INSA Toulouse

Signal I

Table des matières

1 Introduction

Les signaux et les images numériques sont des suites de nombres que l'on peut interpréter comme des vecteurs dans des espaces de grande dimension.
Dans un grand nombre de problèmes de traitements de signaux et des images (reconstruction, débruitage, compression, segmentation, recalage ...) il est utile d'approcher ces objets (sons, images, vecteurs) par d'autres qui se décrivent avec un petit nombre de paramètres. Nous allons voir quel sens donner au mot *approcher*, comment on effectue ses approximations d'un point de vue pratique et comment on réalise les meilleures approximations possibles. Nous verrons que nous aurons besoin pour cela des notions d'espaces vectoriels, de changement de bases, de produit scalaire et de projection orthogonale.

2 Rappels d'algèbre et d'analyse

2.1 Espaces vectoriels normés

1. Espace vectoriel (réel et complexe).

   Définition 1. Espace vectoriel
   Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ un ensemble E muni d'une opération interne noté $+$ définie de $E \times E$ dans E et d'une loi extérieure définie de $K \times E$ dans E noté $\cdot$ tels

que

$$\forall (u,v) \in E^2\, u+v = v+u$$
$$\forall (u,v,w) \in E^3 u+(v+w) = (u+v)+w$$
$$\exists e \in E \text{ tel que } \forall u \in E,\, u+e = u, \text{ appelé élément neutre et noté } e = 0.$$
$$\forall u \in E, \exists v \in E \text{ tel que } u+v = 0.$$
$$\forall u \in E,\, 1\cdot u = u$$
$$\forall (\alpha,\beta,u)\, \alpha\cdot(\beta\cdot u) = (\alpha\beta)u$$
$$\forall (\alpha,\beta,u)\, (\alpha+\beta)\cdot u = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$$
$$\forall (\alpha,u,v)\, \alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u+\alpha\cdot v.$$

les éléments de E sont appelés des vecteurs.

Exemples : Exemples classiques + espaces de fonctions variés, suites solutions d'équations de récurrence

2. Sous-espace vectoriel, espace vectoriel engendré.

Définition 2. Sous-espace vectoriel
Soit F un sous ensemble de E $\mathbb{K}-$espace vectoriel tel que

$$\forall (\alpha,\beta,u,v) \in \mathbb{K}^2\times F^2, \qquad \alpha\cdot u+\beta\cdot v \in F.$$

F est appelé sous-espace vectoriel de E. C'est un espace vectoriel.

Exemples.

Définition 3. Espace vectoriel engendré
Soit $(u_i)_{i\leqslant n}$ un ensemble fini d'éléments de E, on appelle espace vectoriel engendré par les $(u_i)_{i\leqslant n}$ l'ensemble suivant :

$$Vect((u_i)_{i\leqslant n}) = \{v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i,\, (\lambda_i) \in \mathbb{K}^n\}$$

Exemples

3. Famille libre

Définition 4. Famille libre
Soit $(u_i)_{i\leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que la famille $(u_i)_{i\leqslant n}$ est libre si

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \leqslant n\, \lambda_i = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Remarque : On dit qu'une famille infinie $(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toute sous famille finie de $(u_i)_{i\in I}$ est libre.
Exemples.

4. Famille génératrice (dimension finie et infinie).

Définition 5. Famille génératrice
Soit F un espace vectoriel et $(u_i)_{i\leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de F. On dit que la famille $(u_i)_{i\leqslant n}$ engendre l'espace F ou est génératice de F si tout élément de F est une combinaison linéaire des vecteurs $(u_i)_{i\in I}$ ie

$$\forall v \in F,\, \exists (\lambda_i)_{i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n \text{ tels que } v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

Remarque : Le caractère libre ou générateur dépend du corps que l'on considère (exemples). Si le cadre est bien posé, il n'y a pas d'ambiguité.

Exemples.

5. Base d'un espace vectoriel.

Définition 6. Base (algébrique)
On dit qu'une famille finie $(u_i)_{i\leqslant n}$ est une base d'un espace vectoriel F si la famille $(u_i)_{i\leqslant n}$ est libre et engendre F.

Remarque : On dit qu'une famille **infinie** $(u_i)_{i\in I}$ est une base algébrique d'un espace vectoriel F si elle est libre (au sens ou toute sous-famille finie est libre) et si tout vecteur de F peut s'exprimer comme combinaison linéaire **finie** des vecteurs $(u_i)_{i\in I}$.

Exemples et contre exemples variés (polynômes et séries entières sur $[0,1]$)

6. Dimension d'un espace vectoriel.

Définition 7. Dimension
Soit F un espace vectoriel et $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n vecteurs formant une base de F. On appelle n la dimension de F.

Remarque : La définition ne dépend pas de la base choisie : toutes les bases d'un même espace vectoriel ont ainsi le même cardinal.

Remarque : Si n est la dimension de F, toute famille de F ayant sctrictement plus de n vecteurs est nécessairment liée. Réciproquement, toute famille ayant strictement moins de n vecteurs ne peut pas être génératrice de F.

Remarque : Il peut exister une famille infinie et libre, dans ce cas on dit que l'espace F est de dimension infinie. Dans ce cas, il n'existe aucune base de cardinal fini.

Remarque : Nous verrons plus tard le concept de base hilbertienne qui ne sera pas une base au sens ci dessus.

