



Partie I : Convexité

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est *convexe* si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

La fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.

1. Montrer que les fonctions affines sont convexes.
2. Montrer que la courbe représentative d'une fonction convexe se situe toujours au-dessous de chacune de ses cordes.
3. Montrer, par une récurrence soigneuse, l'inégalité de **JENSEN** : si f est convexe, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_i)_{i \in [1, n]} \in I^n, \forall (\lambda_i)_{i \in [1, n]} \in [0, 1]^n,$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \right].$$

4. Croissance du taux d'accroissement. Pour tout $x_0 \in I$, on pose $\tau_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

a) On suppose que, pour tout $x_0 \in I$, f_{x_0} est croissante. En utilisant la croissance de φ_{x_0} sur $x < \lambda x + (1-\lambda)y < y$ (réels à choisir convenablement), montrer que f est convexe.

b) On suppose que f est convexe. En utilisant l'inégalité de convexité en $x_0 < x = \lambda x_0 + (1-\lambda)y < y$, montrer que φ_{x_0} est croissante sur $]x_0, +\infty[\cap I$.

On montre de manière analogue que φ_{x_0} est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

5. Caractérisation dérivable.

a) On suppose que f est une fonction dérivable sur I . En utilisant la croissance du taux d'accroissement, montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I .

b) En déduire que la courbe représentative d'une fonction convexe se situe toujours au-dessus de ses tangentes.

6. Caractérisation deux fois dérivable. On suppose que f est une fonction deux fois dérivable sur I . Montrer que f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I .

7. a) En déduire que les fonctions \exp et \sin sont convexes et que la fonction \ln est concave, sur des ensembles à préciser.

b) En déduire que

$$e^x \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\ln(1+x) \leq x, \forall x \in]-1, +\infty[.$$

8. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Partie II : Inégalités de **HÖLDER**

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Les inégalités de **HÖLDER** que nous allons établir généralisent les inégalités de **CAUCHY-SCHWARZ**.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (a_i)_{i \in [1, n]}$ et $y = (b_i)_{i \in [1, n]}$ deux familles de réels strictement positifs et f, g sont des fonctions continues sur un intervalle borné I dans \mathbb{R}_+^* . On notera $\mathcal{L}^p(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f continues sur I telles que $|f|^p$ soit intégrable sur I .

9. Montrer que pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\ln(uv) \leq \ln \left\{ \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q \right\}.$$

10. Montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^n (a_i b_i) \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

11. Montrer que

$$\left| \int_I fg \right| \leq \left(\int_I |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_I |g|^p \right)^{1/p}.$$

En déduire que le produit d'une fonction \mathcal{L}^p par une fonction \mathcal{L}^q est dans \mathcal{L}^1 (on rappelle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Partie III : Inégalité de **MINKOWSKI**

On reprend les notations précédentes. On note $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^p |a_i|^p \right)^{1/p}$ et

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p \right)^{1/p}.$$

12. Montrer que si a et b sont des réels, alors

$$|a + b|^p \leq (|a| + |b|) |a + b|^{p-1}.$$

13. a) En étudiant $\|x + y\|_p^p$, montrer que

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

b) En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

c) Déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p$.

14. a) En étudiant $\|f + g\|_p^p$, montrer que

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

b) En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

c) Montrer que $\mathcal{L}^p(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé.

d) Déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p$.

Mathématiciens

CAUCHY Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).

SCHWARZ Hermann (25 jan. 1843 à Hermsdorf-30 nov. 1921 à Berlin).

JENSEN Johan (8 mai 1859 à Nakskov-5 mar. 1925 à Copenhagen).

HÖLDER Ludwig (22 déc. 1859 à Stuttgart-29 août 1937 à Leipzig).

MINKOWSKI Hermann (22 juin 1864 à Alexotas-12 jan. 1909 à Göttingen).