# VIII - Intégration

## I - Primitives

#### Définition 1 - Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une *primitive* de f est une fonction dérivable F sur I telle que, pour tout  $x \in I$ , F'(x) = f(x).

## Exemple 1

Soit F la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $F(x) = x \ln(x) - x$ . Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors F est dérivable et pour tout  $x \in ]0,1]$ ,

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Ainsi, F est une primitive de ln sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

#### Théorème 1 - Primitives de fonctions continues

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives. Si F et G sont des primitives d'une fonction f continue sur I, alors il existe un réel c tel que  $\forall x \in I$ , F(x) = G(x) + c.

## Exemple 2

Si G est une primitive de la fonction ln sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors il existe un réel c tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = x \ln(x) - x + c.$$

Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles 🖏				
	Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Intervalle	
	c	cx	$\mathbb{R}$	
	$x^a, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}$	
	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0,+\infty[$	
	$e^{ax}, a \neq 0$	$\frac{1}{a} e^{ax}$	$\mathbb{R}$	

## Exemple 3

Une primitive de la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x)=x^{1/4}$  est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} x^{1/4 + 1} = \frac{4}{5} x^{5/4}.$$

# Proposition 2 - Primitive de fonctions composées $\mathfrak{C}^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}}$

Soit u une fonction dérivable telle que u' soit continue.

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$\lambda u'(x) + \mu v'(x)$	$\lambda u(x) + \mu v(x)$
$u'(x)u^a(x), a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1}(x)$
$rac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $
$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
u'(x)v'(u(x))	v(u(x))

Chapitre VIII - Intégration D 2

## Exemple 4

La fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$  est de la forme u'(x)u(x) où  $u(x) = \ln(x)$ . Ainsi, une primitive de f est donnée par  $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$ .

# II - Intégrale sur un segment

## Définition 2 - Intégrale d'une fonction continue 🗱

Soient f une fonction continue sur [a,b] et F une primitive de f. L'intégrale de f sur [a,b] est le réel défini par

$$\int_{a}^{b} f(x) \, \mathrm{d}x = [F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a).$$

## Exemple 5

En utilisant les primitives usuelles,

- $\int_0^1 (3x^2 + 4) e^{x^3 + 4x} dx = \left[ e^{x^3 + 4x} \right]_0^1 = e^5 1.$

## Théorème 2 - Intégrale et Primitive

Soient f une fonction continue définie sur I et  $a \in I$ . On note  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Alors, F est l'unique primitive de f qui s'annule en a. En particulier, pour tout réel  $x \in I$ , F'(x) = f(x).

## II.1 - Propriétés de l'intégrale

#### Définition 3 - Fonctions continues par morceaux

Soit f une fonction définie sur un intervalle  $I = \bigcup_{k=0}^{n} ]a_k, b_k[$ . On suppose que f est continue par morceaux sur I, i.e. continue sur chacun des intervalles  $]a_k, b_k[$  et prolongeable par continuité e,  $a_k$  et  $b_k$ . Alors,  $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x) \, \mathrm{d}x$ .

## Proposition 3 - Relation de Chasles

Soient f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et a, b et c des réels de I. Alors,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

#### Exemple 6 - Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie par f(x) = 0 si  $x \le 1$  et f(x) = x - 1 sinon. Alors,

$$\int_{-1}^{2} f(x) dx = \int_{-1}^{1} f(x) dx + \int_{1}^{2} f(x) dx$$
$$= \int_{-1}^{1} 0 dx + \int_{1}^{2} (x - 1) dx$$
$$= 0 + \left[ \frac{(x - 1)^{2}}{2} \right]_{1}^{2} = 0 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Chapitre VIII - Intégration D 2

## Proposition 4 - Linéarité de l'intégrale

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur [a,b] et  $\lambda$  un réel. Alors,

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx.$$

#### Exemple 7

En utilisant les primitives usuelles,

$$\int_{1}^{2} \frac{12}{x} + 5x^{3} dx = 12 \int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx + 5 \int_{1}^{2} x^{3} dx$$

$$= 12 \left[\ln(x)\right]_{1}^{2} + 5 \left[\frac{x^{4}}{4}\right]_{1}^{2}$$

$$= 12 \left(\ln(2) - \ln(1)\right) + 5 \left(\frac{2^{4}}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 12 \ln(2) + \frac{5}{4} \cdot 15.$$

## Proposition 5 - Croissance de l'intégrale (I)

Soit f une fonction continue par morceaux sur [a, b]. Si  $a \le b$  et, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \ge 0$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \ge 0$ .

