llbracket 1, m_i \rrbracket}$  est une base de  $E_i$ .

#### Exercice 6.

1. Soit  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une base de  $E$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $E_i = \text{Vect}\{e_i\}$ . Montrer que  $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ .

2. Si  $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$  et, pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $E_i$ , montrer que la juxtaposition  $\bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}_i$  est une base de  $E$ .

**Théorème 1 (Somme & Dimension).**

Soient  $(E_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  des sous-espaces vectoriels de dimension finie de  $E$ . Alors,  $\sum_{i=1}^m E_i$  est de dimension finie et

$$\dim \left( \sum_{i=1}^m E_i \right) \leq \sum_{i=1}^m \dim(E_i).$$

De plus,  $\dim \left( \sum_{i=1}^m E_i \right) = \sum_{i=1}^m \dim(E_i)$  si et seulement si la somme est directe.

**Exercice 7.**

- On suppose que  $\dim(E) \geq 3$ . Montrer que deux hyperplans de  $E$  ne sont jamais en somme directe.
- En notant  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{T}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Cette somme est-elle directe ?

## II. Applications linéaires & Matrices

**Exercice 8. (Commutant)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que le commutant  $\mathcal{C}(A)$  de  $A$ , défini par  $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) ; AM = MA\}$  est un espace vectoriel.

### II.1 Applications linéaires

**Théorème 2 (Somme directe & Applications linéaires).**

On suppose que  $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ . Pour tout indice  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on considère une application linéaire  $\varphi_i$  de  $E_i$  dans  $F$ . Alors, il existe une unique application linéaire  $\varphi$  de  $E$  dans  $F$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , la restriction de  $\varphi$  à  $E_i$  soit égale à  $\varphi_i$ .

**Exercice 9.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u, v$  deux endomorphismes de  $E$ . On pose  $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ ,  $f \mapsto u \circ f \circ v$ . Montrer que  $\varphi = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$  si et seulement si  $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$  ou  $v = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

**Exercice 10.** On suppose que  $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on note  $p_i$  l'application qui à tout vecteur  $x = \sum_{j=1}^m x_j$  associe le vecteur  $x_i$ .

- Montrer que  $p_i$  est un projecteur puis que, si  $i \neq j$ , alors  $p_i p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
- Déterminer  $\sum_{i=1}^m p_i$ .

Réciproquement, soit  $(p_i)$  une famille d'applications linéaires telles que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$ ,  $p_i p_j = \delta_{i,j} p_i$  et  $\text{Id}_E = \sum_{i=1}^m p_i$ . Pour tout entier  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on pose  $E_i = p_i(E)$ .

3. Montrer que  $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ .

**Théorème 3 (Théorème du rang).**

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'application linéaire  $\varphi$  définit un isomorphisme de tout supplémentaire de  $\text{Ker } \varphi$  dans  $\text{Im } \varphi$ .

En particulier, si  $E$  et  $\text{Im } \varphi$  sont de dimension finie, alors

$$\dim(\text{Ker } \varphi) + \text{Rg}(\varphi) = \dim E.$$

**Exercice 11. (Matrices équivalentes)** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  une matrice de rang  $r$ . Montrer qu'il existe  $P \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$  et  $Q \in \mathcal{G}_p(\mathbb{K})$  telles que  $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ .

**Définition 4 (Stabilité, Endomorphisme induit).**

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . L'espace vectoriel  $F$  est *stable* par  $\varphi$  si  $\varphi(F) \subset F$ .

La restriction de  $\varphi$  à  $F$ , i.e. l'endomorphisme  $u$  de  $F$  dans  $F$ , défini pour tout vecteur  $x \in F$  par  $u(x) = \varphi(x)$  est l'endomorphisme *induit* par  $\varphi$  sur  $F$ .

**Exercice 12.** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , l'espace vectoriel  $\mathbb{K}_n[X]$  est stable par dérivation polynomiale.

**Théorème 4 (Commutativité & Stabilité).**

Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux endomorphismes qui commutent. Alors,  $\text{Im } \varphi$  et  $\text{Ker } \varphi$  sont stables par  $\psi$ .

**Propriété 4.**

Soient  $(E_1, \dots, E_m)$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$  et  $\varphi$  un endomorphisme de  $E$ . L'endomorphisme  $\varphi$  stabilise tous les espaces  $E_i$  si et seulement si pour toute base  $\mathcal{B}$  adaptée à la décomposition de  $E$ , il existe des matrices  $A_1, \dots, A_m$  telles que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13.**

1. Déterminer la matrice d'un projecteur  $p$  dans une base adaptée à la décomposition  $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ .

