T.D. V - Variables aléatoires discrètes finies

I - Lois usuelles

Solution de l'exercice 1. Les valeurs prises par X sont 1, 2, 3 ou 4. Sachant que ces nombres ont tous la même probabilité d'être tirés, alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$.
Comme $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,4]\!])$, alors

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2},$$
$$\mathbf{V}(X) = \frac{4^2-1}{2} = \frac{15}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 2. Les valeurs prises par X sont les entiers compris entre 1 et 20. Sachant que ces nombres ont tous la même probabilité d'être tirés, alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,20]\!]$.
Comme $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,20]\!])$, alors

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1+20}{2} = \frac{21}{2},$$
$$\mathbf{V}(X) = \frac{20^2-1}{2} = \frac{399}{2}.$$

□

Solution de l'exercice 3.

1. Les valeurs prises par X sont 0 et 1. Ainsi, suit X suit une loi de Bernoulli. Comme la probabilité que X vaille 1 vaut $\frac{2}{3}$, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.
Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = \frac{2}{3},$$
$$\mathbf{V}(X) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

2. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès lors d'une suite de 5 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès vaut $\frac{2}{3}$. Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{2}{3}$, noté

$$Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5, \frac{2}{3}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[Y] = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3},$$
$$\mathbf{V}(Y) = 5 \times \frac{2}{3} \times \left(1-\frac{2}{3}\right)$$
$$= 5 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9}.$$

□

Solution de l'exercice 4.

1. Les valeurs prises par X sont 0 et 1. Ainsi, suit X suit une loi de Bernoulli. La variable aléatoire X vaut 1 si la lampe est défectueuse, donc elle vaut 1 avec probabilité $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{20}\right)$.
Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{20},$$
$$\mathbf{V}(X) = \frac{1}{20}\left(1-\frac{1}{20}\right) = \frac{19}{400}.$$

2. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès lors d'une suite de 30 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès vaut $\frac{1}{20}$. Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres 30 et $\frac{1}{20}$, noté

$$Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(30, \frac{1}{20}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[Y] = 30 \times \frac{1}{20} = \frac{3}{2},$$
$$\mathbf{V}(Y) = 30 \times \frac{1}{20} \times \left(1 - \frac{1}{20}\right)$$
$$= 30 \times \frac{1}{20} \times \frac{19}{20} = \frac{57}{40}.$$

□

Solution de l'exercice 5. L'expérience est une suite de 4 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire de tirer une boule noire) vaut $\frac{5}{8}$.
Comme X compte le nombre de succès lors de ces 4 tirages, alors X suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{5}{8}$, noté

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(4, \frac{5}{8}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = 4 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{2},$$
$$\mathbf{V}(X) = 4 \times \frac{5}{8} \times \left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{16}.$$

□

Solution de l'exercice 6. L'expérience est une suite de 5 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire de tirer une boule noire) vaut $\frac{3}{10}$.
Comme X compte le nombre de succès lors de ces 5 tirages, alors X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{3}{10}$, noté

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5, \frac{3}{10}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = 5 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{2},$$
$$\mathbf{V}(X) = 5 \times \frac{3}{10} \times \left(1 - \frac{3}{10}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{20}.$$

□

Solution de l'exercice 7. L'expérience est une suite de 2 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire de tirer une boule numérotée 1) vaut $\frac{1}{3}$.
Comme X compte le nombre de succès lors de ces 2 tirages, alors X suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{3}$, noté

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(2, \frac{1}{3}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$
$$\mathbf{V}(X) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

□

Solution de l'exercice 8. L'expérience est une suite de 5 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès (c'est-à-dire d'obtenir le numéro 1) vaut $\frac{1}{6}$.
Comme X compte le nombre de succès lors de ces 5 tirages, alors X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{6}$, noté

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5, \frac{1}{6}\right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$
$$\mathbf{V}(X) = 5 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

□

II - Calculs de lois

Solution de l'exercice 9. On pourra dessiner un arbre.

