



Dans ce problème, on utilise la convexité pour déterminer le maximum d'une fonctionnelle appelée *entropie* et notée H sur divers ensembles de probabilités ou de fonctions. Les parties sont largement indépendantes et la lettre H désigne une fonction différente dans chacune de ces parties. On adopte la convention $0 \ln 0 = 0$ et on note $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Une fonction est dite convexe si elle est de classe \mathcal{C}^2 et sa dérivée seconde est positive.

Partie I : Entropie sur un ensemble fini

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'entropie de X est le réel

$$H(X) = - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \ln(\mathbb{P}(X = k)).$$

1. Propriétés de H .

- a) Montrer que H est à valeurs dans \mathbb{R}_+ .
- b) Décrire les lois de probabilités des variables aléatoires X telles que $H(X) = 0$.
- c) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $H(U)$.

2. Maximisation. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- a) Montrer que

$$H(U) - H(X) = - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \ln \frac{\mathbb{P}(U = k)}{\mathbb{P}(X = k)}.$$

- b) En déduire que

$$H(X) \leq H(U).$$

Partie II : Entropie sur un ensemble dénombrable

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* , l'entropie H de X est le réel défini par

$$H(X) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \ln(\mathbb{P}(X = k)).$$

3. Propriétés de H .

- a) Montrer que H est bien définie, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.
 - b) Décrire les lois des variables aléatoires X telles que $H(X) = 0$.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^* . Montrer que, si cette limite existe,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \ln \left(\frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(Y = k)} \right) \geq 0.$$

Dans la suite de cette partie, p désigne un réel tel que $p \in [0, 1[$. Soit G une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p .

5. Déterminer la valeur de $H(G)$.

6. **Maximisation sous contrainte.** Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que $\mathbb{E}[Y] \leq \frac{p}{1-p}$. Montrer que

$$H(Y) \leq H(G).$$

Partie III : Entropie sur un segment

Dans cette partie, a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Toutes les fonctions sont à valeurs réelles. On note \mathcal{D} l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R}_+^* telles que $\int_a^b f(x) dx = 1$. Pour tout $f \in \mathcal{D}$, on définit

$$H(f) = - \int_a^b f(x) \ln f(x) dx.$$

7. Déterminer la constante λ telle que $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lambda$ soit dans \mathcal{D} , puis calculer $H(u)$.

8. Inégalité de Jensen. Soient φ une fonction convexe de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , r une fonction continue sur \mathbb{R} et f une fonction de \mathcal{D} .

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x) - \varphi(y) \geq \varphi'(y)(x - y).$$

b) Montrer que pour tout réel y ,

$$\int_a^b \varphi(r(x))f(x) \, dx \geq \varphi(y) + \varphi'(y) \cdot \left(\int_a^b r(x)f(x) \, dx - y \right).$$

c) En déduire que

$$\varphi \left(\int_a^b r(x)f(x) \, dx \right) \leq \int_a^b \varphi(r(x))f(x) \, dx.$$

9. Maximisation. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{D}$,

$$H(f) \leq H(u).$$

Partie IV : Entropie sur \mathbb{R}_+

Dans cette partie, \mathcal{D}_+ désigne l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+^* intégrables telles que $\int_{\mathbb{R}_+} f = 1$. Pour tout $f \in \mathcal{D}_+$, on note

$$H(f) = - \int_0^{+\infty} f(t) \ln f(t) \, dt$$

si cette intégrale converge et $H(f) = +\infty$ sinon.

10. Un exemple de fonction intégrable.

a) Montrer qu'il existe un réel x_0 strictement positif tel que

$$\forall x \geq x_0, x^2 e^{-x^2} \leq 1.$$

b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Dans la suite de cette question, on note

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

c) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $1 - x^2 \leq e^{-x^2}$.

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$.

e) Montrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{n} \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx \leq I \leq \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n} \, dx.$$

f) En admettant la formule de Wallis, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, déterminer la valeur de I .

Dans toute la suite, on note $f_{\mathcal{N}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

11. Calculer $\int_0^{+\infty} x f_{\mathcal{N}}(x) \, dx$, $\int_0^{+\infty} x^2 f_{\mathcal{N}}(x) \, dx$ puis $H(f_{\mathcal{N}})$.

12. Maximisation sous contrainte. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{D}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} x f(x) \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) \, dx = \frac{1}{2}$,

$$H(f) \leq H(f_{\mathcal{N}}).$$