2. Reprendre la question précédente dans le cadre d'une symétrie.

**II.2 Opérations sur les matrices définies par blocs**

**Notations.**

■ Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On notera  $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = [C_1 \ \cdots \ C_p]$ .

Si  $B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$ , alors  $BA = [BC_1 \ \cdots \ BC_p]$ .

■ Plus généralement,  $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}$ ,  $\sum_{i=1}^m n_i = n$  et  $\sum_{j=1}^q p_j = p$ , on peut décomposer une matrice  $A$  en blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,q} \end{pmatrix}.$$

### Propriété 5.



Soient  $A = (A_{i,j})$  et  $B = (B_{i,j})$  deux matrices décomposées en blocs et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Sous réserve de compatibilité des tailles des blocs,

(i).  $A + \lambda B = (A_{i,j} + \lambda B_{i,j})$ .

(ii).  $AB = (C_{i,j})$  se décompose en blocs, où  $C_{i,j} = \sum A_{i,k} B_{k,j}$ .

## II.3 Classes de similitude

### Définition 5 (Trace d'une matrice carrée).

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La *trace* de  $A$ , notée  $\text{Tr}(A)$ , est définie par

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

**Exercice 14.** Déterminer  $\text{Tr}(0_n)$  et  $\text{Tr}(I_n)$ .

### Propriété 6 (Propriétés de la trace).

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

(i).  $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme linéaire.

(ii).  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

(iii). Pour tout entier naturel  $m$ ,  $\text{Tr}((AB)^m) = \text{Tr}((BA)^m)$ .

(iv). Pour toute matrice  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$ .

**Exercice 15.** Déterminer la dimension ainsi qu'une base du noyau de l'application linéaire trace.

### Définition 6 (Matrices semblables).

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont *semblables* s'il existe une matrice inversible  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

**Exercice 16.** Soit  $A$  une matrice scalaire. Déterminer l'ensemble des matrices semblables à  $A$ .

### Propriétés 7 (Classe de similitude).

(i). La relation binaire être *semblable* est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence associée à une matrice  $A$  est sa *classe de similitude*.

(ii). Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ .

**Exercice 17.**



1. Montrer que la réciproque au (ii) est fausse.

2. Montrer que la trace est un invariant de similitude.
3. Montrer que le rang est un invariant de similitude.

**Théorème 5 (Interprétation géométrique).**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme  $\varphi$  sur un espace vectoriel de dimension  $n$ .

**Définition 7.**

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ . La *trace* de  $\varphi$  est la trace de la matrice de  $\varphi$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

**Exercice 18.** Montrer que pour tout projecteur  $p$ ,  $\text{Tr}(p) = \text{Rg}(p)$ .

## II.4 Polynômes d'endomorphismes

**Définition 8 (Polynômes & Matrices).**

Soient  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  et  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ .

(i). Le *polynôme de la matrice*  $M$ , noté  $P(M)$ , est la matrice définie par

$$P(M) = a_0 I_n + \sum_{k=1}^d a_k M^k.$$

(ii). Le *polynôme de l'endomorphisme*  $\varphi$ , noté  $P(\varphi)$ , est l'endomorphisme défini par

$$P(\varphi) = a_0 \text{Id}_E + \sum_{k=1}^d a_k \varphi^k.$$

**Exercice 19.**

1. Soit  $P = X^2 - 3X + 2$ . Calculer  $P(0_2)$ ,  $P(I_2)$ ,  $P\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$ ,  $P\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ ,  $P\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$ .
2. Proposer un algorithme permettant d'évaluer un polynôme de matrices.
3. Soient  $D = \text{Diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  une matrice diagonale et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Exprimer  $P(D)$ .
4. Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $Q \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ . Exprimer  $P(QMQ^{-1})$  en fonction de  $P(M)$ .

**Propriété 8.**

Soient  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ . Alors,

- (i).  $(P + Q)(\varphi) = P(\varphi) + Q(\varphi)$ .
- (ii).  $(PQ)(\varphi) = P(\varphi) \circ Q(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi)$ .
- (iii).  $(P \circ Q)(\varphi) = P(Q(\varphi))$ .

**Exercice 20.** Énoncer la propriété analogue pour les polynômes de matrices.

**Définition 9 (Polynôme annulateur).**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ . Le polynôme  $P$  est un polynôme *annulateur* de la matrice  $M$  (resp. de l'endomorphisme  $\varphi$ ) si  $P \neq 0$  et  $P(M) = 0_n$  (resp.  $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ).

