250 Temel Sayılar Teorisi Problemi

31 Ekim 2025

İçindekiler

Sunuş

Bu kitap, matematik dünyasına değerli katkılar sunmuş olan Wacław Sierpiński'nin klasik eseri *250 Problems in Elementary Number Theory*'nin Türkçe çevirisidir. Amacımız, bu kıymetli eseri matematikseverlere ve öğrencilere ücretsiz olarak ulaştırarak, sayılar teorisinin temel problemlerine olan ilgiyi artırmaktır.

Eserin ilk baskısının üzerinden elli yılı aşkın bir süre geçmiş olması ve bu çevirinin ticari bir amaç gütmemesi sebebiyle, çalışmamızı ücretsiz olarak erişime açmanın yerinde olacağına inanıyoruz. Yine de eserin telif hakları devam ediyorsa, hak sahiplerinin acarzfr@gmail.com adresinden bizimle iletişime geçmesi durumunda gerekli düzenlemeleri yapmaya hazır olduğumuzu belirtmek isteriz.

Bu kitabın Türkçe matematik literatürüne katkı sağlayacağına inanıyor ve matematik meraklılarının bu eseri aynı coşkuyla okuyacağını umuyoruz.

Wacław Sierpiński'yi saygı ve minnetle anarak, çevirinin faydalı olmasını dileriz.

Çeviri Ekibi

Teknik Detaylar

Bu kitap, açık kaynaklı bir yazım sistemi olan Quarto ile hazırlanmıştır. Kitap, HTML ve PDF olmak üzere iki farklı formatta sunulmaktadır:

- HTML
- PDF

Soruların çözümleri dipnotlarda verilmiştir. Her iki formatta da soru numarasından çözüme kolayca ulaşabilirsiniz.

Ayrıca, Hypothesis aracını kullanarak kitap üzerine notlar alabilir ve bu notları herkese açık veya özel olarak paylaşabilirsiniz. Bunun için HTML formatında, sayfanın sağındaki panelden ücretsiz bir hesap oluşturmanız yeterlidir.

1 Tam Sayıların Bölünmesi

1. n^2+1 sayısının $n+1$'e bölünecek şekilde tüm pozitif tam sayı n değerlerini bulunuz.[1]

2. x^3-3 sayısının $x-3$'e bölünecek şekilde tüm $x \neq 3$ tam sayılarını bulunuz.[2]

3. $4n^2+1$ sayısının 5'e ve 13'e bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda pozitif tam sayı n'nin bulunduğunu kanıtlayınız.[3]

4. Her pozitif tam sayı n için $3n^3+26n-27$ sayısının 169'a bölündüğünü kanıtlayınız.[4]

5. $k=0,1,2,\ldots$ için $22^{6k+2}+3$ sayısının 19'a bölündüğünü kanıtlayınız.[5]

6. $2^{70}+3^{70}$ sayısının 13'e bölündüğünü gösteriniz.[6]

7. $20^{15}-1$ sayısının $11\cdot 31\cdot 61$ çarpanına bölündüğünü kanıtlayınız.[7]

8. Her pozitif tam sayı m ve $a>1$ tam sayısı için

$$\left(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1\right) = (a-1, m)$$

[1] Bu koşulu sağlayan yalnızca bir pozitif tam sayı vardır: $n=1$. Gerçekten de $n^2+1=n(n+1)-(n-1)$'dir; bu nedenle, $n+1 \mid n^2+1$ ise, $n+1 \mid n-1$ olur. Bu, pozitif tam sayılar için yalnızca $n-1=0$ olduğunda mümkündür, yani $n=1$ olmalıdır.

[2] $x-3=t$ olarak tanımlayalım. Böylece, t, $t\neq 0$ olacak şekilde bir tam sayı olur ve $t \mid (t+3)^3-3$, bu da $t \mid 3^3-3$ yani $t \mid 24$ koşuluna eşdeğerdir. Bu nedenle, t'nin 24'ün bir tam sayı böleni olması gerekli ve yeterlidir. Bu durumda, t, $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$ sayılarından biri olmalıdır. $x=t+3$ için şu değerleri elde ederiz: $-21,-9,-5,-3,-1,0,1,2,4,5,6,7,9,11,15$, ve 27.

[3] Örneğin, $65k+56$ aritmetik dizisindeki tüm n sayıları (burada $k=0,1,2,\ldots$), istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de, $n=65k+56$ için, $k\geq 0$ tam sayısı ile $n\equiv 1 \pmod 5$ ve $n\equiv 4 \pmod{13}$ olur. Bu nedenle, $4n^2+1\equiv 0 \pmod 5$ ve $4n^2+1\equiv 0 \pmod{13}$ olur. Böylece, $5 \mid 4n^2+1$ ve $13 \mid 4n^2+1$.

[4] İddiamızı tümevarım yöntemiyle kanıtlayacağız. $169 \mid 3^6-26-27=676=4\cdot 169$ olduğunu biliyoruz. Sonraki adımda, $3^{3(n+1)+3}-26(n+1)-27-(3^{3n+3}-26n-27)=26(3^{3n+3}-1)$ elde ederiz. Ancak, $13 \mid 3^3-1$, bu nedenle $13 \mid 3^{3(n+1)}-1$ ve $169 \mid 26(3^{3n+3}-1)$'dir. Tümevarım yöntemiyle kanıt hemen ortaya çıkar.

[5] $2^6=64\equiv 1 \pmod 9$ olduğuna göre, $k=0,1,2,\ldots$ için $2^{6k}\equiv 1 \pmod 9$ elde ederiz. Bu nedenle $2^{6k+2}\equiv 2^2 \pmod 9$ olur ve her iki taraf da çift olduğundan, $2^{6k+2}\equiv 2^2 \pmod{18}$ elde ederiz. Buradan $2^{6k+2}=18t+2^2$ elde ederiz, burada $t\geq 0$ bir tam sayıdır. Ancak, Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{18}\equiv 1 \pmod{19}$'dur ve $2^{18t}\equiv 1 \pmod{19}$ olur, $t=0,1,2,\ldots$ için. Böylece, $2^{6k+2}\equiv 2^{18t+4}\equiv 2^4 \pmod{19}$ olur; buradan da $2^{6k+2}+3\equiv 2^4+3\equiv 0 \pmod{19}$ elde edilir ve bu da kanıtlanması gereken şeydir.

[6] Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{12}\equiv 1 \pmod{13}$ olduğundan, $2^{60}\equiv 1 \pmod{13}$ elde ederiz. Ayrıca, $2^5\equiv 6 \pmod{13}$ olduğu için, $2^{10}\equiv -3 \pmod{13}$ elde ederiz. Öte yandan, $3^3\equiv 1 \pmod{13}$'tür, bu da $3^{69}\equiv 1 \pmod{13}$ ve $3^{70}\equiv 3 \pmod{13}$ anlamına gelir. Bu nedenle, $2^{70}+3^{70}\equiv 0 \pmod{13}$ olur, yani $13 \mid 2^{70}+3^{70}$, bu da kanıtlanması gereken şeydir.

[7] Açıkça görülüyor ki, $20^{15}-1$ sayısının her bir asal böleni olan 11, 31 ve 61'in $20^{15}-1$'i böldüğünü göstermek yeterlidir. $2^5\equiv -1 \pmod{11}$ ve $10\equiv -1 \pmod{11}$ olduğundan, $10^5\equiv -1 \pmod{11}$, bu da $20^5\equiv 1 \pmod{11}$ ve $20^{15}\equiv 1 \pmod{11}$ anlamına gelir. Dolayısıyla $11 \mid 20^{15}-1$. Sonra, $20\equiv -11 \pmod{31}$ olduğundan, $20^2\equiv 121\equiv -3 \pmod{31}$'dir. Bu nedenle, $20^3\equiv(-11)(-3)=33\equiv 2 \pmod{31}$ ve $20^{15}\equiv 2^5\equiv 1 \pmod{31}$ olur. Böylece, $31 \mid 20^{15}-1$. Son olarak, $3^4\equiv 20 \pmod{61}$ ve bu da $20^{15}\equiv 3^{60}\equiv 1 \pmod{61}$ anlamına gelir (Fermat'ın küçük teoremine göre); bu nedenle $61 \mid 20^{15}-1$.

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.[8]

9. Her pozitif n sayısı için $3\cdot(15^5+25^5+\cdots+n^5)$ sayısının $13^3+23^3+\cdots+n^3$'e bölündüğünü kanıtlayınız.[9]

10. $1^n+2^n+\cdots+(n-1)^n$ sayısının n'e bölünmesini sağlayan tüm $n>1$ tam sayılarını bulunuz.[10]

11. Pozitif tam n sayısı için $a_n=2^{2n+1}-2^{n+1}+1$ ve $b_n=2^{2n+1}+2^{n+1}+1$ sayılarından hangisinin 5'e bölünüp, hangisinin bölünmediğini tespit ediniz.[11]

---

[8] $d=\left(\frac{a^m-1}{a-1},a-1\right)$ olarak tanımlayalım. Aşağıdaki eşitliği göz önünde bulunduralım:

$$\frac{a^m-1}{a-1}=(a^{m-1}-1)+(a^{m-2}-1)+\cdots+(a-1)+m \tag{1}$$

ve $a-1\mid a^k-1$ ifadesinin $k=0,1,2,\ldots$ için geçerli olduğunu dikkate alarak, $d\mid m$ elde ederiz. Bu nedenle, $a-1$ ve m sayılarının $d>\delta$ ortak bir böleni olsaydı, (1) eşitliğine göre $\delta\mid\frac{a^m-1}{a-1}$ olurdu ve a^m-1 ile $a-1$ sayıları $\delta>d$ ortak bir bölenine sahip olurdu ki bu imkânsızdır. Bu nedenle, d, $a-1$ ve m sayılarının en büyük ortak bölenidir ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

[9] Pozitif tam sayı n için, şu eşitliğe sahibiz:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(bu eşitlik tümevarım ile elde edilir). Yine tümevarım ile şu eşitliği de elde ederiz:

$$1^5+2^5+\cdots+n^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

bu da tüm pozitif tam sayılar n için geçerlidir. Bu formüllerden şu sonucu elde ederiz:

$$3(1^5+2^5+\cdots+n^5)/(1^3+2^3+\cdots+n^3)=2n^2+2n-1$$

bu da istenen özelliği kanıtlar.

[10] Bunlar, 1'den büyük tüm tek sayılardır. Aslında, n tek ve $n>1$ ise, $(n-1)/2$ pozitif bir tam sayıdır ve $k=1,2,\ldots,(n-1)/2$ için kolayca şu ifadeyi elde ederiz:

$$n\mid k^n+(n-k)^n \quad (\text{çünkü } (-k)^n=-k^n)$$

Böylece, $n\mid 1^n+2^n+\cdots+(n-1)^n$ elde ederiz. Diğer yandan, eğer n çift ise, 2^s, n'yi bölen en yüksek 2 kuvveti olsun (bu nedenle s pozitif bir tam sayıdır). $2^s\geq s$ olduğundan, k çift olduğunda $2^s\mid k^n$ ve k tek olduğunda (bu dizideki k sayılarının sayısı $(n-1)/2$'dir) Euler'in teoremine göre $k^{2^s-1}\equiv 1 \pmod{2^s}$ ve $k^n\equiv 1 \pmod{2^s}$ elde ederiz (çünkü $2^s\mid n$). Böylece şu sonuca ulaşırız:

$$1^n+3^n+\cdots+(n-3)^n+(n-1)^n\equiv\frac{n}{2}\pmod{2^s}$$

bu da şu sonucu verir:

$$1^n+2^n+\cdots+(n-1)^n\equiv\frac{n}{2}\pmod{2^s}$$

$2^n+4^n+\cdots+(n-2)^n\equiv 0 \pmod{2^s}$ olduğundan, $n\mid 1^n+2^n+\cdots+(n-1)^n$ elde ederiz. Eğer $2^s\mid n$ ise, $\frac{n}{2}\equiv 0 \pmod{2^s}$ olur ve $2^s\mid n$ ve $2^{s+1}\mid n$ çelişkisini elde ederiz. Böylece, n çift olduğunda $n\nmid 1^n+2^n+\cdots+(n-1)^n$ elde edilir.
Not: Fermat teoreminden şu sonucu kolayca çıkarırız: Eğer n bir asal sayıysa, $n\mid 1^n+1-1^n+\cdots+(n-1)^n+1$. Ancak, bu ilişkiyi sağlayan bileşik bir sayı bilmiyoruz. G. Ginga, böyle bir bileşik sayı olmadığını öne sürdü, ancak bu 1'den küçük bileşik bir sayının var olmadığını henüz kanıtlayamadı.

[11] Dört durumu inceleyelim:
(a) $n=4k$ olsun, burada k pozitif bir tam sayıdır. Bu durumda,

$$a_n=2^{8k+1}-2^{4k+1}+1\equiv 2-2+1\equiv 1 \pmod 5,$$

$$b_n=2^{8k+1}+2^{4k+1}+1\equiv 2+2+1\equiv 0 \pmod 5.$$

($2^4\equiv 1 \pmod 5$ olduğundan, $2^{4k}\equiv 1 \pmod 5$'tir.)
(b) $n=4k+1$ olsun, $k=0,1,2,\ldots$. Bu durumda,

$$a_n=2^{8k+3}-2^{4k+2}+1\equiv 8-4+1\equiv 0 \pmod 5,$$

12. Her n pozitif tam sayısı için
$$x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, \ldots$$
sonsuz dizisinin her bir terimi n'ye bölünecek şekilde bir x pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[12]

13. Her x çift pozitif tam sayısı için
$$x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \ldots$$
dizisinin terimlerinden hiçbirinin n'ye bölünmeyecek şekilde sonsuz sayıda n tek pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[13]

14. Her n pozitif tam sayısı için $(n+1)^n - 1$ sayısının n^2'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[14]

15. Her n pozitif tam sayısı için $2^{(2^n-1)n} - 1$ sayısının $(2^n-1)^2$'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[15]

16. 2^n+1 sayısı n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız. Bu koşulu sağlayan tüm asal sayıları bulunuz.[16]

$$b_n = 2^{8k+3} + 2^{4k+2} + 1 \equiv 8+4+1 \equiv 3 \pmod 5.$$

(c) $n = 4k+2$ olsun, $k = 0,1,2,\ldots$. Bu durumda,
$$a_n = 2^{8k+5} - 2^{4k+3} + 1 \equiv 2-8+1 \equiv 0 \pmod 5,$$
$$b_n = 2^{8k+5} + 2^{4k+3} + 1 \equiv 2+8+1 \equiv 1 \pmod 5.$$

(d) $n = 4k+3$ olsun, $k = 0,1,2,\ldots$. Bu durumda,
$$a_n = 2^{8k+7} - 2^{4k+4} + 1 \equiv 8-1+1 \equiv 3 \pmod 5,$$
$$b_n = 2^{8k+7} + 2^{4k+4} + 1 \equiv 8+1+1 \equiv 0 \pmod 5.$$

Sonuç olarak, a_n sayıları yalnızca $n \equiv 1$ veya $2 \pmod 4$ olduğunda 5'e bölünürken, b_n sayıları yalnızca $n \equiv 0$ veya $3 \pmod 4$ olduğunda 5'e bölünür. Böylece, yalnızca a_n veya b_n sayılarından biri 5'e bölünür.

[12] $x = 2n-1$ seçmek yeterlidir. Böylece $x, x^x, x^{x^x}, \ldots$ sayılarının her biri tek olur ve dolayısıyla $2n = x+1$, sonsuz dizinin her bir terimi olan $x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, \ldots$ sayılarının bir bölenidir.

[13] Örneğin, $4k+3$ biçimindeki tüm asal sayılar p. Aslında, x çift olduğunda, dizideki $x, x^x, x^{x^x}, \ldots$ terimlerinin her biri çifttir. Eğer dizideki $x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \ldots$ terimlerinden herhangi biri p'ye tam bölünseydi, pozitif bir tam sayı m için $p \mid x^m+1$ ilişkisine sahip olurduk, dolayısıyla $(x^m)^2 \equiv -1 \pmod p$. Ancak, -1, $4k+3$ biçimindeki asal bir modül için bir karekök kalanı olamaz.

