# III - Intégrale sur un segment

**Révisions**

Règles de dérivation.

## I - Primitives

**Définition 1 - Primitive**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Une *primitive* de $f$ est une fonction dérivable $F$ sur $I$ telle que, pour tout $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$.

**Exemple 1**

- Soit $F(x) = x\ln(x) - x$ définie sur $]0, +\infty[$. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors $F$ est dérivable et pour tout $x \in ]0, +\infty[$,

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

  Ainsi, $F$ est une primitive de ln sur $]0, +\infty[$.
- Soit $F(x) = \frac{x^3}{12} + 4x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $F$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = 3\frac{x^2}{12} + 4 \times 2x + 0 = \frac{x^2}{4} + 8x.$$

  Ainsi, $F$ est une primitive de la fonction définie pour tout $x$ réel par $f(x) = \frac{x^2}{4} + 8x$.

**Théorème 1 - Primitives de fonctions continues**

Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet des primitives. Si $F$ et $G$ sont des primitives d'une fonction $f$ continue sur $I$, alors il existe un réel $c$ tel que $\forall\, x \in I$, $F(x) = G(x) + c$.

**Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles**

| Fonction $f$ | Primitive $F$ |
|---|---|
| $c$, $c \in \mathbb{R}$ | $cx$ |
| $x^a$, $a \neq -1$ | $\frac{1}{a+1}x^{a+1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln(x)$ |
| $\mathrm{e}^{ax}$, $a \neq 0$ | $\frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}$ |

**Exemple 2**

- Soit $f(x) = x^5$. Une primitive de $f$ est la fonction définie pour tout $x$ réel par

$$F(x) = \frac{1}{5+1}x^{5+1} = \frac{x^6}{6}.$$

- Soit $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$. Une primitive de $f$ est la fonction définie pour tout $x$ réel par

$$F(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

- Soit $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$. Une primitive de $f$ est la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par

$$F(x) = \frac{1}{-5+1}x^{-5+1} = -\frac{x^{-4}}{4} = -\frac{1}{4x^4}.$$

**Proposition 2 - Primitive de fonctions composées**

Soit $u$ une fonction dérivable telle que $u'$ soit continue.

| Fonction $f$ | Primitive $F$ |
|---|---|
| $\lambda u'(x)$ | $\lambda u(x)$ |
| $u'(x)+v'(x)$ | $u(x)+v(x)$ |
| $u'(x)u^a(x)$, $a\neq -1$ | $\frac{1}{a+1}u^{a+1}(x)$ |
| $\frac{u'(x)}{u(x)}$ | $\ln\lvert u(x)\rvert$ |
| $u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ | $\mathrm{e}^{u(x)}$ |

**Exemple 3**

- Soit $f(x)=\frac{1}{3x}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{x}$. Une primitive de $f$ est la fonction définie pour tout $x>0$ par
$$F(x)=\frac{1}{3}\times\ln(x)=\frac{\ln(x)}{3}.$$
- Soit $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{x}$. Une primitive de $x\mapsto\mathrm{e}^{2x}$ est $x\mapsto\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$. Comme $\sqrt{x}=x^{1/2}$, une primitive de $v(x)=\sqrt{x}$ est
$$V(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{1/2+1}=\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{3/2}=\frac{2x^{3/2}}{3}.$$
Ainsi, une primitive de $f$ est la fonction définie pour tout $x>0$ par
$$F(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\frac{2x^{3/2}}{3}.$$
- Soit $f(x)=\frac{1}{x}\ln(x)$. En notant $u(x)=\ln(x)$, alors $f$ est de la forme $f(x)=u'(x)u(x)$. Ainsi, une primitive de $f$ est la fonction définie pour tout $x>0$ par
$$F(x)=\frac{1}{1+1}(\ln(x))^{1+1}=\frac{(\ln x)^2}{2}.$$
- Soit $f(x)=\frac{1}{x}\ln^4(x)$. En notant $u(x)=\ln(x)$, alors $f$ est de la forme $f(x)=u'(x)u^4(x)$. Ainsi, une primitive de $f$ est la fonction définie pour tout $x>0$ par
$$F(x)=\frac{1}{4+1}(\ln(x))^{4+1}=\frac{(\ln x)^5}{5}.$$
- Soit $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$. En notant $u(x)=x^2+x$, alors $f$ est de la forme $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$. Ainsi, une primitive de $f$ est la fonction définie par
$$F(x)=\ln\left|x^2+x\right|.$$
- Soit $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x}$. En notant $u(x)=x^2+2x$, alors $u'(x)=2x+2=2(x+1)$. Ainsi,
$$f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2(x+1)}{x^2+2x}$$
et une primitive de $F$ est la fonction définie par
$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x\right|.$$
- Soit $f(x)=(3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}$. En posant $u(x)=x^3+4x$, alors $f$ est de la forme $f(x)=u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$. Ainsi, une primitive de $f$ est la fonction déinie par
$$F(x)=\mathrm{e}^{x^3+4x}.$$

