IV - Variables aléatoires discrètes

Dans tout le cours, Ω désigne un univers muni d'une tribu $\mathscr{F}$ et $\mathbf{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Lorsque Ω est un ensemble fini, on choisira $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$.

I - Variables aléatoires réelles finies

I.1 - Définition

Définition 1 - Variable aléatoire réelle

On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est un ensemble fini. Une *variable aléatoire réelle* est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

Un dé équilibré est lancé successivement 2 fois. On note les résultats obtenus à l'issue de chacun des lancers.
L'univers est $\Omega = \{(i, j),\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 6\} = [\![1, 6]\!]^2$.
La somme S des résultats obtenus à l'issue des 2 lancers est une variable aléatoire :

$$S : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (d_1, d_2) & \mapsto & d_1 + d_2 \end{array}$$

Définition 2 - Notations

Si $x \leqslant y$ sont des réels, on notera

$$\begin{aligned} [X = x] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ X(\omega) = x\} \\ [X \leqslant x] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ X(\omega) \leqslant x\} \\ [X \geqslant x] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ X(\omega) \geqslant x\} \\ [x \leqslant X \leqslant y] &= \{\omega \in \Omega \ ;\ x \leqslant X(\omega) \leqslant y\} \end{aligned}$$

Exemple 2 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.

$$\begin{aligned} [S = 3] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega \ ;\ d_1 + d_2 = 3\} \\ &= \{(1, 2), (2, 1)\}. \\ [S \leqslant 4] &= \{(d_1, d_2) \in \Omega \ ;\ d_1 + d_2 \leqslant 4\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}. \end{aligned}$$

Définition 3 - Système complet

Soient Ω un univers fini et X une variable aléatoire. Notons $x_1, \dots, x_p$ les valeurs prises par X. Alors, $\{[X = x_i],\ i \in [\![1, p]\!]\}$ est un système complet d'événements. C'est le *système complet* associé à la variable aléatoire X.

Exemple 3 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent. Le système complet associé à S est :

$$\Big\{[S = 2], [S = 3], [S = 4], [S = 5], [S = 6], [S = 7], \\ [S = 8], [S = 9], [S = 10], [S = 11], [S = 12]\Big\}.$$

I.2 - Loi de probabilité

Définition 4 - Loi de probabilité

La *loi* de la variable aléatoire X est la donnée :
- des valeurs $x_1, \dots, x_p$ prises par X,
- de la famille de probabilités

$$(\mathbf{P}([X = x_1]), \dots, \mathbf{P}([X = x_p])).$$

Exemple 4 - Somme de 2 dés équilibrés

On reprend les notations de l'exemple précédent. Nous obtenons successivement :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([S = k])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Définition 5 - Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire. La *fonction de répartition* de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leqslant x])$.

Exemple 5 - Somme de 2 lancers d'un dé équilibré

On reprend les notations de l'exemple précédent.
- Si $x < 2$. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

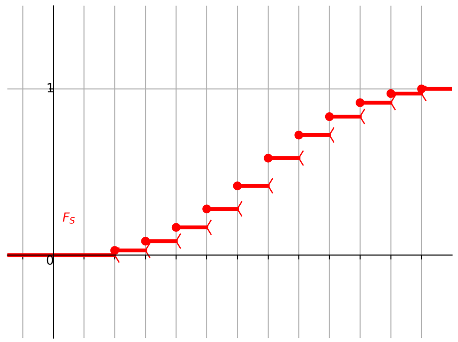
- Si $2 \leqslant x < 3$. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}([S = 2]) = \frac{1}{36}.$$

- ...
- Si $x \geqslant 12$. Alors,

$$F_S(x) = \mathbf{P}([S \leqslant x]) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

On obtient le graphe suivant :



Proposition 1

Les variables aléatoires X et Y sont de même loi si et seulement si elles ont mêmes fonctions de répartition.

I.3 - Lois usuelles

Définition 6 - Loi certaine

Soit $c \in \mathbb{R}$. La variable aléatoire X suit une *loi certaine* de valeur c si $\mathbf{P}([X = c]) = 1$.

