

II - Puissances

Le nombre réel x^a est défini différemment en fonction de la nature du nombre a . Cependant, les règles de calcul seront toujours les mêmes !

I - Lorsque a est un entier naturel (positif)

À Savoir

Si a est un entier naturel et x est un réel,

$$* x^0 = 1.$$

$$* x^a = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}}.$$

Exemple 1

$$3^0 = 1,$$

$$3^1 = 3,$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27.$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers naturels et x est un réel,

$$\begin{aligned} x^a \times x^b &= \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{a \text{ facteurs}} \times \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{b \text{ facteurs}} \\ &= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a+b \text{ facteurs}} \\ &= x^{a+b}. \end{aligned}$$

Exemple 2

$$3^2 \times 3^3 = 3^5,$$

$$6^2 \times 3^3 = 3^2 \times 2^2 \times 3^3 = 2^2 \times 3^5,$$

$$3^n \times 3 = 3^{n+1}.$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers naturels et x est un réel,

$$\begin{aligned} (x^a)^b &= \underbrace{\left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}} \right)}_{a \text{ facteurs}}^b = \underbrace{\left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}} \right) \times \cdots \times \left(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \text{ facteurs}} \right)}_{b \text{ facteurs}} \\ &= \underbrace{x \times \cdots \times x}_{a \times b \text{ facteurs}} \\ &= x^{a \times b}. \end{aligned}$$

Exemple 3

$$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6,$$

$$81^5 = (3^4)^5 = 3^{4 \times 5} = 3^{20}.$$

II - Lorsque a est un entier négatif

À Savoir

Si a est un entier négatif et x un réel non nul, alors $-a$ est un entier positif et

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{-a \text{ facteurs}}}.$$

Exemple 4

$$\begin{aligned} 3^{-1} &= \frac{1}{3^{+1}} = \frac{1}{3}, \\ 3^{-2} &= \frac{1}{3^{+2}} = \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{3^{-3}} &= \frac{1}{\frac{1}{3^3}} = 3^3. \end{aligned}$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers,

$$x^a \times x^b = x^{a+b}.$$

Exemple 5

$$\begin{aligned} 3^{-2} \times 3^5 &= 3^{-2+5} = 3^3, \\ 3^6 \times 3^{-12} &= 3^{6-12} = 3^{-6}, \\ \frac{3^5}{3^7} &= 3^5 \times \frac{1}{3^7} = 3^5 \times 3^{-7} = 3^{5-7} = 3^{-2}, \\ 3^5 3^{-5} &= 3^{5-5} = 3^0 = 1. \end{aligned}$$

À Savoir

Si a, b sont des entiers,

$$(x^a)^b = x^{ab}.$$

Exemple 6

$$\begin{aligned} (5^{-2})^3 &= 5^{-2 \times 3} = 5^{-6} \\ \left(\frac{1}{81}\right)^5 &= \left(\frac{1}{3^4}\right)^5 = (3^{-4})^5 = 3^{-20}, \\ \left(\frac{1}{25}\right)^{-3} &= (5^{-2})^{-3} = 5^{-2 \times (-3)} = 5^6. \end{aligned}$$

III - Lorsque $a = 1/n$

À Savoir

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f(y) = y^n$ est strictement croissante, continue sur \mathbb{R}_+ et $f(0) = 0$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$.

Comme $x \in [0, +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel y tel que $y^n = x$. Ce réel est noté $x^{\frac{1}{n}}$.

Exemple 7

- * Comme $2^2 = 4$, alors $2 = 4^{1/2}$.
- * Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Attention. Dans ce cas, le nombre x doit être positif.

À Savoir

Si a est un entier, b est un entier naturel non nul et x est un réel

positif,

$$\left(x^{1/b}\right)^a = x^{a/b}$$

Exemple 8

$$\left(2^{1/3}\right)^9 = 2^{9/3} = 2^3.$$

IV - Lorsque a est un réel

À Savoir

Si a est un réel et x est un réel strictement positif,

$$x^a = e^{a \ln(x)}.$$

Cette notion généralise les définitions précédentes.

Exemple 9

$$3^{1.5} = e^{\frac{3}{2} \ln(3)}$$

Attention. Dans ce cas, le nombre x doit être strictement positif.

À Savoir

Si a, b sont deux réels et x, y sont deux réels strictement positifs,

$$(x \times y)^a = x^a \times y^a,$$

$$x^a \times x^b = x^{a+b},$$

$$(x^a)^b = x^{a \times b}.$$

Exemple 10

Déterminons les réels x tels que $3^{-x} = \frac{3}{2}$. Alors,

$$e^{-x \ln(3)} = \frac{3}{2}$$

$$\ln(e^{-x \ln(3)}) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$-x \ln(3) = \ln(3) - \ln(2)$$

$$x = \frac{\ln(2) - \ln(3)}{\ln(3)}.$$

V - Exercices

Solution de l'exercice 1.

1. D'après les propriétés des puissances,

$$e^{n+1} - e^n = e^n \times e^1 - e^n = e^n(e - 1).$$

2. D'après les propriétés des puissances,

$$2^{n+1} - 2^n = 2^n \times 2^1 - 2^n = 2^n(2 - 1) = 2^n.$$

3. D'après les propriétés des puissances,

$$(n+1)2^n - 2^{n+1} = (n+1)2^n - 2^n \times 2^1 = 2^n(n+1-1) = n2^n.$$

□