Note del corso di Calcolabilità e Linguaggi Formali - Lezione 11

Alberto Carraro

DAIS, Università Ca' Foscari Venezia http://www.dsi.unive.it/~acarraro

Exercise 1. Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è r.e. sse $A \leq_m \mathcal{K}$.

Solution 1. ($\Leftarrow$) Se $A \leq_m \mathcal{K}$ allora A è r.e. perché $\mathcal{K}$ è r.e. e la Turing-riduzione trasporta all'indietro la ricorsiva enumerabilità.
($\Rightarrow$) Supponiamo A sia r.e. La funzione

$$\phi(x, y) \simeq \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è ricorsiva parziale e quindi per il Teorema *s-m-n* esiste una funzione primitiva ricorsiva totale $S : \mathbb{N} \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{S(x)}(y) \simeq \phi(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$.

Dimostriamo che la funzione S realizza la riduzione voluta da A in $\mathcal{K}$:

- Se $S(x) \in \mathcal{K}$, allora $\varphi_{S(x)}(S(x)) \downarrow$, cioè $\phi(S(x), S(x)) \downarrow$. L'unico caso in cui $\phi(S(x), S(x))$ è definita (e con valore 1) è quello in cui $S(x) \in A$.
- Se $x \in A$, allora $\phi(x, S(x)) \downarrow$, cioè $\varphi_{S(x)}(S(x)) \downarrow$, e questo significa per definizione che $S(x) \in \mathcal{K}$.

$\square$

Exercise 2. Studiare le caratteristiche dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in \mathsf{dom}(\varphi_x) \cap \mathsf{ran}(\varphi_x)\}$.

Solution 2. Sia $B = \{x \in \mathbb{N} : x \in \mathsf{ran}(\varphi_x)\}$. Si noti che $A = \mathcal{K} \cap B$. L'insieme B è r.e. poiché $x \in B$ sse $\exists z.\varphi_x(z) = x$ e quest'ultimo predicato è r.e. Infine l'intersezione di due insiemi r.e. è ancora r.e.

Dimostriamo che A non è ricorsivo, verificando che $\overline{A}$ non è r.e. Per farlo riduciamo $\overline{\mathcal{K}}$ ad $\overline{A}$. Definiamo

Se $\overline{A}$ fosse r.e. allora esisterebbe un numero e tale che $\overline{A} = \mathsf{dom}(()\varphi_e)$

$$\phi(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi_x(z) = y \\ & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\square$

Exercise 3. Studiare le caratteristiche dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in \mathsf{dom}(\varphi_x) \cup \mathsf{ran}(\varphi_x)\}$.
Solution 3. $\square$