#### Exemple 8

Soient 
$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^2} dt$$
 et  $0 \le x \le y$ . Alors,  

$$F(y) = \int_0^y \frac{e^t}{(t+1)^2} dt = \int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^2} dt + \int_x^y \frac{e^t}{(t+1)^2} dt$$

$$= F(x) + \int_0^y \frac{e^t}{(t+1)^2} dt$$

Or, 
$$\frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2} \geqslant 0$$
 pour tout  $t \in [x,y]$  et  $x \leqslant y$ , donc  $\int_x^y \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^2} \, \mathrm{d}t \geqslant 0$ . Ainsi,  $F(x) \leqslant F(y)$  et  $F$  est croissante.

## Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (II)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur [a,b]. Si  $a\leqslant b$  et pour tout  $x\in [a,b],$   $f(x)\leqslant g(x),$  alors  $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$ 

#### Exemple 9

Pour tout  $x \in [0,1], x+1 \ge 1$ . Ainsi

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

## Proposition 7 - Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue par morceaux sur [a,b]. Si  $a \leq b$ , alors

$$\left| \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)| \, \, \mathrm{d}t.$$

#### Exemple 10

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \geqslant 0$ . Comme la fonction exponentielle est croissante,

$$\left| \int_0^x \frac{(-t)^n}{n!} e^t dt \right| \le \int_0^x |(-t)^n| \frac{e^t}{n!} dt \le \frac{e^x}{n!} \int_0^x t^n dt \le \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}.$$

# Proposition 8 - Positivité de l'intégrale des fonctions continues

Soit f une fonction continue sur [a, b]. Si f est à valeurs positives, alors  $f \equiv 0$  si et seulement si  $\int_a^b f(t) dt = 0$ .

# Exemple 11 - Contre-exemple

La propriété précédente est fausse si f est seulement continue par morceaux. Par exemple, si f(x) = 0 sur ]0,1] et f(1) = 1. Alors, f est non nulle et  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ .

# II.2 - Calculs d'intégrales

#### Théorème 3 - Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe  $\mathscr{C}^1$  sur [a,b]. Alors,

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'(x)v(x) dx.$$

## Exemple 12 - 🚓

• Calculons  $\int_0^1 x e^{2x} dx$ .

On pose  $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$  et  $\begin{cases} v'(x) = e^{2x} \\ v(x) = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$ . Comme u et v sont de classe  $\mathscr{C}^1$  sur [0,1], d'après la formule d'intégration

par parties,

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \left[ x \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{2e^4}{2} - \frac{e^2}{2} - \left[ \frac{e^{2x}}{4} \right]_1^2$$
$$= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{3e^4}{4} - \frac{e^2}{4}.$$

• Calculons  $\int_{1}^{2} \ln(x) dx$ .

On pose  $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$  et  $\begin{cases} v'(x) = 1 \\ v(x) = x \end{cases}$ . Comme u et v sont de classe  $\mathscr{C}^{1}$  sur [1,2], d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_{1}^{2} \ln(x) dx = [\ln(x)x]_{1}^{2} - \int_{1}^{2} \frac{1}{x} \cdot x dx$$

$$= 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_{1}^{2} 1 dx$$

$$= 2\ln(2) - [x]_{1}^{2} = 2\ln(2) - 2 + 1 = 2\ln(2) - 1.$$

## Théorème 4 - Changement de variable

Soient  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  et  $\varphi$  une fonction de [a, b] dans I de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

## Exemple 13 - 🗫

Calculons  $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1}$  à l'aide du changement de variable  $t = \ln(u)$ .

La fonction  $\varphi:[1,e]\to[0,1],\ u\mapsto \ln(u)$  est de classe  $\mathscr{C}^1$ . Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u + 1} \times \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \left[ \frac{1}{u} - \frac{1}{1 + u} \right] \, \mathrm{d}u$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u} = [\ln(u)]_1^{\mathrm{e}} - [\ln(1 + u)]_1^{\mathrm{e}}$$

$$= 1 - \ln(1 + \mathrm{e}) + \ln(2).$$

## II.3 - Formule de Taylor avec reste intégral

#### Théorème 5 - Formule de Taylor avec reste intégral

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $f: I \to \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathscr{C}^{n+1}$  sur I. Alors, pour tout  $(a, x) \in I^2$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

## Exemple 14

• La fonction  $f: x \mapsto \ln(1+x)$  est de classe  $\mathscr{C}^2$  sur  $]-1, +\infty[$ . De plus, pour tout x > -1,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
 et  $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ .

