250 Temel Sayılar Teorisi Problemi

24 Ekim 2024

İçindekiler

Hoşgeldiniz

Bu kitap, Waclaw Sierpinski'nin *250 Problems in Elementary Number Theory* (Sierpinski (1970)) kitabının Türkçeye uyarlanmasıyla oluşturulmuştur.

1 Tam Sayıların Bölünmesi

1. n^2+1 sayısının $n+1$'e bölünecek şekilde tüm pozitif tam sayı n değerlerini bulunuz.[1]

2. x^3-3 sayısının $x-3$'e bölünecek şekilde tüm $x \neq 3$ tam sayılarını bulunuz.[2]

3. $4n^2+1$ sayısının 5'e ve 13'e bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda pozitif tam sayı n'nin bulunduğunu kanıtlayınız.[3]

4. Her pozitif tam sayı n için $3n^3+26n-27$ sayısının 169'a bölündüğünü kanıtlayınız.[4]

5. $k=0,1,2,...$ için $22^{6k+2}+3$ sayısının 19'a bölündüğünü kanıtlayınız.[5]

6. $2^{70}+3^{70}$ sayısının 13'e bölündüğünü gösteriniz.[6]

---

[1] Bu koşulu sağlayan yalnızca bir pozitif tam sayı vardır: $n=1$. Gerçekten de $n^2+1=n(n+1)-(n-1)$'dir; bu nedenle, $n+1 \mid n^2+1$ ise, $n+1 \mid n-1$ olur. Bu, pozitif tam sayılar için yalnızca $n-1=0$ olduğunda mümkündür, yani $n=1$ olmalıdır.

[2] $x-3=t$ olarak tanımlayalım. Böylece, t, $t \neq 0$ olacak şekilde bir tam sayı olur ve $t \mid (t+3)^3-3$, bu da $t \mid 3^3-3$ yani $t \mid 24$ koşuluna eşdeğerdir. Bu nedenle, t'nin 24'ün bir tam sayı böleni olması gerekli ve yeterlidir. Bu durumda, t, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$ sayılarından biri olmalıdır. $x=t+3$ için şu değerleri elde ederiz: $-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15$, ve 27.

[3] Örneğin, $65k+56$ aritmetik dizisindeki tüm n sayıları (burada $k=0,1,2,...$), istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de, $n=65k+56$ için, $k \geq 0$ tam sayısı ile $n \equiv 1 \pmod 5$ ve $n \equiv 4 \pmod{13}$ olur. Bu nedenle, $4n^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ ve $4n^2+1 \equiv 0 \pmod{13}$ olur. Böylece, $5 \mid 4n^2+1$ ve $13 \mid 4n^2+1$.

[4] İddiamızı tümevarım yöntemiyle kanıtlayacağız. $169 \mid 3^6-26-27=676=4 \cdot 169$ olduğunu biliyoruz. Sonraki adımda, $3^{3(n+1)+3}-26(n+1)-27-(3^{3n+3}-26n-27)=26(3^{3n+3}-1)$ elde ederiz. Ancak, $13 \mid 3^3-1$, bu nedenle $13 \mid 3^{3(n+1)}-1$ ve $169 \mid 26(3^{3n+3}-1)$'dir. Tümevarım yöntemiyle kanıt hemen ortaya çıkar.

[5] $2^6=64 \equiv 1 \pmod 9$ olduğuna göre, $k=0,1,2,...$ için $2^{6k} \equiv 1 \pmod 9$ elde ederiz. Bu nedenle $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod 9$ olur ve her iki taraf da çift olduğundan, $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod{18}$ elde ederiz. Buradan $2^{6k+2}=18t+2^2$ elde ederiz, burada $t \geq 0$ bir tam sayıdır. Ancak, Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$'dur ve $2^{18t} \equiv 1 \pmod{19}$ olur, $t=0,1,2,...$ için. Böylece, $2^{6k+2} \equiv 2^{18t+4} \equiv 2^4 \pmod{19}$ olur; buradan da $2^{6k+2}+3 \equiv 2^4+3 \equiv 0 \pmod{19}$ elde edilir ve bu da kanıtlanması gereken şeydir.

