VII - Applications linéaires

I - Applications linéaires

I.1 - Définitions

Définition 1 - Application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. L'application f est une *application linéaire* si pour tout u, $v \in \mathbb{R}^n$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est noté $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

- Les applications linéaires sont des *morphismes* entre espaces vectoriels.
- Les applications linéaires bijectives sont des *isomorphismes*.
- Si $n = p$, on note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ses éléments sont des *endomorphismes*.
- Les endomorphismes bijectifs sont des *automorphismes*.

Exemple 1 - Applications linéaires

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y, x + 2z, x + y + z)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (3x + 2y, x + 2y, x + y)$.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x + 2y$.
- $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$ est un automorphisme.

Proposition 1

Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors $f(\overrightarrow{0_n}) = \overrightarrow{0_p}$.

Proposition 2 - Opérations sur les applications linéaires

- Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\alpha \cdot f : x \mapsto \alpha \cdot f(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
- Soit f, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors, $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
- Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)$. $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exemple 2 - Opérations sur les applications linéaires

- Si $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, x + y)$ et $g : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z)$, alors
$$f + g : (x, y, z) \mapsto (3x + 2y + z, 2x - z).$$
- Si $f : (x, y) \mapsto x + 2y$ et $g : (x, y, z) \mapsto (x + z, y + z)$, alors
$$f \circ g : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z.$$

I.2 - Noyau & Image

Définition 2 - Noyau, Image

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

- Le *noyau* de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ f(x) = \overrightarrow{0_p}\}.$$
- L'*image* de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Exemple 3 - Calculs de noyau et d'image

Soit $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, 4x + 2y)$.

- $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f(x, y, z) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y &= 0 \\ 4x + 2y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y &= 0 \\ 0 &= 0 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x &= -\frac{\lambda}{2} \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{(-\lambda/2, \lambda, \mu),\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(-1/2, 1, 0), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

- D'après la définition,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{(2x + y, 4x + 2y),\ x,\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(2, 4), (1, 2)\} = \operatorname{Vect}\{(1, 2)\}. \end{aligned}$$

Proposition 3

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

- $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 4

Soit $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ 2x + 3y + z = 0\right\}$.
Posons $f : (x, y, z) \mapsto 2x + 3y + z$. Alors, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, donc $F = \operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3 - Forme linéaire

Les applications linéaires à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont des *formes linéaires*.

Théorème 1 - Caractérisation des applications linéaires injectives

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i). f est injective.

(ii). $\operatorname{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_n}\}$.

Exemple 5 - Une preuve d'injectivité

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = \operatorname{Id}$. Alors, f est injective.

En effet, si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \overrightarrow{0_n} \\ f^{p-1}(f(x)) &= f^{p-1}(\overrightarrow{0_n}) \\ f^p(x) &= \overrightarrow{0_n} \\ x &= \overrightarrow{0_n} \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \left\{\overrightarrow{0_n}\right\}$. L'application f est donc injective.

Théorème 2 - Théorème du rang (admis)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors,

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{Rg} f = \dim(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 6 - Forme linéaire & Hyperplan

Soit f une forme linéaire non nulle. Comme $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, alors $\dim \operatorname{Im} f \in \{0, 1\}$.
Comme f est non nulle, alors $\operatorname{Im} f \neq \{0\}$. Ainsi, $\dim \operatorname{Im} f = 1$ et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.
D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$ donc $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 4

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
- f est bijective.
- f est injective.
- f est surjective.

Exemple 7 - Un exemple d'isomorphisme

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = \mathrm{Id}$. D'après l'exemple précédent, f est injective. Ainsi, comme f est un endomorphisme, f est bijective.

II - Matrice d'une application linéaire

Dans toute la suite, F désigne un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$.

II.1 - Vecteurs, Applications linéaires, Matrices

Définition 4 - Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit m un entier naturel non nul, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et $v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de F. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on note $v_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ji} e_j$. La *matrice des vecteurs* $(v_1, \dots, v_m)$ dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_m) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pm} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K}).$$

Exemple 8 - Matrice de vecteurs

Posons $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, 2)$. La famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y) = ae_1 + be_2$. Alors,

$$\begin{cases} a + b & = x \\ a + 2b & = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b & = x \\ b & = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 2x - y \\ b & = y - x \end{cases}$$

Soit $v_1 = (0, 1)$, $v_2 = (1, 0)$ et $v_3 = (4, 5)$. Alors,

$$v_1 = -(1, 1) + (1, 2)$$
$$v_2 = 2(1, 1) - (1, 2)$$
$$v_3 = 3(1, 1) + (1, 2)$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 5 - Matrice d'une application linéaire dans deux bases

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. La *matrice de l'application linéaire* f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
Si $n = p$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

Exemple 9 - Matrice d'applications linéaires

- Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Id}(e_i) = e_i$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}) = I_n$.
- Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B}'$ une base de $\mathbb{R}^p$. En notant f l'application nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \overrightarrow{0}_p$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = 0_{p,n}$.
- On pose $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, 2)$. On montre aisément que

$\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, y - 3z)$. De plus, en utilisant l'exemple précédent,

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (3, -2) = 8(1,1) - 5(1,2) \\ f(e_2) &= (4, -1) = 9(1,1) - 5(1,2) \\ f(e_3) &= (0, -3) = 3(1,1) - 3(1,2) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

- On note $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B} = (f_1, f_2)$ la base de $\mathbb{R}^2$ définie à l'exemple précédent. Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}(\varepsilon_1) &= (1, 0) = 2(1,1) - (1,2) \\ \mathrm{Id}(\varepsilon_2) &= (0, 1) = -(1,1) + (1,2) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

II.2 - Opérations usuelles

Proposition 5 - Évaluation

Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}'$ une base de $\mathbb{R}^p$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $u \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u).$$

Théorème 3 - Addition et multiplication par un réel

Soit f, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}'$ une base de $\mathbb{R}^p$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(af + g) = a\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g).$$

Proposition 6 - Composition & Produit matriciel

Soit $\mathscr{B}_1$ (resp. $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$) une base de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$), $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f).$$

Théorème 4 - Inverse & Matrices

Soit $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. L'application f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$ est inversible. Alors $\left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)\right]^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(f^{-1})$.