Définition 7 - Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$

La variable aléatoire X suit une *loi uniforme* sur $[\![1, n]\!]$, noté $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$, si

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}([X = i]) = \frac{1}{n}.$$

Loi uniforme

La loi uniforme modélise une expérience où n résultats distincts sont possibles et équiprobables.

Définition 8 - Loi de Bernoulli de paramètre p

Soit $p \in [0,1]$. La variable aléatoire X suit une *loi de Bernoulli* de paramètre p, noté $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, si

$$\mathbf{P}([X=0]) = 1-p \text{ et } \mathbf{P}([X=1]) = p.$$

Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli modélise le nombre de succès d'une seule expérience qui a une probabilité de succès égale à p.

Définition 9 - Expérience de Bernoulli

Une *expérience de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui n'admet que deux issues, appelées généralement succès et échec.

Définition 10 - Loi binomiale de paramètres n et p

Soit $p \in [0,1]$. La variable aléatoire X suit une *loi binomiale* de paramètres n et p, noté $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, si

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}([X=k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Loi binomiale

La loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la réalisation de n expériences de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès égale à p.

Définition 11 - Loi hypergéométrique de paramètres n, N et b

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant n, b \leqslant N$. La variable aléatoire X suit une *loi hypergéométrique* de paramètres n, N, b, noté $X \hookrightarrow \mathscr{H}(n, N, b/N)$, si

$$\forall\, k \in [\![0,b]\!],\ \mathbf{P}(X=k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique modélise, dans une urne contenant N boules dont b sont blanches, le nombre de boules blanches tirées lors d'un tirage simultané de n boules.

II - Espérance & Variance

II.1 - Espérance

Définition 12 - Espérance

Soient X une variable aléatoire et $x_1, \dots, x_p$ les valeurs prises par X. L'*espérance* de X, notée $\mathbf{E}[X]$, est le réel

$$\mathbf{E}[X] = x_1 \mathbf{P}([X=x_1]) + \cdots + x_p \mathbf{P}([X=x_p]).$$

Proposition 2 - Lois usuelles

- Si X suit une loi certaine de paramètre c, alors $\mathbf{E}[X] = c$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$, alors $\mathbf{E}[X] = \frac{n+1}{2}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $\mathbf{E}[X] = p$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbf{E}[X] = np$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{H}(n, N, b/N)$, alors $\mathbf{E}[X] = \frac{nb}{N}$.

Proposition 3 - Linéarité

Soient X, Y deux variables aléatoires et a, b deux réels. Alors,

$$\mathbf{E}\left[aX+bY\right]=a\mathbf{E}\left[X\right]+b\mathbf{E}\left[Y\right].$$

Exemple 6 - Somme de deux dés

Notons X_1 le résultat du premier lancer et X_2 le résultat du second. Alors, X_1 et X_2 suivent une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$ et $S=X_1+X_2$. Ainsi,

$$\mathbf{E}\left[S\right]=\mathbf{E}\left[X_1+X_2\right]=\mathbf{E}\left[X_1\right]+\mathbf{E}\left[X_2\right]=\frac{6+1}{2}+\frac{6+1}{2}=7.$$

Proposition 4 - Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire, $x_1,\dots,x_p$ les valeurs prises par X et g une fonction à valeurs réelles. On note $Y=g(X)$ la variable aléatoire définie par

$$\forall\ \omega\in\Omega,\ Y(\omega)=g(X(\omega)).$$

Alors,

$$\mathbf{E}\left[Y\right]=\mathbf{E}\left[g(X)\right]=\sum_{k=1}^{p}g(x_k)\mathbf{P}\left([X=x_k]\right).$$

Exemple 7 - Carré de la somme

On reprend les notations de l'exemple précédent. Posons $Y=S^2$. Alors,

$$\mathbf{E}\left[Y\right]=2^2\frac{1}{36}+3^2\frac{2}{36}+4^2\frac{3}{36}+5^2\frac{4}{36}+6^2\frac{5}{36}+7^2\frac{6}{36}+\cdots$$
$$\cdots+8^2\frac{5}{36}+9^2\frac{4}{36}+10^2\frac{3}{36}+11^2\frac{2}{36}+12^2\frac{1}{36}$$

II.2 - Variance

Définition 13 - Variance, Écart-type

Soit X une variable aléatoire. La *variance* de X, notée $\mathbf{V}\left(X\right)$, est le réel :

$$\mathbf{V}\left(X\right)=\mathbf{E}\left[\left(X-\mathbf{E}\left[X\right]\right)^2\right].$$

L'*écart-type* est $\sigma(X)=\sqrt{\mathbf{V}\left(X\right)}$.

