

# T.D. X - Variables aléatoires à densité

## I - Études de densités

**Exercice 1.** Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $t$  réel par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } t \in [5, 10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Représenter graphiquement la fonction  $f$ .
- b) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .

2. a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .
- b) Représenter graphiquement la fonction  $F$ .

3. Déterminer les probabilités suivantes :

- |  |  |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>a) <math>P([X &lt; 7])</math>.</li> <li>b) <math>P([5 &lt; X &lt; 6])</math>.</li> <li>c) <math>P([3 &lt; X &lt; 9])</math>.</li> <li>d) <math>P([X \geq 8])</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>e) <math>P_{[X &gt; 6]}([X &lt; 7])</math>.</li> <li>f) <math>P_{[X &lt; 7]}([X &gt; 6])</math>.</li> <li>g) <math>P_{[X &gt; 7]}([X &gt; 6])</math>.</li> <li>h) <math>P_{[X &lt; 6]}([X &gt; 7])</math>.</li> </ol> |
|--|--|

4. a) Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.
- b) Montrer que  $X$  admet une variance et la calculer.

**Exercice 2.** Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $t$  réel par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } t \in [10, 13] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Représenter graphiquement la fonction  $f$ .
- b) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .

2. a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .
- b) Représenter graphiquement la fonction  $F$ .
3. Déterminer les probabilités suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>a) <math>P([X &lt; 10])</math>.</li> <li>b) <math>P([10 &lt; X &lt; 12])</math>.</li> <li>c) <math>P([9 &lt; X &lt; 11])</math>.</li> <li>d) <math>P([X \geq 11])</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>e) <math>P_{[X &gt; 11]}([X &lt; 12])</math>.</li> <li>f) <math>P_{[X &lt; 12]}([X &gt; 11])</math>.</li> <li>g) <math>P_{[X &gt; 12]}([X &gt; 11])</math>.</li> <li>h) <math>P_{[X &lt; 11]}([X &gt; 12])</math>.</li> </ol> |
|---|--|

4. a) Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.
- b) Montrer que  $X$  admet une variance et la calculer.

**Exercice 3.** Soit  $a$  un réel et  $f$  la fonction définie pour tout  $t$  réel par

$$f(t) = \begin{cases} a e^{2-t} & \text{si } t \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. a) Déterminer la valeur de  $a$  pour laquelle  $f$  est une densité de probabilité.
- b) Représenter graphiquement  $f$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .

2. a) Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .
- b) Représenter graphiquement la fonction  $F$ .

3. Déterminer les probabilités suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>a) <math>P([X \leq 3])</math>.</li> <li>b) <math>P([1 &lt; X &lt; 2])</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>c) <math>P([0 &lt; X &lt; 3])</math>.</li> <li>d) <math>P([X \geq 4])</math>.</li> </ol> |
|---|---|

4. Soit  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ .

- a) Rappeler la formule (avec une intégrale) et la valeur de  $\mathbf{E}[Y]$ .
- b) On pose  $Z = Y + 2$ . Déterminer la fonction de répartition puis une densité de  $Z$ .
- c) En déduire que  $X$  admet une espérance et la calculer.

**Exercice 4.** Soit  $a$  un réel et  $f$  la fonction définie pour tout  $t$  réel par

$$f(t) = \begin{cases} a e^{3-t} & \text{si } t \geq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**1. a)** Déterminer la valeur de  $a$  pour laquelle  $f$  est une densité de probabilité.

**b)** Représenter graphiquement  $f$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ .

**2. a)** Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

**b)** Représenter graphiquement la fonction  $F$ .

**3.** Déterminer les probabilités suivantes :

**a)**  $\mathbf{P}([X \leq 3])$ . | **c)**  $\mathbf{P}([0 < X < 5])$ .

**b)**  $\mathbf{P}([1 < X < 2])$ . | **d)**  $\mathbf{P}([X \geq 4])$ .

**4.** Soit  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ .

**a)** Rappeler la formule (avec une intégrale) et la valeur de  $\mathbf{E}[Y]$ .

**b)** On pose  $Z = Y + 3$ . Déterminer une fonction de répartition puis une densité de  $Z$ .

**c)** En déduire que  $X$  admet une espérance et la calculer.

## II - Travail sur la fonction de répartition

**Exercice 5.** Soit  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ . Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier éventuellement la loi des variables aléatoires suivantes :

- |                                    |  |                           |
|------------------------------------|--|---------------------------|
| <b>1.</b> $X = 3U$ .               |  | <b>4.</b> $W = X^2$ .     |
| <b>2.</b> $Y = U + 1$ .            |  | <b>5.</b> $H = \ln(X)$ .  |
| <b>3.</b> $Z = \frac{1}{2}X + 1$ . |  | <b>6.</b> $E = -\ln(X)$ . |

**Exercice 6.** Soit  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ . Déterminer la fonction de répartition, la densité, puis identifier éventuellement la loi des variables aléatoires suivantes :

- |                                    |  |                           |
|------------------------------------|--|---------------------------|
| <b>1.</b> $X = 4U$ .               |  | <b>4.</b> $W = X^2$ .     |
| <b>2.</b> $Y = U + 2$ .            |  | <b>5.</b> $H = \ln(X)$ .  |
| <b>3.</b> $Z = \frac{1}{2}X + 1$ . |  | <b>6.</b> $E = -\ln(X)$ . |

## III - Lois usuelles

**Exercice 7.** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 4)$ . En utilisant la table de la loi normale, calculer

- |                                      |  |   |
|--------------------------------------|--|---|
| <b>1.</b> $\mathbf{P}([X \leq 2])$ . |  | <b>3.</b> $\mathbf{P}([Y < 1])$ .         |
| <b>2.</b> $\mathbf{P}([X > 2,51])$ . |  | <b>4.</b> $\mathbf{P}([3 < Y \leq 10])$ . |

**Exercice 8.** Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 9)$ . En utilisant la table de la loi normale, calculer

- |                                      |  |  |
|--------------------------------------|--|--|
| <b>1.</b> $\mathbf{P}([X \leq 2])$ . |  | <b>3.</b> $\mathbf{P}([Y < 1])$ .        |
| <b>2.</b> $\mathbf{P}([X > 2,51])$ . |  | <b>4.</b> $\mathbf{P}([3 < Y \leq 6])$ . |

**Exercice 9.** Un archer lance deux flèches en direction d'une cible de rayon d'un mètre. On suppose qu'il atteint systématiquement et que ses lancers sont indépendants. Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , on note  $R_i$  la variable aléatoire égale à la distance (en mètres) de la flèche numéro  $i$  au rayon de la cible et on suppose que  $R_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ . On note également  $R = \min\{R_1, R_2\}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Justifier que  $\mathbf{P}([R > x]) = \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x])$ .
2. En déduire, pour tout  $x$  réel, la fonction de répartition  $F$  de  $R$ .
3. Calculer la probabilité que la flèche la mieux lancée par l'archer soit située à moins de 50cm de la cible.

**Exercice 10.** Un appareil électronique utilise deux piles dont les durées de vie respectives sont  $T_1$  et  $T_2$ . On suppose que  $T_1$  et  $T_2$  sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre 1. L'appareil cesse de fonctionner au bout d'un temps  $T = \max\{T_1, T_2\}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Justifier que  $\mathbf{P}([T < x]) = \mathbf{P}([T_1 < x] \cap [T_2 < x])$ .
2. En déduire, pour tout  $x$  réel, la fonction de répartition  $F$  de  $T$ .
3. Calculer la probabilité que l'appareil cesse de fonctionner, à cause de ses piles, au bout de 6 mois.