



# Rapport TP1 Télécommunications

Ababacar Camara, Quentin Thuet

Janvier 2020

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2 Chaîne de référence</b>	<b>2</b>
2.1 Étude théorique . . . . .	2
2.2 Implantation sous Matlab . . . . .	4
<b>3 Impact du choix du filtre de réception</b>	<b>8</b>
3.1 Étude théorique . . . . .	8
3.2 Implantation sous Matlab . . . . .	9
<b>4 Impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée</b>	<b>13</b>
4.1 Étude théorique . . . . .	13
4.2 Implantation sous Matlab . . . . .	13
<b>5 Impact du choix du mapping</b>	<b>19</b>
5.1 Étude théorique . . . . .	19
5.2 Implantation sous Matlab . . . . .	21
<b>Conclusion</b>	<b>25</b>

# Introduction

Nous présentons dans ce rapport l'ensemble des tâches réalisées sur différentes chaînes de transmission en bande de base avec des filtres de mises en formes et de réceptions différents. L'objectif est de déterminer la chaîne permettant d'avoir un taux d'erreurs binaires le plus faible, concilié à une puissance spectrale moindre. Dans ce cadre, nous allons prendre une première chaîne comme référence, nous étudierons l'impact du choix du filtre de réception avec une deuxième chaîne, l'impact du filtre de mise en forme avec une troisième, et enfin une quatrième chaîne nous permettra d'étudier l'effet du mapping. Dès lors, il sera nécessaire de faire l'étude théorique relative à ces chaînes et comparer le résultat avec les implantations réalisées (ici réalisées avec Matlab).

## 2 Chaîne de référence

### 2.1 Étude théorique

1. Calcul de la densité spectrale de puissance du signal transmis :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 = \frac{1}{T_s} \underbrace{|H(f)|^2}_{T_s \sin_c^2(\pi f T_s)} = \frac{1}{T_s} T_s^2 \sin_c^2(\pi f T_s) = T_s \sin_c^2(\pi f T_s)$$

Ainsi on a :

$$S_x(f) = T_s \sin_c^2(\pi f T_s)$$

En théorie, la bande nécessaire à la retransmission d'un tel signal est infinie.

2. On remarque sur le tracé de  $g$  que pour  $t_0 = T_s$ , on a bien  $g(t_0) \neq 0$  et  $g(t_0 + kT_s) = 0$ , donc la chaîne peut vérifier le critère de Nyquist en prenant cette valeur de  $t_0$ .
- 3.

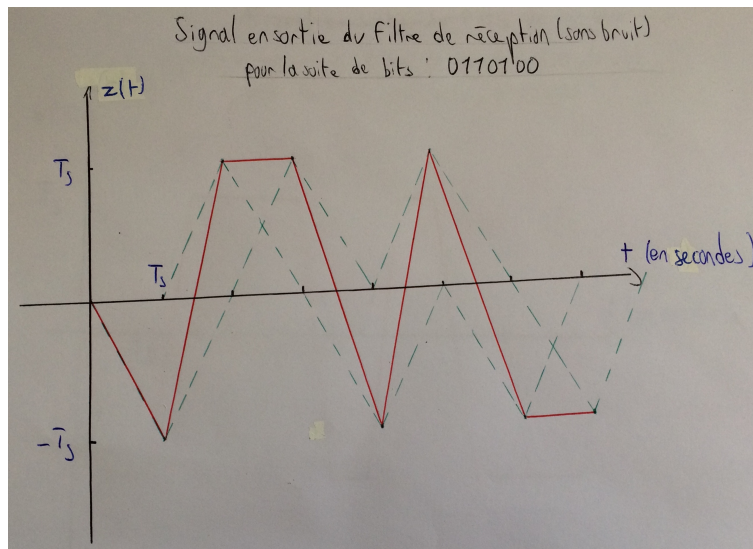


FIGURE 1 – Signal sans bruit en sortie du filtre de réception

On retrouve le fait que la chaîne puisse respecter le critère de Nysquist car on peut remarquer que si l'on échantillonne tous les  $T_s$  en commençant à  $t_0 = T_s$ , on obtient bien toutes les valeurs des bits émis à une amplitude maximale (décalé de  $t_0$ ).

4.

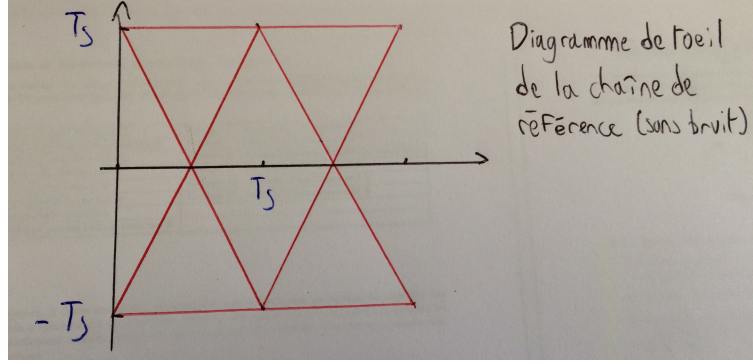


FIGURE 2 – Diagramme de l'oeil du signal sans bruit

On retrouve le fait que la chaîne puisse respecter le critère de Nysquist car on peut remarquer que en  $T_s$  les courbes du diagrammes se rejoignent en  $+T_s$  et  $-T_s$ , ce qui montre bien que les bits sont bien identifiés à cet endroit et que  $T_s$  est l'instant d'échantillonnage optimal.

5. Soit  $S_b$  la DSP du bruit additif et  $S_{b_r}$  la DSP du bruit équivalent après passage à travers le filtre  $h_r$ .  
Hypothèse : la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré

$$\text{RSB}_{\text{dB}} = \frac{P_u}{P_b} = \frac{\mathbb{E}(|g(b) a_n|^2)}{\sigma^2}$$

**Or**

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \Re_{b_r}(0) = \int_{\mathbb{R}} s_{b_r}(f) df = \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 s_b(f) df = \int_{\mathbb{R}} \frac{N_0}{2} |H_r(f)|^2 df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |h_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} T_s \end{aligned}$$

**Et**

$$\mathbb{E}(|g(b) a_m|^2) = g^2(t_0) \mathbb{E}(|a_m|^2) = g^2(t_0) \sigma_{a_m}^2 = T_s^2$$

d'où

$$\boxed{\text{RSB}_{\text{dB}} = 2 \frac{T_s}{N_0}}$$

6. On a l'amplitude du signal aux moments d'échantillonnage :

$$z_m = z(t_0 + mT_s) = g(t_0) a_m + w_m$$

On cherche un seuil de décision pour  $z_m$  tel qu'on choisisse  $\tilde{a}_m$  avec  $\mathbb{P}(\tilde{a}_m | z_m)$  soit maximale. Cela revient à chercher  $\tilde{a}_m$  qui maximise  $p(z_m | \tilde{a}_m)$  dans notre cas puisque les symboles sont équiprobables.

On a :

$$p(z_m | \tilde{a}_m) \propto \exp - \frac{(z_m - g(t_0) \tilde{a}_m)^2}{2\sigma^2}$$

On décidera  $\tilde{a}_m = +1$  quand

$$p(z_m | +1) > p(z_m | -1) \iff \log \frac{p(z_m | +1)}{p(z_m | -1)} > 0 \iff z_m > 0$$

On a donc la règle de décision :

$$\begin{cases} z > 0 \rightarrow \tilde{a}_m = +1 \\ z < 0 \rightarrow \tilde{a}_m = -1 \end{cases}$$

7. Dans le cas binaire TES = TEB. De plus, étant donné que la chaîne respecte le critère de Nyquist, on a

$$\text{TEB} = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right)$$

8. Comme calculé en 5., la puissance du bruit en sortie du filtre de réception vaut :

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} T_s$$

9. Calcul de l'énergie des symboles ( $E_s$ ) à l'entrée du récepteur :

Soit  $P_r$  la puissance du signal reçu et  $s_x$  la DSP du signal en sortie du filtre de mise en forme.

$$\begin{aligned} E_s &= P_r T_s \\ P_r &= \int_{\mathbb{R}} s_x(f) df = \frac{\sigma_a^2}{T_s} \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 df = \sigma_a^2 = 1 \end{aligned}$$

d'où  $E_s = T_s$  avec  $E_s = E_b$  dans le cas binaire.

