

## T.D. I - Analyse réelle

### I - Suites

#### I.1 - Étude de suites

**Exercice 1. (Suite arithmétique)** Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique. Sachant que  $u_{80} = 393$  et  $u_{15} = 133$ , calculer  $u_1$ .

**Exercice 2.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$ .

1. Déterminer  $u_1, \dots, u_5$  en écrivant les résultats sous la forme d'une puissance de 2.

2. Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $v_n = \ln(u_n) - \ln(4)$ . Déterminer la nature de la suite  $(v_n)$  et en déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

3. Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis en déduire la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 3. (Sommes classiques)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer, en fonction de  $n$  les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n 1. \quad 2. \sum_{k=1}^n 2. \quad 3. \sum_{k=0}^n k.$$

**Exercice 4. (Une suite arithmético-géométrique)** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 12$ .

1. Déterminer la solution  $\ell$  de l'équation  $\ell = -\frac{\ell}{2} + 12$ .

Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $v_n = u_n - \ell$ .

2. Déterminer la nature de la suite  $(v_n)$ .

3. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

#### I.2 - Étude de limites

**Exercice 5. (Série harmonique)** Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ .

2. En déduire que  $(H_n)$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 6. (Espérance d'une géométrique)** Soit  $q \in ]-1, 1[$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kq^{k-1}$ .

**Exercice 7.** Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

1. Montrer que, pour tout  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ .

2. Montrer que  $(S_n)$  est majorée par 2.

3. En déduire que  $(S_n)$  converge.

**Exercice 8.** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ .

1. Montrer que  $(u_n)$  est croissante.

2. En supposant que  $(u_n)$  est majorée, aboutir à une contradiction.

3. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 9. (Une suite homographique)** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$ . Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ .

1. Déterminer la nature de la suite  $(v_n)$ .

2. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 10. (Constante d'Euler)** Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Pour tout  $x \geq 0$ , montrer les inégalités

$$\ln(1+x) \leq x \text{ et } \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x).$$

2. Montrer que, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

3. En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n.$$

4. En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

Pour tout  $n \geq 2$ , on pose  $c_n = H_{n-1} - \ln(n)$ .

5. Calculer  $c_{n+1} - c_n$  et en déduire le sens de variation de la suite  $(c_n)$ .
6. Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ ,  $c_n \leq 1 + \ln(n-1) - \ln(n)$ .
7. En déduire que la suite  $(c_n)$  est convergente.

## II - Fonctions

### II.1 - Développements limités

**Exercice 11. (Calculs de limites en 0)** Déterminer les limites 0 des fonctions suivantes :

1.  $\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}-1}$ .
2.  $\frac{e^x-1}{x}$ .
3.  $\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+2x}-1}$ .
4.  $\frac{e^{3x}-1-3x}{x^2}$ .

**Exercice 12. (Équivalents en  $+\infty$ )** Déterminer des équivalents simples, en  $+\infty$ , des fonctions suivantes :

1.  $\frac{x^5+4x^4+2}{2x^3+x+1}$ .
2.  $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ .
3.  $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ .
4.  $\ln(1+x^2)$ .
5.  $\frac{e^{-x}+3x+2}{x^2+1}$ .

**Exercice 13. (Calculs de limites en  $+\infty$ )** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminer

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{3/x}-1)$ .

**Exercice 14. (Calculs de développements limités)** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, en 0 de :

1.  $\frac{e^x-1}{x}$ .
2.  $\frac{1}{1+\ln(1+x)}$ .

### II.2 - Étude de courbes

**Exercice 15.** Déterminer l'équation de la tangente ainsi que la position de la courbe de par rapport à cette tangente aux points précisés.

1.  $e^x$  en 0.
2.  $e^x$  en 2.
3.  $\ln(x)$  en 1.
4.  $xe^x$  en 0.
5.  $\frac{e^x-1}{x}$  en 0.

**Exercice 16.** On considère la fonction  $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$ .

1. Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$ .
2. Étudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
3. Montrer que, pour tout  $x \in D \setminus \{-1, 1\}$ ,  $f'(x)$  et  $f(x)$  sont de même signe.
4. Déterminer les variations de  $f$  sur  $[1, +\infty[$ .
5. Montrer que, pour tout  $x \in D$ ,  $f(x)f(-x) = -1$  et en déduire les variations de  $f$  sur  $] -\infty, -1]$ .
6. Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$   $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$ .
7. Tracer  $\mathcal{C}_f$  et  $\Delta$ .