Note del corso di Calcolabilità e Linguaggi Formali - Lezione 9

Alberto Carraro

DAIS, Università Ca' Foscari Venezia http://www.dsi.unive.it/~acarraro

1 Proprietà dei predicati r.e.

Ricordiamo un teorema molto importante, dimostrato nella scorsa lezione, riportandone l'enunciato qui di seguito.

Theorem 1. *Sia $P \subseteq \mathbb{N}^n$ un predicato non vuoto. I seguenti enunciati sono equivalenti:*

(i) *P è r.e.*
(ii) *esiste una funzione ricorsiva parziale $\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ tale che $\mathsf{dom}(\varphi) = P$.*
(iii) *esiste un predicato ricorsivo $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ tale che $P(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y.R(\vec{x}, y)$*
(iv) *esiste una funzione ricorsiva totale $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\mathsf{ran}(\phi) = \{\prec \vec{x} \succ : P(\vec{x}) \text{ vale}\}$*

Notiamo che la condizione (iv), quando P è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, si semplifica come segue:

(iv)' esiste una funzione ricorsiva totale $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\mathsf{ran}(\phi) = P$.

Durante la Lezione 7 abbiamo visto alcune proprietà dei predicati primitivi ricorsivi. Ora ripetiamo questo breve studio sui predicati (o insiemi) r.e.

Come abbreviamo la dicitura "ricorsivamente enumerabile" con *r.e.*, nel seguito ci permetteremo di abbreviare "ricorsiva parziale" con *r.p.* e "ricorsiva totale" con *r.t.*

Lemma 1. *Siano $P, Q \subseteq \mathbb{N}^n$ due predicati r.e. Allora $P \vee Q$, $P \wedge Q$ e $\exists y.P$ sono tutti predicati r.e.*

Proof. Dimostriamo che $P \wedge Q$ è r.e. Per ipotesi abbiamo due funzioni r.p. φ, ϕ tali che $\mathsf{dom}(\varphi) = P$ e $\mathsf{dom}(\phi) = Q$. Concludiamo osservando che la funzione $\varphi \circ \phi$ è r.p. e $\mathsf{dom}(\varphi \circ \phi) = P \wedge Q$.

Dimostriamo che $P \vee Q$ è r.e. Per ipotesi abbiamo due funzioni r.t. f, g tali che $\mathsf{ran}(f) = \{\prec \vec{x} \succ : P(\vec{x}) \text{ vale}\}$ e $\mathsf{ran}(g) = \{\prec \vec{x} \succ : Q(\vec{x}) \text{ vale}\}$. Definiamo una funzione h come segue:

$$h(n) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}) & \text{se } n \text{ pari} \\ g(\frac{n-1}{2}) & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Concludiamo osservando che la funzione h è r.t. e $\mathsf{ran}(h) = \{\prec \vec{x} \succ : P(\vec{x}) \vee Q(\vec{x})$ vale $\}$.

Sia $P(\vec{x}, y)$ un predicato r.e. e sia $P'(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y.P(\vec{x}, y)$. Per ipotesi esiste un predicato ricorsivo $R(\vec{x}, y, z)$ tale che $P(\vec{x}, y) \Leftrightarrow \exists z.R(\vec{x}, y, z)$. Ma allora $P'(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y.\exists z.R(\vec{x}, y, z) \Leftrightarrow \exists w.\exists y < w.\exists z < w.R(\vec{x}, y, z)$. Per concludere basta osservare che il predicato $\exists y < w.\exists z < w.R(\vec{x}, y, z)$ è ricorsivo. $\square$

Osserviamo che il Lemma **??** dice, tra le altre cose, che gli insiemi r.e. sono chiusi per unione ed intersezione finita. Notiamo le differenze di comportamento tra insiemi ricorsivi e ricorsivamente enumerabili:

- gli insiemi ricorsivi sono chiusi rispetto al complemento, mentre quelli ricorsivamente enumerabili non lo sono;
- i predicati ricorsivamente enumerabili sono chiusi rispetto alla quantificazione esistenziale, mentre quelli ricorsivi non lo sono.

Dopo aver visto il comportamento degli insiemi ricorsivi (r.e.) rispetto alle operazioni insiemistiche, vediamo il loro comportamento rispetto all'applicazione di funzioni ricorsive (parziali o totali).

Per il nostro scopo introduciamo qualche comoda notazione. Data un funzione parziale $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ ed un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$, indicheremo con $f(A)$ l'*immagine* di A secondo f, ovvero $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Indicheremo con $f^{-1}(A)$ l'*antiimmagine* di A secondo f, ovvero $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} : f(x) \in A\}$.

