Note del corso di Calcolabilità e Linguaggi Formali - Lezione 8

Alberto Carraro

DAIS, Università Ca' Foscari Venezia http://www.dsi.unive.it/~acarraro

1 Insiemi e predicati ricorsivi e ricorsivamente enumerabili

Ricordiamo che per quanto concerne ciò che diciamo in questo corso, un insieme di numeri naturali non è altro che un predicato unario su $\mathbb{N}$ (ovvero una relazione unaria).

Definition 1. *Sia $R \subseteq \mathbb{N}^n$ una relazione n-aria. Diciamo che R è* ricorsiva *se la sua funzione caratteristica è ricorsiva totale.*

Ad esempio $\emptyset$ e $\mathbb{N}$ sono insiemi ricorsivi.

Non è difficile dimostrare che la μ-ricorsione può essere impiegata come schema aggiuntivo per definire funzioni ricorsive parziali, utilizzando predicati ricorsivi. Più precisamente, se $R(\vec{x}, y)$ è un predicato ricorsivo, allora la funzione $\mu y.R(\vec{x}, y) : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ come segue

$$\mu y.R(\vec{x}, y) = \begin{cases} \text{il minimo } y \text{ tale che } R(\vec{x}, y) & \text{se un tale } y \text{ esiste} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è ricorsiva parziale.

Definition 2. *Sia $R \subseteq \mathbb{N}^n$ una relazione n-aria. Diciamo che R è* ricorsivamente enumerabile *(r.e., in breve) se esiste una funzione ricorsiva parziale n-aria φ tale che*

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \textit{se } R(\vec{x}) \textit{ vale} \\ \uparrow & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

In tal caso chiamiamo φ la funzione caratteristica parziale di R e la indichiamo ancora con c_R.

È chiaro che ogni predicato ricorsivo è anche r.e.

Per i predicati ricorsivi valgono le stesse proprietà di chiusura che abbiamo visto valere per i predicati primitivi ricorsivi. Riportiamo qui di seguito un lemma che rende precisa questa affermazione. La sua dimostrazione è assolutamente analoga a quella vista per i predicati primitivi ricorsivi.

Lemma 1. *Siano $R, P \subseteq \mathbb{N}^n$ due predicati ricorsivi. Allora $P \vee R$, $P \wedge R$, $P \Rightarrow R$ e $\neg P$ sono tutti predicati ricorsivi.*

La discussione riguardante le proprietà di chiusura dei predicati r.e. invece è rimandata a più avanti, poichè richiede argomenti che ancora non abbiamo dato.

Theorem 1. *Sia $P \subseteq \mathbb{N}^n$ un predicato non vuoto. I seguenti enunciati sono equivalenti:*

(i) *P è r.e.*
(ii) *esiste una funzione ricorsiva parziale $\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ tale che $\mathsf{dom}(\varphi) = P$.*
(iii) *esiste un predicato ricorsivo $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ tale che $P(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y.R(\vec{x}, y)$*
(iv) *esiste una funzione ricorsiva totale $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\mathsf{ran}(\phi) = \{\prec \vec{x} \succ : P(\vec{x}) \text{ vale}\}$*

Proof. Procediamo a dimostrare le varie implicazioni.

(i)⇒(ii) Per definizione, basta considerare la funzione caratteristica di P.

(ii)⇒(i) Sia $\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una funzione ricorsiva parziale tale che $\mathsf{dom}(\varphi) = P$ e sia u la funzione costante che vale 1. Allora la funzione $u \circ \varphi$ è la funzione caratteristica parziale di P.

(iv)⇒(iii) Sia $\phi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una funzione ricorsiva totale tale che $\mathsf{ran}(\phi) = \{\prec \vec{x} \succ : P(\vec{x}) \text{ vale}\}$. Allora è chiaro che $P(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y.\phi(y) = \prec \vec{x} \succ$. La conclusione segue perché il predicato $R(\vec{x}, y) := \phi(y) = \prec \vec{x} \succ$ è ricorsivo.

(iii)⇒(iv) Sia $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ un predicato ricorsivo tale che $P(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y.R(\vec{x}, y)$. Poiché P è non vuoto, sia $\vec{z}$ una tupla fissata in P. Ora definiamo una funzione ϕ come segue

$$\phi(x) = \begin{cases} \prec (x)_1, \ldots, (x)_n \succ & \text{se } R((x)_1, \ldots, (x)_{n+1}) \text{ vale} \\ \prec \vec{z} \succ & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Chiaramente ϕ è ricorsiva totale e $\mathsf{ran}(\phi) = \{\prec \vec{x} \succ : P(\vec{x}) \text{ vale}\}$.

