

Note del corso di Calcolabilità e Linguaggi Formali - Lezione 10

Alberto Carraro

DAIS, Università Ca' Foscari Venezia <http://www.dsi.unive.it/~acarraro>

1 Teoremi fondamentali della “Recursion Theory”

Theorem 1 (*s-m-n*). *Dati due numeri naturali m, n esiste una funzione primitiva ricorsiva ed iniettiva $S_n^m(e, x_1, \dots, x_n)$ tale che*

$$\varphi_e^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \simeq \varphi_{S_n^m(e, x_1, \dots, x_n)}(y_1, \dots, y_m)$$

Proof. Sia e l'indice di una funzione ricorsiva parziale $\varphi_e^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$. Vogliamo produrre a partire da e una descrizione (un codice) della funzione $\gamma(y_1, \dots, y_m) \simeq \varphi_e^{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ al variare degli input x_1, \dots, x_n . Informalmente il processo di decodificare e , e modificare la definizione della funzione da esso codificata cambiandone la segnatura e sostituendo “nel corpo” le funzioni costanti a valore x_1, \dots, x_n rispettivamente è esso stesso un procedimento effettivo e definibile, usando i metodi dell'aritmetizzazione, con una funzione totale primitiva ricorsiva S_n^m , che prende appunto come input il codice e ed i valori x_1, \dots, x_n . Inoltre per le proprietà delle codifiche la funzione S_n^m risulta anche essere iniettiva. \square

Un'importante applicazione del Teorema ?? è la possibilità di dimostrare il seguente teorema, che parla di come esistano funzioni che forniscono programmi.

Theorem 2 (del parametro). *Data una funzione ricorsiva parziale $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ esiste una funzione primitiva ricorsiva ed iniettiva $S(x_1, \dots, x_n)$ tale che*

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \simeq \varphi_{S(x_1, \dots, x_n)}(y_1, \dots, y_m)$$

Proof. Siccome $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ è parziale ricorsiva, allora esiste un numero e tale che $\varphi_e \simeq f$. Pertanto basta usare il Teorema ?? e definire $S(x_1, \dots, x_n) = S_n^m(e, x_1, \dots, x_n)$. \square

Un'istanza semplice del Teorema del parametro è la seguente: data una funzione ricorsiva parziale $f(x, y)$ esiste una funzione primitiva ricorsiva ed iniettiva $S(x)$ tale che $f(x, y) \simeq \varphi_{S(x)}(y)$. Si noti che la funzione $S(x)$ (ed in generale $S_n^m(e, x_1, \dots, x_n)$), essendo primitiva ricorsiva, è totale.

Theorem 3 (di ricorsione II). *Sia ψ una funzione ricorsiva parziale $m + 1$ -aria. Allora esiste un indice e tale che $\varphi_e(\vec{y}) \simeq \psi(e, \vec{y})$, per ogni $\vec{y} \in \mathbb{N}^m$.*

Proof. Sia h una funzione ricorsiva totale unaria qualsiasi. Allora la funzione $\varphi(e, \vec{y}) \simeq \psi(h(e), \vec{y})$ è ricorsiva parziale, per lo schema di rimpiazzamento e dunque ha un indice a , ovvero $\varphi \simeq \varphi_a$. Ora per il Teorema ?? (s-m-n) esiste una funzione primitiva ricorsiva binaria S_1^m tale che per ogni $\vec{y} \in \mathbb{N}^m$

$$\varphi_a(e, \vec{y}) \simeq \varphi(e, \vec{y}) \simeq \psi(h(e), \vec{y}) \simeq \varphi_{S_1^m(a, e)}(\vec{y}) \quad (1)$$

Poiché la (1) vale per ogni $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ricorsiva ed ogni $e \in \mathbb{N}$, in particolare vale per $h(z) = S_1^m(z, z)$ e per $e = a$.

