# II - Calcul matriciel

### I - Matrices

### I.1 - Définition

#### Définition 1 - Matrices

Soit n, p deux entiers naturels non nuls.

- Une matrice de taille (n, p) est un tableau de nombres réels constitué de n lignes et de p colonnes.
- Le coefficient d'indice (i, j) d'une matrice est le coefficient situé à la  $i^e$  ligne et  $j^e$  colonne.
- L'ensemble des matrices de réels à n lignes et p colonnes est noté  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On note généralement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

# Exemple 1 - Matrices

- $\bullet \ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$
- $\bullet \ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$

### Définition 2 - Matrices lignes / colonnes

Soit  $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

- Si n = 1, alors A est une matrice ligne (ou vecteur ligne).
- Si p = 1, alors A est une matrice colonne (ou vecteur colonne).

### Exemple 2

• Les matrices suivantes sont des matrices lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

• Les matrices suivantes sont des matrices colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

### Définition 3 - Égalité entre matrices

Deux matrices  $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$  et  $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$  sont égales si elles ont même taille et si, pour tout  $i\in\{1,\ldots,n\}$  et  $j\in\{1,\ldots,p\},\ a_{i,j}=b_{i,j}.$ 

# I.2 - Opérations

### Définition 4 - Somme, Multiplication par un réel

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ ,  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

• L'addition de matrices de mêmes tailles est obtenue en additionnant les éléments de mêmes indices. Ainsi, la matrice A+B est la matrice de taille (n,p) et de coefficients  $(c_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$  définis par

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

• La *multiplication* d'une matrice par un réel est obtenue en multipliant chacun des coefficients de la matrice par ce Chapitre II - Calcul matriciel ECT 2

réel. Ainsi, la matrice  $\alpha A$  est la matrice de taille (n,p) et de coefficients  $(d_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  définis par

$$d_{i,j} = \alpha a_{i,j}$$
.

### Exemple 3

• Soit 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
 et  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

• Soit 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
 et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Alors,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 3 & -1 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

### Définition 5 - Matrice nulle

La matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls est la matrice nulle. Elle est notée  $0_{n,p}$ .

## Proposition 1 - Propiétés de l'addition et de la multiplication par un réel

Soit  $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- Commutativité. A + B = B + A.
- Associativité. A + (B + C) = (A + B) + C.
- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ .
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ .
- $A + (-1)A = 0_{n,p}$ .

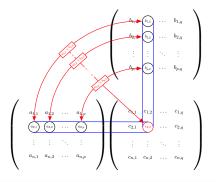
### Définition 6 - Produit de matrices de tailles compatibles

Soit  $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}\in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R}).$  La matrice  $C=A\times B$  est la matrice de taille (n,q) dont le coefficient d'indice (i,j) est donné par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

### Représentation du produit matriciel

Pour effectuer un produit matriciel on représente souvent les matrices sur deux étages :



### Exemple 4 - Calculs de produits

$$\bullet \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y + z \\ 3x - 2y + z \end{pmatrix}.$$

• On considère trois suites  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$  défi-

Chapitre II - Calcul matriciel ECT 2

nies par  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $z_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} &= -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= z_n \end{cases}.$$

Pour tout 
$$n \in \mathbb{N}$$
, on note  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ .

En notant 
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
, alors

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \iff U_{n+1} = AU_n.$$

### Proposition 2 - Propriétés du produit matriciel

Soit A, B, C trois matrices dont les tailles sont compatibles et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Associativité. (AB)C = A(BC).
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ .
- Distributivité.

$$(A+B)C = AC + BC$$
 et  $A(B+C) = AB + AC$ .

## II - Matrices carrées

#### Définition 7 - Matrices carrées

Une matrice carrée M d'ordre p est une matrice dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes est égal à p. L'ensemble des matrices carrées d'ordre p est noté  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

### Exemple 5 - Matrices carrées

- $\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$
- $\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$

### Définition 8 - Triangulaires, Diagonales, Identité

- Une matrice est triangulaire supérieure si les coefficients en dessous de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est triangulaire inférieure si les coefficients au dessus de sa diagonale sont nuls.
- Une matrice est diagonale si les coefficients en dehors de sa diagonale sont nuls.
- La matrice identité est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. La matrice identité d'ordre p est notée  $I_n$ .
- La matrice nulle est la matrice dont tous les éléments valent 0. La matrice nulle d'ordre p est notée  $0_p$ .

### Exemple 6

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  est triangulaire supérieure.  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  est triangulaire supérieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure.

•  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure.

