250 Temel Sayılar Teorisi Problemi

Wacław Sierpiński

7 Kasım 2025

İçindekiler

Sunuş

Bu kitap, matematik dünyasına değerli katkılar sunmuş olan Wacław Sierpiński'nin klasik eseri *250 Problems in Elementary Number Theory*'nin Türkçe çevirisidir. Amacımız, bu kıymetli eseri matematikseverlere ve öğrencilere ücretsiz olarak ulaştırarak, sayılar teorisinin temel problemlerine olan ilgiyi artırmaktır.

Eserin ilk baskısının üzerinden elli yılı aşkın bir süre geçmiş olması ve bu çevirinin ticari bir amaç gütmemesi sebebiyle, çalışmamızı ücretsiz olarak erişime açmanın yerinde olacağına inanıyoruz. Yine de eserin telif hakları devam ediyorsa, hak sahiplerinin acarzfr@gmail.com adresinden bizimle iletişime geçmesi durumunda gerekli düzenlemeleri yapmaya hazır olduğumuzu belirtmek isteriz.

Bu kitabın Türkçe matematik literatürüne katkı sağlayacağına inanıyor ve matematik meraklılarının bu eseri aynı coşkuyla okuyacağını umuyoruz.

Wacław Sierpiński'yi saygı ve minnetle anarak, çevirinin faydalı olmasını dileriz.

Çeviri Ekibi

Teknik Detaylar

Bu kitap, açık kaynaklı bir yazım sistemi olan Quarto ile hazırlanmıştır. Kitap, HTML ve PDF olmak üzere iki farklı formatta sunulmaktadır:

- HTML
- PDF

Soruların çözümleri dipnotlarda verilmiştir. Her iki formatta da soru numarasından çözüme kolayca ulaşabilirsiniz.

Ayrıca, Hypothesis aracını kullanarak kitap üzerine notlar alabilir ve bu notları herkese açık veya özel olarak paylaşabilirsiniz. Bunun için HTML formatında, sayfanın sağındaki panelden ücretsiz bir hesap oluşturmanız yeterlidir.

Problemler ve Çözümler

Tam Sayıların Bölünmesi

1. n^2+1 sayısının $n+1$'e bölünecek şekilde tüm pozitif tam sayı n değerlerini bulunuz.[1]

2. x^3-3 sayısının $x-3$'e bölünecek şekilde tüm $x \neq 3$ tam sayılarını bulunuz.[2]

3. $4n^2+1$ sayısının 5'e ve 13'e bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda pozitif tam sayı n'nin bulunduğunu kanıtlayınız.[3]

4. Her pozitif tam sayı n için $3n^3+26n-27$ sayısının 169'a bölündüğünü kanıtlayınız.[4]

5. $k=0,1,2,...$ için $22^{6k+2}+3$ sayısının 19'a bölündüğünü kanıtlayınız.[5]

6. $2^{70}+3^{70}$ sayısının 13'e bölündüğünü gösteriniz.[6]

[1] Bu koşulu sağlayan yalnızca bir pozitif tam sayı vardır: $n=1$. Gerçekten de $n^2+1 = n(n+1)-(n-1)$'dir; bu nedenle, $n+1 \mid n^2+1$ ise, $n+1 \mid n-1$ olur. Bu, pozitif tam sayılar için yalnızca $n-1=0$ olduğunda mümkündür, yani $n=1$ olmalıdır.

[2] $x-3=t$ olarak tanımlayalım. Böylece, t, $t \neq 0$ olacak şekilde bir tam sayı olur ve $t \mid (t+3)^3-3$, bu da $t \mid 3^3-3$ yani $t \mid 24$ koşuluna eşdeğerdir. Bu nedenle, t'nin 24'ün bir tam sayı böleni olması gerekli ve yeterlidir. Bu durumda, t, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$ sayılarından biri olmalıdır. $x=t+3$ için şu değerleri elde ederiz: $-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15$, ve 27.

[3] Örneğin, $65k+56$ aritmetik dizisindeki tüm n sayıları (burada $k=0,1,2,...$), istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de, $n=65k+56$ için, $k \geq 0$ tam sayısı ile $n \equiv 1 \pmod 5$ ve $n \equiv 4 \pmod{13}$ olur. Bu nedenle, $4n^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ ve $4n^2+1 \equiv 0 \pmod{13}$ olur. Böylece, $5 \mid 4n^2+1$ ve $13 \mid 4n^2+1$.

[4] İddiamızı tümevarım yöntemiyle kanıtlayacağız. $169 \mid 3^6-26-27 = 676 = 4\cdot169$ olduğunu biliyoruz. Sonraki adımda, $3^{3(n+1)+3}-26(n+1)-27-(3^{3n+3}-26n-27) = 26(3^{3n+3}-1)$ elde ederiz. Ancak, $13 \mid 3^3-1$, bu nedenle $13 \mid 3^{3(n+1)}-1$ ve $169 \mid 26(3^{3n+3}-1)$'dir. Tümevarım yöntemiyle kanıt hemen ortaya çıkar.

[5] $2^6=64 \equiv 1 \pmod 9$ olduğuna göre, $k=0,1,2,...$ için $2^{6k} \equiv 1 \pmod 9$ elde ederiz. Bu nedenle $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod 9$ olur ve her iki taraf da çift olduğundan, $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod{18}$ elde ederiz. Buradan $2^{6k+2} = 18t+2^2$ elde ederiz, burada $t \geq 0$ bir tam sayıdır. Ancak, Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$'dur ve $2^{18t} \equiv 1 \pmod{19}$ olur, $t = 0,1,2,...$ için. Böylece, $2^{6k+2} \equiv 2^{18t+4} \equiv 2^4 \pmod{19}$ olur; buradan da $2^{6k+2}+3 \equiv 2^4+3 \equiv 0 \pmod{19}$ elde edilir ve bu da kanıtlanması gereken şeydir.

[6] Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ olduğundan, $2^{60} \equiv 1 \pmod{13}$ elde ederiz. Ayrıca, $2^5 \equiv 6 \pmod{13}$ olduğu için, $2^{10} \equiv -3 \pmod{13}$ elde ederiz. Öte yandan, $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$'tür, bu da $3^{69} \equiv 1 \pmod{13}$ ve $3^{70} \equiv 3 \pmod{13}$ anlamına gelir. Bu nedenle, $2^{70}+3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$ olur, yani $13 \mid 2^{70}+3^{70}$, bu da kanıtlanması gereken şeydir.

7. $20^{15}-1$ sayısının $11\cdot 31\cdot 61$ çarpanına bölündüğünü kanıtlayınız.[7]

8. Her pozitif tam sayı m ve $a>1$ tam sayısı için

$$\left(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1\right) = (a-1, m)$$

   eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.[8]

9. Her pozitif n sayısı için $3\cdot(15^5+25^5+\dots+n^5)$ sayısının $13^3+23^3+\dots+n^3$'e bölündüğünü kanıtlayınız.[9]

10. $1^n+2^n+\dots+(n-1)^n$ sayısının n'e bölünmesini sağlayan tüm $n>1$ tam sayılarını bulunuz.[10]

---

[7]Açıkça görülüyor ki, $20^{15}-1$ sayısının her bir asal böleni olan 11, 31 ve 61'in $20^{15}-1$'i böldüğünü göstermek yeterlidir. $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ ve $10 \equiv -1 \pmod{11}$ olduğundan, $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$, bu da $20^5 \equiv 1 \pmod{11}$ ve $20^{15} \equiv 1 \pmod{11}$ anlamına gelir. Dolayısıyla $11 \mid 20^{15}-1$. Sonra, $20 \equiv -11 \pmod{31}$ olduğundan, $20^2 \equiv 121 \equiv -3 \pmod{31}$'dir. Bu nedenle, $20^3 \equiv (-11)(-3) = 33 \equiv 2 \pmod{31}$ ve $20^{15} \equiv 2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ olur. Böylece, $31 \mid 20^{15}-1$. Son olarak, $3^4 \equiv 20 \pmod{61}$ ve bu da $20^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1 \pmod{61}$ anlamına gelir (Fermat'ın küçük teoremine göre); bu nedenle $61 \mid 20^{15}-1$.

[8]$d = \left(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1\right)$ olarak tanımlayalım. Aşağıdaki eşitliği göz önünde bulunduralım:

$$\frac{a^m-1}{a-1} = (a^{m-1}-1)+(a^{m-2}-1)+\dots+(a-1)+m \tag{1}$$

ve $a-1 \mid a^k-1$ ifadesinin $k=0,1,2,\dots$ için geçerli olduğunu dikkate alarak, $d \mid m$ elde ederiz. Bu nedenle, $a-1$ ve m sayılarının $d>\delta$ ortak bir böleni olsaydı, (1) eşitliğine göre $\delta \mid \frac{a^m-1}{a-1}$ olurdu ve a^m-1 ile $a-1$ sayıları $\delta > d$ ortak bir bölenine sahip olurdu ki bu imkânsızdır. Bu nedenle, d, $a-1$ ve m sayılarının en büyük ortak bölenidir ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

[9]Pozitif tam sayı n için, şu eşitliğe sahibiz:

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(bu eşitlik tümevarım ile elde edilir). Yine tümevarım ile şu eşitliği de elde ederiz:

$$1^5+2^5+\dots+n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

bu da tüm pozitif tam sayılar n için geçerlidir. Bu formüllerden şu sonucu elde ederiz:

$$3(1^5+2^5+\dots+n^5)/(1^3+2^3+\dots+n^3) = 2n^2+2n-1$$

bu da istenen özelliği kanıtlar.

[10]Bunlar, 1'den büyük tüm tek sayılardır. Aslında, n tek ve $n>1$ ise, $(n-1)/2$ pozitif bir tam sayıdır ve $k=1,2,\dots,(n-1)/2$ için kolayca şu ifadeyi elde ederiz:

$$n \mid k^n+(n-k)^n \quad (\text{çünkü } (-k)^n = -k^n)$$

Böylece, $n \mid 1^n+2^n+\dots+(n-1)^n$ elde ederiz. Diğer yandan, eğer n çift ise, 2^s, n'yi bölen en yüksek 2 kuvveti olsun (bu nedenle s pozitif bir tam sayıdır). $2^s \geq s$ olduğundan, k çift olduğunda $2^s \mid k^n$ ve k tek olduğunda (bu dizideki k sayılarının sayısı $(n-1)/2$'dir) Euler'in teoremine göre $k^{2^s-1} \equiv 1 \pmod{2^s}$ ve $k^n \equiv 1 \pmod{2^s}$ elde ederiz (çünkü $2^s \mid n$). Böylece şu sonuca ulaşırız:

$$1^n+3^n+\dots+(n-3)^n+(n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

11. Pozitif tam n sayısı için $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ ve $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ sayılarından hangisinin 5'e bölünüp, hangisinin bölünmediğini tespit ediniz.[11]

12. Her n pozitif tam sayısı için

$$x + 1, x^x + 1, x^{x^x} + 1, ...$$

sonsuz dizisinin her bir terimi n'ye bölünecek şekilde bir x pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[12]

13. Her x çift pozitif tam sayısı için

$$x^x + 1, x^{x^x} + 1, x^{x^{x^x}} + 1, ...$$

---

bu da şu sonucu verir:

$$1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

$2^n + 4^n + \cdots + (n-2)^n \equiv 0 \pmod{2^s}$ olduğundan, $n \mid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ elde ederiz. Eğer $2^s \mid n$ ise, $\frac{n}{2} \equiv 0 \pmod{2^s}$ olur ve $2^s \mid n$ ve $2^{s+1} \mid n$ çelişkisini elde ederiz. Böylece, n çift olduğunda $n \nmid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ elde edilir.
Not: Fermat teoreminden şu sonucu kolayca çıkarırız: Eğer n bir asal sayıysa, $n \mid 1^n + 1 - 1^n + \cdots + (n-1)^n + 1$. Ancak, bu ilişkiyi sağlayan bileşik bir sayı bilmiyoruz. G. Ginga, böyle bir bileşik sayı olmadığını öne sürdü, ancak bu 1'den küçük bileşik bir sayının var olmadığını henüz kanıtlayamadı.

[11] Dört durumu inceleyelim:
(a) $n = 4k$ olsun, burada k pozitif bir tam sayıdır. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+1} - 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 - 2 + 1 \equiv 1 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+1} + 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod 5.$$

($2^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan, $2^{4k} \equiv 1 \pmod 5$'tir.)
(b) $n = 4k + 1$ olsun, $k = 0, 1, 2, ...$ Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+3} - 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 - 4 + 1 \equiv 0 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+3} + 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 + 4 + 1 \equiv 3 \pmod 5.$$

(c) $n = 4k + 2$ olsun, $k = 0, 1, 2, ...$ Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+5} - 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 - 8 + 1 \equiv 0 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+5} + 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 + 8 + 1 \equiv 1 \pmod 5.$$

(d) $n = 4k + 3$ olsun, $k = 0, 1, 2, ...$ Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+7} - 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 - 1 + 1 \equiv 3 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+7} + 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 5.$$

Sonuç olarak, a_n sayıları yalnızca $n \equiv 1$ veya $2 \pmod 4$ olduğunda 5'e bölünürken, b_n sayıları yalnızca $n \equiv 0$ veya $3 \pmod 4$ olduğunda 5'e bölünür. Böylece, yalnızca a_n veya b_n sayılarından biri 5'e bölünür.

[12] $x = 2n - 1$ seçmek yeterlidir. Böylece $x, x^x, x^{x^x}, ...$ sayılarının her biri tek olur ve dolayısıyla $2n = x + 1$, sonsuz dizinin her bir terimi olan $x + 1, x^x + 1, x^{x^x} + 1, ...$ sayılarının bir bölenidir.

dizisinin terimlerinden hiçbirinin n'ye bölünmeyecek şekilde sonsuz sayıda n tek pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[13]

14. Her n pozitif tam sayısı için $(n+1)^n - 1$ sayısının n^2'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[14]

15. Her n pozitif tam sayısı için $2^{(2^n-1)n} - 1$ sayısının $(2^n-1)^2$'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[15]

16. $2^n + 1$ sayısı n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız. Bu koşulu sağlayan tüm asal sayıları bulunuz.[16]

17. Her $a > 1$ tam sayısı için $a^n + 1$ sayısının n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[17]

---

[13] Örneğin, $4k+3$ biçimindeki tüm asal sayılar p. Aslında, x çift olduğunda, dizideki $x, x^x, x^{x^x}, \ldots$ terimlerinin her biri çifttir. Eğer dizideki $x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \ldots$ terimlerinden herhangi biri p'ye tam bölünseydi, pozitif bir tam sayı m için $p \mid x^m + 1$ ilişkisine sahip olurduk, dolayısıyla $(x^m)^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Ancak, -1, $4k+3$ biçimindeki asal bir modül için bir karekök kalanı olamaz.

[14] Binom açılımından

$$(1+n)^n = 1 + \binom{n}{1}n + \binom{n}{2}n^2 + \cdots + \binom{n}{n}n^n$$

$n > 1$ için (bu, $1^2 \mid 2^2 - 1$ durumu göz önüne alındığında varsayılabilir), üçüncü terimden itibaren tüm terimler n'yi en az 2 üssünde içerir. İkinci terim $\binom{n}{1}n = n^2$'ye eşittir. Bu nedenle, $n^2 \mid ((1+n)^n - 1)$ ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

[15] Problem 14'e göre, pozitif tam sayılar m için

$$m^2 \mid ((m+1)^m - 1)$$

ilişkisini elde ederiz. $m = 2^n - 1$ için, $(m+1)^m = 2^{(2^n-1)}$ olduğundan, şu ilişkiyi elde ederiz:

$$(2^n-1)^2 \mid (2^{(2^n-1)n} - 1),$$

ve bu, kanıtlanması gereken şeydir.

[16] $3 \mid 2^3 + 1$ ve pozitif bir tam sayı m için $3^m \mid 2^{3^m} + 1$ olduğunu varsayalım. O zaman $2^{3^{m+1}} = (3^m k - 1)^3 = 3^m k^3 - 3^m k^2 + 3^m k - 1 = 3^m t - 1$, burada t pozitif bir tam sayıdır. Böylece $3^{m+1} \mid 2^{3^{m+1}} + 1$ ve tümevarım ile $3^m \mid 2^{3^m} + 1$'i elde ederiz, $m = 1, 2, \ldots$. Ancak, $n \mid 2^n + 1$ ilişkisini sağlayan başka pozitif tam sayılar da vardır. Aslında, pozitif bir tam sayı n için $n \mid 2^n + 1$ ise, aynı zamanda $2^n + 1 \mid 2^{2^n+1} + 1$ olur. Gerçekten de $2^n + 1 = kn$, burada k bir tam sayıdır (açıkça, tektir), o zaman $2^n + 1 \mid 2^{kn} + 1 = 2^{2^n+1} + 1$ olur. Böylece $9 \mid 2^3 + 1$ ifadesi $513 \mid 2^{513} + 1$ sonucunu verir.

n'nin asal olduğunu ve $n \mid 2^n + 1$ olduğunu varsayalım. Fermat'ın teoremiyle, $n \mid 2^n - 2$ elde ederiz, bu da $n \mid 3$ sonucunu verir. n asal olduğuna göre, $n = 3$ elde ederiz. Gerçekten, $3 \mid 2^3 + 1$ olur. Böylece, $n \mid 2^n + 1$ ilişkisini sağlayan tek asal sayı $n = 3$ olur.

[17] Öncelikle O. Reutter'e ait aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız (bkz. (Reutter 1963)):

Eğer $a+1$, tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman $n \mid a^n + 1$ ilişkisi pozitif tam sayılarla sonsuz çözümü vardır.

Eğer $a+1$, tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman $p > 2$ olan bir asal böleni vardır. Bu durumda, $p \mid a + 1$ olur.

Lemma. Eğer $k \geq 0$ bir tam sayı ve $p \mid a^k + 1$ ise, o zaman $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$.

Lemmanın İspatı. $k \geq 0$ olan bir tam sayı için $p^k \mid a^k + 1$ olduğunu varsayalım. $a^k = b$ yazalım, bu durumda $p^k \mid b + 1$ elde ederiz, dolayısıyla $b = -1 \pmod{p^{k+1}}$ olur.

18. $2^n + 2$ sayısı n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[18]

19. $a^{10} + 1$ sayısının 10'a bölünmesini sağlayan tüm pozitif tam a sayılarını bulunuz.[19]

---

p tek asal olduğundan, $a^{p^{k+1}} + 1 = b^{p+1} = (b+1)(b^{p-1} - b^{p-2} + \cdots - b + 1)$ ifadesini elde ederiz.
Ve (çünkü $b = -1 \pmod{p^{k+1}}$ bu da $b^p = 1 \pmod{p^{k+1}}$ anlamına gelir) $b^2 = 1 \pmod p$ ve $b^{2i} = 1 \pmod p$ elde ederiz. Bu nedenle:

$$b^{p-1} - b^{p-2} + \cdots - b + 1 = 0 \pmod p,$$

bu da ikinci terimin p'ye bölünebilir olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ elde ederiz ve bu ispatlanması gereken şeydir.
Lemma, $p \mid a+1$ olduğunda, $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ ve $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ için $k = 1, 2, \ldots$ ifadesiyle tümevarım sağlar. Bu da $n \mid a^n + 1$ ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı n olduğunu ve O. Reutter'in teoremini ispatladığımızı gösterir.
Reutter teoreminin koşullarını sağlayan pozitif tam sayılar için, a'nın tek ve $a > 1$ olduğunu varsaymak yeterlidir. Bu durumda, $a^2 + 1$ ve a^2 ifadesi $8k + 1$ formundadır. Dolayısıyla, $a^2 + 1 = 8k + 2 = 2(4k + 1)$ tek bir çift sayıdır. Şu lemayı ispatlayacağız:
Lemma. Eğer a tek ise, o zaman a ve $a^2 + 1$ çift tek sayılar olup, $s \mid a + 1$ ise, pozitif bir tam sayı $s_1 > s$ vardır ki s_1 ve $a^{s_1} + 1$ de çift tek sayılardır ve $s_1 \mid a^{s_1} + 1$.
İspat. $a^2 + 1$ ve $a^{s_1} + 1$ çift tek sayılar olduğundan, $a + 1 = ms$ elde ederiz, burada m tektir. Böylece $a^s + 1 = a^{s_1} + 1 = a^{s_1} + 1$'dir ve $a^{s_1} + 1$ çift bir çift tek sayıdır.
$s_1 \mid a+1$ olduğunda, $s_1 \mid a^{s_1}+1$ ve $s_1 \mid a^{s_1}+1$ elde ederiz. Bu durumda, $a > 1$ olduğundan, $s_1 > s$ olur. Böylece lema ispatlanmış olur.
a tek olduğundan, $s = 2$ diyebiliriz, bu da lemanın koşullarını sağlar. Böylece, $n \mid a^n + 1$ ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı n olduğunu gösteririz ve bu ispatlanması gereken şeydir (bkz. (Sierpiński 1964c)).

[18] n çift ise ve $n \mid 2^n + 2$ ve $n \mid n - 1 \mid 2^{n-1} + 1$ ise (örneğin $n = 2$ için bu doğrudur), o zaman $n_1 = 2^n + 2$ sayısı için $n_1 \mid 2^{n_1} + 2$ ve $n_1 \mid n_1 - 1 \mid 2^{n_1 - 1} + 1$ elde ederiz. Aslında, $n \mid 2^n + 2$ ve n çift olduğunda, $2^n + 2 = nk$ elde edilir, burada k tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{2^n+2} + 1 = 2^{2^{2^n+2}} + 2$$

$n_1 = 2^n + 2$ için ise:

$$n_1 - 1 = 2^n + 1 \mid 2^{2^n+1} + 1$$

Sonra, $n - 1 \mid 2^{n-1} + 1$ ifadesini elde ederiz ki bu da $2^n + 1 = 2^{n-1}m + 1$'i verir, burada m tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{a-1}m + 1 = 2^{2^n+1}$$

elde ederiz, bu da:

$$2^n + 2 \mid 2^{2^{2^n+2}+2}, \quad ve \quad n_1 \mid 2^{n_1+2}$$

Bu koşulları sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı n vardır.
$n_1 = 2^n + 2$ olduğundan, koşullarımızı sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı vardır. $n = 2$'den başlayarak, ardışık sayılar 2, 6, 66, $2^{66} + 2$, ...Ancak, C. Bindschedler bu yöntemin $n \mid 2^n + 2$ ilişkisini sağlayan tüm sayıları vermediğini fark etti; örneğin 946 sayısı $2^{946} + 2$ ilişkisini sağlamaz. Bu problemi tartışan C. Bindschedler tarafından verilen çözümü, *Elemente der Mathematik* dergisinin 18. sayısındaki 430 numaralı problemimde görebilirsiniz (1963), sayfa 90.

[19] Eğer a bir pozitif tam sayıysa ve r sayısı a sayısının 10'a bölünmesinden kalan ise, $a^{10} + 1$ ifadesi ancak ve ancak $r^{10} + 1$ ifadesi 10'a bölünebiliyorsa 10'a bölünür. Bu nedenle, sadece $r = 0, 1, 2, \ldots, 9$ sayıları dikkate alınmalıdır ve bu sayılar için sadece $3^{10} + 1$ ve $7^{10} + 1$ ifadelerinin 10'a bölünebildiğini kolayca doğrularız. Dolayısıyla, $a^{10} + 1$ ifadesi 10'a

20. Hiçbir $n > 1$ tam sayısı için $2^n - 1$ sayısının n'ye bölünmediğini kanıtlayınız.[20]

    (a) $2^n + 1$ sayısının n'ye bölünmesini sağlayan sonsuz tane n pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.

21. $3^n + 1$ sayısının n'ye bölünmesini sağlayan tüm n tek pozitif tam sayılarını bulunuz.[21]

22. $n \cdot 2^n + 1$ sayısının 3'e bölünmesini sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını

---

bölünebilen tüm a sayıları $10k + 3$ ve $10k + 7$ formundadır, burada $k = 0, 1, 2, \ldots$.

[20] $n > 1$ pozitif tam sayılarının olduğunu ve n'in en küçüğü olduğunu varsayalım. Euler teoremine göre $n \mid (2^n - 1)$. Ancak, pozitif tam sayılar a ve b için $2^a - 1$ ve $2^b - 1$ sayıların en büyük ortak böleni $2^d - 1$'dir, burada $d = (a, b)$'dir.
$a = n$ ve $b = \varphi(n)$ için $d = (n, \varphi(n))$'dir, dolayısıyla $n \mid (2^d - 1)$'dir. Ancak, $n > 1$ olduğundan $2^d - 1 > 1$ elde ederiz, bu da $d > 1$ ve $1 < d \leq \varphi(n) < n$ anlamına gelir ve $d \mid n \mid (2^d - 1)$ ifadesi n'in tanımına aykırıdır.
(a) Örneğin, $n = 3^k$ biçimindeki tüm sayılar için $(k = 1, 2, \ldots)$. Bu durumu matematiksel tümevarım yoluyla ispatlayacağız. Elimizde $3 \mid 2^{3^k} + 1$ var. Eğer herhangi bir pozitif tam k için $3 \mid 2^{3^k} + 1$, o zaman, aşağıdaki özdeşlikten hareketle

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (2^{3^k} + 1)(2^{3^k} - 2^{3^k} + 1)$$

ve şu gözlemden yola çıkarak:

$$2^{3^k} - 2^{3^k} + 2 = 2^{3^k} + 2 - (2^{3^k} + 1), \quad \text{ve} \quad 3 \mid 2^{3^k} + 2$$

(çünkü 4^3 bölündüğünde kalan 1 verir), formülün ikinci terimi $2^{3^{k+1}} + 1$'in 3 ile bölünebilir olduğunu gösterir, bu da $3 \mid 2^{3^{k+1}} + 1$ anlamına gelir.

[21] $n = 1$ olan tek sayıdır. Varsayalım ki, $n > 1$ olan bir tek sayı vardır ve $n \mid 3^n + 1$. Bu durumda, $n \mid 9n - 1$. n, $n \mid 9^{\varphi(n)} - 1$ ile pozitif bir tam sayı olsun. $d = (\varphi(n), n)$ olarak tanımlandığında, $n \mid 9^d - 1$ elde edilir. Ancak, $d > 1$ olduğunda, $n \mid 8$ elde edilir ki, n tek olduğu için bu mümkün değildir. Sonuç olarak $1 < d \leq \varphi(n) < n$ ve $d \mid n$, bu nedenle $n > 1$ koşulunu sağlayan tek bir sayı yoktur.

bulunuz.[22]

23. Her tek p asal sayısı için $n \cdot 2^n + 1$ sayısının p'ye bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[23]

24. Her pozitif tam n sayısı için, y^y sayısı x^x'e bölünecek, fakat y sayısı x^x'e bölünmeyecek şekilde $x > n$ ve y pozitif tam sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.[24]

25. Her n tek pozitif tam sayısı için $2^n - 1$ sayısının n'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[25]

---

[22] Açıkça, n sayısı 3'e bölünemez. Bu nedenle, n sayısı aşağıdaki formlardan birinde olmalıdır: $6k+1$, $6k+2$, $6k+4$ veya $6k+5$, burada $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Eğer $n = 6k+1$ ise, $2^6 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan,

$$n2^n + 1 = (2^6)2 + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

Bu durumda $3 \mid n2^n + 1$ olur.
Eğer $n = 6k+2$ ise,

$$n2^n + 1 = 2(2^6)2 + 1 \equiv 8 + 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

yani yine $3 \mid n2^n + 1$.
Eğer $n = 6k+4$ ise,

$$n2^n + 1 \equiv 4(2^6)2^4 + 1 \equiv 2^5 + 1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Son olarak, $n = 6k+5$ ise,

$$n2^n + 1 = 5(2^6)2^5 + 1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Bu durumda, $n2^n + 1$ ifadesi ancak ve ancak n, $6k+1$ veya $6k+2$ formunda olduğunda 3'e bölünebilir. Burada $k = 0, 1, 2, \ldots$.

[23] Eğer p tek bir asal sayıysa ve $n = (p-1)(kp+1)$, burada $k = 0, 1, 2, \ldots$, o zaman $n \equiv -1 \pmod p$ ve $p - 1 \mid n$. Fermat'nın küçük teoremi gereğince, $2^n \equiv 1 \pmod p$ olur, dolayısıyla $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod p$.
Not: Bu problemden, $n2^n+1$ formunda sonsuz sayıda bileşik sayı olduğu sonucu çıkarılabilir, burada n pozitif bir tam sayıdır. Bu formdaki sayılar Cullen sayıları olarak bilinir. $1 < n < 141$ aralığında bu formdaki tüm sayılar bileşik olduğu ispatlanmıştır, ancak $n = 141$ için $n2^n + 1$ asal bir sayıdır. Sonsuz sayıda asal Cullen sayısı olup olmadığı bilinmemektedir.

[24] n verilen bir pozitif tam sayı olsun ve $k > 1$ olmak üzere $2^k > n$ olacak şekilde pozitif bir tam sayı olsun. p, $2^k - 1$'den büyük bir asal sayı olsun. $k > 1$ olduğu için, $x = 2^k$, $y = 2p$ olarak alalım. Buradan $x \nmid y$ ve $x^x \mid y^y$ olur, çünkü $x = 2^{2^k}$ ve $y^y = (2p)^{2p}$, burada $2p > 2^k k$.
Örneğin, $4 \nmid 10$, fakat $4^4 \mid 10^{10}$, $8 \nmid 12$, fakat $8^8 \mid 12^{12}$, $9 \nmid 21$, fakat $9^9 \mid 21^{21}$.

[25] Pozitif tam sayılar için, $\varphi(n) \mid n!$ olduğu açıktır. Aslında, $n = 1$ için bu doğrudur; eğer $n > 1$ ise ve $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \ldots q_k^{a_k}$ asal çarpanlarına ayrılmışsa, burada $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$ olmak üzere, o zaman

$$\varphi(n) = q_1^{a_1-1} q_2^{a_2-1} \ldots q_k^{a_k-1} (q_1 - 1)(q_2 - 1) \ldots (q_k - 1)$$

ve $q_1^{a_1-1} q_2^{a_2-1} \ldots q_k^{a_k-1} \mid n$, $q_1 - 1 < q_2 - 1 < \cdots < q_k - 1$ olduğu için $q_k - 1 < n$ ve $q_1 - 1 < q_2 - 1 < \cdots < q_k - 1$, n'den küçük farklı pozitif tam sayılardır. Böylece $(q_1 - 1)(q_2 - 1) \ldots (q_k - 1)(n-1)! \mid n!$ elde edilir ve buradan $\varphi(n)(n-1)! \mid n!$ olduğu sonucu çıkar.
Eğer n tek ise, (Euler teoremine göre) $n \mid 2^{\varphi(n)} - 1 \mid 2^{n!} - 1$, dolayısıyla $n \mid 2^{n!} - 1$, bu da kanıtlanması gereken şeydi.

26. $2^n - 3$ $(n = 2, 3, \dots)$ sonsuz dizisinin 5'e bölünen sonsuz sayıda terimi olduğunu; 13'e bölünen sonsuz tane terimin bulunduğunu, fakat 65'e bölünen hiçbir terimin bulunmadığını kanıtlayınız.[26]

27. $2^n - 2$ ve $3^n - 3$ sayıları n'ye bölünmesini sağlayan iki en küçük bileşik n sayısını bulunuz.[27]

28. $2^n - 2$ sayısının n'ye bölünmesini, $3^n - 3$ sayısının da n'ye bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.[28]

29. $2^n - 2$ sayısının n'ye bölünmemesini, $3^n - 3$ sayısının da n'ye bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.[29]

---

[26] Fermat'nın teoremine göre, $2^4 \equiv 1 \pmod 5$ ve $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.
$2^3 \equiv 3 \pmod 5$ ve $2^4 \equiv 3 \pmod{13}$ olduğu için, $24k + 3 \equiv 3 \pmod 5$ ve $2^{12k+4} \equiv 3 \pmod{13}$ elde ederiz, burada $k = 0, 1, 2, \dots$. Dolayısıyla, $5 \mid 2^{4k+3} - 3$ ve $13 \mid 2^{12k+4} - 3$, burada $k = 0, 1, 2, \dots$.
Bir sonraki adımda, $2^6 \equiv 1 \pmod{65}$ olduğunu ve bu nedenle $2^{12} \equiv 1 \pmod{65}$ olduğunu görürüz. Böylece $2^n - 3 \equiv 2^n - 3 \pmod{65}$, bu da $2^n - 3$ dizisinin $(n = 2, 3, \dots)$ 12 periyotlu olduğunu gösterir. $2^n - 3$ sayılarının hiçbiri $(n = 2, 3, \dots)$ 65'e bölünmüyorsa, bunu göstermek için $n = 2, 3, \dots, 13$ için $2^n - 3$ sayılarının 65'e bölünüp bölünmediğini kontrol etmek yeterlidir. 65'e bölündüğünde kalanlar sırasıyla $1, 5, 13, 29, 61, 60, 58, 54, 46, 30, 63, 64$ olup, bunların hiçbiri sıfır değildir.

[27] $n \nmid 2^n - 2$ olacak şekildeki en küçük dört bileşik n sayısının 341, 561, 645 ve 1105 olduğu bilinmektedir (örneğin, bakınız Sierpiński, [37, s. 215]). 341 için, $341 \nmid 3^{341} - 3$'tür, çünkü Fermat teoremi gereğince $3^{30} \equiv 1 \pmod{31}$, bu da $3^{330} \equiv 1 \pmod{31}$ anlamına gelir, dolayısıyla $3^{341} \equiv 3^{11} \pmod{31}$ olur. $3^3 \equiv -4 \pmod{31}$ olduğundan, $3^9 \equiv -64 \equiv -2 \pmod{31}$ elde ederiz, dolayısıyla $3^{11} \equiv -18 \pmod{31}$ olur. Bu nedenle $3^{341} - 3 \equiv 3^{11} - 3 \equiv -21 \pmod{31}$'dir ve $31 \nmid 3^{341} - 3$, bu da $341 = 11 \cdot 31 \nmid 3^{341} - 3$ anlamına gelir. Diğer yandan, $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17 \nmid 3^{561} - 3$'tür çünkü $11 \mid 3^{10} - 1$ olması $11 \mid 3^{390} - 1$ ve $11 \mid 3^{561} - 3$ olmasını gerektirir, ve ayrıca $17 \mid 3^{16} - 1$ olması $17 \mid 3^{16 \cdot 35} - 1 = 3^{560} - 1$ olmasını gerektirir. Böylece $17 \nmid 3^{561} - 3$'tür.
Böylece, $n \mid 2^n - 2$ ve $n \nmid 3^n - 3$ olan en küçük bileşik n sayısı $n = 561$ sayısıdır.
645 sayısı $3^{645} - 3$'ün bir böleni değildir çünkü $645 = 3 \cdot 5 \cdot 43$, iken $3^{42} \equiv 1 \pmod{43}$ olması $3^{42 \cdot 15} \equiv 1 \pmod{43}$ olmasını gerektirir. Böylece $3^{630} \equiv 1 \pmod{43}$ ve $3^{645} \equiv 3^{15} \pmod{43}$. $3^4 \equiv -5 \pmod{43}$ olduğundan, $3^6 \equiv -45 \equiv -2 \pmod{43}$, $3^{12} \equiv 4 \pmod{43}$, $3^{15} \equiv 108 \equiv 22 \pmod{43}$ elde ederiz. Bu nedenle $3^{645} - 3 \equiv 19 \pmod{43}$, bu da $43 \nmid 3^{645} - 3$ anlamına gelir.
Diğer yandan, $1105 \mid 3^{1105} - 3$'tür. Gerçekten de, $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$ ve $3^{1104} \equiv 1 \pmod 5$, ve $5 \mid 3^{1105} - 3$. Sonra, $3^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, $3^{1104} \equiv 1 \pmod{13}$ ve $13 \mid 3^{1105} - 3$. Son olarak, $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$, ve $1104 = 16 \cdot 69$ olduğundan, $3^{1104} \equiv 1 \pmod{17}$ elde ederiz, bu da $17 \mid 3^{1105} - 3$ anlamına gelir. Böylece, $n \mid 2^n - 2$ ve $n \mid 3^n - 3$ koşulunu sağlayan en küçük iki bileşik sayı 561 ve 1105'tir.
Not: $n \mid 2^n - 2$ ve $n \mid 3^n - 3$ olacak şekilde sonsuz çoklukta bileşik n sayısı olup olmadığını bilmiyoruz. Bu iddia, A. Schinzel'in asal sayılarla ilgili bir sanısından ((Schinzel ve Sierpiński 1958a)) çıkarsanabilirdi. Asal n sayıları için, Fermat teoremi nedeniyle hem $n \mid 2^n - 2$ hem de $n \mid 3^n - 3$ ilişkileri geçerlidir.

[28] $n \nmid 3^n - 3$ ve Fermat teoremi göz önüne alındığında, n sayısı bileşik olmalıdır ve $n \mid 2^n - 2$ ile $n \nmid 3^n - 3$ koşulunu sağlayan en küçük bileşik n sayısı $n = 341$'dir. Problem 27'nin çözümünde $341 \nmid 3^{341} - 3$ olduğunu kanıtlamıştık. Böylece, $n \mid 2^n - 2$ ve $n \nmid 3^n - 3$ olacak şekildeki en küçük n sayısı $n = 341$'dir.
Not: A. Rotkiewicz, $n \mid 2^n - 2$ ve $n \nmid 3^n - 3$ olacak şekilde hem çift hem de tek olan sonsuz çoklukta pozitif n tam sayısının var olduğunu kanıtlamıştır.

[29] $n = 6$ sayısı istenen özelliği sağlar. Aslında, eğer $n \nmid 2^n - 2$ ise, n bileşik olmalıdır. En küçük

30. Her a pozitif tam sayısı için $a^n - a$ sayısının n'e bölünecek şekilde bir n bileşik sayısı bulunuz.[30]

31. a, b, c tam sayılar olmak üzere $a^3 + b^3 + c^3$ sayısı 9'a bölünüyorsa, a, b, c sayılarından en az birinin 3'e bölündüğünü kanıtlayınız.[31]

32. a_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ tam sayılar olmak üzere

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3$$

sayısı 9'a bölünüyorsa,

$$3 \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5)$$

olduğunu kanıtlayınız.[32]

33. $(x, y) = 1$ ve $x^2 + y^2 = z^4$ olmak üzere x, y, z pozitif tam sayılarsa, $7 \mid x$ ya da y olduğunu kanıtlayınız. $(x, y) = 1$ koşulunun gerekli olduğunu gösteriniz.[33]

---

bileşik sayı 4'tür, ancak $4 \nmid 3^4 - 3 = 78$. Sonraki bileşik sayı 6'dır ve $6 \nmid 2^6 - 2 = 62$ iken, $6 \mid 3^6 - 3$'tür çünkü $3^6 - 3$ bariz bir şekilde çifttir ve 3 ile bölünebilir.

Not: A. Rotkiewicz, $n \mid 3^n - 3$ ve $n \nmid 2^n - 2$ olacak şekilde hem çift hem de tek olan sonsuz çoklukta bileşik n sayısının var olduğunu kanıtlamıştır.

[30] Eğer a bileşik ise, $n = a$ alabiliriz çünkü $a \mid a^a - a$ olduğu açıktır. Eğer $a = 1$ ise, $n = 4$ alabiliriz çünkü $4 \mid 1^4 - 1$. Eğer $a > 2$ bir asal ise, $n = 2a$ alabiliriz çünkü bu durumda a tektir ve $a^{2a} - a$ sayısı çifttir; böylece, tek bir a sayısı ile ve 2 ile bölünebilen $a^{2a} - a$, $2a$ ile bölünebilir. Geriye $a = 2$ durumunu ele almak kalıyor. Burada $n = 341 = 11 \cdot 31$ alabiliriz çünkü $341 \mid 2^{341} - 2$; bu son özellik şu şekilde kanıtlanabilir: $11 \mid 2^{10} - 1 = 1023$ elimizdedir, dolayısıyla $11 \mid 2^{340} - 1$, ve $11 \mid 2^{341} - 2$. Sonra, $31 = 2^5 - 1 \mid 2^{340} - 1$, dolayısıyla $31 \mid 2^{341} - 2$. Böylece $2^{341} - 2$ sayısı 11 ve 31 ile bölünebilir, dolayısıyla bunların çarpımı olan 341 ile de bölünebilir.

Not: M. Cipolla, her pozitif a tam sayısı için $n \mid a^n - a$ olacak şekilde sonsuz çoklukta bileşik n sayısının var olduğunu kanıtlamıştır. (Bakınız (Cipolla 1904)). Ancak, her a tam sayısı için $n \mid a^n - a$ olacak şekilde sonsuz çoklukta bileşik n sayısının olup olmadığını bilmiyoruz. Bu tür sayıların en küçüğü $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$'dir. A. Schinzel'in asal sayılarla ilgili belirli bir sanısından ((Schinzel ve Sierpiński 1958a)) bu tür sonsuz çoklukta bileşik sayının var olduğu sonucu çıkar.

[31] 3 ile bölünemeyen bir tam sayının küpünün 9'a bölünmesiyle elde edilen kalan 1 veya -1'dir. Böylece, eğer a, b, c sayılarından hiçbiri 3 ile bölünemeseydi, o zaman $a^3 + b^3 + c^3$ sayısının 9'a bölünmesiyle elde edilen kalan, + ve − işaretlerinin herhangi bir kombinasyonu için 9 ile bölünemeyen $\pm 1 \pm 1 \pm 1$ olurdu. Buradan, eğer $9 \mid a^3 + b^3 + c^3$ ise, o zaman $3 \mid abc$ olduğu sonucu çıkar, ki bu da kanıtlanması gerekendi.

[32] Kanıt, Problem 31'deki kanıta benzerdir çünkü $\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$ sayısı, + ve − işaretlerinin herhangi bir kombinasyonu için 9 ile bölünemez.

[33] $(x, y) = 1$ koşulu gereklidir çünkü, örneğin, $15^2 + 20^2 = 5^4$, iken $7 \nmid 15 \cdot 20$. Şimdi, eğer $(x, y) = 1$ ise ve x, y, z, $x^2 + y^2 = z^4$ olacak şekilde pozitif tam sayılar ise, o zaman Pisagor denklemi teorisinden, örneğin $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z^2 = m^2 + n^2$ olacak şekilde m ve n tam sayıları vardır. $7 \nmid y$ olduğunu varsayalım; böylece $7 \nmid m$ ve $7 \nmid n$. 7 ile bölünmeyen bir tam sayının karesinin 7'ye bölünmesiyle 1, 2 veya 4 kalanını verdiğini görmek kolaydır. $1 + 2$, $1 + 4$ ve $2 + 4$ bu tür kalanlar olamayacağından ve hiçbiri 7 ile bölünemediğinden, $z^2 = m^2 + n^2$ denkleminden m ve n sayılarının 7'ye bölündüğünde aynı kalanları vermesi gerektiği sonucu çıkar. Böylece $7 \mid x = m^2 - n^2$.

34. a, b tam sayıları için $7 \mid a^2 + b^2$ ise $7 \mid a$ veya $7 \mid b$ olduğunu kanıtlayınız.[34]

35. Aşağıdaki koşulları sağlayan sonsuz sayıda x, y pozitif tam sayı çiftinin bulunduğunu kanıtlayınız ve böyle çiftlerden en küçüğünü bulunuz:[35]

$$x(x+1) \mid y(y+1), \quad x + y, \quad x+1 \mid y, \quad x \cdot y + 1, \quad x+1 \mid y+1$$

36. Her $s \leq 25$ pozitif tam sayısı ve $s = 100$ için basamakları toplamı s'ye eşit olan ve s'ye bölünen en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.[36]

37. Her s pozitif tam sayısı için, s'ye bölünen ve basamakları toplamı s'ye eşit olan bir n pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[37]

38. Aşağıdakileri kanıtlayınız:[38]

---

[34] 7 ile bölünmeyen bir tam sayının karesi 7'ye bölündüğünde 1, 2 veya 4 kalanını verir, dolayısıyla bu tür karelerin toplamı 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 kalanını verir. Böylece, eğer a ve b, $7 \mid a^2 + b^2$ olacak şekilde tam sayılar ise, o zaman bunlardan biri, dolayısıyla diğeri de 7 ile bölünmelidir.

[35] $x = 36k + 14$, $y = (12k + 5)(18k + 7)$, $k = 0, 1, 2, ...$, sayıları istenen özelliği sağlar. Aslında, $x(x + 1) = 2 \cdot 3(12k + 5)(18k + 7) = 6y$ olduğu açıkça görülürken, $6 \mid y + 1$. y sayısı x ile bölünemez çünkü y tektir, x ise çifttir. y sayısı $x + 1$ ile bölünemez çünkü $3 \mid x+1$, iken $3 \nmid y$. $y+1$ sayısı x ile bölünemez çünkü $18k+7 \mid x$ ve $18k+7 \mid y$, dolayısıyla $18k + 7 \nmid y + 1$. Son olarak, $y + 1$ sayısı $x + 1$ ile bölünemez çünkü $12k + 5 \mid x + 1$ ve $12k + 5 \mid y$, dolayısıyla $12k + 5 \nmid y + 1$.
$k = 0$ için $x = 14$, $y = 35$ elde ederiz ve istenen özelliğe sahip daha küçük sayılar olmadığını göstermek kolaydır.

[36] $s < 10$ için, elbette $n_s = s$'e sahibiz. Sonra, s'nin ardışık katlarını inceleyerek, $n_{10} = 190$, $n_{11} = 209$, $n_{12} = 48$, $n_{13} = 247$, $n_{14} = 266$, $n_{15} = 155$, $n_{16} = 448$, $n_{17} = 476$, $n_{18} = 198$, $n_{19} = 874$, $n_{20} = 9920$, $n_{21} = 399$, $n_{22} = 2398$, $n_{23} = 1679$, $n_{24} = 888$, $n_{25} = 4975$ elde ederiz. Son olarak, $n_{100} = 19999999999900$'a sahibiz. Aslında, 100 ile bölünebilen her sayının son iki basamağı sıfır olmalıdır ve 199999999999'dan küçük her sayının rakamları toplamı açıkça 100'den küçüktür. Bakınız (Kaprekar 1955).

[37] s pozitif bir tam sayı olsun, $s = 2^\alpha 5^\beta t$, burada α ve β, ≥ 0 tam sayılar, ve t, 2 veya 5 ile bölünemeyen pozitif bir tam sayıdır. Euler teoremine göre $10^{\varphi(t)} \equiv 1 \pmod{t}$'ye sahibiz. $n = 10^{\alpha+\beta}(10^{\varphi(t)} + 10^{2\varphi(t)} + ... + 10^{s\varphi(t)})$ olsun. $10^{\varphi(t)} + 10^{2\varphi(t)} + ... + 10^{s\varphi(t)} \equiv s \equiv 0 \pmod{t}$ ($t \mid s$ olduğundan) sahibiz, ve $2^\alpha 5^\beta \mid 10^{\alpha+\beta}$ olduğundan, n sayısı s ile bölünebilir. Diğer yandan, n sayısının ondalık rakamlarının toplamının s'ye eşit olduğu açıktır.

[38]

(a) Eğer sayının $4k + 3$ biçiminde bir asal böleni yoksa, teorem bariz bir şekilde doğrudur. Teoremin, asal çarpanlarına (birinci kuvvetler halinde, dolayısıyla farklı olması gerekmeyen) ayrışımı $s \geq 0$ tane $4k+3$ biçiminde asal içeren tüm sayılar için doğru olduğunu varsayalım. n, asal çarpanlarına (birinci kuvvetler halinde, dolayısıyla farklı olması gerekmeyen) ayrışımı $s + 1$ tane $4k + 3$ biçiminde asal çarpan içeren pozitif bir tam sayı olsun. O zaman $n = mq$ olur; burada m'nin asal çarpanlarına (birinci kuvvetler halinde) ayrışımı s tane $4k + 3$ biçiminde çarpan içerir ve q, $4k + 3$ biçiminde bir asaldır. g, m'nin $4k + 1$ biçimindeki tam sayı bölenlerinin sayısını göstersin ve h, m'nin $4k + 3$ biçimindeki tam sayı bölenlerinin sayısını göstersin. Varsayım gereği (s ile ilgili olarak) $g \geq h$'ye sahibiz. Şimdi, mq'nun $4k + 1$ biçimindeki tam sayı bölenleri, elbette m'nin $4k + 1$ biçimindeki bölenleri (bu bölenlerin sayısı g'ye eşittir) ve ayrıca m'nin $4k + 3$ biçimindeki tam sayı bölenlerinin q sayısı ile çarpımlarıdır; bu bölenlerin sayısı h'dir. Böylece, mq sayısı $g + h$ tane $4k + 1$ biçiminde tam sayı bölene sahip olacaktır. Diğer yandan, mq'nun $4k + 3$ biçimindeki tam sayı bölenleri, m'nin $4k + 3$ biçimindeki tam sayı bölenleri (bu bölenlerin

(a) Her pozitif tam sayının $4k+1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k+3$ şeklindeki bölenlerinin sayısından az değildir.
(b) $4k+1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k+3$ şeklindeki bölenlerinin sayısına eşit olan sonsuz tane pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
(c) $4k+1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k+3$ şeklindeki bölenlerinin sayısından fazla olan sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunur.

