■ ■ ■

L'usage de toute calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre laissé au libre choix. Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Lors de la correction, la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte. Dans l'ensemble du sujet, on pourra admettre les résultats des questions précédentes à condition de clairement l'indiquer.
Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené-e à prendre.

Exercice 1. On définit les trois matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall\, n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{u_n+3}.$$

1. Inverse de P. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Calcul de A^n. On pose $B = P^{-1}AP$.

a) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *(les calculs intermédiaires devront être indiqués sur votre copie).*

b) Donner les quatre coefficients de la matrice B^n.

c) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \geqslant 0$, $A^n = PB^nP^{-1}$ puis donner les quatre coefficients de la matrice A^n.

3. Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

a) Démonter par récurrence que $\forall\, n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 1$.

b) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

c) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. On note L la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

d) Montrer que $L = \frac{3L+1}{L+3}$, résoudre cette équation puis déterminer L.

4. Calcul de u_n et de sa limite. Pour tout entier n, on considère les deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ définies par

$$\begin{cases} a_0 & = 2 \\ b_0 & = 1 \end{cases} \text{ et } \forall\, n \geqslant 0, \begin{cases} a_{n+1} & = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} & = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{cases}$$

On admettra que : $\forall\, n \geqslant 0$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

a) Prouver par récurrence que : $\forall\, n \geqslant 0$, $u_n = \frac{a_n}{b_n}$.

b) Posons : $\forall\, n \geqslant 0$, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Donner l'expression de U_{n+1} en fonction de A et U_n puis donner (sans démonstration) l'expression de U_n en fonction de A, n et U_0.

c) Donner l'expression de u_n en fonction de n puis retrouver ainsi la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 2. On considère deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit a, b, x, y quatre réels qui vérifient $aA + bI = xA + yI$. Montrer que $a = x$ et $b = y$.

2. a) Calculer A^2 en fonction de A et I.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un unique couple de réels (u_n, v_n) tel que $A^n = u_nA + v_nI$. (On rappelle que, pour toute matrice carrée P, on a $P^0 = I$).
On vérifiera, pour tout entier naturel n, les relations : $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n$.

3. a) Si l'on suppose que pour un certain entier naturel n, u_n et v_n sont positifs, montrer que u_{n+1} et v_{n+1} sont également positifs.

b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont positifs.

4. a) Établir, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

5. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$.

6. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, les relations :

$$\begin{cases} u_{2n-1} &= u_{n-1}^2 + u_n^2 \\ u_{2n} &= u_n u_{n-1} + u_n u_{n+1}. \end{cases}$$

Pour toute matrice carrée M d'ordre 2 de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels quelconques, on pose $d(M) = ad - bc$.

7. Soit a, b, c, d, x, y, z, t huit réels quelconques. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit MN ainsi que $d(MN)$.

b) Montrer que $d(MN) = d(M) \times d(N)$.

8. Établir par récurrence, pour toute matrice M carrée d'ordre 2 et pour tout entier naturel n, la formule : $d(M^n) = [d(M)]^n$.

9. En utilisant le résultat précédent, montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation : $u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n$.

Exercice 3. On considère la fonction définie sur $]-2,+\infty[$ par : $\forall\, x \in]-2,+\infty[$, $f(x) = \ln(x+2) - x$. On nomme $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Partie I - Étude de la fonction f

1. a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 par valeur supérieure. Comment interpréter graphiquement le résultat ?

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Calculer la dérivée de f. Dresser le tableau des variations de f sur $]-2,+\infty[$ en y faisant figurer les limites calculées en 1.

3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-1,+\infty[$.

b) On donne $\ln(2) \simeq 0{,}69$ et $\ln(3) \simeq 1{,}10$. Justifier que $\alpha \in]1,2[$.

On admet dans la suite que l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution β entre -2 et -1.

4. Calculer la dérivée seconde de f. Montrer que f est concave sur $]-2,+\infty[$.

5. On donne $\alpha \simeq 1{,}15$ et $\beta \simeq -1{,}8$. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

Partie II - Valeur approchée de α

Dans cette partie, on cherche à justifier que $\alpha \simeq 1{,}15$. On considère la fonction g définie sur $[1,2]$ par $g(x) = \ln(x+2)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

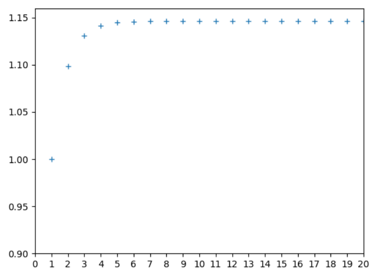
6. a) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il mémorise les valeurs de u_1 à u_{20} et qu'il représente graphiquement ces termes.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

u = [...]
for i in range(1, 20):
    u.append(...)

plt.figure()
plt.plot(range(1, 21), u, '+')
plt.show()
```

b) L'exécution du programme amène le graphique suivant. Que pouvez-vous conjecturer sur le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sur sa limite ?



7. a) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $[1, 2]$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ (on rappelle que $\ln(2) \simeq 0{,}69$ et $\ln(3) \simeq 1{,}10$.

c) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. En déduire que cette suite est convergente.

8. a) Montrer que le réel α de la **Partie I** est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ sur $[1, 2]$.

b) Soit ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = g(u_n)$, montrer que $\ell = g(\ell)$.

c) Déduire des expressions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α. Donner une valeur approchée de α à l'aide du graphique de la question **6.**

Exercice 4. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2};$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Étude du signe de g.

a) Calculer $g'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Vérifier que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution p que l'on précisera et construire le tableau de variations de g.

c) Calculer $g(p)$ puis donner le signe de $g(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Étude asymptotique de f.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$.

b) On note $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$. Calculer a et b.

c) Donner l'équation de l'asymptote $(\mathscr{A})$ de $\mathscr{C}_f$ quand $x \to +\infty$ et préciser la position de cette asymptote par rapport à $\mathscr{C}_f$.

3. Représentation graphique de f.

a) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en indiquant dans celui-ci les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

c) Tracer sur un même dessin le graphe de $\mathscr{C}_f$ ainsi que celui de son asymptote $(\mathscr{A})$.

4. Étude d'une équation. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel non nul, on considère l'équation

$$(\mathscr{E}_n) : f(x) = 2n.$$

a) Prouver que l'équation $(\mathscr{E}_n)$ admet une unique solution (*que l'on ne cherchera pas à calculer*). On note x_n cette solution.

b) Calculer puis classer par ordre croissant les réels $f(x_n)$, $f(1)$ et $f(n)$. En déduire l'encadrement :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ 1 \leqslant x_n \leqslant n.$$

c) Justifier que : $\forall\, n \geqslant 1,\ 1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$.

d) Prouver que : $\forall\, n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$.

e) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n}$.