- $\bullet \begin{pmatrix}
  1 & 0 & 0 \\
  0 & 3 & 0 \\
  0 & 0 & -1
  \end{pmatrix}$  est diagonale.
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice identité d'ordre 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice identité d'ordre 3.

# III - Opérations sur les matrices carrées

# Proposition 3

Si A et B sont des matrices carrées d'ordre p, alors

- A+B et AB sont bien définies et appartiennent à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- $\bullet$   $AI_p = I_p A = A$ .
- $A0_p = 0_p A = 0_p$ .

### Exemple 7

Soit 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
 et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\bullet \ A + B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 10 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \ AB = \begin{pmatrix} 2 & 60 & 16 \\ 13 & 20 & -1 \\ -13 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \ BA = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 5 \\ -5 & -19 & -3 \\ 0 & 87 & 44 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet BA = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 5 \\ -5 & -19 & -3 \\ 0 & 87 & 44 \end{pmatrix}.$$

# IV - Calculs de puissances

### Exemple 8 - Pourquoi calculer des puissances de matrices?

On considère les suites définies par  $x_0 = y_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= x_n - y_n \end{cases}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Alors.

$$U_{1} = A \times U_{0}$$

$$U_{2} = A \times U_{1}$$

$$= \underbrace{A \times A}_{2 \text{ facteurs}} \times U_{0}$$

$$U_{3} = A \times U_{2}$$

$$= A \times A \times U_{1}$$

$$= \underbrace{A \times A \times A}_{3 \text{ facteurs}} \times U_{0}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$U_n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ facteurs}} U_0$$

### Définition 9 - Puissance d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre p et n un entier naturel. Alors,

•  $A^0 = I_p$ .

5

 $\bullet \ A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{P}.$ 

Chapitre II - Calcul matriciel ECT 2

### Exemple 9

• Soit 
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
. Alors,  
•  $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
•  $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .  
•  $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .  
• Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors,  
•  $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
•  $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  
•  $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
•  $A^3 = A \times A^2 = A \times I_2 = A$ .

# IV.1 - Matrices diagonales

### Proposition 4 - Puissance d'une matrice diagonale

Soit D une matrice diagonale d'ordre p et n un entier naturel. La matrice  $D^n$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de D élevés à la puissance n.

### Exemple 10 - Puissances & Diagonales 🗱

Soit 
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ . Cette propriété se prouve par récurrence.

**Initialisation.** Pour 
$$n = 0$$
, on a bien  $D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n, c'est-à-dire  $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ . Alors,

$$\begin{split} D^{n+1} &= D^n \times D \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}. \end{split}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre n + 1.

**Conclusion.** Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

### IV.2 - Formule du binôme de Newton

#### Binôme de Newton

Les coefficients binomiaux s'obtiennent rapidement à l'aide du triangle de Pascal :

1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1 1 5 10 10 5 1 Ce tableau correspond aux coefficients binomiaux suivants :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

### Proposition 5 - Coefficients binomiaux

Soit n un entier naturel non nul et  $k \in [0, n]$ . Alors,

$$\bullet \ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, 
\bullet \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, 
\bullet \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} =$$

$$\bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{k-k}, 
\bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{k-k}, 
\bullet \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)},$$

$$\bullet \ \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{n-k},$$

$$\bullet$$
  $\binom{n}{2}$   $=$   $\binom{n}{n-2}$   $=$ 

$$\bullet \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

#### Théorème 1 - Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux réels et n un entier naturel. Alors,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

### Exemple 11

- $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .
- $\bullet$   $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ .

### Définition 10 - Matrices qui commutent

Soit A et B deux matrices d'ordre p. Les matrices A et B commutent si AB = BA.

## Exemple 12 - Commutativité



- $I_2$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  commutent.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$  ne commutent

#### Théorème 2 - Formule du binôme de Newton

Soient A et B deux matrices d'ordre p qui commutent. Alors, pour tout n entier naturel,

$$(A+B)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k} B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^{k}.$$

### Exemple 13 - Application de la formule du binôme

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- D'une part,  $A = I_2 + N$ .
- D'autre part,  $I_2N = NI_2 = N$ . Ainsi,  $I_2$  et N commutent.
- On remarque ensuite que  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

D'après la formule du binôme de Newton,

$$A^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_{2}^{n-k} N^{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^{k}, \text{ car } I_{2}^{n-k} = I_{2}$$
$$= \binom{n}{0} N^{0} + \binom{n}{1} N^{1} + 0_{2} + \dots + 0_{2}$$
$$= I_{2} + nN = \binom{1}{0} \binom{n}{1}.$$