39. a, b, c herhangi tam sayılar ve n de 3'ten büyük olan bir tam sayı ise, $k = a, k+b, k+c$ sayıların hiçbirinin n'ye bölünmeyecek şekilde bir k tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[39]

40. $F_n = 2^{2^n} + 1$ için $F_n \mid 2^{F_n} - 2$ olduğunu kanıtlayınız ($n = 1, 2, 3, \ldots$).[40]

Aralarında Asal Sayılar

41. Her k tam sayısı için $2k+1$ ve $9k+4$ sayılarının aralarında asal olduğunu kanıtlayınız. $2k-1$ ve $9k+4$ sayılarının OBEB'ini k'ya bağlı bir fonksiyon olarak bulunuz.[41]

---

sayısı h'dir) ve m'nin $4k+1$ biçimindeki bölenlerinin q ile çarpımları (bu bölenlerin sayısı g'dir) olacaktır. Ancak, bu sonuncular arasında m'nin $4k+3$ biçimindeki bölenleri olan bölenler olabilir. Böylece mq'nun $4k+3$ biçimindeki tam sayı bölenlerinin toplam sayısı $\leq h+g$'dir (ve belki de, $< h+g$). Teorem her mq sayısı için doğru olduğundan, tümevarım yoluyla (s'ye göre) teoremin pozitif s tam sayısı için doğru olduğunu elde ederiz.

(b) 3^{2n-1} sayısı ($n = 1, 2, \ldots$) $4k+1$ biçiminde (yani, $1, 3^2, 3^4, \ldots, 3^{2n-2}$) tam sayı bölenlerine sahip olduğu kadar $4k+3$ biçiminde (yani $3, 3^3, 3^5, \ldots, 3^{2n-1}$) bölenlere sahiptir.

(c) 3^{2n} sayısı ($n = 1, 2, \ldots$ olmak üzere) $n+1$ tane $4k+1$ biçiminde (yani $1, 3^2, 3^4, \ldots, 3^{2n}$) bölene ve sadece n tane $4k+3$ biçiminde (yani $3, 3^3, \ldots, 3^{2n-1}$) bölene sahiptir. 5^n sayısının tüm $n+1$ böleni $4k+1$ biçimindedir ve $4k+3$ biçiminde hiç böleni yoktur.

[39] r_1, r_2, ve r_3, $-a$, $-b$, ve $-c$ tam sayılarının n'ye bölünmesiyle elde edilen kalanlar olsun. Böylece, r_1, r_2, ve r_3, $0, 1, 2, \ldots, n-1$ dizisinden tam sayılardır, ve r_1, r_2, r_3 sayıları arasında en fazla üç farklı sayı olduğundan, $n > 3$ iken, bu dizide $r \neq r_1$, $r \neq r_2$, ve $r \neq r_3$ olacak şekilde bir r sayısı vardır. Eğer $n \mid a+r$ olsaydı, o zaman $-a \equiv r_1 \pmod{n}$ olduğundan $n \mid r - r_1$ olurdu. Ancak, r ve r_1, ≥ 0 ve $< n$ olan tam sayılardır, ve eğer farkları n ile bölünebiliyorsa, o zaman r'nin tanımının aksine $r = r_1$ olmalıdır. Benzer bir şekilde $n \nmid b+r$ ve $n \nmid c+r$ olduğunu gösteririz. Böylece, $k = r$ alabiliriz.

[40] Pozitif n tam sayıları için $2^n \geq n+1$ olduğunu tümevarımla kolayca gösteririz, bu da $2^{n+1} \mid 2^{2^n}$ ve $2^{2^{n+1}} - 1 \mid 2^{2^n} - 1$ anlamına gelir. Bu nedenle $F_n = 2^{2^n} + 1 \mid 2^{2^{n+1}} - 1 \mid 2^{2^n} - 1 \mid 2^{2^{n+1}} - 2 = 2F_n - 2$, ve $F_n \mid 2F_n - 2$, ki bu da kanıtlanması gerekendi.
Not: T. Banachiewicz, bu ilişkinin P. Fermat'ı tüm F_n ($n = 1, 2, \ldots$) sayılarının asal olduğu sanısına götürdüğünden şüpheleniyordu. Fermat'ın zamanında, sözde Çin teoreminin doğru olduğu düşünülüyordu, yani bir $m > 1$ tam sayısı $m \mid 2^m - 2$ ilişkisini sağlıyorsa, o zaman m'nin asal olduğunu öne süren teorem (bu, ilk birkaç yüz tam sayı için kontrol edilmişti). Ancak bu, o zamanlar bilinmeyen $m = 341 = 11 \cdot 31$ için çöker.

[41] $9(2k+1) - 2(9k+4) = 1$ olduğundan $2k+1$ ve $9k+4$ sayıları aralarında asaldır. $9k+4 = 4(2k-1) + (k+8)$ ve $2k-1 = 2(k+8) - 17$ olduğundan, $(9k+4, 2k-1) = (2k-1, k+8) = (k+8, 17)$'ye sahibiz. Eğer $k \equiv 9 \pmod{17}$ ise, $(k+8, 17) = 17$ olur; aksi durumda, $17 \nmid k+8$'dir, dolayısıyla $(k+8, 17) = 1$ olur. Böylece, eğer $k \equiv 9 \pmod{17}$ ise

42. $\frac{n(n+1)}{2}$ şeklinde olan her ikilisi aralarında asal olan sonsuz tane tam sayı bulunduğunu gösteriniz.[42]

43. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ şeklinde olan her ikilisi aralarında asal olan sonsuz tane tam sayı bulunduğunu gösteriniz.[43]

44. a ve b birinden farklı tam sayılar ise, $a+n$ ve $b+n$ sayıları aralarında asal olacak şekilde sonsuz sayıda n tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[44]

45. a, b, c birbirinden farklı tam sayılarsa, $a+n, b+n, c+n$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal olacak şekilde sonsuz sayıda n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[45]

$(9k+4, 2k-1) = 17$ ve eğer $k \not\equiv 9 \pmod{17}$ ise $(9k+4, 2k-1) = 1$'dir.

[42]İlk olarak, eğer m pozitif bir tam sayı olmak üzere, $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ şeklinde ikişerli aralarında asal m tane üçgensel sayıya sahipsek, $t > a_m$ ve $(t, a_1, a_2, \dots, a_m) = 1$ olacak şekilde bir t üçgensel sayısının var olduğunu gösteriyoruz.
Aslında, $a = a_1 a_2 \dots a_m$ olsun; $a+1$ ve $2a+1$ sayıları a ile aralarında asaldır.

$$a_{m+1} = t_{2a+1} = \frac{(2a+1)(2a+2)}{2} = (a+1)(2a+1)$$

sayısı a_m'den büyük bir üçgensel sayıdır; a ile aralarında asal olduğundan, $a_1, a_2, \dots, a_m$ sayılarının her biriyle aralarında asaldır.
Buradan şu sonuç çıkar: Eğer ikişerli aralarında asal üçgensel sayılardan oluşan sonlu artan bir dizimiz varsa, o zaman her zaman hepsini aşan ve onlarla aralarında asal olan bir üçgensel sayı bulabiliriz. Her zaman bu tür sayıların en küçüğünü alarak,

$$t_1 = 1, t_2 = 3, t_4 = 10, t_{13} = 91, t_{22} = 253, \dots$$

ikişerli aralarında asal üçgensel sayılardan oluşan sonsuz diziyi oluştururuz.

[43]İlk olarak, eğer m pozitif bir tam sayı olmak üzere, $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ dörtyüzlü (tetrahedral) sayıları ikişerli aralarında asalsa, o zaman $T > a_m$ ve $(T, a_1, a_2, \dots, a_m) = 1$ olacak şekilde bir T dörtyüzlü sayısının var olduğunu kanıtlayacağız. Aslında, $a = a_1 a_2 \dots a_n$ olsun. $T = T_{6a+1} = (6a+1)(3a+1)(2a+1)$ alalım; T'nin a ile aralarında asal olduğu, dolayısıyla $a_1, \dots, a_m$ sayılarının her biri ile aralarında asal olduğu ve $T > a \geq a_m$ olduğu açıktır.
Böylece, ikişerli aralarında asal dörtyüzlü sayılardan oluşan istenen artan diziyi tümevarımla tanımlayabiliriz: dizinin ilk terimi olarak $T_1 = 1$'i alın ve bu dizinin ilk m tane ikişerli aralarında asal dörtyüzlü sayısını tanımladıktan sonra, $m+1$'inciyi ilk m terimin tümünü aşan ve her biriyle aralarında asal olan en küçük dörtyüzlü sayı olarak tanımlayın. Bu şekilde, ikişerli aralarında asal dörtyüzlü sayılardan oluşan sonsuz artan diziyi elde ederiz

$$T_1 = 1, T_2 = 4, T_5 = 35, T_{17} = 969, \dots .$$

[44]a ve b iki farklı tam sayı olsun. Örneğin, $a < b$ olduğunu varsayalım ve $n = (b-a)k + 1 - a$ olsun. Yeterince büyük k için, n pozitif bir tam sayı olacaktır. $a + n = (b-a)k + 1$ ve $b + n = (b-a)(k+1) + 1$ olur, dolayısıyla $a+n$ ve $b+n$ pozitif tam sayılar olacaktır. Eğer $d \mid a+n$ ve $d \mid b+n$ olsaydı, $d \mid a-b$ olurdu ve $d \mid a+n$ olduğundan, $d \mid 1$ de olur, bu da $d = 1$ anlamına gelir. Böylece, $(a+n, b+n) = 1$.

[45]Eğer a, b, c tam sayıları farklıysa, o zaman

$$h = (a-b)(a-c)(b-c)$$

sayısı sıfırdan farklıdır. $h \neq \pm 1$ durumunda, $q_1, \dots, q_s$, h'nin 3'ten büyük tüm asal bölenlerini göstersin.
a, b, c sayılarından iki veya daha fazlası çift ise, $r = 1$ alın, aksi takdirde $r = 0$ alın. Açıkça,

46. $a+n, b+n, c+n$ ve $d+n$ sayılarının ikişer ikişer aralarında asal olmamasını sağlayan hiçbir n pozitif tam sayısı olmayacak şekilde birbirinden farklı a, b, c, d pozitif tam sayıları bulunuz.[46]

47. 6'dan büyük olan her tam sayının 1'den büyük ve aralarında asal olan iki tam sayının toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.[47]

48. 17'den büyük olan her tam sayının ikişer ikişer aralarında asal olan 1'den büyük 3 tam sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini ve 17'nin de bu şekilde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.[48]

$a+r, b+r, c+r$ sayılarından en az ikisi tek olacaktır. Eğer a, b, c sayıları 3'e bölündüğünde üç farklı kalan veriyorsa, $r_0 = 0$ alın. Eğer a, b, c arasından iki veya daha fazlası 3'e bölündüğünde aynı q kalanını veriyorsa, $r_0 = 1-q$ alın. Açıkça, $a+r_0, b+r_0, c+r_0$ sayılarından en az ikisi 3 ile bölünemeyecektir.

Şimdi, i, $1, 2, \ldots, s$ sayılarından birini göstersin. Problem 39'un ışığında (ve $q_i > 3$ gerçeğiyle), $a+r_i, b+r_i, c+r_i$ sayılarından hiçbirinin q_i ile bölünmemesini sağlayan bir r_i tam sayısı vardır. Çin kalan teoremine göre,

$$n \equiv r \pmod 2, \quad n \equiv r_0 \pmod 3,$$

ve

$$n \equiv r_i \pmod{q_i} \quad i = 1, 2, \ldots, s \text{ için}$$

olacak şekilde sonsuz sayıda pozitif n tam sayısı vardır.

$a+n, b+n$ ve $c+n$ sayılarının ikişerli aralarında asal olduklarını göstereceğiz. Örneğin, $(a+n, b+n) > 1$ olduğunu varsayalım. O zaman, $q \mid a+n$ ve $q \mid b+n$ olacak şekilde bir q asalı var olurdu, dolayısıyla $q \mid a-b$, bu da $q \mid h$ ve $h \neq \pm 1$ anlamına gelir. $n \equiv r \pmod 2$ olduğundan ve $a+r, b+r, c+r$ sayılarından en az ikisi tek olduğundan, $a+n, b+n, c+n$ sayılarından en az ikisi tektir ve $q = 2$ olamaz. Ardından, $n \equiv r_0 \pmod 3$ olduğundan ve $a+r_0, b+r_0, c+r_0$ sayılarından en az ikisi 3 ile bölünemediğinden, $a+n, b+n, c+n$ sayılarından en az ikisi 3 ile bölünemez ve $q = 3$ olamaz. $q \mid h$ olduğundan, h'nin tanımı gereği, $1, 2, \ldots, s$ dizisinden belirli bir i için $q = q_i$ olur. Ancak, $n \equiv r_i \pmod{q_i}$ olması ve $a+r_i, b+r_i, c+r_i$ sayılarından hiçbirinin q_i ile bölünmemesi gerçeği göz önüne alındığında, $a+n, b+n, c+n$ sayılarından hiçbiri $q_i = q$ ile bölünemez; bu da $q \mid a+n$ ve $q \mid b+n$ varsayımıyla çelişir. Böylece, $(a+n, b+n) = 1$ olduğunu kanıtladık. Benzer şekilde $(a+n, c+n) = 1$ ve $(b+n, c+n) = 1$ olduğunu gösteririz. Bu nedenle $a+n, b+n$, ve $c+n$ sayıları ikişerli aralarında asaldır. Bu tür n sayılarından sonsuz sayıda olduğundan, kanıt tamamlanmıştır.

[46] Bu tür sayılar örneğin $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$'tür. Aslında, tek n için, $a+n$ ve $c+n$ sayıları çifttir, dolayısıyla aralarında asal değildirler, ve çift n için, $b+n$ ve $d+n$ sayıları çifttir, dolayısıyla aralarında asal değildirler.

[47] Eğer n tek ve $n > 6$ ise, $n = 2 + (n-2)$ olur, burada $n-2$ tek ve > 1'dir, ve $(2, n-2) = 1$'e sahibiz.

$n > 6$ çift sayı durumu için aşağıdaki ispat A. Mąkowski'ye aittir.

Eğer $n = 4k$ ise, burada k tam sayısı > 1'dir ($n > 6$ olduğundan), o zaman $n = (2k-1) + (2k+1)$ olur, ve $2k+1 > 2k-1 > 1$'dir ($k > 1$ olduğundan). $2k-1$ ve $2k+1$ sayıları, ardışık tek sayılar olarak, aralarında asaldır.

Eğer $n = 4k+2$ ise, burada k tam sayısı > 1'dir ($n > 6$ olduğundan), $n = (2k+3) + (2k-1)$'e sahibiz, burada $2k+3 > 2k-1 > 1$'dir ($k > 1$ olduğundan). $2k+3$ ve $2k-1$ sayıları aralarında asaldır çünkü eğer $0 < d \mid 2k+3$ ve $d \mid 2k-1$ ise, o zaman $d \mid (2k+3)-(2k-1)$ veya $d \mid 4$'tür. Şimdi, d tek bir sayının böleni olarak tek olmalıdır, dolayısıyla $d = 1$'dir, ve $(2k+3, 2k-1) = 1$'dir.

[48] Eğer n çift ve > 8 ise, o zaman $n = 6k$, $n = 6k+2$ veya $n = 6k+4$'tür, ve ilk iki durumda k

49. Her m pozitif tam sayısı için hem tek $2k$ çift sayısının m ile aralarında asal olan iki pozitif tam sayının farkı şeklinde yazılabileceğini kanıtlayınız.[49]

50. Fibonacci dizisinin, tüm terimleri ikişer ikişer aralarında asal olan bir alt dizisinin bulunduğunu kanıtlayınız.[50]

---

tam sayısı > 1'dir, ve üçüncü durumda k pozitif bir tam sayıdır. Formüller

$$6k = 2 + 3 + (6(k-1)+1), \quad 6k+2 = 3+4+(6(k-1)+1),$$

$$6k+4 = 2+3+(6k-1)$$

n'nin, ikişerli olarak aralarında asal olan üç pozitif tam sayının toplamı olduğunu kolayca gösterir.

Şimdi n'nin tek ve > 17 olduğunu varsayalım. Altı durumu ele alıyoruz: $n = 12k+1$, $n = 12k+3$, $n = 12k+5$, $n = 12k+7$, $n = 12k+9$, ve $n = 12k+11$, burada ilk üç durumda k tam sayısı > 1'dir, ve son üç durumda k pozitif bir tam sayıdır. Elimizde

$$12k - 1 = (6(k-1)-1) + (6(k-1)+5) + 9,$$

var, burada $6(k-1)-1$, $6(k-1)+5$, ve 9 sayıları > 1'dir ve aralarında asaldır; aslında, ilk ikisi 3'e bölünemez, ve $d \mid 6(k-1)-1$ ve $d \mid 6(k-1)+5$ olması $d \mid 4$'ü gerektireceğinden aralarında asaldırlar, oysa ele alınan sayılar tektir.

Eğer $n = 12k+3$ ise, o zaman $n = (6k-1)+(6k+1)+3$'e sahibiz;
eğer $n = 12k+5$ ise, o zaman $n = (6k-5)+(6k+1)+9$'a sahibiz;
eğer $n = 12k+7$ ise, o zaman $n = (6k+5)+(6k-1)+3$'e sahibiz;
eğer $n = 12k+9$ ise, o zaman $n = (6k-1)+(6k+1)+9$'a sahibiz;
eğer $n = 12k+11$ ise, o zaman $n = (6(k+1)-5)+(6(k+1)+1)+3$'e sahibiz, ve her durumda üç terimin > 1 olduğunu ve ikişerli olarak aralarında asal olduğunu kolayca kontrol ederiz.

17 sayısı istenen özelliğe sahip değildir çünkü $17 = a+b+c$ durumunda, üç sayının da (> 1 ve ikişerli aralarında asal olarak) a, b, c'nin tek ve farklı olması gerekirdi. Ancak, $3+5+7 = 15 < 17$, $3+5+11 > 17$'ye sahibiz, ve $3 < a < b < c$ durumunda, $a \geq 5$, $b \geq 7$, $c \geq 9$'a sahibiz, dolayısıyla $a+b+c \geq 5+7+9 = 21 > 17$, bu da 17'nin istenen özelliğe sahip olmadığını gösterir.

[49] A. Schinzel'in bir fikrine dayanan (bkz. (Schinzel 1959)) ispatı sunacağız. k verilmiş bir pozitif tam sayıyı göstersin ve m, asal kuvvetlere açılımı $m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_s^{\alpha_s}$ olan pozitif tam sayı olsun. $f(x) = x(x+2k)$ olsun ve i, $1, 2, \dots, s$ sayılarından birini göstersin. Tüm x tam sayıları için $q_i | x(x+2k)$ olamaz, çünkü o zaman $x = 1$ için $q_i | 2k+1$ olurdu, ve $x = -1$ için $q_i | 2k-1$ olurdu, ve $q_i | (2k+1)-(2k-1) = 2$ olurdu, ki bu $q_i | 2k+1$ (ve sonuç olarak $q_i \nmid 1$) olması göz önüne alındığında imkansızdır. Bu nedenle, $q_i \nmid x_i(x_i+2k) = f(x_i)$ olacak şekilde bir x_i tam sayısı mevcuttur. Çin kalan teoremine göre, $i = 1, 2, \dots, s$ için $x_0 \equiv x_i \pmod{q_i}$ olacak şekilde pozitif bir x_0 tam sayısı vardır, bu da $i = 1, 2, \dots, s$ için $f(x_0) \equiv f(x_i) \not\equiv 0 \pmod{q_i}$ sonucunu verir. Dolayısıyla, $i = 1, 2, \dots, s$ için $(f(x_0), q_i) = 1$'e sahibiz, ki bu (m'nin asal çarpanlara açılımı göz önüne alındığında) $(f(x_0), m) = 1$ veya $(x_0(x_0+2k), m) = 1$ verir. Böylece, eğer $a = x_0 + 2k$, $b = x_0$ alırsak, $2k = a - b$'ye sahip oluruz, burada $(a, m) = 1$, $(b, m) = 1$'dir, ki bu da teoremi ispatlar.

NOT. a ve b'ye m'nin keyfi katlarını eklemek $2k = a - b$ ve $(ab, m) = 1$ gerçeğini değiştirmediğinden, her m için, her çift sayının m ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların farkı olarak sonsuz sayıda farklı şekilde temsil edilebileceğini ispatladık.

Her çift sayının iki asalın farkı olup olmadığını bilmiyoruz. A. Schinzel'in asal sayılar üzerine belirli bir sanısından (Schinzel ve Sierpiński 1958a), her çift sayının iki asalın farkı olarak sonsuz sayıda farklı şekilde temsil edilebileceği sonucu çıkar.

[50] A. Rotkiewicz tarafından verilen ispatı sunacağız. Eğer u_n Fibonacci dizisinin n'inci terimi ise, ve m ile n pozitif tam sayılar ise, o zaman $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$'dir (bkz. (Sierpiński 1958b), s.

51. Her $n = 1, 2, ...$ için OBEB$(n, 2^n + 1) = 1$ olduğunu gösteriniz.[51]

51a. OBEB$(n, 2^n - 1) > 1$ olmasını sağlayan sonsuz tane n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız ve bunlardan en küçüğünü bulunuz.

Aritmetik Diziler

52. Pozitif tam sayılardan oluşan ve tüm terimleri ikişer ikişer aralarında asal olan ve terim sayısı yeterince önceden verilen herhangi bir n sayısından büyük olan bir aritmetik dizi bulunduğunu kanıtlayınız.[52]

53. Her k pozitif tam sayısı için, pozitif tam bölenlerinin sayısı k'yı bölen tüm n sayıları kümesinin bir sonsuz aritmetik dizi içerdiğini kanıtlayınız.[53]

54. $x(x+1), y(y+1), z(z+1)$ sayıları artan aritmetik dizi oluşturacak şekilde sonsuz sayıda x, y, z pozitif tam sayı üçlüsünün bulunduğunu kanıtlayınız.[54]

280, problem 5]). $u_1 = 1$ olduğundan, eğer p_k, k'ıncı ardışık asalı gösteriyorsa,

$$u_{p_1}, u_{p_2}, u_{p_3}, ...$$

artan sonsuz dizisinin herhangi iki teriminin aralarında asal olduğunu görürüz. p_k yerine $2^{2^k} + 1$ alabiliriz, zira m ve $n \neq m$ pozitif tam sayıları için $(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1$ olduğu iyi bilinmektedir.

[51] $F_n = 2^{2^n} + 1$ $(n = 1, 2, ...)$ sayısının > 1 olan her böleninin, $2^{n+2}k + 1$ formunda olduğunu biliyoruz, burada k pozitif bir tam sayıdır (örneğin, bkz. (Sierpiński 1964a), s. 343, Teorem 5). Pozitif n ve k tam sayıları için $2^{n+2}k + 1 \geq 2^{n+2} + 1 > n$ olduğundan, F_n'nin tüm > 1 bölenleri $> n$ olmalıdır, dolayısıyla $(n, F_n) = 1$'dir, ki bu da ispatlanması gerekendi.
51a. $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için $(n, 2^n - 1) = 1$ olduğunu kolayca kontrol ederiz, $(6, 2^6 - 1) = 3$'tür. $k = 1, 2, ...$ için $3|2^6 - 1|2^{6k} - 1$'e sahibiz, dolayısıyla $k = 1, 2, ...$ için $(6k, 2^{6k} - 1) \geq 3$'tür. Bu tür en küçük n sayısı 6'ya eşittir.

[52] m verilmiş bir tam sayı > 1 olsun. $k = 1, 2, ..., m$ için $m!k + 1$ sayıları, $k < l \leq m$ olacak şekilde pozitif k ve l tam sayıları için aralarında asaldır. Eğer $d > 1$, $m!k + 1$ ve $m!l + 1$'in ortak böleni olsaydı, $d \mid l(m!k + 1) - k(m!l + 1) = l - k$'ye sahip olurduk, dolayısıyla $1 < d < m$ ve $d \mid m!$'dir. Bu, $d \mid m!k + 1$ olması göz önüne alındığında, $d \mid 1$'i verir, ki bu da $d > 1$ varsayımıyla çelişir.

[53] Gerekli özellik, $2^k t + 2^{k-1}$ $(t = 0, 1, 2, ...)$ aritmetik dizisinin tüm terimleri tarafından sağlanır, çünkü $n = 2^k t + 2^{k-1}$'in asal çarpanlara açılımında 2 sayısı $k - 1$ üssü ile girer; pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı için iyi bilinen formülden, n sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısının k ile bölünebildiği hemen anlaşılır.

[54] Gerekli özellik, keyfi bir pozitif x tam sayısı için ve $y = 5x + 2$, $z = 7x + 3$ için geçerlidir, çünkü bu durumda

$$x(x+1) = x^2 + x, \quad y(y+1) = 25x^2 + 25x + 6, \quad z(z+1) = 49x^2 + 49x + 12$$

sayıları, $24x^2 + 24x + 6$ farkıyla bir aritmetik dizi oluşturur.
NOT. x, y, z, t gibi artan dört pozitif tam sayının $x(x+1)$, $y(y+1)$, $z(z+1)$ ve $t(t+1)$ sayılarının bir aritmetik dizi oluşturacak şekilde bulunmadığı gösterilebilir, çünkü o zaman bu sayılardan dört kat daha büyük ve bir artırılmış sayılar, yani $(2x+1)^2$, $(2y+1)^2$, $(2z+1)^2$ ve $(2t+1)^2$ de bir aritmetik dizi oluştururdu, bu da Fermat teoremine aykırıdır; Fermat teoremine göre bir aritmetik dizi oluşturan dört farklı tam sayının karesi yoktur (ispat W. Sierpiński'nin kitabında bulunabilir Sierpiński (1964a), s. 74, teorem 8).

55. Kenarları bir aritmetik dizi oluşturma tam sayılar olan tüm dik üçgenleri bulunuz.[55]

56. Pozitif tam sayılardan oluşan, hiçbir üçgen $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ sayısını içermeyen ve farkı en küçük olan artan bir aritmetik dizi bulunuz.[56]

57. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere $ak + b$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ aritmetik dizisinin sonsuz tane tam kare içermesi için gerek ve yeterli koşulu bulunuz.[57]

58. Birbirinden farklı pozitif tam sayılardan oluşan ve her terimi bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan ve terim sayısı önceden verilen n sayısından büyük olan bir aritmetik dizi bulunduğunu kanıtlayınız. [58]

59. Birbirinden farklı pozitif tam sayılardan oluşan ve her terimi bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan sonsuz bir aritmetik dizi bulunmadığını kanıtlayınız. [59]

[55]Eğer bir dik üçgenin kenarları bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, o zaman bunları $b - r$, b ve $b + r$ olarak gösterebiliriz, burada b ve r pozitif tam sayılardır, ve $(b-r)^2 + b^2 = (b+r)^2$'ye sahibiz, dolayısıyla $b = 4r$'dir, bu da kenarları $3r$, $4r$ ve $5r$ olan dik üçgeni verir, burada r keyfi bir pozitif tam sayıdır. Böylece, kenarları bir aritmetik dizi oluşturan tam sayılar olan tüm dik üçgenler, kenarları 3, 4, 5 olan üçgenin tam sayı katları alınarak elde edilir.

[56]$t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ üçgensel sayıları $n = 4u + 1$ $(u = 0, 1, 2, \ldots)$ için tek ve $4 \mid n$ için çifttir. Dolayısıyla, farkı 2 olan her iki dizi de sonsuz sayıda üçgensel sayı içerir. Öte yandan, $3k + 2$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ dizisi hiçbir üçgensel sayı içermez, çünkü eğer $3 \mid n$ ise, o zaman $3 \mid t_n$; benzer şekilde, $u = 0, 1, 2, \ldots$ için $n = 3u + 2$ ise, o zaman $3 \mid t_n$; son olarak, $u = 0, 1, 2, \ldots$ için $n = 3u + 1$ ise, o zaman $t_n = 9\frac{u(u+1)}{2} + 1$'dir, dolayısıyla 3'e bölünmesi 1 kalanını verir.

[57]b'nin a modülüne göre bir kuadratik (ikinci dereceden) kalan olması gerekli ve yeterlidir. Aslında, eğer bazı pozitif x tam sayısı ve bazı $k \geq 0$ tam sayısı için $x^2 = ak + b$'ye sahipsek, o zaman $x^2 \equiv b \pmod{a}$'dır ve b, a modülüne göre bir kuadratik kalandır. Tersine, eğer b, a modülüne göre bir kuadratik kalan ise, o zaman $x^2 \equiv b \pmod{a}$ olacak şekilde sonsuz sayıda pozitif x tam sayısı vardır, dolayısıyla $x^2 = ak + b$'dir, burada k bir tam sayıdır, ve sonuç olarak yeterince büyük x için pozitiftir.

[58]A. Schinzel'in ispatını sunacağız. p_k, k'ıncı ardışık asalı göstersin. s keyfi bir pozitif tam sayı olsun ve $P = p_1 p_2 \dots p_s$ olsun. Çin kalan teoremine göre, her $k \leq s$ pozitif tam sayısı için $a_k \equiv 0 \pmod{P/p_k}$ ve $a_k \equiv -1 \pmod{p_k}$ olacak şekilde bir a_k pozitif tam sayısı mevcuttur. $Q = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots s^{a_s}$ alalım. kQ sayıları $(k = 1, 2, \dots, s)$, s terimli artan bir aritmetik dizi oluşturur. a_k sayılarının tanımına göre $(k = 1, 2, \dots, s)$, $p_k \mid a_k + 1$'e sahibiz ve n, s'den büyük pozitif bir tam sayı olmak üzere, eğer $k \neq n$ ise $p_j \mid a_k$'dir. Sayılar

$$Q_k = kQ^{(k+1)/P_k} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{s} n^{a_n/p_k}$$

doğaldır, ve $k = 1, 2, \dots, s$ için $kQ = Q_k^{p_k}$ olduğunu kolayca görürüz, bu nedenle kQ sayıları $(k = 1, 2, \dots, s)$, tam sayı üsleri > 1 olan tam sayıların kuvvetleridir.

[59]İstenen teorem, açıkça, her sonsuz artan tam sayı aritmetik dizisinde, herhangi bir tam sayının > 1 tam sayı üslü bir kuvveti olmayan bir terimin var olduğu teoremine denktir. Dolayısıyla, a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere, $ak + b$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ sonsuz bir aritmetik dizi olsun. $p > a + b$ olan bir p asalı mevcuttur. $(a, p^2) = 1$ olduğundan, $ax - p^2 y = 1$ denkleminin pozitif x, y tam sayılarında bir çözümü vardır. $k = (p - b)x$ olsun; bu pozitif bir tam sayı olacaktır (çünkü $p > b$), ve $ak + b = p^2 y(p - b) + p$'ye sahip olacağız. Böylece, dizimizin $ak + b$ terimi p^2'ye bölünemez, ve bu nedenle > 1 tam sayı üssü olan pozitif bir tam sayının

60. Her biri bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan dört ardışık sayı bulunmadığını kanıtlayınız. [60]

61. Pozitif tam sayılardan oluşan her artan aritmetik dizinin bileşik sayılardan oluşan, önceden verilen n'den fazla sayıda ardışık teriminin bulunduğunu kanıtlayınız. [61]

62. a ve b aralarında asal pozitif tam sayılarsa her m pozitif tam sayısı için $ak + b$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ aritmetik dizisinin m ile aralarında asal olan sonsuz sayıda terimi bulunduğunu kanıtlayınız. [62]

63. Her s pozitif tam sayısı için pozitif tam sayılardan oluşan her artan aritmetik dizide önceden verilen herhangi s tane rakamla başlayan terimlerinin bulunduğunu kanıtlayınız.[63]

---

kuvveti olamaz.

[60]Her dört ardışık pozitif tam sayıdan biri, $k \geq 0$ bir tam sayı olmak üzere, $4k + 2$ formunda olmalıdır. 4'e bölünemeyen bir çift sayı olan böyle bir sayı, > 1 tam sayı üssü olan pozitif bir tam sayının kuvveti olamaz.

NOT. A. Mąkowski, her biri pozitif bir tam sayının > 1 tam sayı üslü bir kuvveti olan üç ardışık pozitif tam sayı olmadığını ispatlamıştır, ancak ispat zordur (Khatri 1962). Bununla birlikte, her biri pozitif bir tam sayının > 1 tam sayı üslü bir kuvveti olan iki ardışık sayı mevcuttur. Bu tür sayılar, örneğin, $2^3 = 8$, $3^2 = 9$'dur. Bu tür tam sayıların başka çiftlerinin olup olmadığına dair Catalan problemi açıktır. S. Hyyrö (Hyyro 1964), böyle herhangi bir çiftte her iki tabanın da $> 10^{11}$ olduğunu ispatlamıştır.

[61]Çözüm doğrudan Problem 58'den gelmektedir, ancak daha basit bir yolla da ispatlanabilir. $m > 1$ bir tam sayı olsun, ve q_i $(i = 1, 2, \dots, m)$, $a < q_1 < q_2 < \cdots < q_m$ olacak şekilde asallar olsun. Çin kalan teoremine göre, $j = 1, 2, \dots, m$ için $ax \equiv -b - aj \pmod{q_j^2}$ olacak şekilde pozitif bir x tam sayısı mevcuttur. Böylece $j = 1, 2, \dots, m$ için $q_j^2 \mid a(x + j) + b$'dir. Dolayısıyla, $ak + b$ dizisinin m ardışık terimi, yani $j = 1, 2, \dots, m$ için $a(x + j) + b$ terimleri, bileşik sayıdır.

[62]Elbette, m'nin > 1 bir tam sayı olduğunu varsayabiliriz. P, m'nin a'nın bölenleri olan tüm asal bölenlerinin çarpımını göstersin, ve eğer böyle bölenler yoksa $P = 1$ olsun. Q, m'nin b'nin bölenleri olan tüm asal bölenlerinin çarpımını göstersin, ve eğer böyle bölenler yoksa $Q = 1$ olsun. $(a, b) = 1$ olduğundan, $(P, Q) = 1$'e sahibiz. Son olarak, R, m'nin a veya b'yi bölmeyen tüm asal bölenlerinin çarpımını göstersin, ve eğer böyle bölenler yoksa, $R = 1$ olsun. Açıkça, $(R, P) = 1$ ve $(R, Q) = 1$'e sahibiz. $(aPR + b, m) = 1$ olduğunu göstereceğiz. Aslında, eğer doğru olmasaydı, $p \mid m$ ve $p \mid aPR + b$ olacak şekilde bir p asalı var olurdu. Eğer $p \mid P$ olsaydı, o zaman $p \mid aPR + b$ ifadesi $p \mid b$'yi gerektirirdi, dolayısıyla $p \mid Q$, bu da $(P, Q) = 1$ gerçeğiyle çelişir. Eğer $p \mid Q$ olsaydı, o zaman $p \mid b$'ye sahip olurduk, dolayısıyla $p \mid aPR$, ki bu imkansızdır çünkü $(a, b) = 1$, $(b, P) = 1$, $(b, R) = 1$'dir. Son olarak, eğer $p \mid R$ olsaydı, $p \mid b$'ye sahip olurduk, dolayısıyla $p \mid Q$, bu da $(R, Q) = 1$ gerçeğiyle çelişir. Böylece, $(aPR+b, m) = 1$'i ispatladık, ve buradan $k = 0, 1, \dots$ için $(a(km+PR)+b, m) = 1$ sonucu çıkar. Bu nedenle, dizimiz m ile aralarında asal olan sonsuz sayıda terim içerir, ki bu da ispatlanması gerekendi.

[63]Dizimizin ilk terimi b ve farkı a olsun; böylece a ve b sayıları pozitif tam sayılardır. b'nin a'ya bölünmesinden kalanı ele alalım; bu nedenle, $t \geq 0$ bir tam sayı ve $0 \leq r < a$ olacak şekilde r bir tam sayı olmak üzere $b = at + r$'ye sahibiz. s keyfi bir pozitif tam sayı olsun, ve $c_1 \neq 0$ olmak üzere $c_1, c_2, \dots, c_s$ keyfi bir ondalık basamak dizisi olsun. N, ardışık basamakları $c_1, c_2, \dots, c_s$ olan s basamaklı tam sayıyı göstersin.

Açıkça, $10^n > 2a(t + 1)$ olacak şekilde pozitif bir n tam sayısı mevcuttur. $N10^n/a - t$ sayısı > 1 olacaktır.

k, $N10^n/a - t$'den büyük en küçük pozitif tam sayı olsun; böylece, $k - 1 \leq N10^n/a - t$'ye

64. Fibonacci dizisinin üç teriminden oluşan tüm artan aritmetik dizileri bulunuz ve bu dizinin dört teriminden oluşan hiçbir artan aritmetik dizi bulunmadığını kanıtlayınız. [64]

65. Tam sayılardan oluşan, Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermeyen ve farkı

---

sahip olacağız, dolayısıyla

$$k + 1 \leq \frac{N10^n}{a} + 2 - t < \frac{(N+1)10^n}{a} - t$$

çünkü $10^n > 2a$'dir. Bu nedenle $N10^n < a(k+t) < ak + at + r = ak + b < a(k+t+1) < (N+1)10^n = N10^n + 10^n$'ye sahibiz ve buradan $ak+b$ sayısının ilk s basamağının, N sayısının ilk s basamağıyla aynı olduğu, yani $c_1, c_2, \ldots, c_s$ basamakları olduğu sonucu çıkar.

[64]Eğer Fibonacci dizisinin u_k, u_l, u_m terimleri bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, o zaman $u_l > 1$ olmalıdır, ve dolayısıyla $l > 2$'dir ($u_2 = 1$ olduğundan), ve $m > 3$'tür. Dahası, $u_m = u_l + (u_l - u_k)$'dir, ki bu da $u_m < u_l + u_l = u_l + u_{l-1} + u_{l-2} < u_l + u_{l-1} + u_l = u_{l+1} + u_{l-2}$ anlamına gelir ve buradan $u_m < u_{l+1}$ sonucu çıkar. Öte yandan, $u_m > u_l$'dir, dolayısıyla $u_m \geq u_{l+1}$'dir. Ve $u_k < u_l$'ye sahip olmalıyız. Bu nedenle ($l > 2$ olduğundan) $m = l + 1$'e sahibiz. Böylece $u_m = 2u_l - u_k = u_{l+1} = u_l + u_{l-1}$'e sahibiz, ki bu da $u_l - u_k = u_{l-1}$ anlamına gelir. Dolayısıyla, eğer Fibonacci dizisinin u_k, u_l, u_m terimleri artan bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, $l > 2$, $k = l - 2$ ve $m = l + 1$ olmalıdır. Öte yandan, herhangi bir $l > 1$ tam sayısı için u_{l-1}, u_{l+1} ve u_{l+2} sayıları u_l farkıyla bir aritmetik dizi oluşturur. Eğer n, $> l + 1$ bir tam sayı olsaydı, $n \geq l + 2$'ye sahip olurduk, dolayısıyla $u_n \geq u_{l+2}$'dir. ve $u_n - u_{l+1} \geq u_{l+2} - u_{l+1} = u_l > u_{l-1}$'dir ($l > 2$ olduğundan). Buradan, Fibonacci dizisinin bir aritmetik dizi oluşturan dört teriminin olmadığı sonucu çıkar.

en az olan bir artan aritmetik dizi bulunuz.[65]

66. a ve b aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere $ak+b$ $(k=0,1,2,\dots)$ şeklinde olan ve Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermeyen bir aritmetik dizi bulunuz.[66]

67. a ve b aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere $ak+b$ $(k=0,1,2,\dots)$ şeklinde olan her aritmetik dizinin ikişer ikişer aralarında asal olan sonsuz

---

[65] Biliyoruz ki, eğer m pozitif bir tam sayı ise, o zaman Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin m'ye bölünmesinden elde edilen kalanlar, saf periyotlu periyodik bir dizi oluşturur (Sierpiński 1958b, 279, problem 3). $m=2,3,4,5,6,7$ için, Fibonacci dizisinin terimlerinin m'ye bölünmesinden elde edilen kalanlar sırasıyla şöyledir (burada tümünü değil, sadece ilk birkaç kalanı gösteriyoruz):
$m=2$ için: 1, 1, 0, ...,
$m=3$ için: 1, 1, 2, 0, ...,
$m=4$ için: 1, 1, 2, 3, 1, 0, ...,
$m=5$ için: 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, ...,
$m=6$ için: 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, ...,
$m=7$ için: 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, ...,
$m\leq 7$ olan her pozitif tam sayı için m modülüne göre tüm olası kalanlar yukarıdaki dizilerde göründüğünden, farkı $m\leq 7$ olan aritmetik dizilerin her birinin Fibonacci dizisinin sonsuz sayıda terimini içerdiğini görüyoruz.
Şimdi $8k+4$ $(k=0,1,2,\dots)$ dizisinin Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermediğini göstereceğiz.
$u_1=u_2=1$ ve $n=1,2,\dots$ için $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$ olduğundan, $u_1,u_2,\dots,u_{14}$ sayılarının 8'e bölünmesinden aşağıdaki kalanları verdiğini kolayca görürüz:

$$1,1,2,3,5,0,5,5,2,7,1,0,1,1.$$

Buradan $8\mid u_{13}-u_1$ ve $8\mid u_{14}-u_2$ sonucu çıkar. Böylece, $n=1$ için $8\mid u_{n+12}-u_n$ ve $8\mid u_{n+13}-u_{n+1}$'e sahibiz. Şimdi bu iki formülün bazı pozitif n tam sayıları için geçerli olduğunu varsayalım. O zaman $8\mid u_{n+12}+u_{n+13}-(u_n+u_{n+1})$ veya $8\mid u_{n+14}-u_{n+2}$'ye sahibiz ($8\mid u_{n+13}-u_{n+1}$ olduğundan). Tümevarım yoluyla $n=1,2,\dots$ için $8\mid u_{n+12}-u_n$ sonucu çıkar, ki bu da Fibonacci dizisinin 8 modülüne göre ardışık kalanlar dizisinin periyodik olduğunu ve on iki terimlik saf bir periyoda sahip olduğunu gösterir.
8 modülüne göre ilk on dört kalandan, bu kalanların sadece 0, 1, 2, 3, 5 ve 7 olabileceğini görüyoruz. Dolayısıyla 4 veya 6 kalanı yoktur, bu da $8k+4$ ve $8k+6$ dizilerinin Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermediğini gösterir. Bunlar, istenen özelliğe sahip ve mümkün olan en küçük farka sahip tam sayı terimli dizilerdir.

[66] $11k+4$ $(k=0,1,2,\dots)$ dizisi istenen özelliğe sahiptir. Problem 65'in çözümünde olduğu gibi, kolay bir tümevarımla $n=1,2,\dots$ için $11|u_{n+10}-u_n$ olduğunu kanıtlarız. Buradan, Fibonacci dizisinin 11 modülüne göre kalanlar dizisinin periyodik olduğu ve periyodunun 10 olduğu sonucu çıkar; bu diziyi kolayca $1,1,2,3,5,8,2,10,1,0,\dots$ olarak buluruz. 4 sayısı (ve ayrıca 6, 7 ve 9) bu dizide görünmez.

sayıda teriminin bulunduğunu kanıtlayınız.[67]

68. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere her $ak + b$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ aritmetik dizisinde asal çarpanları aynı olan sonsuz tane terim bulunduğunu kanıtlayınız.[68]

69. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere her $ak + b$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ aritmetik dizisi ve her s pozitif tam sayısı için, s tane birbirinden farklı asal sayının çarpanına eşit olan sonsuz tane terim bulunduğunu kanıtlayınız.[69]

70. Farkı 10 olan ve sadece asal sayılardan oluşan en az 3 terimli tüm aritmetik dizileri bulunuz.[70]

---

[67] Dizimizin n terimine sahip olduğumuzu varsayalım

$$ak_1 + b, ak_2 + b, \dots, ak_n + b,$$

bunlar ikişerli olarak aralarında asaldır ($n = 1$ için $k_1 = 1$ alabiliriz). $m = (ak_1 + b)(ak_2 + b)\dots(ak_n + b)$ olsun. Problem 62'den, $(ak_{n+1} + b, m) = 1$ olacak şekilde pozitif bir k_{n+1} tam sayısının var olduğu sonucu çıkar, dolayısıyla $i = 1, 2, \dots, n$ için $(ak_{n+1} + b, ak_i + b) = 1$'dir. Sayıları

$$ak_1 + b, ak_2 + b, \dots, ak_n + b, ak_{n+1} + b$$

bu nedenle ikişerli olarak aralarında asaldır. Böylece tümevarımla, $ak_i + b$ $(i = 1, 2, \dots)$ dizisinin orijinal aritmetik dizinin sadece aralarında asal terimlerini içermesini sağlayan sonsuz $k_1, k_2, \dots$ dizisini tanımlamış olduk.

[68] $d = (a, a + b)$ olsun. Böylece $a = da_1$, $a + b = dc$ olur, burada $(a_1, c) = 1$ ve $c > 1$'dir ($d \leq a$ iken $dc = a + b > a$ olduğundan). $(a_1, c) = 1$ ve Euler teoremi göz önüne alındığında, $c^{\phi(a_1)} \equiv 1 \pmod{a_1}$ elde ederiz, dolayısıyla n tam sayısı için $c^{n\phi(a_1)} \equiv 1 \pmod{a_1}$ olur. Bu nedenle, $c^{n\phi(a_1)} - 1 = t_n a_1$ olacak şekilde bir t_n pozitif tam sayısı vardır, ki bu ($c > 1$ ve n keyfi olarak büyük olduğundan) keyfi olarak büyük yapılabilir. Dahası, elimizde şu var:

$$a(ct_n + 1) + b = da_1 ct_n + dc = dc^{n\phi(a_1)+1}.$$

Dizimizin (keyfi olarak büyütülebilen) $a(ct_n + 1) + b$ terimi, bu nedenle, $dc > 1$ sayısının asal bölenleri olan ve sadece o asal bölenlere sahiptir. Böylece, dizimizde aynı asal bölen kümesine sahip sonsuz çoklukta terim mevcuttur, ki bu da kanıtlanması gerekendi (bkz. Pólya (1918)).

[69] Lejeune-Dirichlet teoreminden, $s = 1$ için teoremin doğru olduğu hemen anlaşılır. Şimdi teoremin bir s pozitif tam sayısı için doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda, $q_1 < q_2 < \dots < q_s$ asal olmak üzere $ak_0 + b = q_1 q_2 \dots q_s$ olacak şekilde bir k_0 sayısı mevcuttur. asallar. Lejeune-Dirichlet teoremine göre, $ak + 1 = q$'nun $q > q_s$ olacak şekilde bir asal sayı olmasını sağlayan sonsuz sayıda k tam sayısı vardır. $t = q_1 q_2 \dots q_s k + k_0$ için şunu elde ederiz:

$$at + b = q_1 q_2 \dots q_s ak + ak_0 + b = q_1 q_2 \dots q_s (ak + 1) = q_1 q_2 \dots q_s q.$$

Dolayısıyla teorem $s + 1$ için de doğrudur. Tümevarım yoluyla, teoremin her pozitif s tam sayısı için doğru olduğu sonucu çıkar, ki bu da kanıtlanması gerekendi.

[70] Eğer p bir asalsa, o zaman $p, p + 10$ ve $p + 20$ sayılarından biri 3'e bölünmelidir (çünkü $p + 10 \equiv p + 1 \pmod 3$ ve $p + 20 \equiv p + 2 \pmod 3$'tür ve her üç ardışık tam sayıdan biri 3'e bölünmelidir). Dolayısıyla, eğer bu üç sayımızın tümü asalsa, o zaman bunlardan biri, yani en küçüğü, 3'e eşit olmalıdır ve $p = 3, p + 10 = 13, p + 20 = 23$ elde ederiz. Bu nedenle, farkı 10 olan ve üç asaldan oluşan yalnızca bir aritmetik dizi vardır, yani 3, 13, 23. Farkı 10 olan ve dört (veya daha fazla) asaldan oluşan hiçbir aritmetik dizinin olmadığını kolayca gösterebiliriz, çünkü eğer $p, p + 10, p + 20$ ve $p + 30$ asal olsaydı, o zaman gösterdiğimiz gibi, $p = 3$ olurdu, ancak $p + 30 = 33 = 3 \cdot 11$ bir asal değildir.