**Exercice 21.**

1. Montrer que toute matrice carrée d'ordre  $n$  possède un polynôme annulateur de degré au plus  $n^2$ .
2. Montrer que, si  $A$  est une matrice inversible, alors  $A^{-1}$  est un polynôme en  $A$ . En déduire que, si  $A$  et  $B$  commutent, alors  $A^{-1}$  et  $B$  commutent.

**Propriété 9.**

Soient  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P(M) = 0$ . Si le coefficient constant de  $P$  est non nul, alors  $M$  est inversible.

**Exercice 22.**

1. En utilisant le polynôme  $P = X^3 - 2X^2 - 1$ , montrer que la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est inversible et déterminer son inverse.
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 15 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}$ .
  - a) Calculer  $A^2 - 7A - 98I_3$ .
  - b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , des réels  $u_n, v_n$  à expliciter tels que  $A^n = u_n A + v_n I_3$ .

**III. Formes linéaires & Hyperplans**

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

**Définition 10 (Forme linéaire).**

Une *forme linéaire* est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

**Exercice 23.** Donner des exemples de formes linéaires.

**Propriété 10 (Applications linéaires coordonnées).**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{K}, \sum_{k=1}^n x_k e_k \mapsto x_i$ . Alors, la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ . Ces applications linéaires sont les *applications linéaires coordonnées* associées à la base  $(e_1, \dots, e_n)$ .

**Exercice 24.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer les applications linéaires coordonnées associées à la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 11 (Hyperplan).**

Un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  est un *hyperplan* de  $E$  si  $\dim(H) = n - 1$ .

**Exercice 25.** Décrire un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  déjà rencontré.

**Théorème 6 (Hyperplan & Formes linéaires).**

- (i). Si  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $E$  non nulle, alors  $\text{Ker } \varphi$  est un hyperplan de  $E$ .
- (ii). Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Il existe une forme linéaire  $\varphi_0$  telle que  $H = \text{Ker } \varphi_0$ . De plus, si  $\varphi$  est une forme linéaire telle que  $\text{Ker } \varphi = H$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\varphi = \lambda \varphi_0$ .

**Exercice 26.** Illustrer ce théorème en dimensions 2 et 3.

**Corollaire 7 (Hyperplans & Équations).**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . L'espace vectoriel  $H$  est un hyperplan de  $E$  si et seulement s'il existe un  $n$ -uplet non nul  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $H = \left\{ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E ; \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\}$ .

L'équation  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$  est une *équation cartésienne* de l'hyperplan  $H$ .

**Exercice 27.**

1. Illustrer ce théorème en dimensions 2 et 3.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que deux hyperplans d'équations respectives  $\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$  et  $\sum_{k=1}^n b_k x_k = 0$  soient égaux.



### Quelques propriétés des endomorphismes nilpotents

**Exercice 28.** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  non nulle et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent, i.e. il existe un entier naturel  $m$  non nul tel que  $\varphi^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. Montrer qu'il existe un unique entier naturel  $p$  tel que  $\varphi^{p-1} \neq 0$  et  $\varphi^p = 0$ . Cet entier est l'indice de nilpotence de  $\varphi$ .

2. Montrer que  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est la matrice d'un endomorphisme nilpotent. Proposer d'autres matrices d'endomorphismes nilpotents.

3. L'ensemble des endomorphismes nilpotents est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  ?

Dans toute la suite,  $\varphi$  désigne un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à  $p$ .

4. Montrer qu'il existe un vecteur  $x_0 \in E$  tel que la famille  $\mathcal{L} = (x_0, \varphi(x_0), \dots, \varphi^{p-1}(x_0))$  soit une famille libre.

5. En déduire que  $p \leq n$ .

6. Lorsque  $p = n$ , déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{L}}(\varphi)$ .

7. Montrer que  $\{0\} \subset \text{Ker } \varphi \subset \dots \subset \text{Ker } \varphi^{p-1} \subset E$ , où toutes les inclusions sont strictes. En déduire qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que pour tout entier  $k$  appartenant à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varphi(\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\}) \subset \text{Vect}\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ . En déduire qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est triangulaire stricte.

On s'intéresse maintenant à la réciproque du dernier résultat.

8. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $V_k = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\}$  et  $V_0 = \{0\}$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(V_k) \subset V_{k-1}$ . Montrer que  $f$  est nilpotent.



### Programme officiel (PCSI)

Systèmes linéaires et calcul matriciel (p. 17)

Polynômes (p. 21)

Espaces vectoriels et applications linéaires (p. 22)

Matrices et déterminants - A - Matrices (p. 25)



### Programme officiel (PSI)

Algèbre linéaire

A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices (p. 6) ; sauf c)

Déterminants



**Mathématiciens**

**HORNER** William (9 juin 1786 à Born-22 sept. 1837 à Bath).