

IV - Espaces vectoriels

I - Systèmes d'équations linéaires

Définition 1 - Système linéaire

Soient $(a_{1,1}, \dots, a_{1,p}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,p}, b_1, \dots, b_n)$ des réels. Le système (\mathcal{S})

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$$

est un *système linéaire* d'inconnues x_1, \dots, x_p .

- Un p -uplet (x_1, \dots, x_p) est *solution* de (\mathcal{S}) s'il est solution de chacune des lignes du système.
- Deux systèmes sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple 1

Les systèmes suivants sont des systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{array}{l|l} \bullet \begin{cases} 2x + 3y + z &= 0 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{cases} & \bullet \begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ 2x + y &= 3 \\ x + 5y &= 2 \end{cases} \end{array}$$

Définition 2 - Opérations élémentaires

Nous noterons L_1, \dots, L_n les lignes du système et appellerons *opérations élémentaires* sur les lignes du système les transformations suivantes :

- Pour $i \neq j$, l'échange des lignes L_i et L_j , symbolisé par $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Pour $\alpha \neq 0$, la multiplication de la ligne L_i par α , symbolisée par $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
- Pour $i \neq j$ et $\beta \in \mathbb{R}$, l'ajout à L_i de la ligne L_j multipliée par β , symbolisé par $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$.

Théorème 1

Le système obtenu par application d'opérations élémentaires sur les lignes est équivalent au système initial.

Principe de l'algorithme du pivot de Gauss : On utilise les opérations élémentaires pour transformer le système en un système échelonné, c'est-à-dire dans lequel le nombre d'inconnues décroît strictement quand on passe d'une ligne à la suivante.

Algorithme :

- On cherche une ligne où le coefficient α de x_1 est non nul et simple. Notons cette ligne L_{i_0} .
- On échange les lignes 1 et i_0 , $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$.
- On utilise la nouvelle ligne L_1 pour éliminer les occurrences de x_1 dans les lignes suivantes, c'est la ligne pivot. Par exemple, si à la ligne L_2 le coefficient de x_1 est a , on effectue $L_2 \leftarrow \alpha L_2 - a L_1$.
- On reprend ensuite les étapes de l'algorithme en travaillant sur toutes les lignes sauf la première de manière à éliminer x_2 ...
- Enfin, on exprime les solutions en fonction des variables libres.

Définition 3 - Rang d'un système linéaire

Le *rang* du système est le nombre d'équations non triviales du système échelonné.

Théorème 2 - Ensemble de solutions

Soit S l'ensemble des solutions du système (\mathcal{S}) .

- Soit $S = \emptyset$, les équations sont *incompatibles*.
- Soit S est un singleton, le rang est alors égal au nombre d'inconnues.
- Soit S est infini, le rang est alors strictement inférieur au nombre d'inconnues.

Exemple 2 - Résolution de système

Résolvons le système suivant avec l'algorithme du pivot de Gauss :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est solution de (\mathcal{S})

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 5y - 3z = 13 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 4y - 7z = 15 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 5y - 3z = 13 \\ -23z = 23 & L_3 \leftarrow 5L_3 - 4L_2 \end{cases}$$

Le système (\mathcal{S}) possède une unique solution. L'ensemble des solutions est

$$\{(1, 2, -1)\}.$$

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \quad \left| \quad 2. \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

II - Espaces vectoriels

On note $\vec{0}_n = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Les lettres n et p désignent des entiers naturels non nuls.

Définition 4 - L'espace vectoriel \mathbb{R}^n

On définit sur \mathbb{R}^n une addition et une multiplication par un réel de la manière suivante :

Addition. Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Multiplication par un réel. Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Exemple 3 - Cas où $n = 2, 3$

- Si $n = 2$.

$$(1, 2) + (3, 4) = (4, 6)$$

$$(1, 5) + (-1, 0) = (0, 5)$$

$$3 \cdot (4, 2) = (12, 6)$$

- Si $n = 3$.

$$(1, -1, 2) + (4, 5, -5) = (5, 4, -3)$$

$$(1, 0, -1) + (3, 1, 2) = (4, 1, 1)$$

$$2 \cdot (4, 1, -2) = (8, 2, -4)$$

Proposition 1 - Structure d'espace vectoriel

- Propriétés de l'addition. Soit x, y, z des vecteurs de \mathbb{R}^n .
 - ★ Associativité : $x + (y + z) = (x + y) + z$.
 - ★ Élément neutre : $x + \vec{0}_n = \vec{0}_n + x = x$.
 - ★ Existence d'un opposé : $x + (-1) \cdot x = (-1) \cdot x + x = \vec{0}_n$.
 - ★ Commutativité : $x + y = y + x$.

- Propriétés de la multiplication par un réel. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x \quad \left| \quad \begin{array}{l} (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ 1 \cdot x = x \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \end{array} \right.$$

\mathbb{R}^n est un *espace vectoriel*. Les éléments de \mathbb{R}^n sont des *vecteurs*.

III - Familles de vecteurs

Dans tout ce chapitre, p désigne un entier naturel non nul.

III.1 - Sous-espace vectoriel

Définition 5 - Sous-espace vectoriel

Une partie A de \mathbb{R}^n est un *sous-espace vectoriel* si

- $\vec{0}_n \in A$,
- pour tout $x, y \in A$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha x + \beta y \in A$.

Exemple 4 - Exemple de sous-espaces vectoriels

- \mathbb{R}^n est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- $\{\vec{0}_n\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- Géométriquement,
 - ★ les droites sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 .
 - ★ les droites sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
 - ★ les plans sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2.