Comme les tirages s'effectuent sans remise, les différents tirages possibles sont

$$(1,2),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,4),\ (4,1),\ (4,2).$$

Chaque tirage a la même probabilité d'être effectué :

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

La variable aléatoire X est la somme des tirages. Les valeurs qu'elle peut prendre sont donc :

$$3,\ 5,\ 6.$$

De plus,

$$\mathbf{P}([X=3])=\mathbf{P}(\{(1,2),\ (2,1)\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$
$$\mathbf{P}([X=5])=\mathbf{P}(\{(1,4),\ (4,1)\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$
$$\mathbf{P}([X=6])=\mathbf{P}(\{(2,4),\ (4,2)\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

On peut ainsi résumer la loi de X dans le tableau suivant :

k	3	5	6
$\mathbf{P}([X=k])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

En utilisant ce tableau, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X]&=3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3}\\&=\frac{3+5+6}{3}=\frac{14}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[X^2\right]&\ 3^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{1}{3}+6^2\times\frac{1}{3}\\&=\frac{9+25+36}{3}=\frac{70}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X)=\mathbf{E}\left[X^2\right]-\mathbf{E}[X]^2&=\frac{70}{3}-\left(\frac{14}{3}\right)^2\\&=\frac{210}{9}-\frac{196}{9}=\frac{14}{9}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 10. On pourra dessiner un arbre.

1. Lors du premier lancer, le joueur remporte 10 ou -5 euros.
Lors du second lancer, le joueur remporte 10 ou -5 euros.
Lors du troisième lancer, le joueur remporte 10 ou -5 euros.
Ainsi, les suites de gains possibles sont :

$$(10,10,10),\ (10,10,-5),\ (10,-5,10),\ (10,-5,-5),$$
$$(-5,10,10),\ (-5,10,-5),\ (-5,-5,10),\ (-5,-5,-5),$$

Les valeurs prises par S, la somme des gains sont donc

$$30,\ 15,\ 0,\ -15.$$

De plus, en représentant ces expériences dans un arbre, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([S=30])&=\mathbf{P}(\{(10,10,10)\})=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27},\\ \mathbf{P}([S=15])&=\mathbf{P}(\{(10,10,-5),\ (10,-5,10),\ (-5,10,10)\})\\&=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\\&=3\times\frac{4}{27}=\frac{4}{9},\\ \mathbf{P}([S=0])&=\mathbf{P}(\{(10,-5,-5),\ (-5,10,-5),\ (-5,-5,10)\})\\&=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\&=3\times\frac{2}{27}=\frac{2}{9},\\ \mathbf{P}([S=-15])&=\mathbf{P}(\{(-5,-5,-5)\})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}.\end{aligned}$$

On peut représenter la loi de S dans le tableau suivant :

k	-15	0	15	30
$\mathbf{P}([S=k])$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

2. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= -15\times\frac{1}{27}+0\times\frac{2}{9}+15\times\frac{4}{9}+30\times\frac{8}{27}\\ &= \frac{-15+3\times15\times4+30\times8}{27}=\frac{405}{27}=\frac{45}{3},\\ \mathbf{E}\left[X^2\right] &= (-15)^2\times\frac{1}{27}+0^2\times\frac{2}{9}+15^2\times\frac{4}{9}+30^2\times\frac{8}{27}\\ &= \frac{10\,125}{27}=\frac{1125}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}\left[X^2\right]-\mathbf{E}[X]^2=\frac{1125}{3}-\left(\frac{45}{3}\right)^2\\ &= \frac{3375}{9}-\frac{2025}{9}=\frac{1350}{9}=150.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. On distingue en fonction des valeurs prises par X :
* lorsque X vaut -2, alors Y vaut 4,
* lorsque X vaut -1, alors Y vaut 1,
* lorsque X vaut 0, alors Y vaut 0,
* lorsque X vaut 3, alors Y vaut 9.