[6] Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ olduğundan, $2^{60} \equiv 1 \pmod{13}$ elde ederiz. Ayrıca, $2^5 \equiv 6 \pmod{13}$ olduğu için, $2^{10} \equiv -3 \pmod{13}$ elde ederiz. Öte yandan, $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$'tür, bu da $3^{69} \equiv 1 \pmod{13}$ ve $3^{70} \equiv 3 \pmod{13}$ anlamına gelir. Bu nedenle, $2^{70}+3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$ olur, yani $13 \mid 2^{70}+3^{70}$, bu da kanıtlanması gereken şeydir.

7. $20^{15} - 1$ sayısının $11 \cdot 31 \cdot 61$ çarpanına bölündüğünü kanıtlayınız.[7]

8. Her pozitif tam sayı m ve $a > 1$ tam sayısı için

$$\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = (a - 1, m)$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.[8]

9. Her pozitif n sayısı için $3 \cdot (15^5 + 25^5 + \cdots + n^5)$ sayısının $13^3 + 23^3 + \cdots + n^3$'e bölündüğünü kanıtlayınız.[9]

---

[7] Açıkça görülüyor ki, $20^{15} - 1$ sayısının her bir asal böleni olan 11, 31 ve 61'in $20^{15} - 1$'i böldüğünü göstermek yeterlidir. $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ ve $10 \equiv -1 \pmod{11}$ olduğundan, $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$, bu da $20^5 \equiv 1 \pmod{11}$ ve $20^{15} \equiv 1 \pmod{11}$ anlamına gelir. Dolayısıyla $11 \mid 20^{15} - 1$. Sonra, $20 \equiv -11 \pmod{31}$ olduğundan, $20^2 \equiv 121 \equiv -3 \pmod{31}$'dir. Bu nedenle, $20^3 \equiv (-11)(-3) = 33 \equiv 2 \pmod{31}$ ve $20^{15} \equiv 2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ olur. Böylece, $31 \mid 20^{15} - 1$. Son olarak, $3^4 \equiv 20 \pmod{61}$ ve bu da $20^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1 \pmod{61}$ anlamına gelir (Fermat'ın küçük teoremine göre); bu nedenle $61 \mid 20^{15} - 1$.

[8] $d = \left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right)$ olarak tanımlayalım. Aşağıdaki eşitliği göz önünde bulunduralım:

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = (a^{m-1} - 1) + (a^{m-2} - 1) + \cdots + (a - 1) + m \tag{1}$$

ve $a - 1 \mid a^k - 1$ ifadesinin $k = 0, 1, 2, ...$ için geçerli olduğunu dikkate alarak, $d \mid m$ elde ederiz. Bu nedenle, $a - 1$ ve m sayılarının $d > \delta$ ortak bir böleni olsaydı, (1) eşitliğine göre $\delta \mid \frac{a^m - 1}{a - 1}$ olurdu ve $a^m - 1$ ile $a - 1$ sayıları $\delta > d$ ortak bir bölenine sahip olurdu ki bu imkânsızdır. Bu nedenle, d, $a - 1$ ve m sayılarının en büyük ortak bölenidir ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

[9] Pozitif tam sayı n için, şu eşitliğe sahibiz:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(bu eşitlik tümevarım ile elde edilir). Yine tümevarım ile şu eşitliği de elde ederiz:

$$1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1)$$

bu da tüm pozitif tam sayılar n için geçerlidir. Bu formüllerden şu sonucu elde ederiz:

$$3(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5)/(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = 2n^2 + 2n - 1$$

bu da istenen özelliği kanıtlar.