10. Déduisons des questions précédentes l'expression du Taux d'erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$

$$\text{TEB} \underset{2.1.7}{=} Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right) \underset{2.1.8}{=} Q\left(\sqrt{\frac{2T_s}{N_0}}\right) \underset{2.1.9}{=} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Donc

$$\text{TEB} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

## 2.2 Implantation sous Matlab

1. Nous devons générer un signal en tronquant la bande occupée à une fréquence égale à  $4/T_s$ . On a alors d'après le critère de Shannon :

$$\begin{aligned} F_e &> 2 \times F_{max} \\ F_e &> 2 \times \frac{4}{T_s} \\ T_e &< \frac{T_s}{8} \\ T_s &> 8 \times T_e \end{aligned}$$

Donc on peut prendre  $N_s = 10$

En lançant la simulation, on constate que la densité spectrale observée n'est pas pas parfaitement un sinus cardinal au carré(voir figure 2 Matlab). Cela est dû au fait que le signal soit tronqué. D'autre part, la densité spectrale est de bande infinie, centrée en 0. C'est bien en adéquation avec l'étude théorique.

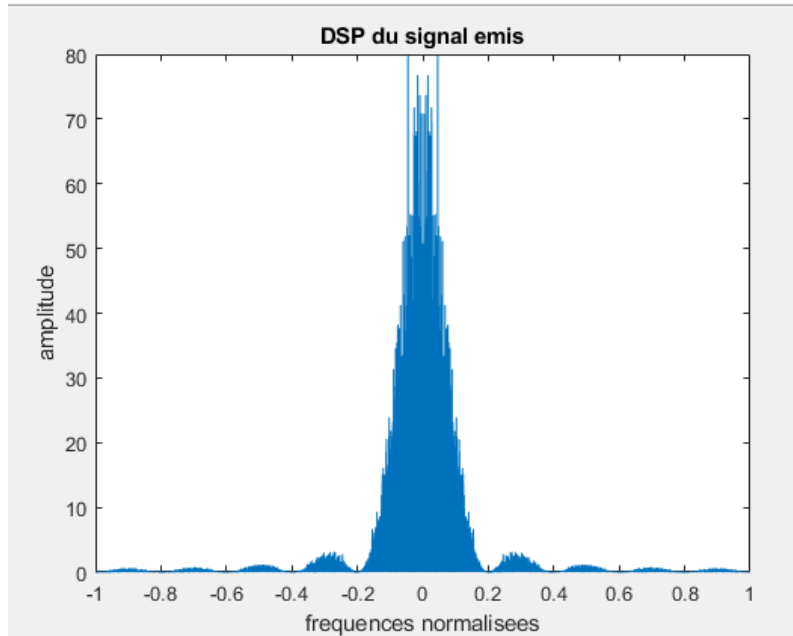


FIGURE 3 – Densité Spectrale

2. (a) Le signal obtenue en sortie du filtre de réception est en adéquation avec le tracé obtenue en théorie (voir 2.1.3) et figure simulée ( ci-dessous).

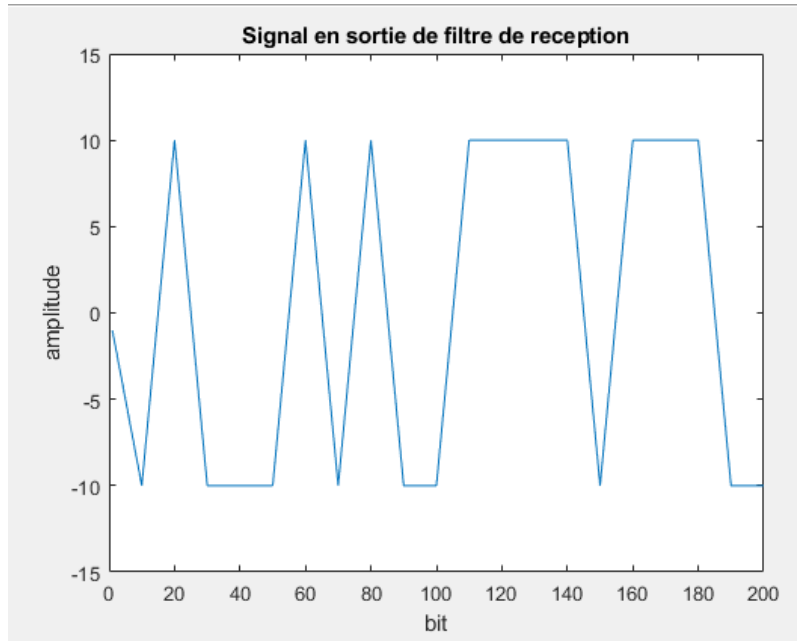


FIGURE 4 – Signal en sortie du filtre de reception.

- (b) On observe au niveau du diagramme de l'oeil que les instants optimaux d'échantillonnages correspondent bien à  $t_0 = T_s$  car à cet instant il n'y a pas d'interférences dans la décision.

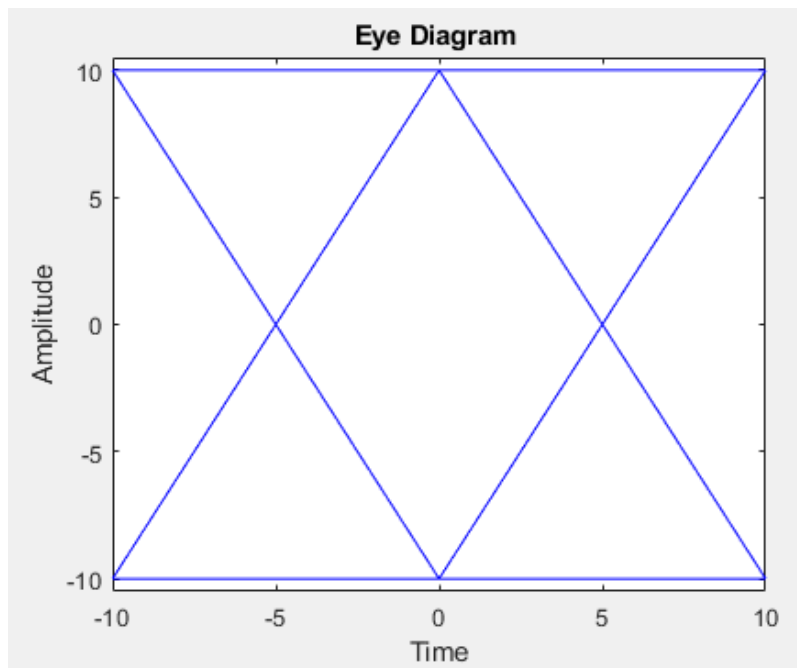


FIGURE 5 – Diagramme de l'oeil Simulé.

(c) Le TEB obtenue est bien nul en prenant comme seuil de décision :

$$\begin{cases} z > 0 \rightarrow \tilde{a}_m = +1 \\ z < 0 \rightarrow \tilde{a}_m = -1 \end{cases}$$

3. En rajoutant le bruit au signal transmis, on observe que, plus le  $\text{RSB}_{\text{dB}}$  est faible, plus le TEB est élevé. Ce qui est normal car, plus le bruit est élevé, plus le signal reçu sera altéré.
4. Le TEB théorique et le TEB simulé se superposent dans cette chaîne. Ce qui nous permet de valider la chaîne conçue.

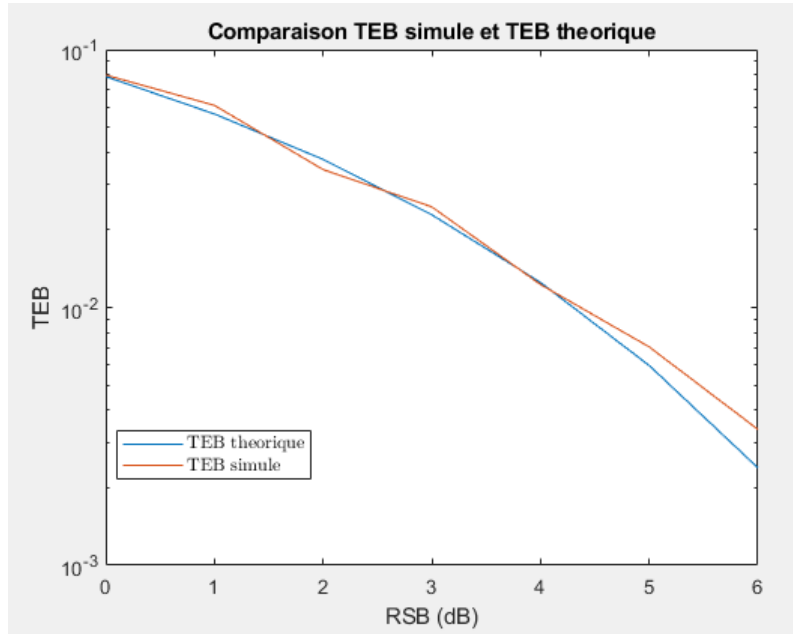


FIGURE 6 – TEB théorique et TEB simulé

### 3 Impact du choix du filtre de réception

#### 3.1 Étude théorique

1. On remarque sur le tracé de  $g$  que pour  $t_0 \in [\frac{T_s}{2}, T_s]$ , on a bien  $g(t_0) \neq 0$  et  $g(t_0 + kT_s) = 0$ , donc la chaîne peut vérifier le critère de Nyquist en prenant ces valeurs de  $t_0$ .
- 2.