Ainsi, $Y(\Omega)=\{0,1,4,9\}$.
De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([Y=0]) &= \mathbf{P}([X=0])=\frac{1}{3},\\ \mathbf{P}([Y=1]) &= \mathbf{P}([X=-1])=\frac{1}{6},\\ \mathbf{P}([Y=4]) &= \mathbf{P}([X=-2])=\frac{1}{4}\\ \mathbf{P}([Y=9]) &= \mathbf{P}([X=3])=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

La loi de Y peut donc être représentée dans le tableau suivant :

k	0	1	4	9
$\mathbf{P}([Y=k])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= -2\times\frac{1}{4}-1\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{4}\\ &= -\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\\ &= \frac{-6-2+9}{12}=\frac{1}{12},\\ \mathbf{E}\left[X^2\right] &= (-2)^2\times\frac{1}{4}+(-1)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{4}\\ &= 1+\frac{1}{6}+\frac{9}{4}=\frac{12+2+27}{12}=\frac{41}{12}.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}\left[X^2\right]-\mathbf{E}[X]^2=\frac{41}{12}-\frac{1}{12^2}\\ &= \frac{41\times12-1}{144}\\ &= \frac{491}{144}.\end{aligned}$$

3. D'après la définition de Y ainsi que la question précédente,

$$\mathbf{E}[Y]=\mathbf{E}\left[X^2\right]=\frac{41}{12}.$$

D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[Y^2\right]=\mathbf{E}\left[X^4\right] &= (-2)^4\times\frac{1}{4}+(-1)^4\times\frac{1}{6}+0^4\times\frac{1}{3}\\ &= 4+\frac{1}{6}+\frac{81}{4}=\frac{48+2+243}{12}=\frac{293}{12}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}\left[Y^2\right]-\mathbf{E}[Y]^2=\frac{293}{12}-\left(\frac{41}{12}\right)^2\\ &= \frac{293\times12-41^2}{144}=\frac{1835}{144}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. On distingue en fonction des valeurs prises par X :

∗ lorsque X vaut 0, alors Y vaut 0,
∗ lorsque X vaut 1, alors Y vaut 1,
∗ lorsque X vaut 4, alors Y vaut 2,
∗ lorsque X vaut 9, alors Y vaut 3.

Ainsi, $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.
De plus,

$$\mathbf{P}([Y=0]) = \mathbf{P}([X=0]) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbf{P}([Y=1]) = \mathbf{P}([X=1]) = \frac{1}{6},$$
$$\mathbf{P}([Y=2]) = \mathbf{P}([X=4]) = \frac{1}{3}$$
$$\mathbf{P}([Y=3]) = \mathbf{P}([X=9]) = \frac{1}{4}.$$

La loi de Y peut donc être représentée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}([Y=k])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

2. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} \\ &= \frac{2+16+27}{12} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}, \\ \mathbf{E}\left[X^2\right] &= 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{3} + 9^2 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{16}{3} + \frac{81}{4} = \frac{2 + 16 \times 4 + 81 \times 3}{12} = \frac{309}{12} = \frac{103}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{103}{4} - \left(\frac{15}{4}\right)^2 \\ &= \frac{103 \times 4 - 15^2}{16} \\ &= \frac{187}{16}.\end{aligned}$$

3. D'après la définition de Y ainsi que la formule de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y] &= \mathbf{E}\left[\sqrt{X}\right] \\ &= \sqrt{0} \times \frac{1}{4} + \sqrt{1} \times \frac{1}{6} + \sqrt{2} \times \frac{1}{3} + \sqrt{9} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2+8+9}{12} = \frac{19}{12}.\end{aligned}$$

D'après la définition,

$$\mathbf{E}\left[Y^2\right] = \mathbf{E}\left[\sqrt{X}^2\right] = \mathbf{E}[X] = \frac{15}{4}.$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) &= \mathbf{E}\left[Y^2\right] - \mathbf{E}[Y]^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{19}{12}\right)^2 \\ &= \frac{15 \times 36 - 19^2}{144} = \frac{179}{144}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 13.