[14] Binom açılımından
$$(1+n)^n = 1 + \binom{n}{1}n + \binom{n}{2}n^2 + \cdots + \binom{n}{n}n^n$$
$n > 1$ için (bu, $1^2 \mid 2^2 - 1$ durumu göz önüne alındığında varsayılabilir), üçüncü terimden itibaren tüm terimler n'yi en az 2 üssünde içerir. İkinci terim $\binom{n}{1}n = n^2$'ye eşittir. Bu nedenle, $n^2 \mid ((1+n)^n - 1)$ ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

[15] Problem 14'e göre, pozitif tam sayılar m için
$$m^2 \mid ((m+1)^m - 1)$$
ilişkisini elde ederiz. $m = 2^n - 1$ için, $(m+1)^m = 2^{(2^n-1)}$ olduğundan, şu ilişkiyi elde ederiz:
$$(2^n-1)^2 \mid (2^{(2^n-1)n} - 1),$$
ve bu, kanıtlanması gereken şeydir.

[16] $3 \mid 2^3+1$ ve pozitif bir tam sayı m için $3^m \mid 2^{3^m}+1$ olduğunu varsayalım. O zaman $2^{3^m+1} = (3^m k - 1)^3 = 3^m k^3 - 3^m k^2 + 3^m k - 1 = 3^m t - 1$, burada t pozitif bir tam sayıdır. Böylece $3^{m+1} \mid 2^{3^m+1}+1$ ve tümevarım ile $3^m \mid 2^{3^m}+1$'i elde ederiz, $m = 1,2,\ldots$. Ancak, $n \mid 2^n+1$ ilişkisini sağlayan başka pozitif tam sayılar da vardır. Aslında, pozitif bir tam sayı n için $n \mid 2^n+1$ ise, aynı zamanda $2^n+1 \mid 2^{2^n+1}+1$ olur. Gerçekten de $2^n+1 = kn$, burada k bir tam sayıdır (açıkça, tektir), o zaman $2^n+1 \mid 2^{kn}+1 = 2^{2^n+1}+1$ olur. Böylece $9 \mid 2^3+1$ ifadesi $513 \mid 2^{513}+1$ sonucunu verir.

17. Her $a > 1$ tam sayısı için $a^n + 1$ sayısının n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[17]

18. $2^n + 2$ sayısı n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[18]

19. $a^{10} + 1$ sayısının 10'a bölünmesini sağlayan tüm pozitif tam a sayılarını bulunuz.[19]

---

n'nin asal olduğunu ve $n \mid 2^n + 1$ olduğunu varsayalım. Fermat'ın teoremiyle, $n \mid 2^n - 2$ elde ederiz, bu da $n \mid 3$ sonucunu verir. n asal olduğuna göre, $n = 3$ elde ederiz. Gerçekten, $3 \mid 2^3 + 1$ olur. Böylece, $n \mid 2^n + 1$ ilişkisini sağlayan tek asal sayı $n = 3$ olur.

[17] Öncelikle O. Reutter'e ait aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız (bkz. (Reutter 1963)):

Eğer $a + 1$, tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman $n \mid a^n + 1$ ilişkisi pozitif tam sayılarla sonsuz çözümü vardır.

Eğer $a + 1$, tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman $p > 2$ olan bir asal böleni vardır. Bu durumda, $p \mid a + 1$ olur.

Lemma. Eğer $k \geq 0$ bir tam sayı ve $p \mid a^k + 1$ ise, o zaman $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$.

Lemmanın İspatı. $k \geq 0$ olan bir tam sayı için $p^k \mid a^k + 1$ olduğunu varsayalım. $a^k = b$ yazalım, bu durumda $p^k \mid b + 1$ elde ederiz, dolayısıyla $b = -1 \pmod{p^{k+1}}$ olur.

p tek asal olduğundan, $a^{p^{k+1}} + 1 = b^{p+1} = (b + 1)(b^{p-1} - b^{p-2} + \cdots - b + 1)$ ifadesini elde ederiz.

Ve (çünkü $b = -1 \pmod{p^{k+1}}$ bu da $b^p = 1 \pmod{p^{k+1}}$ anlamına gelir) $b^2 = 1 \pmod{p}$ ve $b^{2i} = 1 \pmod{p}$ elde ederiz. Bu nedenle:

$$b^{p-1} - b^{p-2} + \ldots - b + 1 = 0 \pmod{p},$$

bu da ikinci terimin p'ye bölünebilir olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ elde ederiz ve bu ispatlanması gereken şeydir.

Lemma, $p \mid a + 1$ olduğunda, $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ ve $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ için $k = 1, 2, \ldots$ ifadesiyle tümevarım sağlar. Bu da $n \mid a^n + 1$ ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı n olduğunu ve O. Reutter'in teoremini ispatladığımızı gösterir.

Reutter teoreminin koşullarını sağlayan pozitif tam sayılar için, a'nın tek ve $a > 1$ olduğunu varsaymak yeterlidir. Bu durumda, $a^2 + 1$ ve a^2 ifadesi $8k + 1$ formundadır. Dolayısıyla, $a^2 + 1 = 8k + 2 = 2(4k + 1)$ tek bir çift sayıdır. Şu lemayı ispatlayacağız:

Lemma. Eğer a tek ise, o zaman a ve $a^2 + 1$ çift tek sayılar olup, $s \mid a + 1$ ise, pozitif bir tam sayı $s_1 > s$ vardır ki s_1 ve $a^{s_1} + 1$ de çift tek sayılardır ve $s_1 \mid a^{s_1} + 1$.

İspat. $a^2 + 1$ ve $a^{s_1} + 1$ çift tek sayılar olduğundan, $a + 1 = ms$ elde ederiz, burada m tektir. Böylece $a^s + 1 = a^{s_1} + 1 = a^{s_1} + 1$'dir ve $a^{s_1} + 1$ çift bir çift tek sayıdır.

$s_1 \mid a + 1$ olduğunda, $s_1 \mid a^{s_1} + 1$ ve $s_1 \mid a^{s_1} + 1$ elde ederiz. Bu durumda, $a > 1$ olduğundan, $s_1 > s$ olur. Böylece lema ispatlanmış olur.

a tek olduğundan, $s = 2$ diyebiliriz, bu da lemanın koşullarını sağlar. Böylece, $n \mid a^n + 1$ ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı n olduğunu gösteririz ve bu ispatlanması gereken şeydir (bkz. (Sierpiński 1964c)).

[18] n çift ise ve $n \mid 2^n + 2$ ve $n \mid n - 1 \mid 2^{n-1} + 1$ ise (örneğin $n = 2$ için bu doğrudur), o zaman $n_1 = 2^n + 2$ sayısı için $n_1 \mid 2^{n_1} + 2$ ve $n_1 \mid n_1 - 1 \mid 2^{n_1 - 1} + 1$ elde ederiz. Aslında, $n \mid 2^n + 2$ ve n çift olduğunda, $2^n + 2 = nk$ elde edilir, burada k tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{2^n + 2} + 1 = 2^{2^{2^n + 2}} + 2$$

$n_1 = 2^n + 2$ için ise:

$$n_1 - 1 = 2^n + 1 \mid 2^{2^n + 1} + 1$$

Sonra, $n - 1 \mid 2^{n-1} + 1$ ifadesini elde ederiz ki bu da $2^n + 1 = 2^{n-1}m + 1$'i verir, burada m tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{a-1}m + 1 = 2^{2^n + 1}$$

elde ederiz, bu da:

$$2^n + 2 \mid 2^{2^{2^n + 2} + 2}, \quad ve \quad n_1 \mid 2^{n_1 + 2}$$

Bu koşulları sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı n vardır.

$n_1 = 2^n + 2$ olduğundan, koşullarımızı sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı vardır. $n = 2$'den başlayarak, ardışık sayılar 2, 6, 66, $2^{66} + 2, \ldots$ Ancak, C. Bindschedler bu yöntemin $n \mid 2^n + 2$ ilişkisini sağlayan tüm sayıları vermediğini fark etti; örneğin 946 sayısı $2^{946} + 2$ ilişkisini sağlamaz. Bu problemi tartışan C. Bindschedler tarafından verilen çözümü, *Elemente der Mathematik* dergisinin 18. sayısındaki 430 numaralı problemimde görebilirsiniz (1963), sayfa 90.

[19] Eğer a bir pozitif tam sayıysa ve r sayısı a sayısının 10'a bölünmesinden kalan ise, $a^{10} + 1$ ifadesi ancak ve ancak $r^{10} + 1$ ifadesi 10'a bölünebiliyorsa 10'a bölünür. Bu nedenle, sadece $r = 0, 1, 2, \ldots, 9$ sayıları dikkate alınmalıdır ve bu sayılar için sadece $3^{10} + 1$ ve $7^{10} + 1$ ifadelerinin 10'a bölünebildiğini kolayca doğrularız. Dolayısıyla, $a^{10} + 1$ ifadesi 10'a bölünebilen tüm a sayıları $10k + 3$ ve $10k + 7$ formundadır, burada $k = 0, 1, 2, \ldots$.

20. Hiçbir $n > 1$ tam sayısı için $2^n - 1$ sayısının n'ye bölünmediğini kanıtlayınız.[20]

    (a) $2^n + 1$ sayısının n'ye bölünmesini sağlayan sonsuz tane n pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.

21. $3^n + 1$ sayısının n'ye bölünmesini sağlayan tüm n tek pozitif tam sayılarını bulunuz.[21]

22. $n \cdot 2^n + 1$ sayısının 3'e bölünmesini sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.[22]

23. Her tek p asal sayısı için $n \cdot 2^n + 1$ sayısının p'ye bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[23]

24. Her pozitif tam n sayısı için, y^y sayısı x^x'e bölünecek, fakat y sayısı x^x'e bölünmeyecek şekilde $x > n$ ve y pozitif tam sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.[24]

---

[20] $n > 1$ pozitif tamsayılarının olduğunu ve n'in en küçüğü olduğunu varsayalım. Euler teoremine göre $n \mid (2^n - 1)$. Ancak, pozitif tamsayılar a ve b için $2^a - 1$ ve $2^b - 1$ sayıların en büyük ortak böleni $2^d - 1$'dir, burada $d = (a, b)$'dir.
$a = n$ ve $b = \varphi(n)$ için $d = (n, \varphi(n))$'dir, dolayısıyla $n \mid (2^d - 1)$'dir. Ancak, $n > 1$ olduğundan $2^d - 1 > 1$ elde ederiz, bu da $d > 1$ ve $1 < d \leq \varphi(n) < n$ anlamına gelir ve $d \mid n \mid (2^d - 1)$ ifadesi n'in tanımına aykırıdır.
(a) Örneğin, $n = 3^k$ biçimindeki tüm sayılar için ($k = 1, 2, \ldots$). Bu durumu matematiksel tümevarım yoluyla ispatlayacağız. Elimizde $3 \mid 2^{3^k} + 1$ var. Eğer herhangi bir pozitif tam k için $3 \mid 2^{3^k} + 1$, o zaman, aşağıdaki özdeşlikten hareketle

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (2^{3^k} + 1)(2^{3^k} - 2^{3^k} + 1)$$

ve şu gözlemden yola çıkarak:

$$2^{3^k} - 2^{3^k} + 2 = 2^{3^k} + 2 - (2^{3^k} + 1), \quad \text{ve} \quad 3 \mid 2^{3^k} + 2$$

(çünkü 4^3 bölündüğünde kalan 1 verir), formülün ikinci terimi $2^{3^{k+1}} + 1$'in 3 ile bölünebilir olduğunu gösterir, bu da $3 \mid 2^{3^{k+1}} + 1$ anlamına gelir.

[21] $n = 1$ olan tek sayıdır. Varsayalım ki, $n > 1$ olan bir tek sayı vardır ve $n \mid 3^n + 1$. Bu durumda, $n \mid 9n - 1$. n, $n \mid 9^{\varphi(n)} - 1$ ile pozitif bir tam sayı olsun. $d = (\varphi(n), n)$ olarak tanımlandığında, $n \mid 9^d - 1$ elde edilir. Ancak, $d > 1$ olduğunda, $n \mid 8$ elde edilir ki, n tek olduğu için bu mümkün değildir. Sonuç olarak $1 < d \leq \varphi(n) < n$ ve $d \mid n$, bu nedenle $n > 1$ koşulunu sağlayan tek bir sayı yoktur.

[22] Açıkça, n sayısı 3'e bölünemez. Bu nedenle, n sayısı aşağıdaki formlardan birinde olmalıdır: $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 4$ veya $6k + 5$, burada $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Eğer $n = 6k + 1$ ise, $2^6 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan,

$$n2^n + 1 = (2^6)2 + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

Bu durumda $3 \mid n2^n + 1$ olur.
Eğer $n = 6k + 2$ ise,

$$n2^n + 1 = 2(2^6)2 + 1 \equiv 8 + 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

yani yine $3 \mid n2^n + 1$.
Eğer $n = 6k + 4$ ise,

$$n2^n + 1 \equiv 4(2^6)2^4 + 1 \equiv 2^5 + 1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Son olarak, $n = 6k + 5$ ise,

$$n2^n + 1 = 5(2^6)2^5 + 1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Bu durumda, $n2^n + 1$ ifadesi ancak ve ancak n, $6k+1$ veya $6k+2$ formunda olduğunda 3'e bölünebilir. Burada $k = 0, 1, 2, \ldots$.

[23] Eğer p tek bir asal sayıysa ve $n = (p - 1)(kp + 1)$, burada $k = 0, 1, 2, \ldots$, o zaman $n \equiv -1 \pmod p$ ve $p - 1 \mid n$. Fermat'nın küçük teoremi gereğince, $2^n \equiv 1 \pmod p$ olur, dolayısıyla $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod p$.
Not: Bu problemden, $n2^n + 1$ formunda sonsuz sayıda bileşik sayı olduğu sonucu çıkarılabilir, burada n pozitif bir tam sayıdır. Bu formdaki sayılar Cullen sayıları olarak bilinir. $1 < n < 141$ aralığında bu formdaki tüm sayılar bileşik olduğu ispatlanmıştır, ancak $n = 141$ için $n2^n + 1$ asal bir sayıdır. Sonsuz sayıda asal Cullen sayısı olup olmadığı bilinmemektedir.

[24] n verilen bir pozitif tam sayı olsun ve $k > 1$ olmak üzere $2^k > n$ olacak şekilde pozitif bir tam sayı olsun. p, $2^k - 1$'den büyük bir asal sayı olsun. $k > 1$ olduğu için, $x = 2^k$, $y = 2p$ olarak alalım. Buradan $x \nmid y$ ve $x^x \mid y^y$ olur, çünkü $x = 2^{2^k}$ ve

25. Her n tek pozitif tam sayısı için $2^n - 1$ sayısının n'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[25]

26. $2^n - 3$ $(n = 2, 3, \dots)$ sonsuz dizisinin 5'e bölünen sonsuz sayıda terimi olduğunu; 13'e bölünen sonsuz tane terimin bulunduğunu, fakat 65'e bölünen hiçbir terimin bulunmadığını kanıtlayınız.[26]

27. $2^n - 2$ ve $3^n - 3$ sayıları n'ye bölünmesini sağlayan iki en küçük bileşik n sayısını bulunuz.[27]

28. $2^n - 2$ sayısının n'ye bölünmesini, $3^n - 3$ sayısının da n'ye bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.[28]

29. $2^n - 2$ sayısının n'ye bölünmemesini, $3^n - 3$ sayısının da n'ye bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.[29]

$y^y = (2p)^{2p}$, burada $2p > 2^k k$.

Örneğin, $4 \nmid 10$, fakat $4^4 \mid 10^{10}$, $8 \nmid 12$, fakat $8^8 \mid 12^{12}$, $9 \nmid 21$, fakat $9^9 \mid 21^{21}$.