Quindi abbiamo che per ogni $\vec{y} \in \mathbb{N}^m$

$$\varphi_a(a, \vec{y}) \simeq \varphi(a, \vec{y}) \simeq \psi(S_1^m(a, a), \vec{y}) \simeq \varphi_{S_1^m(a, a)}(\vec{y}) \quad (2)$$

Ma allora la (2) ci dice che $S_1^m(a, a)$ è un indice che soddisfa l'enunciato del teorema. \square

Notazione. Useremo talvolta una notazione per definire funzioni on-the-fly senza darvi un nome (come si fa in OCaml ed F[#]). Ad esempio la funzione quadrato può essere definita dall'espressione $x \mapsto x * x$, piuttosto che dire che l'elevamento al quadrato è la funzione f data da $f(x) = x * x$.

Lemma 1. *Per ogni funzione parziale ricorsiva ψ esiste una funzione ricorsiva totale $\bar{\psi}$ tale che $\varphi_{\psi(x)} = \varphi_{\bar{\psi}(x)}$, per ogni $x \in \text{dom}(\psi)$.*

Proof. Poiché la funzione ψ è parziale ricorsiva, essa ha un indice: sia $\psi \simeq \varphi_e$. Sia u la funzione ricorsiva parziale universale. Allora la funzione binaria $(x, y) \mapsto u(u(e, x), y)$ è ricorsiva parziale e quindi ha un indice p . È chiaro che, per definizione, $\varphi_p(x, y) \simeq \varphi_{\psi(x)}(y)$ per ogni $x \in \text{dom}(\psi)$ ed ogni $y \in \mathbb{N}$. Per il Teorema ?? (s-m-n) esiste una funzione primitiva ricorsiva binaria S_1^1 tale che $\varphi_p(x, y) \simeq \varphi_{S_1^1(p, x)}(y)$ e quindi abbiamo che

$$\varphi_{\psi(x)}(y) \simeq \varphi_{S_1^1(p, x)}(y)$$

per ogni $x \in \text{dom}(\psi)$ ed ogni $y \in \mathbb{N}$. Ciò significa che la funzione unaria ricorsiva totale $x \mapsto S_1^1(p, x)$ soddisfa l'enunciato del teorema. \square

Theorem 4 (di punto fisso). *Sia f una funzione ricorsiva totale. Allora esiste un indice n tale che $\varphi_n \simeq \varphi_{f(n)}$.*

Proof. Sia p un indice di f . La funzione $\phi(x) \simeq \varphi_p(\varphi_x(x))$ è ricorsiva parziale, dato che $\phi(x) \simeq u(p, u(x, x))$, dove u è la funzione ricorsiva parziale universale. Per il Lemma ?? esiste una funzione ricorsiva totale $\bar{\phi}$ tale che $\varphi_{\phi(x)} = \varphi_{\bar{\phi}(x)}$, per ogni $x \in \text{dom}(\phi)$.

Sia q un indice di $\bar{\phi}$. Poiché sia f che $\bar{\phi}$ sono totali, sicuramente $\varphi_q(q) \downarrow$ e $f(\varphi_q(q)) \downarrow$, quindi possiamo porre $n = \varphi_q(q)$, per comodità.

Ora ci accorgiamo che $q \in \text{dom}(\phi)$, perché $\phi(q) \simeq \varphi_p(\varphi_q(q)) = f(n)$ e siccome la funzione $\bar{\phi}$ ci è data dal Lemma ??, abbiamo che $\varphi_{\phi(q)} = \varphi_{\bar{\phi}(q)}$.

Ma allora possiamo concludere osservando che

$$\varphi_{f(n)} \simeq \varphi_{\phi(q)} \simeq \varphi_{\bar{\phi}(q)} \simeq \varphi_{\varphi_q(q)} \simeq \varphi_n$$

e quindi n è il numero che cercavamo. \square

1.1 Insiemi che rispettano le funzioni e teorema di Rice

Abbiamo visto che i numeri naturali “sono” allo stesso tempo anche funzioni dai naturali ai naturali. In questa sezione guardiamo ai sottoinsiemi di \mathbb{N} come insiemi di funzioni. Si pensi all’analogia tra insiemi e predicati: un insieme di numeri naturali può essere pensato come l’estensione di una proprietà (e quindi di un predicato) di numeri naturali e, tramite la codificata data dal Teorema di Enumerazione di Kleene, può essere pensato anche come l’estensione di una proprietà di “programmi”.