10. $1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ sayısının n'e bölünmesini sağlayan tüm $n > 1$ tam sayılarını bulunuz.[10]

11. Pozitif tam n sayısı için $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ ve $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ sayılarından hangisinin 5'e bölünüp, hangisinin bölünmediğini tespit ediniz.[11]

---

[10] Bunlar, 1'den büyük tüm tek sayılardır. Aslında, n tek ve $n > 1$ ise, $(n-1)/2$ pozitif bir tam sayıdır ve $k = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$ için kolayca şu ifadeyi elde ederiz:

$$n \mid k^n + (n-k)^n \quad (\text{çünkü } (-k)^n = -k^n)$$

Böylece, $n \mid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ elde ederiz. Diğer yandan, eğer n çift ise, 2^s, n'yi bölen en yüksek 2 kuvveti olsun (bu nedenle s pozitif bir tam sayıdır). $2^s \geq s$ olduğundan, k çift olduğunda $2^s \mid k^n$ ve k tek olduğunda (bu dizideki k sayılarının sayısı $(n-1)/2$'dir) Euler'in teoremine göre $k^{2^{s-1}} \equiv 1 \pmod{2^s}$ ve $k^n \equiv 1 \pmod{2^s}$ elde ederiz (çünkü $2^s \mid n$). Böylece şu sonuca ulaşırız:

$$1^n + 3^n + \cdots + (n-3)^n + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

bu da şu sonucu verir:

$$1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

$2^n + 4^n + \cdots + (n-2)^n \equiv 0 \pmod{2^s}$ olduğundan, $n \mid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ elde ederiz. Eğer $2^s \mid n$ ise, $\frac{n}{2} \equiv 0 \pmod{2^s}$ olur ve $2^s \mid n$ ve $2^{s+1} \mid n$ çelişkisini elde ederiz. Böylece, n çift olduğunda $n \nmid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ elde edilir.

Not: Fermat teoreminden şu sonucu kolayca çıkarırız: Eğer n bir asal sayıysa, $n \mid 1^n + 1 - 1^n + \cdots + (n-1)^n + 1$. Ancak, bu ilişkiyi sağlayan bileşik bir sayı bilmiyoruz. G. Ginga, böyle bir bileşik sayı olmadığını öne sürdü, ancak bu 1'den küçük bileşik bir sayının var olmadığını henüz kanıtlayamadı.

[11] Dört durumu inceleyelim:

(a) $n = 4k$ olsun, burada k pozitif bir tam sayıdır. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+1} - 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 - 2 + 1 \equiv 1 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+1} + 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod 5.$$

($2^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan, $2^{4k} \equiv 1 \pmod 5$'tir.)

(b) $n = 4k + 1$ olsun, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+3} - 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 - 4 + 1 \equiv 0 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+3} + 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 + 4 + 1 \equiv 3 \pmod 5.$$

(c) $n = 4k + 2$ olsun, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+5} - 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 - 8 + 1 \equiv 0 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+5} + 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 + 8 + 1 \equiv 1 \pmod 5.$$

(d) $n = 4k + 3$ olsun, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+7} - 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 - 1 + 1 \equiv 3 \pmod 5,$$

$$b_n = 2^{8k+7} + 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 5.$$

Sonuç olarak, a_n sayıları yalnızca $n \equiv 1$ veya $2 \pmod 4$ olduğunda 5'e bölünürken, b_n sayıları yalnızca $n \equiv 0$ veya $3 \pmod 4$ olduğunda 5'e bölünür. Böylece, yalnızca a_n veya b_n sayılarından biri 5'e bölünür.

12. Her n pozitif tam sayısı için

$$x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, \ldots$$

sonsuz dizisinin her bir terimi n'ye bölünecek şekilde bir x pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[12]

13. Her x çift pozitif tam sayısı için

$$x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \ldots$$

dizisinin terimlerinden hiçbirinin n'ye bölünmeyecek şekilde sonsuz sayıda n tek pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[13]

14. Her n pozitif tam sayısı için $(n+1)^n - 1$ sayısının n^2'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[14]

15. Her n pozitif tam sayısı için $2^{(2^n-1)n} - 1$ sayısının $(2^n-1)^2$'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[15]

---

[12] $x = 2n-1$ seçmek yeterlidir. Böylece $x, x^x, x^{x^x}, \ldots$ sayılarının her biri tek olur ve dolayısıyla $2n = x+1$, sonsuz dizinin her bir terimi olan $x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, \ldots$ sayılarının bir bölenidir.