Proposition 1. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme r.e. e sia φ una funzione r.p. Allora gli insiemi $\varphi(A)$ e $\varphi^{-1}(A)$ sono entrambi r.e.*

Proof. Se $A = \emptyset$ oppure φ è la funzione completamente indefinita su A, allora $\varphi(A) = \emptyset$, che è trivialmente un insieme r.e. Supponiamo ora $A \neq \emptyset$ e $\mathsf{dom}(\varphi) \cap A \neq \emptyset$.

Dimostriamo che $\varphi(A)$ è r.e. Siccome φ è r.p. esiste un indice e tale che $\varphi_e \simeq \varphi$; inoltre esiste un certo numero naturale $z \in A \cap \mathsf{dom}(\varphi)$. Poiché A è r.e., esiste una funzione ricorsiva totale g tale che $A = \mathsf{ran}(g)$. Definiamo allora una funzione f come segue:

$$f(\langle x, s \rangle) = \begin{cases} \varphi_{e,s}(g(x)) & \text{se } \varphi_{e,s}(g(x)) \downarrow \\ \varphi_e(z) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Chiaramente f è ricorsiva totale ed inoltre $\varphi(A) = \varphi_e(A) = \mathsf{ran}(f)$.

Ora dimostriamo che $\varphi^{-1}(A)$ è r.e. Abbiamo che $x \in \varphi^{-1}(A) \Leftrightarrow \exists y.((x, y) \in \mathsf{gr}(\varphi) \wedge y \in A)$. Per il Teorema di enumerazione esiste un indice e tale che $A = \mathsf{dom}(\varphi_e)$. Chiaramente $\exists y.((x, y) \in \mathsf{gr}(\varphi) \wedge y \in A) \Leftrightarrow \exists s.\exists y.((x, y) \in \mathsf{gr}(\varphi) \wedge \varphi_{e,s}(y) \downarrow)$. Ora sappiamo che $(x, y) \in \mathsf{gr}(\varphi)$ è r.e. e $\varphi_{e,s}(y) \downarrow$ è ricorsivo. La loro congiunzione è quindi r.e., e quantificando esistenzialmente all'esterno si ottiene ancora un predicato r.e. $\square$

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$, indichiamo con A^c il suo complementare.

Remark 1. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione totale. Abbiamo che

(i) $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$
(ii) Se f è suriettiva, allora $f(A^c) = (f(A))^c$

Proposition 2. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme ricorsivo e sia f una funzione r.t. Abbiamo che*

(i) $f^{-1}(A)$ è ricorsivo.
(ii) Se f è suriettiva, allora $f(A)$ è ricorsivo.

Proof. Dimostriamo i due punti.

(i) Se A è ricorsivo allora $f^{-1}(A)$ è r.e. (Proposizione **??**). Ma anche A^c è ricorsivo e quindi $f^{-1}(A^c)$ è r.e. Concludiamo osservando che $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ (Remark **??**(i)).
(ii) Il ragionamento è come quello per il punto (i), stavolta usando il Remark **??**(ii).

□

2 Enumerazione dei predicati r.e.

Definition 1. *Scriviamo $\mathcal{W}_e^n$ per indicare l'insieme $\mathsf{dom}(\varphi_e^n)$. Inoltre scriviamo $\mathcal{W}_{e,s}^n$ per indicare l'insieme $\mathsf{dom}(\varphi_{e,s}^n)$.*

Theorem 2 (Enumerazione di Kleene–Post). *La sequenza $\mathcal{W}^n = (\mathcal{W}_e^n)_{e\in\mathbb{N}}$ è una enumerazione parziale ricorsiva dei predicati r.e. n-ari, nel senso che:*

(i) per ogni $e \in \mathbb{N}$, $\mathcal{W}_e^n$ è un predicato r.e. n-ario
(ii) se P è un predicato r.e. n-ario, allora esiste un numero e tale che $\mathcal{W}_e^n = P$
(ii) esiste una funzione totale ricorsiva f tale che $\mathcal{W}^n = (\mathcal{W}_{f(x)}^n)_{x\in\mathbb{N}}$ (ed inoltre $\mathcal{W}_{f(x)}^n = \mathcal{W}_{f(y)}^n$ implica $x = y$)

Proof. Gli enunciati (i) e (ii) seguono dal Teorema **??**. La dimostrazione del punto (iii) invece è complessa e non la vedremo in questo corso. □

3 Equivalenza tra ricorsività e Turing-calcolabilità

In questa sezione enunciamo i teoremi che sanciscono l'equivalenza tra vari concetti in teoria della computabilità alla Turing e teoria della ricorsività alla Kleene.

Theorem 3. *Sia $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una funzione. Allora*

f è Turing-calcolabile sse f è ricorsiva parziale

Theorem 4. *Sia $R \subseteq \mathbb{N}^n$ una relazione. Allora*

1. R è semi-decidibile sse R è ricorsivamente enumerabile
2. R è decidibile sse R è ricorsiva

Non diamo le dimostrazioni di questi risultati. Chi fosse interessato può trovarle nel libro di Odifreddi.