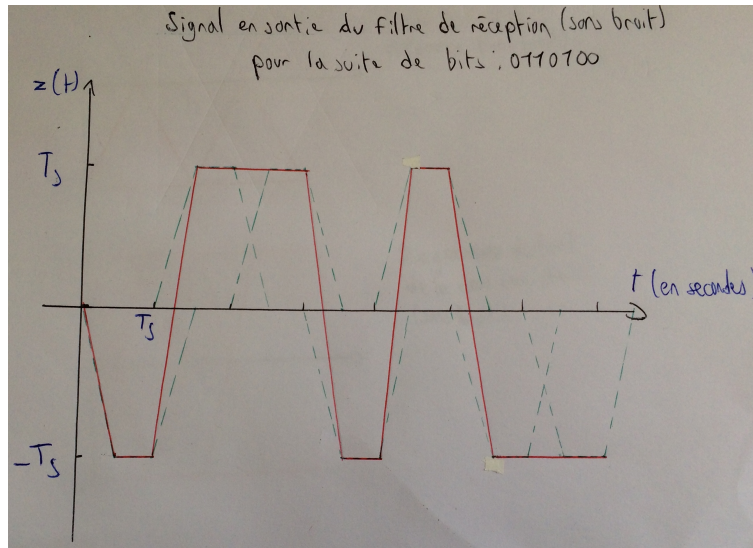


FIGURE 7 – Signal sans bruit en sortie du filtre de réception

On retrouve le fait que la chaîne puisse respecter le critère de Nysquist car on peut remarquer que si l'on échantillonne tous les  $T_s$  en commençant à une valeur  $t_0$  comprise entre  $\frac{T_s}{2}$  et  $T_s$ , on obtient bien toutes les valeurs des bits émis à une amplitude maximale (décalé de  $t_0$ ).

- 3.

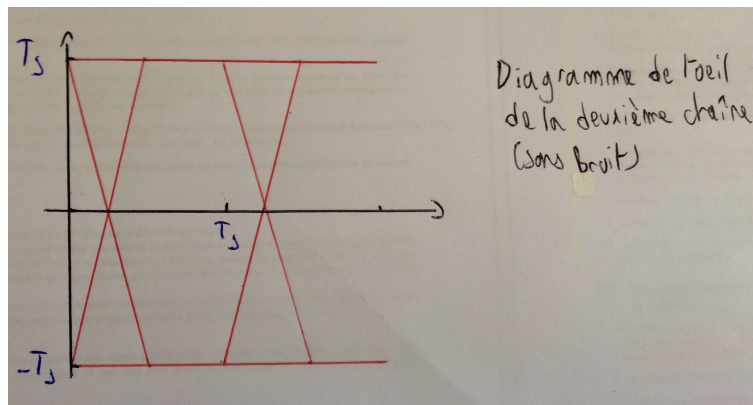


FIGURE 8 – Diagramme de l'oeil du signal sans bruit

On retrouve le fait que la chaîne puisse respecter le critère de Nysquist car on peut remarquer que entre  $\frac{T_s}{2}$  et  $T_s$  les courbes du diagrammes se rejoignent en  $+T_s$  et  $-T_s$ , ce qui montre bien que les bits sont bien identifiés à cet endroit et que  $[\frac{T_s}{2}, T_s]$  est l'ensemble des instants d'échantillonnage optimal.



4. Soit  $S_b$  la DSP du bruit additif et  $S_{b_r}$  la DSP du bruit équivalent après passage à travers le filtre  $h_r$ .  
Hypothèse : la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré

$$\begin{aligned} \text{RSB}_{\text{dB}} &= \frac{P_u}{P_b} = \frac{\mathbb{E}(|g(b) a_n|^2)}{\sigma^2} \\ \sigma^2 &= \mathfrak{R}_{b_r}(0) = \int_{\mathbb{R}} s_{b_r}(f) df = \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 s_b(f) df = \int_{\mathbb{R}} \frac{N_0}{2} |H_r(f)|^2 df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |h_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \frac{T_s}{2} \\ \mathbb{E}(|g(b) a_m|^2) &= g^2(t_0) \mathbb{E}(|a_m|^2) = g^2(t_0) \sigma_{a_m}^2 = \left(\frac{T_s}{2}\right)^2 = \frac{T_s}{4} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\text{RSB}_{\text{dB}} = \frac{T_s}{N_0}}$$

Le rapport obtenu est réduit de moitié par rapport à celui obtenu dans la chaîne de référence. On peut donc s'attendre à ce que le TEB augmente en raison du nombre plus important d'erreurs qui vont être provoquées par le bruit.

5. Le calcul et le résultat sont strictement similaires à la question à ceux de la question 6 de la partie 2.1. Seule la valeur de  $g(t_0)$  change mais celle-ci se simplifie lors des calculs. On a donc la règle de décision :

$$\begin{cases} z > 0 \rightarrow \tilde{a}_m = +1 \\ z < 0 \rightarrow \tilde{a}_m = -1 \end{cases}$$

6. On est à nouveau dans le cas binaire TES = TEB et la chaîne respecte le critère de Nyquist, donc on a

$$\boxed{\text{TEB} = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right)}$$

7. Comme calculé question 4, on a

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{N_0}{4} T_s}$$

8. La chaîne d'émission étant similaire, on a à nouveau  $E_s = T_s$  et  $E_s = E_b$  dans le cas binaire.

9.

$$\boxed{\text{TEB} = Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{T_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

### 3.2 Implantation sous Matlab

1. (a) Le tracé simulé obtenu en sortie du filtre de réception est en adéquation avec celui obtenu en théorie (voir 3.1.2) et figure ci-dessous.

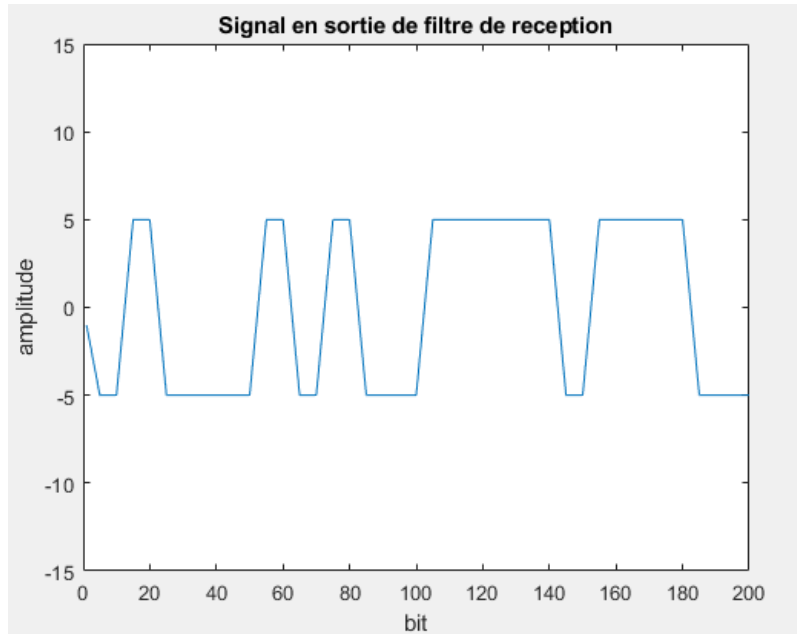


FIGURE 9 – Signal en sortie du filtre de réception

- (b) Les résultats sont conformes car on observe bien que le critère de Nyquist est vérifié pour  $t_0$  appartenant à  $[T_s/2, T_s]$ .