1. On note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0 \text{ et } 2x + 3y + 5z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. On note $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 1 \text{ et } 2x + 3y + 5z = 3\}$. Montrer que \mathcal{F} n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Définition 6 - Combinaison linéaire

Soit (x_1, \dots, x_p) une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .

- si $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, le vecteur $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs (x_1, \dots, x_p) .
- L'ensemble des combinaisons linéaires de (x_1, \dots, x_p) est noté :

$$\text{Vect}\{x_1, \dots, x_p\} = \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proposition 2

Soit (x_1, \dots, x_p) une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . Alors, $\text{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Exemple 5 - Un peu de géométrie

- $D = \text{Vect}\{(1, 2)\} = \{\alpha(1, 2), \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
- $D = \text{Vect}\{(1, 0)\} = \{\alpha(1, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
- $D = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\} = \{\alpha(1, 0, 1), \alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- $P = \text{Vect}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} = \{(\alpha, 0, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un plan de \mathbb{R}^3 .

Exemple 6 - Équation cartésienne \rightarrow Combinaison linéaire

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0 \text{ et } 2x + 3y + 5z = 0\}$. Écrivons F comme un ensemble de combinaisons linéaires.

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ainsi,

$$F = \{\lambda \cdot (2, -3, 1), \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect} \{(2, -3, 1)\}.$$

Exemple 7 - Combinaison linéaire \rightarrow Équation cartésienne

Soit $F = \text{Vect} \{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 2, 4)\}$.

Déterminons une équation cartésienne de F .

$(x, y, z) \in F$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 2, 3) + \mu(1, 0, 1) + \nu(2, 2, 4)$$

si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = x \\ 2\lambda + 2\nu = y \\ 3\lambda + \mu + 4\nu = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = x \\ -2\mu - 2\nu = y - 2x \leftarrow L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2\mu - 2\nu = z - 3x \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = x \\ -2\mu - 2\nu = y - 2x \\ 0 = x - 2y + z \leftarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Ainsi, une description de F via une équation cartésienne est

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y + z = 0\}.$$

Proposition 3 - S

Soit (x_1, \dots, x_p) une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n , $(\alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\alpha_1 \neq 0$. Alors,

- $\text{Vect} \{x_1, \dots, x_p\} = \text{Vect} \left\{ \alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i x_i, x_2, \dots, x_p \right\}$.
- Si $x_p \in \text{Vect} \{x_1, \dots, x_{p-1}\}$, alors $\text{Vect} \{x_1, \dots, x_p\} = \text{Vect} \{x_1, \dots, x_{p-1}\}$.

III.2 - Bases

Dans cette partie, (x_1, \dots, x_p) désigne une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .

Définition 7 - Famille libre

La famille (x_1, \dots, x_p) est *libre* si, pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = \vec{0}_n \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_i = 0.$$

La famille (x_1, \dots, x_n) est une famille de vecteurs *linéairement indépendants*.

Exemple 8

La famille $((1, 2), (3, 4))$ est une famille libre de \mathbb{R}^2 .

En effet, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(1, 2) + \beta(3, 4) = (0, 0)$. Alors,

$$(\alpha + 3\beta, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0)$$

De même,

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ -2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Montrer que $((1, 2, -1), (2, 1, 1))$ est une famille libre de \mathbb{R}^3 .

Définition 8 - Famille génératrice

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . La famille (x_1, \dots, x_p) est une famille *génératrice* de F si, pour tout $x \in F$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$.

Exercice 4. Montrer que $((1, 0), (0, 1))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^2 .

Définition 9 - Base

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . La famille (x_1, \dots, x_p) est une *base* de F si elle est génératrice et que ses vecteurs sont linéairement indépendants.

Exemple 9 - Bases canoniques

- $((1, 0), (0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^2 .
- $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Proposition 4 - Dimension

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Si (x_1, \dots, x_p) et (y_1, \dots, y_q) sont des bases de F , alors $p = q$. L'entier p est la *dimension* de l'espace vectoriel F , noté $\dim F$. Par convention, $\dim \{\vec{0}_n\} = 0$.

Exercice 5.

1. Déterminer la dimension de \mathbb{R}^2 , de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la dimension de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + 2y + z = 0\}$.

Proposition 5 - Caractérisation des bases

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension q de \mathbb{R}^n et (x_1, \dots, x_p) une famille de vecteurs de F . Il y a équivalence entre :

- (i). (x_1, \dots, x_p) est une base de F .

(ii). (x_1, \dots, x_p) est une famille de vecteurs linéairement indépendants et $p = q$.

(iii). (x_1, \dots, x_p) est une famille génératrice de F et $p = q$.

Exercice 6. Montrer que $((1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, -1))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Théorème 3 - Théorème de la base incomplète

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et (x_1, \dots, x_p) une famille libre de F . Il existe une famille (y_{p+1}, \dots, y_q) telle que $(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_q)$ soit une base de F .

Définition 10 - Coordonnées

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , (x_1, \dots, x_p) une base de F et $x \in F$. Il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$.

Exemple 10 - Calcul de coordonnées

Déterminons les coordonnées de $(3, 1, 2)$ dans la base $((1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, 1, -1))$.
Il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(3, 2, 1) = \lambda(1, 2, 3) + \mu(1, 0, 1) + \nu(0, 1, -1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3 \\ 2\lambda + \nu &= 2 \\ 3\lambda + \mu - \nu &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3 \\ -2\mu + \nu &= -4 \\ -2\mu - \nu &= -8 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3 \\ -2\mu + \nu &= -4 \\ -4\mu &= -12 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= 0 \\ \nu &= 2 \\ \mu &= 3 \end{cases}$$

Ainsi,

$$(3, 2, 1) = 0 \cdot (1, 2, 3) + 3 \cdot (1, 0, 1) + 2 \cdot (0, 1, -1).$$