Réduction des endomorphismes

Chapitre XI

■ ■ ■

I. Spectres

Exercice 1. (✍) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.

Exercice 2. (✍) Déterminer les valeurs et sous-espaces propres de l'endomorphisme défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi : P \mapsto (2X+1)P + (1-X^2)P'$.

Exercice 3. (♡) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset E = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{B}}\left(a_{i,i}, \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|\right)$.

2. En notant $E' = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{B}}\left(a_{i,i}, \sum_{k \neq i} |a_{k,i}|\right)$, montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset E \cap E'$.

Exercice 4. (➶) Soient E l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}_+$ qui admettent une limite finie en $+\infty$ et T l'application définie pour tout $f \in E$ par

$$T(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+1) \end{array}.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.

2. Montrer que $\mathrm{Sp}(T) \subset]-1, 1]$.

3. Déterminer le spectre de T.

Exercice 5. (Matrices stochastiques, ♡) Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs et tels que pour tout i entier naturel non nul, $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de P.

2. Soit $v = {}^t\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre 1. En considérant $|v_{i_0}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i|$, montrer que le sous-espace propre associé E_1 est de dimension 1.

3. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de P, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de P telle que $|\lambda| = 1$ et $\widetilde{x}$ un vecteur propre associé.

a) Montrer qu'il existe un vecteur propre associé à λ tel que $\|x\|_\infty = 1$.

b) Montrer qu'il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\left|\sum_{j=1}^{n} p_{i_0,j} x_j\right| = 1$.

c) Soit θ l'argument principal de $\sum_{j=1}^{n} p_{i_0,j} x_j$. Montrer que : $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathscr{Re}\left(\mathrm{e}^{-i\theta} x_j\right) = 1$.

d) En déduire que $\lambda = 1$.

II. Diagonalisation

Exercice 6. (✍) [TPE] Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable puis calculer A^n.

2. Soient $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} & = 5u_n + v_n - w_n \\ v_{n+1} & = 2u_n + 4v_n - 2w_n \\ w_{n+1} & = u_n - v_n + 3w_n \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer u_n, v_n et w_n.

Exercice 7. (✍) Soient α, β, θ trois réels. La matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \beta \\ \sin\theta & \cos\theta & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 8. [Mines] Soit $n \geqslant 2$. Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9. [CCP] Soit $n \geqslant 2$. On définit

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \\ 2 & n-1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n-1 \\ 3 & n-2 & 3 & 3 & \cdots & 3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & n & n & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$.

2. Déterminer $\mathrm{Rg}(A_n)$.

3. A_n est-elle diagonalisable ? Déterminer la dimension des sous-espaces propres.

Exercice 10. (♡) [Mines] $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$.

1. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que tout sous-espace de $\mathbb{K}^n$ stable par f admet un supplémentaire stable par f.

2. Que dire de la réciproque dans $\mathbb{C}$?

3. Décrire un contre-exemple à la réciproque dans $\mathbb{R}$, en dimension 2.

Exercice 11. (✍) [X-ENS] Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Est-ce qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

Exercice 12. (Autour du commutant, ♡) [X-ENS] Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $C(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ MA = AM\}$.

1. a) Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ stable par multiplication.

b) Montrer que si $M \in C(A)$ et M est inversible, alors $M^{-1} \in C(A)$.

2. Soit D une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts.

a) Déterminer $C(D)$.

b) Montrer que $(I_n, D, \ldots, D^{n-1})$ est une base de $C(D)$.

3. On se limite au cas $n = 2$.

a) Déterminer les matrices A telles que $\dim C(A) = 4$.

b) Montrer que $\dim C(A) \geqslant 2$.

c) On suppose que $\dim C(A) \geqslant 3$. En utilisant $F = \mathrm{Vect}\{E_{1,1}, E_{1,2}\}$ ou $G = \mathrm{Vect}\{E_{2,1}, E_{2,2}\}$, montrer que $A = \lambda I_n$.

d) Pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer une base de $C(A)$.

Exercice 13. [X-ENS] Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. Soient A et B les matrices associées dans une base de E fixée. On suppose A et B inversibles.

1. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.
Soit E_λ le sous-espace propre de $f \circ g$ associé à la valeur propre λ et F_λ celui de $g \circ f$.

2. Montrer que $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$ et $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$.

3. Montrer que $\dim E_\lambda = \dim F_\lambda$.

4. Montrer que, si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.

5. Déterminer X et Y tel que XY soit diagonalisable et YX ne soit pas diagonalisable.

III. Polynômes annulateurs

Exercice 14. [CCP] Soit $A \in \mathscr{M}_6(\mathbb{R})$ inversible vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ ainsi que $\mathrm{Tr}(A) = 8$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Que peut-on dire sur les valeurs propres de A ?

3. Donner une matrice diagonale semblable à A.

4. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

Exercice 15. (✍) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = 4f$. Montrer que la trace de f est un entier pair.

Exercice 16. [Mines] Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $(X-a)^p$ est un polynôme annulateur de A et que $(X-a)^{p-1}$ n'est pas un polynôme annulateur de A. On note $\mathbb{R}[A]$ l'ensemble des polynômes en A.

1. Déterminer une base et la dimension de $\mathbb{R}[A]$.

2. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} \in \mathbb{R}[A]$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ soit inversible. Montrer que

$$P(A)^{-1} \in \mathbb{R}[A]$$

Exercice 17. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que A est de rang pair.

Exercice 18. (♡) [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M^2 est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(M) = \operatorname{Ker}(M^2)$.

Exercice 19. [Centrale] Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'endomorphisme L de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall\ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ L(M) = AM - MB.$$

1. Montrer que si α est une valeur propre de A et β est une valeur propre de B, alors $\alpha - \beta$ est une valeur propre de L.

2. Soit λ une valeur propre de L associée au vecteur propre M. Montrer que : $\forall\ P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)M = MP(\lambda I_n + B)$.

3. Si λ est une valeur propre de L, montrer qu'il existe α valeur propre de A et β valeur propre de B telles que $\lambda = \alpha - \beta$.

IV. Trigonalisation

Exercice 20. [Mines] Soit $\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda$. Montrer que $\varphi = \det$.

Exercice 21. [Mines] Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les polynômes caractéristiques de A et B pour que pour tout entier naturel k, $\operatorname{Tr}(A^k) = \operatorname{Tr}(B^k)$.

Exercice 22. [Mines] Soient H l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle et N l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentes.

1. Ces deux ensembles sont-ils des espaces vectoriels ?

2. Monter que l'espace engendré par N est inclus dans H.

3. L'inclusion ci-dessus est-elle une égalité ?

Exercice 23. [Mines] Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$. Montrer que A est nilpotente.

V. Avec Python

Exercice 24. [Centrale] On considère 4 cases nommées C_1, C_2, C_3 et C_4. On de déplace de case en case en suivant l'algorithme suivant :

* Si $n = 0$, on se trouve en C_1.
* Si on est en C_1 à l'instant n, on choisit uniformément parmi les 4 cases l'endroit où on se trouvera à l'instant $n + 1$.
* Si on est en $C_i \in \{2, 3, 4\}$ à l'instant n, on se déplace en C_{i-1} à l'instant $n + 1$.

1. a) Écrire un algorithme `position(n)` qui donne la liste des positions lors des `n` premières étapes.

b) Représenter graphiquement la position en fonction de l'étape.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la position à l'instant n.

2. a) Déterminer A telle que, en posant $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = C_1) \\ \mathbb{P}(X_n = C_2) \\ \mathbb{P}(X_n = C_3) \\ \mathbb{P}(X_n = C_4) \end{pmatrix}$, alors $U_{n+1} = AU_n$.

b) Diagonaliser la matrice A et en déduire que (U_n) converge.

3. On étudie la variable aléatoire $Y_n(i)$ qui donne le nombre de passages dans la case C_i lors des n premières étapes.

a) Écrire une fonction `occurrences(n, i)` qui renvoie le nombre de passages dans la case $C_{\texttt{i}}$ lors des `n` premières étapes.

b) Que conjecturez-vous sur l'espérance de $Y_n(i)$? Le justifier.