(ii)⇒(iv) Lo dimostreremo più avanti.

(iv)⇒(ii) Sia $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione ricorsiva totale tale che $\mathsf{ran}(\phi) = \{\prec \vec{x} \succ : P(\vec{x}) \text{ vale}\}$. Definiamo la funzione φ come segue:

$$\varphi(\vec{x}) = \mu z.[\phi(z) = \prec \vec{x} \succ]$$

Allora φ è ricorsiva parziale e $\mathsf{dom}(\varphi) = P$.

□

Theorem 2. *Un predicato $P \subseteq \mathbb{N}^n$ è ricorsivo sse sia P che $\neg P$ sono r.e.*

Proof. (⇒) Se P è ricorsivo allora anche $\neg P$ lo è. Concludiamo per il fatto che ricorsivo implica r.e.
(⇐) Supponiamo che P e $\neg P$ siano entrambi r.e. Allora per il Teorema 1 esistono due predicati ricorsivi R_1 ed R_2 tali che

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y.R_1(\vec{x}, y) \qquad \text{e} \qquad \neg P(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y.R_2(\vec{x}, y)$$

Definiamo una funzione f come segue:

$$f(\vec{x}) = \mu y.[R_1(\vec{x}, y) \vee R_2(\vec{x}, y)]$$

Si noti che f è totale e ricorsiva, pertanto il predicato $P'(\vec{x}) := R_1(\vec{x}, f(\vec{x}))$ è ricorsivo. Infine abbiamo che $P(\vec{x}) \Leftrightarrow P'(\vec{x})$. □

2 Enumerazione delle funzioni parziali ricorsive

Il simbolo $\simeq$ è chiamato *uguaglianza di Kleene*. Esso si utilizza per indicare l'uguaglianza tra funzioni parziali: se f, g sono due funzioni parziali unarie, allora scriviamo $f(x) \simeq g(x)$ per intendere che $f(x) \downarrow \Leftrightarrow g(x) \downarrow$ ed inoltre $f(x) = g(x)$, qualora entrambe le funzioni siano definite sull'input x.

Theorem 3 (Forma normale di Kleene). *Esiste una funzione primitiva ricorsiva unaria $\mathcal{U}$ e una famiglia $\{\mathcal{T}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di predicati primitivi ricorsivi tali che per ogni funzione parziale ricorsiva n-aria φ esiste un numero e (detto l'*indice *di φ) tale che:*

(i) $\varphi(\vec{x}) \downarrow \Leftrightarrow \exists y.\mathcal{T}_n(e, \vec{x}, y)$
(ii) $\varphi(\vec{x}) \simeq \mathcal{U}(\mu y.\mathcal{T}_n(e, \vec{x}, y))$

Non daremo la dimostrazione formale del Teorema 3, ma cerchiamo di capirne il significato. L'idea della dimostrazione è di associare numeri naturali a funzioni e computazioni in maniera tale che il predicato $\mathcal{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$ valga sse y è il numero di una computazione del valore della funzione il cui codice è e sugli input $x_1, \ldots, x_n$. Avendo ciò, $\mu y.\mathcal{T}_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$ sceglie in maniera canonica il codice di una di queste computazioni e la funzione $\mathcal{U}$ estrarrà il valore dell'output dalla codifica. Questo procedimento include molti passaggi, tra cui l'aritmetizzazione delle funzioni parziali ricorsive. Un assaggio degli strumenti necessari per far questo si è visto nella dimostrazione del teorema "Course of values recursion". Un esempio di codifica delle funzioni è il seguente:

- Assegnare il codice $\prec 0 \succ$ alla funzione costante con valore 0
- Assegnare il codice $\prec 1 \succ$ alla funzione successore
- Assegnare il codice $\prec 2, n, i \succ$ alla funzione proiezione i-esima su n argomenti
- Assegnare il codice $\prec 3, b_1, \ldots, b_m, a \succ$ alla funzione $f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x}))$, dove a è il codice di g e ogni b_j è il codice di h_j
- Assegnare il codice $\prec 4, a, b \succ$ alla funzione $f(\vec{x}, y)$ definita per ricorsione primitiva applicata a due funzioni g ed h, i cui codici sono, rispettivamente, a e b
- Assegnare il codice $\prec 5, a \succ$ alla funzione $f(\vec{x})$ definita per μ-ricorsione applicata ad una funzione g il cui codice è a

In seguito bisogna sistematizzare e codificare le computazioni e definire la funzione $\mathcal{U}$. Chi fosse interessato può trovare la prova dettagliata nel libro di Odifreddi.