Théorème 1 - Formule de Kœnig-Huygens

Soit X une variable aléatoire. Alors,

$$\mathbf{V}\left(X\right)=\mathbf{E}\left[X^2\right]-\mathbf{E}\left[X\right]^2.$$

Proposition 5 - Lois usuelles

- Si X suit une loi presque certaine, alors $\mathbf{V}\left(X\right)=0$.
- Si $X\hookrightarrow\mathscr{U}\left([\![1,n]\!]\right)$, alors $\mathbf{V}\left(X\right)=\frac{n^2-1}{12}$.
- Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, alors $\mathbf{V}\left(X\right)=p(1-p)$.
- Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbf{V}\left(X\right)=np(1-p)$.
- Si $X\hookrightarrow\mathscr{H}(n,N,b/N)$, alors $\mathbf{V}\left(X\right)=n\frac{b}{N}\frac{N-b}{N}\frac{N-n}{N-1}$.

Proposition 6

Soient X une variable aléatoire et a, b deux réels. Alors,

$$\mathbf{V}\left(aX+b\right)=a^2\mathbf{V}\left(X\right).$$

Exemple 8

Soit Y une variable suivant une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$. On pose $X=Y-1$.

Déterminons la loi de X.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}([Y=k])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Comme $X = Y - 1$,

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{P}([X=j])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi, $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, 11 \rrbracket)$.

Déterminons l'espérance et la variance de Y.

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X+1] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[1] = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7,$$
$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X+1) = \mathbf{V}(X) = \frac{11^2 - 1}{2} = 60.$$

Définition 14 - Variable centrée, réduite

Soit X une variable aléatoire.
- X est une variable aléatoire *centrée* si $\mathbf{E}[X] = 0$.
- X est une variable aléatoire *réduite* si $\mathbf{V}(X) = 1$.

Proposition 7

Soit X une variable aléatoire qui ne soit pas de loi certaine. La variable $X^* = \frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

III - Couples de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire X qui prend les valeurs $x_1, \dots, x_p$ et une variable aléatoire Y qui prend les valeurs $y_1, \dots, y_q$.

III.1 - Loi du couple

Définition 15 - Loi du couple

La *loi du couple* (X, Y) est la donnée :
- des valeurs (x_i, y_j) prises par le couple (X, Y),
- des probabilités $\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.

Exemple 9 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On dispose d'un bureau à 2 tiroirs et de 2 feuilles de papier. On dispose aléatoirement chacune des feuilles de papier dans l'un des tiroirs.
On note X le nombre de feuilles dans le premier tiroir et Y le nombre de tiroirs vides.
Le nombre de feuilles de papier dans le premier tiroir peut être égal à 0, 1 ou 2.
Le nombre de tiroirs vides peut être égal à 0 (il y a 1 feuille dans chaque tiroir) ou 1 (les 2 feuilles sont dans le même tiroir).
De plus,

$$\mathbf{P}([X=0] \cap [Y=0]) = 0, \mathbf{P}([X=0] \cap [Y=1]) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=0]) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) = 0$$
$$\mathbf{P}([X=2] \cap [Y=0]) = 0, \mathbf{P}([X=2] \cap [Y=1]) = \frac{1}{4}$$

On peut représenter ces résultats dans un tableau : à chaque ligne correspond une valeur x que peut prendre X ; à chaque colonne correspond une valeur y que peut prendre Y ; à l'intersection d'une ligne et d'une colonne se lit la probabilité $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$:

$x \backslash y$	0	1
0	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$

Définition 16 - Marginales

Les lois de X et de Y sont les *marginales* du couple (X, Y).
En utilisant le système complet associé à la variable aléatoire Y (resp. X), on obtient

$$\forall\ i \in [\![1, p]\!],\ \mathbf{P}\left([X = x_i]\right) = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right)$$

$$\forall\ j \in [\![1, q]\!],\ \mathbf{P}\left([Y = y_j]\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right)$$

Exemple 10 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les notations de l'exemple précédent, les marginales s'obtiennent en sommant les lignes / les colonnes du tableau.

