

# VII - Applications linéaires

## I - Applications linéaires

### I.1 - Définitions

#### Définition 1 - Application linéaire

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . L'application  $f$  est une *application linéaire* si pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  est noté  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ .

- Les applications linéaires sont des *morphismes* entre espaces vectoriels.
- Les applications linéaires bijectives sont des *isomorphismes*.
- Si  $n = p$ , on note  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Ses éléments sont des *endomorphismes*.
- Les endomorphismes bijectifs sont des *automorphismes*.

#### Exemple 1 - Applications linéaires

- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (3x + 2y, x + 2z, x + y + z)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (3x + 2y, x + 2y, x + y)$ .
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3x + 2y$ .
- $\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x$  est un automorphisme.

#### Proposition 1

Si  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ , alors  $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$ .

#### Proposition 2 - Opérations sur les applications linéaires

- Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors,  $\alpha \cdot f : x \mapsto \alpha \cdot f(x)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ .
- Soit  $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Alors,  $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ .
- Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)$ .  $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^q$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

#### Exemple 2 - Opérations sur les applications linéaires

- Si  $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, x + y)$  et  $g : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z)$ , alors
- Si  $f : (x, y) \mapsto x + 2y$  et  $g : (x, y, z) \mapsto (x + z, y + z)$ , alors

$$f + g : (x, y, z) \mapsto (3x + 2y + z, 2x - z).$$

$$f \circ g : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z.$$

### I.2 - Noyau & Image

#### Définition 2 - Noyau, Image

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ .

- Le *noyau* de  $f$ , noté  $\text{Ker}(f)$ , est l'ensemble

$$\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) = 0_{\mathbb{R}^p}\}.$$

- L'*image* de  $f$ , notée  $\text{Im}(f)$ , est l'ensemble

$$\text{Im}(f) = \{f(x), x \in \mathbb{R}^n\}.$$

### Exemple 3 - Calculs de noyau et d'image

Soit  $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, 4x + 2y)$ .

- $(x, y, z) \in \text{Ker } f$  si et seulement si  $f(x, y, z) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{(-\lambda/2, \lambda, \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(-1/2, 1, 0), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

- D'après la définition,

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{(2x + y, 4x + 2y), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(2, 4), (1, 2)\} = \text{Vect}\{(1, 2)\}. \end{aligned}$$

### Proposition 3

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ .

- $\text{Ker } f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .
- $\text{Im } f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^p$ .

### Théorème 1 - Caractérisation des applications linéaires injectives

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes.

- $f$  est injective.
- $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ .

### Exemple 4 - Une preuve d'injectivité

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $f^p = \text{Id}$ . Alors,  $f$  est injective.

En effet, si  $x \in \text{Ker } f$ , alors

$$\begin{aligned} f(x) &= 0_{\mathbb{R}^n} \\ f^{p-1}(f(x)) &= f^{p-1}(0_{\mathbb{R}^n}) \\ f^p(x) &= 0_{\mathbb{R}^n} \\ x &= 0_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ . L'application  $f$  est donc injective.

### Théorème 2 - Théorème du rang (admis)

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Alors,

$$\dim(\text{Ker } f) + \text{Rg } f = \dim(\mathbb{R}^n).$$

### Proposition 4

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est bijective.
- $f$  est injective.
- $f$  est surjective.

### Exemple 5 - Un exemple d'isomorphisme

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $f^p = \text{Id}$ . D'après l'exemple précédent,  $f$  est injective. Ainsi, comme  $f$  est un endomorphisme,  $f$  est bijective.

## II - Matrices

### II.1 - Définitions

#### Définition 3 - Matrices

Soit  $n, p$  deux entiers naturels non nuls.

- Une *matrice* de *taille*  $(n, p)$  est un tableau de nombres réels constitué de  $n$  lignes et de  $p$  colonnes.
- Le *coefficient* d'indice  $(i, j)$  d'une matrice est le coefficient situé à la  $i^e$  ligne et  $j^e$  colonne.
- L'ensemble des matrices de réels à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est noté  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On note généralement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

#### Exemple 6 - Matrices

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ .
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ .

#### Définition 4 - Matrices lignes / colonnes

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

- Si  $n = 1$ , alors  $A$  est une *matrice ligne*.
- Si  $p = 1$ , alors  $A$  est une *matrice colonne*.

#### Définition 5 - Égalité entre matrices

Deux matrices  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  sont *égales* si elles ont même taille et si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $a_{i,j} = b_{i,j}$ .

