IV - Variables aléatoires discrètes

Dans tout le cours, Ω désigne un univers muni d'une tribu $\mathscr{F}$ et $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Lorsque Ω est un ensemble fini, on choisira $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$.

I - Variables aléatoires réelles finies

I.1 - Définition

Définition 1 - Variable aléatoire réelle

On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ est un ensemble fini. Une *variable aléatoire réelle* est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

Un dé équilibré est lancé successivement 2 fois. On note les résultats obtenus à l'issue de chacun des lancers.
L'univers est $\Omega = \{(i, j),\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 6\} = [\![1, 6]\!]^2$.
La somme S des résultats obtenus à l'issue des 2 lancers est une variable aléatoire :

$$S : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (d_1, d_2) & \mapsto & d_1 + d_2 \end{array}$$

Définition 2 - Notations

Si $x \leqslant y$ sont des réels, on notera

$$\begin{aligned} [X = x] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ X(\omega) = x\} \\ [X \leqslant x] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ X(\omega) \leqslant x\} \\ [X \geqslant x] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ X(\omega) \geqslant x\} \\ [x \leqslant X \leqslant y] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ x \leqslant X(\omega) \leqslant y\} \end{aligned}$$

Exemple 2 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.

$$\begin{aligned} [S = 3] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega \ ;\ d_1 + d_2 = 3\} \\ &= \{(1, 2), (2, 1)\}\,. \\ [S \leqslant 4] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega \ ;\ d_1 + d_2 \leqslant 4\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}\,. \end{aligned}$$

Définition 3 - Système complet

Soient Ω un univers fini et X une variable aléatoire. Notons $x_1, \ldots, x_p$ les valeurs prises par X. Alors, $\{[X = x_i],\ i \in [\![1, p]\!]\}$ est un système complet d'événements. C'est le *système complet* associé à la variable aléatoire X.

Exemple 3 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent. Le système complet associé à S est :

$$\Big\{[S = 2],\ [S = 3],\ [S = 4],\ [S = 5],\ [S = 6],\ [S = 7],\ [S = 8],\ [S = 9],\ [S = 10],\ [S = 11],\ [S = 12]\Big\}.$$

I.2 - Loi de probabilité

Définition 4 - Loi de probabilité

La *loi* de la variable aléatoire X est la donnée :
- des valeurs $x_1, \ldots, x_p$ prises par X ;
- de la famille de probabilités

$$(\mathbf{P}(X = x_1), \ldots, \mathbf{P}(X = x_p)).$$

La loi d'une variable aléatoire peut être représentée sous forme d'un tableau.

Exemple 4 - Somme de 2 dés équilibrés

On reprend les notations de l'exemple précédent. Nous obtenons successivement :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}(S = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

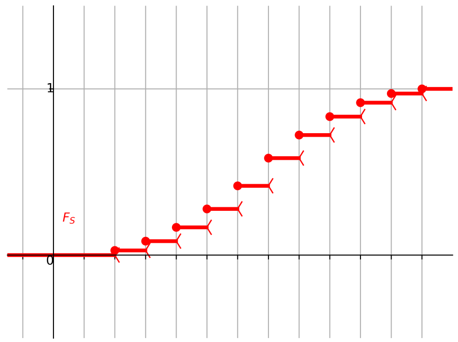
Définition 5 - Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire. La *fonction de répartition* de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$.

Exemple 5 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.
- Si $x < 2$. Alors,
$$F_S(x) = \mathbf{P}(S \leqslant x) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$
- Si $2 \leqslant x < 3$. Alors,
$$F_S(x) = \mathbf{P}(S \leqslant x) = \mathbf{P}(S = 2) = \frac{1}{36}.$$
- ...
- Si $x \geqslant 12$. Alors,
$$F_S(x) = \mathbf{P}(S \leqslant x) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

On obtient le graphe suivant :



Proposition 1

Les variables aléatoires X et Y sont de même loi si et seulement si leurs fonctions de répartition sont égales.

