

# T.P. XI - Exercice d'annales

**Exercice 1.** Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0. À partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

- \* elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec probabilité  $\frac{1}{2}$  ;
- \* elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité  $\frac{1}{4}$  ;
- \* elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ .

Les différents sauts sont supposés indépendants.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit les variables aléatoires suivantes :

- \*  $X_n$  est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des  $n$  premiers sauts ;
- \*  $Y_n$  est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des  $n$  premiers sauts ;
- \*  $Z_n$  égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des  $n$  premiers sauts ;
- \*  $A_n$  est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son  $n^e$  saut.

1. Donner la loi de la variable aléatoire  $A_1$ . Calculer  $\mathbf{E}[A_1]$  et  $\mathbf{V}(A_1)$ .
2. a) Justifier que  $A_2(\Omega) = \llbracket 2, 6 \rrbracket$ . Montrer que la loi de  $A_2$  est donnée par :

$$\mathbf{P}([A_2 = 2]) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}([A_2 = 3]) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}([A_2 = 4]) = \frac{5}{16},$$

$$\mathbf{P}([A_2 = 5]) = \frac{1}{8}, \mathbf{P}([A_2 = 6]) = \frac{1}{16}.$$

b) Calculer  $\mathbf{E}[A_2]$ .

3. a) Présenter dans un tableau la loi du couple  $(A_2, Z_2)$ . En déduire la loi de  $Z_2$  ainsi que l'espérance de  $Z_2$ .

b) Calculer la covariance  $\text{Cov}(A_2, Z_2)$  de  $A_2$  et  $Z_2$ . Les variables aléatoires  $A_2$  et  $Z_2$  sont-elles indépendantes ?

4. On rappelle que, lorsque le module `numpy.random` est importé via l'instruction `import numpy.random as rd`, l'appel `rd.randint(1, 5)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ . Compléter le programme suivant pour qu'il simule les 100 premiers déplacements de la puce.

```
import numpy.random as rd
import numpy as np

A = np.zeros((1, 100))
for k in range(1, 101):
    t = rd.randint(1, 5)
    if t <= ...:
        A[k] = 1
    elif t == ...:
        A[k] = 2
    elif t == ...:
        A[k] = 3

print(A)
```

5. Reconnaître les lois de  $X_n$ ,  $Y_n$  et  $Z_n$ . Justifier que  $X_n + Y_n$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, \frac{3}{4})$ .
6. a) Justifier la relation :  $X_n + Y_n + Z_n = n$ . Calculer  $\text{Cov}(Z_n, X_n + Y_n)$ .  
b) En utilisant les valeurs de  $\mathbf{V}(X_n)$ ,  $\mathbf{V}(Y_n)$  et  $\mathbf{V}(X_n + Y_n)$ , montrer que  $\text{Cov}(X_n, Y_n) = -\frac{n}{8}$ .  
c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire  $\rho(X_n, Y_n)$  de  $X_n$  et  $Y_n$ .
7. a) Exprimer  $A_n$  en fonction de  $X_n$ ,  $Y_n$  et  $Z_n$ . Montrer que  $\mathbf{E}[A_n] = \frac{7n}{4}$ .  
b) Exprimer  $A_n$  en fonction de  $X_n$  et  $Y_n$ . Calculer  $\mathbf{V}(A_n)$  et  $\text{Cov}(A_n, X_n)$ .
8. On importe le module `matplotlib.pyplot` via l'instruction `import matplotlib.pyplot as plt`. On rappelle que si

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sont deux listes de réels de même taille, la commande `plt.plot(x, y)` permet de tracer la ligne brisée joignant les points  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $\dots$ ,  $M_n(x_n, y_n)$ . On complète le programme de la question 4 en y ajoutant les trois commandes suivantes :

```
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.arange(1, 102)
y = np.cumsum(A)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

Quelle sortie graphique obtient-on ?