

VIII - Intégration

I - Primitives

Définition 1 - Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Une *primitive* de f est une fonction dérivable F sur I telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 1

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $F(x) = x \ln(x) - x$. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , alors F est dérivable et pour tout $x \in]0, 1]$,

$$F'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

Ainsi, F est une primitive de \ln sur \mathbb{R}_+^* .

Théorème 1 - Primitives de fonctions continues

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives. Si F et G sont des primitives d'une fonction f continue sur I , alors il existe un réel c tel que $\forall x \in I, F(x) = G(x) + c$.

Exemple 2

Si G est une primitive de la fonction \ln sur \mathbb{R}_+^* , alors il existe un réel c tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = x \ln(x) - x + c.$$

Proposition 1 - Primitives des fonctions usuelles ⚙️

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Intervalle
c	cx	\mathbb{R}
$x^a, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}^* ou \mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$
$e^{ax}, a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	\mathbb{R}

Exemple 3

Une primitive de la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x^{1/4}$ est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} x^{1/4+1} = \frac{4}{5} x^{5/4}.$$

Proposition 2 - Primitive de fonctions composées ⚙️

Soit u une fonction dérivable telle que u' soit continue.

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$\lambda u'(x) + \mu v'(x)$	$\lambda u(x) + \mu v(x)$
$u'(x)u^a(x), a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1}(x)$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) $
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$u'(x)v'(u(x))$	$v(u(x))$

Exemple 4

La fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ est de la forme $u'(x)u(x)$ où $u(x) = \ln(x)$. Ainsi, une primitive de f est donnée par $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$.

II - Intégrale sur un segment**Définition 2 - Intégrale d'une fonction continue** ⚙️

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f . L'intégrale de f sur $[a, b]$ est le réel défini par

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple 5

En utilisant les primitives usuelles,

- $\int_1^2 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}.$
- $\int_0^1 (3x^2 + 4) e^{x^3+4x} dx = \left[e^{x^3+4x} \right]_0^1 = e^5 - 1.$

Théorème 2 - Intégrale et Primitive

Soient f une fonction continue définie sur I et $a \in I$. On note $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Alors, F est l'unique primitive de f qui s'annule en a . En particulier, pour tout réel $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

II.1 - Propriétés de l'intégrale**Définition 3 - Fonctions continues par morceaux**

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = \bigcup_{k=0}^n]a_k, b_k[$. On suppose que f est continue par morceaux sur I , i.e. continue sur chacun des intervalles $]a_k, b_k[$ et prolongeable par continuité en a_k et b_k . Alors, $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx$.

Proposition 3 - Relation de Chasles

Soient f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et a, b et c des réels de I . Alors,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Exemple 6 - Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 1$ et $f(x) = x - 1$ sinon. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 0 dx + \int_1^2 (x - 1) dx \\ &= 0 + \left[\frac{(x-1)^2}{2} \right]_1^2 = 0 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Proposition 4 - Linéarité de l'intégrale

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et λ un réel. Alors,

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \lambda \int_a^b g(x) \, dx.$$

Exemple 7

En utilisant les primitives usuelles,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{12}{x} + 5x^3 \, dx &= 12 \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx + 5 \int_1^2 x^3 \, dx \\ &= 12 [\ln(x)]_1^2 + 5 \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 \\ &= 12 (\ln(2) - \ln(1)) + 5 \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= 12 \ln(2) + \frac{5}{4} \cdot 15. \end{aligned}$$

Proposition 5 - Croissance de l'intégrale (I)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Si $a \leq b$ et, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.

Exemple 8

Soient $F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^2} \, dt$ et $0 \leq x \leq y$. Alors,

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^y \frac{e^t}{(t+1)^2} \, dt = \int_0^x \frac{e^t}{(t+1)^2} \, dt + \int_x^y \frac{e^t}{(t+1)^2} \, dt \\ &= F(x) + \int_x^y \frac{e^t}{(t+1)^2} \, dt \end{aligned}$$

Or, $\frac{e^t}{(t+1)^2} \geq 0$ pour tout $t \in [x, y]$ et $x \leq y$, donc $\int_x^y \frac{e^t}{(t+1)^2} \, dt \geq 0$. Ainsi, $F(x) \leq F(y)$ et F est croissante.

Proposition 6 - Croissance de l'intégrale (II)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Si $a \leq b$ et pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.

