T.D. III - Probabilités

I - Tirages

Solution de l'exercice 1.

1. Les boules sont tirées simultanément. Le nombre de tirages possibles est donc égal à $\binom{9}{2}$.

Le nombre tirages favorables :

- $*$ soit les boules sont paires et il faut tirer 2 boules parmi les boules numérotées $\{2,4,6,8\}$, soit $\binom{4}{2}$ possibilités.
- $*$ soit les boules sont impaires et il faut tirer 2 boules parmi les boules numérotées $\{1,3,5,7,9\}$, soit $\binom{5}{2}$ possibilités.

Le nombre de tirages favorables est donc égal à $\binom{4}{2}+\binom{5}{2}$.

Ainsi, la probabilité vaut

$$\frac{\binom{4}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6+10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \simeq 0{,}44.$$

2. On distingue en fonction de la parité de la première boule tirée :

- $*$ La probabilité de tirer une boule de numéro pair au premier tirage est égale à $\frac{4}{9}$.
  Sachant qu'une boule paire a été tirée, la probabilité d'obtenir une boule paire au second tirage est égale à $\frac{3}{8}$.
  En utilisant la formule des probabilités composées, la probabilité de tirer deux boules paires est donc égale à :
  $$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}.$$
- $*$ La probabilité de tirer une boule de numéro impair au premier tirage est égale à $\frac{5}{9}$.
  Sachant qu'une boule impaire a été tirée, la probabilité d'obtenir une boule impaire au second tirage est égale à $\frac{4}{8}$.
  En utilisant la formule des probabilités composées, la probabilité de tirer deux boules impaires est donc égale à :
  $$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}.$$

Finalement, comme « tirer deux boules paires » et « tirer deux boules impaires » sont deux ensembles disjoints, la probabilité de tirer deux boules de même parité est égale à

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \simeq 0{,}44.$$

2^{e} méthode. Pour le nombre de cas possibles :

- $*$ on choisit la première boule : 9 possibilités,
- $*$ on choisit la seconde boule : 8 possibilités.

Soit 9×8 tirages possibles.

Pour le nombre de cas favorables :

- $*$ soit la première boule est paire :
  - $\star$ on choisit la première boule : 4 possibilités,
  - $\star$ on choisit la seconde boule : 3 possibilités.
- $*$ soit la première boule est impaire :
  - $\star$ on choisit la première boule : 5 possibilités,
  - $\star$ on choisit la seconde boule : 4 possibilités.

Ainsi, le nombre de cas favorables est égal à :

$$4 \times 3 + 5 \times 4.$$

La probabilité est donc égale à

$$\frac{4 \times 3 + 5 \times 4}{9 \times 8} = \frac{8}{9 \times 2} = \frac{4}{9}.$$

3. On distingue en fonction de la parité de la première boule.

- $*$ La probabilité de tirer une boule de numéro pair au premier tirage est égale à $\frac{4}{9}$.
  Au second tirage, l'urne est identique à l'urne initiale. La probabilité d'obtenir une boule paire au second tirage est égale à $\frac{4}{9}$.
  En utilisant la formule des probabilités composées, la probabilité de tirer deux boules paires est donc égale à :
  $$\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}.$$

∗ La probabilité de tirer une boule de numéro impair au premier tirage est égale à $\frac{5}{9}$.
Au second tirage, l'urne est identique à l'urne initiale. La probabilité d'obtenir une boule impaire au second tirage est égale à $\frac{5}{9}$.
En utilisant la formule des probabilités composées, la probabilité de tirer deux boules paires est donc égale à :

$$\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{81}.$$

Finalement, comme tirer deux boules paires et tirer deux boules impaires sont deux ensembles disjoints, la probabilité de tirer deux boules de même parité est égale à

$$\frac{16}{81} + \frac{25}{81} = \frac{41}{81} \simeq 0{,}51.$$

2e méthode. Le nombre de cas possibles :
- ∗ on choisit la première boule : 9 possibilités,
- ∗ on choisit la seconde boule : 9 possibilités.

Il y a donc 9×9 cas favorables.

