

# T.D. VI - Calculs de sommes

## Séries numériques

### I - Calculs de sommes

**Exercice 1. (Sommes à étendre, ⚙️)** Calculer les sommes suivantes :

- |                       |                              |                          |
|-----------------------|------------------------------|--------------------------|
| 1. $\sum_{k=0}^5 3.$  | 3. $\sum_{\ell=1}^7 \ell.$   | 5. $\sum_{k=12}^{27} k.$ |
| 2. $\sum_{n=3}^5 10.$ | 4. $\sum_{\ell=2}^5 \ell^2.$ |                          |

**Exercice 2. (Sommes géométriques, ⚙️)** Calculer les sommes suivantes :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\sum_{k=5}^{12} 2^k.$                  | 5. $\sum_{\ell=1}^5 (3^\ell - 2).$                                |
| 2. $\sum_{n=3}^{10} (-1)^n.$               | 6. $\sum_{k=0}^n \left( \frac{2^k}{5^k} + \frac{1}{4^k} \right).$ |
| 3. $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{2^{2n}}.$        | 7. $\sum_{k=0}^n \frac{3^k + 4^k}{5^k}.$                          |
| 4. $\sum_{n=1}^4 \frac{3^{2n+1}}{2^{2n}}.$ |   |

**Exercice 3. (⚙️)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 1$  et de raison 4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Calculer  $\sum_{k=0}^{10} u_k.$

**Exercice 4. (⚙️)** Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de premier terme  $w_0 = 4$  et de raison  $\frac{1}{5}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .
2. Calculer  $\sum_{k=5}^{21} w_k.$

### II - Sommes télescopiques

**Exercice 5. (⚙️)** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $w_n = \frac{1}{2^n}$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} w_n.$$

Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 6. (⚙️)** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $w_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} w_n.$$

Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 7. (⚙️)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels telle que  $u_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour tout  $n$  entier naturel, exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 8. (⚙️)** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de réels telle que  $v_0 = 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = (-8)^n.$$

Pour tout  $n$  entier naturel, exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 9. (⚙️)** Soit  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $b_n = n3^{n-1}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $2b_n = b_{n+1} - b_n - 3^n.$
2. Calculer  $\sum_{k=0}^n 3^k.$

3. Montrer que  $\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$ .

4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^n k 3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}.$$

**Exercice 10.** Pour tout  $k \geq 1$ , on pose  $u_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ .

1. Exprimer  $u_k$  en fonction de  $\ln(k+1)$  et  $\ln(k)$ .

2. À l'aide d'une somme télescopique, calculer  $\sum_{k=1}^n u_k$ .

3. En déduire la nature (et éventuellement la somme) de la série  $\sum u_k$ .

**Exercice 11.** ( $\Rightarrow$ ) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = u_n e^{-1/u_n}$ . Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $-\ln(u_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$ .

### III - Séries géométriques... et plus

**Exercice 12.** ( $\otimes$ ) Vérifier la convergence puis calculer les sommes suivantes :

1.  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k}.$

2.  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{5^k}.$

3.  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}}.$

4.  $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{3^{2\ell+1}}{10^\ell}.$

5.  $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^\ell.$

6.  $\sum_{\ell=3}^{+\infty} \frac{2^{2\ell+1}}{3^{3\ell}}.$

**Exercice 13.** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $u_n = 5 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n + \frac{2}{3}$ .

1. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que la série de terme général  $\alpha - u_n$  converge. Donner la valeur de ce réel  $\alpha_0$ .

2. En déduire la somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha_0 - u_n)$ .

**Exercice 14.** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $u_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \alpha$ . Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si  $\alpha = \frac{1}{4}$ .

**Exercice 15.** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose

$$p_n = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}.$$

1. Montrer que les séries  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$  et  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}$  convergent.

2. Vérifier que  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$ .

**Exercice 16.** ( $\Rightarrow$ ) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $\sum_{k=1}^n k \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^k$ .

2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\sum_{k=1}^n k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \left(\frac{3}{4}\right)^\ell.$$

3. En déduire que  $\sum_{k=1}^n k \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k - n \left(\frac{3}{4}\right)^n$ .

4. En utilisant les questions précédentes, calculer  $\sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ .