■ ■ ■

I. Calculs de déterminants

Indications pour l'exercice 1. Développer 2 fois selon la première ligne pour obtenir une relation de récurrence d'ordre 2 qu'il suffit alors de résoudre. □

Indications pour l'exercice 2. On pourra introduire le vecteur colonne E_i qui ne contient que des 0 sauf à la ligne i où il y a un 1 puis utiliser la multilinéarité du déterminant. □

Indications pour l'exercice 3. Les formules de trigonométrie assurent que la famille est liée dès que $n \geqslant 3$.
Lorsque $n = 2$, on montre que le déterminant est égal à $-\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)$. □

Indications pour l'exercice 4. En développant par rapport à la première ligne puis par rapport à la première colonne, on obtient une relation de récurrence d'ordre 2 qu'il suffit ensuite de résoudre... □

Indications pour l'exercice 5.

1. On calcule le coefficient $[C_n W_n]_{i,j}$. En utilisant les propriétés des racines de l'unité, on obtient $\zeta_j^{i-1} P(\zeta_j)$ où $P(X) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell X^{\ell-1}$.

2. Les propriétés des déterminants de Vandermonde permettent d'obtenir $\det(C_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\zeta_k)$.

3. Il importe d'utiliser les propriétés des racines de l'unité pour exprimer le réel Δ_n sous forme algébrique $\Delta_n = (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$. □

Indications pour l'exercice 6. On factorise la première colonne par 2 puis on effectue les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_1$. □

Indications pour l'exercice 7. En cherchant $M^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ {}^t\beta & \gamma \end{pmatrix}$, on obtient $\gamma = S^{-1}$ puis on trouve β et α. □

Indications pour l'exercice 8.

1. Introduire $A + iB$ et $A - iB$.

2. Chercher un contre-exemple avec des matrices d'ordre 2. □

II. Applications

Indications pour l'exercice 9.

1. Penser aux fonctions polynomiales.

2. Construire des matrices à partir des familles de vecteurs. □

Indications pour l'exercice 10. On pourra passer par les endomorphismes canoniquement associés. □

Indications pour l'exercice 11. On pourra utiliser la formule du binôme de Newton puis la liberté de la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$. On invoquera alors les déterminants de Vandermonde. □

Indications pour l'exercice 12. $(i) \Rightarrow (ii)$ On montre que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ en raisonnant sur E^* puis on utilise le théorème du rang.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ On montre que φ transforme les bases en bases.
$(iii) \Rightarrow (i)$ On raisonne par contraposée en utilisant les propriétés du déterminant. □

Indications pour l'exercice 13. $(\Leftarrow)$ On construit une combinaison linéaire nulle des (f_i) puis on l'évalue en $x_1, \ldots, x_n$.
$(\Rightarrow)$ Raisonner par récurrence sur n. Lors de l'hérédité, on pourra considérer un déterminant dont la dernière colonne est $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ puis développer ce déterminant par rapport à sa dernière colonne en remarquant que le coefficient devant $f_n(x)$ est alors non nul. On utilisera alors la propriété d'indépendance. □

Mathématiciens

Vandermonde Alexandre-Théophile (28 fév. 1735 à Paris-1er jan. 1796 à Paris).