Pour le nombre de cas favorables :
- ∗ soit la première boule est paire :
  - ⋆ on choisit la première boule : 4 possibilités,
  - ⋆ on choisit la seconde boule : 4 possibilités.
- ∗ soit la première boule est impaire :
  - ⋆ on choisit la première boule : 5 possibilités,
  - ⋆ on choisit la seconde boule : 5 possibilités.

Ainsi, le nombre de cas favorables est égal à :

$$4 \times 4 + 5 \times 5.$$

La probabilité est donc égale à

$$\frac{4 \times 4 + 5 \times 5}{9 \times 9} = \frac{41}{81}.$$

□

Solution de l'exercice 2.

1. Les tirages s'effectuant sans remise, le nombre de tirages possibles est égal à

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) = \frac{n!}{(n-4)!}.$$

a) Lors du tirage, on doit choisir :
- ∗ la position de la boule numéro 1 : 4 possibilités,
- ∗ le choix des numéros des boules restantes : $\binom{n-1}{3}$ possibilités,
- ∗ la position de ces boules : 3!.

Ainsi, la probabilité vaut :

$$\frac{4 \times \binom{n-1}{3} \times 3!}{\frac{n!}{(n-4)!}} = \frac{\binom{n-1}{3}}{\binom{n}{4}}.$$

b) Lors du tirage, on doit choisir :
- ∗ la position de la boule numéro 3 : 4 possibilités,
- ∗ le choix des numéros des boules restantes parmi les boules dont le numéro est strictement supérieur à 3 : $\binom{n-3}{3}$ possibilités,
- ∗ la position de ces boules : 3!.

Ainsi, la probabilité vaut :

$$\frac{4 \times \binom{n-3}{3} \times 3!}{\frac{n!}{(n-4)!}} = \frac{\binom{n-3}{3}}{\binom{n}{4}}.$$

c) Lors du tirage, on doit choisir :
- ∗ la position de la boule numéro k : 4 possibilités,
- ∗ le choix des numéros des boules restantes parmi les boules dont le numéro est strictement supérieur à k : $\binom{n-k}{3}$ possibilités,
- ∗ la position de ces boules : 3!.

Ainsi, la probabilité vaut :

$$\frac{4 \times \binom{n-k}{3} \times 3!}{\frac{n!}{(n-4)!}} = \frac{\binom{k-1}{3}}{\binom{n}{4}}.$$

Remarque. Le plus petit numéro étant inférieur ou égal à $n-3$, on obtient la formule

$$\sum_{k=1}^{n-3} \frac{\binom{n-k}{3}}{\binom{n}{4}} = 1$$
$$\sum_{k=1}^{n-3} \binom{n-k}{3} = \binom{n}{4}$$

2. Les tirages s'effectuant sans remise, le nombre de tirages possibles est égal à

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) = \frac{n!}{(n-4)!}.$$

Lors du tirage, on doit choisir :
 * la position de la boule numéro k : 4 possibilités,
 * le choix des numéros des boules restantes parmi les boules dont le numéro est strictement inférieur à k : $\binom{k-1}{3}$ possibilités,
 * la position de ces boules : 3!.

Ainsi, la probabilité vaut :

$$\frac{4 \times \binom{k-1}{3} \times 3!}{\frac{n!}{(n-4)!}} = \frac{\binom{k-1}{3}}{\binom{n}{4}}.$$

Remarque. Le plus grand numéro étant supérieur ou égal à 4, on obtient la formule

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{\binom{k-1}{3}}{\binom{n}{4}} = 1$$
$$\sum_{k=4}^{n} \binom{k-1}{3} = \binom{n}{4}$$
$$\sum_{\ell=3}^{n-1} \binom{\ell}{3} = \binom{n}{4}.$$

3. On distingue les cas en fonction du nombre de fois où la boule k est tirée :
 * si la boule k est tirée 1 fois,
   * ⋆ il y a 4 positions possibles pour la boule numéro k,
   * ⋆ $(k-1)^3$ choix possibles pour les autres boules.
 * si la boule k est tirée 2 fois,
   * ⋆ il y a $\binom{4}{2} = 6$ positions possibles pour les boules numéro k,
   * ⋆ $(k-1)^2$ choix possibles pour les autres boules.
 * si la boule k est tirée 3 fois,
   * ⋆ il y a $\binom{4}{3} = 4$ positions possibles pour les boules numéro k,
   * ⋆ $(k-1)$ choix possibles pour les autres boules.
 * si la boule k est tirée 4 fois, il y a un seul tirage possible.