Définition 6 - Morphisme canoniquement associé

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Notons $\mathscr{C}_n$ (resp. $\mathscr{C}_p$) la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$). Le morphisme *canoniquement associé* à A est l'application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_p,\mathscr{C}_n}(f) = A$.

Exemple 10 - Endomorphisme canoniquement associé

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors,

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= 1 \cdot (1,0) + (-1) \cdot (0,1) = (1,-1) \\ f(0,1,0) &= 2 \cdot (1,0) + 4 \cdot (0,1) = (2,4) \\ f(0,0,1) &= 3 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1) = (3,0) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) \\ &= (x + 2y + 3z, -x + 4y). \end{aligned}$$

Corollaire 5 - Caractérisation des matrices inversibles

Soit A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$, alors $BA = I_n$.

Exemple 11 - Une autre preuve d'inversibilité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Si $AX = 0_{n,1}$, alors

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 0 \\ -x + z & = 0 \\ 2y + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z & = 0 \\ 2y + 4z & = 0 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ 2y + z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z & = 0 \\ 2y + 4z & = 0 \\ 3z & = 0 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_2 - L_3} \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en notant f l'endomorphisme canoniquement associé à A, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = \overrightarrow{0_3}$. Donc $\operatorname{Ker} f = \left\{\overrightarrow{0_3}\right\}$. L'endomorphisme f est injectif et donc bijectif. Ainsi, A est inversible.

Corollaire 6 - Caractérisation des bases

Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f_1, \dots, f_n)$ est inversible.

Exemple 12 - Une base

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $v_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $v_2 = -e_2 - e_3$ et $v_3 = e_3$ et $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$.
D'après la définition, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont non nuls. Ainsi, la matrice est inversible et $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

II.3 - Formules de changement de base

Définition 7 - Matrice de passage

Soit $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. La *matrice de passage* de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$ est la matrice $P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1}(\operatorname{Id}_E)$.

Exemple 13 - Suite de l'exemple précédent

La matrice $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 7 - Inversibilité

Soit $P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}$ une matrice de changement de base. Alors, $P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}$ est inversible et $\left(P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1}$

Exemple 14 - Suite de l'exemple précédent

En utilisant une des techniques précédentes,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow -L_2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & \end{array}\right.$$

Ainsi, $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 8 - Changement de base d'un vecteur

Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ deux bases de $\mathbb{R}^n$.
Alors, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u) = \left(P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}\right)^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u)$, soit $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u) = P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u)$.

Remarque. C'est la matrice de passage de l'ancienne base $\mathscr{B}_1$ à la nouvelle base $\mathscr{B}_2$ qui est facile à obtenir, mais c'est celle de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}_1$ (donc son inverse) qui est utile pour calculer les nouvelles coordonnées du vecteur. On n'échappe donc pas au calcul de l'inverse !

Exemple 15 - Suite de l'exemple précédent

Soit $u = (1, 4, 3) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $u = v_1 - 6v_2 - 4v_3$.

Théorème 7 - Formules de changement de base

Soit $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}'_1$ deux bases de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}'_2$ deux bases de $\mathbb{R}^p$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_1, \mathscr{B}'_2}(f) = P_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(f) \cdot P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}'_1}.$$

En particulier, lorsque $n = p$, $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}'_1 = \mathscr{B}'_2$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_1}(f) = \left(P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}'_1}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) P_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}'_1}.$$

Remarque. Certains, comme moyen mnémotechnique, pourront voir dans la dernière formule une sorte de relation de Chasles.

Exemple 16 - Suite de l'exemple précédent

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarque alors qu'on peut écrire $A = PCP^{-1}$, soit $A^n = PC^nP^{-1}$. De plus, la matrice C^n est aisée à calculer à l'aide de la formule du binôme de Newton.

II.4 - Rang des matrices

Définition 8 - Noyau, Image & Rang d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(i). L'*image* de M est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par ses vecteurs colonnes.

(ii). Le *rang* de M, noté $\mathrm{Rg}\, M$, est le rang des vecteurs colonnes de M.

(iii). Le *noyau* de M est le sous-espace de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ engendré par les vecteurs X tels que $MX = 0_{p,1}$.

Proposition 9 - Rang des matrices & Applications linéaires

Soit $\mathscr{B}_1$ (resp. $\mathscr{B}_2$) une base de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors, $\operatorname{Rg} f = \operatorname{Rg} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$.

Proposition 10 - Rang et Inversibilité

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\operatorname{Rg} A = n$.

Exemple 17 - Calcul de rang

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss,

$$\begin{aligned} \operatorname{Rg}(A) &= \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 \\ 0 & 11 & 4 \end{pmatrix} \quad \substack{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3} \\ &= \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \end{aligned}$$

La famille ainsi obtenue est échelonnée donc $\operatorname{Rg}(A) = 2$.