250 Temel Sayılar Teorisi Problemi

23 Ekim 2024

İçindekiler

Hoşgeldiniz

Bu kitap, Waclaw Sierpinski'nin *250 Problems in Elementary Number Theory* (Sierpinski (1970)) kitabının Türkçeye uyarlanmasıyla oluşturulmuştur.

1 Tam Sayıların Bölünmesi

1. $n^2 + 1$ sayısının $n + 1$'e bölünecek şekilde tüm pozitif tam sayı n değerlerini bulunuz.[1]

2. $x^3 - 3$ sayısının $x - 3$'e bölünecek şekilde tüm $x \neq 3$ tam sayılarını bulunuz.[2]

3. $4n^2 + 1$ sayısının 5'e ve 13'e bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda pozitif tam sayı n'nin bulunduğunu kanıtlayınız.[3]

4. Her pozitif tam sayı n için $3n^3 + 26n - 27$ sayısının 169'a bölündüğünü kanıtlayınız.[4]

5. $k = 0, 1, 2, ...$ için $22^{6k+2} + 3$ sayısının 19'a bölündüğünü kanıtlayınız.[5]

6. $2^{70} + 3^{70}$ sayısının 13'e bölündüğünü gösteriniz.[6]

---

[1] Bu koşulu sağlayan yalnızca bir pozitif tam sayı vardır: $n = 1$. Gerçekten de $n^2 + 1 = n(n+1) - (n-1)$'dir; bu nedenle, $n + 1 \mid n^2 + 1$ ise, $n + 1 \mid n - 1$ olur. Bu, pozitif tam sayılar için yalnızca $n - 1 = 0$ olduğunda mümkündür, yani $n = 1$ olmalıdır.

[2] $x - 3 = t$ olarak tanımlayalım. Böylece, t, $t \neq 0$ olacak şekilde bir tam sayı olur ve $t \mid (t + 3)^3 - 3$, bu da $t \mid 3^3 - 3$ yani $t \mid 24$ koşuluna eşdeğerdir. Bu nedenle, t'nin 24'ün bir tam sayı böleni olması gerekli ve yeterlidir. Bu durumda, t, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$ sayılarından biri olmalıdır. $x = t + 3$ için şu değerleri elde ederiz: $-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15$, ve 27.

[3] Örneğin, $65k + 56$ aritmetik dizisindeki tüm n sayıları (burada $k = 0, 1, 2, ...$), istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de, $n = 65k + 56$ için, $k \geq 0$ tam sayısı ile $n \equiv 1 \pmod 5$ ve $n \equiv 4 \pmod{13}$ olur. Bu nedenle, $4n^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ ve $4n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$ olur. Böylece, $5 \mid 4n^2 + 1$ ve $13 \mid 4n^2 + 1$.

[4] İddiamızı tümevarım yöntemiyle kanıtlayacağız. $169 \mid 3^6 - 26 - 27 = 676 = 4 \cdot 169$ olduğunu biliyoruz. Sonraki adımda, $3^{3(n+1)+3} - 26(n + 1) - 27 - (3^{3n+3} - 26n - 27) = 26(3^{3n+3} - 1)$ elde ederiz. Ancak, $13 \mid 3^3 - 1$, bu nedenle $13 \mid 3^{3(n+1)} - 1$ ve $169 \mid 26(3^{3n+3} - 1)$'dir. Tümevarım yöntemiyle kanıt hemen ortaya çıkar.

[5] $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod 9$ olduğuna göre, $k = 0, 1, 2, ...$ için $2^{6k} \equiv 1 \pmod 9$ elde ederiz. Bu nedenle $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod 9$ olur ve her iki taraf da çift olduğundan, $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod{18}$ elde ederiz. Buradan $2^{6k+2} = 18t + 2^2$ elde ederiz, burada $t \geq 0$ bir tam sayıdır. Ancak, Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$'dur ve $2^{18t} \equiv 1 \pmod{19}$ olur, $t = 0, 1, 2, ...$ için. Böylece, $2^{6k+2} \equiv 2^{18t+4} \equiv 2^4 \pmod{19}$ olur; buradan da $2^{6k+2} + 3 \equiv 2^4 + 3 \equiv 0 \pmod{19}$ elde edilir ve bu da kanıtlanması gereken şeydir.

