Stanislas
Exercices

Fonctions vectorielles - Courbes planes paramétrées

Chapitre XVI

PSI
2021-2022

■ ■ ■

I. Fonctions à valeurs vectorielles

Exercice 1. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est une matrice ansitymétrique d'ordre n. Soit X une fonction à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$.

1. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $Y = {}^tXX$.

2. Montrer que, s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $X(t_0)$ soit orthogonale, alors $X(t)$ est orthogonale pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\Omega : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable telle que pour tout $t \in I$, $\Omega(t) \in O_n(\mathbb{R})$. On suppose que n est impair. Montrer que, pour tout $t \in I$, $\det(\Omega'(t)) = 0$.

Exercice 3. ( ) [ESPCI] L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $f \in \mathscr{C}^1(]-1,1[,\mathbb{R}^2)$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t \mapsto \|f(t)\|$ soit croissante sur $[0,\varepsilon[$.

II. Points particuliers

Exercice 4. Montrer que l'arc paramétré Γ défini par $t \mapsto \left(\frac{1}{t^2-t}, \frac{t}{t^2-1}\right)$ admet un unique point double et que ses tangentes en ce point sont perpendiculaires.

Exercice 5. Montrer que la courbe paramétrée $t \mapsto \left(\frac{4t-3}{t^2+1} \frac{2t-1}{t^2+2}\right)$ admet un unique point singulier, et tracer l'allure de la courbe au voisinage de ce point.

Exercice 6. On considère l'arc paramétré $t \mapsto \left(t + \frac{4}{t}, \frac{t}{3} + 2 + \frac{3}{t+1}\right)$. Étudier les asymptotes et les points singuliers de cette courbe.

Exercice 7. (Cardioïde) [TPE] Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $\begin{cases} x(t) &= 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$. Tracer cette courbe en précisant les tangentes éventuelles.

III. Avec Python

Exercice 8. [Centrale] Soit L l'arc paramétré défini par

$$(x(t) = \sqrt{\cos^2(t) + 4\cos(t) + 3}, y(t) = \sin(t))$$

1. Préciser le domaine de définition et faire (avec `Python`) le tracé de la courbe. Justifier les symétries détectées. En déduire un domaine d'étude.

2. Étudier les variations sur le domaine d'étude et faire l'étude aux éventuels points singuliers.

3. Donner l'expression des tangentes à l'origine.

4. Donner une valeur approchée de la longueur de L.

Exercice 9. (Folium de Descartes) [Centrale] Pour $t \neq -1$, soit $\varphi(t) = (f(t), g(t))$ avec $f(t) = \frac{t}{1+t^3}$ et $g(t) = \frac{t^2}{1+t^3}$.

1. Tracer avec `Python` le support de cet arc. Étudier les symétries, réduire l'intervalle d'étude, déterminer le comportement lorsque t tend vers -1.

2. On remarque la présence d'une boucle. Estimer numériquement la longueur de cette boucle.

3. Trouver une équation cartésienne de la courbe de la forme $F(x,y) = 0$.

4. Montrer que trois points distincts $\varphi(t_1)$, $\varphi(t_2)$, $\varphi(t_3)$ sont alignés si et seulement si $t_1t_2t_3 = -1$.

Mathématiciens

Descartes René (31 mar. 1596 à La Haye en Touraine-11 fév. 1650 à Stockholm).