I.3 - Lois usuelles

Définition 6 - Loi certaine

Soit $c \in \mathbb{R}$. La variable aléatoire X suit une *loi certaine* de valeur c si $X(\Omega) = \{c\}$ et $\mathbf{P}(X = c) = 1$.

Définition 7 - Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$

La variable aléatoire X suit une *loi uniforme* sur $[\![1, n]\!]$, noté $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}(X = i) = \frac{1}{n}.$$

Loi uniforme

La loi uniforme modélise une expérience où n résultats distincts sont possibles et équiprobables.

Définition 8 - Loi de Bernoulli de paramètre p

Soit $p \in [0, 1]$. La variable aléatoire X suit une *loi de Bernoulli* de paramètre p, noté $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \text{ et } \mathbf{P}(X = 1) = p.$$

Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli modélise le nombre de succès d'une seule expérience qui a une probabilité de succès égale à p.

Définition 9 - Expérience de Bernoulli

Une *expérience de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui n'admet que deux issues, appelées généralement succès et échec.

Définition 10 - Loi binomiale de paramètres n et p

Soit $p \in [0, 1]$. La variable aléatoire X suit une *loi binomiale* de paramètres n et p, noté $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, si

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Loi binomiale

La loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la réalisation de n expériences de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès égale à p.

Définition 11 - Loi hypergéométrique de paramètres n, N et b

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant n, b \leqslant N$. La variable aléatoire X suit une *loi hypergéométrique* de paramètres n, N, b, noté $X \hookrightarrow \mathscr{H}(n, N, b/N)$, si $X(\Omega) = [\![0, b]\!]$ et

$$\forall\, k \in [\![0, b]\!],\ \mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique modélise, dans une urne contenant N boules dont b sont blanches, le nombre de boules blanches tirées lors d'un tirage simultané de n boules.

II - Espérance & Variance

II.1 - Espérance

Définition 12 - Espérance

Soient X une variable aléatoire et $x_1, \ldots, x_p$ les valeurs prises par X. L'*espérance* de X, notée $\mathbf{E}[X]$, est le réel

$$\mathbf{E}[X] = x_1 \mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + x_p \mathbf{P}(X = x_p).$$

Proposition 2 - Lois usuelles

- Si X suit une loi certaine de paramètre c, alors $\mathbf{E}[X] = c$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, alors $\mathbf{E}[X] = \frac{n+1}{2}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $\mathbf{E}[X] = p$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, alors $\mathbf{E}[X] = np$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{H}(n, N, b/N)$, alors $\mathbf{E}[X] = \frac{nb}{N}$.

Proposition 3 - Linéarité

Soient X, Y deux variables aléatoires et a, b deux réels. Alors,

$$\mathbf{E}[aX+bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y].$$

Exemple 6 - Somme de deux dés

Notons X_1 le résultat du premier lancer et X_2 le résultat du second. Alors, X_1 et X_2 suivent une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$ et $S = X_1 + X_2$. Ainsi,

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[X_1+X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] = \frac{6+1}{2} + \frac{6+1}{2} = 7.$$

Proposition 4 - Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire, $x_1, \dots, x_p$ les valeurs prises par X et g une fonction à valeurs réelles. On note $Y = g(X)$ la variable aléatoire définie par

$$\forall\, \omega \in \Omega,\, Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Alors,

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^{p} g(x_k)\mathbf{P}(X = x_k).$$

Exemple 7 - Carré de la somme

On reprend les notations de l'exemple précédent. Posons $Y = S^2$. Alors,

$$\mathbf{E}[Y] = 2^2\frac{1}{36} + 3^2\frac{2}{36} + 4^2\frac{3}{36} + 5^2\frac{4}{36} + 6^2\frac{5}{36} + 7^2\frac{6}{36} + \cdots$$
$$\cdots + 8^2\frac{5}{36} + 9^2\frac{4}{36} + 10^2\frac{3}{36} + 11^2\frac{2}{36} + 12^2\frac{1}{36}$$

