

T.D. IX - Intégrales généralisées

I - Fonctions continues

Solution de l'exercice 1.

1. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{t^4} dt &= \int_1^x t^{-4} dt = \left[\frac{t^{-3}}{-3} \right]_1^x \\ &= \frac{x^{-3}}{-3} - \frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{x^3} \right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt$ converge et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt = \frac{1}{3}.$$

2. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{1}{t^3} dt &= \int_2^x t^{-3} dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right]_2^x \\ &= \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{2^{-2}}{-2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2x^2}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, alors $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge et

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{8}.$$

3. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{5}{t^3} dt &= \int_2^x 5t^{-3} dt = \left[\frac{5t^{-2}}{-2} \right]_2^x \\ &= \frac{5x^{-2}}{-2} - \frac{5 \times 2^{-2}}{-2} = \frac{5}{8} - \frac{5}{2x^2}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0$, alors $\int_2^{+\infty} \frac{5}{t^3} dt$ converge et

$$\int_2^{+\infty} \frac{5}{t^3} dt = \frac{5}{8}.$$

4. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{2}{t^4} dt &= \int_1^x 2t^{-4} dt = \left[\frac{2t^{-3}}{-3} \right]_1^x \\ &= \frac{2x^{-3}}{-3} - \frac{2}{-3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3x^3}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^4} dt$ converge et

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^4} dt = \frac{2}{3}.$$

5. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-5t} dt &= \left[\frac{e^{-5t}}{-5} \right]_0^x = \frac{e^{-5x}}{-5} - \frac{e^{-5 \times 0}}{-5} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{e^{-5x}}{5}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-5x} = 0$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-5t} dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} e^{-5t} dt = \frac{1}{5}.$$

6. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^x e^{-3t} dt &= \left[\frac{e^{-3t}}{-3} \right]_1^x = \frac{e^{-3x}}{-3} - \frac{e^{-3 \times 1}}{-3} \\ &= \frac{1}{3e^3} - \frac{e^{-3x}}{3}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-3t} dt$ converge et

$$\int_1^{+\infty} e^{-3t} dt = \frac{1}{3e^3}.$$

7. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_2^x 3e^{-5t} dt &= \left[\frac{3e^{-5t}}{-5} \right]_2^x = \frac{3e^{-5x}}{-5} - \frac{3e^{-5 \times 2}}{-5} \\ &= \frac{3}{5e^{10}} - \frac{3e^{-5x}}{5}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-5x} = 0$, alors $\int_2^{+\infty} 3e^{-5t} dt$ converge et

$$\int_2^{+\infty} e^{-5t} dt = \frac{3}{5e^{10}}.$$

8. En utilisant les primitives classiques, pour $x \geq 3$,

$$\begin{aligned} \int_3^x 2e^{-t} dt &= [-2e^{-t}]_3^x = -2e^{-x} + 2e^{-3} \\ &= \frac{2}{e^3} - 2e^{-x}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, alors $\int_3^{+\infty} 2e^{-t} dt$ converge et

$$\int_3^{+\infty} 2e^{-t} dt = \frac{2}{e^3}.$$

□

Solution de l'exercice 2.

1. D'après les primitives classiques, pour $x \leq 2$,

$$\begin{aligned} \int_x^2 e^{3t} dt &= \left[\frac{e^{3t}}{3} \right]_x^2 = \frac{e^{3 \times 2}}{3} - \frac{e^{3x}}{3} \\ &= \frac{e^6}{3} - \frac{e^{3x}}{3}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^2 e^{3t} dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^2 e^{3t} dt = \frac{e^6}{3}.$$

2. D'après les primitives classiques, pour $x \leq -5$,

$$\int_x^{-5} 2e^t dt = 2[e^t]_x^{-5} = 2(e^{-5} - e^x).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, alors $\int_{-\infty}^{-5} 2e^t dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{-5} 2e^t dt = 2e^{-5}.$$

3. D'après les primitives classiques, pour $x \leq -1$,

$$\begin{aligned} \int_x^{-1} \frac{1}{t^2} dt &= \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{-1} = -\frac{1}{-1} - \left(-\frac{1}{x} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt = 1.$$

4. On remarque que

$$\frac{1}{(1-t)^2} = (1-t)^{-2} = -[(-1) \times (1-t)^{-2}]$$

est de la forme $-u'(t)u(t)^{-2}$, où $u(t) = 1-t$. Ainsi, pour $x \leq 0$,

$$\int_x^0 \frac{1}{(1-t)^2} dt = \left[\frac{1}{1-t} \right]_x^0 = 1 - \frac{1}{1-x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-t)^2} dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-t)^2} dt = 1.$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. Comme $h(x) = \ln(u(x))$ où $u(x) = 1 + e^x$ et $u'(x) = e^x$, alors

$$h'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

2. D'après la question précédente, h est une primitive de f . Ainsi, pour $x \leq 0$,

$$\begin{aligned} \int_x^0 f(t) dt &= [h(t)]_x^0 = h(0) - h(x) \\ &= \ln(1 + e^0) - \ln(1 + e^x) = \ln(2) - \ln(1 + e^x). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = \ln(1 + 0) = 0$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f(t) dt = \ln(2)$. Finalement, $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^0 f(t) dt = \ln(2).$$

□

II - Fonctions discontinues

Solution de l'exercice 4.