Ainsi, la probabilité est égale à

$$\frac{4(k-1)^3 + 6(k-1)^2 + 4(k-1) + 1}{n^4}.$$

Remarque. On obtient la formule :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4(k-1)^3 + 6(k-1)^2 + 4(k-1) + 1}{n^4} = 1$$
$$\sum_{k=1}^{n} (4(k-1)^3 + 6(k-1)^2 + 4(k-1) + 1) = n^4$$
$$\sum_{\ell=0}^{n-1} (4\ell^3 + 6\ell^2 + 4\ell + 1) = n^4.$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. Le nombre de tirages possibles est égal à $\binom{n}{10}$.
Le nombre de tirages où 4 boules sont rouges et 6 sont noires est égal à

$$\binom{10}{4}\binom{n-10}{6}.$$

Ainsi, la probabilité vaut :

$$p_n = \frac{\binom{10}{4}\binom{n-10}{6}}{\binom{n}{10}}.$$

2. On remarque que

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{\binom{10}{4}\binom{n+1-10}{6}\binom{n}{10}}{\binom{n+1}{10}\binom{10}{4}\binom{n-10}{6}}\\
&= \frac{\binom{n-9}{6}\binom{n}{10}}{\binom{n-10}{6}\binom{n+1}{10}}\\
&= \frac{(n+1-10)!n!10!(n+1-10)!6!(n-10-6)!}{(n+1-10-6)!6!10!(n-10)!(n+1)!(n-10)!}\\
&= \frac{(n-9)!n!(n-9)!(n-16)!}{(n-15)!(n-10)!(n+1)!(n-10)!}\\
&= \frac{(n-9)^2}{(n-15)(n+1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en raisonnant par équivalences,

$$\begin{aligned}
& p_{n+1} < p_n\\
\Leftrightarrow\ & (n-9)^2 < (n-15)(n+1)\\
\Leftrightarrow\ & n^2 - 18n + 81 < n^2 + n - 15n - 15\\
\Leftrightarrow\ & 81 + 15 < 18n - 14n\\
\Leftrightarrow\ & 96 < 4n\\
\Leftrightarrow\ & 24 < n.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$p_1 < p_2 < \cdots \leqslant p_{23} < p_{24} = p_{25} > p_{26} > \cdots .$$

La suite (p_n) atteint donc son maximum en 24 et 25. Alors,

$$p_{24} = p_{25} = \frac{\binom{10}{4}\binom{15}{6}}{\binom{25}{10}} \simeq 0{,}321\,543\,949.$$

□

Solution de l'exercice 4. On effectue les tirages jusqu'à ce que l'urne soit vide. Ainsi, un tirage est une succession de $n+r$ boules de couleurs dont r sont rouges et n sont noires.
Un tirage est ainsi décrit par la position des n boules noires parmi les $n+r$ positions : $\binom{n+r}{n}$ possibilités.
Un tirage est favorable si les k premières boules sont noires et la $(k+1)^{\text{e}}$ est rouge. Ainsi, pour déterminer, un tirage favorable, il suffit de placer les $(r-1)$ boules rouges restantes parmi les positions $(k+2), \dots, n+r$ du tirage (soit $n+r-k-1$ emplacements possibles) : $\binom{n+r-k-1}{r-1}$ possibilités.
Finalement, la probabilité que la $(k+1)^{\text{e}}$ boule tirée soit rouge vaut :