[25] Pozitif tam sayılar için, $\varphi(n) \mid n!$ olduğu açıktır. Aslında, $n = 1$ için bu doğrudur; eğer $n > 1$ ise ve $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_k^{a_k}$ asal çarpanlarına ayrılmışsa, burada $q_1 < q_2 < \dots < q_k$ olmak üzere, o zaman

$$\varphi(n) = q_1^{a_1 - 1} q_2^{a_2 - 1} \dots q_k^{a_k - 1} (q_1 - 1)(q_2 - 1) \dots (q_k - 1)$$

ve $q_1^{a_1 - 1} q_2^{a_2 - 1} \dots q_k^{a_k - 1} \mid n$, $q_1 - 1 < q_2 - 1 < \dots < q_k - 1$ olduğu için $q_k - 1 < n$ ve $q_1 - 1 < q_2 - 1 < \dots < q_k - 1$, n'den küçük farklı pozitif tam sayılardır. Böylece $(q_1 - 1)(q_2 - 1) \dots (q_k - 1)(n - 1)! \mid n!$ elde edilir ve buradan $\varphi(n)(n - 1)! \mid n!$ olduğu sonucu çıkar.

Eğer n tek ise, (Euler teoremine göre) $n \mid 2^{\varphi(n)} - 1 \mid 2^{n!} - 1$, dolayısıyla $n \mid 2^{n!} - 1$, bu da kanıtlanması gereken şeydi.

[26] Fermat'nın teoremine göre, $2^4 \equiv 1 \pmod 5$ ve $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.

$2^3 \equiv 3 \pmod 5$ ve $2^4 \equiv 3 \pmod{13}$ olduğu için, $24k + 3 \equiv 3 \pmod 5$ ve $2^{12k+4} \equiv 3 \pmod{13}$ elde ederiz, burada $k = 0, 1, 2, \dots$. Dolayısıyla, $5 \mid 2^{4k+3} - 3$ ve $13 \mid 2^{12k+4} - 3$, burada $k = 0, 1, 2, \dots$.

Bir sonraki adımda, $2^6 \equiv 1 \pmod{65}$ olduğunu ve bu nedenle $2^{12} \equiv 1 \pmod{65}$ olduğunu görürüz. Böylece $2^n - 3 \equiv 2^n - 3 \pmod{65}$, bu da $2^n - 3$ dizisinin $(n = 2, 3, \dots)$ 12 periyotlu olduğunu gösterir. $2^n - 3$ sayılarının hiçbiri $(n = 2, 3, \dots)$ 65'e bölünmüyorsa, bunu göstermek için $n = 2, 3, \dots, 13$ için $2^n - 3$ sayılarının 65'e bölünüp bölünmediğini kontrol etmek yeterlidir. 65'e bölündüğünde kalanlar sırasıyla $1, 5, 13, 29, 61, 60, 58, 54, 46, 30, 63, 64$ olup, bunların hiçbiri sıfır değildir.

[27] $n \nmid 2^n - 2$ olacak şekildeki en küçük dört bileşik n sayısının 341, 561, 645 ve 1105 olduğu bilinmektedir (örneğin, bakınız Sierpiński, [37, s. 215]). 341 için, $341 \nmid 3^{341} - 3$'tür, çünkü Fermat teoremi gereğince $3^{30} \equiv 1 \pmod{31}$, bu da $3^{330} \equiv 1 \pmod{31}$ anlamına gelir, dolayısıyla $3^{341} \equiv 3^{11} \pmod{31}$ olur. $3^3 \equiv -4 \pmod{31}$ olduğundan, $3^9 \equiv -64 \equiv -2 \pmod{31}$ elde ederiz, dolayısıyla $3^{11} \equiv -18 \pmod{31}$ olur. Bu nedenle $3^{341} - 3 \equiv 3^{11} - 3 \equiv -21 \pmod{31}$'dir ve $31 \nmid 3^{341} - 3$, bu da $341 = 11 \cdot 31 \nmid 3^{341} - 3$ anlamına gelir. Diğer yandan, $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17 \nmid 3^{561} - 3$'tür çünkü $11 \mid 3^{10} - 1$ olması $11 \mid 3^{390} - 1$ ve $11 \mid 3^{561} - 3$ olmasını gerektirir, ve ayrıca $17 \mid 3^{16} - 1$ olması $17 \mid 3^{16 \cdot 35} - 1 = 3^{560} - 1$ olmasını gerektirir. Böylece $17 \nmid 3^{561} - 3$'tür.

Böylece, $n \mid 2^n - 2$ ve $n \nmid 3^n - 3$ olan en küçük bileşik n sayısı $n = 561$ sayısıdır.

645 sayısı $3^{645} - 3$'ün bir böleni değildir çünkü $645 = 3 \cdot 5 \cdot 43$, iken $3^{42} \equiv 1 \pmod{43}$ olması $3^{42 \cdot 15} \equiv 1 \pmod{43}$ olmasını gerektirir. Böylece $3^{630} \equiv 1 \pmod{43}$ ve $3^{645} \equiv 3^{15} \pmod{43}$. $3^4 \equiv -5 \pmod{43}$ olduğundan, $3^6 \equiv -45 \equiv -2 \pmod{43}$, $3^{12} \equiv 4 \pmod{43}$, $3^{15} \equiv 108 \equiv 22 \pmod{43}$ elde ederiz. Bu nedenle $3^{645} - 3 \equiv 19 \pmod{43}$, bu da $43 \nmid 3^{645} - 3$ anlamına gelir.

Diğer yandan, $1105 \mid 3^{1105} - 3$'tür. Gerçekten de, $1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$ ve $3^{1104} \equiv 1 \pmod 5$, ve $5 \mid 3^{1105} - 3$. Sonra, $3^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, $3^{1104} \equiv 1 \pmod{13}$ ve $13 \mid 3^{1105} - 3$. Son olarak, $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$, ve $1104 = 16 \cdot 69$ olduğundan, $3^{1104} \equiv 1 \pmod{17}$ elde ederiz, bu da $17 \mid 3^{1105} - 3$ anlamına gelir. Böylece, $n \mid 2^n - 2$ ve $n \mid 3^n - 3$ koşulunu sağlayan en küçük iki bileşik sayı 561 ve 1105'tir.

Not: $n \mid 2^n - 2$ ve $n \mid 3^n - 3$ olacak şekilde sonsuz çoklukta bileşik n sayısı olup olmadığını bilmiyoruz. Bu iddia, A. Schinzel'in asal sayılarla ilgili bir sanısından ((Schinzel ve Sierpiński 1958a)) çıkarsanabilirdi. Asal n sayıları için, Fermat teoremi nedeniyle hem $n \mid 2^n - 2$ hem de $n \mid 3^n - 3$ ilişkileri geçerlidir.

[28] $n \nmid 3^n - 3$ ve Fermat teoremi göz önüne alındığında, n sayısı bileşik olmalıdır ve $n \mid 2^n - 2$ ile $n \nmid 3^n - 3$ koşulunu sağlayan en küçük bileşik n sayısı $n = 341$'dir. Problem 27'nin çözümünde $341 \nmid 3^{341} - 3$ olduğunu kanıtlamıştık. Böylece, $n \mid 2^n - 2$ ve $n \nmid 3^n - 3$ olacak şekildeki en küçük n sayısı $n = 341$'dir.

Not: A. Rotkiewicz, $n \mid 2^n - 2$ ve $n \nmid 3^n - 3$ olacak şekilde hem çift hem de tek olan sonsuz çoklukta pozitif n tamsayısının var olduğunu kanıtlamıştır.

[29] $n = 6$ sayısı istenen özelliği sağlar. Aslında, eğer $n \nmid 2^n - 2$ ise, n bileşik olmalıdır. En küçük bileşik sayı 4'tür, ancak $4 \nmid 3^4 - 3 = 78$. Sonraki bileşik sayı 6'dır ve $6 \nmid 2^6 - 2 = 62$ iken, $6 \mid 3^6 - 3$'tür çünkü $3^6 - 3$ bariz bir şekilde çifttir ve 3 ile bölünebilir.

30. Her a pozitif tam sayısı için $a^n - a$ sayısının n'e bölünecek şekilde bir n bileşik sayısı bulunuz.[30]

31. a, b, c tam sayılar olmak üzere $a^3 + b^3 + c^3$ sayısı 9'a bölünüyorsa, a, b, c sayılarından en az birinin 3'e bölündüğünü kanıtlayınız.[31]

32. a_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ tam sayılar olmak üzere

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3$$

sayısı 9'a bölünüyorsa,

$$3 \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5)$$

olduğunu kanıtlayınız.[32]

33. $(x, y) = 1$ ve $x^2 + y^2 = z^4$ olmak üzere x, y, z pozitif tam sayılarsa, $7 \mid x$ ya da y olduğunu kanıtlayınız. $(x, y) = 1$ koşulunun gerekli olduğunu gösteriniz.[33]

34. a, b tam sayıları için $7 \mid a^2 + b^2$ ise $7 \mid a$ veya $7 \mid b$ olduğunu kanıtlayınız.[34]

35. Aşağıdaki koşulları sağlayan sonsuz sayıda x, y pozitif tam sayı çiftinin bulunduğunu kanıtlayınız ve böyle çiftlerden en küçüğünü bulunuz:[35]

$$x(x+1) \mid y(y+1), \quad x \nmid y, \quad x+1 \nmid y, \quad x \nmid y+1, \quad x+1 \nmid y+1$$

Not: A. Rotkiewicz, $n \mid 3^n - 3$ ve $n \nmid 2^n - 2$ olacak şekilde hem çift hem de tek olan sonsuz çoklukta bileşik n sayısının var olduğunu kanıtlamıştır.

[30] Eğer a bileşik ise, $n = a$ alabiliriz çünkü $a \mid a^a - a$ olduğu açıktır. Eğer $a = 1$ ise, $n = 4$ alabiliriz çünkü $4 \mid 1^4 - 1$. Eğer $a > 2$ bir asal ise, $n = 2a$ alabiliriz çünkü bu durumda a tektir ve $a^{2a} - a$ sayısı çifttir; böylece, tek bir a sayısı ile ve 2 ile bölünebilen $a^{2a} - a$, $2a$ ile bölünebilir. Geriye $a = 2$ durumunu ele almak kalıyor. Burada $n = 341 = 11 \cdot 31$ alabiliriz çünkü $341 \mid 2^{341} - 2$; bu son özellik şu şekilde kanıtlanabilir: $11 \mid 2^{10} - 1 = 1023$ elimizdedir, dolayısıyla $11 \mid 2^{340} - 1$, ve $11 \mid 2^{341} - 2$. Sonra, $31 = 2^5 - 1 \mid 2^{340} - 1$, dolayısıyla $31 \mid 2^{341} - 2$. Böylece $2^{341} - 2$ sayısı 11 ve 31 ile bölünebilir, dolayısıyla bunların çarpımı olan 341 ile de bölünebilir.

Not: M. Cipolla, her pozitif a tamsayısı için $n \mid a^n - a$ olacak şekilde sonsuz çoklukta bileşik n sayısının var olduğunu kanıtlamıştır. (Bakınız (Cipolla 1904)). Ancak, her a tamsayısı için $n \mid a^n - a$ olacak şekilde sonsuz çoklukta bileşik n sayısının olup olmadığını bilmiyoruz. Bu tür sayıların en küçüğü $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$'dir. A. Schinzel'in asal sayılarla ilgili belirli bir sanısından ((Schinzel ve Sierpiński 1958a)) bu tür sonsuz çoklukta bileşik sayının var olduğu sonucu çıkar.

[31] 3 ile bölünemeyen bir tamsayının küpünün 9'a bölünmesiyle elde edilen kalan 1 veya -1'dir. Böylece, eğer a, b, c sayılarından hiçbiri 3 ile bölünemeseydi, o zaman $a^3 + b^3 + c^3$ sayısının 9'a bölünmesiyle elde edilen kalan, $+$ ve $-$ işaretlerinin herhangi bir kombinasyonu için 9 ile bölünemeyen $\pm 1 \pm 1 \pm 1$ olurdu. Buradan, eğer $9 \mid a^3 + b^3 + c^3$ ise, o zaman $3 \mid abc$ olduğu sonucu çıkar, ki bu da kanıtlanması gerekendi.

[32] Kanıt, Problem 31'deki kanıta benzerdir çünkü $\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$ sayısı, $+$ ve $-$ işaretlerinin herhangi bir kombinasyonu için 9 ile bölünemez.

[33] $(x, y) = 1$ koşulu gereklidir çünkü, örneğin, $15^2 + 20^2 = 5^4$, iken $7 \nmid 15 \cdot 20$. Şimdi, eğer $(x, y) = 1$ ise ve x, y, z, $x^2 + y^2 = z^4$ olacak şekilde pozitif tamsayılar ise, o zaman Pisagor denklemi teorisinden, örneğin $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z^2 = m^2 + n^2$ olacak şekilde m ve n tamsayıları vardır. $7 \nmid y$ olduğunu varsayalım; böylece $7 \nmid m$ ve $7 \nmid n$. 7 ile bölünmeyen bir tamsayının karesinin 7'ye bölünmesiyle 1, 2 veya 4 kalanını verdiğini görmek kolaydır. $1 + 2$, $1 + 4$ ve $2 + 4$ bu tür kalanlar olamayacağından ve hiçbiri 7 ile bölünemediğinden, $z^2 = m^2 + n^2$ denkleminden m ve n sayılarının 7'ye bölündüğünde aynı kalanları vermesi gerektiği sonucu çıkar. Böylece $7 \mid x = m^2 - n^2$.

[34] 7 ile bölünmeyen bir tamsayının karesi 7'ye bölündüğünde 1, 2 veya 4 kalanını verir, dolayısıyla bu tür karelerin toplamı 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 kalanını verir. Böylece, eğer a ve b, $7 \mid a^2 + b^2$ olacak şekilde tamsayılar ise, o zaman bunlardan biri, dolayısıyla diğeri de 7 ile bölünmelidir.

[35] $x = 36k + 14$, $y = (12k + 5)(18k + 7)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, sayıları istenen özelliği sağlar.
Aslında, $x(x + 1) = 2 \cdot 3(12k + 5)(18k + 7) = 6y$ olduğu açıkça görülürken, $6 \mid y + 1$.
y sayısı x ile bölünemez çünkü y tektir, x ise çifttir. y sayısı $x + 1$ ile bölünemez çünkü $3 \mid x + 1$, iken $3 \nmid y$. $y + 1$ sayısı x ile bölünemez çünkü $18k + 7 \mid x$ ve $18k + 7 \mid y$, dolayısıyla $18k + 7 \nmid y + 1$. Son olarak, $y + 1$ sayısı $x + 1$ ile bölünemez çünkü $12k + 5 \mid x + 1$ ve $12k + 5 \mid y$, dolayısıyla $12k + 5 \nmid y + 1$.
$k = 0$ için $x = 14$, $y = 35$ elde ederiz ve istenen özelliğe sahip daha küçük sayılar olmadığını göstermek kolaydır.

36. Her $s \leq 25$ pozitif tam sayısı ve $s = 100$ için basamakları toplamı s'ye eşit olan ve s'ye bölünen en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.[36]

37. Her s pozitif tam sayısı için, s'ye bölünen ve basamakları toplamı s'ye eşit olan bir n pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[37]

38. Aşağıdakileri kanıtlayınız:[38]

(a) Her pozitif tam sayının $4k+1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k+3$ şeklindeki bölenlerinin sayısından az değildir.
(b) $4k+1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k+3$ şeklindeki bölenlerinin sayısına eşit olan sonsuz tane pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
(c) $4k+1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k+3$ şeklindeki bölenlerinin sayısından fazla olan sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunur.