Ogni funzione r.p. ha molti indici e quindi se vogliamo vedere in maniera sensata un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ come un insieme di funzioni, allora A deve soddisfare la seguente proprietà: se $e \in A$ allora tutti gli indici della funzione φ_e devono stare in A . Questa proprietà viene resa precisamente nella prossima definizione.

Definition 1. Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ rispetta le funzioni se per ogni coppia di numeri $a, b \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$\varphi_a \simeq \varphi_b \Rightarrow (a \in A \Leftrightarrow b \in A)$$

Definition 2. Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è completamente ricorsivo (resp. completamente r.e.) se è r.e. (resp ricorsivo) e rispetta le funzioni.

Per la suriettività dell’enumerazione di Kleene, ogni insieme A che rispetta le funzioni rappresenta una proprietà di programmi P . Allora il fatto che A sia completamente r.e. (ricorsivo) corrisponde al fatto che P sia r.e. (ricorsiva).

Diciamo che un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è *triviale* se $A = \emptyset$ oppure $A = \mathbb{N}$. Il prossimo teorema, chiamato il *Teorema di Rice*, dice in sostanza che nessuna proprietà non banale dei programmi può essere ricorsiva.

Theorem 5 (di Rice). Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme che rispetta le funzioni. Allora A è completamente ricorsivo sse A è *triviale*.

Proof. Dimostriamo i due versi della doppia implicazione.

(\Leftarrow) Se A è *triviale* allora è completamente ricorsivo perchè \emptyset e \mathbb{N} sono entrambi ricorsivi e rispettano le funzioni.

(\Rightarrow) Supponiamo, per assurdo, che A sia completamente ricorsivo e non-triviale. Allora anche A^c è completamente ricorsivo e non-triviale e quindi esistono due numeri $x_0 \in A$, $x_1 \in A^c$. Definiamo una funzione f come segue:

$$f(m) = \begin{cases} x_0 & \text{se } m \in A^c \\ x_1 & \text{se } m \in A \end{cases}$$

Chiaramente f è una funzione ricorsiva totale e quindi, per il Teorema ??, esiste un numero n tale che $\varphi_{f(n)} \simeq \varphi_n$. A questo punto n deve appartenere ad A o ad A^c :

- (1) se $n \in A$, allora $f(n) = x_1 \in A^c$.
- (2) se $n \in A^c$, allora $f(n) = x_0 \in A$.

Nel caso (1) $n \in A$ ed $f(n) \notin A$ e nel caso (2) $n \notin A$ ed $f(n) \in A$. Pertanto in entrambi i casi A non rispetta le funzioni, e questo contraddice l’ipotesi iniziale.

□

2 Applicazioni dei teoremi fondamentali

Che cos'ha a che fare il Teorema ?? con la ricorsione? Perché si chiama così? Si chiama così perché ci aiuta a risolvere equazioni in cui le incognite sono funzioni ricorsive, un po' come i metodi che si usano per risolvere equazioni differenziali, in cui le incognite sono appunto funzioni.

Exercise 1. Consideriamo la seguente equazione ricorsiva nell'incognita f :

$$f(x) \simeq \begin{cases} 3 & \text{se } x = 2 \\ f(f(x+1)) & \text{se } x \neq 2 \end{cases}$$

Vediamo che l'equazione non può intendersi come una definizione per induzione e quindi può avere più soluzioni, anche totali, differenti. Vogliamo ora trovare una soluzione a quest'equazione in \mathbf{PR} , e quindi trovare un numero n tale che la funzione φ_n soddisfa la stessa equazione.

Solution 1. Ora la funzione

$$t(y, x) \simeq \begin{cases} 3 & \text{se } x = 2 \\ \varphi_y(\varphi_y(x+1)) & \text{se } x \neq 2 \end{cases}$$

è ricorsiva e quindi per il II Teorema di Ricorsione (Teorema ??) esiste un indice n tale che $\varphi_n(x) \simeq t(n, x)$, per ogni $x \in \mathbb{N}$. Quindi abbiamo che

$$\varphi_n(x) \simeq \begin{cases} 3 & \text{se } x = 2 \\ \varphi_n(\varphi_n(x+1)) & \text{se } x \neq 2 \end{cases}$$

e questo ci dice che n è un indice di una funzione che soddisfa la nostra equazione ricorsiva.

