250 Temel Sayılar Teorisi Problemi

23 Ekim 2024

İçindekiler

Hoşgeldiniz

Bu kitap, Waclaw Sierpinski'nin *250 Problems in Elementary Number Theory* (Sierpinski (1970)) kitabının Türkçeye uyarlanmasıyla oluşturulmuştur.

1 Tam Sayıların Bölünmesi

1. n^2+1 sayısının $n+1$'e bölünecek şekilde tüm pozitif tam sayı n değerlerini bulunuz.[1]
2. x^3-3 sayısının $x-3$'e bölünecek şekilde tüm $x \neq 3$ tam sayılarını bulunuz.[2]
3. $4n^2+1$ sayısının 5'e ve 13'e bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda pozitif tam sayı n'nin bulunduğunu kanıtlayınız.[3]
4. Her pozitif tam sayı n için $3n^3+26n-27$ sayısının 169'a bölündüğünü kanıtlayınız.[4]
5. $k=0,1,2,...$ için $22^{6k+2}+3$ sayısının 19'a bölündüğünü kanıtlayınız.[5]
6. $2^{70}+3^{70}$ sayısının 13'e bölündüğünü gösteriniz.[6]
7. $20^{15}-1$ sayısının $11 \cdot 31 \cdot 61$ çarpanına bölündüğünü kanıtlayınız.[7]

[1] Bu koşulu sağlayan yalnızca bir pozitif tam sayı vardır: $n=1$. Gerçekten de $n^2+1=n(n+1)-(n-1)$'dir; bu nedenle, $n+1 \mid n^2+1$ ise, $n+1 \mid n-1$ olur. Bu, pozitif tam sayılar için yalnızca $n-1=0$ olduğunda mümkündür, yani $n=1$ olmalıdır.

[2] $x-3=t$ olarak tanımlayalım. Böylece, t, $t \neq 0$ olacak şekilde bir tam sayı olur ve $t \mid (t+3)^3-3$, bu da $t \mid 3^3-3$ yani $t \mid 24$ koşuluna eşdeğerdir. Bu nedenle, t'nin 24'ün bir tam sayı böleni olması gerekli ve yeterlidir. Bu durumda, t, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$ sayılarından biri olmalıdır. $x=t+3$ için şu değerleri elde ederiz: $-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15$, ve 27.

[3] Örneğin, $65k+56$ aritmetik dizisindeki tüm n sayıları (burada $k=0,1,2,...$), istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de, $n=65k+56$ için, $k \geq 0$ tam sayısı ile $n \equiv 1 \pmod 5$ ve $n \equiv 4 \pmod{13}$ olur. Bu nedenle, $4n^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ ve $4n^2+1 \equiv 0 \pmod{13}$ olur. Böylece, $5 \mid 4n^2+1$ ve $13 \mid 4n^2+1$.

[4] İddiamızı tümevarım yöntemiyle kanıtlayacağız. $169 \mid 3^6-26-27=676=4 \cdot 169$ olduğunu biliyoruz. Sonraki adımda, $3^{3(n+1)+3}-26(n+1)-27-(3^{3n+3}-26n-27)=26(3^{3n+3}-1)$ elde ederiz. Ancak, $13 \mid 3^3-1$, bu nedenle $13 \mid 3^{3(n+1)}-1$ ve $169 \mid 26(3^{3n+3}-1)$'dir. Tümevarım yöntemiyle kanıt hemen ortaya çıkar.

[5] $2^6=64 \equiv 1 \pmod 9$ olduğuna göre, $k=0,1,2,...$ için $2^{6k} \equiv 1 \pmod 9$ elde ederiz. Bu nedenle $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod 9$ olur ve her iki taraf da çift olduğundan, $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod{18}$ elde ederiz. Buradan $2^{6k+2}=18t+2^2$ elde ederiz, burada $t \geq 0$ bir tam sayıdır. Ancak, Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$'dur ve $2^{18t} \equiv 1 \pmod{19}$ olur, $t=0,1,2,...$ için. Böylece, $2^{6k+2} \equiv 2^{18t+4} \equiv 2^4 \pmod{19}$ olur; buradan da $2^{6k+2}+3 \equiv 2^4+3 \equiv 0 \pmod{19}$ elde edilir ve bu da kanıtlanması gereken şeydir.

[6] Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ olduğundan, $2^{60} \equiv 1 \pmod{13}$ elde ederiz. Ayrıca, $2^5 \equiv 6 \pmod{13}$ olduğu için, $2^{10} \equiv -3 \pmod{13}$ elde ederiz. Öte yandan, $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$'tür, bu da $3^{69} \equiv 1 \pmod{13}$ ve $3^{70} \equiv 3 \pmod{13}$ anlamına gelir. Bu nedenle, $2^{70}+3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$ olur, yani $13 \mid 2^{70}+3^{70}$, bu da kanıtlanması gereken şeydir.

[7] Açıkça görülüyor ki, $20^{15}-1$ sayısının her bir asal böleni olan 11, 31 ve 61'in $20^{15}-1$'i böldüğünü göstermek yeterlidir. $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ ve $10 \equiv -1 \pmod{11}$ olduğundan, $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$, bu da $20^5 \equiv 1 \pmod{11}$ ve $20^{15} \equiv 1 \pmod{11}$ anlamına gelir. Dolayısıyla $11 \mid 20^{15}-1$. Sonra, $20 \equiv -11 \pmod{31}$ olduğundan, $20^2 \equiv 121 \equiv -3 \pmod{31}$'dir. Bu nedenle, $20^3 \equiv (-11)(-3)=33 \equiv 2 \pmod{31}$ ve $20^{15} \equiv 2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ olur. Böylece, $31 \mid 20^{15}-1$. Son olarak, $3^4 \equiv 20 \pmod{61}$ ve bu da $20^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1 \pmod{61}$ anlamına gelir (Fermat'ın küçük teoremine göre); bu nedenle $61 \mid 20^{15}-1$.

8. Her pozitif tam sayı m ve $a > 1$ tam sayısı için

$$\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = (a - 1, m)$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.[8]

9. Her pozitif n sayısı için $3 \cdot (15^5 + 25^5 + \cdots + n^5)$ sayısının $13^3 + 23^3 + \cdots + n^3$'e bölündüğünü kanıtlayınız.

10. $1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ sayısının n'e bölünmesini sağlayan tüm $n > 1$ tam sayılarını bulunuz.

11. Pozitif tam n sayısı için $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ ve $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ sayılarından hangisinin 5'e bölünüp, hangisinin bölünmediğini tespit ediniz.

---

[8] $d = \left(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1\right)$ olarak tanımlayalım. Aşağıdaki eşitliği göz önünde bulunduralım:

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = (a^{m-1} - 1) + (a^{m-2} - 1) + \cdots + (a - 1) + m \tag{1}$$

ve $a - 1 \mid a^k - 1$ ifadesinin $k = 0, 1, 2, \ldots$ için geçerli olduğunu dikkate alarak, $d \mid m$ elde ederiz. Bu nedenle, $a - 1$ ve m sayılarının $d > \delta$ ortak bir böleni olsaydı, (1) eşitliğine göre $\delta \mid \frac{a^m-1}{a-1}$ olurdu ve $a^m - 1$ ile $a - 1$ sayıları $\delta > d$ ortak bir bölenine sahip olurdu ki bu imkânsızdır. Bu nedenle, d, $a - 1$ ve m sayılarının en büyük ortak bölenidir ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

Kaynakça

Sierpinski, Waclaw. 1970. *250 problems in elementary number theory*. American Elsevier Publishing Company.