Exemples.

7. Changements de bases.

Définition 8. Changement de bases
Soit F un espace vectoriel de dimension finie n et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ deux bases de F. On appelle changement de bases l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \end{array}$$

Remarque : Un changement de base envoie chaque élément de la première base sur un élément de la seconde base.

Remarque : A tout changement de bases correspond un changement de bases inverse.

Exemple : Changements de bases simples sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, Transformée de Fourier discrète, DCT à la base de Jpeg

8. Norme.

Définition 9. Norme
On appelle norme sur un espace vectoriel E toute application $\|\cdot\|$ définie de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\begin{array}{l} \forall (u,v)\in E^2,\ \|u+v\| \leqslant \|u\|+\|v\| \ \textit{inégalité triangulaire} \\ \forall (u,\lambda)\in E\times\mathbb{K},\ \|\lambda\cdot u\| = |\lambda|\,\|u\| \\ \|u\| = 0 \Longrightarrow u = 0. \end{array}$$

Exemples

Remarque On peut munir un espace vectoriel de plusieurs normes.

Remarque On appelle le couple $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Remarque A partir d'une norme on peut définir une distance par $d(u,v) = \|u-v\|$.
Une norme permet ainsi de mesure la distance ou la proximité de deux éléments de E.

Remarque Une norme peut être issue d'un produit scalaire mais pas nécessairement.

Exemples : Mentionner $\mathbb{R}^n$ muni des normes ℓ^p, avec $p = 1, 2, +\infty$, les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ et $\ell^p(\mathbb{Z})$ mais aussi $C^0([0,1])$ muni de la norme du sup et les espaces L^p détaillés en dessous.

2.2 Rappels d'analyse, Espaces L^p

1. Définitions

Définition 10. Boules, Ouverts-Fermés
Soit E un espace vectoriel normé et A un sous ensemble de E.
— *On appelle boule ouverte centrée en $x \in E$ de rayon r l'ensemble $\mathscr{B}(x,r)$ des éléments y de E tels que $\|x-y\| < r$.*
— *On dit que A est un ouvert de E si pour tout point x de A, il existe $r > 0$ telle que $\mathscr{B}(x,r) \subset A$.*
— *On dit que A est fermé si son complémentaire dans E est ouvert.*

Exemple

Définition 11. Ensemble convexe
On dit qu'un ensemble A est convexe si $\forall (x,y) \in A$ et $\forall t \in (0,1)$, $tx + (1-t)y \in A$.

Exemples et contre-exemples.

Proposition 1. Ensembles fermés et projection
Soit E un espace vectoriel normé et A un fermé de E
— *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge dans E alors elle converge dans A.*
— *Si x est un élément de E alors il existe au moins un élément de A qui réalise le minimum de $\inf_{u\in E} \|u-x\|$ c'est à dire qu'il existe $p \in A$ tel que $\inf_{u\in E} \|u-x\| = \|x-p\|$.*

Remarque : Un minimiseur s'il existe peut ne pas être unique. S'il l'est un parle de projection de x sur A.
Exemples et contre-exemples : On ne peut pas projeter sur un ouvert ou sur un ensemble non convexe.
Remarque : On verra plus tard que si la norme est hilbertienne, la projection sur un convexe fermé est toujours définie.

Définition 12. Espaces $L^p(\Omega)$
Soit Ω un intervalle de $\mathbb{R}$, (éventuellement $\mathbb{R}$ tout entier), et p un réel supérieur ou égal à 1. On définit l'ensemble $L^p(\Omega)$ des fonctions définies de Ω dans $\mathbb{K}$ telle que $\int_{x\in\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty$

Proposition 2. *$L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et l'application*

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \left(\int_{x\in\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

définit une norme sur $L^p(\Omega)$. Ainsi $L^p(\Omega)$ munie de sa norme naturelle est un espace vectoriel normé.

Exemples : différents choix de Ω et de p et différentes fonctions qui appartiennent aux différents $L^p(\Omega)$

Définition 13. Espaces $L^\infty(\Omega)$
Soit Ω un intervalle de $\mathbb{R}$, on définit $L^\infty(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions f telles que $\sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)| < +\infty$, pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$. De plus la fonction qui à f associe $\sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)|$ est une norme sur $L^p(\Omega)$

2. Propriétés

   Proposition 3. *Les espaces $L^p(\Omega)$ sont complets (toute suite de Cauchy converge).*

3. Densité

   Proposition 4. *Pour tout intervalle Ω et pour tout $p < +\infty$, l'ensemble des fonctions continues sur Ω est dense dans $L^p(\Omega)$. C'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ il existe une fonction continue g telle que $\|f-g\|_p \leqslant \varepsilon$.*

   Autrement dit, si $p < +\infty$, quelque soit Ω, toute fonction de $L^p(\Omega)$ peut être approchée d'aussi près qu'on le veut au sens de la norme $\|\cdot\|_p$ par une fonction continue.
   Remarque : Les fonctions continues à support compact (nulle en dehors d'un intervalle $[-M,M]$) sont également denses dans $L^p(\Omega)$

3 Espaces de Hilbert

3.1 Introduction

Sur des exemples simples, un point et une droite dans l'espace, un point et un plan dans l'espace, un point et un convexe dans le plan, on voit que la notion de distance (euclidienne) d'un point à un ensemble est liée à une notion d'orthogonalité. La notion de produit scalaire et d'orthogonalité est en effet un concept assez palpable en dimension 2 et 3 que l'on peut formaliser et généraliser à des espaces beaucoup plus variés.