$x \backslash y$	0	1	$\mathbf{P}\left([X = x]\right)$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{P}\left([Y = y]\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

La somme des cases de l'intérieur du tableau vaut 1.

Définition 17 - Loi conditionnelle

La *loi conditionnelle* de X sachant $[Y = y_j]$ est la donnée :

- des valeurs $x_1, \ldots, x_p$ prises par X,
- des probabilités $\mathbf{P}_{[Y=y_j]}\left([X = x_1]\right), \ldots, \mathbf{P}_{[Y=y_j]}\left([X = x_p]\right)$.

Exemple 11 - 2 feuilles et 2 tiroirs

On reprend les notations de l'exercice précédent. La loi conditionnelle de X sachant $[Y = 0]$ est égale à

i	0	1	2
$\mathbf{P}_{[Y=0]}\left([X = i]\right)$	0	1	0

C'est une loi presque certaine : *sachant qu'aucun des tiroirs n'est vide, on est certain qu'il y a une feuille dans le premier tiroir.*
La loi conditionnelle de X sachant $[Y = 1]$ est égale à

i	0	1	2
$\mathbf{P}_{[Y=0]}\left([X = i]\right)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Sachant qu'un des deux tiroirs est vide, il y a une chance sur deux que le premier tiroir contienne 0 *feuille et une chance sur deux qu'il contienne les* 2 *feuilles.*

III.2 - Indépendance

Définition 18 - Indépendance

Les variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$,

$$\mathbf{P}\left([X = x_i] \cap [Y = y_j]\right) = \mathbf{P}\left([X = x_i]\right) \times \mathbf{P}\left([Y = y_j]\right).$$

Exemple 12

- On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi est définie par

$x \backslash y$	0	1	$\mathbf{P}([X=x])$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{P}([Y=y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

On étudie le comportement de **tous** les couples de valeurs possibles :

$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \mathbf{P}([X=0])\times\mathbf{P}([Y=0])$$
$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \mathbf{P}([X=0])\times\mathbf{P}([Y=1])$$
$$\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=0]) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \mathbf{P}([X=1])\times\mathbf{P}([Y=0])$$
$$\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=1]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \mathbf{P}([X=1])\times\mathbf{P}([Y=1])$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

- 2 **feuilles et** 2 **tiroirs.** En reprenant la loi du couple,

$$\mathbf{P}([X=0]\cap[Y=0]) = 0 \neq \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \mathbf{P}([X=0])\times\mathbf{P}([Y=0]).$$

Les variables aléatoires X et Y **ne** sont **pas** indépendantes.

Définition 19 - Schéma de Bernoulli

Un *schéma de Bernoulli* est la succession d'un nombre fini d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

Proposition 8 - Loi certaine

Si Y est une variable aléatoire certaine, alors X et Y sont indépendantes.

Théorème 2 - Stabilité de la loi binomiale

Soient m, n deux entiers naturels, $p \in [0,1]$, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m+n, p).$$

III.3 - Covariance

Proposition 9 - Espérance d'un produit

En utilisant la loi du couple,

$$\mathbf{E}[X\times Y] = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i \times y_j \times \mathbf{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j]).$$

Exemple 13 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant l'exemple des feuilles et des tiroirs,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[XY] &= 0\times 0\times 0 + 0\times 1\times\frac{1}{4} + \cdots \\ &\cdots + 1\times 0\times\frac{1}{2} + 1\times 1\times 0 + \cdots \\ &\cdots + 2\times 0\times 0 + 2\times 1\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Théorème 3 - Espérance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbf{E}[X\times Y] = \mathbf{E}[X]\times\mathbf{E}[Y].$$

Définition 20 - Covariance

La *covariance* de X et Y, notée $\text{Cov}(X,Y)$, est le réel

$$\text{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}[(X-\mathbf{E}[X])\times(Y-\mathbf{E}[Y])].$$

Proposition 10 - Propriétés de la covariance

Soient a, b, c trois réels et X, Y, Z trois variables aléatoires.