NOT. A. Schinzel'in asallara ilişkin belirli bir sanısından (Schinzel ve Sierpiński 1958a),

71. Farkı 100 olan ve sadece asal sayılardan oluşan en az 3 terimli tüm aritmetik dizileri bulunuz.[71]

72. Sadece asal sayılardan oluşan, 10 terimli ve son terimi en küçük olan artan bir aritmetik dizi bulunuz.[72]

73. Pozitif tam sayılardan oluşan ve hiçbir terimi iki asal sayının ne toplamı, ne de farkı şeklinde gösterilemeyen artan bir sonsuz aritmetik dizi bulunuz.[73]

$p+10$'un da asal olmasını sağlayan sonsuz sayıda p asalının var olduğu sonucu çıkar; örneğin 7 ve 17, 13 ve 23, 19 ve 29, 31 ve 41, 37 ve 47, 61 ve 71, 73 ve 83, 79 ve 89.

[71] $p, p+100$ ve $p+200$ sayılarından birinin 3'e bölünmesi gerektiğinden ve eğer bu sayılar asalsa, $p=3$ olması gerektiğinden, bu tür diziler yoktur. Ancak bu durumda $p+200=203=7\cdot 29$ bileşik sayıdır.

NOT. Benzer bir şekilde, $1003=17\cdot 53$ bileşik olduğundan, üç veya daha fazla asaldan oluşan ve farkı 1000 olan hiçbir dizinin bulunmadığını gösteririz. Öte yandan, A. Schinzel'in bir sanısından (Schinzel ve Sierpiński 1958a) $p+1000$'in de asal olmasını sağlayan sonsuz sayıda p asalının var olduğu sonucu çıkar; örneğin 13 ve 1013, 19 ve 1019, 31 ve 1031, 61 ve 1061, 97 ve 1097, 103 ve 1103, 1039 ve 2039.

[72] Eğer dizimizin farkı tek olsaydı, o zaman dizimizin her ikinci terimi çift olurdu; bu ise dizimizin on asaldan oluşması isteniyorsa imkansızdır. Dolayısıyla, fark çift olmalıdır. Eğer ilk terim 2'ye eşit olsaydı, o zaman bir sonraki terim çift olurdu ve dolayısıyla bileşik olurdu. Bu nedenle, dizimizin ilk terimi tek bir asaldır ve buradan tüm terimlerin tek asal olması gerektiği sonucu çıkar. Esasen M. Cantor'a ait olan şu teoremi kullanacağız: Eğer bir aritmetik dizinin n terimi tek asalsa, o zaman dizinin farkı n'den küçük her asal sayıya bölünür (bkz, örneğin, Sierpiński (1964a), s. 121, teorem 5). $n=10$ için, dizimizin farkının 2, 3, 5 ve 7'ye, dolayısıyla 210'a bölünmesi gerektiği sonucu çıkar. Önce, 10 asaldan oluşan ve farkı 210 olan bir aritmetik dizi bulmaya çalışacağız.

210 sayısı (dizimizin farkı) 2, 3, 5 ve 7'ye bölündüğünden, ilk terim bu asallardan hiçbirine eşit olamaz. 11'e de eşit olamaz, çünkü bu durumda ikinci terim $221=13\cdot 17$ olurdu. Dolayısıyla dizinin ilk terimi >11'dir ve terimlerin hiçbiri 11'e bölünmez. 210'un 11'e bölümünden kalan 1'dir. Eğer ilk terim 11'e bölündüğünde >1 kalanını verseydi, o zaman her sonraki terimde bu kalan 1 artardı ve dizinin terimlerinden biri 11'e bölünürdü ki bu imkansızdır. Bu nedenle, dizinin ilk terimi 11'e bölündüğünde 1 kalanını vermelidir ve tek olduğundan, k pozitif bir tam sayı olmak üzere $22k+1$ formunda olmalıdır. Bu formdaki ardışık asallar $23, 67, 89, 199, \ldots$ şeklindedir. İlk terim 23 olamaz, çünkü o zaman altıncı terim $1073=29\cdot 37$ olurdu. Eğer ilk terim 67 olsaydı, o zaman dördüncü terim $697=17\cdot 41$ olurdu. Eğer ilk terim 87 olsaydı, o zaman ikinci terim $229=13\cdot 23$ olurdu. Ancak, ilk terim 199 ise, on ardışık asaldan oluşan bir dizi elde ederiz

$$199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089.$$

Böylece farkı 210 olan ve on asaldan oluşan bir dizi bulmuş olduk. Şimdi, farkı 210'dan farklı bir r olan ve on asaldan oluşan artan bir aritmetik dizimiz olduğunu varsayalım. O zaman r (Cantor teoremine göre) 210'a bölünmelidir ve 210'dan farklı olduğundan, $r\geq 420$ olmalıdır. Ancak bu durumda, dizimizin ikinci terimi 420'yi aşacaktır, dolayısıyla bizim bulduğumuz dizinin ikinci terimi olan 409'u aşacaktır ve açıkçası sonraki terimler de bulduğumuz dizinin terimlerini aşacaktır. Dolayısıyla, ilk terimi 199 ve farkı 210 olan dizi, mümkün olan en küçük son terime sahip olan, on asaldan oluşan artan dizidir.

NOT. Bugüne kadar bilinen en uzun artan aritmetik asal dizisi, ilk terimi 4943 ve farkı 60060 olan on üç terimli dizidir ve Moskova'dan W. N. Seredinsky tarafından bulunmuştur. A. Schinzel'in asallara ilişkin bir sanısından, farkı 30030 olan ve on üç asaldan oluşan sonsuz sayıda dizinin var olduğu sonucu çıkar (bkz. Schinzel ve Sierpiński (1958a), s. 191, $C_{1,4}$). Ancak, şu ana kadar böyle bir dizi bulunamamıştır.

[73] Örneğin, $30k+7$ $(k=1,2,3,\ldots)$ dizisi istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de, eğer $30k+7=$

Asal ve Bileşik Sayılar

74. Her çift $n > 6$ tam sayısı için $(n - p, n - q) = 1$ olacak şekilde p ve q asal sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.[74]

75. Hem iki asal sayının toplamı hem de farkı şeklinde yazılabilen tüm asal sayıları bulunuz.[75]

76. n ile $n+10$ arasında hiçbir asal sayı olmayacak şekilde üç en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz. $10m$ ile $10(m+1)$ arasında hiçbir asal sayı olmayacak şekilde üç en küçük m pozitif tam sayısını bulunuz.[76]

77. $4k + 1$ şeklinde olan her asal sayının, kenar uzunlukları tam sayılar olan bir dik üçgenin hipotenüzünün uzunluğuna eşit olduğunu kanıtlayınız.[77]

78. p, q, r asal sayılar olmak üzere, $p^2 + 1 = q^2 + r^2$ denkleminin tüm çözümünü bulunuz.[78]

79. p, q, r, s, t asal sayılar olmak üzere $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$ denkleminin çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[79]

$p + q$ olsaydı, $30k + 7$'nin tek olduğu gerçeği göz önüne alındığında, p ve q sayılarından biri çift olurdu ve bir asal olarak 2'ye eşit olurdu. $q = 2$ olduğunu varsayalım; o zaman $p = 30k + 5 = 5(6k + 1)$ olur ki bu, p'nin bir asal olması durumunda imkansızdır. Eğer p ve q asal olmak üzere $30k + 7 = p - q$ ise, o zaman $q = 2$ ve $p = 30k + 9 = 3(10k + 3)$ olurdu ki bu da imkansızdır.

NOT. İki asalın hem toplamı hem de farkı olarak temsil edilebilen sonsuz sayıda çift sayının var olduğu kanıtlanabilir (ancak kanıtı zordur). A. Schinzel'in asallara ilişkin belirli bir sanısından, hem iki asalın toplamı hem de farkı olan sonsuz sayıda tek sayının var olduğu sonucu çıkar. Bkz. Sierpiński (1963).

[74] $p = 3, q = 5$ almak yeterlidir. Eğer n çift ve > 6 ise, o zaman $n - 1 \geq 6$ ve $p < q < n - 1$ olur. Ardışık tek sayılar olan $n - p = n - 3$ ve $n - q = n - 5$ sayıları aralarında asaldır.

[75] Bu tür yalnızca bir asal vardır, yani 5. Gerçekten de, r asalının hem iki asalın toplamı hem de farkı olarak temsil edilebildiğini varsayalım. Açıkçası $r > 2$ olmalıdır, dolayısıyla r tek bir asaldır. Hem iki asalın toplamı hem de farkı olduğundan, bu asallardan biri çift olmalı, yani 2'ye eşit olmalıdır. Dolayısıyla, p ve q asal olmak üzere $r = p + 2 = q - 2$ olmalıdır. Ancak bu durumda $p, r = p + 2$ ve $q = r + 2$ ardışık üç tek asal olurdu ve bu tür yalnızca bir üçlü vardır: 3, 5 ve 7 (çünkü her üç ardışık tek sayıdan biri 3'e bölünmelidir). Bu nedenle $r = 5 = 3 + 2 = 7 - 2$ elde ederiz.

[76] $n = 113, 139, 181; m = 20, 51, 62$.

[77] İyi bilinen Fermat teoremine göre, $4k+1$ formundaki her asal, iki pozitif tam sayının karelerinin toplamıdır (bkz, örneğin, (Sierpiński 1964a, 205, Teorem 9)). Dolayısıyla, eğer p $4k + 1$ formunda bir asalsa, $p = a^2 + b^2$ olur; burada a ve b pozitif tam sayılardır (p tek olduğundan dolayı elbette farklıdırlar). Örneğin, $a > b$ olduğunu varsayalım. O zaman $p^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$'dir, dolayısıyla p diğer iki kenarı $a^2 - b^2$ ve $2ab$ olan bir dik üçgenin hipotenüsüdür. Örneğin, $5^2 = 3^2 + 4^2$, $13^2 = 5^2 + 12^2$, $17^2 = 15^2 + 8^2$, $29^2 = 21^2 + 20^2$.

[78] $13^2 + 1 = 7^2 + 11^2$, $17^2 + 1 = 11^2 + 13^2$, $23^2 + 1 = 13^2 + 19^2$, $31^2 + 1 = 11^2 + 29^2$.

NOT. $(5x + 13)^2 + 1 = (3x + 7)^2 + (4x + 11)^2$ özdeşliği, eğer $p = 5x + 13$, $q = 3x + 7$ ve $r = 4x + 11$ asalsa, $p^2 + 1 = q^2 + r^2$ olduğunu gösterir. A. Schinzel'in asallara ilişkin belirli bir sanısından (Schinzel ve Sierpiński 1958a) bu tür sistemlerin sonsuz sayıda olduğu sonucu çıkar.

[79] İlk olarak, eğer p, q, r, s ve t asalsa ve $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$ ise, o zaman p ve q sayılarının

80. $(p+1)+q(q+1) = r(r+1)$ denkleminin tüm p, q, r asal çözümlerini bulunuz.[80]

81. $p(p+1), q(q+1), r(r+1)$ sayılarının bir artan aritmetik dizi oluşturmasını sağlayan tüm p, q, r asal sayılarını bulunuz.[81]

---

her biri r, s ve t sayılarının her birinden farklı olmalıdır. Gerçekten de, eğer örneğin $p = r$ olsaydı, o zaman $q^2 = s^2 + t^2$ olurdu ki bu imkansızdır, çünkü q, s, t asalken bu denklemin çözümü olamaz. Aslında, s ve t sayıları hem tek olamazdı hem de her ikisi çift olamazdı (çünkü bu durumda $q = 2$ olurdu, ki bu sağ tarafın > 4 olması gerçeğiyle çelişir). Eğer $s = 2$ olsaydı, o zaman 4 sayısı pozitif tam sayıların iki karesinin farkı olurdu ki bu imkansızdır.
Eğer $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$ ise, p, q, r, s, t sayılarının hepsinin tek olması mümkün değildir. Eğer p çiftse, o zaman $p = 2$'dir ve q, r, s, t sayıları tektir. Tek bir sayının karesinin 8'e bölümünden kalan 1 olduğundan, sol taraf 8'e bölündüğünde 5 kalanını verir, sağ taraf ise 3 kalanını verir, ki bu imkansızdır. Eğer hem p hem de q tekse, o zaman sol taraf 8'e bölündüğünde 2 kalanını verir, sağ tarafta ise sayılardan biri (ve sadece biri) çift olmalıdır, örneğin $r = 2$. Ancak o zaman, sağ taraf 8'e bölündüğünde 6 kalanını verirdi, ki bu imkansızdır.

[80] A. Schinzel tarafından bulunan çözümü sunuyoruz. Yalnızca bir çözüm vardır, yani $p = q = 2$, $r = 3$. Bunu görmek için, p ve q asal ve r pozitif bir tam sayı olmak üzere $p(p+1)+q(q+1) = r(r+1)$ denkleminin tüm çözümlerini bulacağız. Denklemimiz şunu verir

$$p(p+1) = r(r+1) - q(q+1) = (r-q)(r+q+1),$$

ve $r > q$ olmalıdır. p bir asal olduğundan, ya $p \mid r-q$ ya da $p \mid r+q+1$ olmalıdır. Eğer $p \mid r-q$ ise, o zaman $p \le r-q$ olur, bu da $p(p+1) \le (r-q)(r-q+1)$ anlamına gelir ve dolayısıyla $r+q+1 \le r-q+1$ olur ki bu imkansızdır. Dolayısıyla $p \mid r+q+1$ olmalıdır, bu da bir k pozitif tam sayısı için

$$r+q+1 = kp, \text{ anlamına gelir, bu da } p+1 = k(r-q) \text{ demektir. } (1)$$

Eğer $k = 1$ olsaydı, o zaman $r+q+1 = p$ ve $p+1 = r-q$ olurdu, bu da $p-q = r+1$ ve $p+q = r+1$ verir, ki bu imkansızdır. Dolayısıyla, $k > 1$. (1)'den kolayca şunu elde ederiz

$$2q = (r+q) - (r-q) = kp - 1 - (r-q)$$

$$= k[k(r-q)-1] - 1 - (r-q) = (k+1)[(k-1)(r-q)-1].$$

$k \ge 2$ olduğundan, $k+1 \ge 3$ olur. Sol tarafı sadece $1, 2, q$ ve $2q$ pozitif tam sayı bölenlerine sahip olan son eşitlik, ya $k+1 = q$ ya da $k+1 = 2q$ olmasını gerektirir. Eğer $k+1 = q$ ise, o zaman $(k-1)(r-q) = 3$, dolayısıyla $(q-2)(r-q) = 3$. Bu, ya $q-2 = 1, r-q = 3$, yani $q = 3, r = 6$, $k = q-1 = 2$ ve (1) uyarınca $p = 5$'e, ya da $q-2 = 3, r-q = 1$, bu da $q = 5, r = 6$, $k = 4$ ve (1) uyarınca $p = 3$'e götürür. Öte yandan, eğer $k+1 = 2q$ ise, o zaman $(k-1)(r-q) = 2$, dolayısıyla $2(q-1)(r-q) = 2$. Bu, $q-1 = 1$ ve $r-q = 1$'e, yani $q = 2, r = 3$'e ve (1) uyarınca $p = 2$'ye götürür. Dolayısıyla, pozitif r tam sayıları için, p ve q asallarında şu çözümlere sahibiz: 1) $p = q = 2, r = 3$; 2) $p = 5, q = 3, r = 6$, ve 3) $p = 3, q = 5, r = 6$. Sadece ilk çözümde üç sayı da asaldır.
NOT. Eğer n'inci üçgensel sayıyı $t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ ile gösterirsek, o zaman yukarıdaki teoremi şu şekilde ifade edebiliriz: $t_p + t_q = t_r$ denkleminin asal sayılarda yalnızca bir çözümü vardır, yani $p = q = 2, r = 3$.

[81] Bu tür sayılar, örneğin, $p = 127, q = 3697, r = 5527$'dir. Bu sayıların asal olduğunu ve $p(p+1)$, $q(q+1)$ ve $r(r+1)$ sayılarının bir aritmetik dizi oluşturduğunu (örneğin, asal sayılar tablolarından) kontrol etmek kolaydır. Bu tür sayıları bulmak için bir yöntem sunacağız. Şu özdeşlikten:

$$n(n+1) + (41n+20)(41n+21) = 2(29n+14)(29n+15)$$

pozitif bir n tamsayısı için $n(n+1)$, $(29n+14)(29n+15)$ ve $(41n+20)(41n+21)$ sayılarının bir aritmetik dizi oluşturduğu sonucu çıkar. Eğer bazı pozitif n tamsayıları için n, $29n+14$

82. $n+1, n+3, n+7, n+9, n+13$ ve $n+15$ sayılarının her birinin asal olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.[82]

83. İki tam sayının dördüncü dereceden kuvvetinin toplamına eşit olan beş asal sayıyı bulunuz.[83]

84. İkiz asal sayılar olmayan sonsuz sayıda ardışık asal sayılar çiftinin bulunduğunu kanıtlayınız.[84]

85. Hiçbir ikiz asal sayıda bulunmayan sonsuz tane asal sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[85]

---

ve $41n+20$ sayılarının hepsi asal olsaydı, bir çözüm bulmuş olurduk. Bu nedenle, n için ardışık tek asalları almalı ve $29n+14$ ile $41n+20$ sayılarının asal olup olmadığını kontrol etmeliyiz. Bu tür en küçük sayı, yukarıdaki çözüme götüren $n = 127$'dir. Ancak, bu şekilde gerekli özelliklere sahip tüm asal üçlülerini elde ettiğimizi iddia edemeyiz.

NOT. A. Schinzel'in asallara ilişkin (Schinzel ve Sierpiński 1958a) belirli bir sanısından (konjektüründen), $29n+14$ ve $41n+20$ sayılarının da asal olmasını sağlayan sonsuz çoklukta n asalı bulunduğu sonucu çıkar.

Yukarıdaki problem şöyle ifade edilebilir: asal indisli ve artan bir aritmetik dizi oluşturan üç üçgensel sayı bulunuz.

[82] Bu şekilde tek bir pozitif tamsayı vardır, o da $n = 4$'tür. Aslında, $n = 1$ için $n+3 = 4$ sayısı bileşiktir; $n = 2$ için $n+7 = 9$ sayısı bileşiktir; $n = 3$ için $n+1 = 4$ sayısı bileşiktir; ve $n > 4$ için sayılarımızın tamamı 5'i aşar ve en az biri 5 ile bölünebilir. Bu son özellik, 1, 3, 7, 9, 13 ve 15 sayılarının 5'e bölündüğünde 1, 3, 2, 4, 3 ve 0 kalanlarını vermesinden, yani tüm olası kalanları vermesinden kaynaklanır. Dolayısıyla, $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ ve $n+15$ sayıları da 5'e bölündüğünde tüm olası kalanları verir; bu nedenle içlerinden en az biri 5 ile bölünebilir ve 5'ten büyük olduğu için bileşiktir. Öte yandan, $n = 4$ için 5, 7, 11, 13, 17 ve 19 asal sayılarını elde ederiz.

NOT. A. Schinzel'in asal sayılarla ilgili bir konjektüründen (Schinzel ve Sierpiński 1958a) $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$ ve $n+13$ sayılarının her birinin asal olacağı şekilde sonsuz sayıda n pozitif tamsayısının var olduğu sonucu çıkar. Örneğin, $n = 4, 10, 100$ durumları böyledir. Ayrıca bkz. (Sierpiński 1962b, 319, P_2).

[83] $2 = 1^4 + 1^4, 17 = 1^4 + 2^4, 97 = 2^4 + 3^4, 257 = 1^4 + 4^4, 641 = 2^4 + 5^4$.

NOT. A. Schinzel'in asallarla ilgili bir konjektüründen (Schinzel ve Sierpiński 1958a), pozitif tamsayılar üzerinde iki dördüncü kuvvetin toplamı olarak temsil edilebilen sonsuz sayıda asal sayının var olduğu sonucu çıkar ve genel olarak, her n pozitif tamsayısı için a ve b pozitif tamsayılar olmak üzere $a^n + b^n$ formunda sonsuz sayıda asal sayının var olduğu sonucu çıkar.

[84] p_k, k'ıncı asal sayıyı göstersin ve n pozitif tamsayısı için p_{k_n}, $\leq 6n+1$ olan en büyük asal sayı olsun. $6n+2 = 2(3n+1)$, $6n+3 = 3(2n+1)$ ve $6n+4 = 2(3n+2)$ sayıları bileşik olduğundan, $p_{k_n+1} \geq 6n+5$ olur ve $p_{k_n+1} - p_{k_n} \geq (6n+5) - (6n+1) = 4$'tür, dolayısıyla p_{k_n} ve p_{k_n+1} asal sayıları ikiz asal değildir. $p_{k_n} \geq 6n+5$ olduğundan ve n keyfi olabileceğinden, bu tür sonsuz çoklukta p_{k_n} ve p_{k_n+1} sayısı vardır. Ancak, p_{k_n}, p_{k_n+1} çiftinde p_{k_n} sayısının bir ikiz asal çiftinin büyüğü olabileceğini ve p_{k_n+1}'in başka bir ikiz asal çiftinin küçüğü olabileceğini unutmayın. Böylece, $n = 1$ için, ikiz asal olan 5, 7 çiftinin büyüğü olan $p_{k_n} = 7$'yi ve 11, 13 çiftinin küçüğü olan $p_{k_n+1} = 11$'i elde ederiz. $n = 2$ için, 11, 13 çiftinin büyüğü olan $p_{k_n} = 13$'ü elde ederiz, $p_{k_n+1} = 17$ ise 17, 19 çiftinin küçüğüdür. $n = 17$ için, 101, 103 çiftinin büyüğü olan $p_{k_n} = 103 = 6 \cdot 17 + 1$'i elde ederiz, $p_{k_n+1} = 107$ ise 107, 109 çiftinin küçüğüdür.

[85] Lejeune-Dirichlet'nin aritmetik diziler üzerine teoremine göre, $15k+7$ $(k = 1, 2, ...)$ dizisinde sonsuz çoklukta asal sayı vardır. Bu sayıların hiçbiri bir ikiz asal çiftine ait olamaz çünkü $(15k+7)+2 = 3(5k+3)$ ve $(15k+7)-2 = 5(3k+1)$ sayıları $(k > 0$ için) bileşiktir.

86. $n^2 - 1$ sayısının birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan en küçük beş n pozitif sayısını bulunuz.[86]

87. $n^2 + 1$ sayısının birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan en küçük beş n pozitif sayısını bulunuz. n^2+1 sayısının birbirinden farklı üç tek sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan bir n pozitif sayısı bulunuz.[87]

88. 7'den büyük olan her ardışık üç sayının en az birinin en az iki birbirinden farklı asal böleninin bulunduğunu kanıtlayınız.[88]

---

[86] Eğer n pozitif bir tamsayı için $n^2 - 1$ sayısı üç farklı asal sayının çarpımı ise, ($2^2 - 1 = 3$ göz önüne alındığında) $n > 2$ olmalıdır. $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ özdeşliği dikkate alındığında, n sayısı çift olmalıdır, aksi takdirde sağ taraftaki çarpanlar çift olurdu ve $2^2 \mid n^2 - 1$ olurdu. Dahası, $n-1$ ve $n+1$ sayıları (aralarındaki fark 2 olduğundan) ($n > 2$ olduğu için 1'den büyüktürler) her ikisi de bileşik olamaz, çünkü bu durumda $n^2 - 1$ üç farklı asal sayının çarpımı olamazdı. Dolayısıyla, $n-1$ ve $n+1$ sayılarından biri asal olmalı, diğeri ise iki asal sayının çarpımı olmalıdır. $n = 4$ için $n-1 = 3$, $n+1 = 5$ elde ederiz ve bu koşul sağlanmaz. Benzer şekilde, $n = 6$ için $n-1 = 5$, $n+1 = 7$; $n = 8$ için $n-1 = 7$, $n+1 = 9 = 3^2$. $n = 10$ için $n-1 = 3^2$, ve $n = 12$ için $n-1 = 11$, $n+1 = 13$ elde ederiz. $n = 14$ için $n-1 = 13$, $n+1 = 15 = 3\cdot 5$ elde ederiz. Bu durumda, n^2-1'in üç farklı asal sayının çarpımı olduğu en küçük pozitif tamsayı $n = 14$'tür, çünkü $n^2 - 1 = 13\cdot 3\cdot 5$. $16^2 - 1 = 3\cdot 5\cdot 17$ olduğundan, gereken özelliği sağlayan bir sonraki n sayısının $n = 16$ olduğunu görürüz. Şimdi, $18^2 - 1 = 17\cdot 19$, $20^2 - 1 = 19\cdot 21 = 3\cdot 7\cdot 19$, ve üçüncü böyle sayı $n = 20$'dir. Sonra, $22^2 - 1 = 3\cdot 7\cdot 23$, ve dördüncü aranan sayı $n = 22$'dir. Bu şekilde devam ederek, $32^2 - 1 = 3\cdot 11\cdot 31$ olduğundan, beşinci böyle sayının $n = 32$ olduğunu kolayca buluruz. Dolayısıyla, $n^2 - 1$'in üç farklı asal sayının çarpımı olduğu ilk beş tamsayı 14, 16, 20, 22 ve 32'dir.

NOT. A. Schinzel'in asallarla ilgili bir konjektüründen (Schinzel ve Sierpiński 1958a), bu tür sonsuz çoklukta n sayısının var olduğu sonucu çıkar. Daha genel olarak, her $s > 1$ için, $n^2 - 1$'in s farklı asal sayının çarpımı olduğu sonsuz çoklukta n pozitif tamsayısı vardır.

[87] $n^2 + 1$'in üç farklı asal sayının çarpımı olduğu en küçük beş pozitif n tamsayısı $n = 13, 17, 21, 23$ ve 27'dir. Elimizde $13^2+1 = 2\cdot 5\cdot 17$, $17^2+1 = 2\cdot 5\cdot 29$, $21^2+1 = 2\cdot 13\cdot 17$, $23^2 + 1 = 2\cdot 5\cdot 53$ vardır. $n = 112$ için $112^2 + 1 = 5\cdot 13\cdot 193$ elde ederiz.

NOT. A. Schinzel'in asallarla ilgili bir konjektüründen (Schinzel ve Sierpiński 1958a), her s için $n^2 + 1$'in s farklı asal sayının çarpımı olduğu sonsuz çoklukta n pozitif tamsayısının var olduğu sonucu çıkar.

[88] $n > 7$ olmak üzere n, $n+1$ ve $n+2$ sayılarının her birinin sadece bir asal böleni olduğunu varsayalım. Bu sayılardan hiçbiri 6 ile bölünemez, bu da n'in $6k+1$, $6k+2$ veya $6k+3$ formunda olması gerektiği anlamına gelir, burada k pozitif bir tamsayıdır.

Eğer $n = 6k+1$ ise, çift olan ve sadece bir asal böleni olan $6k+2$ sayısı 2^m formunda olmalıdır; şimdi, $n > 7$ olması $6k+2 = n+1 > 8$'i gerektirdiğinden, m sayısı > 3 olmalıdır. $n+2 = 6k+3$ sayısı 3 ile bölünebilir ve eğer sadece bir asal böleni varsa, 3^s formunda olmalıdır. $6k+3 = n+2 > 9$ olduğundan, s sayısı > 2 olmalıdır. Dahası, $3^s - 2^m = 1$ elde ederiz; ancak bu denklemin sadece iki tamsayı çözümü vardır, bunlar $s = 1$ ve $s = 2, m = 3$'tür (bkz. Problem 185). Eğer $n = 6k+2$ ise, $n = 2^m$ ve $n+1 = 6k+3 = 3^s$ olur, burada $m > 2$'dir ($n > 6$ olduğundan). $3^s - 2^m = 1$ elde ederiz, bu da $m > 3$ için imkansızdır.

Son olarak, eğer $n = 6k+3$ ise, $n = 3^s$, $n+1 = 2^m$ olur ve $n > 7$ göz önüne alındığında $s \geq 2, m > 3$ elde ederiz, halbuki $2^m - 3^s = 1$ denkleminin tek bir tamsayı çözümü vardır, o da $m = 2, s = 1$'dir (bkz. Problem 184). Dolayısıyla, $n > 7$ tamsayısı için $n, n+1$ ve $n+2$ sayılarından hiçbirinin birden fazla asal böleni olmadığı varsayımı bir çelişkiye yol açtı. Öte yandan, $n = 7$ için $n+1 = 2^3$, $n+2 = 3^2$ olur ve $n, n+1$ ve $n+2$ sayılarının her birinin sadece bir asal böleni vardır.

89. $n, n+1, n+2$ sayılarından her biri birbirinden farklı iki asal sayının çarpımına eşit olacak şekilde beş en küçük pozitif tam sayıyı bulunuz. Bu özellikle sahip olan dört ardışık sayı dizisini bulunmadığını kanıtlayınız. Her birinin tam iki asal böleni bulunan dört ardışık pozitif tam sayıyı bulunuz.[89]

90. Aşağıdaki teoremlerin birbirine denk olduğunu gösteriniz:[90]

(a) n ve $n+1$ sayılarının her birinin sadece bir asal böleni olmasını sağlayan n pozitif tam sayıları sonlu sayıdadır.

(b) Sadece sonlu sayıda Mersenne asal sayıları ve sonlu sayıda Fermat asal sayıları vardır.

91. n pozitif tam sayı olmak üzere milyonlarca büyük olmayan ve iki asal sayının çarpımına eşit olan tüm $2^n - 1$ şeklinde olan sayıları bulunuz. Eğer n çift ise ya da $n > 4$'ten büyükse, $2^n - 1$ sayısının 1'den büyük en az üç asal sayının çarpımı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.[91]

---

[89] $n = 33$ ($n = 3\cdot 11, n+1 = 2\cdot 17, n+2 = 5\cdot 7$), $n = 85$ ($n = 5\cdot 17, n+1 = 2\cdot 43, n+2 = 3\cdot 29$), $n = 93$ ($n = 3\cdot 31, n+1 = 2\cdot 47, n+2 = 5\cdot 19$), $n = 141$ ($n = 3\cdot 47, n+1 = 2\cdot 71, n+2 = 11\cdot 13$), $n = 201$ ($n = 3\cdot 67, n+1 = 2\cdot 101, n+2 = 7\cdot 29$). Her biri iki farklı asal sayının çarpımı olan dört ardışık pozitif tamsayı yoktur, çünkü her dört ardışık sayıdan biri 4 ile bölünmek zorundadır. Her biri tam olarak iki farklı asal bölene sahip olan dört ardışık pozitif tamsayıya bir örnek $33 = 3\cdot 11, 34 = 2\cdot 17, 35 = 5\cdot 7, 36 = 2^2\cdot 3^2$ sayılarıdır.

NOT. n, $n+1$ ve $n+2$ sayılarının her birinin iki farklı asal sayının çarpımı olduğu sonsuz çoklukta n pozitif tamsayısının var olduğunu kanıtlayamıyoruz; bu, A. Schinzel'in asallarla ilgili belirli bir konjektüründen çıkmaktadır. Bkz. (Schinzel ve Sierpiński 1958a, 197, sonuç C_7).

[90] Hem n hem de $n+1$'in sadece bir asal böleni olduğu sonsuz çoklukta n pozitif tamsayısının var olduğunu varsayalım. $n > 1$ olduğunu varsayabiliriz ve n ile $n+1$ sayılarından biri çift, diğeri tek olduğundan, k ve m pozitif tamsayılar olmak üzere, $p^k - 2^m = \pm 1$ gibi bir tek p asalı için n ve $n+1$ sayıları p^k ve 2^m (ya da tam tersi) olmalıdır. Dolayısıyla $p^k = 2^m \pm 1$ elde ederiz. Bir Mersenne sayısı > 1 herhangi bir asal sayının 1'den büyük üslü bir kuvvetine eşit olamayacağından (bkz. (Sierpiński 1964a, 335, teorem 2)), $p^k = 2^m - 1$ durumunda $k = 1$ olmalıdır ve $2^m - 1 = p$ bir Mersenne asalıdır. Öte yandan, eğer $p^k = 2^m + 1$ ise, ya $k = 1$'dir, bu durumda $p = 2^m + 1$ ya 3'tür (eğer $m > 1$ ise) ya da bir Fermat asalıdır, ya da $k > 1$'dir, bu durumda $2^m = p^k - 1 = (p-1)(p^{k-1} + p^{k-2} + \cdots + 1)$ elde ederiz. Sol taraf çift olduğundan, k sayısı çift olmalıdır; dolayısıyla $k = 2l$, burada l pozitif bir tamsayıdır, ve $2^m = (p^l - 1)(p^l + 1)$ yazabiliriz. Bu nedenle $p^l - 1$ ve $p^l + 1$ sayıları, aralarındaki fark 2 olan 2'nin kuvvetleridir, bu da $p^l - 1 = 2$, $p^l + 1 = 4$'ü gerektirir, buradan $p^l = 3$ ve $p = 3$, $l = 1$ bulunur, $m = 3$ olur, bu da $3^2 = 2^3 + 1$ sonucunu verir.

Böylece, $n > 8$ için n ve $n+1$ sayılarının her birinin bir asal böleni varsa, n'in bir Mersenne asalı veya $n+1$'in bir Fermat asalı olduğunu kanıtladık.

Tersine, eğer $M_m = 2^m - 1$ bir Mersenne asalı ise, M_m ve $M_m + 1 = 2^m$ sayılarının her birinin bir asal böleni vardır. Eğer $F_k = 2^{2^k} + 1$ bir Fermat asalı ise, $F_k - 1 = 2^{2^k}$ ve F_k sayılarının her birinin bir asal böleni vardır, bu da teoremimizin kanıtını tamamlar. Bkz. (Sierpiński 1958a, 209).

NOT. Bugüne kadar, n ve $n+1$'in her birinin bir asal böleni olduğu sadece 29 tane n pozitif tamsayısı bilinmektedir. En küçük beşi 2, 3, 4, 7, 8 olup en büyüğü $n = 2^{11213} - 1$'dir.

[91] $2^2 - 1 = 3$, $2^4 - 1 = 3\cdot 5$ ve $2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$ eşitliklerine sahibiz. Eğer $n = 2k > 4$ için $2^{2k} - 1$ sayısı iki asalın çarpımına eşit olsaydı, o zaman $2^k - 1$ ve $2^k + 1$ sayılarının da asal olması gerekirdi. Bunlar ardışık tek sayılar olduğundan, $2^k - 1 \leq 5$ olmalıdır, bu da $k \leq 2$ demektir. $k > 1$ olduğundan, $k = 2$ olmalıdır, bu da $k > 2$ varsayımıyla çelişir. Bu

92. Problem 47'yi kullanarak, p_n, n. asal sayıyı göstermek üzere,her $n \geq 3$ için $p_{n+1} + p_{n+2} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız.[92]

93. n pozitif tam sayısı için q_n ile, n'nin böleni olmayan en küçük asal sayıyı gösterelim. 92. problemi kullanarak $\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = 0$ olduğunu kanıtlayınız.[93]

94. Her $n > 4$ tam sayısı için n ile $2n$ arasında birbirinden farklı iki asal sayının çarpımına eşit olan en az bir tam sayının bulunduğunu ve her $n > 15$ tam sayısı için n ile $2n$ arasında, birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olan en az bir sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[94]

---

nedenle, n çift ve > 4 için $2^n - 1$ sayıları, en az üç doğal sayının çarpımına eşittir. Tek n için, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$, $2^9 - 1 = 7 \cdot 73$, $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$, $2^{13} - 1 = 8191$ (ki bu bir asaldır), $2^{15} - 1 = 7 \cdot 31 \cdot 151$, $2^{17} - 1$ ve $2^{19} - 1$ sayıları asaldır ve $2^{21} - 1 = 7 \cdot 127 \cdot 337$, $2^{23} - 1$ ise zaten $> 10^6$'dır. Böylece, $2^n - 1$ formunda olup $< 10^6$ olan ve iki asalın çarpımına eşit olan tüm pozitif tam sayılar $2^4 - 1 = 3 \cdot 5$, $2^9 - 1 = 7 \cdot 73$ ve $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$'dur.

NOT. Milyonu aşan ve iki farklı asalın çarpımı olduğu bilinen Mersenne sayıları, $n = 23, 37, 49, 67$ ve 101 için $M_n = 2^n - 1$ sayılarıdır. Bu tür sayıların sonsuz sayıda olup olmadığını bilmiyoruz.

[92] $k \geq 3$ olduğundan, $p_1 p_2 \dots p_k \geq p_1 p_2 p_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 > 6$ olur ve Problem 47 uyarınca, a ve b sayıları > 1 ve aralarında asal olmak üzere $p_1 p_2 \dots p_k = a + b$'dir, dolayısıyla $p_1 p_2 \dots p_k$ çarpımıyla da aralarında asaldır.
a ve $b > 1$ olduğundan, farklı asal bölenleri vardır; $p \mid a$ ve $q \mid b$ olsun, $p < q$ olduğunu varsayalım. $(p, p_1 p_2 \dots p_k) = 1$ olduğundan, $p \geq p_{k+1}$ olur ve $q > p$ nedeniyle $q \geq p_{k+2}$ olur. Bu nedenle $p + q \leq a + b$'dir ve kanıtlanması istendiği gibi $p_{k+1} + p_{k+2} \leq p_1 p_2 \dots p_k$ eşitsizliğine sahibiz.

[93] m, > 3 olan keyfi bir tam sayıyı göstersin ve n, $n > p_1 p_2 \dots p_m$ koşulunu sağlayan bir tam sayı olsun. O zaman $k \geq m \geq 4$ olacak şekilde bir k tam sayısı vardır, öyle ki

$$p_1 p_2 \dots p_k \leq n < p_1 p_2 \dots p_k p_{k+1}. \qquad (1)$$

Eğer $q_n \geq p_{k+1} + 1 > p_{k+1}$ olsaydı, o zaman q_n sayısının tanımı gereği $p_1, p_2, \dots, p_{k+1}$ sayılarının her biri n'in bir böleni olurdu, dolayısıyla (1) ile çelişecek şekilde $n \geq p_1 p_2 \dots p_{k+1}$ olurdu. Bu nedenle $q_n < p_{k+1} + 1 < p_k + p_{k+1}$ eşitsizliğine sahibiz ve $k \geq 4$ ile Problem 92 uyarınca $q_n \leq p_1 p_2 \dots p_{k-1}$ elde ederiz, bu da (1) kullanılarak şu ilişkiyi verir:

$$\frac{q_n}{n} < \frac{1}{p_k} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{m}$$

Keyfi bir $m > 3$ için $n > p_1 p_2 \dots p_m$ olduğunda $q_n/n < 1/m$ olduğunu kanıtladık, bu da n sonsuza giderken q_n/n oranının sıfıra yaklaştığını gösterir, ki bu da kanıtlanması istenen şeydi.

[94] n, > 4 olan bir tam sayı olsun. Ya $n = 2k$ (burada $k > 2$) ya da $n = 2k + 1$ (burada $k > 1$) olur. Eğer $n = 2k$ (burada $k > 2$) ise, Chebyshev teoremine göre $k < p < 2k$ olacak şekilde bir p asalı vardır ve $p > k > 2$ olduğundan $p > 2$ olur. Böylece $n = 2k < 2p < 4k = 2n$ olur ve $p > 2$ olduğundan $2p$ sayısı iki farklı asalın çarpımıdır ve $n < 2p < 2n$ eşitsizliği sağlanır. Eğer $n = 2k+1$ (burada $k \geq 2$) ise, Chebyshev teoremine göre $k < p < 2k$ olacak şekilde bir p asalı vardır, dolayısıyla $3 \leq k+1 \leq p < 2k$ ve $n = 2k+1 < 2k+2 \leq 2p < 4k < 4k+2 = 2n$ olur, ve yine $n < 2p < 2n$ eşitsizliğini elde ederiz, $2p$ ise iki farklı asalın çarpımıdır. Şimdi $n > 15$ bir tam sayı olsun. Eğer $n = 16, 17, \dots, 29$ ise, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ sayısı n ile $2n$ arasında yer alır. Bu nedenle $n \geq 30$ olduğunu varsayabiliriz. O halde $n = 6k + r$'dir, burada k, ≥ 5 olan bir tam sayıdır ve r, n'in 6'ya bölünmesinden elde edilen kalandır, yani r, $0 \leq r \leq 5$ eşitsizliğini sağlar. Chebyshev teoremine göre, $k < p < 2k$ olacak şekilde bir p asalı vardır, dolayısıyla $p > 5$ ve $k+1 \leq p < 2k$ olur. Buradan $n = 6k+r < 6(k+1) \leq 2 \cdot 3 \cdot p < 12k \leq 2n$ sonucu çıkar, dolayısıyla $n < 2 \cdot 3 \cdot p < 2n$ olur ve $2 \cdot 3 \cdot p$ üç farklı asalın çarpımıdır.

95. Her s pozitif tam sayısı için, yeterince büyük n'ler için n ile $2n$ arasında s tane birbirinden farklı asal sayının çarpımına eşit olan en az bir sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[95]

96. $1, 31, 331, 3331, \ldots$ sonsuz dizisinde sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız ve bunlardan en küçüğünü bulunuz.[96]

97. $n^4 + (n+1)^4$ sayısının bileşik olmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.[97]

98. $10^n + 3$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) şeklinde olan sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[98]

99. $n > 1$ tam sayıları için $\dfrac{2^{4n+2}+1}{5}$ sayısının bileşik olduğunu kanıtlayınız.[99]

---

[95] p_k, k-ıncı ardışık asalı göstersin ve s, > 1 olan keyfi bir tam sayı olsun. $n > p_1 p_2 \ldots p_s$ olsun. n ile $2n$ arasında s farklı asalın çarpımı olan en az bir pozitif tam sayı bulunduğunu göstereceğiz. $n = kp_1p_2\ldots p_{s-1} + r$ olsun; burada r, n'in $p_1p_2\ldots p_{s-1}$ ile bölünmesinden elde edilen kalandır, dolayısıyla $n > p_1p_2\ldots p_s$ olduğundan, $k > p_s$ ve $0 \le r < p_1p_2\ldots p_{s-1}$ olur. Chebyshev teoremine göre, $k < p < 2k$ olacak şekilde bir p asalı vardır, dolayısıyla $p > p_s$ ve $k+1 \le p < 2k$ olur. Buradan $n = p_1p_2\ldots p_{s-1}k + r < p_1p_2\ldots p_{s-1}(k+1) \le p_1p_2\ldots p_{s-1}p < 2p_1p_2\ldots p_{s-1}k \le 2n$ sonucu çıkar, dolayısıyla $n < p_1p_2\ldots p_{s-1}p < 2n$ olur. $p_1p_2\ldots p_{s-1}p$ sayısı, $p > p_s$ olduğundan, s farklı asalın çarpımına eşittir.
NOT. Chebyshev teoreminin elementer bir kanıtı Sierpiński [37, s. 137, teorem 8]'de verilmiştir.

[96] Dizimizin n-inci teriminin $\frac{1}{3}(10^n - 7)$'ye eşit olduğunu kolayca kontrol edebiliriz. $10^2 \equiv 15 \equiv -2 \pmod{17}$ olur, dolayısıyla $10^8 \equiv 16 \equiv -1$ olur. Böylece $10^9 \equiv -10 \equiv 7 \pmod{17}$ ve $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ olduğundan, $k = 0, 1, 2, \ldots$ için $10^{16k+9} \equiv 7 \pmod{17}$ elde ederiz. Dolayısıyla $17 \mid \frac{1}{3}(10^{16k+9} - 7)$ olur ve $k = 0, 1, 2, \ldots$ için $\frac{1}{3}(10^{16k+9} - 7)$ sayıları $\ge \frac{1}{3}(10^9 - 7) > 17$ olduğundan, hepsi bileşik sayıdır. A. Mąkowski tarafından asal sayı tablolarında kontrol edildiği üzere, $\frac{1}{3}(10^n - 7)$ sayıları $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ve 8 için asaldır. Bu formdaki en küçük bileşik sayı bu nedenle $\frac{1}{3}(10^9 - 7) = 33333331$'dir. Bulduklarımız dışında, ele alınan formda başka bileşik sayılar olup olmadığı sorusu ortaya çıkmaktadır. $10^2 \equiv 5 (mod\ 19)$ olur, dolayısıyla $10^4 \equiv 25 \equiv 6 \pmod{19}$ ve $10^{12} \equiv 6^3 \equiv 7 \pmod{19}$ olur ve $10^{18k} \equiv 1 \pmod{19}$ olduğundan, $k = 0, 1, 2, \ldots$ için $19 \mid \frac{1}{3}(10^{18k+12} - 7)$ elde ederiz. Örneğin, $\frac{1}{3}(10^{12} - 7)$ sayısı bileşiktir. Ancak, yukarıda verilenler dışında bu formda başka asal olup olmadığını ve eğer varsa, sonsuz sayıda olup olmadıklarını bilmiyoruz.

[97] Sayı $n = 5$'tir, çünkü $1^4 + 2^4 = 17$, $2^4 + 3^4 = 97$, $3^4 + 4^4 = 337$ ve $4^4 + 5^4 = 881$ asal iken, $5^4 + 6^4 = 1921 = 17 \cdot 113$'tür.

[98] $k = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $10^{6k+4} + 3$ biçimindeki tüm sayılar 7 ile bölünebildikleri için bileşiktir. Gerçekten de, $10^4 \equiv 4 \pmod 7$'dir ve Fermat teoremine göre $10^6 \equiv 1 \pmod 7$'dir. Böylece, k tamsayısı için $10^{6k+4} + 3 \equiv 10^{6k} \cdot 10^4 + 3 \equiv 1^k \cdot 4 + 3 \equiv 4 + 3 \equiv 0 \pmod 7$ olur.
NOT. $n = 1, 2, \ldots$ için $10^n + 3$ biçimindeki sayılar arasında sonsuz çoklukta asal sayı olup olmadığını bilmiyoruz. Bu tür sayılar $n = 1$ ve $n = 2$ için asaldır, ancak $n = 3$ ve $n = 4$ için bileşiktir (çünkü $1003 = 17 \cdot 59$ ve $7 \mid 10^4 + 3$).

[99] n tamsayısı için

$$2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1). \quad (1)$$

özdeşliğine sahibiz. $5 \mid 2^2 + 1$ olduğundan ve $n > 1$ tamsayısı için $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1 \ge 2^3 \cdot (2^2 - 1) + 1 = 25$ olduğundan, sağ taraftaki çarpanlardan en az birinin 5 ile bölünebildiği ve ($n > 1$ için) 5'e bölündüğünde birden büyük bir bölüm verdiği sonucu çıkar. Bu nedenle $\frac{1}{5}(2^{4n+2} + 1)$, $n = 1, 2, \ldots$ için, 1'den büyük iki tamsayının çarpımına eşittir, dolayısıyla bileşiktir.

100. Her m pozitif tam sayısı için $2^n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sonsuz dizisinin, bileşik sayılardan oluşan m ardışık teriminin bulunduğunu kanıtlayınız.[100]

101. Bir basamağı değiştirilerek bir asal sayı elde edilemeyen bir pozitif tam sayı bulunduğunu gösteriniz.[101]

102. Aşağıdaki teoremlerin birbirine denk olduğunu kanıtlayınız:[102]

(a) **T.** Her $n > 1$ tam sayısı için n ile $2n$ arasında en az bir asal sayı bulunur.

(b) **T1.** Her $n > 1$ tam sayısı için $n!$ sayısının asal çarpanlarına ayrılışında üstü bir olan en az bir asal sayı bulunur.

103. Her n pozitif tam sayısı için $n!$ sayısının asal çarpanlarına ayrımında kuvveti 1 olan en az iki asal sayı bulunur.[103]

---

[100] $m > 1$ keyfi bir tamsayı olsun ve $k = 2, 3, \ldots, m$ olmak üzere $n = m! + k$ olsun. $k < m! + k$ ve $k \mid m! + k$'dir, buradan $2^k - 1 < 2^{m!+k} - 1$ ve $2^k - 1 \mid 2^{m!+k} - 1$ elde edilir. Böylece $2^{m!+k} - 1$ sayıları $k = 2, 3, \ldots, m$ için, dolayısıyla $2^n - 1$ dizisinin ardışık $m - 1$ terimi için bileşiktir.