3.2 Espaces de Hilbert

1. Produit scalaire (réel et complexe).

   Définition 14. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle produit scalaire une forme bilinéaire symétrique définie positive. C'est à dire une application φ définie de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions suivantes :*

   (a) Pour tout $(x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) \in \mathbb{R}$. (Forme)
   (b) Pour tout $y \in E$, l'application φ_y^1 définie de E dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_y^1(x) = \varphi(x,y)$ est linéaire. (Linéaire par rapport à la première variable)
   (c) Pour tout $z \in E$, l'application φ_z^2 définie de E dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_z^2(x) = \varphi(z,x)$ est linéaire. (Linéaire par rapport à la deuxième variable)
   (d) Pour tout $(x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$. (Symétrique)
   (e) Si $\varphi(x,x) = 0$ alors $x = 0$. (Définie)
   (f) Pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) \geqslant 0$. (Positive)

   Exemples :
   — $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel.
   — $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ munis d'un produit scalaire modifié par exemple sur $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$

— Sur l'ensemble des fonctions continues et définies $[0,1]$ on peut définir

$$\varphi(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

ou

$$\varphi(f,g)=\int_0^1 tf(t)g(t)dt.$$

— Sur l'ensemble des polynômes :

$$\varphi(P,Q)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt.$$

Remarque : On notera souvent $\varphi(x,y)=\langle x,y\rangle$.
Dans le cas complexe, reprendre la même définition pose problème.
On peut proposer une définition similaire pour les espaces vectoriels complexes :

Définition 15. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On appelle produit scalaire une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive. C'est à dire une application φ définie de $E\times E$ dans $\mathbb{C}$ et vérifiant les conditions suivantes :*

(a) Pour tout $(x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)\in\mathbb{C}$. (Forme)

(b) Pour tout $y\in E$, l'application φ_y^1 définie de E dans $\mathbb{C}$ par $\varphi_y^1(x)=\varphi(x,y)$ est linéaire. (Linéaire par rapport à la première variable)

(c) Pour tout $z\in E$, l'application φ_z^2 définie de E dans $\mathbb{C}$ par $\varphi_z^2(x)=\varphi(z,x)$ est anti-linéaire. (Anti-linéaire par rapport à la deuxième variable)
C'est à dire que $\varphi_z^2(\lambda x)=\bar{\lambda}\varphi_z^2(x)$.

(d) Pour tout $(x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$. (Symétrie hermitienne)

(e) Si $\varphi(x,x)=0$ alors $x=0$. (Définie)

(f) Pour tout $x\in E$, $\varphi(x,x)\geqslant 0$. (Positive)

Exemples :

(a) Produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}^3$

(b) Sur l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques :

$$\varphi(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Remarque : Par rapport à un produit scalaire réel, on *ajoute* essentiellement une conjugaison sur les termes issues de la deuxième variable.

2. Norme issue d'un produit scalaire.

Définition 16. *Norme hibertienne, Espaces pré-hilbertiens et euclidiens*
Soit E un espace vectoriel et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire défini sur E. L'application N définie par

$$N:\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \sqrt{\langle x,x\rangle}\end{array}$$

définie une norme sur E. Cette norme est dite hilbertienne ou euclidienne si l'espace E est de dimension finie.
On appelle espace pré-hilbertien un espace muni d'une norme hilbertienne ou euclidien s'il est de dimension finie. Si de plus l'espace est complet, il est dit hilbertien ou espace de Hilbert.

Exemple On reprend les exemples précédents, en particulier le produit scalaire non usuel sur $\mathbb{R}^2$, $\ell^2(\mathbb{N})$, $\ell^2(\mathbb{Z})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{T})$.
Remarque : toute norme ne provient pas d'un produit scalaire.

3. Propriétés d'une norme hilbertienne (CS, parallélogramme).

Proposition 5. Cauchy-Schwarz et égalité de parallélogramme.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ *un espace pré-hilbertien. La norme hilbertienne vérifie les deux relations suivantes :*

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad |\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\| \tag{CS}$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 \tag{EP}$$

Cette égalité est appelée égalité du parallélogramme, cette dernière caractérise une norme hilbertienne.

Remarque : On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz si les vecteurs sont colinéaires et égalité sans les valeurs absolues s'ils sont colinéaires et de même sens.
Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}^3$, dans l'espace des fonctions 2π-périodiques.

4. Orthogonalité.

Définition 17. Orthogonalité
On dit que deux vecteurs u et v de E sont orthogonaux si $\langle u,v\rangle = 0$. *On dit que deux sous espaces F et G sont orthogonaux si*

$$\forall x \in F \text{ et } \forall y \in G,\ \langle x,y\rangle = 0.$$

On note dans ce cas $F \perp G$.

Exemples.

5. Base orthonormée.

Définition 18. Base Orthonormée *Soit* $(e_i)_{i\leqslant n}$ *une base d'un espace vectoriel E euclidien.*
On dit que $(e_i)_{i\leqslant n}$ *forme une base orthonormée (ou BON) de E si*

(a) *Pour tout* $i \leqslant n$, $\|e_i\| = 1$.