II.2 - Variance

Définition 13 - Variance, Écart-type

Soit X une variable aléatoire. La *variance* de X, notée $\mathbf{V}(X)$, est le réel :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right].$$

L'*écart-type* est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Théorème 1 - Formule de Kœnig-Huygens

Soit X une variable aléatoire. Alors,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Proposition 5 - Lois usuelles

- Si X suit une loi presque certaine, alors $\mathbf{V}(X) = 0$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$, alors $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{H}(n,N,b/N)$, alors $\mathbf{V}(X) = n\frac{b}{N}\frac{N-b}{N}\frac{N-n}{N-1}$.

Proposition 6

Soient X une variable aléatoire et a, b deux réels. Alors,

$$\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X).$$

Exemple 8

Soit Y une variable suivant une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$. On pose $X = Y - 1$.

Déterminons la loi de X.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}(Y=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Comme $X = Y - 1$,

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{P}(X=j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi, $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, 11 \rrbracket)$.

Déterminons l'espérance et la variance de Y.

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X+1] = \mathbf{E}[X] + 1 = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7,$$

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X+1) = \mathbf{V}(X) = \frac{11^2 - 1}{12} = 10.$$

Définition 14 - Variable centrée, réduite

Soit X une variable aléatoire.

- X est une variable aléatoire *centrée* si $\mathbf{E}[X] = 0$.
- X est une variable aléatoire *réduite* si $\mathbf{V}(X) = 1$.

Proposition 7

Soit X une variable aléatoire qui ne soit pas de loi certaine. La variable $X^* = \frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

III - Couples de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire X qui prend les valeurs $x_1, \ldots, x_p$ et une variable aléatoire Y qui prend les valeurs $y_1, \ldots, y_q$.

III.1 - Loi du couple

Définition 15 - Loi du couple

La *loi du couple* (X, Y) est la donnée :

- des valeurs (x_i, y_j) prises par le couple (X, Y),
- des probabilités $\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.

Exemple 9 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On dispose d'un bureau à 2 tiroirs et de 2 feuilles de papier. On dispose aléatoirement chacune des feuilles de papier dans l'un des tiroirs.
On note X le nombre de feuilles dans le premier tiroir et Y le nombre de tiroirs vides.
Le nombre de feuilles de papier dans le premier tiroir peut être égal à 0, 1 ou 2.
Le nombre de tiroirs vides peut être égal à 0 (il y a 1 feuille dans chaque tiroir) ou 1 (les 2 feuilles sont dans le même tiroir).
De plus,

$$\mathbf{P}([X=0] \cap [Y=0]) = 0, \mathbf{P}([X=0] \cap [Y=1]) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=0]) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) = 0$$

$$\mathbf{P}([X=2] \cap [Y=0]) = 0, \mathbf{P}([X=2] \cap [Y=1]) = \frac{1}{4}$$

On peut représenter ces résultats dans un tableau : à chaque ligne correspond une valeur x que peut prendre X ; à chaque colonne correspond une valeur y que peut prendre Y ; à l'intersection d'une ligne et d'une colonne se lit la probabilité $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$:

$x \backslash y$	0	1
0	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$

Définition 16 - Marginales

Les lois de X et de Y sont les *marginales* du couple (X, Y).
En utilisant le système complet associé à la variable aléatoire Y (resp. X), on obtient

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!],\ \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$
$$\forall\, j \in [\![1, q]\!],\ \mathbf{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

Exemple 10 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les notations de l'exemple précédent, les marginales s'obtiennent en sommant les lignes / les colonnes du tableau.

$x \backslash y$	0	1	$\mathbf{P}(X = x)$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

La somme des cases de l'intérieur du tableau vaut 1.