1. On commence par déterminer les valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y :
∗ si $X(\omega) = 1$, alors $Y(\omega) = 2$,
∗ si $X(\omega) = 2$, alors $Y(\omega) = 1$,
∗ si $X(\omega) = 3$, alors $Y(\omega) = 0$,
∗ si $X(\omega) = 4$, alors $Y(\omega) = 1$,
∗ si $X(\omega) = 5$, alors $Y(\omega) = 2$.

Ainsi,
$$Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

D'après l'étude précédente,

$$\mathbf{P}(Y=0) = \mathbf{P}(X=3) = \frac{1}{10},$$
$$\mathbf{P}(Y=1) = \mathbf{P}(X=2) + \mathbf{P}(X=4) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2},$$
$$\mathbf{P}(Y=2) = \mathbf{P}(X=1) + \mathbf{P}(X=5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

On peut représenter la loi de Y dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbf{P}([X=k])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

En utilisant la formule de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{13}{10}.$$

2. En utilisant le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}[Y] = |1-3|\,\frac{1}{5} + |2-3|\,\frac{1}{10} + |3-3|\,\frac{1}{10} + |4-3|\,\frac{2}{5} + |5-3|\,\frac{1}{5}.$$

□

Solution de l'exercice 14.

1. On commence par déterminer les valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y :

* si $X(\omega) = -1$, alors $Y(\omega) = 2$,
* si $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = 1$,
* si $X(\omega) = 1$, alors $Y(\omega) = 0$,
* si $X(\omega) = 2$, alors $Y(\omega) = 1$,
* si $X(\omega) = 3$, alors $Y(\omega) = 2$.

Ainsi,

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

D'après l'étude précédente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y=0) &= \mathbf{P}(X=1) = \frac{1}{10}, \\
\mathbf{P}(Y=1) &= \mathbf{P}(X=0) + \mathbf{P}(X=2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}, \\
\mathbf{P}(Y=2) &= \mathbf{P}(X=-1) + \mathbf{P}(X=3) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

On peut représenter la loi de Y dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbf{P}([X=k])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

En utilisant la formule de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{13}{10}.$$

2. En utilisant le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}[Y] = |-1-1|\,\frac{1}{5} + |0-1|\,\frac{1}{10} + |1-1|\,\frac{1}{10} + |2-1|\,\frac{2}{5} + |3-1|\,\frac{1}{5}.$$

□

III - Espérance & Variance sans calcul de loi

Solution de l'exercice 15. Remarquons que X_i est le résultat du i^{e} lancer d'un dé équilibré, donc $X_i \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_i] &= \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}, \\
\mathbf{V}(X_i) &= \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}.
\end{aligned}$$

1. D'après la définition de S,

$$S = \sum_{i=1}^{30} X_i.$$

En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{30} X_i\right] &= \sum_{i=1}^{30} \mathbf{E}[X_i] \\
&= \sum_{i=1}^{30} \frac{7}{2} = 30 \times \frac{7}{2} = 15 \times 7 = 105.
\end{aligned}$$

D'après les propriétés de la variance, comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{30} \mathbf{V}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{30} \frac{35}{12} = 30 \times \frac{35}{12} = \frac{5 \times 35}{2} = \frac{175}{2}.
\end{aligned}$$

2. Comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[P] &= \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{30} X_i\right] = \prod_{i=1}^{30} \mathbf{E}[X_i] \\ &= \prod_{i=1}^{30} \frac{7}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)^{30}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 16. La variable aléatoire X_i prend les valeurs 10 et -5. De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X_i = 10]) &= \frac{2}{3}, \\ \mathbf{P}([X_i = -5]) &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