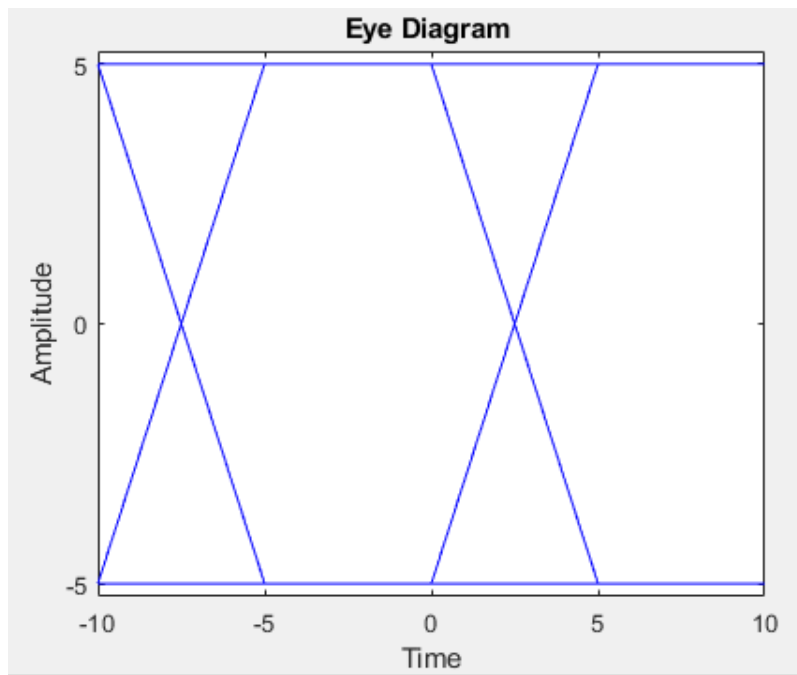


FIGURE 10 – Diagramme de l'oeil

(c) Le TEB est bien nul en prenant  $t_0 = T_s$  et en prenant comme seuil de décision :

$$\begin{cases} z > 0 \rightarrow \tilde{a}_m = +1 \\ z < 0 \rightarrow \tilde{a}_m = -1 \end{cases}$$

2. Voir implantation Matlab.

3. Les tracés du TEB théorique et du TEB simulé obtenus se superposent, ce qui valide l'étude de la chaîne.

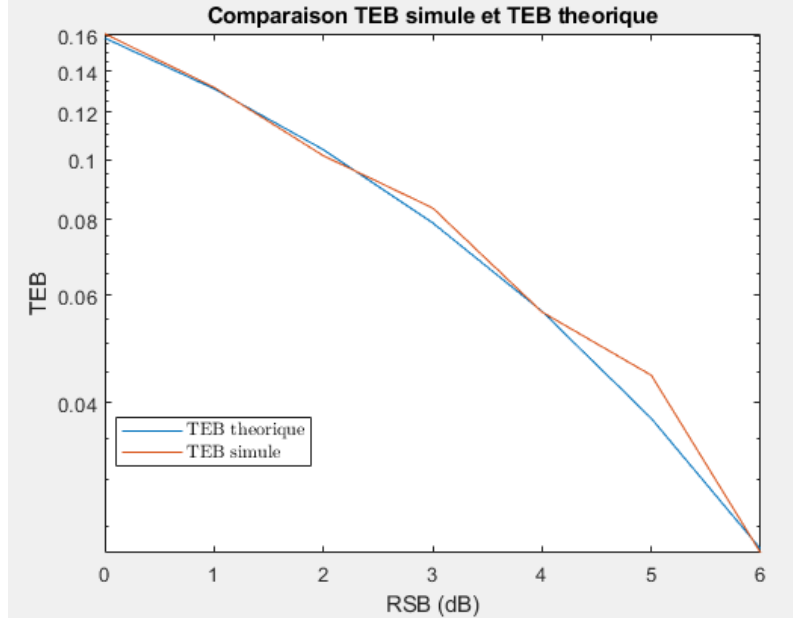


FIGURE 11 – TEB théorique et TEB simulé

4. La chaîne de référence est plus efficace en puissance que celle implantée. En effet le filtre de réception choisie pour la deuxième chaîne n'est pas adapté car  $h_r \neq \lambda h_e^*(t_0 - t)$  (avec  $h_e = h(t) \times h_c(t)$  et  $h_c(t)$  la réponse impulsionnelle du canal de transmission). Puisque, le canal de transmission est supposé AWGN, on a  $h_c(t) = \delta(t)$ , ainsi  $h_r(t)$  doit donc être le filtre adapté à  $h(t)$ , ce qui n'est pas le cas au niveau de la seconde chaîne contrairement à la chaîne de référence.

Cette plus grande efficacité en puissance se traduit graphiquement par :

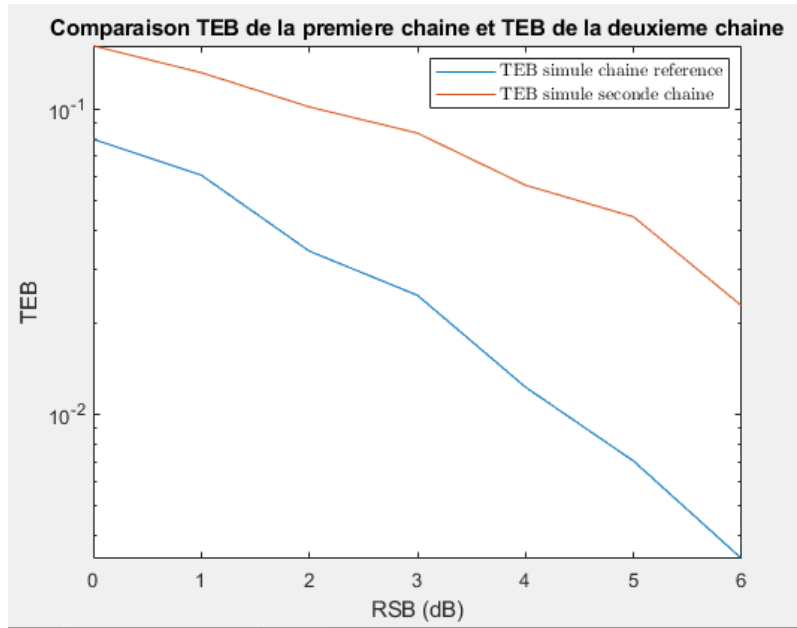


FIGURE 12 – TEB chaîne de référence et TEB deuxième chaîne

Pour obtenir un TEB de  $10^{-2}$ , on voit qu'il faut un  $RSB_{dB}$  de 4 pour la chaîne de référence, alors que pour la seconde chaîne le  $RSB_{dB}$  est supérieur à 6.

5. Les deux chaînes ont la même efficacité spectrale car elles ont le même filtre de mise en forme et le même débit symbole.

## 4 Impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée

### 4.1 Étude théorique

1. On veut vérifier le critère de Shannon :  $f_e > 2f_{\max}$ , où  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage et  $f_{\max}$  est la fréquence maximale du signal à échantillonner.  
Ici, on a

$$f_{\max} = \frac{1 + \alpha}{2T_s} \implies f_e > \frac{1 + \alpha}{T_s}$$

or, avec  $T_s = N_s T_e$ , on a

$$\boxed{\frac{1}{T_e} > \frac{1 + \alpha}{T_s} \iff \frac{T_s}{T_e} > 1 + \alpha \iff N_s > 1 + \alpha}$$

Le facteur de suréchantillonnage minimal à utiliser ici est donc  $1 + \alpha$ .

2. Etant donné que l'on a des filtres en racine de cosinus surélevé à l'émission et à la réception, avec un roll off  $\alpha$  identique, la fonction  $g$  est un cosinus surélevé de roll off  $\alpha$  identique également. La chaîne respecte donc le critère de Nyquist en  $t_0 = 0$ , car on a bien  $g(t_0) \neq 0$  et  $g(t_0 + kT_s) = 0$ .
3.  $h$  et  $h_r$  étant symétriques et centrés, on a bien  $h_r(t) \propto h_e^*(t_0 - t)$  (avec  $h_e = h(t) \times h_c(t)$  et  $h_c(t) = \delta(t)$ ) et la chaîne respecte le critère de filtrage adapté.
4. Etant donné que l'on se trouve dans le cas binaire et la chaîne respecte les critères de Nyquist et de filtrage adapté, on est dans le même cas que la chaîne de la partie 2 et on a alors

$$\boxed{\text{TEB} = Q \left( \sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}} \right)}$$

5. On veut  $f_{\max} < BW$ , d'où

$$BW > \frac{1 + \alpha}{2T_s} \iff 1500 > \frac{1.5}{2T_s} \iff R_s = \frac{1}{T_s} < 2000$$

On pourra donc transmettre le signal généré dans un canal de transmission idéal à bande limitée de bande 1500 Hz si le débit est inférieur à 2000 symboles par secondes.

### 4.2 Implantation sous Matlab

2. (a) Le tracé obtenu est conforme avec celui obtenu en théorie.