$$\frac{\binom{n+r-k-1}{r-1}}{\binom{n+r}{n}}.$$

2ème méthode. On note B_i l'événement « la i^{e} boule tirée est noire ». En utilisant la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i \cap \overline{B_k}\right) &= \mathbf{P}(B_1)\cdot \mathbf{P}_{B_1}(B_2)\cdots \mathbf{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i}(B_k)\cdot \mathbf{P}_{\bigcap_{i=1}^{k} B_i}\left(\overline{B_{k+1}}\right)\\
&= \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b-1}{b+r-1}\cdots\frac{b-k+1}{b+r-k+1}\cdot\frac{r}{b+r-k}
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5. On suppose que la première urne contient n boules noires et r boules rouges. La seconde urne contient alors $50-n$ boules noires et $50-r$ boules rouges.
On note les événements :
U_1 : « la première urne est choisie »
U_2 : « la seconde urne est choisie »
R : « la boule tirée est rouge »
Comme (U_1, U_2) est un système complet d'événements, en utilisant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
p_{b,n} = \mathbf{P}(R) &= \mathbf{P}_{U_1}(R)\,\mathbf{P}(U_1) + \mathbf{P}_{U_2}(R)\,\mathbf{P}(U_2)\\
&= \frac{r}{n+r}\cdot\frac{1}{2} + \frac{50-r}{100-n-r}\cdot\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$p_{50,50} = \frac{50}{100}\cdot\frac{1}{2} + \frac{50}{100}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } p_{1,50} = \frac{1}{51}\cdot\frac{1}{2} + \frac{49}{49}\cdot\frac{1}{2} = \frac{52}{51\times 2}.$$

Ainsi, $p_{50,50} \neq p_{1,50}$ et la probabilité dépend de la répartition des boules dans les urnes.

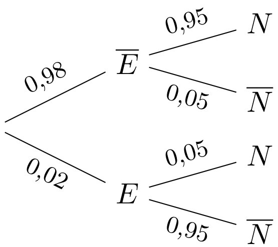
1. Si les 2 urnes contiennent le même nombre de boules, alors $n = r$ et

$$\begin{aligned} p_{r,r} &= \frac{r}{2r} \times \frac{1}{2} + \frac{50-r}{100-2r} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donc la probabilité ne dépend pas du nombre de boules rouges dans la première urne. □

II - Arbres

Solution de l'exercice 6. On note les événements suivants :
E : « la personne est en état d'ébriété »
N : « l'alcootest est négatif ».



D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E) &= 0{,}02, \\ \mathbf{P}_E\left(\overline{N}\right) &= 0{,}95, \\ \mathbf{P}_{\overline{E}}(N) &= 0{,}95. \end{aligned}$$

1. En utilisant la formule des probabilités totales, comme $(E, \overline{E})$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\overline{N}\right) &= \mathbf{P}_E\left(\overline{N}\right)\mathbf{P}(E) + \mathbf{P}_{\overline{E}}\left(\overline{N}\right)\mathbf{P}\left(\overline{E}\right) \\ &= 0{,}95 \cdot 0{,}02 + (1-0{,}95) \cdot 0{,}98 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Bayes,

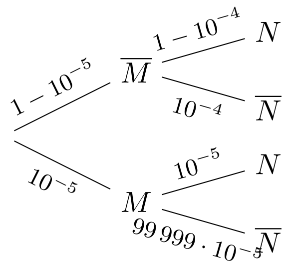
$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\overline{N}}(E) &= \frac{\mathbf{P}_E\left(\overline{N}\right)\mathbf{P}(E)}{\mathbf{P}\left(\overline{N}\right)} \\ &= \frac{0{,}95 \cdot 0{,}02}{0{,}95 \cdot 0{,}02 + 0{,}05 \cdot 0{,}98} \\ &= \frac{95 \times 2}{95 \times 2 + 98 \times 5} = \frac{19}{68} \simeq 0{,}28. \end{aligned}$$

2. D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_N(E) &= \frac{\mathbf{P}_E(N)\mathbf{P}(E)}{\mathbf{P}(N)} = \frac{(1-0{,}95) \cdot 0{,}02}{1 - \mathbf{P}\left(\overline{N}\right)} \\ &= \frac{5 \cdot 2}{10000 - 95 \times 2 - 98 \times 5} = \frac{1}{932} \simeq 0{,}001. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 7. On note les événements :
M : « l'individu est malade »
N : « le test est négatif »