[101] 200 sayısından bir asal sayı elde etmek için, son basamağını tek bir sayı ile değiştirmek gerekir. Ancak, $3 \mid 201$, $7 \mid 203$, $5 \mid 205$, $3 \mid 207$ ve $11 \mid 209$'dur. Böylece, sadece bir basamağı değiştirerek 200 sayısından bir asal sayı elde edilemez.
NOT. İki basamağı değiştirerek her sayıdan bir asal sayı elde edilip edilemeyeceğini bilmiyoruz. Öte yandan, (ondalık) basamaklarından hiçbirinin değiştirilmesinin bir asal sayı ile sonuçlanmayacağı sonsuz çoklukta pozitif n tamsayısının var olduğunu kanıtlamak kolaydır. Örneğin, $n = 2310k - 210$ $(k = 1, 2, \ldots)$ için, son basamağını (yani 0'ı), (açıkça 1, 3, 7 veya 9 sayılarından birine) değiştirmemiz gerekirdi; ancak $11 \mid n + 1$, $3 \mid n + 3$, $7 \mid n + 7$ ve $3 \mid n + 9$ olduğunu görmek kolaydır.

[102] T teoreminin doğru olduğunu varsayalım. T1 teoremi $n = 2$ ve $n = 3$ için açıkça doğrudur. $n > 3$ bir tamsayı olduğunu varsayalım. Eğer n çift ise, yani $n = 2k$, o zaman $n > 3$ olduğundan, $k > 1$'dir ve T teoremine göre $k < p < 2k$ olacak şekilde bir p asalı vardır, buradan $p < 2k = n < 2p$ olur ve p, $n! = 1 \ldots n$ çarpımındaki sadece bir çarpanı böler. Eğer $n = 2k + 1$ ise ($n > 1$ olduğundan) $k > 1$ bir tamsayıdır, o zaman T teoremine göre $k < p < 2k < n$ olacak şekilde bir p asalı vardır, buradan $k + 1 \leq p$ olur ki bu da $2k + 1 < 2p$ ve $p < n < 2p$ anlamına gelir. Önceki gibi, p, $n!$'in asal açılımına 1 üssü ile girer. Dolayısıyla, T'nin T1'i gerektirdiğini gösterdik.
Şimdi T1'in geçerli olduğunu varsayalım ve $n > 1$ bir tamsayıyı göstersin. T1 teoremine göre, $(2n)!$'in asal açılımına 1 üssü ile giren bir p asalı vardır. Dolayısıyla, $p \leq 2n < 2p$'ye sahibiz (çünkü eğer $2p \leq 2n$ olsaydı, o zaman $(2n)! = 1 \cdot 2 \ldots (2n - 1)2n$ çarpımında p ve $2p$ çarpanlarına sahip olurduk ve p, T1 teoreminin aksine ≥ 2 üssü ile girerdi). Dolayısıyla, $n < p < 2n$'ye sahibiz ($n > 1$ olduğundan, $p = 2n$ denklemi asal p için imkansızdır). Böylece, T teoremi T1 teoreminden çıkar, bu da T ve T1'in denk olduğunu gösterir.

[103] $11!$'in asal açılımında, 7 ve 11 asalları açıkça 1 üsleriyle yer alır. Bu nedenle, $n > 11$ olduğunu varsayabiliriz; bu da $n = 2k$ durumunda olduğu gibi $n = 2k + 1$ durumunda da $k > 5$ olmasını gerektirir. Kullanacağımız teoreme göre, $k < p < q < 2k$ olacak şekilde iki p ve $q > p$ asalı vardır. Dolayısıyla en azından $p < q < n$ ve $p \geq k + 1$ elde ederiz, bu da $2q > 2p \geq 2k + 2 > n$ anlamına gelir. Böylece, hem p hem de q asalları $n!$'in açılımına 1 üssü ile girer.
$10!$ sayısına gelince, sadece 7 asalı açılımına 1 üssü ile girer.

104. Her n pozitif tam sayısı için, $p-1$ ve $p+1$ sayılarının her birinin en az n tane pozitif tam böleni olacak şekilde bir p asal sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[104]

105. $p-1$ ve $p+1$ sayılarından her birinin en az 3 farklı asal böleni bulunacak şekilde en küçük p asal sayısını bulunuz.[105]

106. Her n pozitif tam sayısı için, $p-1$, $p+1$ ve $p+1$ sayılarının her birinin en az n tane farklı asal böleni olacak şekilde sonsuz sayıda p asal sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[106]

107. Her n ve s pozitif tam sayıları için, her biri terimlerinin en az n farklı asal böleni olacak ve bu asal sayılardan her birinin kuvveti en az s olacak şekilde istenilen uzunlukta ardışık sayılar dizisinin bulunduğunu kanıtlayınız.[107]

108. $n>1$ tek sayısı için n ve $n+2$ sayılarının sayılarının asal olması için, $(n-1)!$ sayısının n ve $n+2$ sayılarıyla bölünmemesinin gerek ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.[108]

---

[104] n verilmiş bir pozitif tamsayı olsun. Lejeune-Dirichlet'nin aritmetik diziler üzerine teoremine göre, k pozitif bir tamsayı olmak üzere $p = 6^k k! + 2 \cdot 3^{2^{k-1}} - 1$ biçiminde bir asal sayı vardır. (Pozitif n tamsayısı için $2^{k-1} \geq n$ olduğu göz önüne alındığında) buradan $3^n \mid p+1$ olduğu ve $p+1$ sayısının n'den fazla farklı pozitif tamsayı bölenine (örneğin, $1, 3, 3^2, \ldots, 3^n$) sahip olduğu sonucu çıkar. Öte yandan, Euler teoremine göre $3^{\phi(2^n)} \equiv 1 \pmod{2^n}$'dir, buradan $2^n \mid 3^{2^{n-1}} - 1$ gelir, bu da $2^n \mid p-1$ olduğunu ve $p-1$ sayısının n'den fazla farklı pozitif tamsayı bölenine (örneğin, $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$) sahip olduğunu gösterir.

[105] $p = 131$. Burada $p-1 = 2 \cdot 5 \cdot 13$ ve $p+1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$'e sahibiz.

[106] n verilmiş bir pozitif tamsayı olsun ve p_i, i. asalı göstersin. Çin kalan teoremine göre, $b \equiv 1 \pmod{p_1 p_2 \ldots p_n}$, $b \equiv -1 \pmod{p_{n+1} p_{n+2} \cdots p_{2n}}$ ve $b \equiv -2 \pmod{p_{2n+1} p_{2n+2} \cdots p_{3n}}$ olacak şekilde pozitif bir b tamsayısı vardır. $(b, p_1 p_2 \ldots p_{3n}) = 1$'dir ve Dirichlet teoremine göre, $p = p_1 p_2 \ldots p_{3n} k + b$ sayısının bir asal olmasını sağlayan pozitif bir k tamsayısı vardır. Bu durumda

$$p_1 p_2 \ldots p_n \mid p-1, \quad p_{n+1} p_{n+2} \cdots p_{2n} \mid p+1, \quad \text{ve} \quad p_{2n+1} p_{2n+2} \cdots p_{3n} \mid p+2$$

olur, dolayısıyla $p-1$, $p+1$ ve $p+2$ sayılarının her biri en az n farklı asal bölene sahiptir.

[107] p_k, k. asalı göstersin. Pozitif n, s ve m tamsayıları için, $j = 1, 2, \ldots, m$ olmak üzere

$$a_j = p_{j(s-1)n+1} p_{j(s-1)n+2} \cdots p_{jsn}$$

yazalım. $1 \leq i < j \leq m$ için $(a_i, a_j) = 1$'dir ve Çin kalan teoremine göre, $j = 1, 2, \ldots, m$ için

$$x \equiv -j \pmod{a_j}$$

olacak şekilde pozitif bir x tamsayısı vardır. Böylece $j = 1, 2, \ldots, m$ için $a_j \mid x+j$'ye sahibiz, bu da $x+j$ sayılarının $(j = 1, 2, \ldots, m)$ her birinin en az n farklı asal böleni olduğunu ve bu bölenlerin her birinin en az s. kuvvette göründüğünü gösterir. Bu nedenle $x+1, x+2, \ldots, x+m$ dizisi gerekli koşulları sağlar.

[108] Eğer pozitif bir m tamsayısı için $m!$ sayısı bir p asalı ile bölünüyorsa, o zaman p, $m! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot m$ çarpımındaki çarpanlardan en az birini bölmelidir, dolayısıyla $p \leq m$ olmalıdır. Böylece, eğer $m!$ sayısı $n > m$ olan bir n tamsayısı ile bölünüyorsa, n bileşik olmalıdır. Buradan şu sonuç çıkar ki, eğer bir $n > 1$ tamsayısı için $(n-1)!$ sayısı n veya $n+2$ ile bölünebilseydi, o zaman n veya $n+2$ bileşik olurdu. Böylece, koşul gereklidir.

Şimdi tek bir $n > 1$ için $(n-1)!$ sayısının n veya $n+2$ ile bölünmediğini varsayalım. n ve

109. Her m pozitif tam sayısı için basamakları toplamı 10'dan büyük olan bir asal sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[109]

110. Her n pozitif tam sayısı için en az m basamağı 0 olan asal sayılar bulunduğunu kanıtlayınız.[110]

111. p^4 sayısının tüm pozitif tam bölenlerinin toplamı tam kare olacak şekilde olan tüm asal sayıları bulunuz.[111]

112. $2 \leq s \leq 10$ olmak üzere her s için pozitif tam bölenlerinin toplamı bir tam sayının s. dereceden kuvvetine eşit olan asal sayıları bulunuz.[112]

$n+2$ sayılarının asal olduğunu göstereceğiz. $n = 3$ ve $n = 5$ için n ve $n+2$ sayıları asal olduğundan $n \geq 7$ olduğunu varsaymak yeterlidir. Eğer n bileşik olsaydı, $n = ab$ olurdu; burada a ve b, n'den küçük pozitif tamsayılardır, dolayısıyla $a \leq n-1$ ve $b \leq n-1$'dir. Böylece a ve b, $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)$ çarpımında çarpan olarak görünürdü. $a \neq b$ durumunda, varsayımın aksine $n = ab \mid (n-1)!$ olurdu. $a = b$ durumunda, $n = a^2$ olurdu ve n tek ve > 1 olduğundan, $a \geq 3$ olurdu, bu da $n = a^2 \geq 3a > 2a$ anlamına gelir, dolayısıyla $2a \leq n-1$'dir. Böylece a ve $2a$, $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)$ çarpımında farklı çarpanlardır, dolayısıyla varsayımın aksine $n = a^2 \mid (n-1)!$ olur. Böylece, n bir asaldır.

Eğer $n+2$ sayısı bileşik olsaydı, $n+2 = ab$ olurdu; burada a ve b, 1'den büyük tamsayılardır. n tek olduğundan, a ve b sayıları tektir ve bu nedenle ≥ 3'tür. Ardından, $n \geq 7$ olduğundan, $a \leq \frac{1}{3}(n+2) \leq \frac{1}{2}(n-1)$'e sahibiz ve $2a \leq n-1$'e sahibiz. Benzer şekilde $2b \leq n-1$ olduğunu gösteririz. Eğer a ve b farklıysa, o zaman $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) = (n-1)!$ çarpımında farklı çarpanlar olarak görünürler, bu da varsayımın aksine $n+2 = ab \mid (n-1)!$ anlamına gelir. Eğer $a = b$ ise, o zaman a ve $2b$ $(n-1)!$ çarpımında farklı çarpanlardır, dolayısıyla $n+2 \mid 2ab \mid (n-1)!$, yine varsayımın aksinedir.

Bu nedenle teoremin koşulu yeterlidir.

[109] m pozitif bir tam sayı olsun. $(10^m, 10^m - 1) = 1$ olduğunu biliyoruz ve aritmetik dizi teoremine göre, $p = 10^m k + 10^m - 1$ asal olacak şekilde bir k pozitif tam sayısı vardır. Açıkça, bu sayının son $m-1$ basamağı 9'a eşittir, bu da bu sayının tüm rakamlarının toplamının m olduğunu gösterir.

NOT. A. Mąkowski, teoremin $g > 1$ olan keyfi bir gösterim tabanı için de geçerli kaldığını fark etmiştir; ispat için, yukarıdaki ispatta 10 sayısını g ile değiştirmek yeterlidir. Bkz. Sierpiński [31] ve Erdős [8]. Asal sayı artarken, bir asalın rakamları toplamının sonsuza gidip gitmediğini bilmiyoruz.

[110] m pozitif bir tam sayı olsun. $(10^{m+1}, 1) = 1$ olduğundan, aritmetik dizi teoremine göre, $p = 10^{m+1}k + 1$ asal olacak şekilde bir k pozitif tam sayısı vardır. p sayısının son m basamağı, açıkça, m adet sıfır ve birdir. Böylece, ondalık sistemdeki p asalı en az m adet sıfıra sahiptir, ki bu da kanıtlanması gereken şeydi.

NOT. Her m pozitif tam sayısı için, ondalık sistemde tam olarak m adet sıfıra sahip bir asal sayının var olup olmadığını bilmiyoruz. $m = 1$ için, bu tür en küçük asal 101'dir; $m = 2$ için ise 1009'dur.

[111] Eğer p bir asal sayı ise, p^4'ün tüm pozitif tamsayı bölenlerinin toplamı $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$'e eşittir. Eğer n pozitif bir tamsayı olmak üzere $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2$ ise, o zaman açıkça $(2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2$'ye sahibiz ve buradan $(2n)^2 = (2p^2 + p + 1)^2$ olması gerektiği sonucu çıkar. Böylece, $4n^2 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$'dir ve $4n^2 = 4(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1)$ olduğundan, $p^2 - 2p - 3 = 0$ elde ederiz, bu da $p \mid 3$ anlamına gelir, dolayısıyla $p = 3$'tür. Gerçekten de, $p = 3$ için $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2$ elde ederiz. Dolayısıyla, problemin koşullarını sağlayan sadece bir p asalı vardır, o da $p = 3$'tür.

[112] Bir p asal sayısının sadece iki pozitif tamsayı böleni vardır, yani 1 ve p. Böylece, bir p asalının tüm pozitif tamsayı bölenlerinin toplamı, bir n pozitif tamsayısının s. kuvvetine eşitse, o zaman $1 + p = n^s$'dir, bu da

$$p = n^s - 1 = (n-1)(n^{s-1} + n^{s-2} + \dots + 1)$$

113. $(p-1)!+1=p^m$ denkleminin, $p>5$ bir asal sayı ve m bir pozitif tam sayı olacak şekilde hiçbir çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[113]

114. Bir $n<q$ pozitif tam sayısı için q_n, $(n-1)!$ sayısını bölecek şekilde sonsuz sayıda q asal sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[114]

115. Her $k \neq 1$ için, 2^n+k sayısı bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda n pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[115]

---

anlamına gelir. $n>1$'e sahibiz ve $s \geq 2$ için sağdaki çarpımın ilk çarpanı ikincisinden daha küçüktür. Bu nedenle, bir p asalının, ilki ikincisinden daha küçük olan iki pozitif tamsayı çarpanının çarpımı şeklinde bir gösterimini elde ederiz. Buradan ilk çarpanın 1'e eşit olması gerektiği sonucu çıkar, dolayısıyla $n-1=1$, veya $n=2$, ve $p=2^s-1$'dir. Böylece, her $s \geq 2$ tamsayısı için problemin koşullarını sağlayan en fazla bir asal sayı vardır ve böyle bir asal sayı ancak ve ancak 2^s-1 sayısı asalsa vardır. $s=2$ için 3 sayısını; $s=3$ için 7 sayısını; $s=5$ için 31 sayısını; ve $s=7$ için 127 sayısını elde ederiz. $s=4,6,8$ ve 10 için, $2^4-1=3\cdot 5$, $2^6-1=3^2\cdot 7$, $2^8-1=3\cdot 5\cdot 17$ ve $2^{10}-1=3\cdot 11\cdot 31$ sayıları bileşik olduğundan, bu tür asal sayılar yoktur.

[113] $p>5$ asalları için,

$$2<\frac{p-1}{2}<p-1$$

'e sahibiz, bu da

$$(p-1)!^2=2\frac{p-1}{2}(p-1)!$$

anlamına gelir. Eğer $p>5$ asalı ve bir m pozitif tamsayısı için

$$(p-1)!+1=p^m \quad (1)$$

olsaydı, o zaman

$$(p-1)! \equiv p^m-1$$

olurdu ve her iki tarafı $p-1$ ile bölersek

$$p-1 \mid p^{m-1}+p^{m-2}+\cdots+p+1 \quad (2)$$

elde ederdik.
Ancak, $p-1 \mid p^k-1$, dolayısıyla $k=0,1,2,\ldots$ için $p^k \equiv 1 \pmod{p-1}$'dir, bu da $p^{m-1}+p^{m-2}+\cdots+p+1 \equiv m \pmod{p-1}$ anlamına gelir ve (2) göz önüne alındığında, $p-1 \mid m$ buluruz, dolayısıyla $m \geq p-1$'dir. Bu nedenle,

$$p^m \geq p^{p-1} > (p-1)^{p-1} > (p-1)!$$

elde ederiz, dolayısıyla $p^m > (p-1)!+1$ olur, bu da (1) ile çelişir.

[114] Liouville teoremine göre (bkz. Problem 113), $p>5$ bir asal sayı ise, m pozitif tamsayısı için $(p-1)!+1=p^m$ olamaz. $(p-1)!+1>1$ tek sayısının bu nedenle $q \neq p$ olan bir q tek asal böleni vardır ve $q \mid (p-1)!+1$'den $q>p-1$ olduğu sonucu çıkar, dolayısıyla ($q \neq p$ olduğundan) $q>p$'dir. p keyfi olarak büyük olabildiğinden, $p<q$ olacak şekilde $q \mid (p-1)!+1$ koşulunu sağlayan sonsuz çoklukta q asalı vardır; bu da kanıtlanması istenen şeydi.

[115] A. Schinzel'in ispatını vereceğiz. a keyfi bir pozitif tamsayıyı göstersin ve $k \neq 1$ bir tamsayı olsun. Ayrıca, $k-1=2^s h$ diyelim; burada 2^s, $k-1$'i bölen 2'nin en yüksek kuvvetidir ve h pozitif veya negatif bir tek sayıdır. $2^m > a-k$ olacak şekilde bir m pozitif tamsayısı seçelim ve $l \geq s$ ve $l \geq m$ olacak şekilde bir l tamsayısı belirtelim. Eğer $2^{2^l}+k > 2^{2^m}+k > a$ sayısı bileşik olsaydı, istenen biçimde ve $>a$ olan bileşik bir sayıya sahip olurduk. O halde $p=2^{2^l}+k$ sayısının asal olduğunu varsayalım. $l \geq s$ ve $k-1=2^s h$ olduğundan, $p-1=2^{2^l}+k-1=2^{2^l}+2^s h=2^s h_1$ elde ederiz; burada h_1 tektir ve >0'dır. Euler teoremine göre $2^{\phi(h_1)} \equiv 1 \pmod{h_1}$'dir, dolayısıyla ($p-1=2^s h_1$ olduğundan) $2^{s+\phi(h_1)} \equiv 2^s$

116. Tüm $2^n + k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) sayıları bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda $k > 0$ tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[116]

117. Her $n = 1, 2, \dots$ sayısı için $2^{2n+1} + 3, 2^{2n+1} + 7, 2^{2n+2} + 13, 2^{2n+1} + 19$ ve $2^{2n+2} + 21$ sayılarının her birinin bileşik olduğunu kanıtlayınız.[117]

(mod $p-1$)'dir. $l \geq s$ olduğundan, $2^l + \phi(h_1) \equiv 2^l \pmod{p-1}$ elde ederiz. Fermat teoreminden

$$2^{2^{l+\phi(h_1)}} + k \equiv 2^{2^l} + k \equiv 0 \pmod{p},$$

elde ederiz ve $2^l + \phi(h_1) > 2^l$ olduğundan

$$2^{2^{l+\phi(h_1)}} + k > 2^{2^l} + k = p.$$

elde ederiz. Böylece, $2^{2^{l+\phi(h_1)}} + k$ sayısı bileşiktir ve $p = 2^{2^l} + k \geq 2^{2^m} + k > a$ olduğundan $> a$'dır, bu da ispatı tamamlar. Bu ispat, $k = 1$ için başarısız olur çünkü sonsuz çoklukta bileşik Fermat sayısı olup olmadığını bilmiyoruz.

Şunu belirtelim ki, teoremin daha zayıf bir versiyonu, yani her k tamsayısı için $2^{2^n} + k$'nin bileşik olmasını sağlayan en az bir n tamsayısının var olduğunu ileri süren versiyon, 1943'te J. Reiner tarafından oldukça karmaşık bir teoremin özel bir durumu olarak elde edilmiştir; bkz [16]. Teoremimizden bu daha zayıf versiyonu elde etmek için ($k = 1$ için) $2^{2^5} + 1$ sayısının bileşik olduğunu, yani 641 ile bölünebildiğini belirtmek yeterlidir.

[116] Örneğin, $s = 1, 2, \dots$ olmak üzere $k = 6s - 1$ biçimindeki tüm sayılar bu formdadır, çünkü her n pozitif tamsayısı için 2^{2^n} sayısı 3'e bölündüğünde 1 kalanını verir, dolayısıyla $2^{2^n} + k = 2^{2^n} - 1 + 6s$ sayısı 3 ile bölünebilir ve > 3'tür, yani bileşiktir.

[117]

(a) n pozitif tamsayısı için $2^{n+1} - 1$ sayısı 3 ile bölünebilir, dolayısıyla $2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1)$ sayısı 6 ile bölünebilir ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere $2^{n+1} = 6k + 2$'ye sahibiz. Buradan

$$2^{2^{n+1}} + 3 = (2^6)^k \cdot 2^2 + 3 \equiv 2^2 + 3 \equiv 0 \pmod{7}$$

olduğu

$$2^{2^{n+1}} + 3 = (2^6)^k \cdot 2^3 + 3 \equiv 2^3 + 3 \equiv 0 \pmod{7},$$

ve $n = 1, 2, \dots$ için $7 \mid 2^{2n+1} + 3$'tür. $2^{2^{n+1}} + 3 > 2^{2^2} + 3 > 7$ olduğundan, $2^{2^{n+1}} + 3$ biçimindeki sayılar $n = 1, 2, \dots$ için bileşiktir.

(b) n pozitif tamsayısı için $2^{4n} - 1 \equiv 16^n - 1 \equiv 0 \pmod{5}$'e sahibiz, bu da $10 \mid 2^{4n+1} - 2$ anlamına gelir. Bu nedenle k pozitif bir tamsayı olmak üzere $2^{4n+1} = 10k + 2$'dir ve $2^{2^{4n+1}} + 7 = (2^{10})^k \cdot 2^2 + 7 \equiv 2^2 + 7 \equiv 0 \pmod{11}$'dir. Böylece $11 \mid 2^{2^{4n+1}} + 7$'ye sahibiz ve $2^{2^{4n+1}} + 7 > 2^{2^5} + 7 > 11$ olduğundan, $2^{2^{4n+1}} + 7$ biçimindeki sayıların tümü $n = 1, 2, \dots$ için bileşiktir.

(c) n pozitif tamsayısı için $2^{8n} \equiv (2^4)^{2n} \equiv 1 \pmod{15}$'e sahibiz, bu da $7 \mid 2^{8n} - 1$ ve $28 \mid 2^{8n+2} - 4$ anlamına gelir. Böylece, k pozitif bir tamsayı olmak üzere $2^{8n+2} = 28k + 4$'tür. Buradan $2^{2^{8n+2}} + 13 = (2^{28})^k \cdot 2^4 + 13 \equiv 16 + 13 = 29 \equiv 0 \pmod{29}$ olduğu, yani $29 \mid 2^{2^{8n+2}} + 13$ olduğu sonucu çıkar ve $2^{2^{8n+2}} + 13 > 2^{2^{10}} + 13 > 29$ olduğundan, $2^{2^{8n+2}} + 13$ biçimindeki sayılar $n = 1, 2, \dots$ için bileşiktir.

(d) n pozitif tamsayısı için $2^{10n} \equiv (2^5)^{2n} \equiv 1 \pmod{11}$'e sahibiz, bu da $22 \mid 2^{10n+1} - 2$ ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere $2^{10n+1} = 22k + 2$ anlamına gelir. Buradan $2^{2^{10n+1}} + 19 = (2^{22})^k \cdot 2^2 + 19 \equiv 4 + 19 \equiv 0 \pmod{23}$ olduğu ve $23 \mid 2^{2^{10n+1}} + 19$ olduğu sonucu çıkar. $n = 1, 2, \dots$ için $2^{2^{10n+1}} + 19 > 23$ olduğundan, $2^{2^{10n+1}} + 19$ sayılarının tümü bileşiktir.

(e) n pozitif tamsayısı için $2^{6n} \equiv (2^3)^{2n} \equiv (-1)^{2n} \equiv 1 \pmod{9}$'a sahibiz, dolayısıyla $9 \mid$

118. Tüm $k \cdot 2^n + 1$ $(n = 1, 2, \dots)$ sayıları bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda k pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[118]

119. Her $2^n + k$ $(n = 1, 2, \dots)$ sayısı bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda k tek sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[119]

120. k sayısı 2'nin bir kuvveti ise, yeterince büyük n sayıları için tüm $k \cdot 2^n + 1$

$2^{6n} - 1$'dir ve $36 \mid 2^{6n+2} - 4$'tür, bu da k pozitif bir tamsayı olmak üzere $2^{6n+2} = 36k + 4$ anlamına gelir. Buradan $2^{2^{6n+2}} + 21 = (2^{36})^k \cdot 2^4 + 21 \equiv 16 + 21 \equiv 0 \pmod{37}$ olduğu, dolayısıyla $37 \mid 2^{2^{6n+2}} + 21$ olduğu sonucu çıkar ve $n = 1, 2, \dots$ için $2^{2^{6n+2}} + 21 > 37$ olduğundan, $2^{2^{6n+2}} + 21$ sayıları $n = 1, 2, \dots$ için bileşiktir.

NOT. $2^{2^n} + k$ $(n = 1, 2, \dots)$ sayıları arasında sonsuz çoklukta asal sayı bulunduğunu kanıtlayabileceğimiz bir k tamsayısı bilmiyoruz.

[118] Bildiğimiz gibi, $F_n = 2^{2^n} + 1$ sayıları $n = 0, 1, 2, 3, 4$ için asalken, $F_5 = 641p$ sayısı, $p > 2^{16} + 1 = F_4$ olan bir asaldır. Ayrıca $(p, 2^{32} - 1) = 1$'e sahibiz, çünkü $p \mid F_5$ olması $(p, F_5 - 2) = 1$'i gerektirir. Çin kalan teoremine göre,

$$k \equiv 1 \pmod{(2^{32} - 1)641} \quad \text{ve} \quad k \equiv -1 \pmod{p}. \quad (1)$$

denkliklerini sağlayan sonsuz çoklukta pozitif k tamsayısı vardır.
Eğer k, (1) denkliklerini sağlayan p'den büyük bir tamsayı ise, $k \cdot 2^n + 1$ $(n = 1, 2, \dots)$ sayılarının tümünün bileşik olduğunu göstereceğiz.
n sayısı, m ve t tamsayıları ≥ 0 olmak üzere, $n = 2^m(2t + 1)$ biçiminde temsil edilebilir. Önce m'nin $0, 1, 2, 3$ veya 4 sayılarından biri olduğunu varsayalım. (1) göz önüne alındığında,

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^{2^m(2t+1)} + 1 \pmod{2^{32} - 1}, \quad (2)$$

olur ve $m = 0, 1, 2, 3, 4$ için $F_m \mid 2^{32} - 1$ ve $F_m \mid 2^{2^m(2t+1)} + 1$ olduğundan, (2)'ye göre $F_m \mid k \cdot 2^n + 1$ olduğunu elde ederiz. $k \cdot 2^n + 1 > p > F_4$ olduğundan ($k > p$ olduğu için), $k \cdot 2^n + 1$ sayısı bileşiktir.
Eğer $m = 5$ ise, (1)'den $k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^{2^5(2t+1)} + 1 \pmod{641}$ elde ederiz ve $641 \mid F_5 \mid 2^{2^5(2t+1)} + 1$ olduğundan, $641 \mid k \cdot 2^n + 1$ elde ederiz ve $k \cdot 2^n + 1 > p > 641$ sayısı bileşiktir.
$m \geq 6$ durumunu ele almak kalıyor. Bu durumda $2^6 \mid n$'dir, dolayısıyla h pozitif bir tamsayı olmak üzere $n = 2^6 h$'dir ve (1) göz önüne alındığında $k \cdot 2^n + 1 \equiv -2^{2^6 h} + 1 \pmod{p}$; $p \mid 2^{32} + 1 \mid 2^{2^6} - 1 \mid 2^{2^6 h} - 1$ olduğundan, $p \mid k \cdot 2^n + 1$ elde ederiz. $k \cdot 2^n + 1 > k > p$ gerçeği göz önüne alındığında, $k \cdot 2^n + 1$ sayısı bileşiktir.
Böylece, $k \cdot 2^n + 1$ sayıları $n = 1, 2, 3, \dots$ için bileşiktir, ki bu da kanıtlanması istenen şeydi. (Bkz. [30].)

NOT. Tüm $k \cdot 2^n + 1$ $(n = 1, 2, \dots)$ sayılarının bileşik olduğu en küçük k sayısını bilmiyoruz.

[119] Öncelikle Problem 118'deki teoremin ispatında (1) denkliklerine $k \equiv 1 \pmod{2}$ denkliğini ekleyebileceğimizi ve bunun aşağıdaki T teoremine yol açacağını belirtelim: $k > p$ olan sonsuz çoklukta k tek sayısı vardır, öyle ki $k \cdot 2^l + 1$ $(l = 1, 2, \dots)$ sayılarının her biri altı asal sayıdan en az biri ile bölünebilir

$$F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, \text{ ve } p \quad (3)$$

($p > F_4$ olmak üzere). (3)'teki altı sayının çarpımını Q ile gösterelim. Bu sayılar tek olduğundan, $2^{\phi(Q)} \equiv 1 \pmod{Q}$ ve sonuç olarak, q, (3)'teki sayılardan herhangi birini göstermek üzere $2^{\phi(Q)} \equiv 1 \pmod{q}$ olur. n keyfi bir pozitif tamsayı olsun. T teoremine göre ($l = n(\phi(Q) - 1)$ için), $k \cdot 2^{n(\phi(Q)-1)} + 1$ sayısı (3)'teki sayılardan en az biriyle, diyelim ki q ile, bölünebilir. Dolayısıyla $k \cdot 2^{n(\phi(Q)-1)} + 1 \equiv 0 \pmod{q}$ olur; buradan 2^n ile çarparak $k \cdot 2^{n\phi(Q)} + 2^n \equiv 0 \pmod{q}$ elde ederiz ve $2^{\phi(Q)} \equiv 1 \pmod{q}$ ve sonuç olarak $2^{n\phi(Q)} \equiv 1 \pmod{q}$ olduğundan, $k + 2^n \equiv 0 \pmod{q}$ elde ederiz; $k > p$ olduğundan, $k > q$ ve $k + 2^n > q$ olur; böylece $k + 2^n$ sayısı bileşiktir ve $2^n + k$, $n = 1, 2, \dots$ sayılarının tümünün bileşik olduğu sonsuz çoklukta k tek sayısının var olduğunu gösterdik.

sayılarının bileşik olduğunu kanıtlayınız.[120]

121. Her $k \leq 10$ pozitif tam sayısı için $2^n + k$ sayısının bileşik olmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.[121]

122. Her $k \cdot 2^n + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sayısının bileşik olmasını sağlayan tüm $k \leq 10$ pozitif tam sayılarını bulunuz.[122]

123. Her $n > 1$ tam sayısı için $\dfrac{2^{2n+1} + 2^n + 1}{3}$ sayısının bileşik olduğunu kanıtlayınız.[123]

124. $(2^n + 1)^2 + 2^n$ şeklinde olan sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[124]

---

[120] m pozitif bir tamsayı olmak üzere $k = 2^m$ olsun ve $s \geq 0$ bir tamsayı ve h tek olmak üzere $m = 2^s h$ olsun. $k \cdot 2^{s+1} + 1 = 2^{s+1}(2^{h \cdot 2^s} + 1)$'e sahibiz, ve $n > s$ için $2^n + k$ sayısı tek bir pozitif tamsayıdır. Böylece $2^{s+1} + 1 \mid k \cdot 2^n + 1$ elde ederiz ve $n > s$ olduğundan, $k \cdot 2^n + 1 > 2^{s+1} + 1$'e sahibiz ve $k \cdot 2^n + 1$ sayıları $n > s$ için bileşiktir (çünkü $2^{s+1} + 1$ ile bölünebilirler). Özellikle, eğer k, 2'nin tek bir üsse sahip bir kuvveti ise, o zaman $n = 1, 2, \ldots$ için tüm $k \cdot 2^n + 1$ sayıları 3 ile bölünebilir.

[121] $k = 1$ için, $n = 5$'tir, çünkü $n = 1, 2, 3, 4$ için $2^{2^n} + 1$ sayıları asal iken, $641 \mid 2^{2^5} + 1$ ve $2^{2^5} + 1$ bileşiktir. $k = 2$ için, $n = 1$'dir, çünkü $3 \mid 2 \cdot 2^1 + 1$. $k = 3$ için, $n = 2$'dir, çünkü $3 \cdot 2^2 + 1$ sayısı asal iken, $7 \mid 3 \cdot 2^3 + 1 = 49$. $k = 4$ için, $n = 2$'dir, çünkü $4 \cdot 2^2 + 1 = 17$ bir asal iken, $5 \mid 4 \cdot 2^3 + 1$. $k = 5$ için, $n = 1$'dir, çünkü $3 \mid 5 \cdot 2^1 + 1$. $k = 6$ için, $n = 1$'dir, çünkü $5 \mid 6 \cdot 2^1 + 1$. $k = 7$ için, $n = 3$'tür, çünkü $7 \cdot 2^1 + 1 = 29$ ve $7 \cdot 2^2 + 1 = 113$ asal iken, $11 \mid 7 \cdot 2^3 + 1$. $k = 8$ için, $n = 1$'dir, çünkü $3 \mid 8 \cdot 2^1 + 1$. $k = 9$ için, $n = 2$'dir, çünkü $9 \cdot 2^1 + 1 = 37$ asal iken, $5 \mid 9 \cdot 2^2 + 1$. $k = 10$ için, $n = 2$'dir, çünkü $10 \cdot 2^1 + 1 = 41$ asal iken, $7 \mid 10 \cdot 2^2 + 1$.

[122] Problem 121'in çözümünden, $k = 1, 3, 4, 7, 9$ ve 10 sayılarının gereksinimleri sağlamadığı sonucu çıkar. 6 sayısı da $6 \cdot 2^1 + 1 = 97$ bir asal olduğundan gereksinimi sağlamaz.
Öte yandan, $2 \cdot 2^{2^n} + 1$, $5 \cdot 2^{2^n} + 1$ ve $8 \cdot 2^{2^n} + 1$ sayıları, $n = 1, 2, \ldots$ için 3 ile bölünebildikleri ve 3'ü aştıkları için tümü bileşiktir.
NOT. Eğer $t = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $k = 3t + 2$ ise, o zaman $k \cdot 2^{2^n} + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sayılarının tümü 3 ile bölünebilir ve bileşiktir.

[123] $\frac{1}{3}(2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1)$ sayıları $n = 1, 2, \ldots$ için pozitif tamsayılardır. Eğer n çift ise, $2^n \equiv 1 \pmod 3$'tür, dolayısıyla k pozitif bir tamsayı olmak üzere $2^n = 3k + 1$'dir ve $2^{2^n} = (2^3)^k \cdot 2 \equiv 8^k \cdot 2 \equiv 2 \pmod 7$'dir, bu da $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 \equiv 4 \pmod 7$ anlamına gelir. Buradan $2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1 \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod 7$ olduğu sonucu çıkar. Eğer n tek ise, $2^n \equiv 2 \pmod 3$'tür, dolayısıyla $k \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere $2^n = 3k + 2$'dir. Buradan $2^{2^n} = 2^{3k+2} = 8^k \cdot 4 \equiv 4 \pmod 7$ olduğu, $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod 7$ olduğu sonucu çıkar. Böylece, $2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1 \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod 7$. Sonuç olarak, $\frac{1}{3}(2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1)$ sayıları n pozitif tamsayısı için 7 ile bölünebilir ve $n > 1$ için $\geq \frac{1}{3}(2^{2^3} + 2^{2^2} + 1) = 91 > 7$ olduklarından, $n = 2, 3, \ldots$ için bileşiktirler.
XVII. yüzyıldan Michael Stiffel'in teoremi ile karşılaştırın; bkz. *Elemente der Mathematik*, 18 (1963), s. 18.

[124] Örneğin, n'nin $28k + 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ biçiminde olduğu dizimizin tüm sayıları istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de, Fermat teoremine göre $2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$'a sahibiz, bu da $k = 1, 2, \ldots$ için $2^{2 \cdot 28k} \equiv 1 \pmod{29}$ anlamına gelir. Böylece, $n = 28k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ için $(2^{2^n} + 1)^2 + 2^2 \equiv 25 + 4 \equiv 0 \pmod{29}$'a sahibiz, bu da $29 \mid (2^{2^n} + 1)^2 + 2^2$ anlamına gelir. $k = 1, 2, \ldots$ için, açıkça $n = 28k + 1 \geq 29$'a sahibiz, bu da $(2^{2^n} + 1)^2 + 2^2 > 29$ anlamına gelir. Böylece, $n = 28k + 1, k = 1, 2, \ldots$ için $(2^{2^n} + 1)^2 + 2^2$ biçimindeki tüm sayılar bileşiktir.

125. $1 < a \leq 100$ olmak üzere her a tam sayısı için $a^{2^n}+1$ sayısının bileşik olacak şekilde en az bir $n \leq 6$ pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[125]

126. Üç tane asal sayının toplamı şeklinde gösterilebilen fakat üçten az sayıda asal sayının toplamı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda tek sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[126]

---

[125] Eğer a tek ve > 1 ise, $a^{2^n}+1$ sayıları (çift ve > 1 olduklarından) ($n = 1, 2, ...$ için) bileşiktir; bu nedenle a'nın çift olduğunu varsayabiliriz. $641 \mid 2^{2^5}+1$'e sahibiz, dolayısıyla $641 \mid 4^{2^4}+1$ ve $641 \mid 16^{2^3}+1$ de geçerlidir. Ardından, $17 \mid 2^{2^3}+1$, $17 \mid 4^{2^2}+1$, $17 \mid 6^{2^3}+1$, $17 \mid 8^{2^2}+1$, $17 \mid 10^{2^3}+1$, $17 \mid 12^{2^3}+1$, $17 \mid 14^{2^2}+1$, $17 \mid 20^{2^3}+1$, ..., $17 \mid 22^{2^3}+1$, $17 \mid 24^{2^3}+1$, $17 \mid 26^{2^2}+1$, $17 \mid 28^{2^3}+1$, $17 \mid 30^{2^3}+1$, $17 \mid 32^{2^2}+1$ olduğunu kolayca kontrol ederiz. Örneğin, $17 \mid 28^{2^3}+1$ olduğunu kontrol etmek için $28 \equiv 11 \pmod{17}$ denkliğinden başlarız; bu, $28^2 \equiv 121 \equiv 2 \pmod{17}$ anlamına gelir, bu da $28^8 \equiv 2^{2^3} \equiv -1 \pmod{17}$ sonucunu verir ve sonuç olarak $17 \mid 28^{2^3}+1$'dir.
Bu formüller göz önüne alındığında, $k = 0, 1, 2, ...$ için hemen şunu elde ederiz

$$17 \mid (34k+2)^{2^3}+1, \quad 17 \mid (34k+4)^{2^2}+1, \quad 17 \mid (34k+6)^{2^3}+1,$$

$$17 \mid (34k+8)^{2^2}+1, \quad 17 \mid (34k+10)^{2^3}+1, \quad 17 \mid (34k+12)^{2^3}+1,$$

$$17 \mid (34k+14)^{2^2}+1, \quad 17 \mid (34k+20)^{2^3}+1, \quad 17 \mid (34k+22)^{2^3}+1,$$

$$17 \mid (34k+24)^{2^3}+1, \quad 17 \mid (34k+26)^{2^2}+1, \quad 17 \mid (34k+28)^{2^3}+1,$$

$$17 \mid (34k+30)^{2^3}+1, \quad 17 \mid (34k+32)^{2^2}+1.$$

$5 \mid 18^2+1$ ve $13 \mid 34^2+1$ gerçeğini kullanarak, 50, 52, 68, 84 ve 86 sayıları dışında, $a \leq 100$ olan her pozitif tamsayı için $a^{2^n}+1$'in bileşik olacağı şekilde $n \leq 5$ olan bir pozitif tamsayının var olduğu sonucunu çıkarırız. Öte yandan, $50^2+1 = 2501 = 41 \cdot 61$, $5 \mid 52^2+1$, $5 \mid 68^2+1$, $257 \mid 84^2+1$ ve $13 \mid 86^2+1$'dir. Böylece, $a \leq 100$ olan her pozitif tamsayı için $a^{2^n}+1$'in bileşik olacağı şekilde $n \leq 6$ olan bir pozitif tamsayı vardır.
NOT. A. Schinzel, $1 < a < 2^{2^k}$ olacak şekilde her a pozitif tamsayısı için $a^{2^n}+1$'in bileşik olacağı şekilde bir n pozitif tamsayısının var olduğunu kanıtlamıştır; bkz [20].
$a > 1$ olan her tamsayı için $a^{2^n}+1$'in bileşik olacağı şekilde bir n pozitif tamsayısının var olup olmadığını bilmiyoruz; örneğin, $a = 2^{2^{33}}$ sayısı için bunu kanıtlayamıyoruz. Öte yandan, $n = 2^{2^{33}}$ için $a^{2^n}+1$ sayısının bileşik olduğunu kanıtlayabiliriz ve hatta en küçük asal bölenini, yani $3 \cdot 2^{2^{33}+1}+1$'i biliyoruz; bkz. Sierpiński [37, s. 349, Bölüm 6].

[126] 5'ten büyük her asal sayı açıkça $k \geq 0$ bir tam sayı olmak üzere $30k + r$ formundadır ve r, 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 veya 29 sayılarından biridir. Sonsuz sayıda asal olduğundan, bu sekiz r değerinden en az biri için k pozitif tam sayı olmak üzere $30k + r$ formunda sonsuz sayıda asal vardır. Bu nedenle, aşağıdaki sekiz durumu dikkate almak yeterlidir:
(1) $30k + 1$ formunda sonsuz sayıda asal vardır. p bunlardan biri olsun ve $n = 7 + 19 + p$ olsun; bu, $n = 7 + 19 + 30k + 1 = 3(10k + 9)$ olduğundan tek bir bileşik sayı olacaktır. Böylece, n sayısı üç farklı asalın toplamıdır ($p = 30k + 1$, 7 ve 19'dan farklı olduğu için) ve n iki asalın toplamı değildir, çünkü o zaman bunlardan biri çift, yani 2'ye eşit olmak zorunda kalırdı ve $n = 30k + 27 = q + 2$, yani $q = 5(6k + 5)$ olurdu ki bu imkansızdır.
(2) $30k+7$ formunda sonsuz sayıda asal vardır. $p > 7$ bu asallardan biri olsun ve $n = 7+13+p$ olsun; $n = 30k + 27 = 3(10k + 9)$ olduğundan n tek ve bileşiktir ve $p \geq 37$ olduğundan, n üç farklı asalın toplamına eşit olacaktır. $n - 2 = 30k + 25 = 5(6k + 5)$ olduğundan, n'nin gerekli koşulları sağladığını görürüz.
(3) $30k+11$ formunda sonsuz sayıda asal vardır. $p > 11$ bunlardan biri olsun ve $n = 11+13+p$ olsun; böylece n tek ve üç farklı asalın toplamına eşit olacaktır. $n = 30k + 35 = 5(6k + 7)$ ve $n - 2 = 3(30k + 11)$ olduğundan, n sayısı gerekli koşulları sağlar.
(4) $30k+13$ formunda sonsuz sayıda asal vardır. p bunlardan biri olsun ve $n = 3+11+p$ olsun; böylece n tek ve üç farklı asalın toplamına eşit olacaktır. $n = 3(10k+9)$ ve $n-2 = 5(6k+5)$

127. $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=5$ eşitliklerini sağlayan ve katsayıları tam sayılar olan hiçbir $f(x)$ polinomunun bulunmadığını ve her $m>1$ tam sayısı için, $p_n = n$ asal sayılar dizisi türese $(f(k) = p_n(n = 1, 2, \dots))$ olacak şekilde katsayıları rasyonel sayılar olan bir $f(x)$ polinomunun bulunduğunu kanıtlayınız.[127]

128. Her n pozitif tam sayısı için $f(1) < f(2) < \dots < f(n)$ sayıları asal olacak şekilde katsayıları tam sayılar olan bir $f(x)$ polinomu bulunduğunu kanıtlayınız.[128]

129. x değişkeninin m farklı değerinde m farklı asal sayı veren ve katsayıları tam sayılar olan bir indirgenmez $f(x)$ polinomu bulunuz.[129]

130. $f(x)$, derecesi 0'dan büyük olan tam sayı katsayılı bir polinomsal, sonsuz sayıda p asal sayısı için $f(x) = 0 \pmod p$ denkleminin çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[130]

---

olduğundan, n sayısı gerekli koşulları sağlar.
(5) $p = 30k + 17$ formunda sonsuz sayıda asal vardır. p bunlardan biri olsun ve $n = 3 + 7 + p$ alalım. $n = 3(10k + 9)$ ve $n - 2 = 5(6k + 5)$ olduğundan, n sayısı gerekli koşulları sağlar.
(6) $30k + 19$ formunda sonsuz sayıda asal vardır. p bunlardan biri olsun ve $n = 3 + 5 + p$ olsun. Daha önce olduğu gibi, n'nin gerekli koşulları sağladığını çıkarırız.
(7) $30k + 23$ formunda sonsuz sayıda asal vardır. p bunlardan biri olsun ve $n = 5 + 7 + p$ olsun. $n = 5(6k + 7)$ ve $n - 2 = 3(10k + 11)$ olduğundan, n sayısı gerekli koşulları sağlar.
(8) $30k + 29$ formunda sonsuz sayıda asal vardır. p bunlardan biri olsun ve $n = 5 + 31 + p$ olsun. $n = 5(6k + 13)$ ve $n - 2 = 3(10k + 21)$ olduğundan, n sayısı gerekli koşulları sağlar. Kanıt tamamlanmıştır. Bkz [28].

[127] Eğer $f(x)$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$ olacak şekilde tam sayı katsayılı bir polinom olsaydı, o zaman $g(x) = f(x) - 2$ $g(1) = 0$ olacak şekilde tam sayı katsayılı bir polinom olurdu ve $g(x) = (x - 1)h(x)$ olurdu, burada $h(x)$ tam sayı katsayılı bir polinomdur. $f(3) = 5$ olduğundan $g(3) = f(3) - 2 = 3$ olur, bu da $2h(3) = 3$ verir; ancak, $h(3)$ bir tam sayı olduğu için bu imkansızdır. Şimdi m, 1'den büyük bir tam sayı olsun ve $k = 1, 2, \dots, m$ için $g_k(x) = \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-m)}{x-k}$ olsun. Açıkça, $g_k(x)$ $m - 1$ dereceli tam sayı katsayılı bir polinomdur ve k'den farklı her $x \le m$ pozitif tam sayısı için $g_k(x) = 0$ iken, $g_k(k) \ne 0$ olan bir tam sayı olacaktır. $f_k(x) = g_k(x)/g_k(k)$ olsun; açıkça $f_k(x)$, k'den farklı her $x \le m$ pozitif tam sayısı için $f_k(x) = 0$ iken $f_k(k) = 1$ olacak şekilde $m - 1$ mertebesinden rasyonel katsayılı bir polinom olacaktır. $f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + \dots + p_m f_m(x)$ koyalım; açıkça bu polinom gerekli koşulları sağlayacaktır: $f(x)$ rasyonel katsayılara sahiptir ve $k = 1, 2, \dots, m$ için $f(k) = p_k$ olur.