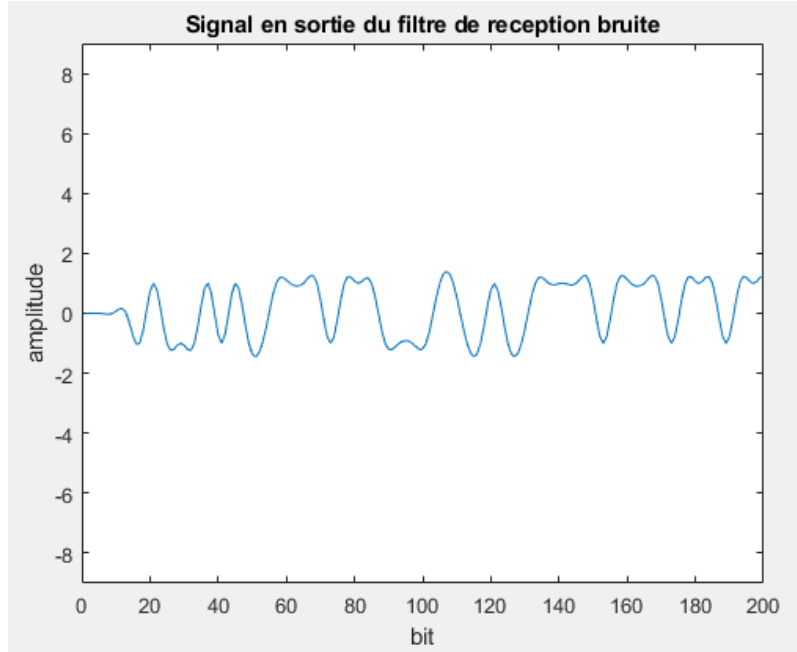


FIGURE 13 – Signal en sortie du filtre de réception.

- (b) Le diagramme de l'oeil observé nous montre bien que pour vérifier le critère de Nyquist il faut prendre  $t_0 = 0$ . Cependant, pour une implantation pratique, les filtres sont causaux donc on doit prendre  $t_0 = \text{length}(h_r)$ .

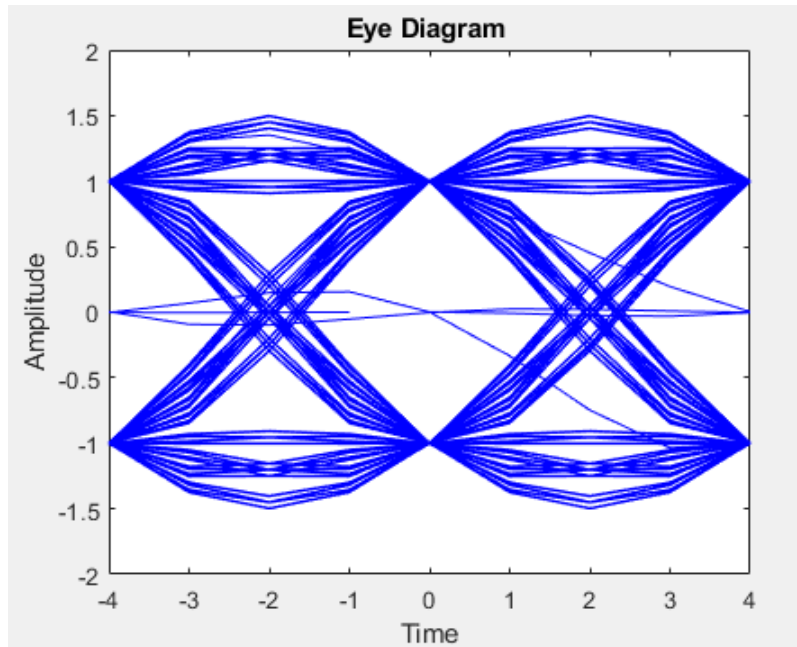


FIGURE 14 – Diagramme de l'oeil

- (c) En prenant en compte le retard introduit par les filtres de transmission, on observe bien que le

TEB est nul. La prise de décision se faisant selon la règle suivante :

$$\begin{cases} z > 0 \rightarrow \tilde{a}_m = +1 \\ z < 0 \rightarrow \tilde{a}_m = -1 \end{cases}$$

3. L'ajout du bruit dans le signal transmis provoque une diminution du  $\text{RSB}_{\text{dB}}$  et une augmentation du TEB.
4. Les tracés théorique et simulé se superposent, d'où la validation de la chaîne étudiée.

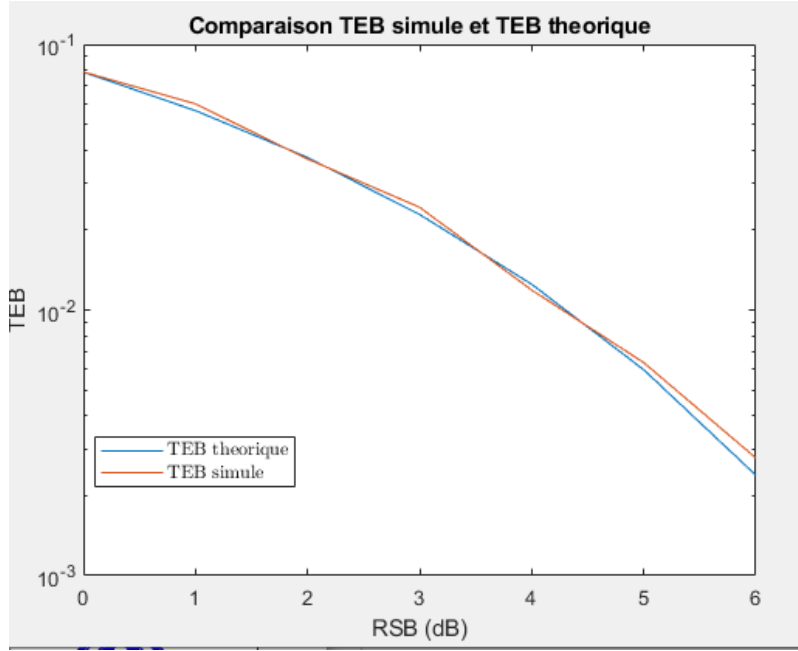


FIGURE 15 – TEB théorique et TEB simulé

5. On constate avec la simulation que les deux chaînes ont la même efficacité en puissance. Cela est dû au fait que les deux chaînes sont à filtrage adapté, respectent le critère de Nyquist et leurs symboles sont binaires.

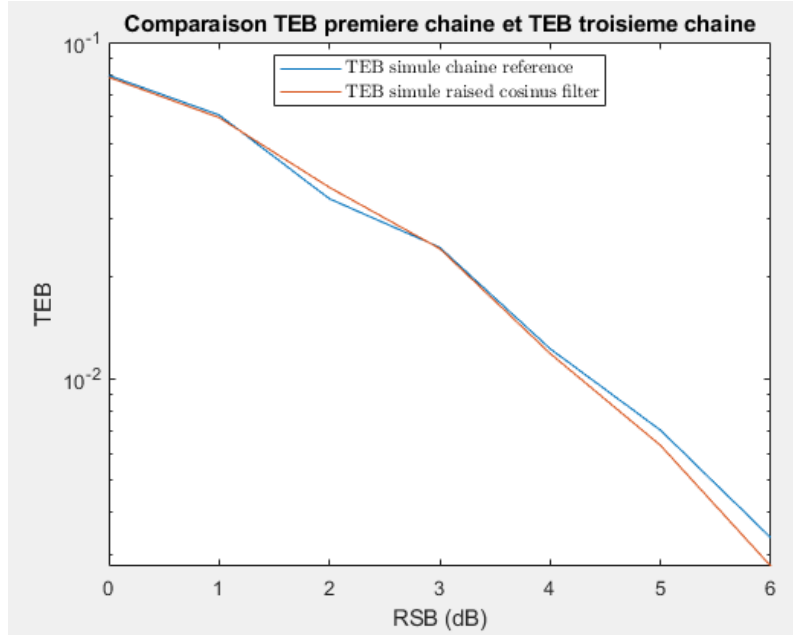


FIGURE 16 – TEB premier chaîne et TEB troisième chaîne

6. L'efficacité spectrale du racine de cosinus surélevé est meilleur que celle de la chaîne de référence car la bande de fréquence qu'elle occupe est finie alors que celle occupée par la chaîne de référence est infinie.

En effet, on a :

$$\text{Efficacité} = R_b / \text{Bande}$$

or

$$\text{Bande}(\text{Troisième Chaîne}) < \text{Bande}(\text{Chaîne de référence})$$

Donc la troisième chaîne à une plus grande efficacité spectrale.