[6] Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ olduğundan, $2^{60} \equiv 1 \pmod{13}$ elde ederiz. Ayrıca, $2^5 \equiv 6 \pmod{13}$ olduğu için, $2^{10} \equiv -3 \pmod{13}$ elde ederiz. Öte yandan, $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$'tür, bu da $3^{69} \equiv 1 \pmod{13}$ ve $3^{70} \equiv 3 \pmod{13}$ anlamına gelir. Bu nedenle, $2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$ olur, yani $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$, bu da kanıtlanması gereken şeydir.

7. $20^{15} - 1$ sayısının $11 \cdot 31 \cdot 61$ çarpanına bölündüğünü kanıtlayınız.[7]

8. Her pozitif tam sayı m ve $a > 1$ tam sayısı için

$$\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = (a - 1, m)$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.[8]

9. Her pozitif n sayısı için $3 \cdot (15^5 + 25^5 + \cdots + n^5)$ sayısının $13^3 + 23^3 + \cdots + n^3$'e bölündüğünü kanıtlayınız.[9]

---

[7] Açıkça görülüyor ki, $20^{15} - 1$ sayısının her bir asal böleni olan 11, 31 ve 61'in $20^{15} - 1$'i böldüğünü göstermek yeterlidir. $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ ve $10 \equiv -1 \pmod{11}$ olduğundan, $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$, bu da $20^5 \equiv 1 \pmod{11}$ ve $20^{15} \equiv 1 \pmod{11}$ anlamına gelir. Dolayısıyla $11 \mid 20^{15} - 1$. Sonra, $20 \equiv -11 \pmod{31}$ olduğundan, $20^2 \equiv 121 \equiv -3 \pmod{31}$'dir. Bu nedenle, $20^3 \equiv (-11)(-3) = 33 \equiv 2 \pmod{31}$ ve $20^{15} \equiv 2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ olur. Böylece, $31 \mid 20^{15} - 1$. Son olarak, $3^4 \equiv 20 \pmod{61}$ ve bu da $20^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1 \pmod{61}$ anlamına gelir (Fermat'ın küçük teoremine göre); bu nedenle $61 \mid 20^{15} - 1$.

[8] $d = \left(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1\right)$ olarak tanımlayalım. Aşağıdaki eşitliği göz önünde bulunduralım:

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = (a^{m-1} - 1) + (a^{m-2} - 1) + \cdots + (a - 1) + m \tag{1}$$

ve $a - 1 \mid a^k - 1$ ifadesinin $k = 0, 1, 2, ...$ için geçerli olduğunu dikkate alarak, $d \mid m$ elde ederiz. Bu nedenle, $a - 1$ ve m sayılarının $d > \delta$ ortak bir böleni olsaydı, (1) eşitliğine göre $\delta \mid \frac{a^m-1}{a-1}$ olurdu ve $a^m - 1$ ile $a - 1$ sayıları $\delta > d$ ortak bir bölenine sahip olurdu ki bu imkânsızdır. Bu nedenle, d, $a - 1$ ve m sayılarının en büyük ortak bölenidir ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

[9] Pozitif tam sayı n için, şu eşitliğe sahibiz:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(bu eşitlik tümevarım ile elde edilir). Yine tümevarım ile şu eşitliği de elde ederiz:

$$1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

bu da tüm pozitif tam sayılar n için geçerlidir. Bu formüllerden şu sonucu elde ederiz:

$$3(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5)/(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = 2n^2 + 2n - 1$$

bu da istenen özelliği kanıtlar.