1. a) Soit $x < 5$. Comme f est nulle sur $] -\infty, x]$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

b) Soit $x \in]5, 10[$. Comme f est nulle sur $] -\infty, 5[$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^5 f(t) dt + \int_5^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^5 0 dt + \int_5^x \frac{1}{5} dt \\ &= 0 + \left[\frac{t}{5} \right]_5^x = \frac{x}{5} - \frac{5}{5} \\ &= \frac{x-5}{5}. \end{aligned}$$

c) Soit $x > 10$. Comme f est nulle sur $] -\infty, 5[$ et sur $]10, x[$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^5 f(t) dt + \int_5^{10} f(t) dt + \int_{10}^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^5 0 dt + \int_5^{10} \frac{1}{5} dt + \int_{10}^x 0 dt \\ &= 0 + \left[\frac{t}{5} \right]_5^{10} + 0 = \frac{10}{5} - \frac{5}{5} \\ &= 1. \end{aligned}$$

d) D'après la question précédente, pour tout $x > 10$, $F(x) = 1$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

2. a) Soit $x < 5$. Comme f est nulle sur $] -\infty, x]$, alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x t f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

b) Soit $x \in]5, 10[$. Comme f est nulle sur $] - \infty, 5[$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x t f(t) dt = \int_{-\infty}^5 t f(t) dt + \int_5^x t f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^5 0 dt + \int_5^x \frac{t}{5} dt \\ &= 0 + \left[\frac{t^2}{10} \right]_5^x = \frac{x^2}{10} - \frac{5^2}{10} \\ &= \frac{x^2 - 25}{10}. \end{aligned}$$

c) Soit $x > 10$. Comme f est nulle sur $] - \infty, 5[$ et sur $]10, x[$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x t f(t) dt = \int_{-\infty}^5 t f(t) dt + \int_5^{10} t f(t) dt + \int_{10}^x t f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^5 0 dt + \int_5^{10} \frac{1}{5} dt + \int_{10}^x 0 dt \\ &= 0 + \left[\frac{t^2}{10} \right]_5^{10} + 0 = \frac{10^2}{10} - \frac{5^2}{10} \\ &= 10 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

d) D'après la question précédente, pour tout $x > 10$, $G(x) = \frac{15}{2}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{15}{2}$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \frac{15}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. a) Soit $x < 2$. Comme f est nulle sur $] - \infty, x]$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

b) Soit $x \in]2, 4[$. Comme f est nulle sur $] - \infty, 2[$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^2 0 dt + \int_2^x \frac{1}{2} dt \\ &= 0 + \left[\frac{t}{2} \right]_2^x = \frac{x}{2} - \frac{2}{2} \\ &= \frac{x - 2}{2}. \end{aligned}$$

c) Soit $x > 4$. Comme f est nulle sur $] - \infty, 2[$ et sur $]4, x[$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^2 f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt + \int_4^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^2 0 dt + \int_2^4 \frac{1}{5} dt + \int_4^x 0 dt \\ &= 0 + \left[\frac{t}{2} \right]_2^4 + 0 = \frac{4}{2} - \frac{2}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

d) D'après la question précédente, pour tout $x > 4$, $F(x) = 1$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

2. a) Soit $x < 2$. Comme f est nulle sur $] - \infty, x]$, alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x t f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

b) Soit $x \in]2, 4[$. Comme f est nulle sur $] - \infty, 2[$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^2 tf(t) dt + \int_2^x tf(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^2 0 dt + \int_2^x \frac{t}{2} dt \\ &= 0 + \left[\frac{t^2}{4} \right]_2^x = \frac{x^2}{4} - \frac{2^2}{4} \\ &= \frac{x^2 - 4}{4}. \end{aligned}$$

c) Soit $x > 4$. Comme f est nulle sur $] - \infty, 2[$ et sur $]4, x[$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^2 tf(t) dt + \int_2^4 tf(t) dt + \int_4^x tf(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^2 0 dt + \int_2^4 \frac{1}{2} dt + \int_4^x 0 dt \\ &= 0 + \left[\frac{t^2}{4} \right]_2^4 + 0 = \frac{4^2}{4} - \frac{2^2}{4} \\ &= 4 - 1 = 3. \end{aligned}$$

d) D'après la question précédente, pour tout $x > 4$, $G(x) = 3$. Ainsi,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 3$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = 3.$$

□

Solution de l'exercice 6.