### II.2 - Opérations

#### Définition 6 - Somme, Multiplication par un réel

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- L'*addition* de matrices de mêmes tailles est obtenue en additionnant les éléments de mêmes indices. Ainsi, la matrice  $A + B$  est la matrice de taille  $(n, p)$  et de coefficients  $(c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  définis par  $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ .
- La *multiplication* d'une matrice par un réel est obtenue en multipliant chacun des coefficients de la matrice par ce réel. Ainsi, la matrice  $\alpha A$  est la matrice de taille  $(n, p)$  et de coefficients  $(d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  définis par  $d_{i,j} = \alpha a_{i,j}$ .

#### Exemple 7 - Opérations sur les matrices

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 3 & -1 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

#### Définition 7 - Matrice nulle

La matrice de taille  $(n, p)$  dont tous les coefficients sont nuls est la *matrice nulle*. Elle est notée  $0_{n,p}$ .

### Proposition 5 - Propriétés de l'addition et de la multiplication par un réel

Soit  $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- *Commutativité.*  $A + B = B + A$ .
- *Associativité.*  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$ .
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ .
- $A + (-1)A = 0_{n,p}$ .

L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.

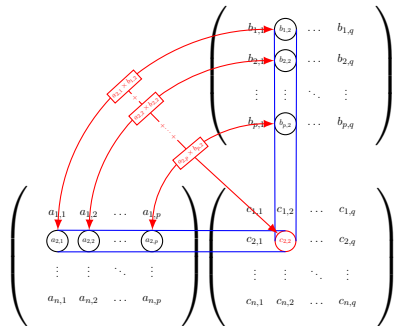
### Définition 8 - Produit de matrices de tailles compatibles

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ . La matrice  $C = A \times B$  est la matrice de taille  $(n, q)$  dont le coefficient d'indice  $(i, j)$  est donné par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

### Exemple 8 - Représentation du produit matriciel

Pour effectuer un produit matriciel on représente souvent les matrices sur deux étages :



### Exemple 9 - Calculs de produits

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y + z \\ 3x - 2y + z \end{pmatrix}.$

### Exemple 10 - Systèmes linéaires

On considère trois suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $z_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$

$$\text{D'une part, } U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + y_n - z_n \\ -2x_n + 2z_n \\ z_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

On montre ensuite par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel,  $U_n = A^n U_0$ .

**Proposition 6 - Propriétés du produit matriciel**

Soit  $A, B, C$  trois matrices dont les tailles sont compatibles et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- *Associativité.*  $(AB)C = A(BC)$ .
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ .
- *Distributivité.*  
 $(A + B)C = AC + BC$  et  $A(B + C) = AB + AC$ .

**Définition 9 - Transposée**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . La *transposée* de la matrice  $M$ , notée  $M^T$ , est la matrice de  $M^T = (\tilde{m}_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  définie par :

$$\tilde{m}_{i,j} = m_{j,i}.$$

**Exemple 11 - Une transposition**

Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , alors  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 7 - Transposée et opérations**

Soit  $A, B, C$  trois matrices de tailles compatibles et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors,

- $(\alpha A + B)^T = \alpha A^T + B^T$ .
- $(AB)^T = B^T A^T$ .

**II.3 - Matrices carrées****Définition 10 - Matrices carrées**

Une *matrice carrée*  $M$  d'ordre  $p$  est une matrice dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes est égal à  $p$ . L'ensemble des matrices carrées d'ordre  $p$  est noté  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

**Définition 11 - Triangulaires, Diagonales, Identité, Symétriques**

- Une matrice est *triangulaire supérieure* si les coefficients en dessous de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *triangulaire inférieure* si les coefficients au dessus de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est *diagonale* si les coefficients en dehors de sa diagonale sont nuls.
- La matrice *identité* est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. La matrice identité d'ordre  $p$  est notée  $I_p$ .
- La matrice *nulle* est la matrice dont tous les éléments valent 0. La matrice nulle d'ordre  $p$  est notée  $0_p$ .
- La matrice  $M$  est *symétrique* si  $M^T = M$ .

**II.4 - Opérations sur les matrices carrées****Proposition 8**

Si  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $p$ , alors

- $AI_p = I_p A = A$ .
- $A0_p = 0_p A = 0_p$ .

### Définition 12 - Puissance d'une matrice

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $p$  et  $n$  un entier naturel. Alors,

- $A^0 = I_p$ .
- $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$ .