10. $1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ sayısının n'e bölünmesini sağlayan tüm $n > 1$ tam sayılarını bulunuz.[10]

11. Pozitif tam n sayısı için $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ ve $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ sayılarından hangisinin 5'e bölünüp, hangisinin bölünmediğini tespit ediniz.[11]

---

[10] Bunlar, 1'den büyük tüm tek sayılardır. Aslında, n tek ve $n > 1$ ise, $(n-1)/2$ pozitif bir tam sayıdır ve $k = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$ için kolayca şu ifadeyi elde ederiz:

$$n \mid k^n + (n-k)^n \quad (\text{çünkü } (-k)^n = -k^n)$$

Böylece, $n \mid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ elde ederiz. Diğer yandan, eğer n çift ise, 2^s, n'yi bölen en yüksek 2 kuvveti olsun (bu nedenle s pozitif bir tam sayıdır). $2^s \geq s$ olduğundan, k çift olduğunda $2^s \mid k^n$ ve k tek olduğunda (bu dizideki k sayılarının sayısı $(n-1)/2$'dir) Euler'in teoremine göre $k^{2^{s-1}} \equiv 1 \pmod{2^s}$ ve $k^n \equiv 1 \pmod{2^s}$ elde ederiz (çünkü $2^s \mid n$). Böylece şu sonuca ulaşırız:

$$1^n + 3^n + \cdots + (n-3)^n + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

bu da şu sonucu verir:

$$1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

$2^n + 4^n + \cdots + (n-2)^n \equiv 0 \pmod{2^s}$ olduğundan, $n \mid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ elde ederiz. Eğer $2^s \mid n$ ise, $\frac{n}{2} \equiv 0 \pmod{2^s}$ olur ve $2^s \mid n$ ve $2^{s+1} \mid n$ çelişkisini elde ederiz. Böylece, n çift olduğunda $n \nmid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ elde edilir.

Not: Fermat teoreminden şu sonucu kolayca çıkarırız: Eğer n bir asal sayıysa, $n \mid 1^n + 1 - 1^n + \cdots + (n-1)^n + 1$. Ancak, bu ilişkiyi sağlayan bileşik bir sayı bilmiyoruz. G. Ginga, böyle bir bileşik sayı olmadığını öne sürdü, ancak bu 1'den küçük bileşik bir sayının var olmadığını henüz kanıtlayamadı.

[11] Dört durumu inceleyelim:

(a) $n = 4k$ olsun, burada k pozitif bir tam sayıdır. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+1} - 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 - 2 + 1 \equiv 1 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+1} + 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod 5.$$

($2^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan, $2^{4k} \equiv 1 \pmod 5$'tir.)

(b) $n = 4k + 1$ olsun, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+3} - 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 - 4 + 1 \equiv 0 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+3} + 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 + 4 + 1 \equiv 3 \pmod 5.$$

(c) $n = 4k + 2$ olsun, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+5} - 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 - 8 + 1 \equiv 0 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+5} + 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 + 8 + 1 \equiv 1 \pmod 5.$$

(d) $n = 4k + 3$ olsun, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+7} - 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 - 1 + 1 \equiv 3 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+7} + 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 5.$$

Sonuç olarak, a_n sayıları yalnızca $n \equiv 1$ veya $2 \pmod 4$ olduğunda 5'e bölünürken, b_n sayıları yalnızca $n \equiv 0$ veya $3 \pmod 4$ olduğunda 5'e bölünür. Böylece, yalnızca a_n veya b_n sayılarından biri 5'e bölünür.

12. Her n pozitif tam sayısı için

$$x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, \ldots$$

sonsuz dizisinin her bir terimi n'ye bölünecek şekilde bir x pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[12]

13. Her x çift pozitif tam sayısı için

$$x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \ldots$$

dizisinin terimlerinden hiçbirinin n'ye bölünmeyecek şekilde sonsuz sayıda n tek pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[13]

14. Her n pozitif tam sayısı için $(n+1)^n - 1$ sayısının n^2'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[14]

15. Her n pozitif tam sayısı için $2^{(2^n-1)n} - 1$ sayısının $(2^n-1)^2$'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[15]

---

[12] $x = 2n-1$ seçmek yeterlidir. Böylece $x, x^x, x^{x^x}, \ldots$ sayılarının her biri tek olur ve dolayısıyla $2n = x+1$, sonsuz dizinin her bir terimi olan $x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, \ldots$ sayılarının bir bölenidir.

[13] Örneğin, $4k+3$ biçimindeki tüm asal sayılar p. Aslında, x çift olduğunda, dizideki $x, x^x, x^{x^x}, \ldots$ terimlerinin her biri çifttir. Eğer dizideki $x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \ldots$ terimlerinden herhangi biri p'ye tam bölünseydi, pozitif bir tam sayı m için $p \mid x^m+1$ ilişkisine sahip olurduk, dolayısıyla $(x^m)^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Ancak, -1, $4k+3$ biçimindeki asal bir modül için bir karekök kalanı olamaz.