[13] Örneğin, $4k+3$ biçimindeki tüm asal sayılar p. Aslında, x çift olduğunda, dizideki $x, x^x, x^{x^x}, \ldots$ terimlerinin her biri çifttir. Eğer dizideki $x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \ldots$ terimlerinden herhangi biri p'ye tam bölünseydi, pozitif bir tam sayı m için $p \mid x^m+1$ ilişkisine sahip olurduk, dolayısıyla $(x^m)^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Ancak, -1, $4k+3$ biçimindeki asal bir modül için bir karekök kalanı olamaz.

[14] Binom açılımından

$$(1+n)^n = 1 + \binom{n}{1}n + \binom{n}{2}n^2 + \cdots + \binom{n}{n}n^n$$

$n > 1$ için (bu, $1^2 \mid 2^2 - 1$ durumu göz önüne alındığında varsayılabilir), üçüncü terimden itibaren tüm terimler n'yi en az 2 üssünde içerir. İkinci terim $\binom{n}{1}n = n^2$'ye eşittir. Bu nedenle, $n^2 \mid ((1+n)^n - 1)$ ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

[15] Problem 14'e göre, pozitif tam sayılar m için

$$m^2 \mid ((m+1)^m - 1)$$

ilişkisini elde ederiz. $m = 2^n - 1$ için, $(m+1)^m = 2^{(2^n-1)}$ olduğundan, şu ilişkiyi elde ederiz:

$$(2^n-1)^2 \mid (2^{(2^n-1)n} - 1),$$

ve bu, kanıtlanması gereken şeydir.

16. 2^n+1 sayısı n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız. Bu koşulu sağlayan tüm asal sayıları bulunuz.[16]

17. Her $a>1$ tam sayısı için a^n+1 sayısının n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[17]

[16] $3 \mid 2^3+1$ ve pozitif bir tam sayı m için $3^m \mid 2^{3^m}+1$ olduğunu varsayalım. O zaman $2^{3^{m+1}} = (3^m k-1)^3 = 3^m k^3 - 3^m k^2 + 3^m k - 1 = 3^m t - 1$, burada t pozitif bir tam sayıdır. Böylece $3^{m+1} \mid 2^{3^{m+1}}+1$ ve tümevarım ile $3^m \mid 2^{3^m}+1$'i elde ederiz, $m=1,2,\ldots.$ Ancak, $n \mid 2^n+1$ ilişkisini sağlayan başka pozitif tam sayılar da vardır. Aslında, pozitif bir tam sayı n için $n \mid 2^n+1$ ise, aynı zamanda $2^n+1 \mid 2^{2^n+1}+1$ olur. Gerçekten de $2^n+1 = kn$, burada k bir tam sayıdır (açıkça, tektir), o zaman $2^n+1 \mid 2^{kn}+1 = 2^{2^n+1}+1$ olur. Böylece $9 \mid 2^3+1$ ifadesi $513 \mid 2^{513}+1$ sonucunu verir.

n'nin asal olduğunu ve $n \mid 2^n+1$ olduğunu varsayalım. Fermat'ın teoremiyle, $n \mid 2^n-2$ elde ederiz, bu da $n \mid 3$ sonucunu verir. n asal olduğuna göre, $n=3$ elde ederiz. Gerçekten, $3 \mid 2^3+1$ olur. Böylece, $n \mid 2^n+1$ ilişkisini sağlayan tek asal sayı $n=3$ olur.

[17] Öncelikle O. Reutter'e ait aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız (bkz. [17]):

Eğer $a+1$, tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman $n \mid a^n+1$ ilişkisi pozitif tam sayılarla sonsuz çözümü vardır.

Eğer $a+1$, tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman $p>2$ olan bir asal böleni vardır. Bu durumda, $p \mid a+1$ olur.

Lemma. Eğer $k \geq 0$ bir tam sayı ve $p \mid a^k+1$ ise, o zaman $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}}+1$.