- $\text{Cov}\left(X,Y\right) = \mathbf{E}\left[X \times Y\right] - \mathbf{E}\left[X\right] \times \mathbf{E}\left[Y\right]$.
- $\text{Cov}\left(X,Y\right) = \text{Cov}\left(Y,X\right)$.
- $\text{Cov}\left(X,X\right) = \mathbf{V}\left(X\right)$.
- $\text{Cov}\left(X,c\right) = 0$.
- $\text{Cov}\left(aX+bY,Z\right) = a\text{Cov}\left(X,Z\right) + b\text{Cov}\left(Y,Z\right)$.

Exemple 14 - 2 feuilles et 2 tiroirs

En reprenant les calculs précédents,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[X\right] &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1,\\
\mathbf{E}\left[Y\right] &= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\\
\text{Cov}\left(X,Y\right) &= \mathbf{E}\left[XY\right] - \mathbf{E}\left[X\right]\mathbf{E}\left[Y\right]\\
&= \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Proposition 11 - Covariance et Somme

$$\mathbf{V}\left(X+Y\right) = \mathbf{V}\left(X\right) + \mathbf{V}\left(Y\right) + 2\text{Cov}\left(X,Y\right).$$

Exemple 15 - Variance d'une somme

On considère le couple (X_1, X_2) dont la loi est définie par :

x_1 \ x_2	0	1	$\mathbf{P}\left([X_1 = x_1]\right)$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\mathbf{P}\left([X_2 = x_2]\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

X_1 et X_2 ont même loi, donc ils ont même espérance et même variance. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[X_1\right] &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \mathbf{E}\left[X_1^2\right],\\
\mathbf{V}\left(X_1\right) &= \mathbf{E}\left[X_1^2\right] - \mathbf{E}\left[X_1\right]^2 = \frac{3}{16},\\
\mathbf{E}\left[X_1X_2\right] &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\\
\text{Cov}\left(X_1,X_2\right) &= \mathbf{E}\left[X_1X_2\right] - \mathbf{E}\left[X_1\right]\mathbf{E}\left[X_2\right]\\
&= \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{16}\\
\mathbf{V}\left(X_1+X_2\right) &= \mathbf{V}\left(X_1\right) + \mathbf{V}\left(X_2\right) + 2\text{Cov}\left(X_1,X_2\right)\\
&= \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{2}{16} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Proposition 12 - Convariance et Indépendance

Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}\left(X,Y\right) = 0$.

Exemple 16 - 2 feuilles et 2 tiroirs

L'exemple des feuilles et des tiroirs montre que la covariance peut être nulle alors que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

Définition 21 - Coefficient de corrélation linéaire

Le *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y, noté $\rho(X,Y)$, est défini par

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}\left(X,Y\right)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Exemple 17

En reprenant l'exemple précédent,

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{V}(X_1)\mathbf{V}(X_2)}} = \frac{\frac{-1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16} \times \frac{3}{16}}} = -\frac{1}{3}.$$

Proposition 13

- $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.
- $|\rho(X, Y)| = 1$ signifie qu'il existe des réels a, b et c tels que $\mathbf{P}(aX + bY + c = 0) = 1$.

III.4 - Vecteurs de variables aléatoires discrètes

Définition 22 - Vecteur aléatoire

X est un *vecteur de variables aléatoires* s'il existe $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes telles que :

$$X : \omega \mapsto (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

Les définitions de loi, loi marginale s'étendent au cas des vecteurs aléatoires. De manière analogue, on définit l'indépendance de n variables aléatoires indépendantes.

IV - Variables aléatoires discrètes infinies

IV.1 - Loi de probabilité

Définition 23 - Variable aléatoire discrète infinie

Une variable aléatoire X est *discrète infinie* si les valeurs prises par X sont en nombre infini et peuvent être indexées par $\mathbb{N}$. On notera

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

Dans toute la suite, on se limitera aux variables aléatoires qui ne prennent que des valeurs positives.