(b) *Pour tout couple* (i,j), $j \neq i$, *les vecteurs* e_i *et* e_j *sont orthogonaux ie* $\langle e_i, e_j\rangle = 0$.

Remarque : Si une famille de vecteur ne vérifie que le second point on parle de système orthogonal, si c'est une base on parle de base orthogonale.
Remarque : le caractère orthonormé dépend du produit scalaire (exemples sur $\mathbb{R}^2$).
Exemples :
— Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$
— Dans $L^2(\mathbb{T})$,
— Cas de l'ensemble des fonctions f définies sur $[0,1]$ telles qu'il existe a et b réels tels que

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ b & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{1}$$

pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. On proposera deux bases orthonormées.
— Cas des polynômes orthogonaux pour le produit scalaire précédent. Déterminer une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

6. Projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert :

Théorème 1. *Soit E un espace de Hilbert et C un convexe fermé de E, il existe une unique application P_C appelée projection sur le convexe C qui à $x \in E$ associe l'unique vecteur $p \in E$ vérifiant*

$$\|x - p\| = \inf_{u \in C} \|x - u\| \tag{2}$$

On peut également caractériser p la projection de x sur C comme l'unique élément de C tel que

$$\langle x - p, u - p \rangle \leqslant 0 \quad \forall u \in C \tag{3}$$

Dessin

Démonstration :

(a) On utilise le Théorème des fermés emboîtés et l'inégalité du parallélogramme, pour démontrer l'existence et l'unicité du vecteur défini par (2).

(b) Pour démontrer que la seconde caractérisation (3) est équivalente à la première on procède en deux temps :

   i. On suppose que y est défini par (2), on considère $u \in C$, $\lambda \in]0,1[$ et on écrit que $\|x - p\|^2 \leqslant \|x - (\lambda u + (1 - \lambda)p)\|^2$.

   ii. On suppose que p est défini par (3) et on développe $\|x - u + u - p\|^2$.

Proposition 6. *Soit E un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel fermé de E, alors pour tout $x \in X$, la projection p de x sur F est l'unique vecteur $p \in F$ tel que $x - p$ est orthogonal à F.*

Démonstration :

— Si p est la projection de x sur F et v est un vecteur de F alors la fonction $\lambda \mapsto \langle x - p, \lambda v - p \rangle$ est affine et négative.

— Si $x - p$ est orthogonal à F alors pour tout $u \in F$, $\langle x - p, u - p \rangle = 0$.

7. Supplémentaire orthogonal

Définition 19. Supplémentaire orthogonal

Soit F un sous espace fermé d'un espace de Hilbert E. Il existe un unique sous-espace G de E tel que

$$F + G = E \text{ et } F \perp G \tag{4}$$

On dit que G est le supplémentaire orthogonal de F. Ainsi tout élément x de E s'écrit de manière unique de la forme $x = f + g$ avec $f \in F$, $g \in G$ et $\langle f, g \rangle = 0$.
On note $G = F^{\perp}$.

Démonstration :

On pose G l'orthogonal de F :

$$G := \{u \in E \text{ tels que } \forall x \in F,\ \langle x, u \rangle = 0\}$$

Par définition G est un espace vectoriel. On montre maintenant que tout élément de E s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
Soit p la projection de x sur F, on a $x = p + (x - p)$ où $p \in F$ par définition et $x - p \in G = F^{\perp}$ d'après la Proposition 6.
On a ainsi démontré l'existence d'un sous-espace G vérifiant les deux conditions (4).
Pour démontrer l'unicité on suppose qu'il en existe deux G_1 et G_2 et on note $x = p_1 + (x - p_1)$ et $x = p_2 + (x - p_2)$ deux décompositions associées. On observe alors que $p_1 - p_2 \in F$ et $x - p_2 - (x - p_1) = p_1 - p_2$ est orthogonal à F donc $p_1 = p_2$ et donc $G_1 = G_2$. On en déduit également l'unicité de la décomposition de x en tant que somme d'un élément de F et d'un élément de $F^{\perp}$ et le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Soit E un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel fermé de E, alors pour tout $x \in X$, la projection p de x sur F est l'unique vecteur $p \in F$ tel que $\langle x-p, p\rangle = 0$.*

Remarque : : En dimension finie, la dimension du supplémentaire de F dans E est égale à $n-k$ où n est la dimension de E et k la dimension de F.
Exemples

8. Base hilbertienne, Théorème de Pythagore.

Définition 20. Base hilbertienne
Soit E un espace de Hilbert, on appelle base hilbertienne une famille $(e_i)_{i\in I}$ orthonormée telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in E$ il existe une combinaison linéaire finie des $(e_i)_{i\in I}$ telle que

$$\left\| \sum_{i \leqslant n} \lambda_i e_i - x \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque : Dans la pratique I est soit un ensemble fini, soit $\mathbb{N}$ soit $\mathbb{Z}$.
Remarque : On dit que l'espace engendré par les $(e_i)_{i\in I}$ est dense dans E.
Remarque : On peut ainsi approcher tout élément de E aussi précisément que l'on souhaite par une combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$.
Remarque : Une base hilbertienne n'est pas nécessairement une base au sens algébrique.
Remarque : En dimension finie être une base hilbertienne est équivalent à être une base orthonormée.
Exemple

- Bases orthonormées en dimension finie.
- La base canonique dans $\ell_2(\mathbb{N})$.
- Les exponentielles complexes sur $L^2(\mathbb{T})$ ou sur les fonctions continues $2\pi-$périodiques (voir la suite).

