T.D. I - Calcul matriciel

I - Opérations sur des matrices

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2,5 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ -0,5 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -2,5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB.

2. Que dire du produit BA ?

Exercice 2. Déterminer les coefficients manquants :

$$\begin{pmatrix} 2 & \cdots \\ \cdots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
Effectuer les calculs suivants :

1. $A + 2B$.

2. ABC.

3. $A + BC$.

4. $(A - I_2)(B - I_2)$.

Exercice 4. Pour chacune des matrices J suivantes, calculer J^2, J^3 puis J^k pour tout $k \geqslant 3$.

1. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit A une matrice d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. Développer l'expression $(A - 2I)(A - I)$.

Exercice 6. Soit A une matrice d'ordre 4 et I la matrice identité d'ordre 4. Développer l'expression $(A + I)^3$.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis A^3.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis A^3.

Exercice 9.

1. Soit a et b deux réels. Développer l'expression $(a + b)^2$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $(A + B)^2$.

b) Calculer $A^2 + 2AB + B^2$.

c) Que peut-on conclure ?

II - Calculs de puissances

II.1 - Récurrences

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.

2. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel non nul, $A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Cette relation est-elle encore vraie lorsque $n = 0$?

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.

2. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

Exercice 12. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 et B^3.

2. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{2n+1} \\ 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 et B^3.

2. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 3^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n+1} \\ 0 & 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité d'ordre 3.

1. a) Calculer $A^2 - 2A - 8I$.

b) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on ait $A^n = a_nA + b_nI$. *On précisera les premiers termes a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 ; et on exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.*

2. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_n & = 4a_n + b_n \\ v_n & = -2a_n + b_n \end{cases}$.

a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques.

b) En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.

c) En déduire une expression de a_n et b_n en fonction de n.

3. Exprimer A^n en fonction de n.

II.2 - Formule du binôme

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = A - 2I_3$.

1. Expliciter J, J^2 et J^3. En déduire la valeur de J^k pour tout entier $k \geqslant 3$.

2. Montrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que pour tout n entier naturel,

$$A^n = 2^n\left(I_3 + \frac{n}{2}J + \frac{n(n-1)}{8}J^2\right).$$

3. En déduire, pour $n \geqslant 2$, les neufs coefficients de la matrice A^n. Vérifier que votre résultat reste vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

4. Démontrer le résultat précédent en utilisant une récurrence.

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 3I_3$.

1. Expliciter B, B^2 et B^3. En déduire B^k pour tout $k \geqslant 3$.

2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$A^n = 3^n \left(I + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right).$$

3. La formule est-elle encore vraie pour $n = 0$? $n = 1$?

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout n entier naturel, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.