Lemmanın İspatı. $k \geq 0$ olan bir tam sayı için $p^k \mid a^k+1$ olduğunu varsayalım. $a^k = b$ yazalım, bu durumda $p^k \mid b+1$ elde ederiz, dolayısıyla $b = -1 \pmod{p^{k+1}}$ olur.

p tek asal olduğundan, $a^{p^{k+1}}+1 = b^{p+1} = (b+1)(b^{p-1} - b^{p-2} + \cdots - b + 1)$ ifadesini elde ederiz.

Ve (çünkü $b=-1 \pmod{p^{k+1}}$ bu da $b^p = 1 \pmod{p^{k+1}}$ anlamına gelir) $b^2 = 1 \pmod p$ ve $b^{2i} = 1 \pmod p$ elde ederiz. Bu nedenle:

$$b^{p-1} - b^{p-2} + \ldots - b + 1 = 0 \pmod p,$$

bu da ikinci terimin p'ye bölünebilir olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}}+1$ elde ederiz ve bu ispatlanması gereken şeydir.

Lemma, $p \mid a+1$ olduğunda, $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}}+1$ ve $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}}+1$ için $k=1,2,\ldots$ ifadesiyle tümevarım sağlar. Bu da $n \mid a^n+1$ ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı n olduğunu ve O. Reutter'in teoremini ispatladığımızı gösterir.

Reutter teoreminin koşullarını sağlayan pozitif tam sayılar için, a'nın tek ve $a>1$ olduğunu varsaymak yeterlidir. Bu durumda, a^2+1 ve a^2 ifadesi $8k+1$ formundadır. Dolayısıyla, $a^2+1 = 8k+2 = 2(4k+1)$ tek bir çift sayıdır. Şu lemayı ispatlayacağız:

Lemma. Eğer a tek ise, o zaman a ve a^2+1 çift tek sayılar olup, $s \mid a+1$ ise, pozitif bir tam sayı $s_1 > s$ vardır ki s_1 ve $a^{s_1}+1$ de çift tek sayılardır ve $s_1 \mid a^{s_1}+1$.

İspat. a^2+1 ve $a^{s_1}+1$ çift tek sayılar olduğundan, $a+1 = ms$ elde ederiz, burada m tektir. Böylece $a^s+1 = a^{s_1}+1 = a^{s_1}+1$'dir ve $a^{s_1}+1$ çift bir çift tek sayıdır.

$s_1 \mid a+1$ olduğunda, $s_1 \mid a^{s_1}+1$ ve $s_1 \mid a^{s_1}+1$ elde ederiz. Bu durumda, $a>1$ olduğundan, $s_1 > s$ olur. Böylece lema ispatlanmış olur.

a tek olduğundan, $s=2$ diyebiliriz, bu da lemanın koşullarını sağlar. Böylece, $n \mid a^n+1$ ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı n olduğunu gösteririz ve bu ispatlanması gereken şeydir (bkz. [35]).

18. $2^n + 2$ sayısı n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[18]

19. $a^{10} + 1$ sayısının 10'a bölünmesini sağlayan tüm pozitif tam a sayılarını bulunuz.[19]

---

[18] n çift ise ve $n \mid 2^n + 2$ ve $n \mid n - 1 \mid 2^{n-1} + 1$ ise (örneğin $n = 2$ için bu doğrudur), o zaman $n_1 = 2^n + 2$ sayısı için $n_1 \mid 2^{n_1} + 2$ ve $n_1 \mid n_1 - 1 \mid 2^{n_1 - 1} + 1$ elde ederiz. Aslında, $n \mid 2^n + 2$ ve n çift olduğunda, $2^n + 2 = nk$ elde edilir, burada k tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{2^n+2} + 1 = 2^{2^{2^n+2}} + 2$$