Théorème 2. *Soit E un espace de Hilbert et F un sous espace de dimension finie de E et soit $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de F, la projection orthogonale $P_F(x)$ de $x \in E$ sur F s'écrit*

$$P_F(x) = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i \tag{5}$$

Démonstration. On note $p = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$ et on observe que $p \in F$ et pour tout $j \in I$,

$$\langle x-p, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = 0. \tag{6}$$

On en déduit que $x - p \perp F$ et on applique la proposition 6. $\square$

Théorème 3. Théorème de Pythagore
Soit E un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de E alors pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle e_i, x\rangle|^2 \tag{7}$$

Démonstration. Pour simplifier on fera l'hypothèse que $I = \mathbb{N}^*$ et on note F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et p_n la projection de x sur F_n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|x\|^2 = \|p_n\|^2 + \|x-p_n\|^2 \text{ et } \|p_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Ainsi

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x - p_n\|^2$$

Comme $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne le membre de droite tend vers 0 ce qui conclut la preuve. □

Exemple : $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et exemples à venir sur les fonctions périodiques et sur les fonctions définies par (1).

Théorème 4. Théorème de Riesz
Soit E un espace de Hilbert et Φ une forme linéaire continue définie sur E. Il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\Phi(x) = \langle u, x\rangle$.

Démonstration. Si ϕ est l'application nulle alors on peut choisir $u = 0$.
On fait désormais l'hypothèse que Φ n'est pas l'application nulle.
Soit $x_0 \in E$ tel que $\Phi(x_0) \neq 0$. Tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire sous la forme

$$x = \frac{\Phi(x)}{\Phi(x_0)} x_0 + (x - \frac{\Phi(x)}{\Phi(x_0)} x_0) \tag{8}$$

où $\frac{\Phi(x)}{\Phi(x_0)} x_0$ est un élément de $Vect(x_0)$ et où $(x - \frac{\Phi(x)}{\Phi(x_0)} x_0)$ est un élément du noyau de Φ. On en déduit que le noyau $Ker(\Phi)$ de Φ est un hyperplan de E, c'est à dire un sous-espace de E admettant un supplémentaire de dimension 1.
Soit x_1 un vecteur engendrant le supplémentaire orthogonal de $Ker(\Phi)$ tel que $\Phi(x_1) = 1$ et $x_2 = \frac{x_1}{\|x_1\|^2}$.
Pour tout $x \in E$ on définit $\Psi(x) = \langle x_2, x\rangle$.
Pour tout $x \in Ker(\Phi)$, $\Phi(x) = \Psi(x) = 0$ et $\Phi(x_1) = 1 = \Psi(x_1)$, donc Φ et Ψ coïncident sur E et sont donc égales.
Pour démontrer l'unicité on observe que si pour deux vecteurs u et v de E on a pour tout $x \in E$, $\langle u, x\rangle = \langle v, x\rangle$ alors $u - v$ est orthogonal à tout vecteur et est donc nul. □

Exemples.

3.3 Approximation

1. Approximation linéaire. Contrôle avec la décroissance des coefficients.

   Définition 21. Approximation linéaire
   Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de E et x un élément de E, on appelle approximation linéaire à N termes dans la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on note $S_N^l(x)$ la projection de x sur l'espace vectoriel de dimension N engendré par les $(e_k)_{k\leqslant N}$:

   $$S_N^l(x) = \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k$$

   Si la base $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est indicée sur les entiers relatifs $\mathbb{Z}$ on note $S_N^l(x)$ la projection sur l'espace vectoriel de dimension $2N+1$ par les $(e_k)_{-N\leqslant k\leqslant N}$:

   $$S_N^l(x) = \sum_{k=-N}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k$$

   On note ε_N^l l'erreur d'approximation linéaire associée :

   $$\varepsilon_N^l(x) = \left\| x - S_N^l(x) \right\|^2$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$, dans $\ell_2(\mathbb{N}^*)$ et $\ell_2(\mathbb{Z})$. Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire classique sur $[0,1]$.
Remarque : Plus l'erreur ε_N^l est faible, meilleure est l'approximation linéaire.
Remarque : D'après Pythagore on déduit que

$$\varepsilon_N^l(x) = \sum_{|k|>N} |\langle x, e_k\rangle|^2$$

Proposition 7. Décroissance de l'erreur d'approximation linéaire
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de E et x un élément de E, s'il existe $\alpha > \frac{1}{2}$ et C tel que pour tout $k \neq 0$ on ait $|\langle x, e_k\rangle| \leqslant \frac{C}{|k|^\alpha}$ alors

$$\varepsilon_N^l(x) = O\left(N^{1-2\alpha}\right) \tag{9}$$

Remarque : : On appelle cette approximation une approximation linéaire car l'application qui à x associe $S_N^l(x)$ est une application linéaire.
Remarque : : Plus les coefficients décroissent vite, plus l'erreur d'approximation linéaire décroît rapidement.
Remarque : : Une BON assurant une décroissance rapide des coefficients pour la classe de vecteurs x que l'on étudie sera particulièrement adaptée pour approcher les vecteurs de cette classe.
Remarque : Aucune base ne peut être adaptée à tous les vecteurs.
Remarque : Performances de Jpeg.
Exemple : Nous verrons plus loin l'application de ces résultats sur les fonctions k fois dérivables dans les bases d'exponentielles complexes.