[14] Binom açılımından

$$(1+n)^n = 1 + \binom{n}{1}n + \binom{n}{2}n^2 + \cdots + \binom{n}{n}n^n$$

$n > 1$ için (bu, $1^2 \mid 2^2 - 1$ durumu göz önüne alındığında varsayılabilir), üçüncü terimden itibaren tüm terimler n'yi en az 2 üssünde içerir. İkinci terim $\binom{n}{1}n = n^2$'ye eşittir. Bu nedenle, $n^2 \mid ((1+n)^n - 1)$ ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

[15] Problem 14'e göre, pozitif tam sayılar m için

$$m^2 \mid ((m+1)^m - 1)$$

ilişkisini elde ederiz. $m = 2^n - 1$ için, $(m+1)^m = 2^{(2^n-1)}$ olduğundan, şu ilişkiyi elde ederiz:

$$(2^n-1)^2 \mid (2^{(2^n-1)n} - 1),$$

ve bu, kanıtlanması gereken şeydir.

16. $2^n + 1$ sayısı n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız. Bu koşulu sağlayan tüm asal sayıları bulunuz.[16]

17. Her $a > 1$ tam sayısı için $a^n + 1$ sayısının n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[17]

---

[16] $3|2^3 + 1$ ve pozitif bir tam sayı m için $3^m \mid 2^{3^m} + 1$ olduğunu varsayalım. O zaman $2^{3^{m+1}} = (3^m k - 1)^3 = 3^m k^3 - 3^m k^2 + 3^m k - 1 = 3^m t - 1$, burada t pozitif bir tam sayıdır. Böylece $3^{m+1} \mid 2^{3^{m+1}} + 1$ ve tümevarım ile $3^m \mid 2^{3^m} + 1$'i elde ederiz, $m = 1, 2, ...$ Ancak, $n \mid 2^n + 1$ ilişkisini sağlayan başka pozitif tam sayılar da vardır. Aslında, pozitif bir tam sayı n için $n \mid 2^n + 1$ ise, aynı zamanda $2^n + 1 \mid 2^{2^n+1} + 1$ olur. Gerçekten de $2^n + 1 = kn$, burada k bir tam sayıdır (açıkça, tektir), o zaman $2^n + 1 \mid 2^{kn} + 1 = 2^{2^n+1} + 1$ olur. Böylece $9 \mid 2^3 + 1$ ifadesi $513 \mid 2^{513} + 1$ sonucunu verir.

n'nin asal olduğunu ve $n \mid 2^n + 1$ olduğunu varsayalım. Fermat'ın teoremiyle, $n \mid 2^n - 2$ elde ederiz, bu da $n \mid 3$ sonucunu verir. n asal olduğuna göre, $n = 3$ elde ederiz. Gerçekten, $3 \mid 2^3 + 1$ olur. Böylece, $n \mid 2^n + 1$ ilişkisini sağlayan tek asal sayı $n = 3$ olur.

[17] Öncelikle O. Reutter'e ait aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız (bkz. [17]):

Eğer $a + 1$, tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman $n \mid a^n + 1$ ilişkisi pozitif tam sayılarla sonsuz çözümü vardır.

Eğer $a + 1$, tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman $p > 2$ olan bir asal böleni vardır. Bu durumda, $p \mid a + 1$ olur.

Lemma. Eğer $k \geq 0$ bir tam sayı ve $p \mid a^k + 1$ ise, o zaman $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$.

Lemmanın İspatı. $k \geq 0$ olan bir tam sayı için $p^k \mid a^k + 1$ olduğunu varsayalım. $a^k = b$ yazalım, bu durumda $p^k \mid b + 1$ elde ederiz, dolayısıyla $b = -1 \pmod{p^{k+1}}$ olur.

p tek asal olduğundan, $a^{p^{k+1}} + 1 = b^{p+1} = (b + 1)(b^{p-1} - b^{p-2} + \cdots - b + 1)$ ifadesini elde ederiz.