D'après les définitions,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_i] &= 10 \times \frac{2}{3} - 5 \times \frac{1}{3} = \frac{15}{3} = 5, \\ \mathbf{E}\left[(X_i)^2\right] &= 10^2 \times \frac{2}{3} + 5^2 \times \frac{1}{3} = 75.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X_i) = \mathbf{E}\left[(X_i)^2\right] - \mathbf{E}[X_i]^2 = 75 - 5^2 = 50.$$

1. D'après la définition de S,

$$S = \sum_{i=1}^{50} X_i.$$

En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[S] &= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{50} X_i\right] = \sum_{i=1}^{50} \mathbf{E}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{50} 5 = 50 \times 5 = 250.\end{aligned}$$

D'après les propriétés de la variance, comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S) &= \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = \sum_{i=1}^{50} \mathbf{V}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{50} 50 = 50 \times 50 = 2500.\end{aligned}$$

2. Comme les variables aléatoires sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[P] &= \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{50} X_i\right] = \prod_{i=1}^{50} \mathbf{E}[X_i] \\ &= \prod_{i=1}^{50} 5 = 5^{50}.\end{aligned}$$

□

IV - Lois de couple

Solution de l'exercice 17.

1. Comme la somme des probabilités vaut 1, alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + p + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} &= 1 \\ 1 + p &= 1 \\ p &= 0.\end{aligned}$$

2. On complète le tableau précédent :

$x \backslash y$	1	2	3	4	$\mathbf{P}(X = x)$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}(Y = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

Comme $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1/4)$, alors

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{4}.$$

De plus, d'après la loi de Y obtenue ci-dessus,

$$\mathbf{E}[Y] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} = 2.$$

3. En utilisant le tableau précédent,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=1]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=1])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0,\\
\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=2]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=2])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0,\\
\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=3]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=3])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},\\
\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=4]) &= \frac{\mathbf{P}([X=1, Y=4])}{\mathbf{P}([X=1])} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On peut donc résumer la loi de Y sachant $[X = 1]$ dans le tableau suivant :

k	3	4
$\mathbf{P}_{[X=1]}([Y=k])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4. On remarque que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) &= 0\\
\mathbf{P}(X=1) \times \mathbf{P}(Y=1) &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \neq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) \neq \mathbf{P}(X=1) \times \mathbf{P}(Y=1)$$

et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

5. D'après les propriétés des probabilités,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X=0] \cup [Y=1]) &= \mathbf{P}(X=0) + \mathbf{P}(Y=1) - \mathbf{P}([X=0] \cap [Y=1])\\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

6. En utlisant la définition,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[XY] &= 0 \times 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 2 \times \frac{1}{8} + 0 \times 3 \times \frac{1}{8} + 0 \times 4 \times 0 + \cdots\\
&\qquad \cdots + 1 \times 1 \times 0 + 1 \times 2 \times 0 + 1 \times 3 \times \frac{1}{8} + 1 \times 4 \times \frac{1}{8}\\
&= \frac{7}{8}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la question **1.**,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y]\\
&= \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \times 2 = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

7. Comme $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1/4)$, alors

$$\mathbf{V}(X) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}.$$

D'après le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}\left[Y^2\right] = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{8} = \frac{21}{4}.$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}\left[Y^2\right] - \mathbf{E}[Y]^2 = \frac{21}{4} - 2^2 = \frac{5}{4}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\rho(X, Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\,\mathbf{V}(Y)}}\\
&= \frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{5}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.
\end{aligned}$$

8. En utilisant la linéarité de la covariance par rapport à son premier argument,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X+Y, X) &= \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{V}(X) + \mathrm{Cov}(X, Y)\\
&= \frac{3}{16} + \frac{3}{8} = \frac{9}{16}.
\end{aligned}$$

En utlisant la symétrie de la covariance,

$$\text{Cov}(X, X+Y) = \text{Cov}(X+Y, X) = \frac{9}{16}.$$

En utilisant la linéarité de la covariance par rapport à son premier argument,

$$\text{Cov}(2X, X) = 2\text{Cov}(X, X) = 2\mathbf{V}(X) = 2 \times \frac{3}{16} = \frac{3}{8}.$$

En utilisant la variance d'une somme,

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{3}{16} + \frac{5}{4} + 2\frac{3}{8} = \frac{35}{16}.$$

□

Solution de l'exercice 18.