### Exemple 12

Nous avons vu précédemment que le calcul de puissances peut être utile pour étudier les suites récurrentes linéaires.

### Proposition 9 - Puissance d'une matrice diagonale

Soit  $D$  une matrice diagonale d'ordre  $p$  et  $n$  un entier naturel. La matrice  $D^n$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de  $D$  élevés à la puissance  $n$ .

### Exemple 13 - Matrices diagonales

- $I_p^n = I_p$ .
- $0_p^n = 0_p$ .
- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ .

### Définition 13 - Matrices qui commutent

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $p$ . Les matrices  $A$  et  $B$  *commutent* si  $AB = BA$ .

### Exemple 14 - Commutativité



- $I_2$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  commutent.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$  ne commutent pas.

### Théorème 3 - Formule du binôme de Newton

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $p$  qui commutent. Alors, pour tout  $n$  entier naturel,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

### Exemple 15 - Application de la formule du binôme

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- D'une part,  $A = I_2 + N$ .
- D'autre part,  $I_2 N = N I_2 = N$ . Ainsi,  $I_2$  et  $N$  commutent.
- On remarque ensuite que  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_2^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k, \text{ car } I_2^{n-k} = I_2 \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + 0_2 + \cdots + 0_2 \\ &= I_2 + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## II.5 - Matrices inversibles

### Définition 14 - Matrice inversible

Une matrice  $A$  d'ordre  $p$  est *inversible* s'il existe une matrice  $B$  telle que  $AB = I_p$ . La matrice  $B$  est l'*inverse* de  $A$  et notée  $A^{-1}$ .

### Exemple 16 - Matrices inversibles et non inversibles

- On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Comme  $AB = I_2$ , alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Comme  $I_p \times I_p = I_p$ , alors  $I_p$  est inversible et son inverse est  $I_p$ .
- Comme  $0_p \times A = 0_p \neq I_p$  pour toute matrice carrée  $A$ , alors la matrice nulle n'est pas inversible.
- Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Un simple calcul montre que  $M^2 - 2M + I_3 = 0_3$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} M^2 - 2M &= -I_3 \\ M(M - 2I_3) &= -I_3 \\ M(2I_3 - M) &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi,  $M$  est inversible et  $M^{-1} = 2I_3 - M$ .

### Proposition 10 - Inversibilité et produit

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $p$ .

- Si  $A$  est inversible, alors  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont inversibles, alors  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

## II.6 - Critères d'inversibilité

### Proposition 11 - Inversibilité des matrices diagonales

Soit  $D$  une matrice diagonale. La matrice  $D$  est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Alors,  $D^{-1}$  est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de  $D$ .

### Exemple 17 - Matrices diagonales

- Soit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . La matrice  $D$  est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3. Comme ils sont tous non nuls, la matrice  $D$  est inversible et  $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .
- Soit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . La matrice  $D$  est diagonale et ses coefficients diagonaux sont 1 et 0. La matrice  $D$  n'est pas inversible.

### Proposition 12 - Inversibilité des matrices triangulaires

Soit  $T$  une matrice triangulaire. La matrice  $T$  est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

### Proposition 13 - Inversibilité des matrices d'ordre 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice d'ordre 2. La matrice  $A$  est inversible si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ . Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

### Exemple 18 - Matrices d'ordre 2, ⚙️

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Comme  $2 \times 4 - 3 \times 1 = 5$  est non nul, alors  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

### Proposition 14

Soit  $A$  une matrice inversible d'ordre  $p$  et  $B, C$  deux matrices carrées d'ordre  $p$ .

- Si  $AB = AC$ , alors  $B = C$ .
- Si  $BA = CA$ , alors  $B = C$ .

### Exemple 19 - Preuve de non inversibilité ➡

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .  
On remarque que  $AB = AC$ . Supposons par l'absurde que  $A$  soit inversible. Alors,  $B = C$ . Cependant,  $B \neq C$ . Ainsi,  $A$  n'est pas inversible.
- Soit  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On remarque que  $N \times N = 0_2$ .  
Supposons par l'absurde que  $N$  soit inversible. Comme  $N \times N = N \times 0_2$ , alors  $N = 0_2$ . On obtient ainsi une contradiction et  $N$  n'est pas inversible.

## II.7 - Inversion par résolution de systèmes

### Théorème 4 - Inverse & Système linéaire

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $p$ . La matrice  $A$  est inversible si et seulement s'il existe une matrice  $B$  telle que pour toutes  $X, Y$  matrices colonnes, le système  $X = AY$  s'écrit  $Y = BX$ . Alors,  $A^{-1} = B$ .