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout x>-1,

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{1+0} + \int_0^x \frac{(x-t)}{1!} \times \left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right) dt$$
$$\ln(1+x) - x = -\int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2} dt.$$

Si  $x \ge 0$  et  $t \in [0, x]$ , alors  $\frac{x - t}{(1 + t)^2} \ge 0$  et  $\ln(1 + x) - x \le 0$ .

Si  $-1 < x \le 0$  et  $t \in [x, 0]$ , alors  $\frac{x-t}{(1+t)^2} \le 0$  et  $\ln(1+x)-x \le 0$ .

Finalement,

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x.$$

• Comme la fonction exponentielle est de classe  $\mathscr{C}^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}$ , pour tout x réel,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Si  $x \ge 0$  et  $t \in [0, x]$ , alors

$$0 \leqslant e^{t} \leqslant e^{x}$$

$$0 \leqslant \int_{0}^{x} \frac{(x-t)^{n}}{n!} e^{t} dt \leqslant \int_{0}^{x} \frac{(x-t)^{n}}{n!} e^{x} dt \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{x}$$

$$0 \leqslant e^{x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{k!} \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{x}.$$

D'après le théorème d'encadrement,  $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x$ . Si  $x\leqslant 0$  et  $t\in[x,0]$ , d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \le \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!} e^t dt$$

$$\le \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} dt$$

$$\le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On conclut comme précédemment que  $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x$ .

Chapitre VIII - Intégration D 2

# III - Intégrales généralisées

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de  $\mathbb R$  d'extrémités a et b, où  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

## III.1 - Définition

#### Définition 4 - Convergence

Soit f une fonction continue par morceaux sur I.

- Si I = [a, b[ et f est continue sur [a, b[. L'intégrale généralisée  $\int_a^b f(t) dt$  converge si  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  possède une limite finie lorsque x tend vers b.
- Si I = ]a, b] et f est continue sur ]a, b]. L'intégrale généralisée  $\int_a^b f(t) dt$  converge si  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  possède une limite finie lorsque x tend vers a.
- Si I = ]a, b[ et f est continue sur ]a, b[. L'intégrale généralisée  $\int_a^b f(t) dt$  converge s'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_a^b f(t) dt$  soient convergentes.

Dans tous les cas, si l'intégrale ne converge pas, elle diverge.

## Exemple 15

La fonction ln est continue sur ]0,1]. De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\int_{\varepsilon}^{1} \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_{\varepsilon}^{1} = -1 - \varepsilon \ln(\varepsilon) + \varepsilon.$$

Ainsi,  $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \ln(t) dt = -1$  et  $\int_{0}^{1} \ln(t) dt$  converge.

#### Théorème 6 - Intégrales de référence

(i). Intégrales de Riemann sur  $[1, +\infty]$ .

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1. \text{ Alors,}$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

(ii). Intégrales de Riemann sur [0,1].

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \quad \text{converge si et seulement si } \alpha < 1. \text{ Alors,}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

(iii). Fonction exponentielle.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0. \text{ Alors,}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

(iv). Fonction logarithme.

$$\int_0^1 \ln(t) dt \text{ converge. De plus, } \int_0^1 \ln(t) dt = -1.$$

## III.2 - Propriétés

## Proposition 9 - Linéarité

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  convergent, alors  $\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt$  converge et

$$\int_{a}^{b} (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int_{a}^{b} f(t) dt + \lambda \int_{a}^{b} g(t) dt.$$

Chapitre VIII - Intégration

## Proposition 10 - Relation de Chasles

On suppose que  $\int_a^b f(t) dt$  converge et  $c \in ]a, b[$ . Alors,  $\int_a^c f(t) dt$  et  $\int_a^b f(t) dt$  convergent et

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

## Proposition 11 - Croissance de l'intégrale

On suppose que  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  convergent.

- (i). Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \ge 0$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \ge 0$ .
- (ii). Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leqslant g(x)$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \leqslant \int_a^b g(t) dt.$

## Théorème 7 - Inégalité triangulaire

Si  $\int_a^b |f(t)| dt$  est convergente et  $a \le b$ , alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge et

$$\left| \int_{a}^{b} f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{a}^{b} |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

## Théorème 8 - Positivité

Soit  $f:I\to\mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\int_I |f(t)| \, \mathrm{d}t$  converge. Si  $\int_I |f(t)| \, \mathrm{d}t=0$ , alors f est nulle sur I.