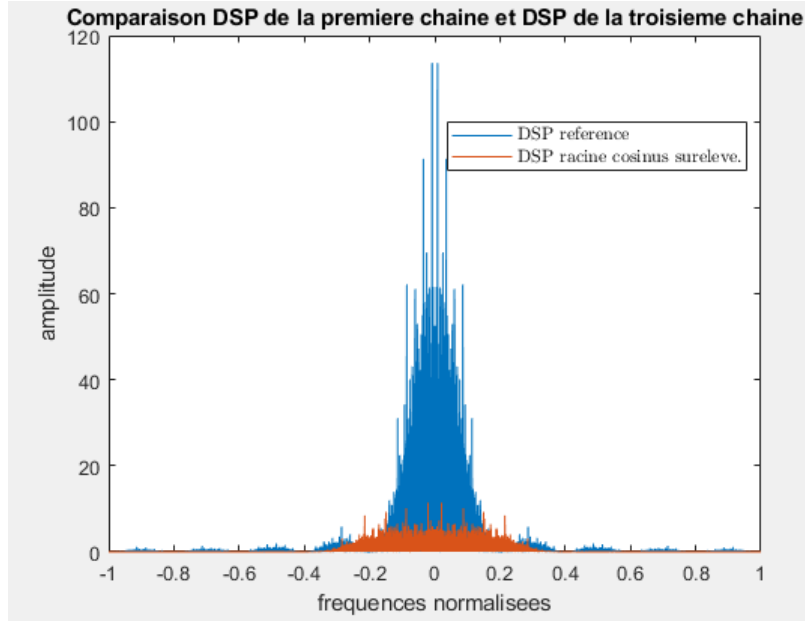


FIGURE 17 – DSP premier chaîne et DSP troisième chaîne

7. (a) Dans le cas de la largeur de bande  $BW = 1500$  Hz, on remarque le diagramme de l'oeil est bruité. Cela est dû au fait qu'il y a des pertes d'informations dans le signal transmis. En effet, la bande de fréquence du signal est de :

$$\begin{aligned}
 \text{BandeSignal} &= \frac{1 + \alpha}{2T_s} \\
 &= \frac{(1 + \alpha)R_s}{2} \\
 &= 2250 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

alors que le filtre ne laisse pas passer les fréquences au delà de 1500 Hz. Donc on observe bien une perte d'information.

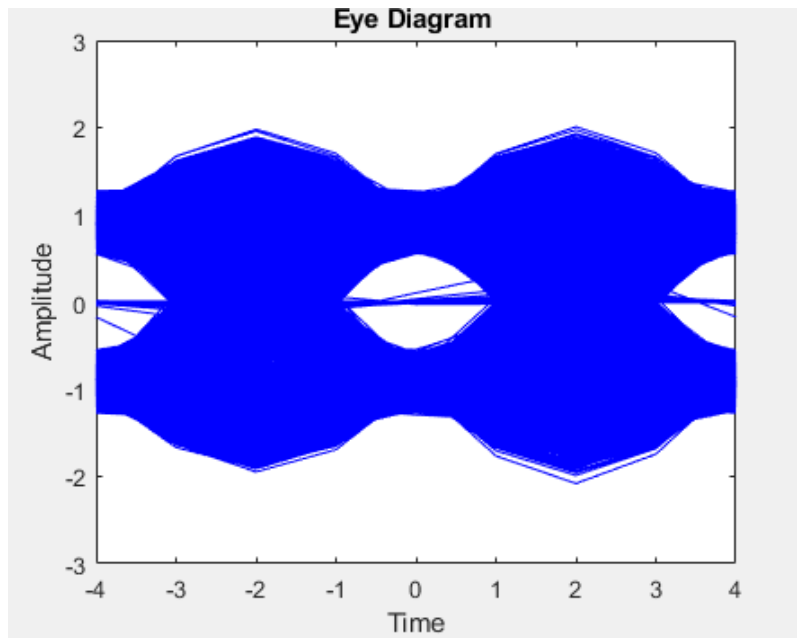


FIGURE 18 – Diagramme de l'oeil pour un canal de 1500

- (b) Pour un canal de bande  $BW = 3000Hz$ , le diagramme de l'oeil ne présente aucun bruit et est similaire à celui obtenue sans passage dans le canal. En effet, dans ce cas il n'y a pas eu de perte d'information car  $BW > BandeSignal$ .

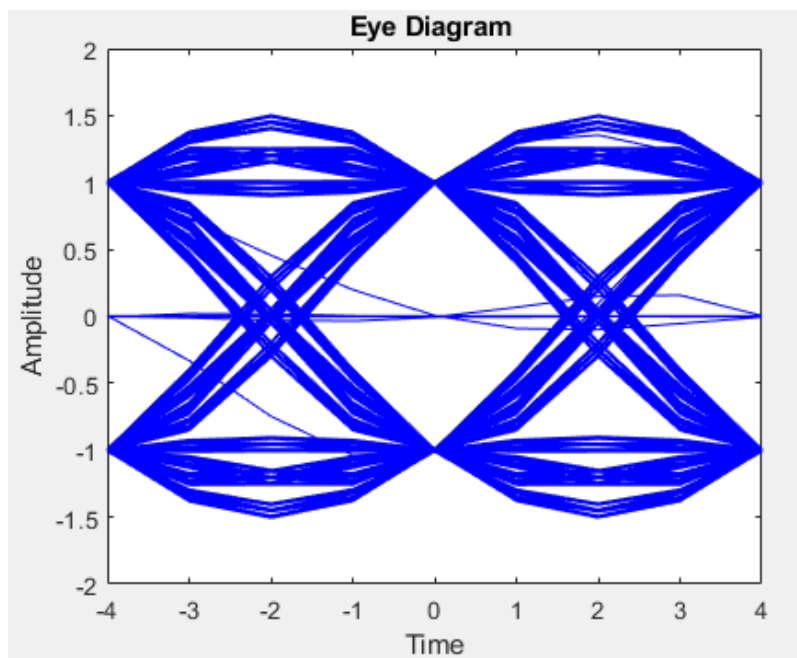


FIGURE 19 – Diagramme de l'oeil pour un canal de 3000

## 5 Impact du choix du mapping

### 5.1 Étude théorique

1.  $g$  est ici une fonction triangle centrée en  $T_s$ . On remarque sur le tracé de  $g$  que pour  $t_0 = T_s$ , on a bien  $g(t_0) \neq 0$  et  $g(t_0 + kT_s) = 0$ , donc la chaîne peut vérifier le critère de Nyquist en prenant cette valeur de  $t_0$ .  $t_0 = T_s$  est alors un instant optimal pour démarrer l'échantillonnage.
2. On a l'amplitude du signal aux moments d'échantillonnage :

$$z_m = z(t_0 + mT_s) = g(t_0) a_m + w_m$$

C'est toujours la même valeur que pour les chaînes précédentes en raison du respect du critère de Nyquist.

On cherche un seuil de décision pour  $z_m$  tel qu'on choisisse  $\tilde{a}_m$  avec  $\mathbb{P}(\tilde{a}_m|z_m)$  soit maximale. Cela revient à nouveau à chercher  $\tilde{a}_m$  qui maximise  $p(z_m|\tilde{a}_m)$  dans notre cas puisque les symboles sont équiprobables. On a :

$$p(z_m|\tilde{a}_m) \propto \exp - \frac{(z_m - g(t_0)\tilde{a}_m)^2}{2\sigma^2}$$

On décidera  $\tilde{a}_m = +3$  quand

$$\begin{aligned} & \begin{cases} p(z_m|+3) > p(z_m|+1) \\ p(z_m|+3) > p(z_m|-1) \\ p(z_m|+3) > p(z_m|-3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \log \frac{p(z_m|+3)}{p(z_m|+1)} = -(z_m - 3g(t_0))^2 + (z_m - g(t_0))^2 = 4z_m - 8g(t_0) > 0 \\ \log \frac{p(z_m|+3)}{p(z_m|-1)} = -(z_m - 3g(t_0))^2 + (z_m + g(t_0))^2 = 8z_m - 8g(t_0) > 0 \\ \log \frac{p(z_m|+3)}{p(z_m|-3)} = -(z_m - 3g(t_0))^2 + (z_m + 3g(t_0))^2 = 12z_m > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z_m > 2g(t_0) = 2T_s \\ z_m > 1g(t_0) = T_s \\ z_m > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & z_m > 2T_s \end{aligned}$$

