# VI - Probabilités

## Préliminaire : Séries convergentes

**Définition 1 - Série**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tout $n$ entier naturel, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la *série de terme général* $u_n$.
- Le réel $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est la *somme partielle* d'ordre $n$.

On note $\sum u_n$ la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exemple 1 - Série géométrique**

Soit $q \neq 1$. On peut déterminer explicitement les sommes partielles de la série de terme général $q^n$ car

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

**Définition 2 - Série convergente, Série divergente**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

- Si $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors la série de terme général $u_n$ *converge*. Sinon, la série de terme général $u_n$ *diverge*.
- Si la série de terme général $u_n$ converge, la limite de $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la *somme* de cette série. On note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

**Théorème 1 - Série géométrique**

- Si $q \in ]-1,1[$, alors la série $\sum q^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

- Si $q \geqslant 1$ ou $q \leqslant -1$, alors la série $\sum q^n$ diverge.

**Théorème 2 - Série exponentielle**

$$\sum \frac{1}{k!} \text{ converge.}$$

**Exemple 2 - Série exponentielle**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

- D'après les propriétés de la somme,

$$T_{n+1} - T_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0.$$

  Ainsi, $(T_n)$ est croissante.

- De plus, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
k(k-1)(k-2)\cdots 2 &\geqslant 2\times 2\times 2\times\cdots\times 2\\
k! &\geqslant 2^{k-1}\\
\frac{1}{k!} &\leqslant \frac{1}{2^{k-1}}\\
\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} &\leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\\
T_n - 2 &\leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\\
T_n &\leqslant \sum_{\ell=1}^{n-1}\frac{1}{2^{\ell}} + 2\\
&\leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} + 2\\
&\leqslant 1 - \frac{1}{2^n} + 2 \leqslant 3.
\end{aligned}$$

  Donc $(T_n)$ est majorée par 3.
- Ainsi, $(T_n)$ est croissante et majorée donc convergente. On peut montrer que sa limite vaut $\mathrm{e} = \exp(1)$.

On peut généraliser ce résultat en montrant que pour tout $x$ réel, la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge et sa somme vaut $\mathrm{e}^x$.

# I - L'univers

**Définition 3 - Expérience aléatoire**

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.

**Exemple 3 - Expériences aléatoires**

Sont des expériences aléatoires les résultats obtenus…
- …à l'issue de deux lancers successifs d'un dé à 6 faces.
- …en tirant une carte d'un paquet de 32 cartes.

**Définition 4 - Univers**

L'*univers*, généralement noté $\Omega$, est l'ensemble des résultats possibles pour une expérience.

**Exemple 4 - Modélisation d'univers**

- Si l'expérience consiste à effectuer 2 lancers consécutifs d'un dé à 6 faces :
$$\Omega = \{(i,j),\ 1\leqslant i,\ j\leqslant 6\} = [\![1,6]\!]^2.$$
- Si l'expérience consite à effectuer une infinité de lancers d'une pièce de monnaie et à noter le premier lancer qui permet d'obtenir Pile, alors $\Omega = \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.

**Définition 5 - Tribu**

Une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est une *tribu* sur $\Omega$ si :
- $\Omega \in \mathscr{F}$,
- pour tout $A\in\mathscr{F}$, alors $\overline{A}\in\mathscr{F}$,
- pourtout $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille d'éléments de $\mathscr{F}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$.

Le couple $(\Omega,\mathscr{F})$ est un *espace probabilisable*.

**Exemple 5 - Exemple de tribu**

- L'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de $\Omega$ est une tribu sur $\Omega$.
- L'ensemble $\{\emptyset,\Omega\}$ est une tribu sur $\Omega$.

**Définition 6 - Événement**

Un *événement* est un élément de la tribu.