Dal Teorema 3 segue che vi è un modo molto conveniente di assegnare almeno un indice ad ogni funzione parziale ricorsiva. Infatti ogni funzione ricorsiva parziale è estensionalemnte uguale ad una della forma $\mathcal{U}(\mu y.\mathcal{T}_n(e, \vec{x}, y))$, per un opportuno numero e, detto l'indice di tale funzione.

Definition 3. *Scriviamo φ_e^n (o $\{e\}^n$) per indicare la funzione parziale ricorsiva n-aria*

$$\varphi_e^n(\vec{x}) \simeq \{e\}^n(\vec{x}) \simeq \mathcal{U}(\mu y.\mathcal{T}_n(e, \vec{x}, y))$$

Scriviamo $\varphi^n_{e,s}$ *(o* $\{e\}^n_s$*) per indicare la funzione parziale ricorsiva n-aria*

$$\varphi^n_{e,s}(\vec{x}) \simeq \{e\}^n_s(\vec{x}) \simeq \begin{cases} \varphi^n_e(\vec{x}) & \textit{se } \exists y < s.\mathcal{T}_n(e,\vec{x},y) \\ \uparrow & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Intuitivamente $\varphi^n_{e,s}$ può essere pensata come l'approssimazione di φ^n_e ottenuta considerando le computazioni di quest'ultima che si protraggono per alpiù un numero finito di passi specificato in qualche modo da s.

Il Teorema 3 (Forma normale di Kleene) ci dice che

$$\varphi^n_e(\vec{x}) \downarrow \Leftrightarrow \exists y.\mathcal{T}_n(e,\vec{x},y)$$

e pertanto il predicato $\varphi^n_e(\vec{x}) \downarrow$ è r.e.

Dalla Definizione 3 inoltre abbiamo che

$$\varphi^n_{e,s}(\vec{x}) \downarrow \Leftrightarrow \exists y < s.\mathcal{T}_n(e,\vec{x},y)$$

e pertanto il predicato $\varphi^n_{e,s}(\vec{x}) \downarrow$ è ricorsivo. Useremo questa osservazione più volte in seguito. L'idea importante è che, al contrario del caso $\varphi^n_e(\vec{x}) \uparrow$, quando $\varphi^n_{e,s}$ è indefinita su un dato input $\vec{x}$ (notazione $\varphi^n_{e,s}(\vec{x}) \uparrow$) non è per il fatto che "un algoritmo non termini" e quindi si ha il modo di accorgersi in maniera effettiva se $\varphi^n_{e,s}$ è o meno indefinita su un dato input.

Molto importante per il resto del corso è il concetto di *enumerazione*. Un'enumerazione di un insieme A è una funzione suriettiva da $\mathbb{N}$ in A.

Theorem 4 (Enumerazione di Kleene). *La sequenza* $(\varphi^n_e)_{e\in\mathbb{N}}$ *è una enumerazione parziale ricorsiva delle funzioni parziali ricorsive n-arie, nel senso che:*

(i) per ogni $e \in \mathbb{N}$, φ^n_e *è una funzione parziale ricorsiva n-aria*
(ii) se ψ *è una funzione parziale ricorsiva n-aria, allora esiste un numero e tale che* $\varphi^n_e \simeq \psi$
(iii) esiste una funzione parziale ricorsiva $n+1$*-aria u tale che* $u(e,\vec{x}) \simeq \varphi^n_e(\vec{x})$

Proof. L'enunciato segue dal Teorema 3. Infatti basta definire $\varphi(e,\vec{x}) \simeq \mathcal{U}(\mu y.\mathcal{T}_n(e,\vec{x},y))$. □

Theorem 5 (Universal partial function). *Esiste una funzione parziale ricorsiva binaria* $\varphi(e,x)$*, detta* funzione parziale ricorsiva universale *tale che per ogni funzione parziale ricorsiva n-aria* ψ *esiste un numero e tale che* $\psi(x_1,\ldots,x_n) \simeq u(e, \prec x_1,\ldots,x_n \succ)$.