De même, on décidera  $\tilde{a}_m = +1$  quand

$$\begin{aligned} & \begin{cases} p(z_m|+1) > p(z_m|+3) \\ p(z_m|+1) > p(z_m|-1) \\ p(z_m|+1) > p(z_m|-3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \log \frac{p(z_m|+1)}{p(z_m|+3)} = -(z_m - g(t_0))^2 + (z_m - 3g(t_0))^2 = 8g(t_0) - 4z_m > 0 \\ \log \frac{p(z_m|+1)}{p(z_m|-1)} = -(z_m - g(t_0))^2 + (z_m + g(t_0))^2 = 4z_m > 0 \\ \log \frac{p(z_m|+1)}{p(z_m|-3)} = -(z_m - 1g(t_0))^2 + (z_m + 3g(t_0))^2 = 8z_m g(t_0) + 8g(t_0)^2 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z_m < 2g(t_0) = 2T_s \\ z_m > 0 \\ z_m > -g(t_0) = T_s \end{cases} \\ \Leftrightarrow & 0 < z_m < 2T_s \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement pour  $\tilde{a}_m = -1$  et  $\tilde{a}_m = -3$  On a donc la règle de décision :

$$\begin{cases} z > 2T_s \rightarrow \tilde{a}_m = +3 \\ 0 < z < 2T_s \rightarrow \tilde{a}_m = +1 \\ -2T_s < z < 0 \rightarrow \tilde{a}_m = -1 \\ z < -2T_s \rightarrow \tilde{a}_m = -3 \end{cases}$$

3. (a) On détectera le signal  $-1$  si  $-2T_s < z_m < 0$ , d'où la probabilité de détecter  $-1$  alors que l'on a émis  $-3$  :

$$\begin{aligned}
p(-2T_s < z_m < 0 | \tilde{a}_m = -3) &= \int_{-2T_s}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp - \frac{(z_m + 3g(t_0))^2}{2\sigma^2} dz_m \\
&= \int_{-2T_s + 3g(t_0)}^{3g(t_0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp - \frac{z_m^2}{2\sigma^2} dz_m \\
&= \int_{\frac{g(t_0)}{\sigma}}^{\frac{3g(t_0)}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{z_m^2}{2} dz_m \\
&= Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{3g(t_0)}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{p(-2T_s < z_m < 0 | \tilde{a}_m = -3) = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{3g(t_0)}{\sigma}\right)}$$

- (b) On détectera le signal  $+1$  si  $0 < z_m < 2T_s$ , d'où la probabilité de détecter  $+1$  alors que l'on a émis  $-3$  :

$$\begin{aligned}
p(0 < z_m < 2T_s | \tilde{a}_m = -3) &= \int_0^{2T_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp - \frac{(z_m + 3g(t_0))^2}{2\sigma^2} dz_m \\
\dots &= Q\left(\frac{3g(t_0)}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{5g(t_0)}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{p(0 < z_m < 2T_s | \tilde{a}_m = -3) = Q\left(\frac{3g(t_0)}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{5g(t_0)}{\sigma}\right)}$$

- (c) On détectera le signal  $+3$  si  $2T_s < z_m$ , d'où la probabilité de détecter  $+3$  alors que l'on a émis  $-3$  :

$$\begin{aligned}
p(2T_s < z_m | \tilde{a}_m = -3) &= \int_{2T_s}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp - \frac{(z_m + 3g(t_0))^2}{2\sigma^2} dz_m \\
\dots &= Q\left(\frac{5g(t_0)}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{p(2T_s < z_m | \tilde{a}_m = -3) = Q\left(\frac{5g(t_0)}{\sigma}\right)}$$

- (d) On a :

$$\begin{aligned}
R_b &= 2R_s = \frac{2}{T_s} \iff T_s = g(t_0) = \frac{2}{R_b} \\
\sigma^2 &= \Re_{b_r}(0) = \int_{\mathbb{R}} s_{b_r}(f) df = \int_{\mathbb{R}} |H_r(f)|^2 s_b(f) df = \int_{\mathbb{R}} \frac{N_0}{2} |H_r(f)|^2 df \\
&= \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |h_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} T_s \iff \sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2} g(t_0)}
\end{aligned}$$

— Détecter -1 alors que l'on a émis -3 :

$$p(-2T_s < z_m < 0 | \tilde{a}_m = -3) = Q\left(\frac{2}{\sqrt{R_b N_0}}\right) - Q\left(\frac{6}{\sqrt{R_b N_0}}\right) = 0,0228$$

— Détecter +1 alors que l'on a émis -3 :

$$p(0 < z_m < 2T_s | \tilde{a}_m = -3) = Q\left(\frac{6}{\sqrt{R_b N_0}}\right) - Q\left(\frac{10}{\sqrt{R_b N_0}}\right) = 9,8659.10^{-10}$$

— Détecter +3 alors que l'on a émis -3 :

$$p(2T_s < z_m | \tilde{a}_m = -3) = Q\left(\frac{10}{\sqrt{R_b N_0}}\right) = 7,6199.10^{-24}$$

- (e) Cette règle de codage pour le mapping est intéressante. En effet, les zones de décisions adjacentes correspondent à une paire de bits dont un seul des bits diffère. Ainsi, en cas d'erreur dans la prise de décision, la paire de bits transmise ne devrait jamais complètement différer de la paire souhaitée, les probabilités que l'on se trompe avec une zone non adjacente, et donc que les deux bits changent, étant très faible.
- (f) Le mapping de gray conduit au fait que le nombre de symboles erronés est quasiment égal au nombre de bits erronés. En effet, on a vu que les probabilités qu'une erreur symbole conduise à une erreur de deux bits est hautement improbable. Or une modulation 4 états fait qu'on obtient 2 fois plus de bits que de symboles transmis. Donc si le nombre d'erreurs est le même, on a :

$$TEB = \frac{TES}{2}$$

## 5.2 Implantation sous Matlab

1. (a) Le tracés du signal en sortie du filtre d'émission est en adéquation avec la théorie aussi bien que sa densité spectrale.

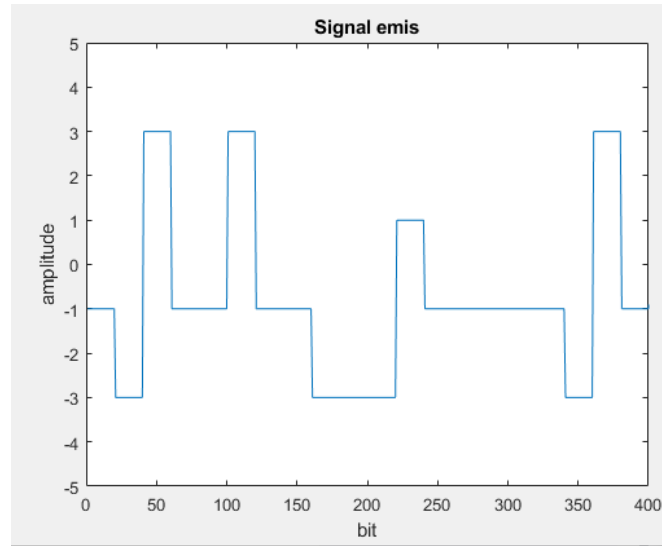


FIGURE 20 – Signal en sortie du filtre d'émission

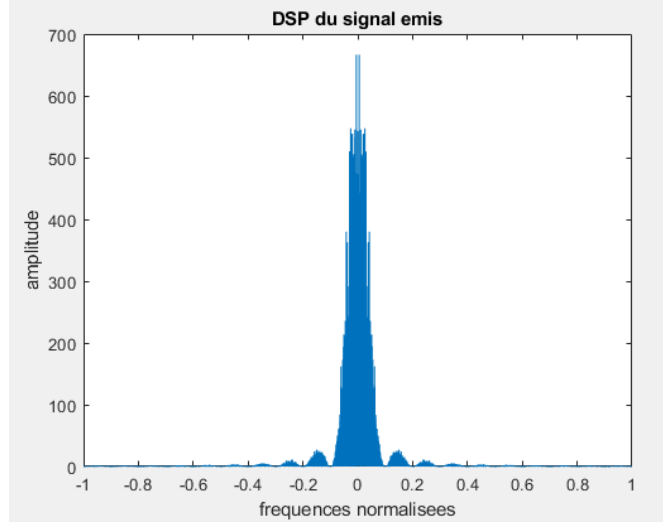


FIGURE 21 – Densité Spectrale

- (b) En superposant les densités spectrales de la chaîne de référence et de la quatrième chaîne, on observe que la quatrième chaîne est plus efficace en puissance que celle de référence. En effet, pour un même débit binaire on a pour la chaîne de référence que  $R_s = R_b$ , alors que pour la quatrième chaîne on a  $R_s = R_b/2$ . De plus on sait que :

$$\text{Efficacité} = R_b / \text{Bande}$$

Or  $\text{Bande} = k \times R_s$ , avec  $k$  le coefficient de proportionnalité du filtre de mise en forme. Or les deux chaînes ont le même filtre de mise en forme donc ils ont le même coefficient de proportionnalité. Ainsi on a,  $\text{Bande}(\text{Chaîne de référence}) = k \times R_s$  et  $\text{Bande}(\text{Quatrième chaîne}) = k \times R_s/2$ . D'où  $\text{Bande}(\text{Chaîne de référence}) > \text{Bande}(\text{Quatrième chaîne})$  et donc :

$$\boxed{\text{Efficacité}(\text{Chaîne de référence}) < \text{Efficacité}(\text{Quatrième chaîne})}$$