[128] J. Browkin'in kanıtı. n verilmiş bir pozitif tam sayı olsun. $k \le n$ pozitif tam sayısı için, t_k pozitif tam sayılarını tümevarımla şöyle tanımlayalım: $t_0 = 1$ olsun. Bir $k \le n$ pozitif tam sayısı için t_{k-1} sayısını zaten tanımladığımızı varsayalım. Lejeune-Dirichlet teoreminin özel durumuna göre, $q_k = (k-1)!(n-k)!t_k + 1$ sayısının asal olacağı ve $k > 1$ durumunda $(k-2)!(n-k+1)!t_{k-1} + 1$ sayısından büyük olacağı şekilde bir t_k pozitif tam sayısı vardır ($0! = 1$ koyarız). Böylece, $q_1, q_2, \dots, q_n$ sayıları asal olacaktır ve $q_1 < q_2 < \dots < q_n$ olur. $f(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} (-1)_i^{n-j} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{x-j} t_j$ olsun. Açıkça, $f(x)$ tam sayı katsayılı $\le n - 1$ mertebesinden bir polinom olacaktır ve $f(k) = 1 + (k-1)!(n-k)!t_k = q_k$ olduğunu kolayca kontrol ederiz.

[129] Örnek olarak, p_k'nin k'ninci asalı gösterdiği $f(x) = [(x - p_1)(x - p_2)\dots(x - p_m) + 1]x$ polinomunu alabiliriz. Burada $k = 1, 2, \dots, m$ için $f(p_k) = p_k$ olacaktır.

[130] Eğer tam sayı katsayılı $f(x)$ polinomunun sabit terimi 0'a eşit olsaydı, o zaman $f(0) = 0$ olurdu ve $f(x) \equiv 0 (mod\ p)$ denkliği her p modülü için çözülebilir olurdu. Bu nedenle, $f(x)$ polinomunun sabit teriminin a_0'a eşit olduğunu ve sıfır olmadığını varsayalım. $f(a_0 x) =$

131. $k+1, k+2, \ldots, k+10$ dizisi maksimum sayıda asal sayı içerecek şekilde tüm $k \geq 0$ tam sayılarını bulunuz.[131]

132. $k+1, k+2, \ldots, k+100$ dizisi maksimum sayıda asal sayı içerecek şekilde tüm $k \geq 0$ tam sayılarını bulunuz.[132]

133. 25 tane asal sayı içeren tüm 100 ardışık sayıdan oluşan dizileri bulunuz.[133]

$a_0 f_1(x)$ olduğundan, burada $f_1(x)$ sabit terimi 1'e eşit olan tam sayı katsayılı bir polinomdur, teoremimizi sadece bu tür polinomlar için kanıtlamak yeterlidir. n verilmiş bir pozitif tam sayı olsun. Açıkça $n! \mid f_1(n!) - 1$ olur, dolayısıyla $f(n!) = n!k + 1$, burada k bir tam sayıdır. (> 0 mertebesinden olan) $f_1(x)$ polinomunun mutlak değeri x ile birlikte tüm sınırların üzerine çıkar; bu nedenle yeterince büyük n için $\mid f(n!) \mid = \mid n!k + 1 \mid > 1$ olacaktır ve $n!k + 1$ sayısının bir p asal böleni vardır. $p \mid n!k + 1$ olduğundan $p > n$ olmalıdır ve $p \mid f_1(n!)$ olduğundan, $f_1(x) \equiv 0 (mod\ p)$ denkliği $p > n$ olan bir asal modül için çözülebilirdir. n keyfi olduğundan, $f_1(x) \equiv 0 (mod\ p)$ denkliğinin ve dolayısıyla $f(x) \equiv 0 (mod\ p)$ denkliğinin sonsuz sayıda p asalı için çözülebilir olduğunu çıkarırız.

[131] Böyle sadece bir sayı vardır, yani $k = 1$. O zaman $k+1, k+2, \ldots, k+10$ (1) dizisi beş asal içerir: 2, 3, 5, 7 ve 11. $k = 0$ ve $k = 2$ için, (1) dizisi dört asal içerir. Eğer $k \geq 3$ ise, (1) dizisi 3 sayısını içermez; bildiğimiz gibi, her üç ardışık tek sayıdan biri 3 ile bölünebilir olmalıdır. Buradan (1) dizisinin en az bir tek bileşik sayı içerdiği sonucu çıkar. Bunun dışında, (1) dizisi beş çift sayı içerir, dolayısıyla ($k \geq 2$ için) bu sayılar bileşiktir. Böylece, $k \geq 3$ için, (1) dizisi en az 6 bileşik sayı içerir ve asal sayıların sayısı 4'ü geçemez. **NOT.** (1) dizisi $k = 0, 2, 10, 100, 190, 820$ için dört asal içerir. Bu tür sonsuz sayıda k sayısı olup olmadığını bilmiyoruz. A. Schinzel'in asallarla ilgili bir varsayımından ([22]) cevabın olumlu olduğu sonucu çıkar.

[132] Böyle sadece bir sayı vardır, yani $k = 1$. Bu değer için $k+1$, $k+2, \ldots, k+100$ (1) dizisi 26 asal içerir. $k = 0, 2, 3$ veya 4 için, (1) dizisi 25 asal içerir. Bu nedenle, $k \geq 5$ olduğunu varsayabiliriz. (1) dizisi 50 çift sayı içerir, ki $k > 1$ için bunların hepsi bileşiktir. Ardından, 50 ardışık tek sayı da içerir ve her üç ardışık tek sayı 3 ile bölünebilen bir sayı içerdiğinden, (1) dizisi 3 ile bölünebilen en az 16 sayı içerir, ki $k > 2$ için bunların hepsi bileşiktir. Şimdi (1) dizisinin 5 ile bölünebilen ve 3 veya 2 ile bölünmeyen terimlerinin sayısını hesaplayalım. Tüm bu sayılar $30t + r$ formunda olacaktır, burada t bir tam sayı ≥ 0 ve r, 5 veya 25 sayılarından biridir. Bu sayıları sonsuz artan dizide düzenleyelim $5, 25, 35, 55, 65, 85, 95, 115, 125, 145, 155, 175, 185, \ldots$ (2) ve u_n bu dizinin n'inci terimini göstersin. $n = 1, 2, \ldots.$ için $u_{n+6} - u_n < 100$ olduğunu kolayca kontrol ederiz. u_n bu dizinin k'yi aşmayan son terimini göstersin. $u_n \leq k < u_{n+1} < u_{n+6} < u_n + 100 \leq k + 100$ olacaktır, bu da (1) dizisinin (2) dizisinden en az 6 terim içerdiğini gösterir ve sonuç olarak, $k \geq 5$ için 5 ile bölünebilen ancak 2 veya 3 ile bölünmeyen, dolayısıyla bileşik olan en az 6 terim içerir. Son olarak, (1) dizisinin 7 ile bölünebilen, ancak 2, 3 veya 5 ile bölünmeyen terimlerinin sayısını hesaplayalım. Bunlar $210t + r$ formundaki terimler olacaktır, burada t bir tam sayı ≥ 0 ve r, 7, 49, 77, 91, 119, 133, 161, 203 sayılarından biridir. Bu sayıları sonsuz artan dizide düzenleyelim $7, 49, 77, 91, 119, 133, 161, 203, 217, 259, 287, \ldots$ (3) ve v_n bu dizinin n'inci terimini göstersin. $n = 1, 2, \ldots.$ için $v_{n+3} - v_n < 100$ olduğunu kolayca kontrol ederiz. v_n, v_1, v_2, ... dizisinin k'yi aşmayan son terimini göstersin. $v_n \leq k < v_{n+1} < v_{n+3} < v_n + 100 \leq k + 100$ olacaktır, bu da (1) dizisinin (3) dizisinden en az 3 terim içerdiğini, yani 7 ile bölünebilen ancak 2, 3 veya 5 ile bölünmeyen en az üç sayı içerdiğini gösterir. $k \geq 7$ için, tüm bu sayılar bileşik olacaktır. Buradan $k \geq 7$ için, (1) dizisinin en az $50 + 16 + 6 + 3 = 75$ bileşik sayı içerdiği, dolayısıyla en fazla 25 asal içerdiği sonucu çıkar. $k = 5$ ve $k = 6$ için, (1) dizisi v_2, v_3 ve v_4 bileşik sayılarını içerir. (Dizgi hatası: v_2, d_3 ve v_4 yerine v_2, v_3 ve v_4 olmalı). Böylece, $k > 1$ için, (1) dizisi en fazla 25 asal içerir.

[133] Sadece 6 tane böyle dizi vardır, bunlar 1, 3, 4, 5, 10 ve 11 ile başlayanlardır. Kanıt aşağıdaki lemmadan gelir: $k > 11$ için, k, $k+1, \ldots, k+99$ sayıları arasında 2, 3, 5, 7 veya 11'den birine bölünebilen en az 76 sayı vardır. Lemmanın kanıtı, 2, 3, 5, 7 veya 11 ile bölünebilen tüm sayıları artan bir sonsuz dizi şeklinde yazarak elde edilebilir. Bu dizi, eğer bir r sayısı dizide yer alıyorsa, $r + 2310$ sayısının da yer alması özelliğine sahiptir ve tersi de geçerlidir (çünkü

134. 8 tane asal sayı içeren tüm 21 ardışık sayıdan oluşan dizileri bulunuz.[134]

135. $p, p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$ sayılarının her biri asal olacak şekilde tüm p asal sayılarını bulunuz.[135]

136. Aşağıdaki koşulları sağlayan sonsuz sayıda bir birinden farklı m ve n pozitif tam sayı ikilisinin bulunduğunu kanıtlayınız:[136]

(a) m ve n sayılarının asal bölenleri aynıdır;

(b) $m+1$ ve $n+1$ sayılarının asal bölenleri aynıdır.

$2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$). Böylece, eğer $r_1, r_2, \ldots, r_s$ sayıları 2, 3, 5, 7 veya 11 ile bölünebilen ≤ 2310 olan tüm pozitif tam sayıları gösteriyorsa, o zaman bu tür tüm sayılar s aritmetik dizisinde yer alır: $2310t + r_i$, burada $i = 1, \ldots, s$ ve $t = 0, 1, 2, \ldots$. Bu nedenle, 2, 3, 5, 7 veya 11 ile bölünebilen $\leq 2310 + 100$ olan tüm pozitif tam sayıları yazmak ve $1 \leq k \leq 2310$ için k, $k+1, \ldots, k+99$ sayılarının her yüzlüsünde bu diziden en az 76 sayı olduğunu kontrol etmek yeterlidir. (1) dizisinin 24 asal içerdiği bu tür k pozitif tam sayılarından sadece sonlu sayıda olduğunu kanıtlamak daha zor olurdu. Öte yandan, A. Schinzel'e ait asallarla ilgili belirli bir varsayım ([22]), (1) dizisinin 23 asal içerdiği sonsuz sayıda k sayısı olduğunu ima eder.

[134]LEMMA. Her 21 ardışık pozitif tam sayıdan en az 14 tanesi 2, 3 veya 5 sayılarından biri ile bölünebilir. **KANIT** Her ardışık 21 pozitif tam sayıda, 2 ile bölünebilen en az 10 tane ve en az 10 ardışık tek sayı vardır ki bunlardan da en az 3 tanesi 3 ile bölünebilir. Bu nedenle, her 21 ardışık pozitif tam sayı dizisinde 5 ile bölünebilen ancak 2 veya 3 ile bölünmeyen en az bir sayı olduğunu göstermek yeterlidir . x'in 30'a bölünmesinden kalanı r göstersin; o zaman $x = 30t + r$ olur, burada t bir tam sayı ≥ 0 ve $0 \leq r < 30$. Eğer $r \leq 5$ ise, o zaman $x \leq 30t + 5 \leq x + 20$ ve $30t + 5$ sayısı x, $x+1, \ldots, x+20$ dizisinin 5 ile bölünebilen ancak 2 veya 3 ile bölünmeyen bir terimidir. Eğer $5 < r \leq 25$ ise, o zaman $x \leq 30t + 25 < x + 20$ ve $30t+25$ sayısı x, $x+1, \ldots, x+20$ dizisinin 5 ile bölünebilen ancak 2 veya 3 ile bölünmeyen bir terimidir. Son olarak, eğer $25 \leq r < 30$ ise, o zaman $x < 30t+35 < x+20$ ve $30t+35$ sayısı x, $x+1, \ldots, x+20$ dizisinin 5 ile bölünebilen ancak 2 veya 3 ile bölünmeyen bir terimidir. Bu, lemmanın kanıtını tamamlar. Lemmamız, 5'i aşan her 21 ardışık pozitif tam sayıdan en az 14'ünün bileşik sayı olduğunu, dolayısıyla en fazla 7 asal olduğunu hemen ima eder. $x = 1, 2$ ve 3 için, x, $x+1, \ldots, x+20$ dizisi her biri 8 asal içerirken, $x = 4$ ve $x = 5$ için bu dizi 7 asal içerir. Böylece, x, $x+1, \ldots, x+20$ dizisi $x = 1, 2$ ve 3 için 8 asal içerir.

[135]Böyle sadece bir sayı vardır, yani $p = 5$. $p < 5$ için gerekli özelliğin sağlanmadığını kolayca buluruz. $p = 5$ için, 5, 7, 11, 13, 17 ve 19 asallarını elde ederiz. Eğer $p > 5$ ve $p = 5k$ (k pozitif tam sayı) ise, o zaman p bileşiktir. Eğer $p = 5k+1$ ise, o zaman $p+14$, 5 ile bölünebilir, dolayısıyla bileşiktir. Eğer $p = 5k+2$ ise, o zaman $p+8$, 5 ile bölünebilir, dolayısıyla bileşiktir. Eğer $p = 5k+3$ ise, o zaman $5 \mid p+12$ ve $p+12$ bileşiktir. Son olarak, eğer $p = 5k+4$ ise, o zaman $5 \mid p+6$ ve $p+6$ bileşiktir.

[136]$k > 1$ tam sayısı için bu tür çiftlerin $m = 2^k - 2$ ve $n = 2^k(2^k - 2)$ olduğunu kolayca buluruz, bunlar için $m+1 = 2^k - 1$ ve $n+1 = (2^k-1)^2$ olur. **NOT.** P. Erdös bu tür başka çiftlerin varlığı hakkında bir problem ortaya atmıştır; bkz [9, s. 126, problem 60]. A. Mąkowski bir çift bulmuştur: $m = 75 = 3 \cdot 5^2$, $n = 1215 = 5 \cdot 3^5$, bunlar için $m+1 = 2^2 \cdot 19$, $n+1 = 2^6 \cdot 19$.

Diofant Denklemleri

137. $3x^2 - 7y^2 + 1 = 0$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[137]

138. $2x^3 + xy - 7 = 0$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz ve pozitif rasyonel sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[138]

139. $(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[139]

140. $x(x+1) = 4y(y+1)$ denkleminin pozitif tam sayı çözümünün bulunmadığını, fakat pozitif rasyonel sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[140]

141. p bir asal sayı ve n de bir pozitif tam sayı ise, $x(x+1) = p^n y(y+1)$ denkleminin pozitif tam sayılarla hiçbir çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[141]

---

[137] $3(55a + 84b)^2 - 7(36a + 55b)^2 = 3a^2 - 7b^2$ özdeşliği, eğer $x = a$ ve $y = b$ tam sayıları $3x^2 - 7y^2 + 1 = 0$ denklemini sağlıyorsa, o zaman daha büyük $x = 55a + 84b$ ve $y = 36a + 55b$ tam sayılarının da aynı denklemi sağladığını ima eder. $x = 3$ ve $y = 2$ sayıları bu denklemi sağladığından, pozitif x, y tam sayılarında sonsuz sayıda çözümü vardır.

[138] $x(2x^2 + y) = 7$ olduğundan, x sayısı 7'nin bir tam sayı böleni olmalıdır, yani $1, 7, -1, -7$ sayılarından birine eşit olmalıdır. Bu değerleri denkleme yerine koyduğumuzda, y için $5, -97, -9, -99$ değerlerini elde ederiz. Böylece, denklemimizin tam sayılarda dört çözümü vardır, yani $(1, 5), (7, -97), (-1, -9), (-7, -99)$. Şimdi n, 5'ten büyük keyfi bir tam sayıyı göstersin ve $x = 7/n$, $y = n - 98/n^2$ olsun. $n > 5$ olduğundan, $n \geq 6$ olur ve x, y rasyonel ve pozitif olacaktır; $2x^3 + xy - 7 = 0$ denklemini sağladıklarını kolayca kontrol ederiz.

[139] Eğer x ve y $(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1$ (1) denklemini sağlıyorsa, o zaman $(2y + 3x - 1)^2 + (2y + 3x + 1)^2 = (3y + 4x)^2 + 1$ olduğunu kolayca görürüz . Böylece, (1) denkleminin her pozitif tam sayı x, y çözümü için, daha büyük tam sayılarda başka bir $2y + 3x$, $3y + 4x$ çözümü elde ederiz; bu denklemin $x = 2$, $y = 3$ çözümü olduğundan, pozitif tam sayılarda sonsuz sayıda çözümü vardır.

[140] Eğer pozitif tam sayılar x ve y için $x(x+1) = 4y(y+1)$ olsaydı, o zaman $3 = [2(2y+1)]^2 - (2x+1)^2 = (4y - 2x + 1)(4y + 2x + 3)$ olurdu, dolayısıyla 3 sayısı, 3'ü aşan bir $4y + 2x + 3$ pozitif tam sayısı tarafından bölünürdü ki bu imkansızdır. Öte yandan, $n > 1$ tam sayısı için $x = \frac{3^n - 3^{1-n} - 2}{4}$ ve $y = \frac{3^n + 3^{1-n} - 4}{8}$ olduğunda $x(x+1) = 4y(y+1)$ olduğunu kolayca görürüz. Örneğin, $n = 2$ için $x = 5/3$, $y = 2/3$ elde ederiz. Denklemimizin sonsuz sayıda rasyonel x, y çözümü vardır.

[141] A. Schinzel'in kanıtı. p bir asal sayı olsun ve n bir pozitif tam sayı olsun; pozitif x ve y tam sayılarının $x(x+1) = p^{2n} y(y+1)$ denklemini sağladığını varsayalım. x ve $x+1$ aralarında asal olduğundan, ya $p^{2n} \mid x$ ya da $p^{2n} \mid x+1$ olur ve dolayısıyla her durumda $x + 1 \geq p^{2n}$ olur. Ancak, denklemimiz $p^{2n} - 1 = [p^n(2y+1) + (2x+1)][p^n(2y+1) - (2x+1)]$ denklemine denktir. Sol taraf ve sağdaki ilk çarpan pozitif tam sayılar olduğundan, sağdaki ikinci çarpan da pozitif bir tam sayı olmalıdır. Buradan $p^{2n} - 1 > 2x + 1$ sonucu çıkar, dolayısıyla $p^{2n} > 2(x+1)$, ki bu da daha önce bulunan $x + 1 \geq p^{2n}$ ilişkisi göz önüne alındığında $p^{2n} > 2p^{2n}$ verir, bu imkansızdır.

142. Verilen k tam sayısı için $x^2 - 2y^2 = k$ denkleminin bir (x_0, y_0) tam sayı çözümü varsa, $x^2-2y^2 = -k$ denkleminin bir tam sayı çözümünü bulunuz.[142]

143. Her D tam sayısı için $x^2-Dy^2 = z^2$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[143]

144. D, sıfırdan farklı herhangi tam sayı ise, $x^2 - Dy^2 = z^2$ denkleminin, OBEB$(x, y) = 1$ olacak şekilde çözümleri olan tam sayılarla sonsuz tane (x, y, z) çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[144]

145. $xy + x + y = 3z^2$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümlerinin bulunduğunu ve $x \leq y$ koşulunu sağlayan sayılarla çözümlerinin sonlu olduğunu kanıtlayınız.[145]

146. $x^2-2y^2+8z = 3$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[146]

147. $y^2-x(x+1)(x+2)(x+3) = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.[147]

148. $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ denkleminin tüm rasyonel sayı çözümlerini bulunuz.[148]

---

[142] $(x-2y)^2 - 2(x-y)^2 = -(x^2-2y^2)$ özdeşliği göz önüne alındığında, $t = x - 2y$, $u = x - y$ koymak yeterlidir.

[143] Kanıt, $(m^2 + Dn^2)^2 - D(2mn)^2 = (m^2 - Dn^2)^2$ özdeşliğinden hemen çıkar. Keyfi bir n pozitif tam sayısı için, $m^2 > Dn^2$ olacak şekilde m sayısı seçmek ve $x = m^2+Dn^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 - Dn^2$ koymak yeterlidir.

[144] Eğer D tek ise, o zaman $k > 1$ tam sayısı için $D + 2^{2k-2}$ sayısı tektir ve $(D + 2^{2k-2}, 2^k) = 1$ olur; $(D + 2^{2k-2})^2 - D(2^k)^2 = (D - 2^{2k-2})^2$ olduğunu kolayca buluruz. \$x= D+2^{2k-2} \$, $y = 2^k$, $z =| D - 2^{2k-2}$ koyabiliriz. Eğer D çift ise, o zaman her $y > 1$ tam sayısı için $(\frac{1}{2}Dy^2 + 1, y) = 1$ olur ve $(\frac{1}{2}Dy^2 + 1)^2 - Dy^2 = (\frac{1}{2}Dy^2 - 1)^2$ olur ve $x =| \frac{1}{2}Dy^2 + 1$, $z =| \frac{1}{2}Dy^2 - 1$ koyabiliriz.

[145] Denklemimiz $2^{2^5} + 1 = (x + 1)(y + 1)$ denklemine denktir. Fermat sayısı $F_5 = 2^{2^5} + 1$ iki asalın çarpımına eşit olduğundan, küçüğü 641 olmak üzere, denklemimizin pozitif x tam sayılarında ve $y \geq x$ olmak üzere sadece bir çözümü vardır, burada $x = 640$. **NOT.** İki bilinmeyenli ikinci dereceden bazı denklemlerin sadece bir x ve $y \geq x$ çözümü olduğunu bilmemiz ilginçtir, ancak (tamamen teknik nedenlerden dolayı) bu çözümü bulamıyoruz. Örneğin, $xy + x + y + 2 = 2^{137}$ denklemi bu durumdadır. Öte yandan, $xy + x + y = 2^{2^{17}}$ denkleminin pozitif tam sayılarda x, y çözümü olup olmadığını bilmiyoruz.

[146] Eğer y çift ise, o zaman $x^2 = 3 - 8z + 2y^2$ 8'e bölündüğünde 3 kalanını verir, bu imkansızdır. Eğer y tek ise, o zaman $y = 2k + 1$ (k bir tam sayı) olur, o zaman $x^2 = 3 - 8z + 8k^2 + 2$ (dizgi hatası: $x^2 = 3 - 8z + 8k^2 + 8k + 2$ olmalı), bu da 8'e bölündüğünde 5 kalanını verir, ki bu yine imkansızdır çünkü her tek sayının karesi 8'e bölündüğünde 1 kalanını verir.

[147] x keyfi bir pozitif tam sayı olsun. $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$ özdeşliğini kolayca kontrol ederiz, bu da denklemimiz göz önüne alındığında $y = x^2 + 3x + 1$ anlamına gelir. Böylece, denklemimizin pozitif tam sayılardaki tüm x, y çözümleri: x - keyfi bir pozitif tam sayı ve $y = x^2 + 3x + 1$.

[148] $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ denkleminin rasyonel çözümü yoktur çünkü $(2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + (2z + 1)^2 = 7$ denklemine denk olduğunu kolayca görürüz ve 7 sayısı rasyonel sayıların üç karesinin toplamı olmak zorunda kalırdı. Bunun imkansız olduğunu göstereceğiz. Aslında, eğer 7 üç rasyonel sayının karelerinin toplamı olsaydı, o zaman ortak payda ile çarptıktan

149. $4xy - x - y = z^2$ denkleminin pozitif tam sayı çözümlerinin bulunmadığını ve negatif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[149]

150. m pozitif tam sayı olmak üzere $D = m^2 + 1$ ise, $x^2 + Dy^2 = 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[150]

151. $y^2 = x^3 + (x+4)^2$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.[151]

---

sonra $a^2 + b^2 + c^2 = 7m^2$ (1) olurdu, burada a, b, ve c tam sayılar ve m pozitif bir tam sayıdır. O zaman, (1)'in a, b, c tam sayılarında bir çözüme sahip olduğu en küçük pozitif tam sayı m var olurdu. Eğer m çift olsaydı, $m = 2n$ (n pozitif tam sayı), o zaman a, b, c sayılarının üçü de çift olurdu, dolayısıyla $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$ (burada a_1, b_1, c_1 tam sayılardır). Bunu (1)'e koyarak, $m^2 = 4n^2$ göz önüne alındığında $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 7n^2$ elde ederiz, burada n, m'den küçük pozitif bir tam sayıdır, bu da m'nin $7m^2$'nin üç tam sayının karelerinin toplamı olduğu en küçük pozitif tam sayı olduğu varsayımına aykırıdır. Böylece, m tektir ve m^2 8'e bölündüğünde 1 kalanını verir. Dolayısıyla, (1)'in sağ tarafı 8'e bölündüğünde 7 kalanını verir; ancak, böyle bir sayının üç tam sayının karelerinin toplamı olamayacağını biliyoruz.

[149] Eğer pozitif x, y, z tam sayıları $4xy - x - y = z^2$ denklemini sağlasaydı, $(4x-1)(4y-1) = (2z)^2 + 1$ olurdu ve $4x - 1 \geq 3$ pozitif tam sayısının $4k+3$ formunda bir p asal böleni olurdu. Bu nedenle, $(2z)^2 \equiv -1 (mod\ p)$ olurdu ve $p = 4k+3$ göz önüne alındığında, $(2z)^{p-1} = (2z)^{2(2k+1)} \equiv -1 (mod\ p)$ olurdu, bu da Fermat teoremine aykırıdır. Öte yandan, n keyfi bir pozitif tam sayı olsun ve $x = -1$, $y = -5n^2 - 2n$, $z = -5n - 1$ olsun. x, y ve z sayılarının $4xy - x - y = z^2$ denklemini sağladığını kolayca kontrol ederiz.

[150] Pozitif tam sayılar m ve $D = m^2 + 1$ için $(2m^2+1)^2 - D(2m)^2 = 1$ olduğunu kolayca kontrol edebiliriz. Eğer pozitif x ve y tam sayıları için $x^2 - Dy^2 = 1$ ise, o zaman $(x^2 + Dy^2)^2 - D(2xy)^2 = (x^2 - Dy^2)^2$ özdeşliği göz önüne alındığında, $x_1 = x^2 + Dy^2$ ve $y_1 = 2xy$ (x ve y'den büyük pozitif tam sayılar) için $x_1^2 - Dy_1^2 = 1$ olur. Buradan, örneğin, $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin $D = 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82$ için pozitif x, y tam sayılarında sonsuz sayıda çözümü olduğu sonucu çıkar.

[151] $y^2 = x^3 + (x+4)^2$ denkleminin iki açık çözümü vardır: $x = 0$, $y = 4$ ve $x = 0$, $y = -4$. Şimdi, A. Schinzel'e ait olan, bu denklemin $x \neq 0$ olmak üzere pozitif tam sayılarda x, y çözümü olmadığını gösteren kanıtı vereceğiz (bkz [29]). $x \neq 0$ pozitif tam sayılarının ve y'nin denklemi sağladığını varsayalım. Bu nedenle, $x^3 = (y - x - 4)(y + x + 4)$ (1) olur. (1) ve $x \neq 0$ göz önüne alındığında, $y - x - 4$ ve $y + x + 4$ tam sayıları $\neq 0$ olur. $d = (y - x - 4, y + x + 4)$ (2) olsun. Eğer d'nin tek bir p asal böleni olsaydı, o zaman (1) göz önüne alındığında $p \mid x$ olurdu ve $p \mid d$ ve (2) ile $p \mid y - x - 4$ ve $p \mid y + x + 4$ olurdu, dolayısıyla $p \mid 2y$. p tek olduğundan, $p \mid y$ ve $p \mid 4$ sonucu çıkardı ki bu imkansızdır. Böylece, d'nin tek asal böleni yoktur ve ≥ 0 bir tam sayı üssü ile 2'nin bir kuvvetine eşit olmalıdır. Eğer $16 \mid d$ olsaydı, o zaman (1) ve (2) ile $2^8 \mid x^3$ olurdu, bu da $2^3 \mid x$ anlamına gelir ve $d \mid (y+x+4) - (y-x-4) = 2x+8$ olduğundan, $16 \mid 8$ olurdu ki bu imkansızdır. Böylece, 16, d'yi bölmez. Eğer $d = 2$ olsaydı, o zaman $y - x - 4 = 2m$, $y + x + 4 = 2n$ olurdu, burada $(m, n) = 1$. (1) ve (2) göz önüne alındığında $2 \mid x$ olurdu, dolayısıyla $2 \mid y$. Ama $2y = 2(m+n)$, dolayısıyla $y = m + n$ ve $2 \mid m + n$; $(m, n) = 1$ göz önüne alındığında, m ve n sayılarının ikisi de tek olmalıdır. $x^3 = 4mn$ olduğundan, $8 \mid x^3$ olur (dizgi hatası: $8 \nmid x^3$ olmalı), bu $2 \mid x$ olduğundan imkansızdır (dizgi hatası: $8 \mid x^3$ ise $2 \mid x$ olur, ama $x^3 = 4mn$ ve m,n tek ise $x^3/4$ tektir, bu da x'in çift olmasını gerektirir ancak x^3'ün 8'e bölünmesini engeller. $x = 2x'$ ise $8x'^3 = 4mn$, $2x'^3 = mn$. m,n tek ise bu imkansızdır). Böylece $d \neq 2$. Eğer $d = 4$ olsaydı, o zaman $y - x - 4 = 4m$, $y + x + 4 = 4n$ olurdu, burada $(m, n) = 1$. (1) ile $x^3 = 16mn$ olurdu, dolayısıyla $4 \mid x$, bu da $4 \mid mn$ anlamına gelir; böylece, $(m, n) = 1$ olduğundan, m, n sayılarından biri 4 ile bölünebilir ve diğeri tek olmalıdır. Ancak, $4 \mid x$ ve $4 = d \mid y - x - 4$ (dizgi hatası: $d \mid y - x - 4$ olmalı) olduğundan, $4 \mid y = 2(m+n)$ olur (dizgi hatası: $y = 2(m+n)$ değil, $y - x - 4 = 4m$ ve $4 \mid x$ ise $4 \mid y - 4$ yani $4 \mid y$ olmalı. $y + x + 4 = 4n$ ve $4 \mid x$ ise $4 \mid y + 4$ yani $4 \mid y$ olmalı. $y = 2(m+n)$ ise $4 \mid 2(m+n)$ yani $2 \mid m + n$ olur, bu da m,n'den biri 4'e bölünür diğeri tekse mümkündür), bu imkansızdır. Bu nedenle $d \neq 4$. 16, d'yi bölmediğinden, $d \neq 2$

152. Her m pozitif tam sayısı için $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m$ denkleminin, x, y, z aralarında asal olmak üzere tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.[152]

153. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[153]

---

ve $d \neq 4$ olduğundan ve d, 2'nin bir kuvveti olduğundan, geriye iki durum kalır: $d = 1$ ve $d = 8$. Eğer $d = 1$ ise, o zaman (1) ve (2)'den $y - x - 4$ ve $y + x + 4$ sayılarının tam sayıların küpleri olduğu sonucu çıkar; $y - x - 4 = a^3$, $y + x + 4 = b^3$, bu da (1) göz önüne alındığında $x = ab$ ve $2x + 8 = b^3 - a^3$ anlamına gelir. $a = b$ olamaz çünkü o zaman $x = -4$ olurdu (dizgi hatası: $2x + 8 = 0$ ise $x = -4$. $y - x - 4 = a^3$ ve $y + x + 4 = b^3$ ve $a = b$ ise $y - x - 4 = y + x + 4$ yani $2x + 8 = 0$, $x = -4$. $x = ab = a^2$, $a^2 = -4$ imkansız) ve $y^2 = x^3 + (x + 4)^2$ denklemi $y^2 = -4^3$ anlamına gelirdi ki bu imkansızdır. $x = ab$ göz önüne alındığında $2ab + 8 = b^3 - a^3 = (b - a)((b - a)^2 + 3ab)$ olur. Bu, eğer $b - a = 1$ ise, o zaman $2ab + 8 = 1 + 3ab$, dolayısıyla $ab = 7$ ve sonuç olarak $x = 7$, $y^2 = 7^3 + 11^2 = 464$ anlamına gelir ki 464 bir kare olmadığından bu imkansızdır. Böylece, eğer $ab > 0$ ise, o zaman $b - a > 0$ olur ve $b - a \neq 1$ göz önüne alındığında $b - a \geq 2$ ve $2ab + 8 > 6ab$ (dizgi hatası: $(b - a) \geq 2$ ise $(b - a)((b - a)^2 + 3ab) \geq 2(4 + 3ab) = 8 + 6ab$) elde ederiz. Bu $ab < 2$ anlamına gelir (dizgi hatası: $2ab + 8 \geq 8 + 6ab$ ise $4ab \leq 0$ olur, $ab > 0$ ile çelişir), dolayısıyla $ab = 1$ ve $a = b = 1$, ki bu imkansızdır (çünkü $a = b$ olamaz). Eğer $ab < 0$ ise, o zaman ya $a > 0$, $b < 0$, bu da $a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3 \geq a^2 + (-b)^2 \geq -2ab$ sonucunu verir (dizgi hatası: $a^3 - b^3$ değil $b^3 - a^3$ olmalı. $b^3 - a^3 = -2ab - 8$. $a > 0, b < 0$ ise $a = 1, b = -1$ olsa $x = -1$, $2(-1) + 8 = 6$, $b^3 - a^3 = -1 - 1 = -2$, değil. $a = 1, b = -2$ olsa $x = -2$, $2(-2) + 8 = 4$, $b^3 - a^3 = -8 - 1 = -9$. $a = 2, b = -1$ olsa $x = -2$, $2(-2) + 8 = 4$, $b^3 - a^3 = -1 - 8 = -9$.), $a^3 - b^3 = -2ab - 8 < -2ab$ gerçeğine aykırıdır, ya da $a < 0$, $b > 0$, bu da $b^3 = a^3 + 2ab + 8$ göz önüne alındığında $b^3 < 8$ sonucunu verir. Böylece $b = 1$, bu da $a^3 + 2a + 7 = 0$ verir, ki bu denklemin tam sayı çözümü olmadığından imkansızdır. Böylece, $ab = 0$ olmalıdır ve sonuç olarak $x = 0$, $x \neq 0$ varsayımına aykırıdır. Bu nedenle $d = 1$ olamaz ve $d = 8$ olmalıdır. (2) ile $y - x - 4 = 8m$, $y + x + 4 = 8n$ olur, burada $(m, n) = 1$ ve (1) göz önüne alındığında $x^3 = 64mn$ buluruz. Böylece $(x/4)^3 = mn$ olur, bu da $(m, n) = 1$ ile m ve n sayılarının tam sayıların küpleri olması gerektiği anlamına gelir, diyelim ki $m = a^3$, $n = b^3$. Böylece $x/4 = ab$ ve $2x + 8 = 8(n - m) = 8(b^3 - a^3)$, bu da $ab + 1 = b^3 - a^3$ sonucunu verir. Açıkça, $a = b$ olamaz ve $| a - b | \geq 1$ olmalıdır. Eğer $ab > 0$ ise o zaman $b > a$ ve $b - a \geq 1$ olur, ve $ab + 1 = b^3 - a^3 = (b - a)[(b - a)^2 + 3ab] \geq 3ab$ (dizgi hatası: $b - a \geq 1$ ise $\geq 1(1 + 3ab)$) olduğundan, $2ab < 1$ (dizgi hatası: $ab + 1 \geq 1 + 3ab$ ise $2ab \leq 0$) elde ederiz, bu da $ab > 0$ varsayımına aykırıdır. $4ab = x \neq 0$ olduğundan, $ab < 0$ olur. $| b - a | \geq 1$ ve $| b^3 - a^3 | = | b - a || (b + a)^2 - ab | \geq -ab$ göz önüne alındığında ve ayrıca ($ab < 0$ göz önüne alındığında) $ab + 1 < -ab$ (dizgi hatası: $ab + 1 < | ab | = -ab$ olmalı) ilişkisi olduğundan, $ab + 1 = b^3 - a^3$ denklemi imkansızdır. Bu, $y^2 = x^3 + (x + 4)^2$ denkleminin $x \neq 0$ tam sayılarında ve y'de çözümü olmadığı gerçeğinin kanıtını tamamlar.

[152] Denklemimiz, 0'dan farklı ve aralarında asal x, y, z tam sayıları için $x^2 z + y^2 x + z^2 y = mxyz$ denklemine denktir. Buradan $y \mid x^2 z$, $z \mid y^2 x$ ve $x \mid z^2 y$ sonucu çıkar ve $(x, y) = 1$, $(z, y) = 1$ olduğundan, bu da $(x^2 z, y) = 1$ demektir, $y \mid x^2 z$'den $y = \pm 1$ elde ederiz. Benzer şekilde z $= \pm 1$ ve $x = \pm 1$ buluruz. Eğer x, y, z sayılarının üçü de aynı işaretliyse, denklemimiz $1 + 1 + 1 = m$ anlamına gelir, dolayısıyla $m = 3$ olur. Eğer ikisi pozitif biri negatif, ya da ikisi negatif biri pozitif olsaydı, o zaman denklemimiz ($x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ göz önüne alındığında) m'nin negatif olmasını gerektirirdi, ki bu varsayıma aykırıdır. Böylece, pozitif m tam sayısı için, $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m$ denkleminin aralarında asal x, y, z tam sayılarında çözümü sadece m = 3 için vardır, ve bu durumda sadece iki çözüm vardır: $x = y = z = 1$ ve $x = y = z = -1$. $m \neq 3$ pozitif tam sayısı için, denklemimizin 0'dan farklı ve aralarında asal x, y, z tam sayılarında çözümü yoktur.

[153] $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$ elimizde var, dolayısıyla (rasyonel ve pozitif) x/y, y/z ve z/x sayılarının hepsi < 1 olamaz; eğer en az biri ≥ 1 ise, o zaman $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} > 1$ olur ve sol taraf pozitif x, y, z tam sayıları için $= 1$ olamaz. **NOT.** Denklemimizin $\neq 0$ tam sayılarda çözümü olmadığını

154. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 2$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[154]

155. $x^2 + y^2 + z = 3$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.[155]

156. $m = 1$ ve $m = 2$ için $x^3 + y^3 + z^3 = mxyz$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız ve $m = 3$ için tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.[156]

157. Aşağıdaki (T_1) ve (T_2) teoremlerinin denk olduğunu kanıtlayınız:[157]

---

kanıtlamak daha zordur, krş. Cassels [3], Sierpiński [2]; Cassels, Sansone [4].

[154] LEMMA. Eğer a, b, c pozitif, reel ve hepsi eşit değilse, o zaman $(\frac{a+b+c}{3})^3 > abc$. (1) *KANIT* a, b, c sayılarının pozitif olduğunu ve hepsinin eşit olmadığını varsayalım. O zaman $a = u^3$, $b = v^3$ ve $c = w^3$ olacak şekilde, hepsi eşit olmayan pozitif u, v ve w sayıları vardır. $u^3+v^3+w^3-3uvw = \frac{1}{2}(u+v+w)[(u-v)^2+(v-w)^2+(w-u)^2]$ özdeşliğine sahibiz. u, v, w sayılarının hepsi eşit olmadığından, son çarpan kesinlikle pozitiftir ve $u^3+v^3+w^3 > 3uvw$ olur, dolayısıyla $(\frac{u^3+v^3+w^3}{3})^3 > u^3v^3w^3$ olur, ki bu $u^3 = a$, $v^3 = b$, $w^3 = c$ göz önüne alındığında (1)'i verir ve lemmanın kanıtını tamamlar. Şimdi x, y, z pozitif tam sayılar olsun. Eğer x/y, y/z ve z/x sayıları hep eşit olsaydı, o zaman pozitif oldukları ve çarpımları 1'e eşit olduğu için, hepsi 1'e eşit olmak zorunda kalırdı ve $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3 > 2$ olurdu. Böylece, x, y, z sayılarının hepsi eşit değildir ve lemmaya göre $[\frac{1}{3}(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x})]^3 > \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1$ olur, dolayısıyla $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} > 3$ olur. Böylece, $x/y + y/z + z/x = 2$ denklemi pozitif x, y, z tam sayılarında imkansızdır.

[155] Pozitif x, y, z tam sayılarının denklemimizi sağladığını varsayalım. Eğer x/y, y/z ve z/x sayılarının üçü de eşit değilse, o zaman Problem 154'ün çözümünden $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} > 3$ olduğu sonucu çıkar. Bu nedenle, $x/y = y/z = z/x$ olmalıdır ve denklemimiz bu sayıların her birinin 1 olduğunu ima eder. Böylece, $x = y = z$. Bu durumda $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1+1+1 = 3$ olur ve denklemimizin pozitif x, y, z tam sayılarında sonsuz sayıda çözümü vardır; bunların hepsi x için keyfi bir pozitif tam sayı seçip $x = y = z$ alarak elde edilebilir.

[156] A. Schinzel'in fark ettiği gibi, eğer verilen bir m pozitif tam sayısı için x, y, z pozitif tam sayıları $x^3 + y^3 + z^3 = mxyz$ (1) denklemini sağlıyorsa, o zaman $\frac{x^2y}{y^2z} + \frac{y^2z}{z^2x} + \frac{z^2x}{x^2y} = m$ (2) olur. Gerçekten de, $\frac{x^2y}{y^2z} = \frac{x^3}{xyz}$, $\frac{y^2z}{z^2x} = \frac{y^3}{xyz}$, $\frac{z^2x}{x^2y} = \frac{z^3}{xyz}$ olur ve (1) göz önüne alındığında $\frac{x^3}{xyz} + \frac{y^3}{xyz} + \frac{z^3}{xyz} = m$ elde ederiz. Problem 153 ve 154'ten $m = 1$ ve $m = 2$ için (1) denkleminin pozitif x, y, z tam sayılarında çözümü olmadığı sonucu çıkar, Problem 155 ise $m = 3$ için (1) denkleminin tek çözümünün $x^2y = y^2z = z^2x = n$ olduğunu ima eder, burada n bir pozitif tam sayıdır. Ancak o zaman, $x^2y \cdot y^2z \cdot z^2x = n^3$, veya $(xyz)^3 = n^3$ olur, bu da $xyz = n$ anlamına gelir ve $x^2y = n$ göz önüne alındığında $z/x = 1$ veya $x = z$ buluruz; öte yandan $y^2z = n$ göz önüne alındığında $x/y = 1$ veya $x = y$ buluruz. Böylece $x = y = z$ olmalıdır. Ancak, eğer $m = 3$ ise, herhangi bir pozitif x tam sayısı için ve $x = y = z$ alarak (1) denkleminin bir çözümünü elde ederiz. Böylece, $m = 3$ için (1) denkleminin pozitif tam sayılardaki tüm çözümleri, x olarak keyfi bir pozitif tam sayı seçerek ve $y = z = x$ alarak elde edilir.

[157] T_1 teoreminin geçerli olduğunu varsayalım. Eğer T_2 teoremi yanlış olsaydı, $u^3 + v^3 = w^3$ olacak şekilde pozitif u, v ve w tam sayıları var olurdu ve $x = u^2v$, $y = v^2w$, $z = w^2u$ koyarak $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{u^2v}{v^2w} + \frac{v^2w}{w^2u} = \frac{u^2}{vw} + \frac{v^2}{wu} = \frac{u^3+v^3}{uvw} = \frac{w^3}{uvw} = \frac{z}{x}$ olurdu, ki bu T_1 teoremine aykırıdır. Böylece, T_1 teoreminin T_2 teoremini ima ettiğini kanıtladık (bu kanıt A. Schinzel tarafından bulundu). Şimdi T_1 teoreminin yanlış olduğunu varsayalım. O zaman $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ olacak şekilde pozitif x, y, z tam sayıları vardır, dolayısıyla $x^2z + y^2x = z^2y$. $x^2z = a$, $y^2x = b$ olsun; o zaman $z^2y = a + b$ ve $ab(a + b) = (xyz)^3$ olur. $d = (a, b)$ olsun; böylece $a = da_1$, $b = db_1$ olur, burada $(a_1, b_1) = 1$. Buradan $a + b = d(a_1 + b_1)$ ve $a_1b_1(a_1 + b_1)d^3 = (xyz)^3$ sonucu çıkar. Bu, $d^3 \mid (xyz)^3$ anlamına gelir, dolayısıyla $d \mid xyz$ ve $xyz = dt$ (t pozitif tam sayı). Bu nedenle, $a_1b_1(a_1+b_1) = t^3$ olur ve a_1, b_1 ve $a_1 + b_1$ aralarında asal olduklarından, $a_1 = u^3$,

- $(T_1) : \frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümü yoktur.
- $(T_2) : u^3 + v^3 = w^3$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümü yoktur.

158. $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x} = 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunduğunu, fakat sonsuz sayıda tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[158]

159. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = m$ denkleminin, $m = 2$ ve $m = 3$ için pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız ve $m = 4$ için tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.[159]

160. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1$ denkleminin, $x \le y \le z \le t$ olmak üzere tüm pozitif tam çözümlerini bulunuz.[160]

$b_1 = v^3$, $a_1 + b_1 = w^3$ sonucu çıkar (u, v, w pozitif tam sayılar). Böylece, $u^3 + v^3 = w^3$ olur, ki bu T_2 teoremine aykırıdır, bu da T_2 teoreminin T_1 teoremini ima ettiğini gösterir. Böylece, T_1 ve T_2 denktir, ki bu kanıtlanması gerekendi. **NOT.** T_2 teoreminin doğru olduğu temel yöntemlerle kanıtlanabilir (kanıt zor olsa da); böylece, T_1 teoremi de doğrudur.

[158] Eğer x, y, z, t sayıları pozitif tam sayılarsa, o zaman x/y, y/z, z/t ve t/x sayıları rasyonel ve pozitiftir; çarpımları 1'e eşittir, bu da hepsinin < 1 olamayacağını ima eder. Ama en az biri ≥ 1 ise, o zaman toplamları > 1 olur ve $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = 1$ denklemi sağlanamaz. Böylece, bu denklemin pozitif x, y, z, t tam sayılarında çözümü olmadığını kanıtladık. Şimdi bu denklemin $\neq 0$ tam sayılarda sonsuz sayıda çözümü olduğunu göstereceğiz. n, 1'den büyük keyfi bir tam sayı olmak üzere, $x = -n^2$, $y = n^2(n^2 - 1)$, $z = (n^2 - 1)^2$, $t = -n(n^2 - 1)$ sayılarının bu denklemi sağladığını kontrol etmek yeterlidir.

[159] LEMMA. Eğer a, b, c, d pozitif ve hepsi eşit değilse, o zaman $(\frac{a+b+c+d}{4})^4 > abcd$. (1) *KANIT* a, b, c ve d'nin pozitif olduğunu ve örneğin $a \neq b$ olduğunu varsayalım. O zaman ya $a + c \neq b + d$ ya da $a + d \neq b + c$ olur, çünkü eğer $a + c = b + d$ ve $a + d = b + c$ olsaydı, o zaman $a - b = d - b = c - d$ olurdu ve dolayısıyla $a - b = 0$ olurdu, ki bu $a \neq b$ varsayımına aykırıdır. Eğer, örneğin, $a + c \neq b + d$ ise, $u = a + c$, $v = b + d$ olsun; $u \neq v$ olur, dolayısıyla $(u - v)^2 > 0$, bu da $u^2 + v^2 > 2uv$ verir. Böylece, $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv > 4uv$. Buradan $(a + b + c + d)^2 > 4(a + c)(b + d)$ sonucu çıkar ve $(a + c)^2 \ge 4ac$, $(b + d)^2 \ge 4bd$ olduğundan, $(a + b + c + d)^4 > 4^2(a + c)^2(b + d)^2 > 4^4abcd$ olur, bu da (1) eşitsizliğini verir ve lemmanın kanıtını tamamlar. Şimdi pozitif bir m tam sayısı için $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = m$ denkleminin pozitif x, y, z, t tam sayılarında bir çözümü olduğunu varsayalım. Bu terimlerin çarpımı 1'e eşittir. Eğer hepsi 1'e eşit olsaydı, o zaman $m = 4$ olurdu. Böylece, eğer m, 4'ten küçük pozitif bir tam sayı ise, o zaman x/y, y/z, z/t ve t/x pozitif rasyonel sayılarının dördü de eşit değildir ve lemmaya göre $[\frac{1}{4}(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x})]^4 > \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{t} \cdot \frac{t}{x} = 1$ olur, bu da $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} > 4$ anlamına gelir. Böylece, $m < 4$ pozitif tam sayıları için denklemimizin pozitif tam sayı x, y, z, t çözümü yoktur ve $m = 4$ için sadece x/y, y/z, z/t ve t/x sayılarının dördünün de eşit olduğu, dolayısıyla 1'e eşit olduğu çözümü vardır, bu da $x = y = z = t$ anlamına gelir. Böylece, $m = 4$ için, denklemimizin pozitif x, y, z, t tam sayılarında sonsuz sayıda çözümü vardır ve bunların hepsi keyfi pozitif x tam sayısı seçilip $y = z = t = x$ koyarak elde edilir.