Proof. Per il Teorema 4 esiste un numero e tale che $\psi(x_1,\ldots,x_n) \simeq \varphi^n_e(x_1,\ldots,x_n)$. Definiamo $u(e,x) \simeq \mathcal{U}(\mu y.\mathcal{T}_n(e,x_1,\ldots,x_n,y))$, dove la tupla $(x_1,\ldots,x_n)$ è tale che $x = \prec x_1,\ldots,x_n \succ$. Allora è evidente che $u(e,\prec x_1,\ldots,x_n \succ) \simeq \varphi^n_e(x_1,\ldots,x_n)$ e questo conclude la dimostrazione. □

Intuitivamente il Teorema 5 ci dice che la funzione universale genera gli indici di tutte le funzioni parziali ricorsive in ogni numero di variabili. Pertanto la funzione universale è l'esatto analogo della macchina di Turing universale.

Riprendiamo ora la dimostrazione del Teorema 1, in particolare l'implicazione (ii)⇒(iv).

Theorem 6. *Sia $P \subseteq \mathbb{N}^n$ un predicato non vuoto. L'enunciato (ii) implica il (iv):*

(ii) esiste una funzione ricorsiva parziale $\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ tale che $\mathsf{dom}(\varphi) = P$.
(iv) esiste una funzione ricorsiva totale $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\mathsf{ran}(\phi) = \{\prec\vec{x}\succ : P(\vec{x}) \text{ vale}\}$

Proof. (ii)⇒(iv). Sia $\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una funzione ricorsiva parziale tale che $\mathsf{dom}(\varphi) = P$. Per il Teorema di Enumerazione di Kleene esiste un numero e tale che $\varphi \simeq \varphi_e$. Sia $\vec{z}$ una n-upla in P. Definiamo una funzione ϕ come segue:

$$\phi(\langle x, s\rangle) = \begin{cases} x & \text{se } Seq(x) \text{ e } x = \prec\vec{y}\succ \text{ e } \varphi_{e,s}(\vec{y})\downarrow \\ \prec\vec{z}\succ & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora ϕ è ricorsiva totale ed inoltre $\mathsf{ran}(\phi) = \{\prec\vec{x}\succ : P(\vec{x}) \text{ vale}\}$. □

Sia φ una funzione parziale n-aria. Il *grafico* di φ è l'insieme $\mathsf{gr}(\varphi) = \{(\vec{x}, y) : \varphi(\vec{x})\downarrow \text{ e } \varphi(\vec{x}) = y\}$.

Theorem 7 (del grafico). *Sia φ una funzione parziale e sia f una funzione totale.*

(i) φ è ricorsiva parziale sse l'insieme $\mathsf{gr}(\varphi)$ è r.e.
(ii) f è ricorsiva sse l'insieme $\mathsf{gr}(f)$ è ricorsivo.

Proof. (i) (⇒) Supponiamo φ ricorsiva parziale. Sia e un numero tale che $\varphi \simeq \varphi_e$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}(\vec{x}, z) \in \mathsf{gr}(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi_e(\vec{x}) = z \\ &\Leftrightarrow \mathcal{U}(\mu y.\mathcal{T}_n(e, \vec{x}, y)) = z \\ &\Leftrightarrow \exists y.(\mathcal{T}_n(e, \vec{x}, y) \wedge \mathcal{U}(y) = z \wedge \forall t < y.\neg\mathcal{T}_n(e, \vec{x}, t))\end{aligned}$$

Pertanto $\mathsf{gr}(\varphi)$ è r.e.
(⇐) Supponiamo $\mathsf{gr}(\varphi)$ r.e. Sia R un predicato ricorsivo tale che $(\vec{x}, z) \in \mathsf{gr}(\varphi) \Leftrightarrow \exists y.R(\vec{x}, z, y)$. Allora $\vec{x} \in \mathsf{dom}(\varphi) \Leftrightarrow \exists z.\exists y.R(\vec{x}, z, y)$. Pertanto $\varphi(\vec{x}) \simeq (\mu t.R(\vec{x}, (t)_1, (t)_2))_1$, dimostrando che φ è ricorsiva parziale.

(ii) (⇒) Supponiamo f ricorsiva totale. Allora la funzione caratteristica di $\mathsf{gr}(f)$ è la seguente:

$$\mathsf{c}_{\mathsf{gr}(f)}(\vec{x}, z) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(\vec{x}) = z \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quest'ultima è una funzione totale ricorsiva, quindi $\mathsf{gr}(f)$ è ricorsivo. $(\Leftarrow)$ Supponiamo $\mathsf{gr}(f)$ ricorsivo. Poicé f è totale, abbiamo che $\forall \vec{x}. \exists z. (\vec{x}, z) \in \mathsf{gr}(f)$. Siccome $f(\vec{x}) = \mu z.[(\vec{x}, z) \in \mathsf{gr}(f)]$, è evidente che f è totale e ricorsiva. $\square$