



Problème. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \begin{cases} x e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue à droite en 0.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que f est dérivable à droite en 0 et donner le nombre dérivé à droite de f en 0, noté $f'_d(0)$.

2. a) Déterminer, pour tout réel x de \mathbb{R}_+^* , l'expression de $f'(x)$ en fonction de x , où f' désigne la fonction dérivée de f .

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R}_+^* , puis donner les variations de f sur \mathbb{R}_+ .

c) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de f .

d) Vérifier que, pour tout réel x de \mathbb{R}_+^* , on a $f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{-1/x}$. La fonction f est-elle convexe ou concave sur \mathbb{R}_+^* ?

3. a) Calculer $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u}$.

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$.

c) On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Donner l'équation de la droite asymptote à (\mathcal{C}) au voisinage de $+\infty$ et tracer l'allure de (\mathcal{C}) .

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

4. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

d) Compléter les commandes suivantes pour qu'elles affichent le rang n à partir duquel $u_n \leq 10^{-3}$.

```
import numpy as np

n = 0
u = 1
while u > 0.001:
    u = ...
    n = ...

print(n)
```

5. a) Montrer que, pour tout n entier naturel, on a la relation $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1})$.

b) En déduire que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est divergente.