[160] $x \le 4$ olmalıdır, çünkü $x \ge 5$ için, $x \le y \le z \le t$ göz önüne alındığında, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \le \frac{4}{5} < 1$ olurdu. Açıkça, $x \ge 2$ de olmalıdır. Böylece, sadece üç durumu, yani $x = 2$, 3 ve 4'ü dikkate almak kalır. Önce $x = 2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$ (1) denklemine sahibiz. $y \le z \le t$ göz önüne alındığında $\frac{3}{y} \ge \frac{1}{2}$ elde ederiz, bu da $y \le 6$ verir; öte yandan, (1) ile $\frac{1}{y} > \frac{1}{2}$ olur, dolayısıyla $y \ge 3$. Böylece, sadece $y = 3, 4, 5$ veya 6 olabilir. Eğer $y = 3$ ise, $\frac{1}{6} = \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \le \frac{2}{z}$ olur, bu $z \le 12$ verir ve $\frac{1}{6} > \frac{1}{z}$ olduğundan, z sayısı sadece 7, 8, 9, 10, 11 veya 12 değerlerini alabilir. $z = 7$ için $\frac{1}{t} = \frac{1}{42}$ veya $t = 42$ olur, bu da denklemimizin $x = 2$, $y = 3$, $z = 7$, $t = 42$ çözümünü verir. $z = 8$ için $\frac{1}{t} = \frac{1}{24}$ veya $t = 24$ olur, bu da denklemimizin $x = 2$, $y = 3$, $z = 8$, $t = 24$ çözümünü verir. $z = 9$ için $\frac{1}{t} = \frac{1}{18}$ olur, dolayısıyla $t = 18$, bu da denklemimizin $x = 2$, $y = 3$, $z = 9$, $t = 18$ çözümünü verir. $z = 10$ için $\frac{1}{t} = \frac{1}{15}$ veya $t = 15$ elde ederiz, bu da denklemimizin $x = 2$, $y = 3$, $z = 10$, $t = 15$ çözümünü verir. $z = 11$ için

161. Her s pozitif tam sayısı için $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_s}=1$ denkleminin sonlu sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[161]

$\frac{1}{t}=\frac{5}{66}$ olur, bu t'nin tam sayı değerine yol açmaz ve denklemimizin tam sayı çözümü yoktur. $z=12$ için $\frac{1}{t}=\frac{1}{12}$ veya $t=12$ olur, bu da denklemimizin $x=2$, $y=3$, $z=12$, $t=12$ çözümünü verir. Eğer $y=4$ ise, $\frac{1}{4}=\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\le\frac{2}{z}$ olur, dolayısıyla $z\le 8$ ve $\frac{1}{4}>\frac{1}{z}$ olduğundan $z>4$, z sayısı sadece 5, 6, 7 veya 8 değerlerini alabilir. $z=5$ için $\frac{1}{t}=\frac{1}{20}$ veya $t=20$ olur, bu da denklemimizin $x=2$, $y=4$, $z=5$, $t=20$ çözümünü verir. $z=6$ için $\frac{1}{t}=\frac{1}{12}$ veya $t=12$ olur, bu da denklemimizin $x=2$, $y=4$, $z=6$, $t=12$ çözümünü verir. $z=7$ için $\frac{1}{t}=\frac{3}{28}$ olur, bu t'nin tam sayı değerine yol açmaz ve denklemimizin tam sayı çözümü yoktur. $z=8$ için $\frac{1}{t}=\frac{1}{8}$ veya $t=8$ olur, bu da denklemimizin $x=2$, $y=4$, $z=8$, $t=8$ çözümünü verir. Eğer $y=5$ ise, $\frac{3}{10}=\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\le\frac{2}{z}$ veya $z\le\frac{20}{3}$, yani $z\le 6$ olur, dolayısıyla $z\ge y=5$ olduğundan, z'nin sadece 5 veya 6 değerlerini alabileceğini görürüz. $z=5$ için $\frac{1}{t}=\frac{1}{10}$ veya $t=10$ olur, bu da denklemimizin $x=2$, $y=5$, $z=5$, $t=10$ çözümünü verir. $z=6$ için $\frac{1}{t}=\frac{2}{15}$ olur, bu t'nin tam sayı değerine yol açmaz ve denklemimizin çözümü yoktur. Eğer $y=6$ ise, $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{t}\le\frac{2}{2}$ olur, bu $z\le 6$ verir ve $z\ge y=6$ olduğundan $z=6$ olmalıdır ve sonuç olarak $t=6$, bu da $x=2$, $y=6$, $z=6$, $t=6$ çözümüne yol açar. $x=2$ durumunun değerlendirmesini tamamladık, (1) denkleminin $y\le z\le t$ olmak üzere sadece 10 pozitif tam sayı y, z, t çözümü olduğunu gösterdik, yani 3, 7, 42; 3, 8, 24; 3, 9, 18; 3, 10, 15; 3, 12, 12; 4, 5, 20; 4, 6, 12; 4, 8, 8; 5, 5, 10 ve 6, 6, 6. Şimdi $x=3$ olduğunu varsayalım. O zaman $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{2}{3}$ denklemine sahibiz ve $y\le z\le t$ ile $\frac{3}{y}\ge\frac{2}{3}$ veya $y\le\frac{9}{2}$ elde ederiz, bu da $y\le 4$ anlamına gelir. $3=x\le y$ olduğundan, y için olası değerler 3 ve 4'tür. Eğer $y=3$ ise, o zaman $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{3}$, bu da $\frac{2}{z}\ge\frac{1}{3}$ veya $z\le 6$ anlamına gelir ve $\frac{1}{z}<\frac{1}{3}$ veya $z>3$ olduğundan, z için olası değerler sadece 4, 5 ve 6'dır. $z=4$ için $t=12$ olur, bu da denklemimizin $x=3$, $y=3$, $z=4$, $t=12$ çözümünü verir. $z=5$ için $t=15/2$ elde ederiz, bu da x, y, z, t tam sayılarında bir çözüme yol açmaz. $z=6$ için $t=6$ elde ederiz, bu da denklemimizin $x=3$, $y=3$, $z=6$, $t=6$ çözümünü verir. Eğer $y=4$ ise, $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{5}{12}\le\frac{2}{z}$ olur, bu $z\le\frac{24}{5}<5$ anlamına gelir ve $z\ge y=4$ olduğundan $z=4$ olmalıdır ve sonuç olarak $t=6$, bu da denklemimizin $x=3$, $y=4$, $z=4$, $t=6$ çözümünü verir. Şimdi $x=4$ olduğunu varsayalım. O zaman $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{3}{4}$ denklemine sahibiz, bu da $y\le z\le t$ ile $\frac{3}{4}\le\frac{3}{y}$ veya $y\le 4$ anlamına gelir ve $y\ge x=4$ olduğundan, sadece $y=4$ olabilir. Bu $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}\le\frac{2}{z}$ veya $z\le 4$'e yol açar ve $z\ge y=4$ olduğundan $z=4$ olmalıdır. Bu da $t=4$ anlamına gelir ve $x=4$, $y=4$, $z=4$, $t=4$ çözümünü elde ederiz. Böylece tüm olası durumları tükettik, bu da denklemimizin $x\le y\le z\le t$ olmak üzere 14 pozitif tam sayı x, y, z, t çözümü olduğu sonucuna götürür, yani 2, 3, 7, 42; 2, 3, 8, 24; 2, 3, 9, 18; 2, 3, 10, 15; 2, 3, 12, 12; 2, 4, 5, 24; 2, 4, 6, 12; 2, 4, 8, 8; 2, 5, 5, 10; 2, 6, 6, 6; 3, 3, 4, 12; 3, 3, 6, 6; 3, 4, 4, 6; ve 4, 4, 4, 4. **NOT.** Ele alınan denklemler düzlemin düzgün çokgenlerle kaplanması problemiyle bağlantılı olarak ortaya çıkar; bkz [25, s. 31 ve devamı].

[161] Her pozitif s tam sayısı için denklemimizin pozitif tam sayılarda en az bir çözümü vardır, yani $x_1=x_2=\ldots=x_s=s$. Her pozitif s tam sayısı için denklemimizin sadece sonlu sayıda çözümü olduğunu kanıtlamak için, daha genel bir teoremi kanıtlayacağız; her rasyonel w ve her pozitif s tam sayısı için $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}=w$ denkleminin pozitif $x_1,x_2,\ldots,x_s$ tam sayılarında sonlu sayıda çözümü olduğunu ileri süren teoremi. Kanıt, s'ye göre tümevarımla ilerleyecektir. Teorem $s=1$ için açıktır. Şimdi s herhangi bir pozitif tam sayı olsun ve teoremin s sayısı için doğru olduğunu varsayalım. Pozitif $x_1,x_2,\ldots,x_s,x_{s+1}$ tam sayılarının $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}=u$ (1) denklemini sağladığını varsayalım, burada u verilmiş bir rasyonel sayıdır, açıkça pozitiftir. $x_1\le x_2\le\ldots\le x_s\le x_{s+1}$ olduğunu varsayabiliriz. (1)'den $(s+1)/x_1\ge u$ olduğu sonucu çıkar, bu da $x_1\le(s+1)/u$ anlamına gelir; böylece, x_1 sayısı sadece sonlu sayıda pozitif tam sayı değeri alabilir. Şimdi x_1 olarak bu değerlerden herhangi birini alalım; o zaman geri kalan s sayı $x_2,x_3,\ldots,x_s,x_{s+1}$, $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_s}+\frac{1}{x_{s+1}}=u-\frac{1}{x_1}$ (2) denklemini sağlayacaktır, burada, verilmiş bir x_1 için, sağ taraf rasyoneldir. Sonuç olarak, teoremimizin s sayısı için doğruluğunun tümevarım varsayımına göre, bu denklemin pozitif $x_2,x_3,\ldots,x_s,x_{s+1}$ tam sayılarında sonlu ≥ 0 sayıda çözümü olduğu sonucu çıkar. x_1 sadece sonlu sayıda değer alabildiğinden, teorem $s+1$ sayısı için de geçerlidir. Bu kanıtı tamamlar.

162. Her $s \geq 2$ tam sayısı için $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_s} = 1$ denkleminin $x_1 < x_2 < \cdots < x_s$ eşitsizliklerini sağlayan bir pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız. Bu çözümlerin sayısını I_n ile gösterirsek, $s = 3, 4, \ldots$ için $I_{s+1} > I_s$ olduğunu gösteriniz.[162]

163. s, 2'den farklı pozitif tam sayı ise, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_s} = 1$ denkleminin üçgen sayıları ile (yani $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ şeklinde olan sayılar) çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[163]

164. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.[164]

165. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_s} = 1$ denkleminin en az bir pozitif tam sayı çözümünün bulunmasını sağlayan tüm s pozitif tam sayılarını bulunuz.[165]

---

[162] $s = 3$ için denklemimizin artan pozitif tam sayılarda bir çözümü olduğunu kolayca kontrol ederiz, yani $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$. Eğer bir $s \geq 3$ tam sayısı için $x_1 < x_2 < \ldots < x_s$ pozitif tam sayıları denklemimizi sağlıyorsa, o zaman $s \geq 3$ göz önüne alındığında $x_1 > 1$ ve $2 < 2x_1 < 2x_2 < \ldots < 2x_s$ olur; böylece $t_1 = 2$, $t_2 = 2x_1$, $t_3 = 2x_2, \ldots, t_s = 2x_{s-1}, t_{s+1} = 2x_s$ sayıları artan bir pozitif tam sayı dizisi oluşturur ve $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_s} + \frac{1}{t_{s+1}} = 1$ (1) denklemini sağlar. Bu şekilde, (1) denkleminin artan pozitif $t_1, t_2, \ldots, t_s, t_{s+1}$ tam sayılarında 1 çözümünü elde ederiz ve sonuç olarak $l_{s+1} \geq l_s$. Böylece, her $s \geq 3$ tam sayısı için $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_s} = 1$ denkleminin artan pozitif $x_1, x_2, \ldots, x_s$ tam sayılarında en az bir çözümü vardır. $s = 3$ için, denklemin artan pozitif tam sayılarda sadece bir çözümü vardır, çünkü $x_1 > 1$ olmalıdır, dolayısıyla $x_1 \geq 2$ ve eğer $x_1 \geq 3$ olsaydı, $x_2 \geq 4$, $x_3 \geq 5$ olurdu, ki bu $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1$ olduğundan imkansızdır. Bu nedenle, $x_1 = 2$ olmalıdır, bu da $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}$ verir. $x_2 > x_1 = 2$ olmalıdır, eğer $x_2 = 3$ ise $x_3 = 6$ olur. Eğer $x_2 \geq 4$ ise $x_3 \geq 5$ olur. Bu nedenle $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, dolayısıyla $x_3 = 6$ ve sonuç olarak $l_3 = 1$. Öte yandan, $l_4 > 1$ çünkü $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 1$ denkleminin pozitif tam sayılarda 2, 3, 7, 42 ve 2, 3, 8, 24 çözümleri (ve ayrıca başka çözümleri) vardır. Bu nedenle $s \geq 4$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{s-1}} = 1$ denkleminin artan pozitif $x_1 < x_2 < \ldots < x_{s-1}$ tam sayılarında en az bir çözümü vardır ve o zaman $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6x_1$, $t_4 = 6x_2, \ldots, t_{s+1} = 6x_{s-1}$ sayıları artan pozitif tam sayılar olacak ve (1) denklemini sağlayacaktır. Bu çözüm, daha önce elde edilen l_s çözümün her birinden farklı olacaktır, çünkü orada tüm sayılar çiftti, burada ise 3 sayısı tektir. Böylece, $l_{s+1} \geq l_s + 1$ olur, dolayısıyla $s \geq 3$ için $l_{s+1} > l_s$, ki bu kanıtlanması gerekendi.

[163] $t_n = n(n+1)/2$ n'inci üçgensel sayıyı göstersin. Kolayca kontrol ederiz ki $\frac{1}{t_1} = 1$, $\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_2} = 1$, $\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_3} = 1$. Böylece, s'nin ≥ 5 bir tam sayı olduğunu varsaymak yeterlidir. Eğer s tek ise, yani $s = 2k - 1$ (k bir tam sayı ≥ 3), o zaman $\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \ldots + \frac{1}{t_{k-1}} + \frac{k+1}{t_k} = \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{2}{(k-1)k} + \frac{2}{k} = 2[(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})] + \frac{2}{k} = 1$ olur ve sol taraf $(k-2) + (k+1) = 2k - 1 = s$ üçgensel sayının terslerinin toplamıdır. Eğer s çift ise, yani $s = 2k$ (k bir tam sayı ≥ 3), o zaman $k = 3$ durumunda $6/t_3 = 1$ olur, $k > 3$ durumunda ise $\frac{2}{t_3} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} + \ldots + \frac{1}{t_{k-1}} + \frac{k+1}{t_k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{2}{(k-1)k} + \frac{2}{k} = 1$ ve sol taraf $(k-1) + (k+1) = 2k = s$ üçgensel sayının terslerinin toplamıdır.

[164] Açıkça, denklemimizi sağlayan pozitif x, y, z, t tam sayılarından hiçbiri 1 olamaz. Hiçbiri ≥ 3 de olamaz, çünkü eğer örneğin $x \geq 3$ ise, o zaman $y \geq 2$, $z \geq 2$, $t \geq 2$ ile $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{9} + \frac{3}{4} = \frac{31}{36} < 1$ olurdu; bu imkansızdır. Böylece, $x = y = z = t = 2$ olmalıdır, ki bu denklemimizin pozitif tam sayılardaki tek çözümüdür.

[165] Bunlar 1, 4 ve tüm $s \geq 6$ tam sayılarıdır. $s = 1$ için, $x_1 = 1$ açık bir çözümümüz var. $s = 2$ ve $s = 3$ için, denklemimizin pozitif tam sayılarda çözümü yoktur, çünkü bu sayılar > 1, dolayısıyla ≥ 2 olmak zorunda kalırdı, oysa bu tür x_1, x_2, x_3 sayıları için $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$ ve $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \leq \frac{3}{4} < 1$ olur. $s = 4$ için, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ çözümümüz var. $s = 5$ için,

166. 1^2 sayısının sonlu sayıda artan pozitif tam sayının karelerinin terslerinin toplamı şeklinde gösteriniz.[166]

167. Her m pozitif tam sayısı ve tüm yeterince büyük s pozitif tam sayıları için $\frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} + \cdots + \frac{1}{x_s^m} = 1$ denkleminin en az bir pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[167]

168. Her s pozitif tam sayısı için

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_s^2} = \frac{1}{x_{s+1}^2}$$

---

denklemimizin pozitif tam sayılarda çözümü yoktur. Aslında, eğer $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ sayıları denklemimizi sağlasaydı, $x_1 \geq 2$ olurdu ve $x_1 < 3$ olurdu, çünkü $x_1 \geq 3$ durumunda $\frac{1}{x_1^2} + \ldots + \frac{1}{x_5^2} \leq \frac{5}{9} < 1$ olur. Bu nedenle $x_1 = 2$ olmalıdır ve sonuç olarak, $\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{3}{4}$ olur, bu da $4/x_2^2 \geq 3/4$ yani $x_2^2 \leq 16/3 < 6$ anlamına gelir. $x_2 < 3$ olduğundan $x_2 = 2$, bu da $\frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{1}{2}$ verir. Buradan $x_3 < 3$ sonucu çıkar. $x_3 < 3$ olduğundan $x_3 = 2$, bu da $\frac{1}{x_4^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{1}{4}$ verir. $x_4 \geq 2$ ve $x_5 \geq 2$ olduğundan $x_4 = 2, x_5 = 2$ olmalıdır. $s = 6$ için, denklemimizin $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = 3$, $x_6 = 6$ çözümü vardır. $s = 7$ için, denklemimizin $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 4$ çözümü vardır. $s = 8$ için, denklemimizin $x_1 = x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = 3$, $x_6 = 7$, $x_7 = 14$, $x_8 = 21$ çözümü vardır. Şimdi, bir pozitif s tam sayısı için $\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \ldots + \frac{1}{t_s^2} = 1$ denkleminin pozitif $t_1, \ldots, t_s$ tam sayılarında çözümü olduğunu varsayalım. $1/t_s^2 = 4/(2t_s)^2$ olduğundan, $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_{s+3}^2} = 1$ denkleminin pozitif $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2, \ldots, x_{s-1} = t_{s-1}, x_s = x_{s+1} = x_{s+2} = x_{s+3} = 2t_s$ tam sayılarında bir çözümü vardır. Böylece, eğer denklemimiz bir pozitif s tam sayısı için pozitif tam sayılarda çözülebilirse, o zaman $s+3$ için de çözülebilirdir ve $s = 6, 7$ ve 8 için çözülebilir olduğundan, her $s \geq 6$ tam sayısı için (ve ek olarak $s = 1$ ve $s = 4$ için) çözülebilirdir. **NOT.** Bir rasyonel r sayısının, artan bir doğal sayı dizisinin karelerinin terslerinin sonlu bir toplamı olarak temsil edilebilmesinin ancak ve ancak $0 < r < \frac{1}{6}\pi^2 - 1$ veya $1 \leq r < \frac{1}{6}\pi^2$ olması gerektiği kanıtlanabilir. Bkz [36, teorem 5].

[166] $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{36^2} + \frac{1}{45^2} + \frac{1}{60^2}$. Bu eşitliği kontrol etmek için $\frac{1}{7^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{21^2} = \frac{1}{6}$ ve $\frac{1}{45^2} + \frac{1}{60^2} = \frac{1}{36^2}$ olduğunu not etmek ve sonra tüm kesirleri ortak payda 36^2'ye indirgemek gerekir. **NOT.** 1/2 sayısının pozitif tam sayıların terslerinin karelerinin on ikiden az toplamı olarak temsil edilip edilemeyeceğini bilmiyorum.

[167] m verilmiş bir pozitif tam sayı olsun. $s = 2^m$ için, denklemimizin pozitif $x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 2$ tam sayılarında bir çözümü vardır. Şimdi a verilmiş bir pozitif tam sayı olsun ve denklemimizin s pozitif tam sayısı için pozitif tam sayılarda çözülebilir olduğunu varsayalım. Böylece, $\frac{1}{t_1^m} + \frac{1}{t_2^m} + \ldots + \frac{1}{t_s^m} = 1$ olacak şekilde pozitif $t_1, t_2, \ldots, t_s$ tam sayıları vardır ve $1/t_s^m = a^m/(at_s)^m$ olduğundan, $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2, \ldots, x_{s-1} = t_{s-1}$, $x_s = x_{s+1} = \ldots = x_{s+a^m-1} = at_s$ için $\frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} + \ldots + \frac{1}{x_{s+a^m-1}} = 1$ olacaktır. Böylece, eğer denklemimiz bir pozitif s tam sayısı için pozitif tam sayılarda çözülebilirse, o zaman $s + a^m - 1$ için ve daha genel olarak $s + (a^m - 1)k$ için (k keyfi pozitif tam sayı) pozitif tam sayılarda çözülebilirdir. $a = 2$ ve $a = 2^m - 1$ alarak ($s = 2^m$ için) denklemimizin $s = 2^m + (2^m - 1)k + [(2^m - 1)^m - 1]l$ (burada k ve l keyfi pozitif tam sayılardır) formundaki her s için pozitif tam sayılarda bir çözümü olduğunu görürüz. $2^m - 1$ ve $(2^m - 1)^m - 1$ sayıları açıkça aralarında asaldır. Sierpiński [37, s. 29, Sonuç 2]'de kanıtlanan teoreme göre, her yeterince büyük pozitif tam sayının $(2^m - 1)k + [(2^m - 1)^m - 1]l$ formunda olduğu (burada k ve l pozitif tam sayılardır) sonucu çıkar. Bu, her yeterince büyük pozitif tam sayının $2^m + (2^m - 1)k + [(2^m - 1)^m - 1]l$ formunda olduğunu, dolayısıyla bu tür her tam sayı için denklemimizin pozitif tam sayılarda çözülebilir olduğunu ima eder.

denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[168]

169. Her $s \geq 3$ pozitif tam sayısı için

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \cdots + \frac{1}{x_s^3} = \frac{1}{x_{s+1}^3}$$

denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[169]

170. $x + y + z = 3$ ve $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ denklemler sisteminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.[170]

171. Hangi n pozitif tam sayıları için $3x + 5y = n$ denkleminin en az bir tane pozitif tam sayı çözümü bulunduğunu araştırın ve n sonsuzluğa gittiğinde

---

[168] Açıkça, denklemimizin her pozitif s tam sayısı için pozitif $x_1, x_2, \ldots, x_s$ tam sayılarında en az bir çözümü olduğunu göstermek yeterlidir, çünkü böyle her çözüm pozitif bir tam sayı ile çarpıldığında yine bir çözüm olur. $s = 1$ için, $x_1 = x_2 = 1$ açık bir çözümümüz var. $s = 2$ için, $\frac{1}{15^2} + \frac{1}{12^2} = \frac{1}{20^2}$ çözümümüz var. Şimdi s keyfi bir pozitif tam sayı olsun ve denklemimizin $\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \ldots + \frac{1}{t_s^2} = \frac{1}{t_{s+1}^2}$ pozitif tam sayılarda bir çözümü olduğunu varsayalım. $\frac{1}{(12t_{s+1})^2} = \frac{1}{(15t_{s+1})^2} + \frac{1}{(20t_{s+1})^2}$ olduğundan, $x_i = 12t_i$ ($i = 1, \ldots, s-1$ için), $x_s = 15t_s$, $x_{s+1} = 20t_s$, $x_{s+2} = 12t_{s+1}$ pozitif tam sayıları $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_s^2} + \frac{1}{x_{s+1}^2} = \frac{1}{x_{s+2}^2}$ denklemini sağlar ve kanıt tümevarımla devam eder.

[169] Her $s \geq 3$ tam sayısı için denklemimizin pozitif $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ tam sayılarında en az bir çözümü olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $s = 3$ için, $\frac{1}{12^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{20^3} = \frac{1}{10^3}$ çözümü vardır (bu, $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ eşitliğinin her iki tarafını 60^3 ile bölerek elde edilebilir), $s = 4$ için ise $\frac{1}{(5\cdot7\cdot13)^3} + \frac{1}{(5\cdot12\cdot13)^3} + \frac{1}{(7\cdot12\cdot13)^3} + \frac{1}{(5\cdot7\cdot12\cdot13)^3} = \frac{1}{(5\cdot7\cdot12)^3}$ çözümünü elde ederiz (bu, $1^3 + 5^3 + 7^3 + 12^3 = 13^3$. Şimdi $s, \geq 3$ verilmiş bir tam sayıyı göstersin ve denklemimizin bu s değeri için pozitif tam sayılarda bir çözümü olduğunu varsayalım. Böylece, $\frac{1}{t_1^3} + \frac{1}{t_2^3} + \ldots + \frac{1}{t_s^3} = \frac{1}{t_{s+1}^3}$ olacak şekilde pozitif $t_1, t_2, \ldots, t_s, t_{s+1}$ tam sayıları vardır. $x_i = 10t_i$ ($i = 1, 2, \ldots, s-1$ için) ve $x_s = 12t_s$, $x_{s+1} = 15t_s$, $x_{s+2} = 20t_s$, $x_{s+3} = 10t_{s+1}$ koyarak, $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \ldots + \frac{1}{x_{s+2}^3} = \frac{1}{x_{s+3}^3}$ elde ederiz, dolayısıyla eğer denklemimiz bir s için pozitif tam sayılarda çözülebilirse, $s + 2$ için de çözülebilirdir. $s = 3$ ve $s = 4$ için çözülebilir olduğundan, her $s \geq 3$ için çözülebilir olduğu sonucuna varırız, ki bu kanıtlanması gerekendi. **NOT.** $s = 2$ için denklemimizin pozitif tam sayılarda çözümü olmadığı temel yöntemlerle kanıtlanabilir ancak kanıt zordur.

[170] A. Schinzel tarafından bulunan çözüm. $(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = 3(x+y)(x+z)(y+z)$ (1) özdeşliğine sahibiz. Böylece, eğer x, y ve z, $x+y+z = 3$ ve $x^3+y^3+z^3 = 3$ olacak şekilde tam sayılarsa, o zaman (1) ile $24 = 3(x+y)(x+z)(y+z)$ $8 = (x+y)(x+z)(y+z) = (3-x)(3-y)(3-z)$ (2) elde ederiz ve $x+y+z = 3$ göz önüne alındığında $6 = (3-x)+(3-y)+(3-z)$ (3) olur. (3) ilişkisi, $3-x$, $3-y$, $3-z$ sayılarının ya üçünün de çift olduğunu ya da sadece birinin çift olduğunu ima eder. İlk durumda, (2) göz önüne alındığında, bu sayıların hepsi mutlak değer olarak 2'ye eşittir; böylece, (3) ile, 2'ye eşittirler ve o zaman $x = y = z = 1$. İkinci durumda, (2) göz önüne alındığında, $3-x$, $3-y$, $3-z$ sayılarından biri mutlak değer olarak 8'e eşittir ve geri kalanlar mutlak değer olarak 1'e eşittir; böylece, (3) göz önüne alındığında, biri 8'e eşittir ve geri kalanlar -1'e eşittir. Bu $x = -5$, $y = z = 4$, veya $x = y = 4$, $z = -5$, veya son olarak $x = 4$, $y = -5$, $z = 4$ verir. Böylece, denklem sistemimizin sadece dört tam sayı çözümü vardır, yani $x, y, z = 1, 1, 1; -5, 4, 4; 4, -5, 4; 4, 4, -5$. Bkz Problem E 1355, The American Mathematical Monthly, 69 (1962), 1009. **NOT.** $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ denkleminin yukarıda verilen dördü dışında x, y, z tam sayılarında başka çözümleri olup olmadığını bilmiyoruz.

bu çözüm sayısının da sonsuzluğa gittiğini kanıtlayınız.[171]

172. $n^x + n^y = n^z$ denkleminin tüm n, x, y, z pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.[172]

173. Her (m, n) pozitif tam sayı ikilisi için tek bir $x = n, x = m$ pozitif tam sayı çözümü olan, a, b, c tam sayılar olmak üzere bir $ax + by = c$ denkleminin bulunduğunu kanıtlayınız.[173]

174. Her m pozitif tam sayısı için tam m tane pozitif tam sayı çözümü olan, a, b, c tam sayılar olmak üzere bir $ax + by = c$ denkleminin bulunduğunu kanıtlayınız.[174]

---

[171] Açıkça $n \geq 8$ olmalıdır. Eğer $n = 3k$ (k, > 5 bir tam sayı) ise, o zaman $x = k - 5$, $y = 3$ için $3x + 5y = n$ olur. Eğer $n = 3k + 1$ (k, > 3 bir tam sayı) ise, o zaman $x = k - 3$ ve $y = 2$ için $3x + 5y = n$ olur. Son olarak, eğer $n = 3k + 2$ (k, > 1 bir tam sayı) ise, o zaman $x = k - 1$, $y = 1$ için $3x + 5y = n$ olur. Buradan, $n > 15$ olan her n için denklemimizin en az bir pozitif tam sayı x, y çözümü olduğu sonucu çıkar. Geriye 8, 9, 10, 12 ve 15 sayılarını incelemek kalır. $n = 8$ için, $x = 1$, $y = 1$ çözümümüz var. $n = 9, 12$ ve 15 için, denklemimizin çözümü yoktur, çünkü $3 \mid 5y$ olurdu, dolayısıyla $3 \mid y$ ve $15 \mid 5y$, buradan $n = 3x + 5y > 5y \geq 15$ olur. $n = 10$ için, denklemimizin pozitif tam sayılarda çözümü yoktur, çünkü o zaman $5 \mid 3x$, dolayısıyla $5 \mid x$ ve $15 \mid 3x$, buradan $n = 3x + 5y > 15$ olur. Böylece, denklemimizin 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12 ve 15 dışındaki tüm pozitif n tam sayıları için pozitif tam sayılarda x, y çözümü vardır. Şimdi m keyfi bir pozitif tam sayı olsun ve n, $40m$'den büyük bir tam sayı olsun. $3x + 5y = n$ denkleminin x_0, y_0 çözümü vardır ve bu sayılardan en az biri $> 5m$ olmalıdır, çünkü $x_0 \leq 5m$, $y_0 \leq 5m$ durumunda $3x_0 + 5y_0 \leq 8 \cdot 5m = 40m < n$ olurdu. Eğer $x_0 > 5m$ ise, o zaman $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ için $x = x_0 - 5k$ ve $y = y_0 + 3k$ sayıları pozitif tam sayılardır ve $3x + 5y = 3x_0 + 5y_0 = n$ denklemini sağlarlar. Eğer $y_0 > 5m$ ise, o zaman $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ için $x = x_0 + 5k$ ve $y = y_0 - 3k$ sayıları pozitif tam sayılardır ve $3x + 5y = n$ denklemini sağlarlar. Böylece, $n > 40m$ için bu denklemin pozitif tam sayılarda x, y çözümü m'den fazladır, bu da bu tür çözümlerin sayısının n ile birlikte sonsuza gittiğini gösterir.

[172] $n = 2$, $y = x$, $z = x + 1$, burada x keyfi bir pozitif tam sayıdır. Gerçekten, pozitif x tam sayıları için $2^x + 2^x = 2^{x+1}$ olur. Öte yandan, pozitif n, x, y ve z tam sayıları için $n^x + n^y = n^z$ olduğunu varsayalım. $x \leq y \leq z$ olduğunu varsayabiliriz. $n = 1$ olamaz, dolayısıyla $n \geq 2$ olur. $n^x = n^z - n^y = n^x(n^{z-x} - n^{y-x})$ olur, bu da $n^{z-x} - n^{y-x} = 1$ anlamına gelir. Eğer $y > x$ olsaydı, o zaman $n \mid 1$ olurdu ki bu imkansızdır. Böylece $y = x$ olmalıdır, dolayısıyla $n^{z-x} = 2$, bu da $n = 2$, $z - x = 1$ verir. Bu nedenle $n = 2$, $y = x$, $z = x + 1$ elde ederiz. **NOT.** $n^x + n^y = n^z$ denklemi, Fermat denklemi $x^n + y^n = z^n$'den üsler ve tabanların rollerinin tersine çevrilmesiyle elde edilir. Bkz Mem. Real. Acad. Sci. Art. Barcelona, 34 (1961), 17-25.

[173] m ve n iki verilmiş pozitif tam sayı olsun ve a ve b, $m + n$'den büyük iki farklı asal sayı olsun. $c = am + bn$ koyalım. $x = m$, $y = n$ sistemi açıkça $ax + by = c$ denklemini sağlar. Bu denklemi sağlayan başka bir x, y sistemi olduğunu varsayalım. $x \geq m$, $y > n$ veya $x > m$, $y \geq n$ olamaz, çünkü bu durumda $ax + by > am + bn = c$ olurdu. Böylece, ya $x < m$ ya da $y < n$ olmalıdır. Eğer $x < m$ ise, o zaman $m - x$, m'den küçük pozitif bir tam sayıdır ve $ax + by = am + bn$ göz önüne alındığında $by = a(m - x) + bn$ olur, bu da $b \mid a(m - x)$ anlamına gelir. a ve b farklı asal sayılar olduğundan, $b \mid m - x$ sonucu çıkar, ki bu $m > b$ tanımı gereği imkansızdır. Benzer şekilde $y < n$ olamayacağını kanıtlarız. **NOT.** Herhangi iki pozitif tam sayı sistemi için, bu iki sistemi tek pozitif tam sayı çözümü olarak kabul eden tam sayı a, b ve c katsayılı bir $ax + by = c$ lineer denkleminin var olmadığı kolayca fark edilebilir. Öte yandan, tam sayı katsayılı ikinci dereceden böyle bir denklemin her zaman var olduğunu kolayca kanıtlayabiliriz.

[174] Örneğin, $x + y = m + 1$ denklemi, pozitif x, y tam sayılarında tam olarak m çözüme sahiptir,

175. m verilen bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = 0$$

denkleminin tam m tane pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[175]

176. $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.[176]

177. Her n pozitif tam sayısı için

$$(x+1)^3 + (x+2)^3 + \cdots + (x+n)^3 = y^3$$

denkleminin tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[177]

178. $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 = (x+5)^3$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.[178]

179. $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 = (x+10)^3$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.[179]

---

yani $x = k$, $y = m - k + 1$, burada $k = 1, \ldots, m$. **NOT.** Tamsayılarda x, y çözümlerinin sonlu ve > 0 sayıda olduğu bir $ax + by = c$ lineer denklemi olmadığı bilinmektedir.

[175] $f(x,y) = x^2+y^2+2xy-mx-my-m-1$ için, $f(x,y) = (x+y-m-1)(x+y+1)$ özdeşliğine sahibiz. Pozitif x ve y tam sayıları için $x+y+1 > 0$ olduğundan, $f(x,y) = 0$ ancak ve ancak $x+y-m-1 = 0$ ise olabilir; Problem 174'ün çözümünden bu denklemin pozitif x ve y tam sayılarında tam olarak m çözümü olduğu sonucu çıkar. **NOT.** Bu problemde ele alınan iki değişkenli polinom indirgenebilirdir. Her pozitif m tam sayısı için, $F(x,y) = 0$ denkleminin pozitif x, y tam sayılarında tam olarak m çözümü olacak şekilde, tam sayı katsayılı ikinci dereceden indirgenemez bir $F(x,y)$ polinomu olup olmadığı sorulabilir. Her pozitif m tam sayısı için $x^2 + y^2 = a_m$ denkleminin tam olarak m pozitif tam sayı x, y çözümüne sahip olduğu bir a_m pozitif tam sayısının var olduğu kanıtlanabilir. Daha kesin olarak, $a_{2k-1} = 2 \cdot 5^{2k-2}$ ve $a_{2k} = 5^{2k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ için kanıtlanabilir, ancak kanıt kolay değildir. Ayrıca A. Schinzel'in, her pozitif m tam sayısı için x, y değişkenlerinde ikinci dereceden bir $f(x,y)$ polinomunun var olduğunu ve $f(x,y) = 0$ denkleminin tam olarak m tam sayı çözümüne sahip olduğunu kanıtladığını belirtelim. Bkz [18].

[176] $x = t + 3$ koyalım. O zaman denklemimiz $2t(t^2 + 3t + 21) = 0$. $x = t + 3$ koymak denklemi $2t(t^2 + 3t + 21) = 0$'a indirgiyor. Orijinal denklemi bilmiyoruz ama bu denklemin $t = 0$ dışında reel çözümü yok ($t^2 + 3t + 21$'in diskriminantı $9 - 84 < 0$).) denklemine indirgenir, bu denklemin reel sayılarda sadece bir çözümü vardır, yani $t = 0$. Buradan, denklemimizin tam sayılarda sadece bir çözümü olduğu sonucu çıkar, yani $x = 3$. **NOT.** $x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \ldots + (x+(n-1)r)^3 = (x+nr)^3$ denkleminin pozitif x, r, n tam sayılarında tek çözümünün $n = 3$, $x = 3r$ olduğu (r keyfi pozitif tam sayı) kanıtlanabilir.

[177] Eğer $n = 2k - 1$ (k pozitif tam sayı) ise, o zaman açıkça $x = -k$, $y = 0$ denklemimizin bir çözümüdür; eğer $n = 2k$ (k pozitif tam sayı) ise, o zaman $x = -k$, $y = k$ denklemimizin bir çözümüdür. **NOT.** Başka çözümler de vardır, örneğin $n = 8$ için $x = -3$, $y = 6$; $n = 25$ için $x = -11$, $y = 20$; $n = 1000$ için $x = 1333$, $y = 16830$.

[178] Bu denklemde x^3, x^2 ve x'in katsayıları 3 ile bölünebilir ve sabit terim -25'tir, ki bu 3 ile bölünemez. Buradan, denklemimizin pozitif tam sayılarda x çözümü olmadığı sonucu çıkar.

[179] $x = t + 10$ yerine koyarak denklemimizi $3t(t^2 + 40t + 230) = 0$ denklemine indirgeriz. $t^2 + 40t - 230 = 0$ denkleminin rasyonel çözümü olmadığından, $t = 0$ olmalıdır ve denklemimizin pozitif tamsayılarda tek bir çözümü vardır, o da $x = 10$'dur.

180. $y(y+1) = x(x+1)(x+2)$ denkleminin iki tane pozitif tam sayı çözümünü bulunuz.[180]

181. $1 + x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[181]

182. n, x, y, z, t pozitif tam sayılar olmak üzere $nx^2 + ny^2 + nz^2 = nt$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.[182]

183. x, y, z, t pozitif tam sayılar olmak üzere $4x + 4y + 4z = 4t$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.[183]

184. $2^m - 3^n = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.[184]

185. $3^n - 2^m = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.[185]

---

[180] $x = 1$, $y = 2$ (çünkü $2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$) ve $x = 5$, $y = 14$ (çünkü $14 \cdot 15 = 5 \cdot 6 \cdot 7$). **NOT.** L. J. Mordell, denklemimizin pozitif tamsayılarda başka çözümü olmadığını kanıtlamıştır.

[181] Çözüm, $n = 1, 2, \ldots$ için $1 + (2n)^2 + (2n^2)^2 = (2n^2 + 1)^2$ özdeşliğinden hemen elde edilir. **NOT.** Her pozitif k tamsayısı için $k + x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin x, y, z pozitif tamsayılarında sonsuz sayıda çözümü olduğunu kanıtlamak kolaydır. k tek ise çift, k çift ise tek olmak üzere x'i $> |k| + 1$ koşulunu sağlayan keyfi bir tamsayı olarak almak ve $y = \frac{k+x^2-1}{2}$, $z = \frac{k+x^2+1}{2}$ olarak belirlemek yeterlidir.

[182] n pozitif tamsayısının ve $x \leq y \leq z$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayıların $n^x + n^y + n^z = n^t$ (1) denklemini sağladığını varsayalım. $n = 1$ olamaz. $n = 2$ ise, (1)'den $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{t-x}$ elde ederiz ve $y > x$ olamaz. Dolayısıyla $y = x$ olur ve $2 + 2^{z-x} = 2^{t-x}$ olur, bu da $z - x = 1$ ve dolayısıyla $t - x = 2$ sonucunu verir. O halde, $n = 2$ ise, $y = x$, $z = x + 1$ ve $t = x + 2$ olmalıdır; tüm x pozitif tamsayıları için $2^x + 2^x + 2^{x+1} = 2^{x+2}$ olduğunu kolayca kontrol edebiliriz. Şimdi, $n \geq 3$ olduğunu varsayalım. (1) uyarınca $1 + n^{y-x} + n^{z-x} = n^{t-x}$ olur ve $n > 2$ olduğundan, $y = x$ ve $z = x$ olmalıdır. Böylece $3 = n^{t-x}$ olur, bu da $n = 3$ ve $t - x = 1$ demektir. Dolayısıyla, $n > 2$ ise, $n = 3$, $x = y = z$, $t = x + 1$ olmalıdır. Her x pozitif tamsayısı için $3^x + 3^x + 3^x = 3^{x+1}$ olduğunu kolayca kontrol ederiz. Sonuç olarak, (1) denkleminin $x \leq y \leq z$ koşulunu sağlayan n, x, y, z, t pozitif tamsayılarındaki tüm çözümleri, x keyfi bir pozitif tamsayı olmak üzere, $n = 2$, $y = x$, $z = x + 1$, $t = x + 2$ veya $n = 3$, $y = x$, $z = x$, $t = x + 1$'dir.

[183] Problem 182'nin çözümünden, $4^x + 4^y + 4^z = 4^t$ denkleminin pozitif tamsayılarda çözümü olmadığı sonucu çıkar. Bu denklemin, $x^4 + y^4 + z^4 = t^4$ denkleminde tabanlar ve üslerin rollerinin tersine çevrilmesiyle elde edildiğine dikkat edelim. Son denkleme gelince, Euler tarafından varsayıldığı gibi, x, y, z, t pozitif tamsayılarında çözümü olup olmadığı bilinmemektedir.

[184] Bu denklemin pozitif tamsayılarda tek bir çözümü vardır, o da $m = 2$, $n = 1$'dir. Gerçekten de, $3^2 \equiv 1 \pmod 8$ olduğundan, k pozitif tamsayıları için $3^{2k} + 1 \equiv 2 \pmod 8$ ve $3^{2k-1} + 1 \equiv 4 \pmod 8$ bağıntısına sahibiz, bu da gösteriyor ki, n pozitif tamsayısı için $3^n + 1$ sayısı 8'e bölünemez, dolayısıyla $m \geq 3$ tamsayıları için 2^m ile bölünemez. O halde, m ve n pozitif tamsayıları için $2^m - 3^n = 1$ ise, $m \leq 2$ olmalıdır, dolayısıyla ya $2 - 3^n = 1$'dir, ki bu imkansızdır, ya da $2^2 - 3^n = 1$'dir, bu da $m = 2$, $n = 1$ verir.

[185] Bu denklemin pozitif tamsayılarda yalnızca iki çözümü vardır, $n = m = 1$ ve $n = 2$, $m = 3$. Gerçekten de, n tek ve > 1 ise, k pozitif bir tamsayı olmak üzere $n = 2k+1$'dir ve $3^2 \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan $3^{2k+1} \equiv 3 \pmod 4$ olur, bu da $2^m = 3^n - 1 = 3^{2k+1} - 1 \equiv 2 \pmod 4$ sonucunu verir. Bu, $m \leq 1$ veya $m = 1$ demektir ve $3^n - 2^m = 1$ olduğundan $n = 1$ elde ederiz. n çift ise, k bir pozitif tamsayı olmak üzere $n = 2k$'dir, o zaman $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$ olur. İki ardışık çift sayı olan $3^k - 1$ ve $3^k + 1$, bu nedenle, 2'nin kuvvetleridir, bu da bu sayıların 2 ve 4 olduğunu gösterir, buradan $k = 1$ ve dolayısıyla $n = 2$ bulunur. Bu da $n = 2$, $m = 3$ çözümünü verir.

186. $2x + 1 = y^2$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.[186]

187. $2x + 1 = y^2$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.[187]

188. $x^2 + 2y^2 = z^2, 2x^2 + y^2 = t^2$ denklemler sisteminin x, y, z, t pozitif tam sayılar olmak üzere çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[188]

189. $[2(3x+2y+1)+1]^2 - 2(4x+3y+2)^2 = (2x+1)^2 - 2y^2$ özdeşliğini kullanarak $x^2 + (x + 1)^2 = y^2$ denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı kökünün bulunmadığını kanıtlayınız.[189]

190. $[2(7y + 12x + 6)]^2 - 3[2(4y + 7x + 3) + 1]^2 = (2y)^2 - 3(2x + 1)^2$ özdeşliğini kullanarak $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$ denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı kökünün bulunmadığını kanıtlayınız.[190]

191. $x^2 + 5y^2 = z^2$ ve $5x^2 + y^2 = t^2$ denklemler sisteminin x, y, z, t pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[191]

---

[186] x ve y pozitif tamsayıları için $2^x + 1 = y^2$ ise, o zaman $(y - 1)(y + 1) = 2^x$ olur, dolayısıyla $y > 1$ ve $y - 1 = 2^k$, $y + 1 = 2^l$ olur; burada k bir tamsayı ≥ 0 ve l, k'dan büyük bir tamsayıdır. Ayrıca, $k + l = x$'tir. Buradan $2^l - 2^k = 2$ elde edilir, bu da $k > 0$ olduğunu ve $k < l$ olduğundan $2^k \mid 2$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak, $k \leq 1$ ve $k \geq 0$ olduğundan $k = 1$ elde ederiz. Böylece, $2^l = 2^k + 2 = 4$ olur, bu da $l = 2$ sonucunu verir. Dolayısıyla, $x = k + l = 1 + 2 = 3$ olur, buradan $y^2 = 2^3 + 1 = 9$ ve $y = 3$ bulunur. Bu nedenle, $2^x + 1 = y^2$ denkleminin pozitif tamsayılarda tek bir çözümü vardır, o da $x = y = 3$'tür.

[187] Bu denklemin tek bir çözümü vardır, o da $x = y = 1$'dir. Çünkü $x > 1$ durumunda $2^x - 1$ sayısı, k pozitif bir tamsayı olmak üzere, $4k - 1$ formundadır ve hiçbir tamsayının karesi bu formda değildir, çünkü 4'e bölündüğünde ya 0 ya da 1 kalanını verir.

[188] Sistemimizin x, y, z, t pozitif tamsayılarında çözümü olduğunu varsayalım. $(x, y) = 1$ varsayabiliriz, çünkü $(x, y) = d > 1$ durumunda denklemlerimizin her iki tarafını d^2 ile bölebilirdik. Dolayısıyla, x, y sayılarından en az biri tektir. Her ikisinin de tek olması imkansızdır, çünkü bu durumda denklemlerimizin sol tarafları 4'e bölündüğünde 3 kalanını verirdi, ki bu imkansızdır, çünkü sağ taraflar karelerdir. Ancak, örneğin x çift ise, y tek olamaz, çünkü bu durumda ilk denklemin sol tarafı 4'e bölündüğünde 2 kalanını verirdi, ki bu bir kare olduğu için imkansızdır. Dolayısıyla, x ve y sayılarının her ikisi de çifttir, bu da $(x, y) = 1$ varsayımıyla çelişir.

[189] Denklemimiz, $(2x + 1)^2 - 2y^2 = -1$ denklemine denktir; bu denklemin pozitif tamsayılarda bir çözümü vardır, $x = 3$, $y = 5$. Özdeşliğimiz, x ve y pozitif tamsayıları denklemi sağlıyorsa, daha büyük sayılar olan $x_1 = 3x + 2y + 1$ ve $y_1 = 4x + 3y + 2$'nin de bu denklemi sağladığını ima eder. Buradan, bu denklemin x ve y pozitif tamsayılarında sonsuz sayıda çözümü olduğu sonucu çıkar. $x = 3$, $y = 5$ için bu şekilde $x_1 = 20$, $y_1 = 29$ elde ederiz.