$n_1 = 2^n + 2$ için ise:

$$n_1 - 1 = 2^n + 1 \mid 2^{2^n+1} + 1$$

Sonra, $n-1 \mid 2^{n-1}+1$ ifadesini elde ederiz ki bu da $2^n+1 = 2^{n-1}m+1$'i verir, burada m tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{a-1}m + 1 = 2^{2^n+1}$$

elde ederiz, bu da:

$$2^n + 2 \mid 2^{2^{2^n+2}+2}, \quad ve \quad n_1 \mid 2^{n_1+2}$$

Bu koşulları sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı n vardır.
$n_1 = 2^n + 2$ olduğundan, koşullarımızı sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı vardır. $n = 2$'den başlayarak, ardışık sayılar 2, 6, 66, $2^{66} + 2$, ... Ancak, C. Bindschedler bu yöntemin $n \mid 2^n + 2$ ilişkisini sağlayan tüm sayıları vermediğini fark etti; örneğin 946 sayısı $2^{946} + 2$ ilişkisini sağlamaz. Bu problemi tartışan C. Bindschedler tarafından verilen çözümü, *Elemente der Mathematik* dergisinin 18. sayısındaki 430 numaralı problemimde görebilirsiniz (1963), sayfa 90.

[19] Eğer a bir pozitif tam sayıysa ve r sayısı a sayısının 10'a bölünmesinden kalan ise, $a^{10} + 1$ ifadesi ancak ve ancak $r^{10} + 1$ ifadesi 10'a bölünebiliyorsa 10'a bölünür. Bu nedenle, sadece $r = 0, 1, 2, \ldots, 9$ sayıları dikkate alınmalıdır ve bu sayılar için sadece $3^{10} + 1$ ve $7^{10} + 1$ ifadelerinin 10'a bölünebildiğini kolayca doğrularız. Dolayısıyla, $a^{10} + 1$ ifadesi 10'a bölünebilen tüm a sayıları $10k + 3$ ve $10k + 7$ formundadır, burada $k = 0, 1, 2, \ldots.$

20. Hiçbir $n > 1$ tam sayısı için $2^n - 1$ sayısının n'ye bölünmediğini kanıtlayınız.[20]

    (a) $2^n + 1$ sayısının n'ye bölünmesini sağlayan sonsuz tane n pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.[21]

21. $3^n + 1$ sayısının n'ye bölünmesini sağlayan tüm n tek pozitif tam sayılarını bulunuz.[22]

22. $n \cdot 2^n + 1$ sayısının 3'e bölünmesini sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.[23]

---

[20] $n > 1$ pozitif tamsayılarının olduğunu ve n'in en küçüğü olduğunu varsayalım. Euler teoremine göre $n \mid (2^n - 1)$. Ancak, pozitif tamsayılar a ve b için $2^a - 1$ ve $2^b - 1$ sayıların en büyük ortak böleni $2^d - 1$'dir, burada $d = (a, b)$'dir.
$a = n$ ve $b = \varphi(n)$ için $d = (n, \varphi(n))$'dir, dolayısıyla $n \mid (2^d - 1)$'dir. Ancak, $n > 1$ olduğundan $2^d - 1 > 1$ elde ederiz, bu da $d > 1$ ve $1 < d \leq \varphi(n) < n$ anlamına gelir ve $d \mid n \mid (2^d - 1)$ ifadesi n'in tanımına aykırıdır.

[21] Örneğin, $n = 3^k$ biçimindeki tüm sayılar için ($k = 1, 2, ...$). Bu durumu matematiksel tümevarım yoluyla ispatlayacağız. Elimizde $3 \mid 2^{3^k} + 1$ var. Eğer herhangi bir pozitif tam k için $3 \mid 2^{3^k} + 1$, o zaman, aşağıdaki özdeşlikten hareketle

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (2^{3^k} + 1)(2^{3^k} - 2^{3^k} + 1)$$

ve şu gözlemden yola çıkarak:

$$2^{3^k} - 2^{3^k} + 2 = 2^{3^k} + 2 - (2^{3^k} + 1), \quad \text{ve} \quad 3 \mid 2^{3^k} + 2$$

(çünkü 4^3 bölündüğünde kalan 1 verir), formülün ikinci terimi $2^{3^{k+1}} + 1$'in 3 ile bölünebilir olduğunu gösterir, bu da $3 \mid 2^{3^{k+1}} + 1$ anlamına gelir.