D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M) &= 10^{-5} \\ \mathbf{P}_M\left(\overline{N}\right) &= 99\,999 \cdot 10^{-5} \\ \mathbf{P}_{\overline{M}}\left(\overline{N}\right) &= 10^{-4} \end{aligned}$$

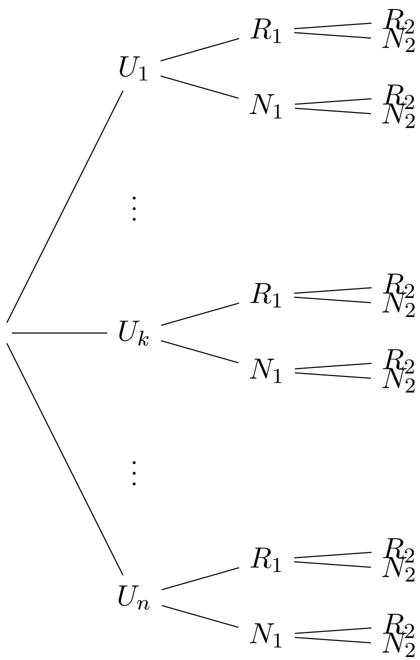
On utilise la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\overline{N}}(M) &= \frac{\mathbf{P}_M\left(\overline{N}\right)\cdot\mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}\left(\overline{N}\right)} \\
&= \frac{\mathbf{P}_M\left(\overline{N}\right)\cdot\mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}_M\left(\overline{N}\right)\mathbf{P}(M)+\mathbf{P}_{\overline{M}}\left(\overline{N}\right)\mathbf{P}\left(\overline{M}\right)} \\
&= \frac{99\,999\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-5}}{99\,999\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-5}+10^{-4}\cdot(1-10^{-5})} \\
&= \frac{1}{11}\approx 0{,}09.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 8. On note les événements suivants :

N_1 : « la première boule tirée est noire »
N_2 : « la seconde boule tirée est noire »
U_k : « l'urne numéro k est choisie »



1. Comme $(N_1, \overline{N_1})$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{U_k}(N_2) &= \mathbf{P}_{U_k}(N_2\cap N_1)+\mathbf{P}_{U_k}\left(N_2\cap\overline{N_1}\right) \\
&= \frac{k-1}{n-1}\cdot\frac{n-k}{n-2}+\frac{n-k}{n-1}\cdot\frac{n-k-1}{n-2}.
\end{aligned}$$

Comme $(U_1,\dots,U_n)$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_2) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}_{U_k}(N_2)\,\mathbf{P}(U_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n-1}\cdot\frac{n-k}{n-2}+\frac{n-k}{n-1}\cdot\frac{n-k-1}{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum_{k=1}^{n}(n-k)(k-1+n-k-1) \\
&= \frac{n-2}{n(n-1)(n-2)}\sum_{k=1}^{n}(n-k) \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. En notant N_1 (resp. N_2) l'événement la première (resp. seconde) boule tirée est noire :

$$\mathbf{P}_{N_1}(N_2)=\frac{\mathbf{P}(N_1\cap N_2)}{\mathbf{P}(N_1)}.$$

Comme $(U_1, \dots, U_n)$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_1 \cap N_2) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{U_k}(N_1 \cap N_2)\, \mathbf{P}(U_k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-k}{n-1} \cdot \frac{n-k-1}{n-2} \right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^{n} (n-k)(n-k-1) \\
&= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell(\ell-1) \\
&= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^2 - \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2} \right) \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

De même,

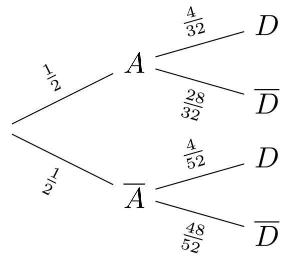
$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N_1) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{U_k}(N_1)\, \mathbf{P}(U_k) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n-1} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbf{P}_{N_1}(N_2) = \frac{2}{3}.$$

□

Solution de l'exercice 9. On note les événements suivants :
A : « tirer le jeu de 32 cartes »,
D : « tirer une dame ».



