T.D. VI - Calculs de sommes Séries numériques

I - Calculs de sommes

Solution de l'exercice 1.

1. Le terme général de la somme est constant, donc

$$\sum_{k=0}^{5} = 3 = (5+1) \times 3 = 18.$$

2. Le terme général de la somme est constant, donc

$$\sum_{n=3}^{5} 10 = (5-3+1) \times 10 = 30.$$

3. D'après les résultats sur la somme des premiers entiers,

$$\sum_{\ell=1}^{7} \ell = \frac{7(7+1)}{2} = 28.$$

4. En développant le signe somme,

$$\sum_{\ell=2}^{5} \ell^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 54.$$

On pourra éventuellement retenir les formules :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

5. On utilise le résultat concernant la somme des premiers entiers :

$$\begin{aligned}\sum_{k=12}^{27} k &= 12 + 13 + \cdots + 27 = 1 + \cdots + 11 + 12 + \cdots + 27 - (1 + \cdots + 11)\\ &= \frac{27(27+1)}{2} - \frac{11(11+1)}{2} = 312.\end{aligned}$$

$\square$

Solution de l'exercice 2.

1. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{12} 2^k &= 2^5 \times \frac{1-2^{12-5+1}}{1-2} = 2^5 \times \frac{1-2^8}{-1}\\ &= 2^5\left(2^8 - 1\right).\end{aligned}$$

2. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\sum_{n=3}^{10} (-1)^n = (-1)^3 \times \frac{1-(-1)^{10-3+1}}{1-(-1)} = -\frac{1-(-1)^8}{2} = 0.$$

3. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{2^2}\right)^n = \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{4}\right)^n &= \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5}{1-\frac{1}{4}}\\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5}{\frac{3}{4}} = 3\left(1 - \left(\frac{1^5}{4}\right)\right).\end{aligned}$$

4. D'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4}\frac{3^{2n+1}}{2^{2n}} &= \sum_{n=1}^{4}\frac{3^{2n}\times 3}{(2^2)^n} = \sum_{n=1}^{4}\frac{9^n\times 3}{4^n}\\ &= 3\sum_{n=1}^{4}\left(\frac{9}{4}\right)^n = 3\left(\frac{9}{4}\right)\times\frac{1-\left(\frac{9}{4}\right)^4}{1-\frac{9}{4}}\\ &= \frac{27}{4}\times\frac{1-\left(\frac{9}{4}\right)^4}{-\frac{5}{4}}\\ &= -\frac{27}{5}\left(1-\left(\frac{9}{4}\right)^4\right)\\ &= \frac{27}{5}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^4-1\right).\end{aligned}$$

5. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{5}(3^\ell-2) &= \sum_{\ell=1}^{5}3^\ell-\sum_{\ell=1}^{5}2\\ &= 3\times\frac{1-3^5}{1-3}-5\times 2 = \frac{3}{2}(3^5-1)-10.\end{aligned}$$

6. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k}{5^k}+\frac{1}{4^k}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k\\ &= \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\\ &= \frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)+\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\\ &= \frac{5}{3}-\frac{2^{n+1}}{3\times 5^n}+\frac{4}{3}-\frac{1}{3\times 4^n}\\ &= \frac{9}{3}-\frac{2^{n+1}}{3\times 5^n}-\frac{1}{3\times 4^n}.\end{aligned}$$

7. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k+4^k}{5^k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^k+\left(\frac{4}{5}\right)^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k\\ &= \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}}+\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}}\\ &= \frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)+5\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)\\ &= \frac{5}{2}-\frac{3^{n+1}}{2\times 5^n}+5-\frac{4^{n+1}}{5^n}\\ &= \frac{15}{2}-\frac{3^{n+1}+2\times 4^{n+1}}{5^n}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. D'après les propriétés sur les suites arithmétiques,

$$u_n = n\times 4+u_0 = 4n+1.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10}u_k &= \sum_{k=0}^{10}(4k+1) = 4\sum_{k=0}^{10}k+\sum_{k=0}^{10}1 = 4\frac{10(10+1)}{2}+11\\ &= 4\times 5\times 11+11 = 220+11 = 231.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. D'après les résultats sur les suites géométriques,

$$w_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n w_0 = 4\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

2. En utilisant les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{21} w_k &= \sum_{k=5}^{21} 4\left(\frac{1}{5}\right)^k \\ &= 4\left(\frac{1}{5}\right)^5 \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{21-5+1}}{1-\frac{1}{5}} \\ &= \frac{4}{5^5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{21-5+1}}{\frac{4}{5}} \\ &= \frac{1}{5^4}\left(1-\frac{1}{5^{17}}\right).\end{aligned}$$