2. Approximation non linéaire.

Définition 22. Approximation non linéaire
Soit $(e_n)_{n\in I}$ une base hilbertienne de E et x un élément de E. Pour $N \in \mathbb{N}$ on définit l'approximation non linéaire à N termes $S_N^n(x)$ de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$ par

$$S_N^n(x) = \sum_{k\in I_N}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k$$

où I_N désigne l'ensemble des indices des N plus grandes valeurs de $|\langle x, e_k\rangle|$. On note ε_N^n l'erreur d'approximation non linéaire associée :

$$\varepsilon_N^n(x) = \|x - S_N^n(x)\|^2 = \sum_{k\notin I_N} |\langle x, e_k\rangle|^2$$

Remarque : On qualifie cette approximation de non linéaire car l'application qui à x associe $S_N^n(x)$ n'est pas linéaire.
Remarque : D'après le Théorème de Pythagore on déduit que cette approximation est la meilleure possible à N termes dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

Proposition 8. Décroissance de l'erreur d'approximation non-linéaire
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de E et x un élément de E. Si on réordonne les coefficients $\langle x, e_k\rangle$ par ordre décroissant de valeur absolue et on note $c_k^*(x)$ la k-ième valeur de $|\langle x, e_k\rangle|$ dans cet ordre.
s'il existe $\alpha > \frac{1}{2}$ et C tel que pour tout $k \neq 0$ on ait $c_k^*(k) \leqslant \frac{C}{|k|^\alpha}$ alors

$$\varepsilon_N^n(x) = O\left(N^{1-2\alpha}\right) \tag{10}$$

4 Analyse de Fourier

4.1 Séries de Fourier de fonction périodiques définie sur $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$

1. Définitions.

Définition 23. Espace $L^2(\mathbb{T})$
Soit E l'espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

Cet espace muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt < +\infty$$

est un espace de Hilbert H. La norme associée est ainsi définie par

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$

De plus la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ des exponentielles complexes définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$e_k(x) = e^{ikx}$$

est une base hilbertienne de H.
On appelle coefficient de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{T})$ le produit scalaire

$$c_k(f) = \langle f, e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Remarque : Le fait que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée est simple à démontrer. Pour démontrer que l'espace vectoriel engendré par les $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ il faut montrer que toute fonction continue peut être approchée aussi près que l'on veut par un polynôme trigonométrique.
Remarque : Les fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux appartiennent bien entendu à cet espace.
Démonstration Par les sommes de Féjer en exercices.
Remarque : Dans la pratique on calcule très souvent $c_0(f)$ à part pour éviter les divisions par 0.
Exercice : Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $2\pi-$périodique définie sur $[0,\pi[$ par $f(x) = 1$ et sur $[\pi, 2\pi[$ par $f(x) = 0$.
Exercice : Montrer que pour $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$

$$u_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} xe^{-ikx} = \frac{i(-1)^k}{2k} + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1).$$

et donner une expression de v_k défini par

$$v_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} xe^{-ikx}dx$$

en fonction de u_{-k}.
En déduire une expression des coefficients de Fourier c_k des deux fonctions 2π-périodiques suivantes :

$$f_1(x) = |x| \text{ sur } [-\pi,\pi[$$
$$f_2(x) = x \text{ sur } [-\pi,\pi[$$

On dessinera les graphes des deux fonctions sur $[-2\pi, 2\pi]$

Définition 24. Série de Fourier
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes $2\pi-$périodique appartenant à $L^2(\mathbb{T})$. On appelle somme partielle de Fourier $S_n(f)$ de f, le polynôme trigonométrique suivant :

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$$

On appelle série de Fourier associée f la série de fonctions suivante $S(f)$:

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e_k$$

Remarque : Attention au sens que l'on donne à cette série de fonctions. La série peut ne pas être convergente pour certaines valeurs de x. Nous verrons dans la suite que cette série converge, sous certaines hypothèses et un en certain sens vers la fonction f.

2. Convolution circulaire.

Définition 25. Convolution circulaire
Soit f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{T})$ on appelle convolution circulaire de f et g la fonction h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$h(x) = f \star g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(x-t) dt$$

la fonction h ainsi définie appartient à $L^2(\mathbb{T})$.

Exemple : Soit $D_N = \sum_{k=-N}^{N} e_k$ calculer la convolution d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ avec D_N.
Remarque : La convolution de deux fonctions de $L^2(\mathbb{T})$ est toujours continue et donc bornée.

3. Bessel et Parseval.

Proposition 9. Égalité de Parseval
Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{T})$ et $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier et $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de Fourier. Alors

$$\lim_{n \to \infty} \|f - S_n(f)\| = 0$$

de plus

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|^2 \tag{11}$$

Remarque : Le second point appelé **Égalité de Parseval** est un cas particulier du théorème de Pythagore dans $L^2(\mathbb{T})$. Il utilise le fait que les exponentielles complexes forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.
Remarque : Ainsi si une fonction f est dans $L^2(\mathbb{T})$ la suite de ses coefficients de Fourier appartient à $\ell^2(\mathbb{Z})$.

