VII - Variables aléatoires discrètes infinies

Révisions

Variables aléatoires discrètes finies.

I - Variables aléatoires discrètes infinies

I.1 - Loi de probabilité

Définition 1 - Variable aléatoire discrète infinie

Une variable aléatoire X est *discrète infinie* si les valeurs prises par X sont en nombre infini et peuvent être indexées par $\mathbb{N}$. On notera

$$X(\Omega) = \{x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3, \ldots\} = \{x_i,\, i \in \mathbb{N}\}\,.$$

Dans toute la suite, on se limitera aux variables aléatoires qui ne prennent que des valeurs positives.

Exemple 1

- Un dé est lancé jusqu'à obtenir la valeur 6. On note T le rang du lancer où le premier 6 est obtenu. La variable aléatoire T peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 1 si le 6 apprait au premier lancer,
  - ⋆ 2 si le 1er lancer n'est pas un 6 et que le 2e l'est,
  - ⋆ 3 si les 1er et 2e lancers ne sont pas des 6 et que le 3e l'est,
  - ⋆ ...

  Ainsi, $T(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}^*$.
- Une étudiante collectionne les cartes de 23 joueurs de foot de son équipe nationale qui sont distribuées dans des tablettes de chocolat. On note T le nombre de tablettes achetées pour que sa collection soit complète. La variable aléatoire T peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 23 si elle a obtenu à chaque achat une carte différente,
  - ⋆ 24 si elle a obtenu exactement une carte en double,
  - ⋆ ...

Ainsi, $T(\Omega) = \{24, 25, 26, \ldots\}$.

Définition 2 - Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *loi de probabilité* de X est la donnée :

- des valeurs x_0, x_1, $x_2, \ldots$ prises par X,
- de la famille infinie de probabilités $(\mathbf{P}([X = x_0]), \mathbf{P}([X = x_1]), \ldots, \mathbf{P}([X = x_n]), \ldots)$.

Exemple 2 - Instant du premier Pile

On note T le numéro du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.
D'une part, $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
D'autre part,

- $[T = 1]$ correspond à obtenir un Pile lors du premier lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}.$$
- $[T = 2]$ correspond à obtenir Face lors du premier lancer et Pile lors du second lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = 2]) = \mathbf{P}(\{(F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$
- $[T = 3]$ correspond à obtenir Face lors des 2 premiers lan-

cers et Pile lors du troisième lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T=3]) = \mathbf{P}(\{(F,F,P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$

- ...
- $[T=n]$ correspond à obtenir Face lors des $n-1$ premiers lancers et Pile lors du n^{e} lancer. Ainsi,

$$\mathbf{P}([T=n]) = \mathbf{P}(\{(F,F,\dots,F,P)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

Ainsi, $\forall\, k \geqslant 1$, $\mathbf{P}([T=k]) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$.
La loi de T peut être représentée dans un tableau contenant une infinité de colonnes :

x	1	2	3	$\dots$	n	$\dots$
$\mathbf{P}([X=x])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$	$\dots$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}$	$\dots$

Si on n'obtient Pile à aucun des lancers, on peut noter $T=+\infty$. Cependant, la propriété suivante montre que cet événement est de probabilité nulle.

Définition 3 - Système complet

Si X est une variable aléatoire discrète infinie, la famille d'événements $([X=x_0], [X=x_1], [X=x_2], \dots)$ est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X=x_k]) = 1.$$

Exemple 3 - Instant du premier Pile

En reprenant l'exemple précédent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T=k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.\end{aligned}$$

I.2 - Fonction de répartition

Définition 4 - Fonction de répartition

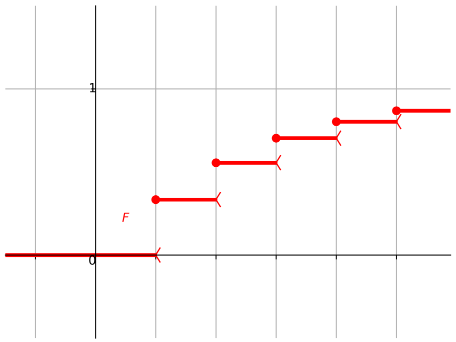
Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *fonction de répartition* de X est la fonction F_X définie pour tout x réel par $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leqslant x])$.

Exemple 4 - Instant du premier Pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

- Si $x<1$, $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- Si $1 \leqslant x < 2$, $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}([T=1]) = \frac{1}{3}$.
- Si $2 \leqslant x < 3$,
  $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}(T \in \{1,2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.
- Si $3 \leqslant x < 4$,
  $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}(T \in \{1,2,3\}) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{19}{27}$.
- ...
- Si $n \leqslant x < n+1$,
  $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}(T \in [\![1,n]\!]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- ...