Définition 17 - Loi conditionnelle

La *loi conditionnelle* de X sachant $[Y = y_j]$ est la donnée :
- des valeurs $x_1, \ldots, x_p$ prises par X ;
- des probabilités $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_1]), \ldots, \mathbf{P}_{[Y=y_j]}([X = x_p])$.

Exemple 11 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On reprend les notations de l'exercice précédent. La loi conditionnelle de X sachant $[Y = 0]$ est égale à

i	0	1	2
$\mathbf{P}_{[Y=0]}([X = i])$	0	1	0

C'est une loi presque certaine : *sachant qu'aucun des tiroirs n'est vide, on est certain qu'il y a une feuille dans le premier tiroir.*
La loi conditionnelle de X sachant $[Y = 1]$ est égale à

i	0	1	2
$\mathbf{P}_{[Y=1]}([X = i])$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Sachant qu'un des deux tiroirs est vide, il y a une chance sur deux que le premier tiroir contienne 0 *feuille et une chance sur deux qu'il contienne les* 2 *feuilles.*

III.2 - Indépendance

Définition 18 - Indépendance

Les variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$,

$$\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \mathbf{P}(X = x_i) \times \mathbf{P}(Y = y_j).$$

Exemple 12

- On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi est définie par

$x \backslash y$	0	1	$\mathbf{P}(X=x)$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{P}(Y=y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

On étudie le comportement de **tous** les couples de valeurs possibles :

$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \mathbf{P}(X=0)\times\mathbf{P}(Y=0)$$
$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \mathbf{P}(X=0)\times\mathbf{P}(Y=1)$$
$$\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \mathbf{P}(X=1)\times\mathbf{P}(Y=0)$$
$$\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \mathbf{P}(X=1)\times\mathbf{P}(Y=1)$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

- 2 **feuilles et** 2 **tiroirs.** En reprenant la loi du couple,

$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=0]) = 0 \neq \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \mathbf{P}(X=0)\times\mathbf{P}(Y=0).$$

Les variables aléatoires X et Y **ne** sont **pas** indépendantes.

Définition 19 - Schéma de Bernoulli

Un *schéma de Bernoulli* est la succession d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

Proposition 8 - Loi certaine

Si Y est une variable aléatoire certaine, alors X et Y sont indépendantes.

Théorème 2 - Stabilité de la loi binomiale

Soient m, n deux entiers naturels, $p \in [0,1]$, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m+n,p).$$

III.3 - Covariance

Proposition 9 - Espérance d'un produit

En utilisant la loi du couple,

$$\mathbf{E}[X\times Y] = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i\times y_j\times\mathbf{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j]).$$

Exemple 13 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant l'exemple des feuilles et des tiroirs,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[XY] &= 0\times 0\times 0 + 0\times 1\times\frac{1}{4}+\cdots\\ &\cdots+1\times 0\times\frac{1}{2}+1\times 1\times 0+\cdots\\ &\cdots+2\times 0\times 0+2\times 1\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Théorème 3 - Espérance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbf{E}[X\times Y] = \mathbf{E}[X]\times\mathbf{E}[Y].$$

Définition 20 - Covariance

La *covariance* de X et Y, notée $\mathrm{Cov}(X,Y)$, est le réel

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}[(X-\mathbf{E}[X])\times(Y-\mathbf{E}[Y])].$$

Proposition 10 - Propriétés de la covariance

Soient a, b, c trois réels et X, Y, Z trois variables aléatoires.

- $\text{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}[X \times Y] - \mathbf{E}[X] \times \mathbf{E}[Y]$.
- $\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(Y,X)$.
- $\text{Cov}(X,X) = \mathbf{V}(X)$.
- $\text{Cov}(X,c) = 0$.
- $\text{Cov}(aX+bY,Z) = a\text{Cov}(X,Z) + b\text{Cov}(Y,Z)$.