Ve (çünkü $b = -1 \pmod{p^{k+1}}$ bu da $b^p = 1 \pmod{p^{k+1}}$ anlamına gelir) $b^2 = 1 \pmod{p}$ ve $b^{2i} = 1 \pmod{p}$ elde ederiz. Bu nedenle:

$$b^{p-1} - b^{p-2} + \ldots - b + 1 = 0 \pmod{p},$$

bu da ikinci terimin p'ye bölünebilir olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ elde ederiz ve bu ispatlanması gereken şeydir.

Lemma, $p \mid a + 1$ olduğunda, $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ ve $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ için $k = 1, 2, \ldots$ ifadesiyle tümevarım sağlar. Bu da $n \mid a^n + 1$ ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı n olduğunu ve O. Reutter'in teoremini ispatladığımızı gösterir.

Reutter teoreminin koşullarını sağlayan pozitif tam sayılar için, a'nın tek ve $a > 1$ olduğunu varsaymak yeterlidir. Bu durumda, $a^2 + 1$ ve a^2 ifadesi $8k + 1$ formundadır. Dolayısıyla, $a^2 + 1 = 8k + 2 = 2(4k + 1)$ tek bir çift sayıdır. Şu lemayı ispatlayacağız:

Lemma. Eğer a tek ise, o zaman a ve $a^2 + 1$ çift tek sayılar olup, $s \mid a + 1$ ise, pozitif bir tam sayı $s_1 > s$ vardır ki s_1 ve $a^{s_1} + 1$ de çift tek sayılardır ve $s_1 \mid a^{s_1} + 1$.

İspat. $a^2 + 1$ ve $a^{s_1} + 1$ çift tek sayılar olduğundan, $a + 1 = ms$ elde ederiz, burada m tektir. Böylece $a^s + 1 = a^{s_1} + 1 = a^{s_1} + 1$'dir ve $a^{s_1} + 1$ çift bir çift tek sayıdır.

$s_1 \mid a + 1$ olduğunda, $s_1 \mid a^{s_1} + 1$ ve $s_1 \mid a^{s_1} + 1$ elde ederiz. Bu durumda, $a > 1$ olduğundan, $s_1 > s$ olur. Böylece lema ispatlanmış olur.

a tek olduğundan, $s = 2$ diyebiliriz, bu da lemanın koşullarını sağlar. Böylece, $n \mid a^n + 1$ ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı n olduğunu gösteririz ve bu ispatlanması gereken şeydir (bkz. [35]).

18. $2^n + 2$ sayısı n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[18]

19. $a^{10} + 1$ sayısının 10'a bölünmesini sağlayan tüm pozitif tam a sayılarını bulunuz.[19]

---

[18] n çift ise ve $n \mid 2^n + 2$ ve $n \mid n - 1 \mid 2^{n-1} + 1$ ise (örneğin $n = 2$ için bu doğrudur), o zaman $n_1 = 2^n + 2$ sayısı için $n_1 \mid 2^{n_1} + 2$ ve $n_1 \mid n_1 - 1 \mid 2^{n_1 - 1} + 1$ elde ederiz. Aslında, $n \mid 2^n + 2$ ve n çift olduğunda, $2^n + 2 = nk$ elde edilir, burada k tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{2^n+2} + 1 = 2^{2^{2^n+2}} + 2$$

$n_1 = 2^n + 2$ için ise:

$$n_1 - 1 = 2^n + 1 \mid 2^{2^n+1} + 1$$

Sonra, $n - 1 \mid 2^{n-1} + 1$ ifadesini elde ederiz ki bu da $2^n + 1 = 2^{n-1}m + 1$'i verir, burada m tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{a-1}m + 1 = 2^{2^n+1}$$

elde ederiz, bu da:

$$2^n + 2 \mid 2^{2^{2^n+2}+2}, \quad ve \quad n_1 \mid 2^{n_1+2}$$

Bu koşulları sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı n vardır.
$n_1 = 2^n + 2$ olduğundan, koşullarımızı sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı vardır. $n = 2$'den başlayarak, ardışık sayılar 2, 6, 66, $2^{66} + 2$, ... Ancak, C. Bindschedler bu yöntemin $n \mid 2^n + 2$ ilişkisini sağlayan tüm sayıları vermediğini fark etti; örneğin 946 sayısı $2^{946} + 2$ ilişkisini sağlamaz. Bu problemi tartışan C. Bindschedler tarafından verilen çözümü, *Elemente der Mathematik* dergisinin 18. sayısındaki 430 numaralı problemimde görebilirsiniz (1963), sayfa 90.