[190] Denklemimiz $x = 7$, $y = 13$ için sağlanır. Bu denklem, $3x^2 + 3x + 1 = y^2$ denklemine denktir, bu da $4y^2 = 12x^2 + 12x + 4 = 3(2x + 1)^2 + 1$'e, yani $(2y)^2 - 3(2x + 1)^2 = 1$ denklemine denktir. Bu, x ve y bu denklemi sağlıyorsa, daha büyük sayılar olan $x_1 = 4y + 7x + 3$ ve $y_1 = 7y + 12x + 6$'nın da bu denklemi sağladığını ima eder. Buradan, ele alınan denklemin x, y pozitif tamsayılarında sonsuz sayıda çözümü olduğu sonucu çıkar. Örneğin, $x = 7$, $y = 13$ için $x_1 = 104$, $y_1 = 181$ elde ederiz.

[191] Kanıt (J. Browkin'e göre). Eğer sistemimizin x, y, z, t pozitif tamsayılarında bir çözümü olsaydı, $(x, y) = 1$ olan bir çözümü de olurdu. Denklemlerimizi topladığımızda $6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$ elde ederiz, bu da $3 \mid z^2 + t^2$ demektir. 3'e bölünmeyen bir tamsayının karesi 3'e bölündüğünde 1 kalanını verdiğinden, z ve t sayılarının her ikisinin de 3'e bölünmemesi imkansızdır. Ancak, $3 \mid z^2 + t^2$ olduğundan, z, t sayılarından biri 3'e bölünüyorsa, diğeri de bölünmelidir. Dolayısıyla, z ve t'nin her ikisi de 3'e bölünür, bu da $6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$

192. Problem 34'ü kullanarak $x^2+6y^2=z^2$ ve $6x^2+y^2=t^2$ denklemler sisteminin x,y,z,t pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[192]

a. $x^2+7y^2=z^2$ ve $7x^2+y^2=t^2$ denklemler sisteminin x,y,z,t pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

193. V.A. Lebesprogue teoremini kullanarak $x^2-y^3=7$ denkleminin x,y tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[193]

194. c pozitif tam sayısı tekse, $x^2-y^3=(2c)^3-1$ denkleminin x,y tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[194]

195. k pozitif tam sayı ise, $x^2+2k^2+1=y^3$ denkleminin x,y pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[195]

196. $x\leq y, x\leq z\leq t$ olmak üzere $x+y=zt$ ve $z+t=xy$ denklemler sisteminin x,y,z,t pozitif tam sayılarıyla tüm çözümlerinin bulunması ile ilgili A. Moessner problemini çözünüz. Sistemin sonsuz sayıda x,y,z,t tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[196]

---

denkleminin sağ tarafının 9'a bölünebildiğini ve $3 \mid x^2+y^2$ olduğunu gösterir; bildiğimiz gibi bu, x ve y'nin her ikisinin de 3'e bölündüğünü gösterir, ki bu da $(x,y)=1$ varsayımıyla çelişir.

[192] Denklemlerimiz $7(x^2+y^2)=z^2+t^2$ anlamına gelir. Dolayısıyla, $7\mid z^2+t^2$ olur, buradan Problem 34'e göre $7\mid z$ ve $7\mid t$ sonucunu elde ederiz. Böylece, $49\mid 7(x^2+y^2)$, bu da $7\mid x^2+y^2$ demektir, ki bu da $7\mid x$ ve $7\mid y$ anlamına gelir. Dolayısıyla, sistemimizin $(x,y)=1$ olan çözümleri olamaz; bu da, x,y,z,t pozitif tamsayılarında en az bir çözümü varsa, elbette imkansızdır. Gerçekten de, $(x,y)=d>1$ ise, $d\mid z$ ve $d\mid t$ olurdu ve x,y,z,t sayılarının her birini d ile bölmek yeterli olurdu.

a. Örneğin, $x=3$, $y=1$, $z=4$, $t=8$ çözümü vardır.

[193] y çift olsaydı, x^2 $8k+7$ formunda olurdu, ki bu imkansızdır. y tek olsaydı, $x^2+1=y^3+2^3=(y+2)[(y-1)^2+3]$ olurdu ve $y=2k+1$ olduğundan, $(2k)^2+3|(x^2+1)$ olurdu. Sol tarafın $4t+3$ formunda bir asal böleni olduğundan, x^2+1 sayısının da aynı formda bir asal böleni olurdu, ki bu ($(x,1)=1$ olduğundan) imkansızdır.

[194] $x^2+1=(2c)^3+y^3=(y+2c)(y^2-2cy+4c^2)=(y+2c)((y-c)^2+3c^2)$'ye sahibiz. $c^2\equiv 1(mod\ 8)$ olduğundan, $3c^2\equiv 3(mod\ 8)$ olur ve y tek ise, $y-c$ çifttir ve $(y-c)^2+3c^2$ $4k+3$ formundadır; dolayısıyla, bu formda bir asal böleni vardır, ki bu aynı zamanda x^2+1'in bir bölenidir, bu da imkansızdır. y çift olsaydı, $x^2=y^3+(2c)^3-1\equiv -1 \pmod 8$ olurdu, ki bu imkansızdır. Buradan, x ve y tamsayı olmak üzere x^2-y^3 formunda olmayan sonsuz sayıda pozitif tamsayı olduğu sonucu çıkar.

[195] x'in tek olduğunu varsayalım. O zaman y, $y^3\equiv 0(mod\ 8)$ formundadır, dolayısıyla $y^3-1\equiv 7(mod\ 8)$ olur ve $x^2+(2^k)^2$ $4k+3$ formunda bir asal böleni olurdu, ki bu, aralarında asal iki sayının kareleri toplamı olduğu için imkansızdır. Dolayısıyla, x çifttir. α pozitif bir tamsayı olmak üzere $x=2^\alpha z$ olsun. Eğer $\alpha=k$ ise, $2^{2k}(z^2+1)=y^3-1=(y-1)(y^2+y+1)$ olur, dolayısıyla y tek olmalıdır ve $y-1$, $4k+3$ formunda olamaz. Böylece, $y\equiv 1(mod\ 4)$ ve $y^2+y+1\equiv 3(mod\ 4)$ olur, ki bu imkansızdır. Eğer $\alpha<k$ ise, $2^{2\alpha}((2^{k-\alpha})^2+z^2)=(y-1)(y^2+y+1)$ olur ve z'nin tek olması gerçeği göz önüne alındığında, yukarıdaki gibi devam ederiz. Son olarak, eğer $\alpha>k$ ise, $2^{2k}((2^{\alpha-k}z)^2+1)=(y-1)(y^2+y+1)$ olur ve yukarıdaki gibi devam ederiz. Özellikle, $k=1$ ise, $y^3-x^2=5$ denkleminin x,y pozitif tamsayılarında çözümü olmadığını görürüz. Bkz: L. Aubry, Dickson'da, [7, s. 538].

[196] Önce $x=1$ olduğunu varsayalım. O zaman $1+y=zt$ ve $z+t=y$ denklemlerine sahip oluruz, bu da $zt=z+t+1$ demektir. Buradan $z\neq 1$ olmalıdır (çünkü $z=1$ $t=t+2$ sonucunu verirdi, bu imkansızdır). Eğer $z=2$ ise, $t=3$ olur, dolayısıyla $y=z+t$ olduğundan

197. Her p pozitif tam sayıları için $x_1+x_2+\cdots+x_n = z_n$ denkleminin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif tam sayılarıyla en az bir çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[197]

198. Verilen her a ve n pozitif tam sayıları için $x^n - y^n = a$ denkleminin x, y pozitif tam sayı çözümlerinin belirlenmesi için yöntem bulunuz.[198]

199. Elementer yöntemlerle, hem üçgen hem de beşgen (yani $\frac{k(3k-1)}{2}$ şeklinde) olan sonsuz sayıda sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[199]

$y = 5$ elde ederiz, bu da $x = 1$, $y = 5$, $z = 2$, $t = 3$ çözümünü verir. Eğer $z \geq 3$ ise, $t \geq z \geq 3$ olur ve $z = z_1 + 2$, $t = t_1 + 2$ yazabiliriz, burada $z_1 \geq 1$, $t_1 \geq 1$'dir. Buradan $zt = (z_1+2)(t_1+2) = z_1t_1 + 2z_1 + 2t_1 + 4 \geq z_1 + t_1 + 7 = z + t + 3$ sonucu çıkar, bu da ($x = 1$ olduğundan) $zt = z + t + 1$ ile çelişir. Şimdi $x = 2$ olduğunu varsayalım. O zaman $z \geq x = 2$ olur. Eğer $z = 2$ ise $2 + y = 2t$, $2 + t = 2y$ olur, bu da $y = t = 2$ demektir. Dolayısıyla $x = y = z = t = 2$ olurdu, ki bu sistemimizin bir çözümüdür. Eğer $z > 2$ ise, $t \geq z$ olduğundan, $t > 2$ olur ve $z = z_1 + 2$, $t = t_1 + 2$ koyabiliriz, bu da $zt = (z_1+2)(t_1+2) = z_1t_1 + 2z_1 + 2t_1 + 4 \geq z_1 + t_1 + 7 = z + t + 3$ sonucunu verir. Ancak, $x = 2$ olduğundan, $2 + y = zt$, $z + t = 2y$ olur, bu da $zt = \frac{1}{2}(z+t) + 2$ verir. Böylece, $\frac{1}{2}(z+t) + 2 \geq z + t + 3$ olur, bu da $z + t + 2 \leq 0$ sonucunu verir, ki bu imkansızdır. Şimdi $x > 2$ olduğunu varsayalım, dolayısıyla $x \geq 3$, ve $z \geq x \geq 3$, $t \geq z \geq 3$ olur. $z = z_1 + 2$, $t = t_1 + 2$ koyabiliriz, burada $z_1 \geq 1$ ve $t_1 \geq 1$'dir. Buradan $zt = (z_1+2)(t_1+2) = z_1t_1 + 2z_1 + 2t_1 + 4 \geq z_1 + t_1 + 9 = z + t + 5$ sonucu çıkar. Benzer şekilde, $x \geq 3$ olduğundan, $y \geq x \geq 3$, $xy \geq x + y + 5$ olur. Ancak, $z + t = xy$'ye sahibiz, bu da $zt \geq z + t + 5 = xy + 5 \geq x + y + 10 = zt + 10$ demektir, ki bu imkansızdır. Böylece, sistemimizin $x \leq y$ ve $x \leq z \leq t$ koşullarını sağlayan pozitif tamsayılarda yalnızca iki çözümü vardır, $x = 1$, $y = 5$, $z = 2$, $t = 3$ ve $x = y = z = t = 2$. Sistemimizin tamsayılardaki çözümlerine gelince, bu tür sonsuz sayıda çözüm vardır. J. Browkin, y keyfi olmak üzere $x = z = 0$, $t = y$'nin bu tür çözümler olduğunu fark etmiştir, A. Mąkowski ise sistemimizin çözümlerinin $x = t = -1$, y keyfi, $z = 1 - y$ olduğunu fark etmiştir.

[197] $n = 1$ için, x keyfi olabilir. $n = 2$ için, $x_1 = x_2 = 2$'ye sahibiz. $n > 2$ için, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = 1$, $x_n = n$ bir çözümdür. Ancak, başka çözümler de vardır, örneğin $n = 5$ için $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 3$'e sahibiz. Dolayısıyla, her n pozitif tamsayısı için, toplamları çarpımlarına eşit olan n pozitif tamsayı vardır diyebiliriz.

[198] Eğer n tek ve > 1 ise, $a = x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1})$ olur. $a > 0$ olduğundan, $x - y \geq 1$ olmalıdır, dolayısıyla $x^{n-1} + y^{n-1} \leq a$ olur. Böylece, $x < \sqrt[n-1]{a}$ ve $y < \sqrt[n-1]{a}$ olur ve sonlu sayıda kontrol yeterli olacaktır. Eğer $n = 1$ ise, $a = x - y$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri: y keyfi, $x = a + y$'dir. Eğer $n = 2k$ ise, k pozitif bir tamsayı olmak üzere, $a = x^n - y^n = x^{2k} - y^{2k} = (x^k - y^k)(x^k + y^k)$ olur. $x^k - y^k \geq 1$ olduğundan, $x^k + y^k \leq a$'dır. Buradan $x < \sqrt[k]{a}$, $y < \sqrt[k]{a}$ sonucu çıkar ve sonlu sayıda kontrol yeterli olacaktır.

[199] Bir $t_x = x(x+1)/2$ üçgensel sayısının pentagonal olması için, her x için $y(3y-1) = x(x+1)$ (1) olacak şekilde bir y pozitif tamsayısının var olması gerekli ve yeterlidir. Dolayısıyla, (1) denkleminin sonsuz sayıda x, y pozitif tamsayı çözümüne sahip olduğunu göstermek yeterlidir. $(4x+7y+1)(12x+21y+2) - (7x+12y+1)(7x+12y+2) = y(3y-1) - x(x+1)$ olduğunu kolayca kontrol ederiz. Buradan, x, y pozitif tamsayıları (1)'i sağlarsa, daha büyük tamsayılar olan $x_1 = 7x + 12y + 1$, $y_1 = 4x + 7y + 1$ (2) $y_1(3y_1 - 1) = x_1(x_1 + 1)$ denklemini sağlar. $x = y = 1$ sayıları (1)'i sağladığından, bu denklemin sonsuz sayıda x, y pozitif tamsayı çözümü olduğu sonucu çıkar. $x = y = 1$ çözümü (2) ile $x_1 = 20$, $y_1 = 12$ çözümünü verir, bu da $x_2 = 285$, $y_2 = 165$'e götürür, ve böyle devam eder.

Karışık Problemler

200. Tam sayı katsayılı bir $f(x)$ polinomu için $f(x) = 0$ denkleminin bir tam sayı çözümü varsa, her p asal sayısı için $x \equiv 0 \pmod{p}$ denkleminin de çözümü vardır. Birinci dereceden $ax + b = 0$ denklemini kullanarak bunun tersinin doğru olmadığını kanıtlayınız.[200]

201. a ve b tam sayıları olmak üzere $ax + b \equiv 0 \pmod{m}$ denkleminin her m pozitif tam sayısı için çözümü varsa, $ax + b = 0$ denkleminin de tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.[201]

202. $6x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ denkleminin her m pozitif tam sayısı için çözümü bulunduğunu, fakat $6x^2 + 5x + 1 = 0$ denkleminin tam sayı çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[202]

203. Her k tek ve n pozitif tam sayısı için $2n^2+2 \mid k^{2n}-1$ olduğunu kanıtlayınız.[203]

204. k tam sayısı, x ve y tam sayılar olmak üzere $k = x^2 - 2y^2$ şeklinde gösterilebiliyorsa, bu sayının sonsuz sayıda değişik yolla bu şekilde gösterilebileceğini kanıtlayınız.[204]

205. k tam sayı olmak üzere $8k + 3$ ve $8k + 5$ şeklinde olan hiçbir sayının, x ve y tam sayı olmak üzere $x^2 - 2y^2$ şeklinde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.[205]

206. k tam sayı olmak üzere $8k + 1$ şeklinde olan sayılardan sonsuz sayıda, x ve y tam sayı olmak üzere $x^2 - 2y^2$ şeklinde gösterilebilenlerin ve sonsuz bu

---

[200] $4x + 2 = 0$ denkleminin tamsayı kökleri olmadığı açıktır. Öte yandan, $4x + 2 \equiv 0(mod\ p)$ denkliği her p asal modülü için çözülebilirdir. Modül 2 için, elbette, özdeş olarak çözülebilirdir. p tek bir asal ise, k pozitif bir tamsayı olmak üzere $p = 2k + 1$, $x = k$ çözümüne sahiptir.

[201] $m = a$ koyalım. Eğer $ax + b \equiv 0(mod\ m)$ denkliğinin bir çözümü varsa, o zaman $a \mid b$, dolayısıyla k bir tamsayı olmak üzere $b = ak$'dir. $ax + b = 0$ denklemi $x = -k$ tamsayı köküne sahiptir.

[202] $6x^2 + 5x + 1 = (3x + 1)(2x + 1)$ olduğunu özdeş olarak biliyoruz, bu da $6x^2 + 5x + 1 = 0$ denkleminin tamsayı çözümü olmadığını gösterir. m keyfi bir pozitif tamsayı olsun. O zaman $\alpha \geq 0$ bir tamsayı ve m_1 tek olmak üzere $m = 2^\alpha m_1$ olur. $(2^\alpha, m_1) = 1$ olduğundan, $3x \equiv -1(mod\ 2^\alpha)$ ve $2x \equiv -1(mod\ m_1)$ olacak şekilde bir x pozitif tamsayısı vardır. Bu, $m = 2^\alpha m_1 \mid (3x + 1)(2x + 1)$ ve sonuç olarak $6x^2 + 5x + 1 \equiv 0(mod\ m)$ sonucunu verir.

[203] Bu, $n = 1$ için doğrudur, çünkü tek bir sayının karesi 8'e bölündüğünde 1 kalanını verir. İddianın bir n pozitif tamsayısı için geçerli olduğunu varsayalım. O zaman tek k için: t bir tamsayı olmak üzere $k^{2^n} = 2^{n+2}t+1$'dir. Buradan $k^{2^{n+1}} = (2^{n+2}t+1)^2 = 2^{2n+4}t^2+2^{n+3}t+1 = 2^{n+3}(2^{n+1}t^2 + t) + 1$ elde edilir, bu da $2^{n+3} \mid k^{2^{n+1}} - 1$ demektir. Kanıt tümevarımla tamamlanır.

[204] Kanıt, $(3x + 4y)^2 - (2x + 3y)^2 = x^2 - 2y^2$ özdeşliğinden ve x, y pozitif tamsayıları için $3x + 4y > x$ ve $2x + 3y > y$ olmasından hemen elde edilir.

[205] Eğer x ve y tamsayıları için $x^2 - 2y^2$ sayısı tek ise, x tek olmalıdır, dolayısıyla $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$'dir. y'nin çift olduğu durumda, $2y^2 \equiv 0 \pmod{8}$, tek olduğu durumda ise $2y^2 \equiv 2 \pmod{8}$ olur. Dolayısıyla, $x^2 - 2y^2$'nin tek olması durumunda, $x^2 - 2y^2 \equiv \pm 1 \pmod{8}$ olur, bu da x ve y tamsayıları için $x^2 - 2y^2$ sayısının k bir tamsayı olmak üzere $8k + 3$ veya $8k + 5$ formunda olamayacağını gösterir.

şekilde gösterilemeyenlerin bulunduğunu kanıtlayınız. Gösterilemeyenlerin en küçüğünü bulunuz.[206]

207. Her mükemmel sayının son rakamının 6 veya 8 olduğunu kanıtlayınız.[207]

208. N. Anning'in şu teoremini kanıtlayınız: rakamları herhangi bir $g > 1$ tabanında yazılmış olan
$$\frac{101010101}{1100110011}$$
sayısının payında ve paydasında tam ortadaki 1 rakamının yerine herhangi tek sayıda 1 yazılırsa, kesrin değerinin değişmeyeceğini kanıtlayınız[208] (örneğin,
$$\frac{1010110101}{1100110011} = \frac{1010111011}{110011110011} = \frac{1010111110101}{1100111110011} = \ldots$$
).

[206] Her n pozitif tamsayısı için $(2n+1)^2 - 2 \cdot 2^2$ sayısının, $k \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere $8k+1$ formunda olduğu kolayca görülebilir. Devamında, $1 = 3^2 - 2 \cdot 2^2$, $9 = 9^2 - 2 \cdot 6^2$, $17 = 5^2 - 2 \cdot 2^2$, $25 = 15^2 - 2 \cdot 10^2$ olurken, 33 sayısı x ve y pozitif tamsayılar olmak üzere $x^2 - 2y^2$ formunda temsil edilemez. Daha genel olarak, $t = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $72t + 33$ formundaki hiçbir sayının x ve y tamsayılarıyla $x^2 - 2y^2$ formunda temsil edilemeyeceğini kanıtlayacağız. Gerçekten de, t tamsayısı, x ve y tamsayıları için $72t + 33 = x^2 - 2y^2$ olduğunu varsayalım. Sol taraf 3 ile bölünebilir, ancak 9 ile bölünemez. Buradan, x, y sayılarının hiçbirinin 3 ile bölünemeyeceği sonucu çıkar, çünkü $3 \mid x$ olsaydı, $3 \mid y$ olurdu ve sağ taraf 9 ile bölünürdü, ki bu imkansızdır. Dolayısıyla, x ve y sayıları 3 ile bölünemez, bu nedenle x^2 ve y^2 3'e bölündüğünde 1 kalanını verir; böylece, $x^2 - 2y^2$ sayısı 3'e bölündüğünde $1 - 2(1) = -1 \equiv 2 \pmod 3$ kalanını verir, ki bu imkansızdır çünkü sol taraf 3 ile bölünür. Böylece, $k = 1, 2, \ldots$ olmak üzere $8k+1$ formunda olan ve x, y tamsayıları için $x^2 - 2y^2$ formunda olmayan sonsuz sayıda pozitif tamsayı vardır ve bu tür en küçük sayı $33 = 8 \cdot 4 + 1$'dir.

[207] Çift mükemmel sayılar, iyi bilindiği gibi, p ve $2^p - 1$ asal olmak üzere $2^{p-1}(2^p - 1)$ formundadır (bkz. örneğin, Sierpiński [37, s. 172, sonuç]). $p = 2$ için 6 sayısını elde ederiz. $p > 2$ ise, p $4k+1$ veya $4k+3$ formunda bir asaldır. $p = 4k+1$ ise, $2^{p-1} = 2^{4k} = 16^k$ olur ve 2^{p-1}'in son basamağı açıktır ki 6'dır, $2^p - 1 = 2^{4k+1} - 1 = 2 \cdot 16^k - 1$ iken son basamak açıktır ki 1'dir. Böylece, $2^{p-1}(2^p - 1)$ çarpımının son basamağı 6'dır. $p = 4k+3$ ise, $2^{p-1} = 2^{4k+2} = 4 \cdot 16^k$ sayısının son basamağı 4'tür, 2^p'nin son basamağı 8 iken, $2^p - 1$ sayısının son basamağı 7'dir. Sonuç olarak, $2^{p-1}(2^p - 1)$ sayısı (biri son basamağı 4, diğeri son basamağı 7 olan iki sayının çarpımı olarak) son basamağı 8 olan bir sayıya sahiptir. Bu, kanıtı tamamlar. **NOT.** Bir mükemmel sayının son basamağı 8 ise, sondan bir önceki basamağın 2 olduğu kanıtlanabilir (ancak kanıtı daha zordur).

[208] Kesirimizin g tabanındaki değeri $\frac{1+g^2+g^4+g^6+g^8}{1+g+g^4+g^7+g^8}$'dir ve her k pozitif tamsayısı için bu kesrin $\frac{1+g^2+g^4+g^5+\ldots+g^{2k+2}+g^{2k+4}+g^{2k+6}}{1+g+g^4+g^5+\ldots+g^{2k+2}+g^{2k+5}+g^{2k+6}}$ (1) kesrine eşit olduğunu kanıtlamalıyız. Bu iddia, bu kesirlerin her birinin payının diğerinin paydasıyla çarpımlarının aynı olduğu kontrol edilerek gösterilebilir. Bkz. P. Anning [1]. **NOT.** J. Browkin, k pozitif tamsayısı için $1 + g^2 + g^4 + g^5 + \ldots + g^{2k+2} + g^{2k+4} + g^{2k+6} = (1 - g + g^2 - g^3 + g^4)(1 + g + g^2 + \ldots + g^{2k+2})$ ve $1 + g + g^4 + g^5 + \ldots + g^{2k+2} + g^{2k+5} + g^{2k+6} = (1 - g^2 + g^4)(1 + g + g^2 + \ldots + g^{2k+2})$ özdeşliklerini fark etti. Bu, (1) kesrinin $k = 1, 2, \ldots$ için $\frac{1-g+g^2-g^3+g^4}{1-g^2+g^4}$ kesrine eşit olduğunu, dolayısıyla değerinin k'dan bağımsız olduğunu gösterir.

209. 2^n sayısının ondalık yayılımındaki rakamları toplamının n'nin artması ile sonsuz arttığını kanıtlayınız.[209]

210. $k > 1$ bir tam sayı ve c de bir rakam ise 2^n'nin sağdan k. rakamı c olacak şekilde bir n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[210]

211. 5^n $(n = 1, 2, 3, ...)$ sayılarının son 4 rakamlarının periyodik dizi oluşturduğunu kanıtlayınız. Periyodu bulunuz ve saf periyot olup olmadığını tespit ediniz.[211]

---

[209] A. Schinzel, g pozitif bir tamsayı, çift ve 10'a bölünemiyorsa, g^n'in ondalık basamaklarının toplamının n ile birlikte sonsuza gittiğini iddia eden daha genel bir teorem kanıtladı. Onun kanıtını sunacağız. a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ tamsayılarının sonsuz bir dizisini şöyle tanımlayalım: $a_0 = 0$ koyalım ve $k = 0, 1, 2, \ldots$ için a_{k+1}, $2^{a_{k+1}} > 10^{a_k}$ koşulunu sağlayan en küçük pozitif tamsayıyı göstersin (böylece $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 14$ vb. olur). Açıktır ki, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$. Bir k pozitif tamsayısı için $n \geq a_k$ ise, g^n'in basamakları toplamının $\geq k$ olduğunu kanıtlayacağız. g^n'in ondalık açılımında 10^j'de duran basamağı c_j ile gösterelim. g çift olduğundan, $2^n \mid g^n$ ve $n \geq a_k$ olduğundan, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ için $2^{a_i} \mid g^n$ bağıntısına sahibiz. Dahası, $2^{a_i} \mid 10^{a_i}$ (kaynakta a_t yazıyor) olduğundan, $2^{a_i} \mid c_{a_i-1}10^{a_i-1} + \ldots + c_0$ olur. Eğer $a_{i-1} \leq j < a_i$ için tüm c_j basamakları sıfıra eşit olsaydı, $2^{a_i} \mid c_{a_{i-1}-1}10^{a_{i-1}-1} + \ldots + c_0$ olurdu ve (g 10'a bölünemediği için $c_0 \neq 0$ olmalıdır), $2^{a_i} \leq c_{a_{i-1}-1}10^{a_{i-1}-1} + \ldots + c_0 < 10^{a_i-1}$ (kaynakta a_{i-1-1} yazıyor) olurdu. Bu, $2^{a_i} < 10^{a_{i-1}}$ anlamına gelir, ki bu a_i'nin tanımıyla çelişir. Dolayısıyla, $a_{i-1} \leq j < a_i$ olmak üzere c_j basamaklarından en az biri sıfırdan farklıdır. Bu, $i = 1, 2, \ldots, k$ için doğru olduğundan, g^n'in en az k basamağı sıfırdan farklıdır. Yeterince büyük n için ($n \geq a_k$ için), g^n'in ondalık basamaklarının toplamı, keyfi olarak verilen bir k sayısından daha küçük değildir. Bu, g^n'in ondalık basamakları toplamının n ile birlikte sonsuza gittiğini gösterir, ki bu kanıtlanması gerekendi. A. Schinzel, benzer bir şekilde, g 5'e bölünebilen tek bir pozitif tamsayı ise, g^n'in ondalık basamakları toplamının n ile birlikte sonsuza gittiğinin kanıtlanabileceğini belirtti. Özellikle, yukarıda kanıtlanan teoremden ($g = 2$ için) 2^n'in ondalık basamakları toplamının n ile birlikte sonsuza gittiği sonucu çıkar. Ancak bu, artışın monoton olduğu anlamına gelmez: örneğin, 2^3'ün basamakları toplamı 8 iken, 2^4'ün basamakları toplamı 7 ve 2^5'in basamakları toplamı 5'tir. Devamında, 2^9'un basamakları toplamı 8 iken, 2^{10}'unki 7'dir. Benzer şekilde, 2^{16}'nın basamakları toplamı 25 iken, 2^{17}'ninki 14'tür.

[210] Kanıt A. Schinzel'e aittir. k birden büyük bir tamsayı ve c ondalık sistemin keyfi bir basamağı olsun. $k > 1$ olduğundan, $10^{k-1} > 2 \cdot 2^k$ olduğunu kolayca kanıtlarız (örneğin, tümevarımla). t, $t \geq c \cdot 10^{k-1}/2^k$ koşulunu sağlayan en küçük tamsayıyı göstersin; dolayısıyla $t < c\frac{10^{k-1}}{2^k} + 1$ ve $t + 1 < c\frac{10^{k-1}}{2^k} + 2$ olur. t ve $t+1$ tamsayılarından en az biri 5 ile bölünemez; bu sayıyı u ile gösterelim. $c\frac{10^{k-1}}{2^k} \leq u < c\frac{10^{k-1}}{2^k} + 2$ olur ve $2 \cdot 2^k < 10^{k-1}$ olduğundan, $l = 2^k u$ için $c \cdot 10^{k-1} \leq l < (c+1)10^{k-1}$ (1) ilişkisine sahip oluruz. Bu, $l = 2^k u$ sayısının k basamağı olduğunu, ilk basamağının (dolayısıyla sondan k'ıncı) c olduğunu gösterir (bu basamak sıfır olabilir). $l = 2^k u$ olduğundan $2^k \mid l$ ve u'nun tanımı gereği $5 \nmid u$, dolayısıyla $(l, 5) = 1$'dir. Bildiğimiz gibi, 2 sayısı 5^k modülü için bir ilkel köktür (bkz. örneğin, W. Sierpiński [24, s. 246, lemma]). $(l, 5) = 1$ olduğundan, $2^n \equiv l (mod\ 5^k)$ olacak şekilde bir $n \geq k$ tamsayısı vardır. $2^k \mid l$ ve $2^k \mid 2^n$ olduğundan (çünkü $n \geq k$), $2^n \equiv l (mod\ 2^k)$ olur ve sonuç olarak $2^n \equiv l (mod\ 10^k)$ olur. Bu, l sayısının son k basamağının 2^n'in karşılık gelen basamaklarıyla aynı olduğunu gösterir. Buradan, 2^n sayısının sondan k'ıncı basamağının c olduğu sonucu çıkar, ki bu kanıtlanması gerekendi. **NOT.** 2^n'in son dört basamağı $c = 2, 4, 6$ veya 8 için $111c$ formunda olamaz, çünkü 1112, 1114, 1116 ve 1118 sayılarından hiçbiri 16'ya bölünemez. Yukarıda alıntılanan makalede (s. 249), 2^n'in (burada $n = 3, 4, \ldots$) sondan üçüncü ve ikinci basamaklarının keyfi olabileceğini kanıtladım. Ayrıca, m keyfi bir pozitif tamsayı ve k onun basamak sayısı ise, 2^n sayısının ilk k basamağının m'nin basamaklarıyla aynı olacak şekilde bir n pozitif tamsayısının var olduğunu da kanıtladım.

[211] $n \geq 4$ tamsayısı için $5^{n+4} - 5^n = 5^n(5^4 - 1) = 5^n \cdot 16 \cdot 39$ (kaynakta 624 yerine 16*39 yazıyor)

212. Her s için pozitif tam sayının ondalık yazılımının ilk s rakamının herhangi bir şekilde (?) olabileceğini kanıtlayınız.[212]

213. n^n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sayılarının son rakamlarının periyodik dizi oluşturduğunu kanıtlayınız. Periyodu bulunuz ve saf periyot olup olmadığını tespit ediniz.[213]

214. Her sonsuz ondalık kesirde, her n sayısı için uzunluğu n olan ve dizide sonsuz sayıda rastlanan bir rakamlar dizisi bulunduğunu kanıtlayınız.[214]

215. Her k pozitif tam sayısı için 32^k sayısını ardışık sayılardan oluşan 3^k tane sayının toplamı şeklinde gösteriniz.[215]

216. Bir $s > 1$ tam sayısı verilmişse, her $n \geq m_s$ için n ile $2n$ arasında bir pozitif tam sayının s. dereceden kuvveti bulunacak şekilde bir m_s pozitif

---

olur, dolayısıyla $5^{n+4} \equiv 5^n \pmod{10000}$ ve 5^n $(n = 4, 5, \dots)$ dizisinin son dört basamağının dört terimli bir periyot oluşturduğu sonucu çıkar. Periyot 0625, 3125, 5625, 8125'tir. Bu periyot saf (pure) değildir, çünkü 5, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$ sayıları ona ait değildir.

[212] s verilen bir pozitif tamsayı olsun ve $c_1, c_2, \dots, c_s$ keyfi bir s ondalık basamak dizisi olsun. $m = (c_1c_2\dots c_s)_{10}$ s basamağı sırasıyla $c_1, c_2, \dots, c_s$'ye eşit olan bir sayı olsun. $2\sqrt{m} < 10^{k-1}$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı seçelim ve $n = [10^k\sqrt{m}] + 1$ olsun, burada $[x]$, x'i aşmayan en büyük tamsayıyı gösterir. $10^k\sqrt{m} < n \leq 10^k\sqrt{m} + 1$ olur, bu da $10^{2k}m < n^2 \leq 10^{2k}m + 2\cdot 10^k\sqrt{m} + 1 < 10^{2k}m + 10^{2k-1} + 1 < 10^{2k}m + 10^{2k}$ (kaynakta 10^{2k-1} yerine $2\cdot 10^k\sqrt{m}$'den 10^{2k-1}'e geçiş var) ve sonuç olarak $10^{2k}m < n^2 < 10^{2k}m + (10^{2k} - 1)$ olur. Buradan $(c_1c_2\dots c_s00\dots0)_{10} < n^2 < (c_1c_2\dots c_s999\dots9)_{10}$ sonucu çıkar; burada sıfırların sayısı ve dokuzların sayısı $2k$'dır. Buradan n^2'nin ilk s basamağının $c_1, c_2, \dots, c_s$ olduğu sonucu çıkar.

[213] n pozitif bir tamsayı ise, $n^{n+20} - n^n = n^n(n^{20} - 1)$ 4'e bölünür. Gerçekten de, n çift ise, $4 \mid n^n$, n tek ise, n^{10} tektir, dolayısıyla karesi n^{20}, 8'e bölündüğünde 1 kalanını verir. Böylece, $8 \mid n^{20} - 1$. n pozitif tamsayısı için $n^{n+20} - n^n$ sayısı, dolayısıyla $(n+20)^{n+20} - n^n$ sayısı da her zaman 4'e bölünür. Öte yandan, a ve b, $a > b$ ve $4 \mid a - b$ koşullarını sağlayan pozitif tamsayılar ise, n pozitif tamsayısı için $5 \mid n^a - n^b$ olur. Gerçekten de, k pozitif bir tamsayı olmak üzere $a = b + 4k$'ya sahibiz, dolayısıyla $n^a - n^b = n^b(n^{4k} - 1)$. $5 \mid n$ ise, sağdaki ilk çarpan 5'e bölünür; $5 \nmid n$ ise, Fermat teoremine göre $n^4 \equiv 1 \pmod 5$ olur, bu da $n^{4k} \equiv 1 \pmod 5$ demektir ve eşitliğimizin sağ tarafındaki ikinci çarpan 5'e bölünür. Dolayısıyla, a ve b pozitif tamsayılar, $a > b$ ve $4 \mid a - b$ ise, n pozitif tamsayıları için $5 \mid n^a - n^b$ olduğunu ve elbette, $5 \mid (n+20)^a - n^b$ olması gerektiğini de kanıtladık. Özellikle, $a = (n+20)^{n+20}$ ve $b = n^n$ için, yukarıda gösterildiği gibi, $4 \mid a - b$ olur, dolayısıyla $5 \mid (n+20)^{(n+20)^{n+20}} - n^{n^n}$. Sağ taraf her zaman çift olduğundan (çünkü n ve $n + 20$ ya her ikisi de çift ya da her ikisi de tektir), n pozitif tamsayıları için $10 \mid (n+20)^{(n+20)^{n+20}} - n^{n^n}$ ilişkisine sahibiz. Bu, $(n+20)^{(n+20)^{n+20}}$ ve n^{n^n} sayılarının son basamaklarının aynı olduğunu gösterir. n^{n^n} $(n = 1, 2, \dots)$ sayılarının son basamakları dizisi bu nedenle periyodiktir; periyot saftır (pure) ve en fazla 20 terimden oluşur. Periyodun tam olarak 20 terimden oluştuğunu ve 1, 6, 7, 6, 5, 6, 3, 4, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 3, 4, 9, 0'a eşit olduğunu görmek kolaydır.

[214] m keyfi bir pozitif tamsayı olsun. Verilen sonsuz ondalık kesrin basamaklarını her biri m basamaktan oluşan bloklara ayıralım; bu tür sonsuz sayıda bloğa sahip olacağız. Öte yandan, m basamaktan oluşan 10^m farklı dizi vardır; bu sayı sonlu olduğundan, en az birinin sonsuz sayıda tekrarlanması gerektiği sonucuna varırız. **NOT.** $\sqrt{2}$, π veya e irrasyonel sayıları için, ondalık açılımda hangi basamağın sonsuz sayıda tekrarlanacağını bile bilmiyoruz; bu sayılardan her biri için en az iki böyle basamağın var olduğunu göstermek kolaydır.

[215] $3^{2k} = (n+1) + (n+2) + \dots + (n+3^k)$ ise, $3^{2k} = 3^k n + \frac{1}{2}3^k(3^k+1)$ olur, bu da $n = \frac{1}{2}(3^k - 1)$ verir. Dolayısıyla, 3^{2k} sayısı, en küçüğü $n+1 = \frac{1}{2}(3^k+1)$ olan, ardışık pozitif tamsayılara eşit 3^k terimin toplamıdır. Örneğin, $k = 1, 2$ ve 3 için sahibiz: $3^2 = 2+3+4$, $3^4 = 5+6+\dots+13$, $3^6 = 14 + 15 + \dots + 40$. Bkz. Khatri [12].

tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız. $s = 2$ ve $s = 3$ için en küçük m_s sayılarını bulunuz.[216]

217. Her n için, hiçbir bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvveti olmayan n ardışık pozitif tam sayının bulunduğunu kanıtlayınız.[217]

218. $u_1 = 1, u_2 = 3$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$ olarak tanımlanan (u_n) dizisinin n. terimi için n'ye bağlı formül bulunuz.[218]

219. $u_1 = a, u_2 = b$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ olarak tanımlanan (u_n) dizisinin n. terimi için n'ye bağlı formül bulunuz.[219]

220. $u_1 = a, u_2 = b$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için $u_{n+2} = -(u_n + 2u_{n+1})$ olarak tanımlanan (u_n) dizisinin n. terimi için n'ye bağlı formül bulunuz. $a = 1, b = -1$ ve $a = 1, b = -2$ özel durumlarını inceleyiniz.[220]

221. $u_1 = a, u_2 = b$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için $u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}$ olarak tanımlanan (u_n) dizisinin n. terimi için n'ye bağlı formül bulunuz.[221]

222. $n = 1, 2, \ldots$ için $a^{a^n} = a$ eşitliğini sağlayan tüm $a \neq 0$ tam sayılarını bulunuz.[222]

---

[216] Bildiğimiz gibi, a ve b, $b - a > 1$ olacak şekilde reel sayılarsa, a ve b arasında en az bir tamsayı vardır; aslında, $[x]$ x'i aşmayan en büyük tamsayıyı göstermek üzere, böyle bir tamsayı örneğin $[a]+1$'e eşittir. Gerçekten de, $a < [a] + 1 \leq a + 1 < b$ olur ($b - a > 1$ olduğundan). $s > 1$ bir tamsayı olsun ve $\mu_s = \frac{1}{(\sqrt[s]{2}-1)^s}$ olsun; bu sayı reel ve pozitif olacaktır. Dolayısıyla, $n > \mu_s$ tamsayısı için $n > \frac{1}{(\sqrt[s]{2}-1)^s}$ olur, buradan $\sqrt[s]{n} > \frac{1}{\sqrt[s]{2}-1}$ ve $\sqrt[s]{n}(\sqrt[s]{2} - 1) > 1$ elde edilir bu da $\sqrt[s]{2n} - \sqrt[s]{n} = \sqrt[s]{n}(\sqrt[s]{2} - 1) > 1$ demektir. Dolayısıyla, $\sqrt[s]{n} < k < \sqrt[s]{2n}$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı vardır, bu da $n < k^s < 2n$ sonucunu verir. m_s olarak $[\mu_s] + 1$ sayısını alabiliriz. $s = 2$ için $[\mu_2] = 5$'tir ve 5 ile 10 arasında zaten bir kare sayı, 3^2, yer alır; 4 ile 8 arasında ise bir kare sayı yoktur. Dolayısıyla, en küçük m_2, 5'tir. Benzer şekilde, en küçük m_3 sayısının 33 olduğunu kolayca hesaplarız.

[217] m keyfi bir pozitif tamsayı olsun. Çin kalan teoremine göre, $i = 1, 2, \ldots, m$ için $x \equiv p_i - i + 1 (mod\ p_i^2)$ (1) olacak şekilde bir x pozitif tamsayısı vardır; burada p_i, i'nci asalı gösterir. m ardışık tamsayıdan oluşan $x, x+1, \ldots, x+m-1$ dizisi istenen özelliğe sahiptir, çünkü (1) ile $i = 1, 2, \ldots, m$ için $x + i - 1 = p_i^2 k_i + p_i$ olur; burada k_i bir tamsayıdır. Bu sayı p_i ile bölünebilir ancak p_i^2 ile bölünemez, dolayısıyla $x + i - 1$ herhangi bir pozitif tamsayının 1'den büyük üslü bir kuvveti olamaz.

[218] $n = 1, 2, \ldots$ için $u_n = 3^{n-1}$. Tümevarımla kolay kanıt.

[219] $n = 1, 2, \ldots$ için $u_n = (2 - n)a + (n - 1)b$. Tümevarımla kolay kanıt.

[220] $n = 1, 2, \ldots$ için $u_n = (-1)^n[(n - 2)a + (n - 1)b]$. Formülün $n = 1$ ve $n = 2$ için geçerli olduğunu kolayca kontrol ederiz. Bir n için formülün u_n ve u_{n+1} için geçerli olduğunu varsayarak, $u_{n+2} = -(u_n + 2u_{n+1})$ gerçeğini kullanarak, formülün u_{n+2} için de geçerli olduğunu kolayca kontrol ederiz. Böylece, kanıt tümevarımla tamamlanır.

[221] $n = 1, 2, \ldots$ için $u_n = \frac{3}{4}[3^{n-2} + (-1)^{n-1}]a + \frac{1}{4}[3^{n-1} + (-1)^n]b$. Tümevarımla kanıt.

[222] Sadece iki tamsayı vardır, $a = 1$ ve $a = -1$. Bu sayıların her ikisinin de istenen koşulu sağladığını kolayca kontrol ederiz. $n = 1$ için bu koşuldan $a^a = a$ olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla, $a \geq 2$ bir tamsayı olsaydı, $a^a \geq a^2 > a$ olurdu, ki bu imkansızdır. Eğer $a \leq -2$ olsaydı, $\mid a^a \mid = 1/\mid a \mid^{|a|} < 1$ olurdu, bu da $a^a = a$ ve $a \leq -2$ olması $\mid a^a \mid = \mid a \mid > 2$ anlamına geldiğinden yine imkansızdır.

223. Hem toplamı hem de çarpımı tam kare olan tüm pozitif tam sayı ikililerini bulmak için bir yöntem veriniz.[223]

224. İki ardışık pozitif tam sayının kareleri toplamına eşit olan tüm üçgen sayıları bulunuz.[224]

225. V.E.Hogatt'ın, her pozitif tam sayının Fibonacci dizisinin birbirinden farklı terimlerinin toplamı şeklinde gösterilebileceğini söyleyen teoremini kanıtlayınız.[225]

226. Fibonacci dizisinin u_n terimlerinin $n = 1, 2, 3, ...$ için

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n-1}$$

eşitliğini sağladığını kanıtlayınız.[226]

---

[223] a ve b keyfi pozitif tamsayılar olsun ve c^2, $a^2 + b^2$'nin en büyük kare bölenini göstersin, yani $a^2 + b^2 = kc^2$. $x = a^2k$, $y = b^2k$ olsun; $x + y = a^2k + b^2k = (a^2 + b^2)k = (kc)^2$ olurken $xy = (abk)^2$ olur. Toplamı ve çarpımı kare olan tüm pozitif tamsayı çiftlerinin, uygun seçilmiş a ve b için bu şekilde elde edilebileceğini göstereceğiz. z ve t pozitif tamsayılar olmak üzere $x + y = z^2$, $xy = t^2$ olduğunu varsayalım. $d = (x, y)$ olsun ve c_1, d'nin en büyük kare bölenini göstersin; dolayısıyla, k 1'den büyük bir tamsayının karesiyle bölünemeyen pozitif bir tamsayı olmak üzere, $d = kc_1^2$ olur. $(x_1, y_1) = 1$ olmak üzere $x = dx_1$, $y = dy_1$ olur ve $x + y = z^2$'den $(x_1 + y_1)d = z^2$ sonucu çıkar. Dolayısıyla, $d = kc_1^2 \mid z^2$ ve k, 1'den büyük bir tamsayının karesiyle bölünemediğinden, $kc_1 \mid z$ buluruz; bu da z_1 pozitif bir tamsayı olmak üzere $z = kc_1z_1$ demektir. Buradan $(x_1 + y_1)d = x + y = z^2 = k^2c_1^2z_1^2 = kdz_1^2$ olur, bu da $x_1 + y_1 = kz_1^2$ ve $x_1y_1 = t^2/d^2$ demektir. $(x_1, y_1) = 1$ olduğundan, x_1 ve y_1 sayılarının kare olduğu, yani $x_1 = a_1^2$, $y_1 = b_1^2$ olduğu sonucu çıkar. $x = dx_1 = k(c_1a_1)^2$, $y = dy_1 = k(c_1b_1)^2$ olduğundan, $a = c_1a_1$, $b = c_1b_1$ koyarak $x = ka^2$, $y = kb^2$ elde ederiz ve $a^2 + b^2 = (c_1a_1)^2 + (c_1b_1)^2 = c_1^2(x_1 + y_1) = k(c_1z_1)^2$; $c_1z_1 = c$ koyarak $a^2 + b^2 = kc^2$ elde ederiz; k sayısı 1'den büyük bir r tamsayısının karesiyle bölünemediğinden, c^2 sayısı $a^2 + b^2$'nin en büyük kare bölenidir. ≤ 100 olan ve hem toplamı hem de çarpımı kare olan tüm pozitif tamsayı çiftleri 2, 2; 5, 20; 8, 8; 10, 90; 18, 18; 20, 80; 9, 16; 32, 32; 50, 50; 72, 72; 2, 98; 98, 98; 36, 64'tür.

[224] Böyle sadece bir sayı vardır, 10. Gerçekten de, $(2x-1)^2 + (2x+1)^2 = \frac{1}{2}y(y+1)$ ise, o zaman $(2x+1)^2 - (8x)^2 = 17$ (kaynakta $(2y+1)^2 - (8x)^2 = 17$ olmalı) ve 17 sayısının iki tamsayı karesinin farkı olarak tek bir gösterimi vardır, $17 = 9^2 - 8^2$. Bu, $2y + 1 = 9$ verir, dolayısıyla $y = 4$ ve $t_y = \frac{1}{2}y(y+1) = 10$ olur.

[225] Hogatt teoreminin $\leq u_n$ olan her pozitif tamsayı için geçerli olduğunu n'ye göre tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ için $u_1 = 1$ olduğundan ve $n = 2$ için $u_2 = 1$ olduğundan doğrudur. Şimdi $n > 2$ bir tamsayı olsun ve $\leq u_n$ olan her pozitif tamsayının Fibonacci dizisinin farklı terimlerinin toplamı olduğunu varsayalım. k, $u_n < k \leq u_{n+1}$ olacak şekilde bir tamsayıyı göstersin. Eğer $k - u_n > u_{n-1}$ olsaydı, $u_{n+1} \geq k > u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$ olurdu, ki bu imkansızdır. Dolayısıyla, $0 < k - u_n \leq u_{n-1}$ olur. $k - u_n$ pozitif tamsayısı, tümevarımla, Fibonacci dizisinin farklı terimlerinin toplamına eşittir ve $k - u_n \leq u_{n-1} < u_n$ olduğundan, u_n sayısı bu gösterimde yer almaz. Buradan, $k = (k - u_n) + u_n$'in Fibonacci dizisinin farklı terimlerinin toplamı olduğu sonucu çıkar, bu da Hogatt teoreminin kanıtını tamamlar. $1 = u_1$, $2 = u_3$, $3 = u_4 = u_1 + u_3$, $4 = u_1 + u_4$, $5 = u_5 = u_3 + u_4$, $6 = u_1 + u_5$, $7 = u_3 + u_5$, $8 = u_6 = u_4 + u_5$, $9 = u_1 + u_6$, $10 = u_3 + u_6$ olur.