On obtient le graphe suivant :



Proposition 1 - Fonction de répartition

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète infinie et à valeurs positives.

- F est à valeurs dans $[0,1]$.
- $\forall\ x<0,\ F(x)=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$.

I.3 - Espérance et Variance

Définition 5 - Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives. Notons $X(\Omega)=\{x_i,\ i\in\mathbb{N}\}$.
La variable aléatoire X admet une espérance si la série $\sum x_i\mathbf{P}([X=x_i])$ est convergente. L'*espérance* de X est alors :

$$\mathbf{E}[X]=\sum_{i=0}^{+\infty} x_i\mathbf{P}([X=x_i]).$$

Exemple 5 - Instant du premier pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.
On admet que pour tout $x\in[0,1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$. Alors, comme $\frac{2}{3}\in[0,1[$, $\sum n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ converge et

$$\mathbf{E}[T]=\sum_{n=1}^{+\infty} n\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}=3.$$

Proposition 2 - Linéarité de l'espérance

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes infinies admettant une espérance et a un réel. Alors,

$$\mathbf{E}[aX+Y]=a\mathbf{E}[X]+\mathbf{E}[Y].$$

Exemple 6 - Instant du premier pile

Un joueur joue à Pile ou Face, avec une pièce qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$, contre son banquier qui lui propose le contrat suivant :

- le joueur paye 40 euros pour jouer,
- la pièce de monnaie est lancée successivement jusqu'à obtenir Pile. Il gagne 10 euros lors de chacun de ces lancers.

En notant G le gain du joueur et T le nombre de lancers effectués, alors $G=10\times T-40$. En utilisant les propriétés précédentes,

$$\mathbf{E}[G]=10\times\mathbf{E}[T]-40=10\times 3-40=-10.$$

Théorème 1 - Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives et f une fonction réelle à valeurs positives. Notons

$X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i]).$$

Définition 6 - Variance, Écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum x_i^2\mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors X admet une *variance* et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right].$$

L'*écart-type* de X est la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Proposition 3 - Propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire discrète infinie qui admet une variance et a, b deux réels.
- Formule de **Kœnig-Huygens**. $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2$.
- $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$.

Exemple 7 - Pile/Face contre le banquier

On reprend l'exemple précédent et on admet que $\mathbf{V}(T) = 6$. Alors,

$$\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(10T - 40) = 10^2\mathbf{V}(T) = 600$$

et $\sigma(G) \simeq 24{,}5$.

II - Lois usuelles

II.1 - Loi géométrique

Définition 7 - Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$. La variable aléatoire T suit une loi *géométrique* de paramètre p si
- $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T = k) = p(1-p)^{k-1}$.

On note $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Loi géométrique

Si X est le premier instant de succès dans un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut p, alors X suit une loi géométrique de paramètre p.

Proposition 4 - Espérance, Variance

Soit $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. On admet que

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple 8 - Instant du premier pile

Reprendre les exemples de la partie précédente.

II.2 - Loi de Poisson

Définition 8 - Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire Z suit une loi de *Poisson* de paramètre λ si

- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Z = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

On note $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Loi de Poisson

Étant donnée une suite de N épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à p. Si N est grand et p est petit, la variable aléatoire égale au *nombre de succès* suit approximativement une loi de Poisson de paramètre $\lambda = Np$.

Proposition 5 - Espérance, Variance

Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On admet que

$$\mathbf{E}[Z] = \lambda \text{ et } \mathbf{V}(Z) = \lambda.$$

Exemple 9 - Accidentés

Une banque accorde quotidiennement des crédits. Étant donné un crédit, la probabilité qu'il revienne au service contentieux dans un laps de temps d'un an est égale à 4%. On suppose que 100 crédits ont été accordés au mois de janvier.

On note X le nombre de ces crédits qui sont revenus au service contentieux un an plus tard. Comme X compte le nombre de succès (contentieux) lors d'une suite de 100 épreuves de Bernoulli de probabilité de succès 4%, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{4}{100}\right)$. Ainsi, $\mathbf{E}[X] = 4$.

On suppose que X peut être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de paramètre $\mathbf{E}[X]$. On donne la table approchée d'une loi de Poisson de paramètre 4 ci-dessous :

z	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$\mathbf{P}([Z = z])$	0,018	0,073	0,147	0,195	0,195	0,156	$\cdots$

Alors,

- $\mathbf{P}(X = 0) \simeq \mathbf{P}(Z = 0) \simeq 0{,}018$.
- $\mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq \mathbf{P}(Z \leqslant 3) \simeq 0{,}018 + 0{,}073 + 0{,}147 + 0{,}195 \simeq 0{,}433$.
- $\mathbf{P}(X > 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq 1 - 0{,}433 \simeq 0{,}567$.