## II - Intégrale d'une fonction continue

**Définition 2 - Intégrale d'une fonction continue**

Soient $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $F$ une primitive de $f$. L'intégrale de $f$ sur $[a,b]$ est le réel défini par
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a).$$

**Exemple 4**

En utilisant les primitives usuelles,

- $\displaystyle\int_1^2 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$.
- $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$.
- $\displaystyle\int_3^4 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_3^4 = \frac{\mathrm{e}^{2\times 4}\,2 - \mathrm{e}^{2\times 3}}{2} = \frac{\mathrm{e}^8 - \mathrm{e}^6}{2}$.
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.
- $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+4)\,\mathrm{e}^{x^3+4x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^3+4x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^5 - 1$.
- En utilisant les primitives des fonctions puissances,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} x^{-4}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{-4+1}{x}^{-4+1}\right]_{-2}^{-1} \\ &= \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{3(-1)^3} + \frac{1}{3(-2)^3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3\times 8} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{8}\right] = \frac{7}{24}.\end{aligned}$$

**Théorème 2 - Intégrale et Primitive**

Soient $f$ une fonction continue sur $I$ et $a \in I$. La fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$. En particulier, pour tout réel $x > a$, $F'(x) = f(x)$.

**Exemple 5**

Soit $F$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. La fonction $F$ est dérivable et $F'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, $F'$ est positive et $F$ est croissante.

**Interprétation géométrique**

Si $f$ est à valeurs positives, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de $f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

## III - Propriétés de l'intégrale

**Proposition 3 - Relation de Chasles**

Soient $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$, $b$ et $c$ des réels de $I$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Exemple 6**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = x - 1$ sinon. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 0\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**Proposition 4 - Linéarité de l'intégrale**

Soient $f$, $g$ des fonctions continues sur $[a,b]$ et $\alpha$, $\beta$ des réels. Alors,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Exemple 7**

En utilisant les primitives usuelles,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{12}{x} + 5x^3\right)\mathrm{d}x &= 12\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 5\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x\\ &= 12\left[\ln(x)\right]_1^2 + 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2\\ &= 12\left(\ln(2) - \ln(1)\right) + 5\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}\right)\\ &= 12\ln(2) + \frac{5}{4}\cdot 15.\end{aligned}$$

**Proposition 5 - Croissance de l'intégrale (I)**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$. Si $a \leqslant b$ et, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

**Exemple 8**

Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$ et $0 \leqslant x \leqslant y$. D'après la relation de Chasles,

$$F(y) = \int_0^y \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t + \int_x^y \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = F(x) + \int_x^y \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t.$$

Or, $\mathrm{e}^t \geqslant 0$ pour tout $t \in [x,y]$ et $x \leqslant y$, donc $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t \geqslant 0$. Ainsi, $F(x) \leqslant F(y)$ et $F$ est croissante.

**Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (II)**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

**Exemple 9**

Pour tout $n$ entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \underbrace{(x-1)}_{\leqslant 0}\underbrace{\frac{x^n}{1+x}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant 1$, les bornes de l'intégrale sont bien ordonnées. Comme la fonction intégrée est négative, alors $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, soit $I_{n+1} \leqslant I_n$.
La suite $(I_n)$ est donc décroissante.

**Théorème 3 - Intégration par parties**

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que $u'$ et $v'$ soient continues sur $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Exemple 10 - I.P.P.**

- Calculons $\displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
  Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Alors, $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$. Comme $u$, $v$ sont dérivables et $u'$, $v'$ sont continues sur $[1,2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2\,\mathrm{e}^4}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_1^2\\ &= \mathrm{e}^4 - \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^4}{4} + \frac{\mathrm{e}^2}{4}\\ &= \frac{3\,\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{4}.\end{aligned}$$

- Calculons $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.
  Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. Alors, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$. Comme $u$, $v$ sont dérivables et $u'$, $v'$ sont continues sur $[1,2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [\ln(x)x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln(2) - [x]_1^2\\ &= 2\ln(2) - 2 + 1\\ &= 2\ln(2) - 1.\end{aligned}$$