[19] Eğer a bir pozitif tam sayıysa ve r sayısı a sayısının 10'a bölünmesinden kalan ise, $a^{10} + 1$ ifadesi ancak ve ancak $r^{10} + 1$ ifadesi 10'a bölünebiliyorsa 10'a bölünür. Bu nedenle, sadece $r = 0, 1, 2, \ldots, 9$ sayıları dikkate alınmalıdır ve bu sayılar için sadece $3^{10} + 1$ ve $7^{10} + 1$ ifadelerinin 10'a bölünebildiğini kolayca doğrularız. Dolayısıyla, $a^{10} + 1$ ifadesi 10'a bölünebilen tüm a sayıları $10k + 3$ ve $10k + 7$ formundadır, burada $k = 0, 1, 2, \ldots.$

20. Hiçbir $n > 1$ tam sayısı için $2^n - 1$ sayısının n'ye bölünmediğini kanıtlayınız.[20]

    (a) $2^n + 1$ sayısının n'ye bölünmesini sağlayan sonsuz tane n pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.[21]

21. $3^n + 1$ sayısının n'ye bölünmesini sağlayan tüm n tek pozitif tam sayılarını bulunuz.[22]

---

[20] $n > 1$ pozitif tamsayılarının olduğunu ve n'in en küçüğü olduğunu varsayalım. Euler teoremine göre $n \mid (2^n - 1)$. Ancak, pozitif tamsayılar a ve b için $2^a - 1$ ve $2^b - 1$ sayıların en büyük ortak böleni $2^d - 1$'dir, burada $d = (a, b)$'dir.
$a = n$ ve $b = \varphi(n)$ için $d = (n, \varphi(n))$'dir, dolayısıyla $n \mid (2^d - 1)$'dir. Ancak, $n > 1$ olduğundan $2^d - 1 > 1$ elde ederiz, bu da $d > 1$ ve $1 < d \leq \varphi(n) < n$ anlamına gelir ve $d \mid n \mid (2^d - 1)$ ifadesi n'in tanımına aykırıdır.

[21] Örneğin, $n = 3^k$ biçimindeki tüm sayılar için $(k = 1, 2, ...)$. Bu durumu matematiksel tümevarım yoluyla ispatlayacağız. Elimizde $3 \mid 2^{3^k} + 1$ var. Eğer herhangi bir pozitif tam k için $3 \mid 2^{3^k} + 1$, o zaman, aşağıdaki özdeşlikten hareketle

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (2^{3^k} + 1)(2^{3^k} - 2^{3^k} + 1)$$

ve şu gözlemden yola çıkarak:

$$2^{3^k} - 2^{3^k} + 2 = 2^{3^k} + 2 - (2^{3^k} + 1), \quad \text{ve} \quad 3 \mid 2^{3^k} + 2$$

(çünkü 4^3 böldüğünde kalan 1 verir), formülün ikinci terimi $2^{3^{k+1}} + 1$'in 3 ile bölünebilir olduğunu gösterir, bu da $3 \mid 2^{3^{k+1}} + 1$ anlamına gelir.

[22] $n = 1$ olan tek sayıdır. Varsayalım ki, $n > 1$ olan bir tek sayı vardır ve $n|3^n + 1$. Bu durumda, $n|9n - 1$. n, $n|9^{\varphi(n)} - 1$ ile pozitif bir tam sayı olsun. $d = (\varphi(n), n)$ olarak tanımlandığında, $n|9^d - 1$ elde edilir. Ancak, $d > 1$ olduğunda, $n|8$ elde edilir ki, n tek olduğu için bu mümkün değildir. Sonuç olarak $1 < d \leq \varphi(n) < n$ ve $d|n$, bu nedenle $n > 1$ koşulunu sağlayan tek bir sayı yoktur.

Kaynakça

Sierpinski, Waclaw. 1970. *250 problems in elementary number theory*. American Elsevier Publishing Company.