[22] $n = 1$ olan tek sayıdır. Varsayalım ki, $n > 1$ olan bir tek sayı vardır ve $n \mid 3^n + 1$. Bu durumda, $n \mid 9n - 1$. n, $n \mid 9^{\varphi(n)} - 1$ ile pozitif bir tam sayı olsun. $d = (\varphi(n), n)$ olarak tanımlandığında, $n \mid 9^d - 1$ elde edilir. Ancak, $d > 1$ olduğunda, $n \mid 8$ elde edilir ki, n tek olduğu için bu mümkün değildir. Sonuç olarak $1 < d \leq \varphi(n) < n$ ve $d \mid n$, bu nedenle $n > 1$ koşulunu sağlayan tek bir sayı yoktur.

[23] Açıkça, n sayısı 3'e bölünemez. Bu nedenle, n sayısı aşağıdaki formlardan birinde olmalıdır: $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 4$ veya $6k + 5$, burada $k = 0, 1, 2, ...$
Eğer $n = 6k + 1$ ise, $2^6 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan,

$$n2^n + 1 = (2^6)2 + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

Bu durumda $3 \mid n2^n + 1$ olur.
Eğer $n = 6k + 2$ ise,

$$n2^n + 1 = 2(2^6)2 + 1 \equiv 8 + 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

yani yine $3 \mid n2^n + 1$.
Eğer $n = 6k + 4$ ise,

$$n2^n + 1 \equiv 4(2^6)2^4 + 1 \equiv 2^5 + 1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Son olarak, $n = 6k + 5$ ise,

$$n2^n + 1 = 5(2^6)2^5 + 1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Bu durumda, $n2^n + 1$ ifadesi ancak ve ancak n, $6k + 1$ veya $6k + 2$ formunda olduğunda 3'e bölünebilir. Burada $k = 0, 1, 2, ...$

23. Her tek p asal sayısı için $n \cdot 2^n + 1$ sayısının p'ye bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[24]

24. Her pozitif tam n sayısı için, y^y sayısı x^x'e bölünecek, fakat y sayısı x^x'e bölünmeyecek şekilde $x > n$ ve y pozitif tam sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.[25]

25. Her n tek pozitif tam sayısı için $2^n - 1$ sayısının n'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[26]

26. $2^n - 3$ $(n = 2, 3, \dots)$ sonsuz dizisinin 5'e bölünen sonsuz sayıda terimi olduğunu; 13'e bölünen sonsuz tane terimin bulunduğunu, fakat 65'e bölünen hiçbir terimin bulunmadığını kanıtlayınız.[27]

---

[24]Eğer p tek bir asal sayıysa ve $n = (p-1)(kp+1)$, burada $k = 0, 1, 2, \dots$, o zaman $n \equiv -1 \pmod{p}$ ve $p - 1 \mid n$. Fermat'nın küçük teoremi gereğince, $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ olur, dolayısıyla $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.
Not: Bu problemden, $n2^n + 1$ formunda sonsuz sayıda bileşik sayı olduğu sonucu çıkarılabilir, burada n pozitif bir tam sayıdır. Bu formdaki sayılar Cullen sayıları olarak bilinir. $1 < n < 141$ aralığında bu formdaki tüm sayılar bileşik olduğu ispatlanmıştır, ancak $n = 141$ için $n2^n + 1$ asal bir sayıdır. Sonsuz sayıda asal Cullen sayısı olup olmadığı bilinmemektedir.

[25]n verilen bir pozitif tam sayı olsun ve $k > 1$ olmak üzere $2^k > n$ olacak şekilde pozitif bir tam sayı olsun. p, $2^k - 1$'den büyük bir asal sayı olsun. $k > 1$ olduğu için, $x = 2^k$, $y = 2p$ olarak alalım. Buradan $x \nmid y$ ve $x^x \mid y^y$ olur, çünkü $x = 2^{2^k}$ ve $y^y = (2p)^{2p}$, burada $2p > 2^k k$.
Örneğin, $4 \nmid 10$, fakat $4^4 \mid 10^{10}$, $8 \nmid 12$, fakat $8^8 \mid 12^{12}$, $9 \nmid 21$, fakat $9^9 \mid 21^{21}$.