Exemple 18 - Variables aléatoires discrètes infinies

- Un dé est lancé jusqu'à obtenir la valeur 6. On note T le rang du lancer où le premier 6 est obtenu. La variable aléatoire T peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 1 si le 6 apprait au premier lancer,
  - ⋆ 2 si le 1er lancer n'est pas un 6 et que le 2e l'est,
  - ⋆ 3 si les 1er et 2e lancers ne sont pas des 6 et que le 3e l'est,
  - ⋆ ...
- Une étudiante collectionne les cartes de 23 joueurs de foot de son équipe nationale qui sont distribuées dans des tablettes de chocolat. On note T le nombre de tablettes achetées pour que sa collection soit complète. T peut prendre les valeurs :
  - ⋆ 23 si elle a obtenu à chaque achat une carte différente,
  - ⋆ 24 si elle a obtenu exactement une carte en double,
  - ⋆ ...

Définition 24 - Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *loi de probabilité* de X est la donnée :

- des valeurs x_0, x_1, $x_2, \ldots$ prises par X,
- de la famille de probabilités $(\mathbf{P}([X = x_0]), \mathbf{P}([X = x_1]), \ldots, \mathbf{P}([X = x_n]), \ldots)$.

Exemple 19 - Instant du premier Pile

On note T le numéro du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.
D'une part, $T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

D'autre part,

- $[T = 1]$ correspond à obtenir un Pile lors du premier lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}.$$
- $[T = 2]$ correspond à obtenir Face lors du premier lancer et Pile lors du second lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = 2]) = \mathbf{P}(\{(F, P)\}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}.$$
- ...
- $[T = n]$ correspond à obtenir Face lors des $n - 1$ premiers lancers et Pile lors du n^{e} lancer. Ainsi,
$$\mathbf{P}([T = n]) = \mathbf{P}(\{(F, F, \ldots, F, P)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = n]) = 1$, alors $\mathbf{P}([T = +\infty]) = 0$. La loi de T peut être représentée dans un tableau contenant une infinité de colonnes :

x	$= 1$	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
$\mathbf{P}([X = x])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}$	$\cdots$

Définition 25 - Système complet

Si X est une variable aléatoire discrète infinie, la famille d'événements $([X = x_0], [X = x_1], [X = x_2], \ldots)$ est un système complet d'événements. En particulier,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = x_k]) = 1.$$

Exemple 20 - Instant du premier Pile

En reprenant l'exemple précédent,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T = k]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

IV.2 - Fonction de répartition

Définition 26 - Fonction de répartition

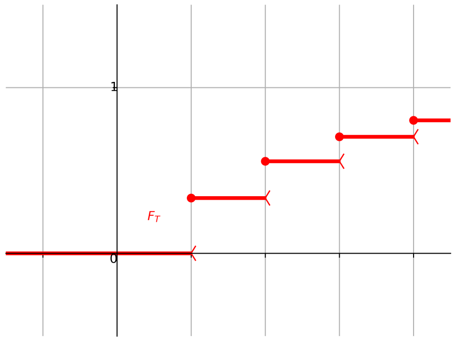
Soit X une variable aléatoire discrète infinie. La *fonction de répartition* de X est la fonction F_X définie pour tout x réel par $F_X(x) = \mathbf{P}([X \leqslant x])$.

Exemple 21 - Instant du premier Pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.

- Si $x < 1$, $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
- Si $1 \leqslant x < 2$, $\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}([T = 1]) = \frac{1}{3}$.
- Si $2 \leqslant x < 3$,
$\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}(T \in \{1, 2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.
- ...
- Si $n \leqslant x < n + 1$,
$\mathbf{P}([T \leqslant x]) = \mathbf{P}(T \in [\![1, n]\!]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- ...

On obtient le graphe suivant :



Proposition 14 - Fonction de répartition

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète infinie.

- F est à valeurs dans $[0,1]$.
- F est croissante.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

IV.3 - Espérance et Variance

Définition 27 - Espérance

Soit X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$.
La variable aléatoire X admet une espérance si la série $\sum x_i \mathbf{P}([X = x_i])$ est convergente. L'*espérance* de X est alors :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}([X = x_i]).$$

Exemple 22 - Instant du premier pile

On note T le rang du premier lancer permettant d'obtenir Pile lors de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{2}{3}$.
On admet que pour tout $x \in [0,1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Alors, comme $\frac{2}{3} \in [0,1[$, $\sum n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ converge et

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = 3.$$

Proposition 15 - Propriétés de l'espérance

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes infinies admettant une espérance et a un réel. Alors,

- $\mathbf{E}[a] = a$.
- $\mathbf{E}[aX + Y] = a\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$.