1. a) Soit $x < 0$. Comme f est nulle sur $] - \infty, x]$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

b) Soit $x > 0$. Comme f est nulle sur $] - \infty, x[$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 2e^{-2t} dt \\ &= 0 + [-e^{-2t}]_0^x = -e^{-2x} - (-e^{-2 \times 0}) \\ &= 1 - e^{-2x}. \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $F(x) = 1 - e^{-2x}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

2. a) Soit $x < 0$. Comme f est nulle sur $] - \infty, x]$, alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

b) Soit $x > 0$. Comme f est nulle sur $] - \infty, 0[$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^0 tf(t) dt + \int_0^x tf(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x t(2e^{-2t}) dt \\ &= \int_0^x t(2e^{-2t}) dt. \end{aligned}$$

Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = 2e^{-2t}$ soit $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-2t}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0, x]$ donc

d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} G(x) &= [-te^{-2t}]_0^x - \int_0^x 1(-e^{-2t}) dt \\ &= -xe^{-2x} - 0 + \left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^x \\ &= -xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2} + e^{-2 \times 0} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x}. \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $G(x) = \frac{1}{2} - xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2}$.

D'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0$ et d'après les propriétés de la fonction exponentielle, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{1}{2}$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \frac{1}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 7.

1. a) Soit $x < 0$. Comme f est nulle sur $] -\infty, x]$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

b) Soit $x > 0$. Comme f est nulle sur $] -\infty, x[$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= 0 + [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} - (-e^0) \\ &= 1 - e^{-x}. \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $F(x) = 1 - e^{-x}$.
Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

2. a) Soit $x < 0$. Comme f est nulle sur $] -\infty, x]$, alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

b) Soit $x > 0$. Comme f est nulle sur $] -\infty, 0[$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x tf(t) dt = \int_{-\infty}^0 tf(t) dt + \int_0^x tf(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x te^{-t} dt \\ &= \int_0^x te^{-t} dt. \end{aligned}$$

Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$ soit $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0, x]$ donc d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} G(x) &= [-te^{-t}]_0^x - \int_0^x 1(-e^{-t}) dt \\ &= -xe^{-x} - 0 + [-e^{-t}]_0^x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + e^{-0} \\ &= 1 - (x+1)e^{-x}. \end{aligned}$$

c) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $G(x) = 1 - xe^{-x} - e^{-x}$.

D'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ et d'après les propriétés de la fonction exponentielle, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = 1.$$

□

Solution de l'exercice 8.

1. La fonction $g(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ est de la forme $-u(t)^{-1}$ où $u(t) = 1+t^2$, soit $u'(t) = 2t$.

Ainsi,

$$g'(t) = -(-1) \times (2t)(1+t^2)^{-1-1} = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

2. Soit $x \geq 0$. En utilisant la définition de la fonction f ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= 0 + \left[-\frac{1}{1+t^2} \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{1+x^2} - \left(-\frac{1}{1+0^2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, pour tout $x > 0$,

$$\int_{-\infty}^x \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

D'après les limites classiques, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$. Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt = 1.$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. Soit $A \geq 1$. D'après la définition de f ,

$$\begin{aligned} I(A) &= \int_{-\infty}^A \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{-\infty}^1 \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^A \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{-\infty}^1 \frac{0}{x} dx + \int_1^A \frac{\ln(x)}{x} dx \\ &= 0 + \int_1^A \frac{1}{x} \ln(x) dx. \end{aligned}$$

On reconnaît une forme $u'(x)u(x)$ où $u(x) = \ln(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I(A) &= \left[\frac{\ln(x)^2}{2} \right]_1^A = \frac{\ln(A)^2}{2} - \frac{\ln(1)^2}{2} \\ &= \frac{\ln(A)^2}{2}. \end{aligned}$$

2. Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(A)^2 = +\infty$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ diverge.

3. Soit $A \geq 1$. D'après la définition de f ,

$$\begin{aligned} J(A) &= \int_{-\infty}^A \frac{f(x)}{x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^1 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^A \frac{f(x)}{x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^1 \frac{0}{x^2} dx + \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx \\ &= 0 + \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$ soit $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, A]$. Ainsi,

d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
 J(A) &= \left[\ln(x) \times \left(-\frac{1}{x} \right) \right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x} \right) dx \\
 &= -\frac{\ln(A)}{A} - \left(-\frac{\ln(1)}{1} \right) + \int_1^A \frac{1}{x^2} dx \\
 &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^A \\
 &= -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.
 \end{aligned}$$

4. D'après les croissances comparées, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln(A)}{A} = 0$. De plus,

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} = 0$. Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx = 1.$$

□