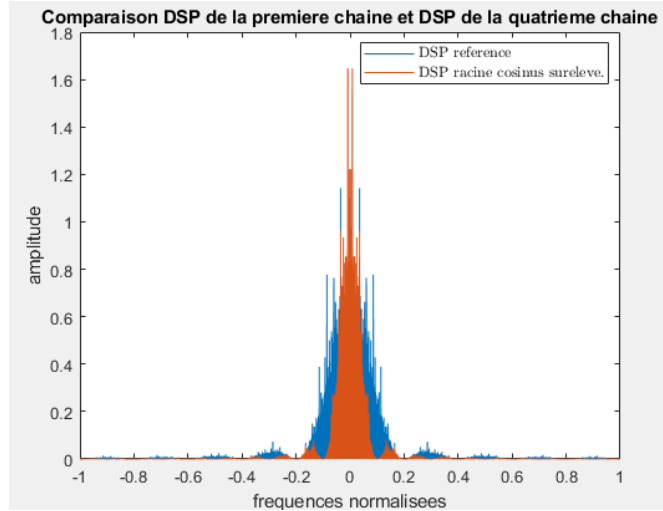


FIGURE 22 – Comparaison densité spectrale chaîne de référence et Quatrième chaîne

(c) On observe avec le diagramme de l'oeil que l'instant optimal d'échantillonnage est bien  $t_0 = T_s$ .

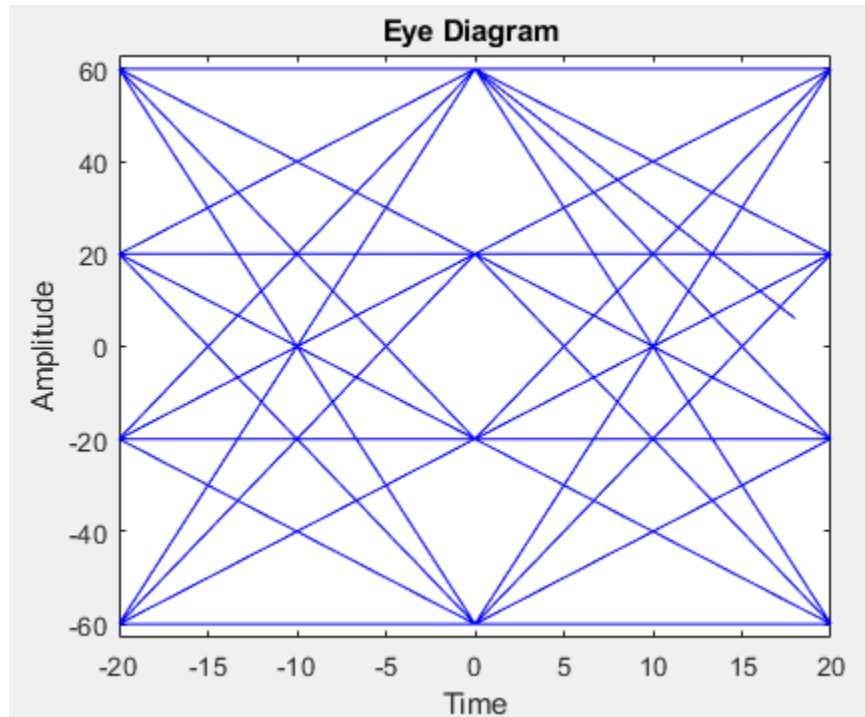


FIGURE 23 – Diagramme de l'oeil

- (d) En utilisant le détecteur à seuil théorique on observe bien un TEB nul.
- 2. Le rajout du bruit entraîne une baisse du TES.
- 3. Le tracé du TES théorique et du TES simulé montre deux courbes qui se superposent. En effet, le respect du Critère de Nyquist et du fait que le filtre de réception soit adapté garantissent un TES minimal.

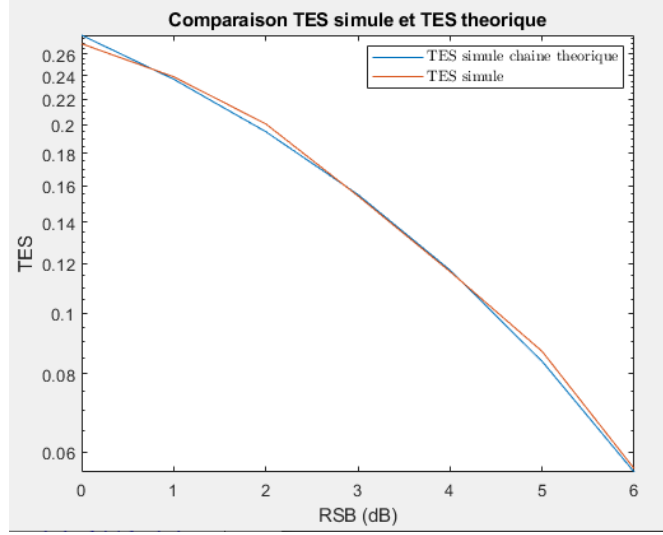


FIGURE 24 – TES

4. Voir implantation Matlab.
5. On constate que les TEB obtenus en théorie pour différentes valeurs de  $RSB_{dB}$  sont inférieurs à ceux obtenus en pratique. En effet, cela est dû à la différence de mapping entre la partie théorique et l'implantation pratique. Dans la partie théorique, le mapping de Gray utilisé fait que deux symboles voisins n'ont qu'un seul bit différent, ainsi si il y a une erreur sur un symbole, c'est qu'il y a eu une erreur sur un seul bit, tandis que dans la partie pratique, on a utilisé un mapping naturel dans lequel deux symboles voisins ont 2 bits différents ainsi la probabilité d'erreur est plus grande.

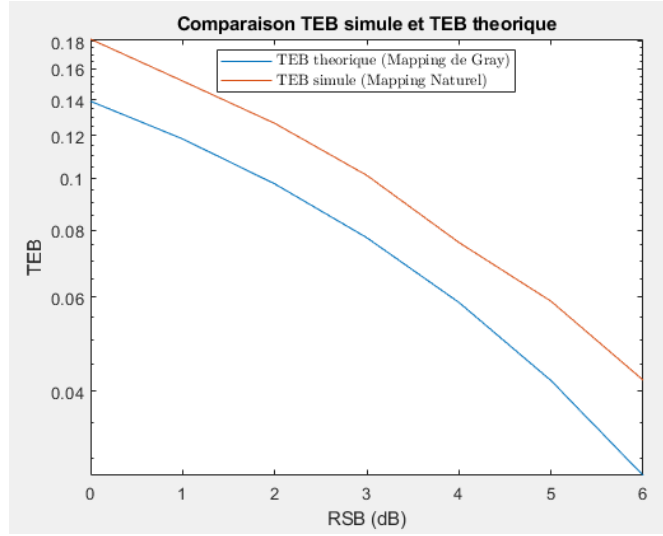


FIGURE 25 – TEB théorique (Mapping de Gray) et TEB simulé(Mapping Naturel)



## Conclusion

L'étude de ces différents chaînes de transmission nous à permis de constater l'importance du respect du critère de Nyquist, d'avoir un filtre adapté pour filtre de réception mais aussi d'avoir une bonne politique de prise de décision. En effet, on constate avec la deuxième chaîne que si le filtre de mise en forme n'est pas adéquat le TEB est plus grand. En outre, l'étude de la troisième chaîne montre que la prise comme filtre de mise en forme un racine de cosinus permettait d'avoir une meilleur efficacité spectrale. Et enfin, l'étude de la dernière chaîne montre l'importance de prendre un mapping adéquat (dans lequel le nombre de bits qui change d'un symbole à l'autre est moindre).