**Exemple 6 - Lancers de dé**

Un dé à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On peut considérer les événements suivants :
$A$ : « Obtenir un nombre pair lors du premier lancer. »
$B$ : « La somme des résultats obtenus vaut 7. »

**Définition 7 - Incompatibilité**

Deux événements $A$ et $B$ sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$

**Exemple 7 - Lancers de dé**

Un dé à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On considère les événements :
$A$ : « Obtenir un nombre pair lors du premier lancer. »
$B$ : « La somme des deux lancers vaut 2. »
Alors, les événements $A$ et $B$ sont incompatibles.

**Définition 8 - Événement contraire**

Soit $A$ un événement. L'événement *contraire* de $A$, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des expériences de $\Omega$ qui ne sont pas dans $A$.

**Exemple 8 - Lancers de dé**

Un dé à 6 faces est lancé successivement 2 fois. Si $A$ est l'événement « Obtenir un nombre pair lors du premier lancer. », alors $\overline{A}$ est l'événement « Obtenir un nombre impair lors du premier lancer. »

**Définition 9 - Système complet d'événements**

Un *système complet d'événements* est une famille d'événements $A_1, \ldots, A_n$ tels que

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \emptyset & \forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \\ \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \end{cases}$$

Cette définition peut être étendue à une famille infinie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements.

**Exemple 9 - Lancers de dé**

Un dé à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On considère, pour tout $i \in [\![2, 12]\!]$, l'événements :
$A_i$ : « La somme des deux résultats vaut $i$. »
Alors, $(A_2, \ldots, A_{12})$ est un système complet d'événements.

# II - Probabilités

## II.1 - Mesures de probabilités

**Définition 10 - Probabilité**

Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace probabilisable. Une *probabilité* est une application $\mathbf{P} : \mathscr{F} \to [0, 1]$ telle que
- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
- pour toute famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, $\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé.

**Exemple 10 - Équiprobabilité sur un ensemble fini**

L'*équiprobabilité* est la probabilité définie (lorsque $\Omega$ est fini) sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
Un dé équilibré est lancé successivement 2 fois. On note $A$ l'événement « Le résultat du premier lancer est pair ».

$$A = \{(2i, j),\ 1 \leqslant i \leqslant 3,\ 1 \leqslant j \leqslant 6\}.$$
$$\mathbf{P}(A) = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2}.$$

**Proposition 1 - Propriétés des probabilités**

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A$, $B$ deux événements.
- $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.
- Si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

**Exemple 11 - Lancers de dé**

Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note :
$A$ : « Le résultat du premier lancer est pair. »
$C$ : « Le résultat du second lancer est pair. »
Alors, $A \cup C$ est l'événement « Le résultat d'un des lancers est pair. » On obtient ainsi

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2},$$
$$A \cap C = \{(2i, 2j), 1 \leqslant i, j \leqslant 3\},$$
$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

**Théorème 3 - Loi de probabilité sur un ensemble fini**

On suppose que $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est un ensemble fini et que la tribu est $\mathscr{P}(\Omega)$.

$(i)$. Si $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. En notant, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i = \mathbf{P}(\{x_i\})$, alors $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

$(ii)$. Si $(p_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. En posant, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbf{P}(A) = \sum_{i\ ;\ x_i \in A} p_i$, l'application $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

**Théorème 4 - Loi de probabilité sur $\mathbb{N}$**

On suppose que $\Omega = \mathbb{N}$ et que la tribu est $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

$(i)$. Si $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. En posant, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $p_i = \mathbf{P}(\{i\})$, alors $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$.

$(ii)$. Si $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de réels positifs tels que $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$. Alors, en posant, pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(A) = \sum_{i\ ;\ x_i \in A} p_i$, l'application $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

## II.2 - Probabilités conditionnelles

**Définition 11 - Probabilité conditionnelle**

Soit $A$, $B$ deux événements tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. La *probabilité conditionnelle* de $A$ sachant $B$ est

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

**Exemple 12 - Lancers de dé**

Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On note :
$A$ : « Le résultat du premier lancer est pair. »
$B$ : « Le résultat du premier lancer est un 2. »
Alors,

$$A \cap B = B, \qquad \mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$
$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

**Proposition 2 - Formule des probabilités composées**

Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

**Exemple 13 - Tirages dans une urne**

Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules noires. On effectue 4 tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 2 boules rouges puis 2 boules noires ?
On note :

- $A_1$ : « La première boule tirée est rouge ».
- $A_2$ : « La seconde boule tirée est rouge ».
- $A_3$ : « La troisième boule tirée est noire ».
- $A_4$ : « La quatrième boule tirée est noire ».

Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) &= \mathbf{P}(A_1)\times\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\times\cdots \\ &\quad\cdots\times\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4) \\ &= \frac{10}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{5}{13}\times\frac{4}{12} \\ &= \frac{5}{13\times 7}.\end{aligned}$$

**Proposition 3 - Formule des probabilités totales**

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements et $A$ un événement. Alors,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A\cap A_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_{A_i}(A)\,\mathbf{P}(A_i).$$

Cette propriété peut être étendue à une famille infinie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'événements.

**Exemple 14 - Tirages dans une urne**

On reprend l'exemple précédent. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge ?
Comme $(A_1, \overline{A_1})$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_2) &= \mathbf{P}(A_2\cap A_1) + \mathbf{P}\left(A_2\cap\overline{A_1}\right) \\ &= \frac{10}{15}\times\frac{9}{14} + \frac{5}{15}\times\frac{10}{14} \\ &= \frac{10\times 14}{15\times 14} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

**Proposition 4 - Formule de Bayes**

Soit $A$, $B$ deux événements. Si $\mathbf{P}(A)\neq 0$ et $\mathbf{P}(B)\neq 0$, alors

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}_B(A)\,\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

**Exemple 15 - Tirages dans une urne**

On reprend l'exemple précédent. L'expérimentateur tire successivement 2 boules et cache le résultat de son premier tirage. Sachant que le second tirage est une boule rouge, quelle est la probabilité que le premier tirage soit également une boule rouge ?

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{A_2}(A_1) &= \frac{\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\times\mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(A_2)} \\ &= \frac{\frac{9}{14}\times\frac{10}{15}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{9}{14}.\end{aligned}$$

## III - Indépendance

**Définition 12 - Indépendance**

Deux événements $A$ et $B$ sont *indépendants* si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

**Exemple 16 - Lancers de dé**

Un dé équilibré équilibré à 6 faces est lancé successivement 2 fois. On pose
$A$ : « Le résultat du premier lancer est pair ».
$C$ : « Le résultat du premier lancer est un multiple de 3 ».
Alors,

$$C = \{(3i, j),\ 1 \leqslant i \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant 6\}$$
$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(C) = \frac{2 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{3}$$
$$A \cap C = \{(6, j),\ 1 \leqslant j \leqslant 6\}$$
$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi, $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(C)$. Les événements $A$ et $C$ sont indépendants.

**Définition 13 - Indépendance mutuelle**

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements. Les événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont *mutuellement indépendants* si pour toute partie finie $J$ de $\mathbb{N}$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$.

**Exemple 17 - Lancers d'une pièce**

On lance deux fois une pièce équilibrée. On note $A$ l'événement « Le premier lancer renvoie pile », $B$ l'événement « Le second lancer renvoie face » et $C$ l'événement « Les deux lancers renvoient le même résultat ». Les événements $A$, $B$ et $C$ sont-ils mutuellement indépendants ?
L'univers est ici $\{P, F\}^2$, muni de la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Ainsi,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{(P,P),(P,F)\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\{(P,F),(F,F)\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(\{(P,P),(F,F)\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

De plus,

- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\{(P,F)\}) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$. Les événements $A$ et $B$ sont indépendants.
- $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(\{(P,P)\}) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(C)$. Les événements $A$ et $C$ sont indépendants.
- $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(\{(F,F)\}) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}(C)$. Les événements $B$ et $C$ sont indépendants.
- $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}(C)$. Les événements $A$, $B$ et $C$ ne sont pas mutuellement indépendants.