[26]Pozitif tam sayılar için, $\varphi(n) \mid n!$ olduğu açıktır. Aslında, $n = 1$ için bu doğrudur; eğer $n > 1$ ise ve $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_k^{a_k}$ asal çarpanlarına ayrılmışsa, burada $q_1 < q_2 < \dots < q_k$ olmak üzere, o zaman

$$\varphi(n) = q_1^{a_1-1} q_2^{a_2-1} \dots q_k^{a_k-1}(q_1 - 1)(q_2 - 1)\dots(q_k - 1)$$

ve $q_1^{a_1-1} q_2^{a_2-1} \dots q_k^{a_k-1} \mid n$, $q_1 - 1 < q_2 - 1 < \dots < q_k - 1$ olduğu için $q_k - 1 < n$ ve $q_1 - 1 < q_2 - 1 < \dots < q_k - 1$, n'den küçük farklı pozitif tam sayılardır. Böylece $(q_1-1)(q_2-1)\dots(q_k-1)(n-1)! \mid n!$ elde edilir ve buradan $\varphi(n)(n-1)! \mid n!$ olduğu sonucu çıkar.
Eğer n tek ise, (Euler teoremine göre) $n \mid 2^{\varphi(n)} - 1 \mid 2^{n!} - 1$, dolayısıyla $n \mid 2^{n!} - 1$, bu da kanıtlanması gereken şeydi.

[27]Fermat'nın teoremine göre, $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ ve $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.
$2^3 \equiv 3 \pmod{5}$ ve $2^4 \equiv 3 \pmod{13}$ olduğu için, $24k + 3 \equiv 3 \pmod{5}$ ve $2^{12k+4} \equiv 3 \pmod{13}$ elde ederiz, burada $k = 0, 1, 2, \dots$. Dolayısıyla, $5 \mid 2^{4k+3} - 3$ ve $13 \mid 2^{12k+4} - 3$, burada $k = 0, 1, 2, \dots$.
Bir sonraki adımda, $2^6 \equiv 1 \pmod{65}$ olduğunu ve bu nedenle $2^{12} \equiv 1 \pmod{65}$ olduğunu görürüz. Böylece $2^n - 3 \equiv 2^n - 3 \pmod{65}$, bu da $2^n - 3$ dizisinin $(n = 2, 3, \dots)$ 12 periyotlu olduğunu gösterir. $2^n - 3$ sayılarının hiçbiri $(n = 2, 3, \dots)$ 65'e bölünmüyorsa, bunu göstermek için $n = 2, 3, \dots, 13$ için $2^n - 3$ sayılarının 65'e bölünüp bölünmediğini kontrol etmek yeterlidir. 65'e bölündüğünde kalanlar sırasıyla $1, 5, 13, 29, 61, 60, 58, 54, 46, 30, 63, 64$ olup, bunların hiçbiri sıfır değildir.

27. 2^n-2 ve 3^n-3 sayıları n'ye bölünmesini sağlayan iki en küçük bileşik n sayısını bulunuz.

28. 2^n-2 sayısının n'ye bölünmesini, 3^n-3 sayısının da n'ye bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

29. 2^n-2 sayısının n'ye bölünmemesini, 3^n-3 sayısının da n'ye bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

30. Her a pozitif tam sayısı için a^n-a sayısının n'e bölünecek şekilde bir n bileşik sayısı bulunuz.

31. a, b, c tam sayılar olmak üzere $a^3+b^3+c^3$ sayısı 9'a bölünüyorsa, a, b, c sayılarından en az birinin 3'e bölündüğünü kanıtlayınız.

32. a_k, $k=1,2,3,4,5$ tam sayılar olmak üzere

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3$$

sayısı 9'a bölünüyorsa,

$$3 \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5)$$

olduğunu kanıtlayınız.

Kaynakça

Sierpinski, Waclaw. 1970. *250 problems in elementary number theory.* American Elsevier Publishing Company.