1. En fonction des valeurs obtenus pour chacun des lancers, les valeurs obtenues par le couple (X, Y) sont

$$\{(i,j),\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 6\}.$$

2. Si $X = 1$, la plus grande valeur renvoyée est 1, donc les deux dés ont renvoyé la valeur 1. Ainsi,

$$[X = 1] = \{(1,1)\}.$$

En utilisant l'équiprobabilité des lancers,

$$\mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{36}.$$

3. Si $Y = 1$, alors un des deux dés a renvoyé 1 :

$$[Y = 1] = \{(1,1), (1,i), (j,1),\ 2 \leqslant i,\ j \leqslant 6\}.$$

Comme $|[Y = 1]| = 11$, en utilisant l'équiprobabilité,

$$\mathbf{P}([Y = 1]) = \frac{11}{36}.$$

4. Si le plus petit et le plus grand des résultats obtenus vaut 1, alors les deux lancers ont renvoyé 1. Ainsi,

$$[X = 1] \cap [Y = 1] = \{(1,1)\}.$$

D'où,

$$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{36}.$$

5. Comme $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) \neq \mathbf{P}(X = 1)\,\mathbf{P}(Y = 1)$, alors X et Y ne sont pas indépendantes. □

Solution de l'exercice 19.

1. Les résultats obtenus au cours des 4 lancers peuvent varier entre 0 (tous les résultats sont identiques) et 3 (le résultat change à chaque lancer). De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X = 0]) &= \mathbf{P}(\{FFFF, PPPP\}) = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^3},\\
\mathbf{P}([X = 1]) &= \mathbf{P}(\{FPPP, FFPP, FFFP, PFFF, PPFF, PPPF\})\\
&= \frac{6}{2^4} = \frac{3}{2^3},\\
\mathbf{P}([X = 2]) &= \mathbf{P}(\{PFPP, PFFP, PPFP, FPFF, FPPF, FFPF\})\\
&= \frac{6}{2^4} = \frac{3}{2^3},\\
\mathbf{P}([X = 2]) &= \mathbf{P}(\{PFPF, FPFP\}) = \frac{2}{2^4} = \frac{1}{2^3}.
\end{aligned}$$

La loi de X peut être représentée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}([X = k])$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

En utilisant le tableau,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8}\\
&= \frac{3+6+3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2},\\
\mathbf{E}\left[X^2\right] &= 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8}\\
&= \frac{3+12+9}{8} = \frac{24}{8} = 3.
\end{aligned}$$

D'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{12-9}{4} = \frac{3}{4}.$$

2. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès dans une suite de 4 expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès égale à $\frac{1}{2}$. Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(4, 1/2)$.
D'après le cours,

$$\mathbf{E}[Y] = 4 \times \frac{1}{2} = 2,$$
$$\mathbf{V}(Y) = 4 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

3. En utilisant l'étude effectuée précédemment pour établir la loi de X, on peut, pour chaque série de lancers, calculer les valeurs de X et de Y. On obtient ainsi le tableau suivant :

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
3	0	0	$\frac{1}{8}$	0	0

En utilisant le tableau,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[XY] &= 1 \times 1 \times \frac{1}{8} + 1 \times 2 \times \frac{1}{8} + 1 \times 3 \times \frac{1}{8} + \cdots \\ &\quad \cdots + 2 \times 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times 3 \times \frac{1}{8} + \cdots \\ &\quad \cdots + 3 \times 2 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1+2+3+2+4+6+6}{8} = \frac{24}{8} = 3.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y] = 3 - \frac{3}{2} \times 2 = 0.$$