## III.3 - Preuves d'existences

## Proposition 12 - Intégrale faussement impropre

Soit f une fonction continue sur le segment [a, b]. Alors, les intégrales de f sur [a, b], [a, b], [a, b] et [a, b] sont égales.

#### Exemple 16

Montrons que  $\int_0^1 t \ln(t) dt$  est convergente. On note f la fonction définie sur ]0,1] par  $f(t)=t\ln(t)$ .

- La fonction f est continue sur ]0,1].
- D'après les croissances comparées,  $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ . Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0.

Finalement, l'intégrale de f sur ]0,1] est bien définie.

## Proposition 13 - Fonctions à valeurs positives

Si f est valeurs positives sur [a, b[, alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge si et seulement si  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est majorée sur [a, b[.

#### Théorème 9 - Domination locale

Soient f, g deux fonctions continues de [a, b[ dans  $\mathbb{R}_+$ .

- S'il existe un réel c tel que  $\forall x \in [c, b[, 0 \le f(x) \le g(x)]$  et  $\int_{c}^{b} g(t) dt$  converge, alors  $\int_{c}^{b} f(t) dt$  converge.
- Si  $f(x) \sim_b g(x)$ , alors  $\int_a^b f(x) dx$  converge si et seulement si  $\int_a^b g(x) dx$  converge.

Chapitre VIII - Intégration

#### Exemple 17

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étudions  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ .

 $\star x \mapsto x^n e^{-x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ 

 $\star$  Comme  $\lim_{x\to +\infty} x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-x}=0,$ il existe un réel c tel que, pour tout  $x \geqslant c$ .

$$x^{n+2} e^{-x} \le 1$$
, soit  $x^n e^{-x} \le \frac{1}{x^2}$ .

$$\int_{c}^{x} t^{n} e^{-t} dt \leqslant \int_{c}^{x} \frac{1}{t^{2}} dt \leqslant \frac{1}{c} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{c}.$$

Comme  $t^n e^{-t} \ge 0$ , la fonction  $x \mapsto \int_0^x t^n e^{-t} dt$  est croissante et majorée par  $\frac{1}{c}$  donc convergente. Ainsi,  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t} dt converge.$ 

\* Comme  $x \mapsto x^n e^{-x}$  est continue sur [0, c], son intégrale sur ce segment est bien définie.

Finalement,  $\int_{0}^{+\infty} x^n e^{-x} dx$  converge.

• Étudions  $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$ .

 $\star t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$  est continue sur [0,1].

 $\star \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)} \sim_1 \frac{1}{2(1-t)}$ .

Comme  $\lim_{t\to 1} \frac{2(1-t)}{1-t^2} = 1$ , il existe c < 1 tel que pour tout  $x \geqslant c$ ,

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{2(1-x)}{1-x^2}$$
, soit  $\frac{1}{4(1-x)} \leqslant \frac{1}{1-x^2}$ .

$$\int_{c}^{x} \frac{1}{1-t^{2}} dt \geqslant \int_{c}^{x} \frac{4}{(1-t)} dt \geqslant \frac{1}{4} \left(-\ln(1-x) + \ln(1-c)\right).$$

Comme  $\lim_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty$ , l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$  n'est pas convergente.

## III.4 - Méthodes de calculs

Utiliser les méthodes de calcul sur un segment (primitivation, intégration par parties, changement de variable), puis étudier la limite.

D 2

#### Exemple 18

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculons  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ .

• Si n=0. Pour tout  $x\geqslant 0$ .

$$\int_0^x e^{-t} dt = \left[ -e^{-t} \right]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Ainsi,  $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ .

• Si  $n \ge 1$ . Soit  $M \ge 0$ . On pose  $\begin{cases} u(x) = x^n \\ u'(x) = nx^{n-1} \end{cases}$  et  $\begin{cases} v'(x) = e^{-x} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$  Comme

u et v sont de classe  $\mathscr{C}^1$  sur [0,M], d'après la formule d'intégration par parties

$$\int_0^M x^n e^{-x} dx = \left[ -x^n e^{-x} \right]_0^M + \int_0^M nx^{n-1} e^{-x} dx$$
$$= -M^n e^{-M} + n \int_0^M x^{n-1} e^{-x} dx.$$

D'après le théorème des croissances comparées, lorsque  $M \to +\infty$ , on obtient la relation :

$$I_n = nI_{n-1}.$$

 $\bullet$  On montre alors par récurrence que, pour tout n entier naturel,  $I_n = n!$ .