4. Lien entre $c_(n)(f)$ et $c_n(f')$.

Proposition 10. Coefficients de Fourier et dérivée
Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{T})$ dérivable par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$.
Les coefficients de Fourier de f' s'expriment en fonctions de ceux de f de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') = inc_n(f) \tag{12}$$

Remarque : La démonstration est une simple intégration par parties (A faire en exercice).
Remarque : L'hypothèse de continuité est indispensable.

5. Décroissance des coefficients et régularité.

   Proposition 11. Régularité et décroissance des coefficients de Fourier
   Soit k un entier strictement positif et soit f une fonction 2π−périodique, C^k par morceaux et C^{k-1} sur $\mathbb{R}$ alors
   $$\forall l < k, \forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f^l) = (in)^l c_n(f)$$
   De plus
   $$|c_n(f)| = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$$

6. Théorème de convergence de Dirichlet

   Théorème 5. Théorème de convergence de Dirichlet
   Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{T})$, continue et C^1 par morceaux. En tout point x de $\mathbb{R}$ on a
   $$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x)$$
   Si f est C^1 par morceaux mais pas continue alors
   $$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \tilde{f}(x)$$
   où $\tilde{f}$ coïncide avec f en tout point de continuité de f et où $\tilde{f}$ est la moyenne de la limite à gauche et de la limite à droite de f aux points de discontinuité :
   $$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{y\to x, y<x} f(y) + \lim_{y\to x, y>x} f(y)\right)$$
   Remarque : Si f est continue alors la convergence est même uniforme.
   Remarque : Si f n'est pas continue on observe un effet d'oscillation au niveau des discontinuités appelé effet de Gibbs (Exercices).

4.2 Transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$

4.2.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

1. Définition de la TF sur $L^1(\mathbb{R})$.

   Définition 26. Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$.
   Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, appartenant à $L^1(\mathbb{R})$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt$ est absolument convergente. On peut ainsi définir la Transformée de Fourier (TF) de f, notée $\hat{f}$ définie par
   $$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt$$
   Exemple : Indicatrices, fonctions laplaciennes, gaussiennes (sans démonstration)

2. Convolution.

Définition 27. Convolution
Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$ est absolument convergente. On appelle convoluée de f et g la fonction h définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$h(x) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

La fonction h ainsi obtenue appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et de plus

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \tag{13}$$

Exemple : indicatrices et gaussiennes.

3. Propriétés de la TF sur $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 12. Propriétés de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$
La transformée de Fourier d'une fonction f appartenant à $L^1(\mathbb{R})$ est continue et tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$.

Proposition 13. Translation et dilatation *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, pour $a > 0$, on note f_a la fonction dilatée de f du facteur a définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f_a(x) = f(ax)$.*
On a alors $\widehat{f_a}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$.
On peut noter de même f^τ la fonction translatée de f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f^\tau(x) = f(x-\tau)$.
On a alors $\widehat{f^\tau}(\omega) = \hat{f}(\omega)e^{-i\omega\tau}$.
Ainsi si la transformée de Fourier de f_a^τ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_a^\tau(x) = f(ax-\tau)$ est

$$\widehat{f_a^\tau}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})e^{-i\omega\frac{\tau}{a}} \tag{14}$$

Exemple : Pour $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ et $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, on note $\Phi_{j,k}$ la fonction définie par

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\Phi\left(2^{-j}x - k\right) \tag{15}$$

Exprimer la transformée de Fourier de $\Phi_{j,k}$ en fonction de celle de Φ.

4. Formule d'inversion sur $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 6. Théorème d'inversion de la TF sur $L^1(\mathbb{R})$
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L1(\mathbb{R})$, alors f peut s'exprimer à partir de $\hat{f}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{i\omega x}d\omega. \tag{16}$$

Remarque : En fait cette égalité n'est vraie que *presque partout* et pas pour tout x. Dans la pratique les deux fonctions f et $\hat{f}$ sont continues et la notion de presque partout ici n'est pas cruciale.
Exemple : Cauchy et Laplace.

5. Lien entre TF et dérivation.

Proposition 14. Transformée de Fourier et dérivation
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a la relation suivante entre les TF de f et f' :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(\omega) = -i\omega\hat{f}(\omega) \tag{17}$$

Remarque : : On peut bien entendu itérer ce résultat pour faire un lien entre la TF de f^k et celle de f si toutes les dérivée d'ordre $l \leqslant k$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$. On peut en déduire une vitesse de décroissance vers 0 de la TF des fonctions admettant des dérivées successives dans $L^1(\mathbb{R})$ de manière analogue que dans le cas continu.

On peut également établir une relation symétrique de la précédente :

Proposition 15. Transformée de Fourier et dérivation, deuxième partie
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = tf(t)$ est également un élément de $\in L^1(\mathbb{R})$, alors la Transformée de Fourier de f est dérivable et :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (\widehat{f})'(\omega) = -i\hat{g}(\omega) \tag{18}$$

4.2.2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$.

6. Définition de la TF sur $L^2(\mathbb{R})$.

   Définition 28. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$
   Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ la fonction ϕ_ω définie par $\phi_\omega(A) = \int_{-A}^{A} f(t)e^{-i\omega t}dt$ admet une limite en $+\infty$.
   On appelle Transformée de Fourier de f au point ω et on note $\hat{f}(\omega)$ cette limite.