4. D'après le tableau,

$$\mathbf{P}([X=0] \cap [Y=1]) = 0$$

et

$$\mathbf{P}([X=0]) \times \mathbf{P}([Y=1]) = \frac{2}{16} \times \frac{2}{8} \neq 0.$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

5. D'après la définition du coefficient de corrélation,

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\,\mathbf{V}(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{3}{4} \times 1}} = 0.$$

6. D'une part,

$$\mathbf{P}([X=0,\ Y=1]) = 0.$$

D'autre part,

$$\mathbf{P}([X=0]) \times \mathbf{P}([Y=1]) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X=0,\ Y=1]) \neq \mathbf{P}([X=0]) \times \mathbf{P}([Y=1])$$

et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

7. En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[X+Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y] = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}.$$

En utilisant la formule sur la variance d'une somme,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X+Y) &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{3}{4} + 1 + 0 = \frac{7}{4}, \\ \mathbf{V}(X-Y) &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(-Y) + 2\mathrm{Cov}(X, -Y) \\ &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) - 2\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{7}{4}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 20.

1. Les valeurs qui peuvent être prises par le couple (X, Y) sont :

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,1).$$

La loi du couple (X, Y) est ainsi :

∗ si les deux premières boules tirées sont numérotées 1 :

$$\mathbf{P}([X=1,\,Y=1]) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

∗ si la première boule est numérotée 1 et la seconde est numérotée 2 :

$$\mathbf{P}([X=1,\,Y=2]) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

∗ si la première boule est numérotée 2 et la seconde est numérotée 1 :

$$\mathbf{P}([X=2,\,Y=1]) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{2} = \frac{1}{3}.$$

La loi du couple peut être représentée dans le tableau suivant :

$x \backslash y$	1	2
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0

2. En utilisant les marginales, on obtient :

$x \backslash y$	1	2	$\mathbf{P}([X=x])$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$\mathbf{P}([Y=y])$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	

3. En utilisant le tableau précédent,

$$\mathbf{E}[X] = 1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$
$$\mathbf{E}[Y] = 1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

4. Toujours à l'aide du tableau, on obtient :

$$\mathbf{E}[XY] = 1\times1\times\frac{1}{3}+1\times2\times\frac{1}{3}+2\times1\times\frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ainsi, d'après la définition de la covariance,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}[XY]-\mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y] = \frac{5}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{15-16}{9} = -\frac{1}{9}.$$

5. D'une part,

$$\mathbf{P}([X=2,\,Y=2]) = 0.$$

D'autre part,

$$\mathbf{P}([X=2])\times\mathbf{P}([Y=2]) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}([X=2,\,Y=2]) \neq \mathbf{P}([X=2])\times\mathbf{P}([Y=2])$$

et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

6. D'une part,

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = 1^2\frac{2}{3}+2^2\frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right]-\mathbf{E}[X]^2 = 2-\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{18-16}{9} = \frac{2}{9}.$$

Comme X et Y ont la même loi, alors $\mathbf{V}(Y) = \frac{2}{9}$.
D'après la définition du coefficient de corrélation,

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\,\mathbf{V}(Y)}}\\ &= \frac{-\frac{1}{9}}{\sqrt{\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}}}\\ &= -\frac{1}{9}\times\frac{9}{2} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

7. En utilisant la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[X+Y] = \mathbf{E}[X]+\mathbf{E}[Y] = \frac{8}{3}.$$

En utilisant la formule sur la variance d'une somme,

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - 2\times\frac{1}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X-Y) &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(-Y) + 2\mathrm{Cov}(X,-Y)\\ &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) - 2\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 2\times\frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□