### Exemple 20 - Inverse par résolution de $AX = Y$ , ⚙️

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On pose  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . En utilisant la méthode du pivot de Gauss,

$$AX = Y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ -x + y + z = b \\ x + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ 2y + 2z = a + b & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ y = a - c & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + y = a \\ 2z + 2y = a + b \\ y = a - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ z = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c \\ y = a - c \end{cases}$$

En posant  $B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ , alors  $Y = BX$ . D'où,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exemple 21 - Inverse par pivot sur $I_n$ , ⚙️

On place les matrices  $A$  et  $I_n$  côte à côte. On transforme la matrice  $A$  en la matrice  $I_n$  à l'aide d'opérations élémentaires sur les



lignes. On effectue les mêmes opérations sur  $I_n$ .

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\
 \hline
 2 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\
 \hline
 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\
 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\
 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3
 \end{array}$$

On obtient ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### III - Matrice d'une application linéaire

Dans toute la suite,  $F$  désigne un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ .

### III.1 - Vecteurs, Applications linéaires, Matrices

#### Définition 15 - Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit  $m$  un entier naturel non nul,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$  et  $v_1, \dots, v_m$  des vecteurs de  $F$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on note  $v_i = \sum_{j=1}^p x_{ji} e_j$ . La *matrice des vecteurs*  $(v_1, \dots, v_m)$  dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_m) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}).$$

#### Exemple 22 - Matrice de vecteurs

Posons  $e_1 = (1, 1)$  et  $e_2 = (1, 2)$ . La famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $(x, y) = ae_1 + be_2$ . Alors,

$$\begin{cases} a + b = x \\ a + 2b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x - y \\ b = y - x \end{cases}$$

Soit  $v_1 = (0, 1)$ ,  $v_2 = (1, 0)$  et  $v_3 = (4, 5)$ . Alors,

$$v_1 = -(1, 1) + (1, 2)$$

$$v_2 = 2(1, 1) - (1, 2)$$

$$v_3 = 3(1, 1) + (1, 2)$$

Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Définition 16 - Matrice d'une application linéaire dans deux bases

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$  une base de  $\mathbb{R}^p$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . La *matrice de l'application linéaire*  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ .  
Si  $n = p$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ , on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ .

### Exemple 23 - Matrice d'applications linéaires

- Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{Id}(e_i) = e_i$ . Ainsi,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) = I_n$ .
- Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $\mathbb{R}^p$ . En notant  $f$  l'application nulle de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ , alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(e_i) = 0_{\mathbb{R}^p}$ . Ainsi,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) = 0_{p,n}$ .
- On pose  $e_1 = (1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 2, 1)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$ ,  $f_1 = (1, 1)$ ,  $f_2 = (2, 1)$ . On montre aisément que  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, y - 3z)$ .  
De plus, en utilisant l'exemple précédent,

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (3, -2) = 8(1, 1) - 5(1, 2) \\ f(e_2) &= (4, -2) = 10(1, 1) - 6(1, 2) \\ f(e_3) &= (0, -3) = 3(1, 1) - 3(1, 2) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 3 \\ -5 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

- On note  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$  la base de  $\mathbb{R}^2$  définie à l'exemple précédent. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Id}(\varepsilon_1) &= (1, 0) = 2(1, 1) - (1, 2) \\ \text{Id}(\varepsilon_2) &= (0, 1) = -(1, 1) + (1, 2) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{Id}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## III.2 - Opérations usuelles

### Proposition 15 - Évaluation

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}'$  une base de  $\mathbb{R}^p$ ,  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $u \in \mathbb{R}^n$ . Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

### Théorème 5 - Addition et multiplication par un réel

Soit  $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}'$  une base de  $\mathbb{R}^p$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(af + g) = a\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(g).$$

### Proposition 16 - Composition & Produit matriciel

Soit  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{B}_3$ ) une base de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ,  $\mathbb{R}^q$ ),  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f).$$

### Théorème 6 - Inverse & Matrices

Soit  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . L'application  $f$  est un isomorphisme si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$  est inversible. Alors  $[\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)]^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f^{-1})$ .

### Définition 17 - Morphisme canoniquement associé

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Notons  $\mathcal{C}_n$  (resp.  $\mathcal{C}_p$ ) la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ). Le morphisme *canoniquement associé* à  $A$  est l'application  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_p}(f) = A$ .