7. Propriétés de la TF sur $L^2(\mathbb{R})$.

   Proposition 16. Propriétés de la Transformée de Fourier de $L^2(\mathbb{R})$.

   (a) *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.*

   (b) *Plus précisément on a l'égalité de Plancherel :*

   $$\left\|\hat{f}\right\|^2 = 2\pi \|f\|^2 \tag{19}$$

   (c) *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors on a la formule d'inversion suivante :*

   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{t=-A}^{A} \hat{f}(w)e^{i\omega t}d\omega \tag{20}$$

   Exemple

4.3 Transformée de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$

1. Définitions

   Définition 29. Transformée de Fourier de $\ell_2(\mathbb{Z})$.
   Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\ell^2(\mathbb{Z})$ c'est à dire telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n|^2 < +\infty$ on appelle Transformée de Fourier de $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la fonction $\hat{h}$, $2\pi-$périodique définie par

   $$\hat{h}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega} \tag{21}$$

   Remarque : On appellera aussi *filtre* la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
   Remarque : Si la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ admet un nombre fini de coefficients non nuls alors $\hat{h}$ est un polynôme trigonométrique (exemples).
   Remarque : Sous certaines conditions de décroissance quand n tend vers $+\infty$, la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de $\hat{h}$.
   Exemple : Soit $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. On note Φ_n la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$\Phi_n(x) = \Phi(x-n)$.
En admettant que la transformée de Fourier de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n\Phi_n$ est bien définie, exprimer cette transformée de Fourier en fonction de celle de Φ et de celle de $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

2. Convolution discrète.

Définition 30. Convolution discrète
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux suites de $\ell_2(\mathbb{Z})$. On définit la convolution de f et g comme la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\ell_2(\mathbb{Z})$ définie par

$$h_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k g_{n-k} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{n-l} g_l. \tag{22}$$

et noté $h = f \star g$.
Comme pour les autres transformées et séries de Fourier on a la relation suivante :

$$h = f \star g \Longrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

4.4 Transformée de Fourier discrète de fonctions définies sur $[\![0:n-1]\!]$

Dans tous les problèmes pratiques utilisant des données numériques finies, on manipule des données discrètes et on souhaite pouvoir calculer une transformée de Fourier elle même discrète.
Le moyen le plus simple de travailler dans un cadre discret et fini tant en espace (ou en temps) que dans le domaine de Fourier est de considérer le nombre fini d'échantillons qu'on souhaite traiter comme les valeurs d'une fonction définie de $[\![0:n-1]\!]$ dans $\mathbb{C}$.
Autrement dit on identifie un vecteur de n nombres complexes à une fonction définie de $[\![0:n-1]\!]$ dans $\mathbb{C}$.
Ainsi la première composante du vecteur est considérée comme l'image de 0 par f, la seconde valeur est considérée comme l'image de 1 etc ...
On peut munir l'espace vectoriel des fonctions de $[\![0:n-1]\!]$ dans $\mathbb{C}$ du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\overline{g(k)}$$

Pour ce produit scalaire la famille des exponentielles complexes discrètes $(e_l)_{0\leqslant l\leqslant n-1}$ définie par

$$\forall (l,k) \in [\![0:n-1]\!]^2, \quad e_l(k) = e^{\frac{(l-1)(k-1)(2i\pi)}{n}}$$

est une base orthogonale (presque orthonormée car les normes de ces fonctions sont toutes égales à N).
La transformée de Fourier d'une fonction de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}$ est simplement la suite des coefficients de cette fonction dans la base des exponentielles complexes discrètes décrites ci dessus.

1. Définition.

Définition 31. Transformée de Fourier discrète
Soit f une fonction définie sur $[\![0:n-1]\!]$ et à valeur dans $\mathbb{C}$ que l'on peut identifier à un vecteur de n nombre complexe.
On appelle Transformée de Fourier discrète de f, le vecteur $\hat{f}$ ayant n composantes et défini par :

$$\forall k \in [\![0:n-1]\!], \quad \hat{f}(k) = \langle f, e_k\rangle = \sum_{l=0}^{n-1} f(l) e^{-\frac{(l-1)(k-1)2i\pi}{n}} \tag{23}$$

Remarque : La DCT sur laquelle est basée le codage JPEG est une transformée similaire mais en 2D et réelle (on remplace les bases d'exponentielles complexes par des cosinus.)

Remarque : Si on identifie cet espace de fonctions à $\mathbb{C}^n$ on observe que la TF n'est rien d'autre qu'un changement bases orthogonales sur $\mathbb{C}^n$. Ainsi il existe une formule simple d'inversion qui est presque la symétrique.
On oubliera cependant pas de diviser par N pour renormaliser tout correctement.

2. Formule d'inversion.

   Proposition 17. Inversion de la Transformée de Fourier discrète
   Soit f une suite de n valeurs, que l'on identifie à une fonction définie sur $[\![0 : n-1]\!]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\hat{f}$ le vecteur obtenue par Transformée de Fourier discrète. On a la formule de reconstruction suivante :
   $$\forall k \in [\![0 : n-1]\!], \quad f(k) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \widehat{f}(l) e^{\frac{(l-1)(k-1)2i\pi}{n}}$$