T.D. VIII - Estimation

I - Construction d'estimateurs

Solution de l'exercice 1.

1. TODO

2.

3. En utilisant la variance empirique, $\overline{X}_n - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$ est un estimateur sans biais de $p - p(1-p) = p^2$

De plus, comme $X_i(\Omega) = \{0,1\}$, alors $X_i^2 = X_i$ et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2X_iX_n + \overline{X}_n^2\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{2}{n-1}\overline{X}_n\sum_{i=1}^{n}X_i + \frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2\\
&= \frac{n}{n-1}\overline{X}_n - \frac{2n}{n-1}\overline{X}_n^2 + \frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2\\
&= \frac{n}{n-1}\overline{X}_n - \frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2.
\end{aligned}$$

2e méthode. En utlisant la question précédente,
$\overline{X}_n^2$ est un estimateur sans biais de $\frac{p(1+(n-1)p)}{n}$.
$\frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2$ est un estimateur sans biais de $\frac{p}{n-1} - p^2$.
$\frac{n}{n-1}\overline{X}_n - \frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2$ est un estimateur sans biais de p^2.

□

II - Comparaison d'estimateurs

Solution de l'exercice 6.

1. TODO

2. $\mathbf{E}\left[Y_n\right] = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\theta$. Ainsi, Y_n est un estimateur sans biais si et seulement si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$.

3. En utilisant la bilinéarité de la covariance,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(\overline{X}_n, Y_n\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\underbrace{\mathbf{V}\left(X_i\right)}_{=1}, \quad \text{d'après l'indépendance}\\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la positivité de la variance,

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \mathbf{V}\left(\overline{X}_n - Y_n\right) &= \mathbf{V}\left(\overline{X}_n\right) + \mathbf{V}\left(Y_n\right) - 2\mathrm{Cov}\left(\overline{X}_n, Y_n\right)\\
&= \frac{1}{n} + \mathbf{V}\left(Y_n\right) - 2\frac{1}{n} = \mathbf{V}\left(Y_n\right) - \mathbf{V}\left(\overline{X}_n\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{V}\left(\overline{X}_n\right) \leqslant \mathbf{V}\left(Y_n\right)$ avec égalité si et seulement si $\mathbf{V}\left(\overline{X}_n - Y_n\right) = 0$, i.e. $\overline{X}_n - Y_n = c$ presque sûrement. Comme $\mathbf{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbf{E}\left[Y_n\right] = \theta$, alors $c = 0$ et $\overline{X}_n = Y_n$ presque sûrement. □