Vediamo due soluzioni diverse dell'equazione data:

$$g_0(x) \simeq \begin{cases} 3 & \text{se } x = 2 \\ \uparrow & \text{se } x \neq 2 \end{cases} \quad g_1(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{se } x \neq 2 \end{cases}$$

Sfortunatamente non sappiamo se φ_n è g_0, g_1 oppure un'altra funzione ancora. □

Exercise 2. Consideriamo la seguente equazione ricorsiva nell'incognita f :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ f(x-1, f(x, y)) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Vogliamo ora trovare una soluzione a quest'equazione in \mathbf{PR} , e quindi trovare un numero n tale che la funzione φ_n soddisfa la stessa equazione.

Solution 2. Ora la funzione

$$t(z, y, x) \simeq \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \varphi_z(x-1, \varphi_z(x, y)) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è ricorsiva parziale e quindi per il II Teorema di Ricorsione (Teorema ??) esiste un indice n tale che $\varphi_n(x, y) \simeq t(n, x, y)$, per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Quindi abbiamo che

$$\varphi_n(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \varphi_n(x-1, \varphi_n(x, y)) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e questo ci dice che n è un indice di una funzione che soddisfa la nostra equazione ricorsiva. Ancora una volta però non sappiamo come sia fatta veramente φ_n poichè non vi è un'unica soluzione possibile all'equazione. \square

Exercise 3. La funzione di Ackermann è una soluzione della seguente equazione ricorsiva nell'incognita A :

$$A(x, y) = \begin{cases} y + 1 & \text{se } x = 0 \\ A(x-1, 1) & \text{se } x > 0 \text{ e } y = 0 \\ A(x-1, A(x, y-1)) & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \end{cases}$$

Mettendo il simbolo “=” otteniamo che quest'equazione vuole funzioni totali come soluzioni e per come è data ammette una unica soluzione totale. Per questo è vista come una *definizione* della funzione di Ackermann. Dimostriamo che esiste una soluzione in **PR** all'equazione qui sopra però con ' \simeq ' al posto di '='.

Solution 3. La funzione

$$t(z, x, y) \simeq \begin{cases} y + 1 & \text{se } x = 0 \\ \varphi_z(x-1, 1) & \text{se } x > 0 \text{ e } y = 0 \\ \varphi_z(x-1, \varphi_z(x, y-1)) & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \end{cases}$$

è ricorsiva parziale e quindi per il II Teorema di Ricorsione (Teorema ??) esiste un indice n tale che $\varphi_n(x, y) \simeq t(n, x, y)$, per ogni $x, y \in \mathbb{N}$. Quindi abbiamo che

$$\varphi_n(x, y) \simeq \begin{cases} y + 1 & \text{se } x = 0 \\ \varphi_n(x-1, 1) & \text{se } x > 0 \text{ e } y = 0 \\ \varphi_n(x-1, \varphi_n(x, y-1)) & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \end{cases}$$

e questo ci dice che n è un indice di una funzione che soddisfa l'equazione ricorsiva, ma ancora una volta non sappiamo se φ_n è o meno la funzione di Ackermann. Quindi per dimostrare che Ackermann sta in **REC** non basta il II Teorema di Ricorsione di Kleene. Infatti ci vuole il I Teorema di Ricorsione di Kleene, che però noi non vedremo. \square

Exercise 4. Dimostriamo che esiste un numero naturale n tale che $\text{dom}(\varphi_n) = \{n\}$ e $\varphi_n(n) = n$.

Solution 4. Definiamo una funzione

$$t(x, y) \simeq \begin{cases} x & \text{se } x = y \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione t è ricorsiva parziale, per cui possiamo applicare il II Teorema di Ricorsione che ci da un indice n tale che $\varphi_n(y) \simeq t(n, y)$, per ogni $y \in \mathbb{N}$. Per cui $\varphi_n(n) = t(n, n) = n$, da cui $\varphi_n(n) \downarrow$ e per ogni $x \neq n$ abbiamo $\varphi_n(m) \simeq t(n, m)$, da cui $\varphi_n(m) \uparrow$. \square