Exemple 14 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les calculs précédents,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1, \\
\mathbf{E}[Y] &= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\
\text{Cov}(X,Y) &= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y] \\
&= \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Proposition 11 - Covariance et Somme

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\text{Cov}(X,Y).$$

Exemple 15 - Variance d'une somme

On considère le couple (X_1, X_2) dont la loi est définie par :

x_1 \ x_2	0	1	$\mathbf{P}(X_1 = x_1)$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\mathbf{P}(X_2 = x_2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

X_1 et X_2 suivent toutes deux une loi de Bernoulli de paramètre $3/4$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_1] &= \frac{3}{4} \text{ et } \mathbf{V}(X_1) = \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16} \\
\mathbf{E}[X_1X_2] &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X_1,X_2) = \mathbf{E}[X_1X_2] - \mathbf{E}[X_1]\,\mathbf{E}[X_2] = \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{16}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X_1+X_2) &= \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1,X_2) \\
&= \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Proposition 12 - Convariance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X,Y) = 0$.

Exemple 16 - 2 feuilles et 2 tiroirs

L'exemple des feuilles et des tiroirs montre que la covariance peut être nulle alors que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

Définition 21 - Coefficient de corrélation linéaire

Le *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y, noté $\rho(X,Y)$, est défini par

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Exemple 17

En reprenant l'exemple précédent,

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{Cov}\left(X_1, X_2\right)}{\sqrt{\mathbf{V}\left(X_1\right)\mathbf{V}\left(X_2\right)}} = \frac{\frac{-1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{3}{16}}} = -\frac{1}{3}.$$

Proposition 13

- $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.
- $|\rho(X, Y)| = 1$ signifie qu'il existe trois réels a, b et c tels que $\mathbf{P}\left(aX + bY + c = 0\right) = 1$. Les variables X et Y sont reliées presque sûrement par une relation *affine*.

III.4 - Vecteurs de variables aléatoires discrètes

Définition 22 - Vecteur aléatoire

X est un *vecteur de variables aléatoires* s'il existe $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes telles que :

$$X : \omega \mapsto (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

Les définitions de loi, loi marginale s'étendent au cas des vecteurs aléatoires. De manière analogue, on définit l'indépendance de n variables aléatoires indépendantes.

IV - Variables aléatoires discrètes infinies

IV.1 - Loi de probabilité

Définition 23 - Variable aléatoire discrète infinie

Une variable aléatoire X est *discrète infinie* si les valeurs prises par X sont en nombre infini et peuvent être indexées par $\mathbb{N}$. On notera

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

Dans toute la suite, on se limitera aux variables aléatoires qui ne prennent que des valeurs positives.

Exemple 18 - Variables aléatoires discrètes infinies

- Un dé est lancé jusqu'à obtenir la valeur 6. On note T le rang du lancer où le premier 6 est obtenu. La variable aléatoire T peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 1 si le 6 apparaît au premier lancer ;
  - ⋆ 2 si le 1^er^ lancer n'est pas un 6 et que le 2^e^ l'est ;
  - ⋆ 3 si les 1^er^ et 2^e^ lancers ne sont pas des 6 et que le 3^e^ l'est ;
  - ⋆ ...

  Ainsi, $T(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}^*$.
- Une étudiante collectionne les cartes de 23 joueurs de foot de son équipe nationale qui sont distribuées dans des tablettes de chocolat. On note T le nombre de tablettes achetées pour que sa collection soit complète. La variable aléatoire T peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 23 si elle a obtenu à chaque achat une carte différente ;
  - ⋆ 24 si elle a obtenu exactement une carte en double ;
  - ⋆ ...

Ainsi, $T(\Omega) = \{24, 25, 26, \ldots\}$.

Définition 24 - Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *loi de probabilité* de X est la donnée :

- des valeurs x_0, x_1, $x_2, \ldots$ prises par X ;
- de la famille infinie de probabilités $\left(\mathbf{P}\left(X=x_0\right), \mathbf{P}\left(X=x_1\right), \ldots, \mathbf{P}\left(X=x_n\right), \ldots\right)$.