En utilisant la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_D(A) &= \frac{\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}_A(D)}{\mathbf{P}(D)} = \frac{1/2 \cdot 1/8}{\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}_A(D) + \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathbf{P}_{\overline{A}}(D)} \\
&= \frac{1/(2 \cdot 8)}{1/(2 \cdot 8) + 1/(2 \cdot 13)} = \frac{13}{21} \approx 0{,}62.
\end{aligned}$$

□

III - Jeu de pile ou face

Solution de l'exercice 10.

1. Il y a 2^n lancers possibles et, si un lancer permet d'obtenir exactement k piles, il est entièrement déterminé par la place de ces piles dans la succession de lancers, donc

$$\mathbf{P}(P_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

2. On note les événements suivants :
P_k : « le premier joueur obtient k fois piles »
D_k : « le deuxième joueur obtient k fois piles »
E : « les premier et deuxième joueurs sont à égalité »
Comme $(P_0, \dots, P_n)$ est un système complet d'événements, d'après la

formule des probabilités totales, la probabilité recherchée vaut :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\overline{E}\right) &= 1 - \mathbf{P}(E) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(E \cap P_k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(D_k \cap P_k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(D_k) \cdot \mathbf{P}(P_k)\end{aligned}$$

car les lancers des pièces sont indépendants.
Ainsi,

$$\mathbf{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Remarque. La formule de Vandermonde permet d'obtenir :

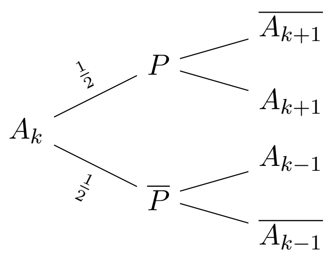
$$\mathbf{P}(E) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. On utilise le système complet d'événements $(P, \overline{P})$,

$$\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}_P(A_k)\,\mathbf{P}(P) + \mathbf{P}_{\overline{P}}(A_k)\,\mathbf{P}\left(\overline{P}\right).$$



Comme la pièce est équilibrée,

$$\mathbf{P}(P) = \mathbf{P}\left(\overline{P}\right) = \frac{1}{2}.$$

Si la pièce est tombée sur pile, alors Maryam gagne 1 euro et le jeu recommence avec une somme initiale de $k+1$ euros. Ainsi,

$$\mathbf{P}_P(A_k) = \mathbf{P}(A_{k+1}) = p_{k+1}.$$

De manière analogue,

$$\mathbf{P}_{\overline{P}}(A_k) = \mathbf{P}(A_{k-1}) = p_{k-1}.$$

Ainsi,

$$p_k = \frac{p_{k+1} + p_{k-1}}{2}.$$

2. Si Maryam dispose de 0 euro, alors elle est ruinée avant d'acheter le livre et $p_0 = 1$.
Si Maryam dispose de N euros, alors elle achète le livre et $p_N = 0$.

3. En utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned}p_{k+1} + p_{k-1} - 2p_k &= 0 \\ p_{k+1} - p_k &= p_k - p_{k-1} \\ v_k &= v_{k-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_k) est constante.

4. En notant α la constante de la question précédente,

$$\begin{aligned}p_j - p_{j-1} &= \alpha \\ \sum_{j=1}^{k} (p_j - p_{j-1}) &= k\alpha \\ p_k &= k\alpha + p_0.\end{aligned}$$

Or, $p_0 = 1$ et

$$\begin{aligned}p_N = 0 &= N\alpha + 1 \\ \alpha &= -\frac{1}{N}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall\, k \in [\![0, N]\!],\ p_k = 1 - \frac{k}{N}.$$

Remarque. La question de savoir si le jeu termine n'est ici pas posée. On peut cependant montrer que le temps de terminaison est fini presque sûrement en le dominant par une v.a. de loi géométrique. □