### Exemple 24 - Endomorphisme canoniquement associé

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . Alors,

$$f(1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0) + (-1) \cdot (0, 1) = (1, -1)$$

$$f(0, 1, 0) = 2 \cdot (1, 0) + 4 \cdot (0, 1) = (2, 4)$$

$$f(0, 0, 1) = 3 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) = (3, 0)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= (x + 2y + 3z, -x + 4y). \end{aligned}$$

### Corollaire 7 - Caractérisation des matrices inversibles

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $AB = I_n$ , alors  $BA = I_n$ .

### Exemple 25 - Une autre preuve d'inversibilité

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

Si  $AX = 0_{n,1}$ , alors

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \quad \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en notant  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ . Donc  $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ . L'endomorphisme  $f$  est injectif et donc bijectif. Ainsi,  $A$  est inversible.

### Corollaire 8 - Caractérisation des bases

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{R}^n$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . La famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n)$  est inversible.

### Exemple 26 - Une base

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On pose  $v_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$ ,  $v_2 = -e_2 - e_3$  et  $v_3 = e_3$  et  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ .

D'après la définition,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . La matrice

est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont non nuls. Ainsi, la matrice est inversible et  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

## III.3 - Formules de changement de base

### Définition 18 - Matrice de passage

Soit  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$ . La *matrice de passage* de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$  est la matrice  $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(\text{Id}_E)$ .

### Exemple 27 - Suite de l'exemple précédent

La matrice  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Proposition 17 - Inversibilité

Soit  $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$  une matrice de changement de base. Alors,  $P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$  est inversible et  $(P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2})^{-1} = P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ .

### Exemple 28 - Suite de l'exemple précédent

En utilisant une des techniques précédentes,

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\
 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & L_2 \leftarrow -L_2 \\
 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1
 \end{array}$$

Ainsi,  $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Proposition 18 - Changement de base d'un vecteur

Soit  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$ . Alors,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \left(P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ , i.e.  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$ .

**Remarque.** C'est la matrice de passage de l'ancienne base  $\mathcal{B}_1$  à la nouvelle base  $\mathcal{B}_2$  qui est facile à obtenir, mais c'est celle de  $\mathcal{B}_2$  à  $\mathcal{B}_1$  (donc son inverse) qui est utile pour calculer les nouvelles coordonnées du vecteur. On n'échappe donc pas au calcul de l'inverse !

### Exemple 29 - Suite de l'exemple précédent

Soit  $u = (1, 4, 3) \in \mathbb{R}^3$ . Alors,

$$\begin{aligned}
 \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) &= P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $u = v_1 - 6v_2 - 4v_3$ .

### Théorème 9 - Formules de changement de base

Soit  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1'$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2'$  deux bases de  $\mathbb{R}^p$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2'}(f) = P_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \cdot P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}.$$

En particulier, lorsque  $n = p$ ,  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{B}_1' = \mathcal{B}_2'$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1'}(f) = \left(P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}\right)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}.$$

**Remarque.** Certains, comme moyen mnémotechnique, pourront voir dans la dernière formule une sorte de relation de Chasles.

### Exemple 30 - Suite de l'exemple précédent

On pose  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . Alors,

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) &= \left(P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarque alors qu'on peut écrire  $A = PCP^{-1}$ , soit  $A^n = PC^nP^{-1}$ . De plus, la matrice  $C^n$  est aisée à calculer à l'aide de la formule du binôme de Newton.

## III.4 - Rang des matrices

### Définition 19 - Noyau, Image & Rang d'une matrice

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

- (i). L'image de  $M$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  engendré par ses vecteurs colonnes.
- (ii). Le rang de  $M$ , noté  $\text{Rg } M$ , est le rang des vecteurs colonnes de  $M$ .
- (iii). Le noyau de  $M$  est le sous-espace de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  engendré par les vecteurs  $X$  tels que  $MX = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})}$ .

### Proposition 19 - Rang des matrices & Applications linéaires

Soit  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}_2$ ) une base de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ) et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Alors,  $\text{Rg } f = \text{Rg } \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$ .

### Proposition 20 - Rang et Inversibilité

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La matrice  $A$  est inversible si et seulement si  $\text{Rg } A = n$ .

### Exemple 31 - Calcul de rang

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ . En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss,

$$\begin{aligned} \text{Rg}(A) &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 \\ 0 & 11 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \end{matrix} \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

La famille ainsi obtenue est échelonnée donc  $\text{Rg}(A) = 2$ .