Exemple 19 - Instant du premier Pile

On note T le numéro du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.
D'une part, $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
D'autre part,

- $[T=1]$ correspond à obtenir un Pile lors du premier lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}\left(T=1\right)=\frac{1}{3}.$$
- $[T=2]$ correspond à obtenir Face lors du premier lancer et Pile lors du second lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}\left(T=2\right)=\mathbf{P}\left(\{(F,P)\}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}.$$
- ...
- $[T=n]$ correspond à obtenir Face lors des $n-1$ premiers lancers et Pile lors du n^{e} lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}\left(T=n\right)=\mathbf{P}\left(\{(F,F,\ldots,F,P)\}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}.$$

Ainsi, $\forall\, k\geqslant 1$, $\mathbf{P}\left(T=k\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$.
La loi de T peut être représentée dans un tableau contenant une infinité de colonnes :

k	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
$\mathbf{P}\left(T=k\right)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}$	$\cdots$

Si on n'obtient Pile à aucun des lancers, on peut noter $T=+\infty$. Cependant, la propriété suivante montre que cet événement est de probabilité nulle.

Définition 25 - Système complet

Si X est une variable aléatoire discrète infinie, la famille d'événements $([X=x_0], [X=x_1], [X=x_2], \ldots)$ est un système complet d'événements. En particulier,
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(X=x_k\right)=1.$$

Exemple 20 - Instant du premier Pile

En reprenant l'exemple précédent,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(T=k\right)&=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\times\frac{1}{3}\right]\\&=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\\&=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1.\end{aligned}$$

IV.2 - Fonction de répartition

Définition 26 - Fonction de répartition

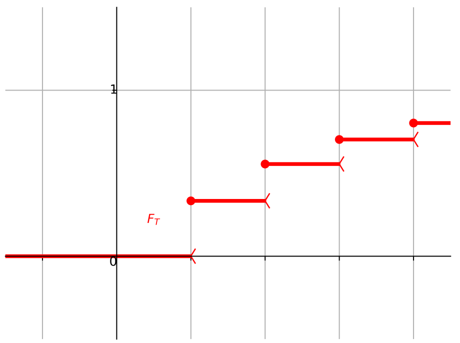
Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *fonction de répartition* de X est la fonction F_X définie pour tout x réel par $F_X(x)=\mathbf{P}\left(X\leqslant x\right)$.

Exemple 21 - Instant du premier Pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

- Si $x < 1$, $\mathbf{P}(T \leqslant x) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- Si $1 \leqslant x < 2$, $\mathbf{P}(T \leqslant x) = \mathbf{P}(T = 1) = \frac{1}{3}$.
- Si $2 \leqslant x < 3$, $\mathbf{P}(T \leqslant x) = \mathbf{P}(T \in \{1,2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.
- ...
- Si $n \leqslant x < n+1$, $\mathbf{P}(T \leqslant x) = \mathbf{P}(T \in [\![1, n]\!]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$.
- ...

On obtient le graphe suivant :



Proposition 14 - Fonction de répartition

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète infinie.

- F est à valeurs dans $[0, 1]$.
- F est croissante.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

IV.3 - Espérance et Variance

Définition 27 - Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$.
La variable aléatoire X admet une espérance si la suite $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i \mathbf{P}(X = x_i)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. L'*espérance* de X est alors :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}(X = x_i).$$

Exemple 22 - Instant du premier pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

On admet que pour tout $x \in [0, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Alors, comme $\frac{2}{3} \in [0, 1[$, $\left(\sum_{n=1}^{N} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 3.$$

Proposition 15 - Propriétés de l'espérance

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes infinies admettant une espérance et a un réel. Alors,

- $\mathbf{E}[a] = a$.
- $\mathbf{E}[aX + Y] = a\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$.

Exemple 23 - Instant du premier pile

Un joueur joue à Pile ou Face, avec une pièce qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$, contre son banquier qui lui propose le contrat suivant :

- le joueur paye 40 euros pour jouer,
- la pièce de monnaie est lancée successivement jusqu'à obtenir Pile. Il gagne 10 euros lors de chacun de ces lancers.