[226] Tümevarımla ilerleyeceğiz. Formülümüz $n = 2$ için $1^2 = 1 \cdot 2 + (-1)$ olduğundan geçerlidir. Formülümüzün $n \geq 2$ tamsayısı için geçerli olduğunu varsayalım. Dolayısıyla, $u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n-1}$ olur. Buradan $u_{n+1}^2 - u_nu_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n(u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) - u_n^2 = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ elde edilir, bu da formülü $n + 1$ için kanıtlar.

227. Her tam sayının sonsuz değişik sayıda beş tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.[227]

228. 3 sayısının sonsuz değişik sayıda 0 ve 1'den farklı dört tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.[228]

229. Elementer yöntemlerle, birbirinden farklı dört pozitif tam sayının kareleri toplamı şeklinde en az iki değişik şekilde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu ve birbirinden farklı dört pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde en az iki değişik şekilde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[229]

230. Her m pozitif tam sayısı için $4m^4{\cdot}7$ sayısının negatif olmayan dört tam sayının kareleri toplamı şeklinde herhangi gösteriminde, bu sayılardan hiçbirinin 2^{m-1}'den küçük olmadığını kanıtlayınız.[230]

231. İki pozitif tam sayının kareleri toplamı ve iki pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilen 2'den büyük en küçük tam sayıyı bulunuz ve aralarında asal iki pozitif tam sayının kareleri toplamı ve iki pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[231]

---

[227] Önce $6t = (t+1)^3 + (t-1)^3 + (-t)^3 + (-t)^3$ özdeşliğinden, 6 ile bölünebilen her tamsayının, tamsayıların dört küpünün toplamı olduğunu fark edelim. Her k tamsayısı ve n pozitif tamsayısı için, $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ olmak üzere $6k + r - (6n + r)^3$ sayılarının her biri 6 ile bölünebilir (çünkü r tamsayısı için $6 \mid r^3 - r$ olduğundan), her tamsayının sonsuz sayıda yolla tamsayıların beş küpünün toplamı olarak temsil edilebileceği sonucu çıkar. **NOT.** Her tamsayının tamsayıların dört küpünün toplamı olarak sonsuz sayıda yolla temsil edilebileceği varsayılmaktadır (ve bu varsayım < 1000 olan tüm pozitif tamsayılar için kontrol edilmiştir); bkz. Schinzel, Sierpiński [21] ve Demjanenko [6].

[228] Çözüm, $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $3 = (4 + 24n^3)^3 + (4 - 24n^3)^3 + (-24n^3)^3 + (-5)^3$ özdeşliğinden hemen elde edilir.

[229] Kanıt, $t > 8$ tamsayısı için geçerli olan aşağıdaki iki özdeşlikten hemen elde edilir: $(t-8)^2 + (t-1)^2 + (t+1)^2 + (t+8)^2 = (t-7)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 + (t+7)^2$ ve $(t-8)^3 + (t-1)^3 + (t+1)^3 + (t+8)^3 = (t-7)^3 + (t-4)^3 + (t+4)^3 + (t+7)^3$

[230] Bazı pozitif m tamsayıları için $4^m \cdot 7 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ olduğunu varsayalım; burada a, b, c, d sayılarından en az biri, diyelim ki a, ≥ 0 ve $< 2^{m-1}$'dir. $a = 0$ olamaz, çünkü bu durumda $4^m \cdot 7$ tamsayıların üç karesinin toplamı olurdu, ki bu imkansızdır (bkz. örneğin, W. Sierpiński, [37, s. 363, Teorem 3]). Dolayısıyla $m > 1$ olmalıdır ve $a = 2^k(2t-1)$ olur; burada k, $\leq m-2$ olan negatif olmayan bir tamsayı ve t pozitif bir tamsayıdır. Buradan $4^m \cdot 7 - [2^k(2t-1)]^2 = 4^k[4^{m-k} \cdot 7 - (8u+1)] = 4^k(8v+7)$ elde edilir; burada u ve v tamsayıdır ($k \leq m-2$ olduğundan $m - k \geq 2$ demektir) ve $4^k(8v+7) = b^2 + c^2 + d^2$ olur, ki bu imkansızdır. **NOT.** m pozitif bir tamsayı olmak üzere $4^m \cdot 7$ sayısının, tamsayıların dört karesinin toplamı olarak en az bir gösterimi olduğunu kanıtlamak kolaydır, çünkü $4^m \cdot 7 = (2^m)^2 + (2^m)^2 + (2^m)^2 + (2^{m+1})^2$'dir.

[231] > 2 olan ve pozitif tamsayıların iki küpünün toplamı olan ilk altı tamsayının $1^3 + 2^3 = 9$, $2^3 + 2^3 = 16$, $1^3 + 3^3 = 28$, $2^3 + 3^3 = 35$, $3^3 + 3^3 = 54$, $1^3 + 4^3 = 65$ olduğunu kolayca kontrol ederiz. 9, 16, 28, 35 ve 54 sayılarından hiçbiri tamsayıların iki karesinin toplamı değildir, $65 = 1^2 + 8^2$ iken. Dolayısıyla, > 2 olan, tamsayıların iki karesinin toplamı ve pozitif tamsayıların iki küpünün toplamı olan en küçük tamsayı 65'tir. Aralarında asal iki pozitif tamsayının iki karesinin toplamı ve iki küpünün toplamı olan sonsuz sayıda pozitif tamsayı olduğunu göstermek için, k pozitif tamsayısı için $1 + 2^{6k} = 1^2 + (2^{3k})^2 = 1^3 + (2^{2k})^3$

232. s pozitif tam sayısı için verilmişse, her $k = 1, 2, \ldots, n$ için n sayısı iki tane pozitif tam sayının k. dereceden kuvvetleri toplamı olacak şekilde bir $n > 2$ tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[232]

233. İki tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilemeyen, fakat iki rasyonel sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[233]

234. İki pozitif tam sayının küpleri farkı şeklinde gösterilebilen, fakat iki pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[234]

235. Her $k > 1$, $k \neq 3$ tam sayısı için iki pozitif tam sayının k. dereceden kuvvetleri farkı şeklinde gösterilebilen, fakat iki pozitif tam sayının k. dereceden kuvvetleri toplamı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[235]

---

olduğunu belirtmek yeterlidir.

[232] Örneğin, $1 + 2^s!$ sayısı bu özelliğe sahiptir, çünkü $k = 1, \ldots, s$ için $k \mid s!$'dir. Elbette, $s!$ yerine $[1, 2, \ldots, s]$ sayısını alabilirdik.

[233] Örneğin, $6 \cdot 8^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ formundaki tüm sayılar istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de, n'nin çift olması durumunda bu sayı 9'a bölündüğünde 6 kalanını verdiğinden, n'nin tek olması durumunda ise $(8 \equiv -1(mod\ 9)$ olduğundan) 3 kalanını verdiğinden, böyle bir sayı pozitif tamsayıların iki küpünün toplamı değildir. Öte yandan, bir tamsayının her küpü 9'a bölündüğünde 0, 1 veya -1 kalanını verir, dolayısıyla iki küpün toplamı yalnızca 0, 1, -1, 2 veya -2 kalanını verebilir ve 3 veya 6 kalanını (ne de 4 veya 5) veremez. Öte yandan, $6 = (17/21)^3 + (37/21)^3$ olduğunu kolayca kontrol ederiz, bu da $6 \cdot 8^n = (\frac{17 \cdot 2^n}{21})^3 + (\frac{37 \cdot 2^n}{21})^3$ verir. Böylece, $6 \cdot 8^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ sayıları iki pozitif rasyonel sayının küpüdür.

[234] Kanıt A. Schinzel'e aittir. Örneğin, $7 \cdot 8^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ formundaki tüm sayılar istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de, bir yandan $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $7 \cdot 8^n = (2^{n+1})^3 - (2^n)^3$'e sahibiz; öte yandan $7 \cdot 8^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sayılarından hiçbirinin pozitif tamsayıların iki küpünün toplamı olmadığını kanıtlayacağız. İddianın $n = 0$ ve $n = 1$ için doğru olduğunu kolayca kontrol ederiz. Şimdi, $7 \cdot 8^n$'in pozitif tamsayıların iki küpünün toplamı olduğu bir n pozitif tamsayısının var olduğunu varsayalım ve n bu tür sayıların en küçüğü olsun; dolayısıyla, $n \geq 2$ olur ve x, y pozitif tamsayılar olmak üzere $7 \cdot 8^n = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ olur. Sol taraf çift olduğundan, x ve y ya her ikisi de çift ya da her ikisi de tektir. Eğer her ikisi de tek ise, $x^2 - xy + y^2$ tektir ve sol tarafın sadece 1 ve 7 gibi tek bölenleri olduğundan, $x^2 - xy + y^2 = 1$ veya $x^2 - xy + y^2 = 7$ olmalıdır. İlk durumda $x^3 + y^3 = x + y$ olurdu ve x, y pozitif tamsayılar olduğundan, bu $x = y = 1$ demektir, dolayısıyla $7 \cdot 8^n = 2$ olur, ki bu imkansızdır. Eğer $x^2 - xy + y^2 = 7$ ise, $(2x - y)^2 + 3y^2 = (2y - x)^2 + 3x^2 = 28$ olur, bu da $3x^2 \leq 28$ ve $3y^2 \leq 28$ verir, dolayısıyla $x \leq 3$, $y \leq 3$. Böylece, $x^3 + y^3 \leq 54$ olur, ki bu $x^3 + y^3 = 7 \cdot 8^n \geq 7 \cdot 8^2$ olduğundan imkansızdır. Dolayısıyla, x ve y'nin her ikisi de çifttir, $x = 2x_1, y = 2y_1$; burada x_1 ve y_1 pozitif tamsayılardır ve $7 \cdot 8^n = x^3 + y^3$ olduğundan $7 \cdot 8^{n-1} = x_1^3 + y_1^3$ olur, bu da n sayısının tanımıyla çelişir. Bu nedenle, $7 \cdot 8^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sayılarının istenen özelliğe sahip olduğunu kanıtladık. **NOT.** 1'den büyük bir tamsayının herhangi bir küpüyle bölünemeyen ve rasyonel sayıların iki küpünün toplamı olarak temsil edilemeyen sonsuz sayıda n pozitif tamsayısı olduğu kanıtlanmıştır, ancak kanıtı zordur. ≤ 50 olan bu tür sayılar 3, 4, 5, 10, 11, 14, 18, 21, 23, 25, 29, 36, 38, 39, 41, 44, 45, 46, 47'dir. 22 sayısı, rasyonel sayıların iki küpünün toplamıdır, ancak büyük paydalara sahiptir: $22 = (\frac{17299}{9954})^3 + (\frac{25469}{9954})^3$. Bkz. [23, s. 301 ve s. 354 ve 357'deki tablolar].

[235] Kanıt A. Schinzel'e aittir. $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $(2^k - 1) \cdot 2^{nk}$ formundaki sayılar istenen özelliğe sahiptir. Açıkça $(2^k - 1)2^{nk} = (2^{n+1})^k - 2^{nk}$'ya sahibiz ve $(2^k - 1)2^{nk} = u^k + v^k$ (1) denkleminin u ve v pozitif tamsayılarında çözümü olmadığını göstermek kalıyor. Bu,

236. Her $n > 1$ tam sayısı için iki pozitif tam sayının n. dereceden kuvvetleri toplamı şeklinde gösterilebilen, fakat iki pozitif tam sayının k. dereceden kuvvetleri farkı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.[236]

237. 1'den n'ye kadar olan pozitif tam sayıların kareleri toplamı tam kare olmasını sağlayan en küçük $n > 1$ tam sayısını bulunuz.[237]

$n = 0$ için doğrudur çünkü $1^k + 1^k < 2^k - 1 < 2^k + 1^k$'dır. (1) denkleminin u ve v pozitif tamsayılarında çözümü olan n pozitif tamsayılarının var olduğunu varsayalım ve n bu tür sayıların en küçüğü olsun. u ve v'nin her ikisi de çift olsaydı, $u = 2u_1$, $v = 2v_1$, (1) gereğince $(2^k - 1)2^{(n-1)k} = u_1^k + v_1^k$ olurdu, bu da n sayısının tanımıyla çelişir. (1)'in sol tarafı çift olduğundan, u ve v sayılarının her ikisi de tek olmalıdır. k'nın tek ve > 3 olduğunu varsayalım. $\frac{u^k+v^k}{u+v} = u^{k-1} - u^{k-2}v + u^{k-3}v^2 - \ldots + v^{k-1}$ formülünden, sağ taraf k terim içerdiğinden ve hepsi tek olduğundan, sol tarafın tek olduğu sonucu çıkar; bu sayı $(2^k - 1)2^{nk}$'nın bir böleni olduğundan, $\frac{u^k+v^k}{u+v} \le 2^k - 1$ olmalıdır. $u \ge v$ varsayabiliriz, bu da $\frac{u^k+v^k}{u+v} \ge v^{k-1}$ anlamına gelir, ve sonuç olarak $v^{k-1} < 2^k$; böylece $v < 2^{k/(k-1)} < 3$ (çünkü $k > 3$). k tek olduğundan, $v = 1$ olur ve $\frac{u^k+v^k}{u+v} = \frac{u^k+1}{u+1} \ge u^{k-2}(u-1) > (u-1)^{k-1}$ olur. Buradan $(u-1)^{k-1} < 2^k$ sonucu çıkar, bu da $u - 1 < 3$ verir, dolayısıyla u tek olduğundan, $u = 1$ veya $u = 3$ olur. $u = 1$ ilişkisi imkansızdır, çünkü o zaman $u^k + v^k = 2$ olurdu, ki bu (1) ile çelişir. $u = 3$ ilişkisi de imkansızdır, çünkü $\frac{u^k+v^k}{u+v} = \frac{3^k+1}{4}$ sonucunu verirdi, ki bu ($k > 3$ için) $> 2^k - 1$'dir. Şimdi k'nın çift bir pozitif tamsayı olduğunu varsayalım. u ve v tek olduğundan, $u^k + v^k$ sayısı 4'e bölündüğünde 2 kalanını verir, bu imkansızdır çünkü (1)'in sol tarafı 4 ile bölünebilir. Bu, kanıtı tamamlar.

[236]Kanıt A. Rotkiewicz'e aittir. Eğer $2 \mid n$ ise, k ve l pozitif tamsayıları için $(2k+1)^n + (2l+1)^n$ sayısı, pozitif tamsayıların iki n'inci kuvvetinin toplamıdır; $4t + 2$ formunda bir sayı olarak, iki karenin farkı değildir; $2 \mid n$ olduğundan, pozitif tamsayıların iki n'inci kuvvetinin farkı da değildir. Öte yandan, $2 \nmid n$ ise, $(2^n + 1)2^{nk} = (2^{k+1})^n + (2^k)^n$ sayıları ($k = 0, 1, 2, \ldots$ için) pozitif tamsayıların iki n'inci kuvvetinin farkı değildir. Gerçekten de, $x > y$ olan x ve y pozitif tamsayıları için $(2^n + 1)2^{nk} = x^n - y^n$ olsaydı, $x_1 = x/(x, y)$ ve $y_1 = y/(x, y)$ sayıları pozitif tamsayılar olurdu ve aralarında asal olduklarından her ikisi de çift olamazdı. $2 \nmid (x_1^n - y_1^n)/(x_1 - y_1)$ olduğu kolayca sonucu çıkar ve $(2^n+1)2^{nk} = (x, y)^n(x_1 - y_1)\frac{x_1^n - y_1^n}{x_1 - y_1}$ olduğundan, $\frac{x_1^n - y_1^n}{x_1 - y_1} \mid 2^n + 1$ olmalıdır; bu da $\frac{x_1^n - y_1^n}{x_1 - y_1} \le 2^n + 1$ anlamına gelir. Ancak, $\frac{x_1^n - y_1^n}{x_1 - y_1} > x_1^{n-1} \ge 3^{n-1}$ olur ($x_1 = 2$ olamaz, çünkü o zaman $y_1 = 1$ olurdu ve $2^n - 1 \mid 2^n + 1$ olurdu, ki bu imkansızdır). Dolayısıyla $3^{n-1} < 2^n + 1$ olurdu, ki bu $n \ge 3$ için imkansızdır.

[237]$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ formülünü kullanacağız. m pozitif bir tamsayı olmak üzere $n(n+1)(2n+1) = 6m^2$ olacak şekilde $n > 1$ olan en küçük tamsayıyı bulmalıyız. Altı durumu ayırt edeceğiz:

1. k pozitif bir tamsayı olmak üzere $n = 6k$. Denklemimiz $k(6k+1)(12k+1) = m^2$ halini alır. Sol taraftaki çarpanlar aralarında asal olduğundan, hepsi kare olmalıdır. $k = 1$ ise, $6k + 1$ bir kare değildir. 1'den sonraki bir sonraki kare 4'tür. $k = 4$ ise, $6k + 1 = 5^2$, $12k + 1 = 7^2$ olur ve sonuç olarak $n = 6k = 24$ için $1^2 + 2^2 + \ldots + 24^2$ toplamı pozitif bir tamsayının, 70'in, karesidir.
2. k pozitif bir tamsayı olmak üzere $n = 6k + 1$. Bu durumda $(6k+1)(3k+1)(2k+1) = m^2$ olur ve (aralarında asal olan) $2k + 1$, $3k + 1$ ve $6k + 1$ sayılarının her biri bir kare olmalıdır. $2k + 1$'in kare olduğu en küçük k $k = 4$'tür; ancak bu durumda $n = 6k + 1 > 24$ olur.
3. $k \ge 0$ bir tamsayı olmak üzere $n = 6k + 2$. Bu durumda $(3k+1)(2k+1)(12k+5) = m^2$ olur ve (aralarında asal olan) $3k + 1$, $2k + 1$ ve $12k + 5$ sayılarının kare olması gerekir. $k = 0$ olsaydı, $12k + 5$ sayısı bir kare olmazdı. Öte yandan, k pozitif tamsayısı için, daha önce olduğu gibi, $k \ge 4$ olur, dolayısıyla $n = 6k + 2 > 24$ olur.
4. $k \ge 0$ bir tamsayı olmak üzere $n = 6k + 3$. Bu durumda $(2k+1)(3k+2)(12k+7) = m^2$ olur; $2k + 1$, $3k + 2$ ve $12k + 7$ sayılarının aralarında asal olduklarını kolayca görürüz,

238. a ve b 1'den büyük tam sayılarsa a^b şeklinde olan sayıya **öz kuvvet** diyelim. Sonlu sayıda öz kuvvetin toplamı şeklinde yazılabilen tüm pozitif tam sayıları bulunuz.[238]

b. 6'dan farklı her $n \leq 10$ pozitif tam sayısının iki öz kuvvetin farkı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

239. Kenar uzunlukları tam sayı olan her dik üçgen ve her n pozitif tam sayısı için bu üçgene benzer ve her kenar uzunluğu bir pozitif tam sayının n'den büyük dereceden kuvveti olan bir üçgen bulunduğunu kanıtlayınız.[239]

240. $(n-1)!+1 = n^2$ eşitliğini sağlayan tüm $n > 1$ tam sayılarını bulunuz.[240]

---

dolayısıyla kare olmaları gerekir. $k = 0, 1, 2$ veya 3 olamaz, çünkü bu durumda $3k+2$ sayısı bir kare olmazdı. Dolayısıyla, $k \geq 4$ olur, bu da $n = 6k+3 > 24$ demektir.
5. $k \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere $n = 6k+4$. Bu durumda $(3k+2)(6k+5)(4k+3) = m^2$ olur; burada $3k+2$, $6k+5$ ve $4k+3$ sayıları aralarında asaldır, dolayısıyla kare olmaları gerekir. $k = 0, 1, 2, 3$ olamaz, çünkü o zaman $3k+2$ sayısı bir kare olmazdı. Dolayısıyla, $k \geq 4$ olur ve sonuç olarak $n = 6k+4 > 24$ olur.
6. $k \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere $n = 6k+5$. Bu durumda $(6k+5)(k+1)(12k+11) = m^2$ olur ve $6k+5$, $k+1$ ve $12k+11$ sayıları aralarında asaldır, dolayısıyla hepsi kare olmalıdır. $k = 0, 1, 2, 3$ olamaz, çünkü bu durumda $6k+5$ sayısı bir kare olmazdı. Dolayısıyla, $k \geq 4$ ve $n = 6k+5 > 24$ olur. Böylece, $1^2+2^2+\ldots+n^2$'nin bir kare olduğu $n > 1$ olan en küçük tamsayının $n = 24$ olduğunu kanıtladık.
NOT. $1^2+2^2+\ldots+n^2$'nin bir kare olduğu tek pozitif tamsayının $n = 24$ olduğunu göstermek oldukça zordur. Öte yandan, $1^3+2^3+\ldots+n^3$ toplamı her n pozitif tamsayısı için bir karedir, ancak herhangi bir n için pozitif bir tamsayının küpü olmadığı kanıtlanabilir.

[238] 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 19, 23 dışındaki tüm pozitif tamsayılar. Yukarıdaki on üç sayının hiçbirinin, sonlu sayıda öz kuvvetin (bunlar sırasıyla 2^2, 2^3, 3^2, $2^4 = 4^2$, 5^2, 3^3, 2^5, 6^2, ...'ye eşittir) toplamı olmadığını göstermek kolaydır. Şimdi n, yukarıdaki on üç sayıdan herhangi birinden farklı bir pozitif tamsayı olsun. k pozitif bir tamsayı olmak üzere $n = 4k$ ise, n sayısı k tane 2^2 sayısının toplamıdır. $n = 4k+1$ ise, $n \neq 1$ ve $n \neq 5$ olduğundan, $k \geq 2$ varsayabiliriz; o zaman $n = 4k+1 = 3^2+4(k-2)$ olur, burada $k-2$ bir tamsayı ≥ 0'dır. $k = 2$ ise, $n = 3^2$ olur, $k > 2$ ise, $n = 3^2+2^2+\ldots+2^2$ olur, burada 2^2'ye eşit terimlerin sayısı $k-2$'dir. $n = 4k+2$ ise, n sayısı 6, 10 ve 14 sayılarından farklı olduğundan, $k \geq 4$ olur ve $n = 4k+2 = 3^2+3^2+4(k-4)$ olur. Yine n sayısının istenen özelliğe sahip olduğu sonucu çıkar. Son olarak, $n = 4k+3$ ise, $n \neq 3, 7, 11, 15, 19$ ve 23 olduğundan, $k \geq 6$ olur ve $n = 3^2+3^2+3^2+4(k-6)$ olur, bu da n'nin istenen özelliğe sahip olduğunu gösterir.
b. $1 = 3^2-2^3$, $2 = 3^3-5^2$, $3 = 2^7-5^3$, $4 = 5^3-11^2 = 2^3-2^2$, $5 = 3^2-2^2$, $7 = 2^7-11^2$, $8 = 2^4-2^3$, $9 = 5^2-4^2$, $10 = 13^3-3^7$.
NOT. 6 sayısının iki öz kuvvetin farkı olup olmadığını bilmiyoruz. Her pozitif tamsayının sonlu ≥ 0 sayıda, iki öz kuvvetin farkı olarak gösterimi olduğu varsayılmıştır.

[239] a, b, c pozitif tamsayılar olmak üzere $a^2+b^2 = c^2$ ise, bu eşitliğin her iki tarafını $a^{2(4n^2-1)}b^{4n(2n+1)(n-1)}c^{4n^2(2n-1)}$ sayısı ile çarparak $[(a^{2n}b^{(2n+1)(n-1)}c^{n(2n-1)})^{2n}]^2 + [(a^{2n+1}b^{2n^2-1}c^{2n^2})^{2n-1}]^2 = [(a^{2n-1}b^{2n(n-1)}c^{2n^2-2n+1})^{2n+1}]^2$ elde ederiz.

[240] Böyle tek bir pozitif tamsayı vardır, $n = 5$. Bu sayının $(n-1)!+1 = n^2$ denklemini sağladığını kolayca kontrol ederiz ve $n = 2, 3$ ve 4 sayılarının bu denklemi sağlamadığını da kontrol ederiz. $n = 6$ için $n^2 > 6n-4$ elde ederiz ve aynı eşitsizliğin $n \geq 6$ olan her tamsayı için geçerli olduğunu tümevarımla gösteririz. $n \geq 6$ bir tamsayı ise, $n^2 > 6n-4$ olduğundan $(n-1)!+1 > 2(n-1)(n-2) = 2(n^2-3n+2) > n^2$ olur. Dolayısıyla, $n \geq 6$ tamsayısı için $(n-1)!+1 = n^2$ olamaz. **NOT.** $n^2 \mid (n-1)!+1$ olan $n > 5$ olan sadece iki pozitif tamsayı biliyoruz, 13 ve 563 sayıları, ve bu tür daha fazla sayı olup olmadığını ya da sonlu sayıda olup olmadığını bilmiyoruz. Böyle her sayının asal olması gerektiğini biliyoruz. $n = 5, 6$ ve 8 için $(n-1)!+1$ sayılarının (sırasıyla 5, 11 ve 71 sayılarının) kare olduğunu da belirtelim ve

241. İki ardışık üçgen sayısının çarpımının hiçbir zaman tam kare olmayacağını, fakat her $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ sayısı için $t_n t_m$ çarpımının tam kare olacak şekilde t_n'den büyük olan sonsuz sayıda t_m üçgen sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[241]

242. Logaritma tablosu kullanmadan $F_{1945} = 2^{2^{1945}} + 1$ sayısının basamak sayısının 10^{582}'den büyük olduğunu kanıtlayınız ve (F_{1945} sayısının en küçük asal böleni olan) $5 \cdot 2^{1947} + 1$ sayısının basamak sayısını bulunuz.[242]

243. $2^{11213} - 1$ (bilinen en büyük asal sayı) sayısının basamak sayısını bulunuz.[243]

244. $2^{12112}(2^{12112} - 1)$ (bilinen en büyük mükemmel sayı) sayısının basamak sayısını bulunuz.[244]

245. 3!!! sayısının basamak sayısının 1000'den fazla olduğunu kanıtlayınız ve bu sayının sonundaki 0 sayısını bulunuz.[245]

---

bu tür başka sayıların olup olmadığını bilmiyoruz.

[241] $n > 1$ bir tamsayı için $t_{n-1}t_n = m^2$ olsaydı, m pozitif bir tamsayı olmak üzere, $(n^2-1)n^2 = (2m)^2$ olurdu ve n^2-1 ile n^2 aralarında asal olduğundan, her birinin bir kare olması gerekirdi, ki bu imkansızdır çünkü farkları bire eşit olan iki tamsayı karesi yoktur. Şimdi n verilen bir pozitif tamsayı olsun. $x^2 - n(n+1)y^2 = 1$ denkleminin x ve y pozitif tamsayılarında sonsuz sayıda çözümü vardır. Gerçekten de, bu çözümlerden biri $x = 2n+1$ ve $y = 2$'dir; x ve y pozitif tamsayıları için $x^2 - n(n+1)y^2 = 1$ ise, o zaman $[(2n+1)x + 2n(n+1)y]^2 - n(n+1)[2x + (2n+1)y]^2 = 1$ olur. x ve y, $x^2 - n(n+1)y^2 = 1$ olacak şekilde pozitif tamsayılar ise, $t_n t_{2t_n y^2} = t_n t_n y^2(2t_n y^2 + 1) = t_n^2 y^2 x^2 = (t_n yx)^2$ olur. Örneğin, $n = 2$ için $t_2 t_{24} = 30^2$, $t_2 t_{2400} = (2 \cdot 20 \cdot 49)^2$ (kaynakta t_3 ve 3· yazıyor, $n = 2$ için $t_n = t_2 = 3$'tür) vb. elde ederiz.

[242] $2^{10} = 1024 > 10^3$'e sahibiz. Buradan $2^{1945} = 2^5(2^{10})^{194} > 10 \cdot 10^{3 \cdot 194} = 10^{583}$ (kaynakta 2^5 yerine 10 yazıyor) sonucu çıkar. Böylece, $2^{2^{1945}} > 2^{10^{583}} = (2^{10})^{10^{582}} > 10^{3 \cdot 10^{582}}$; ve son sayının basamak sayısı 10^{582}'den büyüktür. $5 \cdot 2^{1947} + 1$ sayısı, $5 \cdot 2^{1947} = 10 \cdot 2^{1946}$ sayısı ile aynı basamak sayısına sahiptir ve 2'nin ondalık logaritması $log_{10}2 = 0,30103\ldots$ olduğundan, $2^{1946} = 10^{1946 log_{10}2} = 10^{585,8\ldots}$ olur ve buradan sayımızın 586 basamağı olduğu sonucu çıkar. **NOT.** F_{1945} bilinen en büyük bileşik Fermat sayısıdır.

[243] $2^{11213} - 1$ sayısı (ondalık sistemde) 2^{11213} ile aynı basamak sayısına sahiptir, çünkü ondan sadece bir eksiktir. Dolayısıyla, 2^{11213}'ün ondalık basamak sayısını hesaplamak yeterlidir. n pozitif bir tamsayısı x reel olmak üzere $n = 10^x$ formunda ise (tabii ki $x \geq 0$), $[x]$ x'i aşmayan en büyük tamsayıyı göstermek üzere, $10^{[x]} \leq n < 10^{[x]+1}$ olur (kaynakta $10^x \leq n$ yazıyor) ve buradan n sayısının $[x] + 1$ ondalık basamağı olduğu sonucu çıkar. $2^{11213} = 10^{11213\ log_{10}2}$ olur ve $log_{10}2 = 0,30103\ldots$ olduğundan, $3375 < 11213\ log_{10}2 < 3376$ olur. Dolayısıyla, 2^{11213} sayısının (dolayısıyla $2^{11213} - 1$'in de) 3376 ondalık basamağı vardır.

[244] $2^{11212}(2^{11213} - 1) = 2^{22425} - 2^{11212}$. Önce 2^{22425} sayısının basamak sayısını hesaplarız. $22425\ log_{10}2 = 22425 \cdot 0,30103\ldots = 6750,597\ldots$ olduğundan, (Problem 243'ün çözümüne bakınız) 2^{22425} sayısının 6751 basamağı olduğu sonucunu elde ederiz ve $2^{22425} = 10^{6750,597\ldots} = 10^{6750} \cdot 10^{0,597\ldots}$ olur. $10^{0,597\ldots} > 10^{1/2} > 3$ olduğundan, $10^{6751} > 2^{22425} > 3 \cdot 10^{6750}$ elde ederiz, bu da 2^{22425}'in ilk basamağının ≥ 3 olduğunu gösterir. Dolayısıyla, 2^{22425} sayısından daha az basamak sayısına sahip olan 2^{11212} sayısını (kaynakta 2^{11213} yazıyor) çıkarırsak, ilkinin basamak sayısını değiştirmemiş oluruz. Sonuç olarak, $2^{11212}(2^{11213} - 1)$ sayısı 6751 basamağa sahiptir.

[245] $3! = 6$, $3!! = 6! = 720$, $3!!! = 720! > 99!100^{621} > 10^{1242}$ olur. Dolayısıyla, 3!!! sayısı binden fazla basamağa sahiptir. İyi bilinen teoreme göre (bkz. örneğin, Sierpiński [37, s. 131, Teorem 6]), m pozitif bir tamsayı ve p bir asal ise, $m!$'i bölen p'nin en büyük kuvveti $[\frac{m}{p}] + [\frac{m}{p^2}] + [\frac{m}{p^3}] + \ldots$'dir; burada $[x]$, x'i aşmayan en büyük tamsayıyı gösterir. Buradan,

246. Aşağıdaki özelliğe sahip olan $m > 1$ tam sayısı bulunuz: bir x tam sayı sayısı için $f(x)$ değeri m'ye bölünecek, başka bir x değeri için $f(x)$ değeri m'ye bölündüğünde 1 kalanı verecek ve tüm x tam sayı değerleri için $f(x)$ değerleri m'ye bölündüğünde 0 veya 1 kalanı verecek şekilde tam sayı katsayılı bir $f(x)$ polinomu bulunur.[246]

247. m ve n pozitif tam sayılar ve $D = [(4m^2+1)n+m]^2+4mn+1$ olmak üzere $\sqrt{D}$ sayısının sürekli kesir şeklinde gösteriniz.[247]

3!!! = 720!'i bölen 5'in en büyük kuvvetinin $[\frac{720}{5}]+[\frac{720}{25}]+[\frac{720}{125}]+[\frac{720}{625}] = 144+28+5+1 = 178$ olduğu sonucu çıkar; 720!'i bölen 2'nin en büyük kuvveti ise daha büyüktür (çünkü $[\frac{720}{2}] = 360$'tır). Buradan, 3!!! sayısının ondalık açılımının sonunda 178 sıfır olduğu sonucu çıkar.

[246] Çözüm A. Schinzel'e aittir. Sadece asal sayıların kuvvetleri (pozitif tamsayı üsleriyle) olan m pozitif tamsayıları için. Gerçekten de, p bir asal ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere $m = p^k$ ise, $f(x) = x^{\phi(p^k)}$ için $p \nmid x$ durumunda, Euler teoremine göre $f(x) \equiv 1(mod\ p^k)$ olur. $p \mid x$ durumunda ise $\phi(p^k) \geq p^{k-1} \geq k$ (kolayca tümevarımla gösterilebilir) olduğundan, $p^k \mid x^k$ ve sonuç olarak $p^k \mid x^{\phi(p^k)}$ olur. Dolayısıyla, $f(x) \equiv 0(mod\ p^k)$ olur. $m > 1$ bir tamsayı ise ve m bir asal sayının kuvveti değilse, m'nin en az iki farklı asal böleni vardır, p ve $q \neq p$. $f(x)$ tamsayı katsayılı bir polinom olsun ve $f(x_1) \equiv 0(mod\ m)$ ve $f(x_2) \equiv 1(mod\ m)$ olacak şekilde x_1 ve x_2 tamsayıları bulunsun. Dolayısıyla, ($p \mid m$ ve $q \mid m$ olduğundan) $f(x_1) \equiv 0(mod\ p)$ ve $f(x_2) \equiv 1(mod\ q)$ (kaynakta $f(x_1) \equiv 1$ yazıyor) ilişkilerine de sahip oluruz. p ve q farklı asallar olduğundan, Çin kalan teoremine göre $x_0 \equiv x_1(mod\ p)$ ve $x_0 \equiv x_2(mod\ q)$ olacak şekilde bir x_0 tamsayısı vardır. Buradan $f(x_0) \equiv f(x_1) \equiv 0(mod\ p)$ ve $f(x_0) \equiv f(x_2) \equiv 1(mod\ q)$ sonucu çıkar. Bu denkliklerden ilki $f(x_0) \equiv 1(mod\ m)$ olamayacağımızı ima eder. Benzer şekilde, ikinci denklik $f(x_0) \equiv 0(mod\ m)$ olamayacağımızı ima eder. Sonuç olarak, $f(x_0)$, m'ye bölündüğünde ne 0 kalanını ne de 1 kalanını verir. Dolayısıyla, m bir asalın kuvveti değilse, istenen koşulları sağlayan tamsayı katsayılı bir $f(x)$ polinomu yoktur.

[247] $D < [(4m^2+1)n+m+1]^2$ olduğunu kolayca görürüz, dolayısıyla $\sqrt{D}$ sayısının tam kısmı $a_0 = (4m^2+1)n+m$'ye eşittir, bu da $D-a_0^2 = 4mn+1$ ve $x_1 = \frac{1}{\sqrt{D}-a_0} = \frac{\sqrt{D}+a_0}{D-a_0^2}$ demektir. a_0, $\sqrt{D}$ sayısının tam kısmı olduğundan, $a_0 < \sqrt{D} < a_0+1$ olur, bu da $2a_0 < \sqrt{D}+a_0 < 2a_0+1$ sonucunu verir ve $a_0 = (4mn+1)m+n$ (kaynakta $a_0 = (4m^2+1)n+m$) olduğundan, $2m + \frac{2n}{4mn+1} < \frac{\sqrt{D}+a_0}{D-a_0^2} < 2m + \frac{2n+1}{4mn+1}$ buluruz. $(2n+1)/(4mn+1) \leq 1$ olduğundan, $x_1 = (\sqrt{D}+a_0)/(D-a_0^2)$ sayısının tam kısmının $a_1 = 2m$'ye eşit olduğunu görürüz. Dolayısıyla, $x_1 = a_1 + 1/x_2$ ve $x_2 = 1/(x_1-a_1)$ olur. Öte yandan, $x_1 - a_1 = \frac{\sqrt{D}+a_0}{4mn+1} - 2m = \frac{\sqrt{D}-[(4mn+1)m-n]}{4mn+1}$ (kaynakta $a_0 = (4m^2+1)n+m$ iken $a_0 - 2m(4mn+1)$ hesaplanmalı) ve sonuç olarak, $x_2 = \frac{(4mn+1)[\sqrt{D}+(4mn+1)m-n]}{D-[(4mn+1)m-n]^2}$ olur. $D = [(4mn+1)m-n]^2 + (4mn+1)^2$ (kaynakta $D-[(4mn+1)m-n]^2 = (4mn+1)$ olmalı, $4mn+1$ değil) olduğunu kolayca kontrol ederiz, bu da $x_2 = \frac{\sqrt{D}+(4mn+1)m-n}{4mn+1}$ (kaynakta x_2) sonucunu verir ve $a_0 < \sqrt{D} < a_0+1$ veya $(4mn+1)m+n < \sqrt{D} < (4mn+1)m+n+1$ (kaynakta $a_0 = (4m^2+1)n+m$) olduğundan, $2m < x_2 < 2m + \frac{1}{4mn+1}$ elde ederiz. Sonuç olarak, x_2'nin tam kısmı $a_2 = 2m$'ye eşittir. Dolayısıyla, $x_2 = a_2 + 1/x_3$ olur, bu da $x_3 = 1/(x_2-a_2)$ verir. Ancak, $x_2 - a_2 = \frac{\sqrt{D}+(4mn+1)m-n}{4mn+1} - 2m = \frac{\sqrt{D}-[(4mn+1)m+n]}{4mn+1}$ (kaynakta $-(4mn+1)m-n$ değil, $-(4mn+1)m+n$ olmalı). Sonuç olarak, $x_3 = \frac{(4mn+1)[\sqrt{D}+(4mn+1)m+n]}{D-[(4mn+1)m+n]^2} = \sqrt{D}+(4mn+1)m+n = \sqrt{D}+a_0$ (kaynakta $a_0 = (4m^2+1)n+m$) olur, bu da x_3'ün tam kısmının $2a_0$ olduğunu ve $\sqrt{D}$ sayısının $2m, 2m$ ve $2a_0$ sayılarından oluşan üç terimli periyoda sahip aritmetik sürekli kesre açılımı olduğunu ima eder. **NOT.** $\sqrt{D}$'nin aritmetik sürekli kesre açılımının üç terimli bir periyoda sahip olduğu tüm pozitif D tamsayılarının, tam da yukarıda ele alınan D sayıları olduğu gösterilebilir. Bkz. Sierpiński [32].

248. $\varphi(n)$ Euler fonksiyonu, $d(n)$ de n sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısını göstermek üzere $\varphi(n) = d(n)$ eşitliğini sağlayan tüm $n \leq 30$ pozitif tam sayısını bulunuz.[248]

249. Her g pozitif tam sayısı için, her $w > 1$ rasyonel sayısının, $k > g$ ve $s \geq 0$ tam sayılar olmak üzere

$$w = (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{k+1}) \dots (1 + \frac{1}{k+s})$$

şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.[249]

250. P. Erdős ve M. Surányi'nin şu teoremini kanıtlayınız: her k tam sayısı sonsuz değişik yolla, m pozitif tam sayı olmak üzere ve $+$ veya $-$ işaretleri belirli bir şekilde seçilerek

$$k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2$$

şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.[250]

---

[248] $n \leq 30$ için $\phi(n)$ ve $d(n)$ fonksiyonlarının değerlerini, bu fonksiyonlar için iyi bilinen formüllerden, yani $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_s^{\alpha_s}$ ise $\phi(n) = q_1^{\alpha_1 - 1}(q_1 - 1) \dots q_s^{\alpha_s - 1}(q_s - 1)$, $d(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_s + 1)$'den hesaplayarak, $\phi(n) = d(n)$ olan $n \leq 30$ değerlerinin sadece $n = 1, 3, 8, 10, 18, 24$ ve 30 olduğunu kolayca görürüz. Burada $\phi(1) = d(1) = 1$, $\phi(3) = d(3) = 2$, $\phi(8) = d(8) = 4$, $\phi(10) = d(10) = 4$, $\phi(18) = d(18) = 6$, $\phi(24) = d(24) = 8$, $\phi(30) = d(30) = 8$'e sahibiz. **NOT.** n pozitif tamsayıları için $\phi(n) = d(n)$ denkleminin başka çözümü olmadığı kanıtlanmıştır. $n > 30$ için $\phi(n) > d(n)$ olduğu gösterilebilir; bkz. Pólya ve Szegö [15, Bölüm VIII, problem 45].

[249] k pozitif tamsayısı ve $s \geq 0$ tamsayısı için $(1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{k+1}) \dots (1 + \frac{1}{k+s}) = 1 + \frac{s+1}{k}$ (1) olduğunu kolayca kontrol ederiz. Pozitif bir w rasyonel sayısı için $w - 1$, m ve n pozitif tamsayılar (aralarında asal olmaları gerekmez) ve $n > g$ (kaynakta g=?) olmak üzere $w - 1 = m/n$ formunda her zaman temsil edilebilir. $k = n$ ve $s = m - 1$ almak yeterlidir; o zaman (1)'in sağ tarafı w'ye eşit olacaktır. Bu şekilde w sayısı için istenen ayrışımı elde ederiz.

[250] Önce her $k \geq 0$ tamsayısının, m pozitif bir tamsayı olmak üzere $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm m^2$ (1) formunda en az bir yolla temsil edilebileceğini kanıtlayacağız. İddia 0 sayısı için geçerlidir, çünkü $0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$. 1, 2 ve 3 sayıları için de geçerlidir, çünkü $1 = 1^2$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$, $3 = -1^2 + 2^2$ (kaynakta $22, 4$ yazıyor, $3 = -1^2 + 2^2$ olmalı), $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$. Şimdi, teoremimizin her pozitif k tamsayısı için doğru olduğunu kanıtlamak yeterlidir ve 0, 1, 2 ve 3 sayıları için doğru olduğundan, teoremin $k \geq 0$ bir tamsayı için doğruysa, $k + 4$ sayısı için de doğru olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Öyleyse, teoremin k sayısı için doğru olduğunu varsayalım; dolayısıyla, m pozitif bir tamsayısı vardır öyle ki + ve - işaretlerinin uygun seçimiyle (1) ilişkisine sahibiz. $(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 = 4$ (2) olduğundan, (1)'den $k + 4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$ (kaynakta (2) etiketi yanlış yerde) olduğu sonucu çıkar, yani teoremimiz $k + 4$ sayısı için geçerlidir. Dolayısıyla, her tamsayı için doğrudur. (2)'den (kaynaktaki (2) değil, $4 = \dots$ formülü olmalı) her m pozitif tamsayısı için $(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 - (m+5)^2 + (m+6)^2 + (m+7)^2 - (m+8)^2 = 0$ olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla, (1)'de m sayısını $m + 8$ ile, dolayısıyla $m + 16$ ile vb. değiştirebiliriz. Bu, her k tamsayısının (1) formunda sonsuz sayıda yolla temsil edilebileceğini gösterir, ki bu kanıtlanması gerekendi.

Kaynakça

Anning, P. 1956. *Scripta Mathematica* 22: 227.

Baker, C. L., ve F. J. Gruenberger. 1959. *The first six millions prime numbers.* The RAND Corp., Santa Monica, publ. by the Microcard Foundation, Madison, Wisc.

Cassels, J. W. S. 1960/61. “On a diophantine equation”. *Acta Arithmetica* 6 (1960/61): 47-52.

Cassels, J. W. S., ve G. Sansone. 1960/61. “Sur le problème de M. Werner Mnich”. *Acta Arithmetica* 7 (1960/61): 187-90.

Cipolla, M. 1904. “Sui numeri compositi P che verificiano la congruenza di Fermat $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$”. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 9: 139-60.

Demjanenko, V. A. 1966. “On sums of four cubes, (Russian)”. *Izv. Vyssich Ucebnykh Zavedenii, Matematika*, 63-69.

Dickson, L. E. 1920. *History of the Theory of Numbers, vol. II.* Carnegie Institution.

Erdős, P. 1962. “On a problem of Sierpiński”. *Atti Accad. Nazionale dei Lincei* 33: 122-24.

———. 1963. *Quelques problèmes de la Théorie des Nombres.* Monographies de l’Enseignement Math. 6. Genève.

Hyyro, S. 1964. “Uber das Catalansche Problem”. *Annales Universitatis Turkuensis, Series AI*, sy 79.

Kaprekar, D. R. 1955. “Multidigital numbers”. *Scripta Mathematica* 21: 27.

Khatri, M. N. 1954. “An interesting geometrical progression”. *Scripta Mathematica* 20: 57.

———. 1962. “Three consecutive integers cannot be powers”. *Colloquium Mathematicum* 9: 297.

Pólya, G. 1918. “Functions not formulas for primes”. *Mathematische Zeitschrift* 1: 144.

Pólya, G., ve G. Szegő. 1925. *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis, II.* Berlin.

Reiner, J. 1943. “Zur arithmetischen Untersuchung der Polynome”. *American Mathematical Monthly* 50: 619.

Reutter, O. 1963. *Elemente der Mathematik* 18: 89.

Schinzel, A. 1958. “Sur l’existence d’un cercle passant par un nombre donne de points aux coordonnees entieres”. *L’Enseignement Mathématique* 4: 71-72.

———. 1959. “Démonstration d’une conséquence de l’hypothèse de Goldbach”. *Compositio Mathematica* 14: 74-76.

———. 1963. “Remarque au travail de W. Sierpiński sur les nombres $a^x + 1$”. *Colloquium Mathematicum* 10: 137-38.

Schinzel, A., ve W. Sierpiński. 1958a. “Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers”. *Acta Arithmetica* 4: 185-208.

———. 1958b. “Sur les sommes de quatre cubes”. *Acta Arithmetica* 4: 20-30.

Selmer, F. S. 1951. “The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$”. *Acta Mathematica* 85: 203-362.

Sierpiński, W. 1950. “Sur les puissances du nombre 2”. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* 33: 246-51.

———. 1957. *On representations of rational numbers as sums of unit fractions, (in Polish).* Warszawa.

———. 1958a. “Sur une question concernant le nombre de diviseurs premiers d’un nombre naturel”. *Colloquium Mathematicum* 6: 209-10.

———. 1958b. *Teoria liczb, (Number Theory; in Polish) Cz. II.* Monografie Matematyczne 38. Warszawa.

———. 1961a. “Démonstration élémentaire d’un théorème sur les sommes de trois nombres premiers distincts”. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Drustvo Mat. Fiz. Hrvatske, ser. II* 16: 87-88.

———. 1961b. “Remarques sur le travail de M. J. W. S. Cassels ”On a diophantine equation””. *Acta Arithmetica* 6: 469-71.

———. 1961c. “Sur les sommes des chiffres de nombres premiers”. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Ser. II* 10: 229-32.

———. 1961d. “Sur un problème concernant les nombres $k \cdot 2^n + 1$”. *Elemente der Mathematik* 15: 73-74.

———. 1962a. “O liczbach naturalnych D, dla których okres rozwinieçia $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy arytmetyczny ma trzy wyrazy, (On positive integers D for which the period of expansion of $\sqrt{D}$ into an arithmetic continued fraction has three terms; in Polish)”. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości Matematyczne* 5: 53-55.

———. 1962b. “Sur quelques conséquences d’une hypothèse de M. A. Schinzel”. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* 31: 317-20.

———. 1963. “Sur les nombres qui sont sommes et différences de deux nombres premiers”. *Publ. Electr. Facultet, Sér. Math. Phys., Beograd*, sy 84: 1-2.

———. 1964a. *Elementary Theory of Numbers.* Monografie Matematyczne 42. Warszawa.

———. 1964b. “Remarques sur un problème de M. P. Erdős”. *Publications de l’Institut Mathématique de Beograd* 4 (18): 125-34.

———. 1964c. “Sur les nombres $a^x + 1$”. *Elemente der Mathematik* 19: 106.