

## I - Diagonalisation

## II - Réduction & Application

### Solution de l'exercice 8.

1. D'après la définition, pour tout  $n$  entier naturel,  $v_{n+1} = 2v_n$  et  $v_0 = -1$ . Ainsi,  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme  $-1$ . Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2^n.$$

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A - \lambda I_3$  ne soit pas inversible, i.e.  $\text{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$ . Or,

$$\begin{aligned} \text{Rg}(A - \lambda I_3) &= \text{Rg} \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 4 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} -3 - \lambda & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \\ 0 & -2 - \lambda & -4 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_3 \\ &= \text{Rg} \begin{pmatrix} -3 - \lambda & -1 & 4 \\ 0 & -2 - \lambda & -4 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Rg}(A - \lambda I_3) < 3$  si et seulement si  $\lambda \in \{-3, -2, 2\}$ .

3. D'après la question précédente,  $A$  possède trois valeurs propres distinctes, donc  $A$  est diagonalisable.

En résolvant des systèmes linéaires, on obtient

$$\begin{aligned} E_{-3}(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_{-2}(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_2(A) &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , alors  $A = PDP^{-1}$ .

4. Montrons par récurrence que  $A^n = PD^nP^{-1}$  pour tout  $n$  entier naturel.

**Initialisation.** Lorsque  $n = 0$ . D'une part,  $A^0 = I_3$ . D'autre part,  $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ . Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $A^n = PD^nP^{-1}$ . Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= PD^nP^{-1}A, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \text{ d'après la question 3.} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre  $n + 1$ .

**Conclusion.** Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.$$

5. Comme la matrice  $D$  est diagonale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour tout  $n$  entier naturel,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

6. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3u_n + 4v_n - w_n \\ 2v_n \\ -4v_n + 2w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= AU_n. \end{aligned}$$

7. Montrons par récurrence que  $U_n = A^n$  pour tout  $n$  entier naturel.

**Initialisation.** Lorsque  $n = 0$ . Comme  $A^0 = I_3$ , alors  $A^0U_0 = I_3U_0 = U_0$ .

La propriété est donc vraie à l'ordre 0.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $U_n = A^nU_0$ . Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n, \text{ d'après la question 6} \\ &= AA^nU_0, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= A^{n+1}U_0, \text{ d'après la définition des puissances} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre  $n + 1$ .

**Conclusion.** Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^nU_0.$$

8. En reprenant le résultat de la question 5.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= A^nU_0 \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n & 2^n - (-2)^n & (-3)^n - (-2)^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & (-2)^n - 2^n & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n - 2^n + (-2)^n + 2(-3)^n - 2(-2)^n \\ -2^n \\ -(-2)^n + 2^n + 2(-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n$  entier naturel,

$$\begin{cases} u_n &= -2^n - (-2)^n - (-3)^{n+1} \\ v_n &= -2^n \\ w_n &= 2^n + (-2)^n \end{cases}$$

□