39. a, b, c herhangi tam sayılar ve n de 3'ten büyük olan bir tam sayı ise, $k = a, k+b, k+c$ sayıların hiçbirinin n'ye bölünmeyecek şekilde bir k tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[39]

---

[36] $s < 10$ için, elbette $n_s = s$'e sahibiz. Sonra, s'nin ardışık katlarını inceleyerek, $n_{10} = 190$, $n_{11} = 209$, $n_{12} = 48$, $n_{13} = 247$, $n_{14} = 266$, $n_{15} = 155$, $n_{16} = 448$, $n_{17} = 476$, $n_{18} = 198$, $n_{19} = 874$, $n_{20} = 9920$, $n_{21} = 399$, $n_{22} = 2398$, $n_{23} = 1679$, $n_{24} = 888$, $n_{25} = 4975$ elde ederiz. Son olarak, $n_{100} = 19999999999900$'a sahibiz. Aslında, 100 ile bölünebilen her sayının son iki basamağı sıfır olmalıdır ve 199999999999'dan küçük her sayının rakamları toplamı açıkça 100'den küçüktür. Bakınız (Kaprekar 1955).

[37] s pozitif bir tamsayı olsun, $s = 2^\alpha 5^\beta t$, burada α ve β, ≥ 0 tamsayılar, ve t, 2 veya 5 ile bölünemeyen pozitif bir tamsayıdır. Euler teoremine göre $10^{\varphi(t)} \equiv 1 \pmod t$'ye sahibiz. $n = 10^{\alpha+\beta}(10^{\varphi(t)} + 10^{2\varphi(t)} + \ldots + 10^{s\varphi(t)})$ olsun. $10^{\varphi(t)} + 10^{2\varphi(t)} + \ldots + 10^{s\varphi(t)} \equiv s \equiv 0 \pmod t$ ($t \mid s$ olduğundan) sahibiz, ve $2^\alpha 5^\beta \mid 10^{\alpha+\beta}$ olduğundan, n sayısı s ile bölünebilir. Diğer yandan, n sayısının ondalık rakamlarının toplamının s'ye eşit olduğu açıktır.

[38]

(a) Eğer sayının $4k+3$ biçiminde bir asal böleni yoksa, teorem bariz bir şekilde doğrudur. Teoremin, asal çarpanlarına (birinci kuvvetler halinde, dolayısıyla farklı olması gerekmeyen) ayrışımı $s \geq 0$ tane $4k+3$ biçiminde asal içeren tüm sayılar için doğru olduğunu varsayalım. n, asal çarpanlarına (birinci kuvvetler halinde, dolayısıyla farklı olması gerekmeyen) ayrışımı $s+1$ tane $4k+3$ biçiminde asal çarpan içeren pozitif bir tamsayı olsun. O zaman $n = mq$ olur; burada m'nin asal çarpanlarına (birinci kuvvetler halinde) ayrışımı s tane $4k+3$ biçiminde çarpan içerir ve q, $4k+3$ biçiminde bir asaldır. g, m'nin $4k+1$ biçimindeki tamsayı bölenlerinin sayısını göstersin ve h, m'nin $4k+3$ biçimindeki tamsayı bölenlerinin sayısını göstersin. Varsayım gereği (s ile ilgili olarak) $g \geq h$'ye sahibiz. Şimdi, mq'nun $4k+1$ biçimindeki tamsayı bölenleri, elbette m'nin $4k+1$ biçimindeki bölenleri (bu bölenlerin sayısı g'ye eşittir) ve ayrıca m'nin $4k+3$ biçimindeki tamsayı bölenlerinin q sayısı ile çarpımlarıdır; bu bölenlerin sayısı h'dir. Böylece, mq sayısı $g+h$ tane $4k+1$ biçiminde tamsayı bölene sahip olacaktır. Diğer yandan, mq'nun $4k+3$ biçimindeki tamsayı bölenleri, m'nin $4k+3$ biçimindeki tamsayı bölenleri (bu bölenlerin sayısı h'dir) ve m'nin $4k+1$ biçimindeki bölenlerinin q ile çarpımları (bu bölenlerin sayısı g'dir) olacaktır. Ancak, bu sonuncular arasında m'nin $4k+3$ biçimindeki bölenleri olan bölenler olabilir. Böylece mq'nun $4k+3$ biçimindeki tamsayı bölenlerinin toplam sayısı $\leq h+g$'dir (ve belki de, $< h+g$). Teorem her mq sayısı için doğru olduğundan, tümevarım yoluyla (s'ye göre) teoremin pozitif s tamsayısı için doğru olduğunu elde ederiz.

(b) 3^{2n-1} sayısı ($n = 1, 2, \ldots$) $4k+1$ biçiminde (yani, $1, 3^2, 3^4, \ldots, 3^{2n-2}$) tamsayı bölenlerine sahip olduğu kadar $4k+3$ biçiminde (yani $3, 3^3, 3^5, \ldots, 3^{2n-1}$) bölenlere sahiptir.

(c) 3^{2n} sayısı ($n = 1, 2, \ldots$ olmak üzere) $n+1$ tane $4k+1$ biçiminde (yani $1, 3^2, 3^4, \ldots, 3^{2n}$) bölene ve sadece n tane $4k+3$ biçiminde (yani $3, 3^3, \ldots, 3^{2n-1}$) bölene sahiptir. 5^n sayısının tüm $n+1$ böleni $4k+1$ biçimindedir ve $4k+3$ biçiminde hiç böleni yoktur.

[39] r_1, r_2, ve r_3, $-a$, $-b$, ve $-c$ tamsayılarının n'ye bölünmesiyle elde edilen kalanlar olsun. Böylece, r_1, r_2, ve r_3, $0, 1, 2, \ldots, n-1$ dizisinden tamsayılardır, ve r_1, r_2, r_3 sayıları arasında en fazla üç farklı sayı olduğundan, $n > 3$ iken, bu dizide $r \neq r_1$, $r \neq r_2$, ve $r \neq r_3$ olacak şekilde bir r sayısı vardır. Eğer $n \mid a+r$ olsaydı, o zaman $-a \equiv r_1 \pmod n$ olduğundan $n \mid r - r_1$ olurdu. Ancak, r ve r_1, ≥ 0 ve $< n$ olan tamsayılardır, ve eğer farkları n ile bölünebiliyorsa, o zaman r'nin tanımının aksine $r = r_1$ olmalıdır. Benzer bir şekilde $n \nmid b+r$ ve $n \nmid c+r$ olduğunu gösteririz. Böylece, $k = r$ alabiliriz.

40. $F_n = 2^{2^n} + 1$ için $F_n \mid 2^{F_n} - 2$ olduğunu kanıtlayınız ($n = 1, 2, 3, \ldots$).[40]

[40] Pozitif n tamsayıları için $2^n \geq n + 1$ olduğunu tümevarımla kolayca gösteririz, bu da $2^{n+1} \mid 2^{2^n}$ ve $2^{2^{n+1}} - 1 \mid 2^{2^n} - 1$ anlamına gelir. Bu nedenle $F_n = 2^{2^n} + 1 \mid 2^{2^{n+1}} - 1 \mid 2^{2^n} - 1 \mid 2^{2^{n+1}} - 2 = 2F_n - 2$, ve $F_n \mid 2F_n - 2$, ki bu da kanıtlanması gerekendi.

Not: T. Banachiewicz, bu ilişkinin P. Fermat'ı tüm F_n ($n = 1, 2, \ldots$) sayılarının asal olduğu sanısına götürdüğünden şüpheleniyordu. Fermat'ın zamanında, sözde Çin teoreminin doğru olduğu düşünülüyordu, yani bir $m > 1$ tamsayısı $m \mid 2^m - 2$ ilişkisini sağlıyorsa, o zaman m'nin asal olduğunu öne süren teorem (bu, ilk birkaç yüz tamsayı için kontrol edilmişti). Ancak bu, o zamanlar bilinmeyen $m = 341 = 11 \cdot 31$ için çöker.

2 Aralarında Asal Sayılar

41. Her k tam sayısı için $2k+1$ ve $9k+4$ sayılarının aralarında asal olduğunu kanıtlayınız. $2k-1$ ve $9k+4$ sayılarının OBEB'ini k'ya bağlı bir fonksiyon olarak bulunuz.[1]

42. $\frac{n(n+1)}{2}$ şeklinde olan her ikilisi aralarında asal olan sonsuz tane tam sayı bulunduğunu gösteriniz.[2]

43. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ şeklinde olan her ikilisi aralarında asal olan sonsuz tane tam sayı bulunduğunu gösteriniz.[3]

44. a ve b birinden farklı tam sayılar ise, $a+n$ ve $b+n$ sayıları aralarında asal olacak şekilde sonsuz sayıda n tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[4]

45. a, b, c birbirinden farklı tam sayılarsa, $a+n, b+n, c+n$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal olacak şekilde sonsuz sayıda n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[5]

---

[1] $9(2k+1)-2(9k+4)=1$ olduğundan $2k+1$ ve $9k+4$ sayıları aralarında asaldır. $9k+4=4(2k-1)+(k+8)$ ve $2k-1=2(k+8)-17$ olduğundan, $(9k+4, 2k-1)=(2k-1, k+8)=(k+8, 17)$'ye sahibiz. Eğer $k \equiv 9 \pmod{17}$ ise, $(k+8, 17)=17$ olur; aksi durumda, $17 \nmid k+8$'dir, dolayısıyla $(k+8, 17)=1$ olur. Böylece, eğer $k \equiv 9 \pmod{17}$ ise $(9k+4, 2k-1)=17$ ve eğer $k \not\equiv 9 \pmod{17}$ ise $(9k+4, 2k-1)=1$'dir.

[2] İlk olarak, eğer m pozitif bir tamsayı olmak üzere, $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ şeklinde ikişerli aralarında asal m tane üçgensel sayıya sahipsek, $t > a_m$ ve $(t, a_1, a_2, \ldots, a_m)=1$ olacak şekilde bir t üçgensel sayısının var olduğunu gösteriyoruz.
Aslında, $a=a_1a_2\ldots a_m$ olsun; $a+1$ ve $2a+1$ sayıları a ile aralarında asaldır.

$$a_{m+1}=t_{2a+1}=\frac{(2a+1)(2a+2)}{2}=(a+1)(2a+1)$$

sayısı a_m'den büyük bir üçgensel sayıdır; a ile aralarında asal olduğundan, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sayılarının her biriyle aralarında asaldır.
Buradan şu sonuç çıkar: Eğer ikişerli aralarında asal üçgensel sayılardan oluşan sonlu artan bir dizimiz varsa, o zaman her zaman hepsini aşan ve onlarla aralarında asal olan bir üçgensel sayı bulabiliriz. Her zaman bu tür sayıların en küçüğünü alarak,

$$t_1=1, t_2=3, t_4=10, t_{13}=91, t_{22}=253, \ldots$$

ikişerli aralarında asal üçgensel sayılardan oluşan sonsuz diziyi oluştururuz.

[3] İlk olarak, eğer m pozitif bir tamsayı olmak üzere, $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ dörtyüzlü (tetrahedral) sayıları ikişerli aralarında asalsa, o zaman $T > a_m$ ve $(T, a_1, a_2, \ldots, a_m)=1$ olacak şekilde bir T dörtyüzlü sayısının var olduğunu kanıtlayacağız.
Aslında, $a=a_1a_2\ldots a_n$ olsun. $T=T_{6a+1}=(6a+1)(3a+1)(2a+1)$ alalım; T'nin a ile aralarında asal olduğu, dolayısıyla $a_1, \ldots, a_m$ sayılarının her biri ile aralarında asal olduğu ve $T > a \geq a_m$ olduğu açıktır.
Böylece, ikişerli aralarında asal dörtyüzlü sayılardan oluşan istenen artan diziyi tümevarımla tanımlayabiliriz: dizinin ilk terimi olarak $T_1=1$'i alın ve bu dizinin ilk m tane ikişerli aralarında asal dörtyüzlü sayısını tanımladıktan sonra, $m+1$'inciyi ilk m terimin tümünü aşan ve her biriyle aralarında asal olan en küçük dörtyüzlü sayı olarak tanımlayın. Bu şekilde, ikişerli aralarında asal dörtyüzlü sayılardan oluşan sonsuz artan diziyi elde ederiz

$$T_1=1, T_2=4, T_5=35, T_{17}=969, \ldots.$$

[4] a ve b iki farklı tamsayı olsun. Örneğin, $a<b$ olduğunu varsayalım ve $n=(b-a)k+1-a$ olsun. Yeterince büyük k için, n pozitif bir tamsayı olacaktır. $a+n=(b-a)k+1$ ve $b+n=(b-a)(k+1)+1$ olur, dolayısıyla $a+n$ ve $b+n$ pozitif tamsayılar olacaktır. Eğer $d \mid a+n$ ve $d \mid b+n$ olsaydı, $d \mid a-b$ olurdu ve $d \mid a+n$ olduğundan, $d \mid 1$ de olur, bu da $d=1$ anlamına gelir. Böylece, $(a+n, b+n)=1$.

[5] Eğer a, b, c tamsayıları farklıysa, o zaman

$$h=(a-b)(a-c)(b-c)$$

46. $a+n, b+n, c+n$ ve $d+n$ sayılarının ikişer ikişer aralarında asal olmamasını sağlayan hiçbir n pozitif tam sayısı olmayacak şekilde birbirinden farklı a, b, c, d pozitif tam sayıları bulunuz.[6]

47. 6'dan büyük olan her tam sayının 1'den büyük ve aralarında asal olan iki tam sayının toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.[7]

48. 17'den büyük olan her tam sayının ikişer ikişer aralarında asal olan 1'den büyük 3 tam sayının

---

sayısı sıfırdan farklıdır. $h \neq \pm 1$ durumunda, $q_1, \ldots, q_s$, h'nin 3'ten büyük tüm asal bölenlerini göstersin.

a, b, c sayılarından iki veya daha fazlası çift ise, $r = 1$ alın, aksi takdirde $r = 0$ alın. Açıkça, $a+r, b+r, c+r$ sayılarından en az ikisi tek olacaktır. Eğer a, b, c sayıları 3'e bölündüğünde üç farklı kalan veriyorsa, $r_0 = 0$ alın. Eğer a, b, c arasından iki veya daha fazlası 3'e bölündüğünde aynı q kalanını veriyorsa, $r_0 = 1 - q$ alın. Açıkça, $a + r_0, b + r_0, c + r_0$ sayılarından en az ikisi 3 ile bölünemeyecektir.

Şimdi, i, $1, 2, \ldots, s$ sayılarından birini göstersin. Problem 39'un ışığında (ve $q_i > 3$ gerçeğiyle), $a + r_i, b + r_i, c + r_i$ sayılarından hiçbirinin q_i ile bölünmemesini sağlayan bir r_i tamsayısı vardır. Çin kalan teoremine göre,

$$n \equiv r \pmod 2, \quad n \equiv r_0 \pmod 3,$$

ve

$$n \equiv r_i \pmod{q_i} \quad i = 1, 2, \ldots, s \text{ için}$$

olacak şekilde sonsuz sayıda pozitif n tamsayısı vardır.

$a + n, b + n$ ve $c + n$ sayılarının ikişerli aralarında asal olduklarını göstereceğiz. Örneğin, $(a + n, b + n) > 1$ olduğunu varsayalım. O zaman, $q \mid a + n$ ve $q \mid b + n$ olacak şekilde bir q asalı var olurdu, dolayısıyla $q \mid a - b$, bu da $q \mid h$ ve $h \neq \pm 1$ anlamına gelir. $n \equiv r \pmod 2$ olduğundan ve $a + r, b + r, c + r$ sayılarından en az ikisi tek olduğundan, $a + n, b + n, c + n$ sayılarından en az ikisi tektir ve $q = 2$ olamaz. Ardından, $n \equiv r_0 \pmod 3$ olduğundan ve $a + r_0, b + r_0, c + r_0$ sayılarından en az ikisi 3 ile bölünemediğinden, $a + n, b + n, c + n$ sayılarından en az ikisi 3 ile bölünemez ve $q = 3$ olamaz. $q \mid h$ olduğundan, h'nin tanımı gereği, $1, 2, \ldots, s$ dizisinden belirli bir i için $q = q_i$ olur. Ancak, $n \equiv r_i \pmod{q_i}$ olması ve $a + r_i, b + r_i, c + r_i$ sayılarından hiçbirinin q_i ile bölünmemesi gerçeği göz önüne alındığında, $a + n, b + n, c + n$ sayılarından hiçbiri $q_i = q$ ile bölünemez; bu da $q \mid a + n$ ve $q \mid b + n$ varsayımıyla çelişir. Böylece, $(a + n, b + n) = 1$ olduğunu kanıtladık. Benzer şekilde $(a + n, c + n) = 1$ ve $(b + n, c + n) = 1$ olduğunu gösteririz. Bu nedenle $a + n, b + n$, ve $c + n$ sayıları ikişerli aralarında asaldır. Bu tür n sayılarından sonsuz sayıda olduğundan, kanıt tamamlanmıştır.