Exemple 9

Pour tout $x \in [0, 1]$, $x + 1 \geq 1$. Ainsi,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}.$$

Proposition 7 - Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Si $a \leq b$, alors

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt.$$

Exemple 10

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$. Comme la fonction exponentielle est croissante,

$$\left| \int_0^x \frac{(-t)^n}{n!} e^t \, dt \right| \leq \int_0^x |(-t)^n| \frac{e^t}{n!} \, dt \leq \frac{e^x}{n!} \int_0^x t^n \, dt \leq \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}.$$

Proposition 8 - Positivité de l'intégrale des fonctions continues

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si f est à valeurs positives, alors $f \equiv 0$ si et seulement si $\int_a^b f(t) dt = 0$.

Exemple 11 - Contre-exemple



La propriété précédente est fausse si f est seulement continue par morceaux. Par exemple, si $f(x) = 0$ sur $]0, 1]$ et $f(1) = 1$. Alors, f est non nulle et $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

II.2 - Calculs d'intégrales

Théorème 3 - Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Exemple 12 -

- Calculons $\int_0^1 x e^{2x} dx$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) = e^{2x} \\ v(x) = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$. Comme u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, d'après la formule d'intégration

par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{2x} dx &= \left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{2e^4}{2} - \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_1^2 \\ &= e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{3e^4}{4} - \frac{e^2}{4}. \end{aligned}$$

- Calculons $\int_1^2 \ln(x) dx$.

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) = 1 \\ v(x) = x \end{cases}$. Comme u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, 2]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(x) dx &= [\ln(x)x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= 2 \ln(2) - 1 \ln(1) - \int_1^2 1 dx \\ &= 2 \ln(2) - [x]_1^2 = 2 \ln(2) - 2 + 1 = 2 \ln(2) - 1. \end{aligned}$$

Théorème 4 - Changement de variable

Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et φ une fonction de $[a, b]$ dans I de classe \mathcal{C}^1 . Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Exemple 13 -

Calculons $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ à l'aide du changement de variable $t = \ln(u)$.

La fonction $\varphi : [1, e] \rightarrow [0, 1]$, $u \mapsto \ln(u)$ est de classe \mathcal{C}^1 . Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} &= \int_1^e \frac{1}{u + 1} \times \frac{1}{u} du \\ &= \int_1^e \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1 + u} \right] du \\ &= \int_1^e \frac{du}{u} - \int_1^e \frac{du}{1 + u} = [\ln(u)]_1^e - [\ln(1 + u)]_1^e \\ &= 1 - \ln(1 + e) + \ln(2). \end{aligned}$$

II.3 - Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 5 - Formule de Taylor avec reste intégral

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I . Alors, pour tout $(a, x) \in I^2$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \int_a^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Exemple 14

- La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -1, +\infty[$. De plus, pour tout $x > -1$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= 0 + \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{1+0} + \int_0^x \frac{(x-t)}{1!} \times \left(-\frac{1}{(1+t)^2} \right) dt \\ \ln(1+x) - x &= - \int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2} dt. \end{aligned}$$

Si $x \geq 0$ et $t \in [0, x]$, alors $\frac{x-t}{(1+t)^2} \geq 0$ et $\ln(1+x) - x \leq 0$.

Si $-1 < x \leq 0$ et $t \in [x, 0]$, alors $\frac{x-t}{(1+t)^2} \leq 0$ et $\ln(1+x) - x \leq 0$.

Finalement,

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x.$$

- Comme la fonction exponentielle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , pour tout x réel,

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Si $x \geq 0$ et $t \in [0, x]$, alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq e^t \leq e^x \\ 0 &\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^x dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x \\ 0 &\leq e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x. \end{aligned}$$

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Si $x \leq 0$ et $t \in [x, 0]$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| &\leq \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!} e^t dt \\ &\leq \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} dt \\ &\leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

On conclut comme précédemment que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$.

III - Intégrales généralisées

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de \mathbb{R} d'extrémités a et b , où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

III.1 - Définition

Définition 4 - Convergence

Soit f une fonction continue par morceaux sur I .

- Si $I = [a, b[$ et f est continue sur $[a, b[$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers b .
- Si $I =]a, b]$ et f est continue sur $]a, b]$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge si $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ possède une limite finie lorsque x tend vers a .
- Si $I =]a, b[$ et f est continue sur $]a, b[$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge s'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ soient convergentes.

Dans tous les cas, si l'intégrale ne converge pas, elle *diverge*.

Exemple 15

La fonction \ln est continue sur $]0, 1]$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon}^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_{\varepsilon}^1 = -1 - \varepsilon \ln(\varepsilon) + \varepsilon.$$

Ainsi, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \ln(t) dt = -1$ et $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge.

Théorème 6 - Intégrales de référence

(i). **Intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1. \text{ Alors, } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

(ii). **Intégrales de Riemann sur $]0, 1]$.**

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1. \text{ Alors, } \int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha}} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

(iii). **Fonction exponentielle.**

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0. \text{ Alors, } \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

(iv). **Fonction logarithme.**

$$\int_0^1 \ln(t) dt \text{ converge. De plus, } \int_0^1 \ln(t) dt = -1.$$

III.2 - Propriétés

Proposition 9 - Linéarité

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt$ converge et

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt.$$

Proposition 10 - Relation de Chasles

On suppose que $\int_a^b f(t) dt$ converge et $c \in]a, b[$. Alors, $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent et

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Proposition 11 - Croissance de l'intégrale

On suppose que $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent.

(i). Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

(ii). Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Théorème 7 - Inégalité triangulaire

Si $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente et $a \leq b$, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Théorème 8 - Positivité

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_I |f(t)| dt$ converge. Si $\int_I |f(t)| dt = 0$, alors f est nulle sur I .

III.3 - Preuves d'existences**Proposition 12 - Intégrale faussement impropre**

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors, les intégrales de f sur $[a, b]$, $]a, b]$, $]a, b[$ et $[a, b[$ sont égales.

Exemple 16

Montrons que $\int_0^1 t \ln(t) dt$ est convergente. On note f la fonction définie sur $]0, 1]$ par $f(t) = t \ln(t)$.

- La fonction f est continue sur $]0, 1]$.
- D'après les croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$. Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0.

Finalement, l'intégrale de f sur $]0, 1]$ est bien définie.

Proposition 13 - Fonctions à valeurs positives

Si f est valeurs positives sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, b]$.

Théorème 9 - Domination locale

Soient f, g deux fonctions continues de $[a, b[$ dans \mathbb{R}_+ .

- S'il existe un réel c tel que $\forall x \in [c, b[, 0 \leq f(x) \leq g(x)$ et $\int_c^b g(t) dt$ converge, alors $\int_c^b f(t) dt$ converge.
- Si $f(x) \sim_b g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si $\int_a^b g(x) dx$ converge.

Exemple 17

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
 - ★ $x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
 - ★ Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} e^{-x} = 0$, il existe un réel c tel que, pour tout $x \geq c$,

$$x^{n+2} e^{-x} \leq 1, \text{ soit } x^n e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}.$$

$$\int_c^x t^n e^{-t} dt \leq \int_c^x \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{c} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{c}.$$

Comme $t^n e^{-t} \geq 0$, la fonction $x \mapsto \int_c^x t^n e^{-t} dt$ est croissante et majorée par $\frac{1}{c}$ donc convergente. Ainsi, $\int_c^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.

- ★ Comme $x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0, c]$, son intégrale sur ce segment est bien définie.

Finalement, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ converge.

- Étudions $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$.
 - ★ $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est continue sur $[0, 1[$.
 - ★ $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)} \sim 1 \frac{1}{2(1-t)}$.
Comme $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{2(1-t)}{1-t^2} = 1$, il existe $c < 1$ tel que pour tout $x \geq c$,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2(1-x)}{1-x^2}, \text{ soit } \frac{1}{4(1-x)} \leq \frac{1}{1-x^2}.$$

$$\int_c^x \frac{1}{1-t^2} dt \geq \int_c^x \frac{4}{(1-t)} dt \geq \frac{1}{4} (-\ln(1-x) + \ln(1-c)).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x) = -\infty$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ n'est pas convergente.

III.4 - Méthodes de calculs

Utiliser les méthodes de calcul sur un segment (primitivation, intégration par parties, changement de variable), puis étudier la limite.

Exemple 18

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

- Si $n = 0$. Pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Ainsi, $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$.

- Si $n \geq 1$. Soit $M \geq 0$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x^n \\ u'(x) = nx^{n-1} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) = e^{-x} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$. Comme u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, M]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^M x^n e^{-x} dx &= [-x^n e^{-x}]_0^M + \int_0^M nx^{n-1} e^{-x} dx \\ &= -M^n e^{-M} + n \int_0^M x^{n-1} e^{-x} dx. \end{aligned}$$

D'après le théorème des croissances comparées, lorsque $M \rightarrow +\infty$, on obtient la relation :

$$I_n = nI_{n-1}.$$

- On montre alors par récurrence que, pour tout n entier naturel, $I_n = n!$.