Exemple 23 - Instant du premier pile

Un joueur joue à Pile ou Face, avec une pièce qui renvoie Pile avec probabilité $\frac{1}{3}$, contre son banquier qui lui propose le contrat suivant :

- le joueur paye 40 euros pour jouer,
- la pièce de monnaie est lancée successivement jusqu'à obtenir Pile. Il gagne 10 euros lors de chacun de ces lancers.

En notant G le gain du joueur et T le nombre de lancers effectués, alors $G = 10 \times T - 40$. En utilisant les propriétés précédentes,

$$\mathbf{E}[G] = 10\mathbf{E}[T] - 40 = 10 \times 3 - 40 = -10.$$

Théorème 4 - Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire discrète infinie à valeurs positives et f une fonction réelle à valeurs positives. Notons

$X(\Omega) = \{x_i,\, i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i)\mathbf{P}([X = x_i]).$$

Définition 28 - Variance, Écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. Notons $X(\Omega) = \{x_i,\, i \in \mathbb{N}\}$. Si $\sum x_i^2\mathbf{P}([X = x_i])$ converge, alors X admet une *variance* et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right].$$

L'*écart-type* de X est la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Proposition 16 - Propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire discrète infinie qui admet une variance.

- $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2$.
- $\mathbf{V}(a) = 0$.
- $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$.

Exemple 24 - Pile/Face contre le banquier

On reprend l'exemple précédent et on admet que $\mathbf{V}(T) = 6$. Alors,

$$\mathbf{V}(G) = \mathbf{V}(10T - 40) = 10^2\mathbf{V}(T) = 600.$$

IV.4 - Lois usuelles

Définition 29 - Loi géométrique

Soit $p \in [0, 1]$. La variable aléatoire T suit une loi *géométrique* de paramètre p, noté $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, si

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

Loi géométrique

Étant donné un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès de chaque expérience est égale à p, la variable aléatoire égale au *rang du premier succès* suit une loi géométrique de paramètre p.

Proposition 17 - Espérance, Variance

Soit $T \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. On admet que

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(T) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Définition 30 - Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire Z suit une loi de *Poisson* de paramètre λ, noté $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, si

- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Z = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Loi de Poisson

Étant donnée une suite de N épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à p. Si N est grand et p est petit, la variable aléatoire égale au *nombre de succès* suit approximativement une loi de Poisson de paramètre λ.

Proposition 18 - Espérance, Variance

Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On admet que

$$\mathbf{E}[Z] = \lambda \text{ et } \mathbf{V}(Z) = \lambda.$$

Exemple 25 - Accidentés

Une banque accorde quotidiennement des crédits. Étant donné un crédit, la probabilité qu'il revienne au service contentieux dans un laps de temps d'un an est égale à 4%. On suppose que 100 crédits ont été accordés au mois de janvier.

On note X le nombre de crédits qui sont revenus au service contentieux un an plus tard. X compte le nombre de succès (contentieux) lors d'une suite de 100 épreuves de Bernoulli de probabilité de succès 4%. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{4}{100}\right)$ et $\mathbf{E}[X] = 4$.

On suppose que X peut être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de paramètre $\mathbf{E}[X]$. On donne la table d'une loi de Poisson de paramètre 4 ci-dessous :

z	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$\mathbf{P}([Z=z])$	0,018	0,073	0,147	0,195	0,195	0,156	$\cdots$

Alors,

- $\mathbf{P}(X=0) \simeq \mathbf{P}(Z=0) \simeq 0{,}018$.
- $\mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq \mathbf{P}(Z \leqslant 3) \simeq 0{,}018 + 0{,}073 + 0{,}147 + 0{,}195$ $\simeq 0{,}433$.
- $\mathbf{P}(X > 3) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 3) \simeq 1 - 0{,}433 \simeq 0{,}567$.

Théorème 5 - Stabilité de la loi de Poisson

Soient λ, μ deux réels strictement positifs, $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu).$$

IV.5 - Vecteurs de variables aléatoires

Les notions vues dans le cadre fini se généralisent aux variables aléatoires discrètes infinies.