[6] Bu tür sayılar örneğin $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$'tür. Aslında, tek n için, $a + n$ ve $c + n$ sayıları çifttir, dolayısıyla aralarında asal değildirler, ve çift n için, $b + n$ ve $d + n$ sayıları çifttir, dolayısıyla aralarında asal değildirler.

[7] Eğer n tek ve $n > 6$ ise, $n = 2 + (n - 2)$ olur, burada $n - 2$ tek ve > 1'dir, ve $(2, n - 2) = 1$'e sahibiz.

$n > 6$ çift sayı durumu için aşağıdaki ispat A. Mąkowski'ye aittir.

Eğer $n = 4k$ ise, burada k tamsayısı > 1'dir ($n > 6$ olduğundan), o zaman $n = (2k-1)+(2k+1)$ olur, ve $2k+1 > 2k-1 > 1$'dir ($k > 1$ olduğundan). $2k - 1$ ve $2k + 1$ sayıları, ardışık tek sayılar olarak, aralarında asaldır.

Eğer $n = 4k + 2$ ise, burada k tamsayısı > 1'dir ($n > 6$ olduğundan), $n = (2k + 3) + (2k - 1)$'e sahibiz, burada $2k + 3 > 2k - 1 > 1$'dir ($k > 1$ olduğundan). $2k + 3$ ve $2k - 1$ sayıları aralarında asaldır çünkü eğer $0 < d \mid 2k + 3$ ve $d \mid 2k - 1$ ise, o zaman $d \mid (2k + 3) - (2k - 1)$ veya $d \mid 4$'tür. Şimdi, d tek bir sayının böleni olarak tek olmalıdır, dolayısıyla $d = 1$'dir, ve $(2k + 3, 2k - 1) = 1$'dir.

toplamı şeklinde yazılabileceğini ve 17'nin de bu şekilde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.[8]

49. Her m pozitif tam sayısı için hem tek $2k$ çift sayısının m ile aralarında asal olan iki pozitif tam sayının farkı şeklinde yazılabileceğini kanıtlayınız.[9]

50. Fibonacci dizisinin, tüm terimleri ikişer ikişer aralarında asal olan bir alt dizisinin bulunduğunu kanıtlayınız.[10]

51. Her $n = 1, 2, \ldots$ için OBEB$(n, 2^n + 1) = 1$ olduğunu gösteriniz.[11]

---

[8] Eğer n çift ve > 8 ise, o zaman $n = 6k$, $n = 6k + 2$ veya $n = 6k + 4$'tür, ve ilk iki durumda k tamsayısı > 1'dir, ve üçüncü durumda k pozitif bir tamsayıdır. Formüller

$$6k = 2 + 3 + (6(k-1) + 1), \quad 6k + 2 = 3 + 4 + (6(k-1) + 1),$$

$$6k + 4 = 2 + 3 + (6k - 1)$$

n'nin, ikişerli olarak aralarında asal olan üç pozitif tamsayının toplamı olduğunu kolayca gösterir.
Şimdi n'nin tek ve > 17 olduğunu varsayalım. Altı durumu ele alıyoruz: $n = 12k+1$, $n = 12k+3$, $n = 12k+5$, $n = 12k+7$, $n = 12k + 9$, ve $n = 12k + 11$, burada ilk üç durumda k tamsayısı > 1'dir, ve son üç durumda k pozitif bir tamsayıdır. Elimizde

$$12k - 1 = (6(k-1) - 1) + (6(k-1) + 5) + 9,$$

var, burada $6(k-1) - 1$, $6(k-1) + 5$, ve 9 sayıları > 1'dir ve aralarında asaldır; aslında, ilk ikisi 3'e bölünemez, ve $d \mid 6(k-1) - 1$ ve $d \mid 6(k-1) + 5$ olması $d \mid 4$'ü gerektireceğinden aralarında asaldırlar, oysa ele alınan sayılar tektir.
Eğer $n = 12k + 3$ ise, o zaman $n = (6k - 1) + (6k + 1) + 3$'e sahibiz;
eğer $n = 12k + 5$ ise, o zaman $n = (6k - 5) + (6k + 1) + 9$'a sahibiz;
eğer $n = 12k + 7$ ise, o zaman $n = (6k + 5) + (6k - 1) + 3$'e sahibiz;
eğer $n = 12k + 9$ ise, o zaman $n = (6k - 1) + (6k + 1) + 9$'a sahibiz;
eğer $n = 12k + 11$ ise, o zaman $n = (6(k+1) - 5) + (6(k+1) + 1) + 3$'e sahibiz, ve her durumda üç terimin > 1 olduğunu ve ikişerli olarak aralarında asal olduğunu kolayca kontrol ederiz.
17 sayısı istenen özelliğe sahip değildir çünkü $17 = a + b + c$ durumunda, üç sayının da (> 1 ve ikişerli aralarında asal olarak) a, b, c'nin tek ve farklı olması gerekirdi. Ancak, $3 + 5 + 7 = 15 < 17$, $3 + 5 + 11 > 17$'ye sahibiz, ve $3 < a < b < c$ durumunda, $a \geq 5$, $b \geq 7$, $c \geq 9$'a sahibiz, dolayısıyla $a + b + c \geq 5 + 7 + 9 = 21 > 17$, bu da 17'nin istenen özelliğe sahip olmadığını gösterir.

[9] A. Schinzel'in bir fikrine dayanan (bkz. (Schinzel 1959)) ispatı sunacağız. k verilmiş bir pozitif tamsayıyı göstersin ve m, asal kuvvetlere açılımı $m = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \ldots q_s^{a_s}$ olan pozitif tamsayı olsun. $f(x) = x(x + 2k)$ olsun ve i, $1, 2, \ldots, s$ sayılarından birini göstersin. Tüm x tamsayıları için $q_i | x(x + 2k)$ olamaz, çünkü o zaman $x = 1$ için $q_i | 2k + 1$ olurdu, ve $x = -1$ için $q_i | 2k - 1$ olurdu, ve $q_i | (2k+1) - (2k-1) = 2$ olurdu, ki bu $q_i | 2k + 1$ (ve sonuç olarak $q_i \nmid 1$) olması göz önüne alındığında imkansızdır. Bu nedenle, $q_i \nmid x_i(x_i + 2k) = f(x_i)$ olacak şekilde bir x_i tamsayısı mevcuttur. Çin kalan teoremine göre, $i = 1, 2, \ldots, s$ için $x_0 \equiv x_i \pmod{q_i}$ olacak şekilde pozitif bir x_0 tamsayısı vardır, bu da $i = 1, 2, \ldots, s$ için $f(x_0) \equiv f(x_i) \not\equiv 0 \pmod{q_i}$ sonucunu verir. Dolayısıyla, $i = 1, 2, \ldots, s$ için $(f(x_0), q_i) = 1$'e sahibiz, ki bu (m'nin asal çarpanlara açılımı göz önüne alındığında) $(f(x_0), m) = 1$ veya $(x_0(x_0 + 2k), m) = 1$ verir. Böylece, eğer $a = x_0 + 2k$, $b = x_0$ alırsak, $2k = a - b$'ye sahip oluruz, burada $(a, m) = 1$, $(b, m) = 1$'dir, ki bu da teoremi ispatlar.
Not. a ve b'ye m'nin keyfi katlarını eklemek $2k = a - b$ ve $(ab, m) = 1$ gerçeğini değiştirmediğinden, her m için, her çift sayının m ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların farkı olarak sonsuz sayıda farklı şekilde temsil edilebileceğini ispatladık.
Her çift sayının iki asalın farkı olup olmadığını bilmiyoruz. A. Schinzel'in asal sayılar üzerine belirli bir sanısından (Schinzel ve Sierpiński 1958a), her çift sayının iki asalın farkı olarak sonsuz sayıda farklı şekilde temsil edilebileceği sonucu çıkar.

[10] A. Rotkiewicz tarafından verilen ispatı sunacağız. Eğer u_n Fibonacci dizisinin n'inci terimi ise, ve m ile n pozitif tamsayılar ise, o zaman $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$'dir (bkz. (Sierpiński 1958b), s. 280, problem 5]). $u_1 = 1$ olduğundan, eğer p_k, k'ıncı ardışık asalı gösteriyorsa,

$$u_{p_1}, u_{p_2}, u_{p_3}, \ldots$$

artan sonsuz dizisinin herhangi iki teriminin aralarında asal olduğunu görürüz. p_k yerine $2^{2^k} + 1$ alabiliriz, zira m ve $n \neq m$ pozitif tamsayıları için $(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1$ olduğu iyi bilinmektedir.

[11] $F_n = 2^{2^n} + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sayısının > 1 olan her böleninin, $2^{n+2}k + 1$ formunda olduğunu biliyoruz, burada k pozitif bir tamsayıdır (örneğin, bkz. (Sierpiński 1964a), s. 343, Teorem 5). Pozitif n ve k tamsayıları için $2^{n+2}k + 1 \geq 2^{n+2} + 1 > n$ olduğundan, F_n'nin tüm > 1 bölenleri $> n$ olmalıdır, dolayısıyla $(n, F_n) = 1$'dir, ki bu da ispatlanması gerekendi.
51a. $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için $(n, 2^n - 1) = 1$ olduğunu kolayca kontrol ederiz, $(6, 2^6 - 1) = 3$'tür. $k = 1, 2, \ldots$ için $3 | 2^6 - 1 | 2^{6k} - 1$'e

51a. OBEB$(n, 2^n - 1) > 1$ olmasını sağlayan sonsuz tane n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız ve bunlardan en küçüğünü bulunuz.

sahibiz, dolayısıyla $k = 1, 2, \ldots$ için $(6k, 2^{6k} - 1) \geq 3$'tür. Bu tür en küçük n sayısı 6'ya eşittir.

3 Aritmetik Diziler

52. Pozitif tam sayılardan oluşan ve tüm terimleri ikişer ikişer aralarında asal olan ve terim sayısı yeterince önceden verilen herhangi bir n sayısından büyük olan bir aritmetik dizi bulunduğunu kanıtlayınız.[1]

53. Her k pozitif tam sayısı için, pozitif tam bölenlerinin sayısı k'yı bölen tüm n sayıları kümesinin bir sonsuz aritmetik dizi içerdiğini kanıtlayınız.[2]

54. $x(x+1), y(y+1), z(z+1)$ sayıları artan aritmetik dizi oluşturacak şekilde sonsuz sayıda x, y, z pozitif tam sayı üçlüsünün bulunduğunu kanıtlayınız.[3]

55. Kenarları bir aritmetik dizi oluşturma tam sayılar olan tüm dik üçgenleri bulunuz.[4]

56. Pozitif tam sayılardan oluşan, hiçbir üçgen $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ sayısını içermeyen ve farkı en küçük olan artan bir aritmetik dizi bulunuz.[5]

57. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere $ak + b$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ aritmetik dizisinin sonsuz tane tam kare içermesi için gerek ve yeterli koşulu bulunuz.[6]

---

[1] m verilmiş bir tamsayı > 1 olsun. $k = 1, 2, \ldots, m$ için $m!k + 1$ sayıları, $k < l \leq m$ olacak şekilde pozitif k ve l tamsayıları için aralarında asaldır. Eğer $d > 1$, $m!k + 1$ ve $m!l + 1$'in ortak böleni olsaydı, $d \mid l(m!k + 1) - k(m!l + 1) = l - k$'ye sahip olurduk, dolayısıyla $1 < d < m$ ve $d \mid m!$'dir. Bu, $d \mid m!k + 1$ olması göz önüne alındığında, $d \mid 1$'i verir, ki bu da $d > 1$ varsayımıyla çelişir.

[2] Gerekli özellik, $2^k t + 2^{k-1}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ aritmetik dizisinin tüm terimleri tarafından sağlanır, çünkü $n = 2^k t + 2^{k-1}$'in asal çarpanlara açılımında 2 sayısı $k - 1$ üssü ile girer; pozitif tamsayı bölenlerinin sayısı için iyi bilinen formülden, n sayısının pozitif tamsayı bölenlerinin sayısının k ile bölünebildiği hemen anlaşılır.

[3] Gerekli özellik, keyfi bir pozitif x tamsayısı için ve $y = 5x + 2$, $z = 7x + 3$ için geçerlidir, çünkü bu durumda

$$x(x+1) = x^2 + x, \quad y(y+1) = 25x^2 + 25x + 6, \quad z(z+1) = 49x^2 + 49x + 12$$

sayıları, $24x^2 + 24x + 6$ farkıyla bir aritmetik dizi oluşturur.

NOT. x, y, z, t gibi artan dört pozitif tamsayının $x(x+1)$, $y(y+1)$, $z(z+1)$ ve $t(t+1)$ sayılarının bir aritmetik dizi oluşturacak şekilde bulunmadığı gösterilebilir, çünkü o zaman bu sayılardan dört kat daha büyük ve bir artırılmış sayılar, yani $(2x+1)^2$, $(2y+1)^2$, $(2z+1)^2$ ve $(2t+1)^2$ de bir aritmetik dizi oluştururdu, bu da Fermat teoremine aykırıdır; Fermat teoremine göre bir aritmetik dizi oluşturan dört farklı tamsayının karesi yoktur (ispat W. Sierpiński'nin kitabında bulunabilir Sierpiński (1964a), s. 74, teorem 8).

[4] Eğer bir dik üçgenin kenarları bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, o zaman bunları $b - r$, b ve $b + r$ olarak gösterebiliriz, burada b ve r pozitif tamsayılardır, ve $(b - r)^2 + b^2 = (b + r)^2$'ye sahibiz, dolayısıyla $b = 4r$'dir, bu da kenarları $3r$, $4r$ ve $5r$ olan dik üçgeni verir, burada r keyfi bir pozitif tamsayıdır. Böylece, kenarları bir aritmetik dizi oluşturan tamsayılar olan tüm dik üçgenler, kenarları 3, 4, 5 olan üçgenin tamsayı katları alınarak elde edilir.

[5] $t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ üçgensel sayıları $n = 4u + 1$ $(u = 0, 1, 2, \ldots)$ için tek ve $4 \mid n$ için çifttir. Dolayısıyla, farkı 2 olan her iki dizi de sonsuz sayıda üçgensel sayı içerir. Öte yandan, $3k + 2$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ dizisi hiçbir üçgensel sayı içermez, çünkü eğer $3 \mid n$ ise, o zaman $3 \mid t_n$; benzer şekilde, $u = 0, 1, 2, \ldots$ için $n = 3u + 2$ ise, o zaman $3 \mid t_n$; son olarak, $u = 0, 1, 2, \ldots$ için $n = 3u + 1$ ise, o zaman $t_n = 9\frac{u(u+1)}{2} + 1$'dir, dolayısıyla 3'e bölünmesi 1 kalanını verir.

[6] b'nin a modülüne göre bir kuadratik (ikinci dereceden) kalan olması gerekli ve yeterlidir. Aslında, eğer bazı pozitif x tamsayısı ve bazı $k \geq 0$ tamsayısı için $x^2 = ak + b$'ye sahipsek, o zaman $x^2 \equiv b \pmod{a}$'dır ve b, a modülüne göre bir kuadratik kalandır. Tersine, eğer b, a modülüne göre bir kuadratik kalan ise, o zaman $x^2 \equiv b \pmod{a}$ olacak şekilde sonsuz sayıda pozitif x tamsayısı vardır, dolayısıyla $x^2 = ak + b$'dir, burada k bir tamsayıdır, ve sonuç olarak yeterince büyük x için pozitiftir.