En notant G le gain du joueur et T le nombre de lancers effectués, alors $G = 10 \times T - 40$. En utilisant les propriétés précédentes,

$$\mathbf{E}[G] = 10 \times \mathbf{E}[T] - 40 = 10 \times 3 - 40 = -10.$$

Théorème 4 - Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives et f une fonction réelle à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Si $\left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathbf{P}(X = x_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i)\mathbf{P}(X = x_i).$$

Définition 28 - Variance, Écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Si $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\mathbf{P}(X = x_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors X admet une *variance* et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right].$$

L'*écart-type* de X est la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Proposition 16 - Propriétés de la variance

Soient X une variable aléatoire discrète infinie qui admet une variance et a, b deux réels.

- Formule de **Kœnig-Huygens**. $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2$.
- $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$.

Exemple 24 - Pile/Face contre le banquier

On reprend l'exemple précédent et on admet que $\mathbf{V}(T) = 6$. Alors,

$$\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(10T - 40) = 10^2\mathbf{V}(T) = 600.$$

IV.4 - Lois usuelles

Définition 29 - Loi géométrique

Soit $p \in [0, 1]$. La variable aléatoire T suit une loi *géométrique* de paramètre p, noté $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, si

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$;
- $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

Loi géométrique

Étant donné un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès de chaque expérience est égale à p, la variable aléatoire égale au *rang du premier succès* suit une loi géométrique de paramètre p.

Proposition 17 - Espérance, Variance

Soit $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. On admet que

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Définition 30 - Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire Z suit une loi de *Poisson* de paramètre λ, noté $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, si

- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$;
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}\,(Z = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$.

Loi de Poisson

Étant donnée une suite de N épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à p. Si N est grand et p est petit, la variable aléatoire égale au *nombre de succès* suit approximativement une loi de Poisson de paramètre $\lambda = Np$.

Proposition 18 - Espérance, Variance

Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On admet que

$$\mathbf{E}\,[Z] = \lambda \text{ et } \mathbf{V}\,(Z) = \lambda.$$

Exemple 25 - Accidentés

Une banque accorde quotidiennement des crédits. Étant donné un crédit, la probabilité qu'il revienne au service contentieux dans un laps de temps d'un an est égale à 4%. On suppose que 100 crédits ont été accordés au mois de janvier.

On note X le nombre de ces crédits qui sont revenus au service contentieux un an plus tard. Comme X compte le nombre de succès (contentieux) lors d'une suite de 100 épreuves de Bernoulli de probabilité de succès 4%, alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{4}{100}\right)$. Ainsi, $\mathbf{E}\,[X] = 4$.

On suppose que X peut être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de paramètre $\mathbf{E}\,[X]$. On donne la table approchée d'une loi de Poisson de paramètre 4 ci-dessous :

z	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$\mathbf{P}\,(Z = z)$	0,018	0,073	0,147	0,195	0,195	0,156	$\cdots$

Alors,

- $\mathbf{P}\,(X = 0) \simeq \mathbf{P}\,(Z = 0) \simeq 0{,}018$.
- $\mathbf{P}\,(X \leqslant 3) \simeq \mathbf{P}\,(Z \leqslant 3) \simeq 0{,}018 + 0{,}073 + 0{,}147 + 0{,}195$
  $\simeq 0{,}433$.
- $\mathbf{P}\,(X > 3) = 1 - \mathbf{P}\,(X \leqslant 3) \simeq 1 - 0{,}433 \simeq 0{,}567$.

Théorème 5 - Stabilité de la loi de Poisson

Soient λ, μ deux réels strictement positifs, $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu).$$

IV.5 - Vecteurs de variables aléatoires

Les notions vues dans le cadre fini se généralisent aux variables aléatoires discrètes infinies.