IV - Divers

Solution de l'exercice 12. Le nombre de tirages possibles est égal à

$$10 \cdot 9 \cdot 8.$$

Un tirage est favorable si les trois cartes tirées sont triées par ordre croissant. On cherche ainsi le cardinal de l'ensemble

$$\left\{(n_1, n_2, n_3) \in [\![1, 10]\!]^3\ ;\ n_1 < n_2 < n_3\right\}.$$

Or, à tout élément (n_1, n_2, n_3) de cet ensemble, on peut associer de manière unique la partie $\{n_1, n_2, n_3\}$ à trois éléments de $[\![1, 10]\!]$. Ainsi, le nombre de tirages favorables est égal à

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6}.$$

Finalement, la probabilité recherchée est égale à

$$\frac{1}{6}.$$

Remarque. Cette probabilité ne dépend pas du nombre de cartes dans le paquet ! □

Solution de l'exercice 13. Comme $(A_{n+1}, \overline{A_{n+1}})$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right) = \mathbf{P}\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}}\right)$$
$$\mathbf{P}\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = (1 - x)\mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right).$$

Ainsi, comme $(A_n, \overline{A_n})$ est un système complet d'événements, en utilisant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbf{P}\left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right)\\ &= x\mathbf{P}(A_n) + (1 - x)\mathbf{P}\left(\overline{A_n}\right)\\ &= x\mathbf{P}(A_n) + (1 - x)(1 - \mathbf{P}(A_n))\\ &= (2x - 1)\mathbf{P}(A_n) + 1 - x.\end{aligned}$$

Ainsi, $(\mathbf{P}(A_n))$ est une suite arithmético-géométrique.
Comme $x \neq 1$, le réel ℓ qui satisfait $\ell = (2x - 1)\ell + 1 - x$ est égal à $\frac{1}{2}$.
On pose ainsi $v_n = \mathbf{P}(A_n) - \frac{1}{2}$ et on constate que

$$v_{n+1} = (2x - 1)v_n.$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
Finalement,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(A_n) = (2x - 1)^n \left(p_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} 0 < x < 1\\ 0 < 2x < 2\\ -1 < 2x - 1 < 1.\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1)^n = 0$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 14. On distingue les cas en fonction du numéro de la boîte dans laquelle l'allumeur pioche sa dernière allumette. On note arbitrairement 1 la boîte contenant initialement n allumettes et 2 la boîte qui en contient initialement $n - 1$.

* Si la dernière allumette est piochée dans la boîte numéro 1. Avant, on a pioché $n-1$ allumettes dans la boîte numéro 1 et $n+1-k$ allumettes dans la boîte numéro 2. On a alors tiré $2n-k$ allumettes et il faut choisir la position des $n-1$ allumettes piochées dans la boîte numéro 1 parmi cette succession de tirages. Le nombre de façons d'effectuer un tel tirage est égal à
$$\binom{2n-k}{n-1}$$
Le nombre total d'allumettes piochées étant égal à $2n-k+1$, la probabilité d'avoir pioché la dernière allumette dans la boîte numéro 1 et qu'il en reste exactement k dans la boîte numéro 2 est égale à
$$\frac{\binom{2n-k}{n-1}}{2^{2n+1-k}}.$$
* Si la dernière allumette est piochée dans la boîte numéro 2. Avant, Soit on a pioché n allumettes dans la boîte numéro 2 et $n-k$ dans la boîte numéro 1. On a alors tiré $2n-k$ allumettes et il faut choisir la position des n allumettes piochées dans la boîte numéro 2 parmi cette succession de tirages. Le nombre de façons d'effectuer un tel tirage est égal à
$$\binom{2n-k}{n}$$
Le nombre total d'allumettes piochées étant égal à $2n-k+1$, la probabilité d'avoir pioché la dernière allumette dans la boîte numéro 2 et qu'il en reste exactement k dans la boîte numéro 1 est égale à
$$\frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n+1-k}}.$$

Finalement, comme les événements « dernière allumette piochée dans la boîte 1 » et « dernière allumette piochée dans la boîte 2 » forment un système complet d'événements, la probabilité recherchée est égale à
$$\frac{\binom{2n-k}{n-1}+\binom{2n-k}{n}}{2^{2n+1-k}} = \frac{\binom{2n+1-k}{n}}{2^{2n+1-k}}.$$

□