58. Birbirinden farklı pozitif tam sayılardan oluşan ve her terimi bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan ve terim sayısı önceden verilen n sayısından büyük olan bir aritmetik dizi bulunduğunu kanıtlayınız. [7]

59. Birbirinden farklı pozitif tam sayılardan oluşan ve her terimi bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan sonsuz bir aritmetik dizi bulunmadığını kanıtlayınız. [8]

60. Her biri bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan dört ardışık sayı bulunmadığını kanıtlayınız. [9]

61. Pozitif tam sayılardan oluşan her artan aritmetik dizinin bileşik sayılardan oluşan, önceden verilen n'den fazla sayıda ardışık teriminin bulunduğunu kanıtlayınız. [10]

62. a ve b aralarında asal pozitif tam sayılarsa her m pozitif tam sayısı için $ak + b$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ aritmetik dizisinin m ile aralarında asal olan sonsuz sayıda terimi bulunduğunu kanıtlayınız. [11]

63. Her s pozitif tam sayısı için pozitif tam sayılardan oluşan her artan aritmetik dizide önceden verilen herhangi s tane rakamla başlayan terimlerinin bulunduğunu kanıtlayınız.[12]

---

[7]A. Schinzel'in ispatını sunacağız. p_k, k'ıncı ardışık asalı göstersin. s keyfi bir pozitif tamsayı olsun ve $P = p_1 p_2 \dots p_s$ olsun. Çin kalan teoremine göre, her $k \le s$ pozitif tamsayısı için $a_k \equiv 0 \pmod{P/p_k}$ ve $a_k \equiv -1 \pmod{p_k}$ olacak şekilde bir a_k pozitif tamsayısı mevcuttur. $Q = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots s^{a_s}$ alalım. kQ sayıları $(k = 1, 2, \dots, s)$, s terimli artan bir aritmetik dizi oluşturur. a_k sayılarının tanımına göre $(k = 1, 2, \dots, s)$, $p_k \mid a_k + 1$'e sahibiz ve n, s'den büyük pozitif bir tamsayı olmak üzere, eğer $k \ne n$ ise $p_j \mid a_k$'dir. Sayılar

$$Q_k = kQ^{(k+1)/P_k} \prod_{\substack{n=1 \\ n \ne k}}^{s} n^{a_n/p_k}$$

doğaldır, ve $k = 1, 2, \dots, s$ için $kQ = Q_k^{p_k}$ olduğunu kolayca görürüz, bu nedenle kQ sayıları $(k = 1, 2, \dots, s)$, tamsayı üsleri > 1 olan tamsayıların kuvvetleridir.

[8]İstenen teorem, açıkça, her sonsuz artan tamsayı aritmetik dizisinde, herhangi bir tamsayının > 1 tamsayı üslü bir kuvveti olmayan bir terimin var olduğu teoremine denktir. Dolayısıyla, a ve b pozitif tamsayılar olmak üzere, $ak+b$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ sonsuz bir aritmetik dizi olsun. $p > a + b$ olan bir p asalı mevcuttur. $(a, p^2) = 1$ olduğundan, $ax - p^2 y = 1$ denkleminin pozitif x, y tamsayılarında bir çözümü vardır. $k = (p - b)x$ olsun; bu pozitif bir tamsayı olacaktır (çünkü $p > b$), ve $ak + b = p^2 y(p - b) + p$'ye sahip olacağız. Böylece, dizimizin $ak + b$ terimi p^2'ye bölünemez, ve bu nedenle > 1 tamsayı üssü olan pozitif bir tamsayının kuvveti olamaz.

[9]Her dört ardışık pozitif tamsayıdan biri, $k \ge 0$ bir tamsayı olmak üzere, $4k + 2$ formunda olmalıdır. 4'e bölünemeyen bir çift sayı olan böyle bir sayı, > 1 tamsayı üssü olan pozitif bir tamsayının kuvveti olamaz.
NOT. A. Mąkowski, her biri pozitif bir tamsayının > 1 tamsayı üslü bir kuvveti olan üç ardışık pozitif tamsayı olmadığını ispatlamıştır, ancak ispat zordur (Khatri 1962). Bununla birlikte, her biri pozitif bir tamsayının > 1 tamsayı üslü bir kuvveti olan iki ardışık sayı mevcuttur. Bu tür sayılar, örneğin, $2^3 = 8$, $3^2 = 9$'dur. Bu tür tamsayıların başka çiftlerinin olup olmadığına dair Catalan problemi açıktır. S. Hyyrö (Hyyro 1964), böyle herhangi bir çiftte her iki tabanın da $> 10^{11}$ olduğunu ispatlamıştır.

[10]Çözüm doğrudan Problem 58'den gelmektedir, ancak daha basit bir yolla da ispatlanabilir. $m > 1$ bir tamsayı olsun, ve q_i $(i = 1, 2, \dots, m)$, $a < q_1 < q_2 < \dots < q_m$ olacak şekilde asallar olsun. Çin kalan teoremine göre, $j = 1, 2, \dots, m$ için $ax \equiv -b - aj \pmod{q_j^2}$ olacak şekilde pozitif bir x tamsayısı mevcuttur. Böylece $j = 1, 2, \dots, m$ için $q_j^2 \mid a(x + j) + b$'dir. Dolayısıyla, $ak + b$ dizisinin m ardışık terimi, yani $j = 1, 2, \dots, m$ için $a(x + j) + b$ terimleri, bileşik sayıdır.

[11]Elbette, m'nin > 1 bir tamsayı olduğunu varsayabiliriz. P, m'nin a'nın bölenleri olan tüm asal bölenlerinin çarpımını göstersin, ve eğer böyle bölenler yoksa $P = 1$ olsun. Q, m'nin b'nin bölenleri olan tüm asal bölenlerinin çarpımını göstersin, ve eğer böyle bölenler yoksa $Q = 1$ olsun. $(a, b) = 1$ olduğundan, $(P, Q) = 1$'e sahibiz. Son olarak, R, m'nin a veya b'yi bölmeyen tüm asal bölenlerinin çarpımını göstersin, ve eğer böyle bölenler yoksa, $R = 1$ olsun. Açıkça, $(R, P) = 1$ ve $(R, Q) = 1$'e sahibiz. $(aPR + b, m) = 1$ olduğunu göstereceğiz. Aslında, eğer doğru olmasaydı, $p \mid m$ ve $p \mid aPR + b$ olacak şekilde bir p asalı var olurdu. Eğer $p \mid P$ olsaydı, o zaman $p \mid aPR + b$ ifadesi $p \mid b$'yi gerektirirdi, dolayısıyla $p \mid Q$, bu da $(P, Q) = 1$ gerçeğiyle çelişir. Eğer $p \mid Q$ olsaydı, o zaman $p \mid b$'ye sahip olurduk, dolayısıyla $p \mid aPR$, ki bu imkansızdır çünkü $(a, b) = 1$, $(b, P) = 1$, $(b, R) = 1$'dir. Son olarak, eğer $p \mid R$ olsaydı, $p \mid b$'ye sahip olurduk, dolayısıyla $p \mid Q$, bu da $(R, Q) = 1$ gerçeğiyle çelişir. Böylece, $(aPR + b, m) = 1$'i ispatladık, ve buradan $k = 0, 1, \dots$ için $(a(km + PR) + b, m) = 1$ sonucu çıkar. Bu nedenle, dizimiz m ile aralarında asal olan sonsuz sayıda terim içerir, ki bu da ispatlanması gerekendi.

[12]Dizimizin ilk terimi b ve farkı a olsun; böylece a ve b sayıları pozitif tamsayılardır. b'nin a'ya bölünmesinden kalanı ele alalım; bu nedenle, $t \ge 0$ bir tamsayı ve $0 \le r < a$ olacak şekilde r bir tamsayı olmak üzere $b = at + r$'ye sahibiz. s keyfi bir

64. Fibonacci dizisinin üç teriminden oluşan tüm artan aritmetik dizileri bulunuz ve bu dizinin dört teriminden oluşan hiçbir artan aritmetik dizi bulunmadığını kanıtlayınız. [13]

65. Tam sayılardan oluşan, Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermeyen ve farkı en az olan bir artan aritmetik dizi bulunuz.[14]

66. a ve b aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere $ak + b$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ şeklinde olan ve Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermeyen bir aritmetik dizi bulunuz.[15]

---

pozitif tamsayı olsun, ve $c_1 \neq 0$ olmak üzere $c_1, c_2, \ldots, c_s$ keyfi bir ondalık basamak dizisi olsun. N, ardışık basamakları $c_1, c_2, \ldots, c_s$ olan s basamaklı tamsayıyı göstersin.
Açıkça, $10^n > 2a(t+1)$ olacak şekilde pozitif bir n tamsayısı mevcuttur. $N10^n/a - t$ sayısı > 1 olacaktır.
k, $N10^n/a - t$'den büyük en küçük pozitif tamsayı olsun; böylece, $k - 1 \leq N10^n/a - t$'ye sahip olacağız, dolayısıyla

$$k + 1 \leq \frac{N10^n}{a} + 2 - t < \frac{(N+1)10^n}{a} - t$$

çünkü $10^n > 2a$'dir. Bu nedenle $N10^n < a(k+t) < ak + at + r = ak + b < a(k+t+1) < (N+1)10^n = N10^n + 10^n$'ye sahibiz ve buradan $ak + b$ sayısının ilk s basamağının, N sayısının ilk s basamağıyla aynı olduğu, yani $c_1, c_2, \ldots, c_s$ basamakları olduğu sonucu çıkar.

[13] Eğer Fibonacci dizisinin u_k, u_l, u_m terimleri bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, o zaman $u_l > 1$ olmalıdır, ve dolayısıyla $l > 2$'dir ($u_2 = 1$ olduğundan), ve $m > 3$'tür. Dahası, $u_m = u_l + (u_l - u_k)$'dir, ki bu da $u_m < u_l + u_l = u_l + u_{l-1} + u_{l-2} < u_l + u_{l-1} + u_l = u_{l+1} + u_{l-2}$ anlamına gelir ve buradan $u_m < u_{l+1}$ sonucu çıkar. Öte yandan, $u_m > u_l$'dir, dolayısıyla $u_m \geq u_{l+1}$'dir. Ve $u_k < u_l$'ye sahip olmalıyız. Bu nedenle ($l > 2$ olduğundan) $m = l + 1$'e sahibiz. Böylece $u_m = 2u_l - u_k = u_{l+1} = u_l + u_{l-1}$'e sahibiz, ki bu da $u_l - u_k = u_{l-1}$ anlamına gelir. Dolayısıyla, eğer Fibonacci dizisinin u_k, u_l, u_m terimleri artan bir aritmetik dizi oluşturuyorsa, $l > 2$, $k = l - 2$ ve $m = l + 1$ olmalıdır. Öte yandan, herhangi bir $l > 1$ tamsayısı için u_{l-1}, u_{l+1} ve u_{l+2} sayıları u_l farkıyla bir aritmetik dizi oluşturur. Eğer n, $> l + 1$ bir tamsayı olsaydı, $n \geq l + 2$'ye sahip olurduk, dolayısıyla $u_n \geq u_{l+2}$'dir. ve $u_n - u_{l+1} \geq u_{l+2} - u_{l+1} = u_l > u_{l-1}$'dir ($l > 2$ olduğundan). Buradan, Fibonacci dizisinin bir aritmetik dizi oluşturan dört teriminin olmadığı sonucu çıkar.

[14] Biliyoruz ki, eğer m pozitif bir tamsayı ise, o zaman Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin m'ye bölünmesinden elde edilen kalanlar, saf periyotlu periyodik bir dizi oluşturur (Sierpiński 1958b, 279, problem 3). $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ için, Fibonacci dizisinin terimlerinin m'ye bölünmesinden elde edilen kalanlar sırasıyla şöyledir (burada tümünü değil, sadece ilk birkaç kalanı gösteriyoruz):
$m = 2$ için: 1, 1, 0, ...,
$m = 3$ için: 1, 1, 2, 0, ...,
$m = 4$ için: 1, 1, 2, 3, 1, 0, ...,
$m = 5$ için: 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, ...,
$m = 6$ için: 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, ...,
$m = 7$ için: 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, ...,
$m \leq 7$ olan her pozitif tamsayı için m modülüne göre tüm olası kalanlar yukarıdaki dizilerde göründüğünden, farkı $m \leq 7$ olan aritmetik dizilerin her birinin Fibonacci dizisinin sonsuz sayıda terimini içerdiğini görüyoruz.
Şimdi $8k + 4$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ dizisinin Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermediğini göstereceğiz.
$u_1 = u_2 = 1$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ olduğundan, $u_1, u_2, \ldots, u_{14}$ sayılarının 8'e bölünmesinden aşağıdaki kalanları verdiğini kolayca görürüz:

$$1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1.$$

Buradan $8 \mid u_{13} - u_1$ ve $8 \mid u_{14} - u_2$ sonucu çıkar. Böylece, $n = 1$ için $8 \mid u_{n+12} - u_n$ ve $8 \mid u_{n+13} - u_{n+1}$'e sahibiz. Şimdi bu iki formülün bazı pozitif n tamsayıları için geçerli olduğunu varsayalım. O zaman $8 \mid u_{n+12} + u_{n+13} - (u_n + u_{n+1})$ veya $8 \mid u_{n+14} - u_{n+2}$'ye sahibiz ($8 \mid u_{n+13} - u_{n+1}$ olduğundan). Tümevarım yoluyla $n = 1, 2, \ldots$ için $8 \mid u_{n+12} - u_n$ sonucu çıkar, ki bu da Fibonacci dizisinin 8 modülüne göre ardışık kalanlar dizisinin periyodik olduğunu ve on iki terimlik saf bir periyoda sahip olduğunu gösterir.
8 modülüne göre ilk on dört kalandan, bu kalanların sadece 0, 1, 2, 3, 5 ve 7 olabileceğini görüyoruz. Dolayısıyla 4 veya 6 kalanı yoktur, bu da $8k + 4$ ve $8k + 6$ dizilerinin Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermediğini gösterir. Bunlar, istenen özelliğe sahip ve mümkün olan en küçük farka sahip tamsayı terimli dizilerdir.

[15] $11k + 4$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ dizisi istenen özelliğe sahiptir. Problem 65'in çözümünde olduğu gibi, kolay bir tümevarımla $n = 1, 2, \ldots$ için $11 | u_{n+10} - u_n$ olduğunu kanıtlarız. Buradan, Fibonacci dizisinin 11 modülüne göre kalanlar dizisinin periyodik olduğu ve periyodunun 10 olduğu sonucu çıkar; bu diziyi kolayca $1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, \ldots$ olarak buluruz. 4 sayısı (ve ayrıca 6, 7 ve 9) bu dizide görünmez.

67. a ve b aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere $ak+b$ $(k=0,1,2,\dots)$ şeklinde olan her aritmetik dizinin ikişer ikişer aralarında asal olan sonsuz sayıda teriminin bulunduğunu kanıtlayınız.[16]

68. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere her $ak+b$ $(k=0,1,2,\dots)$ aritmetik dizisinde asal çarpanları aynı olan sonsuz tane terim bulunduğunu kanıtlayınız.[17]

69. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere her $ak+b$ $(k=0,1,2,\dots)$ aritmetik dizisi ve her s pozitif tam sayısı için, s tane birbirinden farklı asal sayının çarpanına eşit olan sonsuz tane terim bulunduğunu kanıtlayınız.[18]

70. Farkı 10 olan ve sadece asal sayılardan oluşan en az 3 terimli tüm aritmetik dizileri bulunuz.[19]

71. Farkı 100 olan ve sadece asal sayılardan oluşan en az 3 terimli tüm aritmetik dizileri bulunuz.[20]

---

[16] Dizimizin n terimine sahip olduğumuzu varsayalım

$$ak_1+b, ak_2+b, \dots, ak_n+b,$$

bunlar ikişerli olarak aralarında asaldır ($n=1$ için $k_1=1$ alabiliriz). $m=(ak_1+b)(ak_2+b)\dots(ak_n+b)$ olsun. Problem 62'den, $(ak_{n+1}+b, m)=1$ olacak şekilde pozitif bir k_{n+1} tamsayısının var olduğu sonucu çıkar, dolayısıyla $i=1,2,\dots,n$ için $(ak_{n+1}+b, ak_i+b)=1$'dir. Sayıları

$$ak_1+b, ak_2+b, \dots, ak_n+b, ak_{n+1}+b$$

bu nedenle ikişerli olarak aralarında asaldır. Böylece tümevarımla, ak_i+b $(i=1,2,\dots)$ dizisinin orijinal aritmetik dizinin sadece aralarında asal terimlerini içermesini sağlayan sonsuz $k_1, k_2, \dots$ dizisini tanımlamış olduk.

[17] $d=(a,a+b)$ olsun. Böylece $a=da_1$, $a+b=dc$ olur, burada $(a_1,c)=1$ ve $c>1$'dir ($d\le a$ iken $dc=a+b>a$ olduğundan). $(a_1,c)=1$ ve Euler teoremi göz önüne alındığında, $c^{\phi(a_1)}\equiv 1 \pmod{a_1}$ elde ederiz, dolayısıyla n tamsayısı için $c^{n\phi(a_1)}\equiv 1 \pmod{a_1}$ olur. Bu nedenle, $c^{n\phi(a_1)}-1=t_na_1$ olacak şekilde bir t_n pozitif tamsayısı vardır, ki bu ($c>1$ ve n keyfi olarak büyük olduğundan) keyfi olarak büyük yapılabilir. Dahası, elimizde şu var:

$$a(ct_n+1)+b=da_1ct_n+dc=dc^{n\phi(a_1)+1}.$$

Dizimizin (keyfi olarak büyütülebilen) $a(ct_n+1)+b$ terimi, bu nedenle, $dc>1$ sayısının asal bölenleri olan ve sadece o asal bölenlere sahiptir. Böylece, dizimizde aynı asal bölen kümesine sahip sonsuz çoklukta terim mevcuttur, ki bu da kanıtlanması gerekendi (bkz. Pólya (1918)).

[18] Lejeune-Dirichlet teoreminden, $s=1$ için teoremin doğru olduğu hemen anlaşılır. Şimdi teoremin bir s pozitif tamsayısı için doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda, $q_1<q_2<\dots<q_s$ asal olmak üzere $ak_0+b=q_1q_2\dots q_s$ olacak şekilde bir k_0 sayısı mevcuttur. asallar. Lejeune-Dirichlet teoremine göre, $ak+1=q$'nun $q>q_s$ olacak şekilde bir asal sayı olmasını sağlayan sonsuz sayıda k tamsayısı vardır. $t=q_1q_2\dots q_sk+k_0$ için şunu elde ederiz:

$$at+b=q_1q_2\dots q_sak+ak_0+b=q_1q_2\dots q_s(ak+1)=q_1q_2\dots q_sq.$$

Dolayısıyla teorem $s+1$ için de doğrudur. Tümevarım yoluyla, teoremin her pozitif s tamsayısı için doğru olduğu sonucu çıkar, ki bu da kanıtlanması gerekendi.

[19] Eğer p bir asalsa, o zaman $p, p+10$ ve $p+20$ sayılarından biri 3'e bölünmelidir (çünkü $p+10\equiv p+1 \pmod 3$ ve $p+20\equiv p+2 \pmod 3$)'tür ve her üç ardışık tamsayıdan biri 3'e bölünmelidir). Dolayısıyla, eğer bu üç sayımızın tümü asalsa, o zaman bunlardan biri, yani en küçüğü, 3'e eşit olmalıdır ve $p=3, p+10=13, p+20=23$ elde ederiz. Bu nedenle, farkı 10 olan ve üç asaldan oluşan yalnızca bir aritmetik dizi vardır, yani 3, 13, 23. Farkı 10 olan ve dört (veya daha fazla) asaldan oluşan hiçbir aritmetik dizinin olmadığını kolayca gösterebiliriz, çünkü eğer $p, p+10, p+20$ ve $p+30$ asal olsaydı, o zaman gösterdiğimiz gibi, $p=3$ olurdu, ancak $p+30=33=3\cdot 11$ bir asal değildir.

NOT. A. Schinzel'in asallara ilişkin belirli bir sanısından (Schinzel ve Sierpiński 1958a), $p+10$'un da asal olmasını sağlayan sonsuz sayıda p asalının var olduğu sonucu çıkar; örneğin 7 ve 17, 13 ve 23, 19 ve 29, 31 ve 41, 37 ve 47, 61 ve 71, 73 ve 83, 79 ve 89.

[20] $p, p+100$ ve $p+200$ sayılarından birinin 3'e bölünmesi gerektiğinden ve eğer bu sayılar asalsa, $p=3$ olması gerektiğinden, bu tür diziler yoktur. Ancak bu durumda $p+200=203=7\cdot 29$ bileşik sayıdır.

NOT. Benzer bir şekilde, $1003=17\cdot 53$ bileşik olduğundan, üç veya daha fazla asaldan oluşan ve farkı 1000 olan hiçbir dizinin bulunmadığını gösteririz. Öte yandan, A. Schinzel'in bir sanısından (Schinzel ve Sierpiński 1958a) $p+1000$'in de asal olmasını sağlayan sonsuz sayıda p asalının var olduğu sonucu çıkar; örneğin 13 ve 1013, 19 ve 1019, 31 ve 1031, 61 ve 1061, 97 ve 1097, 103 ve 1103, 1039 ve 2039.

72. Sadece asal sayılardan oluşan, 10 terimli ve son terimi en küçük olan artan bir aritmetik dizi bulunuz.[21]

73. Pozitif tam sayılardan oluşan ve hiçbir terimi iki asal sayının ne toplamı, ne de farkı şeklinde gösterilemeyen artan bir sonsuz aritmetik dizi bulunuz.[22]

[21] Eğer dizimizin farkı tek olsaydı, o zaman dizimizin her ikinci terimi çift olurdu; bu ise dizimizin on asaldan oluşması isteniyorsa imkansızdır. Dolayısıyla, fark çift olmalıdır. Eğer ilk terim 2'ye eşit olsaydı, o zaman bir sonraki terim çift olurdu ve dolayısıyla bileşik olurdu. Bu nedenle, dizimizin ilk terimi tek bir asaldır ve buradan tüm terimlerin tek asal olması gerektiği sonucu çıkar. Esasen M. Cantor'a ait olan şu teoremi kullanacağız: Eğer bir aritmetik dizinin n terimi tek asalsa, o zaman dizinin farkı n'den küçük her asal sayıya bölünür (bkz, örneğin, Sierpiński (1964a), s. 121, teorem 5). $n = 10$ için, dizimizin farkının 2, 3, 5 ve 7'ye, dolayısıyla 210'a bölünmesi gerektiği sonucu çıkar. Önce, 10 asaldan oluşan ve farkı 210 olan bir aritmetik dizi bulmaya çalışacağız.

210 sayısı (dizimizin farkı) 2, 3, 5 ve 7'ye bölündüğünden, ilk terim bu asallardan hiçbirine eşit olamaz. 11'e de eşit olamaz, çünkü bu durumda ikinci terim $221 = 13 \cdot 17$ olurdu. Dolayısıyla dizinin ilk terimi > 11'dir ve terimlerin hiçbiri 11'e bölünmez. 210'un 11'e bölümünden kalan 1'dir. Eğer ilk terim 11'e bölündüğünde > 1 kalanını verseydi, o zaman her sonraki terimde bu kalan 1 artardı ve dizinin terimlerinden biri 11'e bölünürdü ki bu imkansızdır. Bu nedenle, dizinin ilk terimi 11'e bölündüğünde 1 kalanını vermelidir ve tek olduğundan, k pozitif bir tamsayı olmak üzere $22k + 1$ formunda olmalıdır. Bu formdaki ardışık asallar 23, 67, 89, 199, ... şeklindedir. İlk terim 23 olamaz, çünkü o zaman altıncı terim $1073 = 29 \cdot 37$ olurdu. Eğer ilk terim 67 olsaydı, o zaman dördüncü terim $697 = 17 \cdot 41$ olurdu. Eğer ilk terim 87 olsaydı, o zaman ikinci terim $229 = 13 \cdot 23$ olurdu. Ancak, ilk terim 199 ise, on ardışık asaldan oluşan bir dizi elde ederiz

$$199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089.$$

Böylece farkı 210 olan ve on asaldan oluşan bir dizi bulmuş olduk. Şimdi, farkı 210'dan farklı bir r olan ve on asaldan oluşan artan bir aritmetik dizimiz olduğunu varsayalım. O zaman r (Cantor teoremine göre) 210'a bölünmelidir ve 210'dan farklı olduğundan, $r \geq 420$ olmalıdır. Ancak bu durumda, dizimizin ikinci terimi 420'yi aşacaktır, dolayısıyla bizim bulduğumuz dizinin ikinci terimi olan 409'u aşacaktır ve açıkçası sonraki terimler de bulduğumuz dizinin terimlerini aşacaktır. Dolayısıyla, ilk terimi 199 ve farkı 210 olan dizi, mümkün olan en küçük son terime sahip olan, on asaldan oluşan artan dizidir.

NOT. Bugüne kadar bilinen en uzun artan aritmetik asal dizisi, ilk terimi 4943 ve farkı 60060 olan on üç terimli dizidir ve Moskova'dan W. N. Seredinsky tarafından bulunmuştur. A. Schinzel'in asallara ilişkin bir sanısından, farkı 30030 olan ve on üç asaldan oluşan sonsuz sayıda dizinin var olduğu sonucu çıkar (bkz. Schinzel ve Sierpiński (1958a), s. 191, $C_{1,4}$). Ancak, şu ana kadar böyle bir dizi bulunamamıştır.

[22] Örneğin, $30k + 7$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) dizisi istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de, eğer $30k + 7 = p + q$ olsaydı, $30k + 7$'nin tek olduğu gerçeği göz önüne alındığında, p ve q sayılarından biri çift olurdu ve bir asal olarak 2'ye eşit olurdu. $q = 2$ olduğunu varsayalım; o zaman $p = 30k + 5 = 5(6k + 1)$ olur ki bu, p'nin bir asal olması durumunda imkansızdır. Eğer p ve q asal olmak üzere $30k + 7 = p - q$ ise, o zaman $q = 2$ ve $p = 30k + 9 = 3(10k + 3)$ olurdu ki bu da imkansızdır.

NOT. İki asalın hem toplamı hem de farkı olarak temsil edilebilen sonsuz sayıda çift sayının var olduğu kanıtlanabilir (ancak kanıtı zordur). A. Schinzel'in asallara ilişkin belirli bir sanısından, hem iki asalın toplamı hem de farkı olan sonsuz sayıda tek sayının var olduğu sonucu çıkar. Bkz. Sierpiński (1963).

4 Asal ve Bileşik Sayılar

74. Her çift $n > 6$ tam sayısı için $(n-p, n-q) = 1$ olacak şekilde p ve q asal sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.[1]

75. Hem iki asal sayının toplamı hem de farkı şeklinde yazılabilen tüm asal sayıları bulunuz.[2]

76. n ile $n+10$ arasında hiçbir asal sayı olmayacak şekilde üç en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz. $10m$ ile $10(m+1)$ arasında hiçbir asal sayı olmayacak şekilde üç en küçük m pozitif tam sayısını bulunuz.[3]

77. $4k+1$ şeklinde olan her asal sayının, kenar uzunlukları tam sayılar olan bir dik üçgenin hipotenüzünün uzunluğuna eşit olduğunu kanıtlayınız.[4]

78. p, q, r asal sayılar olmak üzere, $p^2 + 1 = q^2 + r^2$ denkleminin tüm çözümünü bulunuz.[5]

79. p, q, r, s, t asal sayılar olmak üzere $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$ denkleminin çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.[6]

---

[1] $p = 3, q = 5$ almak yeterlidir. Eğer n çift ve > 6 ise, o zaman $n - 1 \geq 6$ ve $p < q < n - 1$ olur. Ardışık tek sayılar olan $n - p = n - 3$ ve $n - q = n - 5$ sayıları aralarında asaldır.

[2] Bu tür yalnızca bir asal vardır, yani 5. Gerçekten de, r asalının hem iki asalın toplamı hem de farkı olarak temsil edilebildiğini varsayalım. Açıkçası $r > 2$ olmalıdır, dolayısıyla r tek bir asaldır. Hem iki asalın toplamı hem de farkı olduğundan, bu asallardan biri çift olmalı, yani 2'ye eşit olmalıdır. Dolayısıyla, p ve q asal olmak üzere $r = p + 2 = q - 2$ olmalıdır. Ancak bu durumda $p, r = p + 2$ ve $q = r + 2$ ardışık üç tek asal olurdu ve bu tür yalnızca bir üçlü vardır: 3, 5 ve 7 (çünkü her üç ardışık tek sayıdan biri 3'e bölünmelidir). Bu nedenle $r = 5 = 3 + 2 = 7 - 2$ elde ederiz.

[3] $n = 113, 139, 181; m = 20, 51, 62$.

[4] İyi bilinen Fermat teoremine göre, $4k + 1$ formundaki her asal, iki pozitif tamsayının karelerinin toplamıdır (bkz, örneğin, [37, s. 205, Teorem 9]). Dolayısıyla, eğer p $4k + 1$ formunda bir asalsa, $p = a^2 + b^2$ olur; burada a ve b pozitif tamsayılardır (p tek olduğundan dolayı elbette farklıdırlar). Örneğin, $a > b$ olduğunu varsayalım. O zaman $p^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$'dir, dolayısıyla p diğer iki kenarı $a^2 - b^2$ ve $2ab$ olan bir dik üçgenin hipotenüsüdür. Örneğin, $5^2 = 3^2 + 4^2$, $13^2 = 5^2 + 12^2$, $17^2 = 15^2 + 8^2$, $29^2 = 21^2 + 20^2$.

[5] $13^2 + 1 = 7^2 + 11^2$, $17^2 + 1 = 11^2 + 13^2$, $23^2 + 1 = 13^2 + 19^2$, $31^2 + 1 = 11^2 + 29^2$.
NOT. $(5x+13)^2 + 1 = (3x+7)^2 + (4x+11)^2$ özdeşliği, eğer $p = 5x + 13$, $q = 3x + 7$ ve $r = 4x + 11$ asalsa, $p^2 + 1 = q^2 + r^2$ olduğunu gösterir. A. Schinzel'in asallara ilişkin belirli bir sanısından (Schinzel ve Sierpiński 1958a) bu tür sistemlerin sonsuz sayıda olduğu sonucu çıkar.

[6] İlk olarak, eğer p, q, r, s ve t asalsa ve $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$ ise, o zaman p ve q sayılarının her biri r, s ve t sayılarının her birinden farklı olmalıdır. Gerçekten de, eğer örneğin $p = r$ olsaydı, o zaman $q^2 = s^2 + t^2$ olurdu ki bu imkansızdır, çünkü q, s, t asalken bu denklemin çözümü olamaz. Aslında, s ve t sayıları hem tek olamazdı hem de her ikisi çift olamazdı (çünkü bu durumda $q = 2$ olurdu, ki bu sağ tarafın > 4 olması gerçeğiyle çelişir). Eğer $s = 2$ olsaydı, o zaman 4 sayısı pozitif tamsayıların iki karesinin farkı olurdu ki bu imkansızdır.
Eğer $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$ ise, p, q, r, s, t sayılarının hepsinin tek olması mümkün değildir. Eğer p çiftse, o zaman $p = 2$'dir ve q, r, s, t sayıları tektir. Tek bir sayının karesinin 8'e bölümünden kalan 1 olduğundan, sol taraf 8'e bölündüğünde 5 kalanını verir, sağ taraf ise 3 kalanını verir, ki bu imkansızdır. Eğer hem p hem de q tekse, o zaman sol taraf 8'e bölündüğünde 2 kalanını verir, sağ tarafta ise sayılardan biri (ve sadece biri) çift olmalıdır, örneğin $r = 2$. Ancak o zaman, sağ taraf 8'e bölündüğünde 6 kalanını verirdi, ki bu imkansızdır.

