# T.D. I - Études de fonctions

### I - Inégalités

**Exercice 1.** Montrer que pour tout n entier naturel non nul,

$$\frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

**Exercice 2.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0,1]$ ,

$$0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n \ln(2).$$

#### II - Étude de trinômes

**Exercice 3.** Soit  $f: x \mapsto x^2 + x + 1$ . Étudier le signe de f.

**Exercice 4.** Soit h définie pour tout x > 0 par  $h(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$ . Déterminer, en fonction de x, le signe de h(x).

**Exercice 5.** Soit  $f: x \mapsto \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$ . Déterminer, en fonction de x, le signe de f(x).

### III - Étude de signes

**Exercice 6.** Soit g la fonction définie pour tout x > 0 par  $g(x) = 1 - \ln(x)$ . Dresser le tableau de signes de g.

**Exercice 7.** Soit g la fonction définie pour tout  $x \in ]-1,+\infty[$  par  $g(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$ . Dresser le tableau de signe de g.

**Exercice 8.** Soit g la fonction définie pour tout x>0 par  $g(x)=\frac{-3+2\ln(x)}{x^3}$ . Dresser le tableau de signes de g.

**Exercice 9.** Soit  $f: x \mapsto \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$ . Dresser le tableau de signes de f.

**Exercice 10.** Soit f définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t/2} - e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer le signe de f.

#### IV - Calculs de dérivées

**Exercice 11.** Pour tout x réel, on pose  $h(x) = \ln(1 + e^x)$ . Déterminer la dérivée de h.

**Exercice 12.** On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .

- **1.** Montrer que la dérivée de f vérifie pour tout x réel,  $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ .
- **2.** En déduire le tableau de variations de f.
- ${\bf 3.}\,$  Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
- **4.** Calculer la dérivée seconde f'' de f.

**Exercice 13.** Soit f la fonction définie pour tout x réel par  $f(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}$ .

- 1. Dresser le tableau de variations de f.
- **2.** Déterminer le nombre de réels  $\lambda$  tels que  $f(\lambda) = 0$ .

**Exercice 14.** Soit  $f: x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ .

- 1. Déterminer la dérivée f' de f.
- **2.** Déterminer la dérivée seconde de f'' de f.

**Exercice 15.** Soit f la fonction définie pour tout  $x \in ]-1,+\infty[$  par  $f(x)=x\ln(1+x).$ 

- 1. Déterminer la dérivée f' de f.
- **2.** Déterminer la dérivée seconde de f'' de f.

**Exercice 16.** Soit f définie pour tout  $x \ge 1$  par  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ 

- 1. Déterminer la dérivée f' de f.
- **2.** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse  $e^{3/2}$ .
- 3. Déterminer la dérivée f'' de f.

#### V - Calculs de limites

**Exercice 17.** On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .

- 1. Déterminer  $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ .
- **2.** Montrer que pour tout x réel  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$  et en déduire  $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ .
- 3. Interpréter graphiquement ce résultat?

**Exercice 18.** Soit f définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$ .

- 1. Déterminer la limite de f en  $+\infty$ .
- **2.** Déterminer la limite de f en  $-\infty$ .

**Exercice 19.** Soit h définie pour tout x > 0 par  $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$ .

- 1. Factoriser l'expression de h(x) par le réel  $\frac{1}{x}$ . En déduire  $\lim_{x\to 0} h(x)$ .
- 2. Factoriser l'expression de h(x) par le réel x. En déduire  $\lim_{x\to +\infty} h(x)$ .

**Exercice 20.** Soit g définie pour tout x > 0 par  $g(x) = x - \ln(x)$ .

- **1.** Calculer g(1).
- **2.** Calculer  $\lim_{x\to 0} g(x)$ .
- **3.** Calculer  $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ .

**Exercice 21.** Soit  $f: x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ .

- **1.** Calculer  $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ .
- **2.** Calculer  $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ .

## VI - Limites à droite / à gauche

**Exercice 22.** Soit n un entier naturel non nul et  $f_n$  définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} nt^{n-1} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1. Déterminer les limites à gauche et à droite de  $f_n$  en 0.
- **2.** Déterminer les limites à gauche et à droite de  $f_n$  en 1.

**Exercice 23.** Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geqslant 0\\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Déterminer les limites à gauche et à droite de f en 0.

**Exercice 24.** Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1\\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 25.** Soit k un réel non nul. On considère la fonction f définie sur  $\mathbb R$  par

$$f(t) = \begin{cases} k \frac{t}{1+t} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f sur  $\mathbb{R}$ .