□

II - Sommes télescopiques

Solution de l'exercice 5. On remarque que, pour tout k entier naturel,

$$u_{k+1} - u_k = \frac{1}{2} w_k = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

En utilisant une somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_{n-1+1} - u_0 = u_n - 0 = u_n.$$

En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

□

Solution de l'exercice 6. On remarque que, pour tout k entier naturel non nul,

$$u_k - u_{k-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}.$$

D'une part, en utilisant une somme télescopique,

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0 \qquad = u_n - 1.$$

D'autre part, en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4} w_{k-1} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} \times \frac{2}{5} \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}} \\ &= \frac{5}{12}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$u_n = 1 + \frac{5}{12}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right).$$

□

Solution de l'exercice 7. On remarque que, pour tout k entier naturel,

$$u_k - u_{k-1} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

En utilisant une somme télescopique,

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n - u_{1-1} = u_n - u_0 = u_n - 1.$$

En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\ &= 2\times\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\ &= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$u_n = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

□

Solution de l'exercice 8. On remarque que, pour tout k entier naturel,

$$v_k - v_{k-1} = (-8)^{k-1}.$$

En utilisant une somme télescopique,

$$\sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1}) = v_n - v_{1-1} = v_n - v_0 = v_n.$$

En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n}(-8)^{k-1} \\ &= \frac{1}{-8}\sum_{k=1}^{n}(-8)^k \\ &= -\frac{1}{8}(-8)^1\frac{1-(-8)^n}{1-(-8)} \\ &= \frac{1-(-8)^n}{9}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$v_n = \frac{1-(-8)^n}{9}.$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. En utilisant la définition de b_n,

$$\begin{aligned}b_{n+1} - b_n - 3^n &= (n+1)3^{n+1-1} - n3^{n-1} - 3^n \\ &= (n+1)3^n - n3^{n-1} - 3^n \\ &= (n+1)3\times 3^{n-1} - n3^{n-1} - 3\times 3^{n-1} \\ &= (3n+3-n-3)3^{n-1} = 2n3^{n-1} = 2b_n.\end{aligned}$$

2. En utilisant la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n}3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

3. En utilisant une somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^{n}(b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0 = b_{n+1}.$$

4. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n} b_k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(b_{k+1} - b_k - 3^k\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}(b_{k+1}-b_k) - \sum_{k=0}^{n} 3^k\right], \text{ d'après } \mathbf{2.} \text{ et } \mathbf{3.}\\ &= \frac{1}{2}\left(b_{n+1} - \frac{3^{n+1}-1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((n+1)3^n - \frac{3^{n+1}-1}{2}\right)\\ &= \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 10.

1. D'après les propriétés du logarithme,

$$u_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k).$$

2. En utilisant les sommes télescopiques,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

3. Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, d'après la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = +\infty.$$

Ainsi, $\sum u_k$ diverge. □

Solution de l'exercice 11. En utilisant la définition de la suite,

$$\begin{aligned}u_{k+1} &= u_k\,\mathrm{e}^{-1/u_k}\\ \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \mathrm{e}^{-1/u_k}\\ \ln\frac{u_{k+1}}{u_k} &= \ln\mathrm{e}^{-1/u_k}\\ \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) &= -\frac{1}{u_k}\\ \sum_{k=0}^{n}[\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)] &= -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k}\\ \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) &= -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k} par somme telescopique\\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k} &= -\ln(u_{n+1}), \text{ car } u_0 = 1.\end{aligned}$$

□

III - Séries géométriques... et plus

Solution de l'exercice 12.

1. On remarque que $\frac{1}{5^k} = \left(\frac{1}{5}\right)^k$. Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, alors $\sum \frac{1}{5^k}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{5^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}.$$

2. On remarque que $\frac{3^k}{5^k} = \left(\frac{3}{5}\right)^k$. Comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$, alors $\sum \left(\frac{3}{5}\right)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3^k}{5^k} = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}.$$

3. On remarque que $\frac{1}{2^{2k}} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$. Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, alors $\sum \left(\frac{1}{4}\right)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

4. On remarque que

$$\frac{3^{2\ell+1}}{10^\ell} = \frac{3^{2\ell}\times 3}{10^\ell} = 3\times\frac{9^\ell}{10^\ell} = 3\left(\frac{9}{10}\right)^\ell.$$

Comme $-1 < \frac{9}{10} < 1$, alors $\sum \left(\frac{9}{10}\right)^k$ converge et

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{3^{2\ell+1}}{10^\ell} = 3\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^\ell = 3\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = \frac{3}{\frac{1}{10}} = 30.$$

5. Comme $-1 < \frac{4}{5} < 1$, la série converge. De plus, en introduisant les premiers termes :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^\ell &= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^\ell - 1\\ &= \frac{1}{1-\frac{4}{5}} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{5}} - 1 = 5 - 1 = 4.\end{aligned}$$

2^e méthode. Pour tout $n \geqslant 1$, en utilisant la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^n &= \frac{4}{5}\times\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}\\ &= \frac{4}{5}\times\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}}\\ &= 4\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right).\end{aligned}$$

Comme $-1 < \frac{4}{5} < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ et

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 4.$$

6. On remarque que $\frac{2^{2\ell+1}}{3^{3\ell}} = 2\times\frac{4^\ell}{27^\ell} = 2\times\left(\frac{4}{27}\right)^\ell$. Comme $-1 < \frac{4}{27} < 1$, la série $\sum\left(\frac{4}{27}\right)^\ell$ converge. De plus, pour tout $n \geqslant 3$, en utilisant la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=3}^{n}\frac{2^{2\ell+1}}{3^{3\ell}} &= 2\sum_{\ell=3}^{n}\left(\frac{4}{27}\right)^\ell\\ &= 2\left(\frac{4}{27}\right)^3\times\frac{1-\left(\frac{4}{27}\right)^{n-2}}{1-\frac{4}{27}}\\ &= 2\left(\frac{4}{27}\right)^3\times\frac{1-\left(\frac{4}{27}\right)^{n-2}}{\frac{23}{27}}\\ &= 2\times\frac{4^3}{23\times 27^2}\times\left(1-\left(\frac{4}{27}\right)^{n-2}\right).\end{aligned}$$

Comme $-1 < \frac{4}{27} < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{27}\right)^{n-2} = 0$, et

$$\sum_{\ell=3}^{+\infty}\frac{2^{2\ell+1}}{3^{3\ell}} = \frac{2\times 4^3}{23\times 27^2}.$$

□

Solution de l'exercice 13.

1. Si $\sum(\alpha-u_n)$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty}(\alpha-u_n) = 0$. Comme $-1 < \frac{1}{7} < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$. Ainsi, $\alpha = \frac{2}{3}$.
Réciproquement, si $\alpha = \frac{2}{3}$, alors $\alpha - u_n = -5\left(\frac{1}{7}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{7} < 1$, alors $\sum(\alpha - u_n)$ converge.
Ainsi, $\alpha_0 = \frac{2}{3}$.

2. En utilisant le calcul précéedent,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_0 - u_n) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-5\left(\frac{1}{7}\right)^n\right) = -5\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n\\ &= -5\frac{1}{1-\frac{1}{7}} = -\frac{5}{\frac{6}{7}} = -\frac{35}{6}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 14. Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{4}$. Ainsi, $\alpha = \frac{1}{4}$.
Réciproquement, si $\alpha = \frac{1}{4}$, alors $u_n = -\frac{1}{4\times 3^n} = -\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, alors $\sum u_n$ converge. □

Solution de l'exercice 15.

1. Comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$, alors $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ converge et pour tout $N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} &= \sum_{n-1=0}^{n-1=N-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\\ &= \sum_{k=0}^{k=N-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{k}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{k}\\ &= \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Comme $-1 < \frac{9}{25} < 1$, alors $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{9}{25}\right)^n$ converge et pour tout $N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\\ &= \sum_{n-1=0}^{n-1=N-1}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{9}{25}\right)^{k}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{25}\right)^{k}\\ &= \frac{1}{1-\frac{9}{25}} = \frac{1}{\frac{16}{25}} = \frac{25}{16}.\end{aligned}$$

2. En utilisant les calculs précédents,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} p_n &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\\ &= \frac{4}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\\ &= \frac{4}{5}\times\frac{5}{2} - \frac{16}{25}\times\frac{25}{16}\\ &= 2-1 = 1.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. En utilisant la linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - k\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k}.\end{aligned}$$

2. En effectuant un changement de variable,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} &= \sum_{k=1}^{k=n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{k-1=0}^{k-1=n-1} (k-1+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\ell=n-1} (\ell+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell}.\end{aligned}$$

3. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k}, \text{ d'après } \mathbf{1.} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell} - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k}, \text{ d'après } \mathbf{2.} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{\ell} - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} - \left[\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k} + n\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} - n\left(\frac{3}{4}\right)^{n}.\end{aligned}$$

4. D'après les théorèmes sur les croissances comparées,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n} = 0.$$

En utilisant les résultats sur les séries géométriques, comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 4 - 0 = 4.$$

□