80. $(p+1)+q(q+1)=r(r+1)$ denkleminin tüm p,q,r asal çözümlerini bulunuz.[7]

81. $p(p+1), q(q+1), r(r+1)$ sayılarının bir artan aritmetik dizi oluşturmasını sağlayan tüm p,q,r asal sayılarını bulunuz.

82. $n+1, n+3, n+7, n+9, n+13$ ve $n+15$ sayılarının her birinin asal olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

83. İki tam sayının dördüncü dereceden kuvvetinin toplamına eşit olan beş asal sayıyı bulunuz.

84. İkiz asal sayılar olmayan sonsuz sayıda ardışık asal sayılar çiftinin bulunduğunu kanıtlayınız.

85. Hiçbir ikiz asal sayıda bulunmayan sonsuz tane asal sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

86. n^2-1 sayısının birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan en küçük beş n pozitif sayısını bulunuz.

87. n^2+1 sayısının birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan en küçük beş n pozitif sayısını bulunuz. n^2+1 sayısının birbirinden farklı üç tek sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan bir n pozitif sayısı bulunuz.

88. 7'den büyük olan her ardışık üç sayının en az birinin en az iki birbirinden farklı asal böleninin bulunduğunu kanıtlayınız.

89. $n, n+1, n+2$ sayılarından her biri birbirinden farklı iki asal sayının çarpımına eşit olacak şekilde beş en küçük pozitif tam sayıyı bulunuz. Bu özellikle sahip olan dört ardışık sayı dizisini bulunmadığını kanıtlayınız. Her birinin tam iki asal böleni bulunan dört ardışık pozitif tam sayıyı bulunuz.

90. Aşağıdaki teoremlerin birbirine denk olduğunu gösteriniz:

(a) n ve $n+1$ sayılarının her birinin sadece bir asal böleni olmasını sağlayan n pozitif tam sayıları sonlu sayıdadır.

---

[7] A. Schinzel tarafından bulunan çözümü sunuyoruz. Yalnızca bir çözüm vardır, yani $p=q=2$, $r=3$. Bunu görmek için, p ve q asal ve r pozitif bir tamsayı olmak üzere $p(p+1)+q(q+1)=r(r+1)$ denkleminin tüm çözümlerini bulacağız. Denklemimiz şunu verir

$$p(p+1)=r(r+1)-q(q+1)=(r-q)(r+q+1),$$

ve $r>q$ olmalıdır. p bir asal olduğundan, ya $p \mid r-q$ ya da $p \mid r+q+1$ olmalıdır. Eğer $p \mid r-q$ ise, o zaman $p \leq r-q$ olur, bu da $p(p+1) \leq (r-q)(r-q+1)$ anlamına gelir ve dolayısıyla $r+q+1 \leq r-q+1$ olur ki bu imkansızdır. Dolayısıyla $p \mid r+q+1$ olmalıdır, bu da bir k pozitif tamsayısı için

$$r+q+1=kp, \text{ anlamına gelir, bu da } p+1=k(r-q) \text{ demektir. (1)}$$

Eğer $k=1$ olsaydı, o zaman $r+q+1=p$ ve $p+1=r-q$ olurdu, bu da $p-q=r+1$ ve $p+q=r+1$ verir, ki bu imkansızdır. Dolayısıyla, $k>1$. (1)'den kolayca şunu elde ederiz

$$2q=(r+q)-(r-q)=kp-1-(r-q)$$

$$=k[k(r-q)-1]-1-(r-q)=(k+1)[(k-1)(r-q)-1].$$

$k \geq 2$ olduğundan, $k+1 \geq 3$ olur. Sol tarafı sadece $1, 2, q$ ve $2q$ pozitif tamsayı bölenlerine sahip olan son eşitlik, ya $k+1=q$ ya da $k+1=2q$ olmasını gerektirir. Eğer $k+1=q$ ise, o zaman $(k-1)(r-q)=3$, dolayısıyla $(q-2)(r-q)=3$. Bu, ya $q-2=1, r-q=3$, yani $q=3, r=6$, $k=q-1=2$ ve (1) uyarınca $p=5$'e, ya da $q-2=3, r-q=1$, bu da $q=5, r=6$, $k=4$ ve (1) uyarınca $p=3$'e götürür. Öte yandan, eğer $k+1=2q$ ise, o zaman $(k-1)(r-q)=2$, dolayısıyla $2(q-1)(r-q)=2$. Bu, $q-1=1$ ve $r-q=1$'e, yani $q=2, r=3$'e ve (1) uyarınca $p=2$'ye götürür. Dolayısıyla, pozitif r tamsayıları için, p ve q asallarında şu çözümlere sahibiz: 1) $p=q=2, r=3$; 2) $p=5, q=3, r=6$, ve 3) $p=3, q=5, r=6$. Sadece ilk çözümde üç sayı da asaldır.

NOT. Eğer n'inci üçgensel sayıyı $t_n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ile gösterirsek, o zaman yukarıdaki teoremi şu şekilde ifade edebiliriz: $t_p+t_q=t_r$ denkleminin asal sayılarda yalnızca bir çözümü vardır, yani $p=q=2, r=3$.

(b) Sadece sonlu sayıda Mersenne asal sayıları ve sonlu sayıda Fermat asal sayıları vardır.

91. n pozitif tam sayı olmak üzere milyonlarca büyük olmayan ve iki asal sayının çarpımına eşit olan tüm $2^n - 1$ şeklinde olan sayıları bulunuz. Eğer n çift ise ya da $n > 4$'ten büyükse, $2^n - 1$ sayısının 1'den büyük en az üç asal sayının çarpımı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

92. Problem 47'yi kullanarak, p_n, n. asal sayıyı göstermek üzere,her $n \geq 3$ için $p_{n+1}+p_{n+2} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız.

93. n pozitif tam sayısı için q_n ile, n'nin böleni olmayan en küçük asal sayıyı gösterelim. 92. problemi kullanarak $\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = 0$ olduğunu kanıtlayınız.

94. Her $n > 4$ tam sayısı için n ile $2n$ arasında birbirinden farklı iki asal sayının çarpımına eşit olan en az bir tam sayının bulunduğunu ve her $n > 15$ tam sayısı için n ile $2n$ arasında, birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olan en az bir sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

95. Her s pozitif tam sayısı için, yeterince büyük n'ler için n ile $2n$ arasında s tane birbirinden farklı asal sayının çarpımına eşit olan en az bir sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

96. $1, 31, 331, 3331, \dots$ sonsuz dizisinde sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız ve bunlardan en küçüğünü bulunuz.

97. $n^4 + (n+1)^4$ sayısının bileşik olmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

98. $10^n + 3$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ şeklinde olan sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

99. $n > 1$ tam sayıları için $\dfrac{2^{4n+2}+1}{5}$ sayısının bileşik olduğunu kanıtlayınız.

100. Her m pozitif tam sayısı için $2^n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sonsuz dizisinin, bileşik sayılardan oluşan m ardışık teriminin bulunduğunu kanıtlayınız.

101. Bir basamağı değiştirilerek bir asal sayı elde edilemeyen bir pozitif tam sayı bulunduğunu gösteriniz.

102. Aşağıdaki teoremlerin birbirine denk olduğunu kanıtlayınız:

(a) **T.** Her $n > 1$ tam sayısı için n ile $2n$ arasında en az bir asal sayı bulunur.

(b) **T1.** Her $n > 1$ tam sayısı için $n!$ sayısının asal çarpanlarına ayrılışında üstü bir olan en az bir asal sayı bulunur.

103. Her n pozitif tam sayısı için $n!$ sayısının asal çarpanlarına ayrımında kuvveti 1 olan en az iki asal sayı bulunur.

104. Her n pozitif tam sayısı için, $p-1$ ve $p+1$ sayılarının her birinin en az n tane pozitif tam böleni olacak şekilde bir p asal sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

105. $p-1$ ve $p+1$ sayılarından her birinin en az 3 farklı asal böleni bulunacak şekilde en küçük p asal sayısını bulunuz.

106. Her n pozitif tam sayısı için, $p-1$, $p+1$ ve $p+1$ sayılarının her birinin en az n tane farklı asal böleni olacak şekilde sonsuz sayıda p asal sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

107. Her n ve s pozitif tam sayıları için, her biri terimlerinin en az n farklı asal böleni olacak ve bu asal sayılardan her birinin kuvveti en az s olacak şekilde istenilen uzunlukta ardışık sayılar dizisinin bulunduğunu kanıtlayınız.

108. $n > 1$ tek sayısı için n ve $n+2$ sayılarının sayılarının asal olması için, $(n-1)!$ sayısının n ve $n+2$ sayılarıyla bölünmemesinin gerek ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.

109. Her m pozitif tam sayısı için basamakları toplamı 10'dan büyük olan bir asal sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

110. Her n pozitif tam sayısı için en az m basamağı 0 olan asal sayılar bulunduğunu kanıtlayınız.

111. p^4 sayısının tüm pozitif tam bölenlerinin toplamı tam kare olacak şekilde olan tüm asal sayıları bulunuz.

112. $2 \leq s \leq 10$ olmak üzere her s için pozitif tam bölenlerinin toplamı bir tam sayının s. dereceden kuvvetine eşit olan asal sayıları bulunuz.

113. $(p-1)! + 1 = p^m$ denkleminin, $p > 5$ bir asal sayı ve m bir pozitif tam sayı olacak şekilde hiçbir çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

114. Bir $n < q$ pozitif tam sayısı için q_n, $(n-1)!$ sayısını bölecek şekilde sonsuz sayıda q asal sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

115. Her $k \neq 1$ için, $2^n + k$ sayısı bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda n pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

116. Tüm $2^n + k$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sayıları bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda $k > 0$ tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

117. Her $n = 1, 2, \dots$ sayısı için $2^{2n+1} + 3, 2^{2n+1} + 7, 2^{2n+2} + 13, 2^{2n+1} + 19$ ve $2^{2n+2} + 21$ sayılarının her birinin bileşik olduğunu kanıtlayınız.

118. Tüm $k \cdot 2^n + 1$ $(n = 1, 2, \dots)$ sayıları bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda k pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

119. Her $2^n + k$ $(n = 1, 2, \dots)$ sayısı bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda k tek sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

120. k sayısı 2'nin bir kuvveti ise, yeterince büyük n sayıları için tüm $k \cdot 2^n + 1$ sayılarının bileşik olduğunu kanıtlayınız.

121. Her $k \leq 10$ pozitif tam sayısı için $2^n + k$ sayısının bileşik olmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

122. Her $k \cdot 2^n + 1$ $(n = 1, 2, \dots)$ sayısının bileşik olmasını sağlayan tüm $k \leq 10$ pozitif tam sayılarını bulunuz.

123. Her $n > 1$ tam sayısı için $\dfrac{2^{2n+1} + 2^n + 1}{3}$ sayısının bileşik olduğunu kanıtlayınız.

124. $(2^n + 1)^2 + 2^n$ şeklinde olan sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

125. $1 < a \leq 100$ olmak üzere her a tam sayısı için $a^{2^n} + 1$ sayısının bileşik olacak şekilde en az bir $n \leq 6$ pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

126. Üç tane asal sayının toplamı şeklinde gösterilebilen fakat üçten az sayıda asal sayının toplamı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda tek sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

127. $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5$ eşitliklerini sağlayan ve katsayıları tam sayılar olan hiçbir $f(x)$ polinomunun bulunmadığını ve her $m > 1$ tam sayısı için, $p_n = n$ asal sayılar dizisi türese ($f(k) = p_n (n = 1, 2, \dots)$) olacak şekilde katsayıları rasyonel sayılar olan bir $f(x)$ polinomunun bulunduğunu kanıtlayınız.

128. Her n pozitif tam sayısı için $f(1) < f(2) < \cdots < f(n)$ sayıları asal olacak şekilde katsayıları tam sayılar olan bir $f(x)$ polinomu bulunduğunu kanıtlayınız.

129. x değişkeninin m farklı değerinde m farklı asal sayı veren ve katsayıları tam sayılar olan bir indirgenmez $f(x)$ polinomu bulunuz.

130. $f(x)$, derecesi 0'dan büyük olan tam sayı katsayılı bir polinomsal, sonsuz sayıda p asal sayısı için $f(x) = 0 \pmod p$ denkleminin çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

131. $k + 1, k + 2, \dots, k + 10$ dizisi maksimum sayıda asal sayı içerecek şekilde tüm $k \geq 0$ tam sayılarını bulunuz.

132. $k + 1, k + 2, \dots, k + 100$ dizisi maksimum sayıda asal sayı içerecek şekilde tüm $k \geq 0$ tam sayılarını bulunuz.

133. 25 tane asal sayı içeren tüm 100 ardışık sayıdan oluşan dizileri bulunuz.

134. 8 tane asal sayı içeren tüm 21 ardışık sayıdan oluşan dizileri bulunuz.

135. $p, p + 2, p + 6, p + 8, p + 12, p + 14$ sayılarının her biri asal olacak şekilde tüm p asal sayılarını bulunuz.

136. Aşağıdaki koşulları sağlayan sonsuz sayıda bir birinden farklı m ve n pozitif tam sayı ikilisinin bulunduğunu kanıtlayınız:

(a) m ve n sayılarının asal bölenleri aynıdır;

(b) $m + 1$ ve $n + 1$ sayılarının asal bölenleri aynıdır.

5 Diofant Denklemleri

137. $3x^2 - 7y^2 + 1 = 0$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

138. $2x^3 + xy - 7 = 0$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz ve pozitif rasyonel sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

139. $(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

140. $x(x+1) = 4y(y+1)$ denkleminin pozitif tam sayı çözümünün bulunmadığını, fakat pozitif rasyonel sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

141. p bir asal sayı ve n de bir pozitif tam sayı ise, $x(x+1) = p^n y(y+1)$ denkleminin pozitif tam sayılarla hiçbir çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

142. Verilen k tam sayısı için $x^2 - 2y^2 = k$ denkleminin bir (x_0, y_0) tam sayı çözümü varsa, $x^2 - 2y^2 = -k$ denkleminin bir tam sayı çözümünü bulunuz.

143. Her D tam sayısı için $x^2 - Dy^2 = z^2$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

144. D, sıfırdan farklı herhangi tam sayı ise, $x^2 - Dy^2 = z^2$ denkleminin, $\text{OBEB}(x, y) = 1$ olacak şekilde çözümleri olan tam sayılarla sonsuz tane (x, y, z) çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

145. $xy + x + y = 3z^2$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümlerinin bulunduğunu ve $x \leq y$ koşulunu sağlayan sayılarla çözümlerinin sonlu olduğunu kanıtlayınız.

146. $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

147. $y^2 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

148. $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ denkleminin tüm rasyonel sayı çözümlerini bulunuz.

149. $4xy - x - y = z^2$ denkleminin pozitif tam sayı çözümlerinin bulunmadığını ve negatif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

150. m pozitif tam sayı olmak üzere $D = m^2 + 1$ ise, $x^2 + Dy^2 = 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

151. $y^2 = x^3 + (x+4)^2$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

152. Her m pozitif tam sayısı için $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m$ denkleminin, x, y, z aralarında asal olmak üzere tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

153. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

154. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 2$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

155. $x^2 + y^2 + z = 3$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

156. $m = 1$ ve $m = 2$ için $x^3+y^3+z^3 = mxyz$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız ve $m = 3$ için tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

157. Aşağıdaki (T_1) ve (T_2) teoremlerinin denk olduğunu kanıtlayınız:

- $(T_1) : \frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümü yoktur.
- $(T_2) : u^3 + v^3 = w^3$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümü yoktur.

158. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = 1$ denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunduğunu, fakat sonsuz sayıda tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

159. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = m$ denkleminin, $m = 2$ ve $m = 3$ için pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız ve $m = 4$ için tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

160. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1$ denkleminin, $x \le y \le z \le t$ olmak üzere tüm pozitif tam çözümlerini bulunuz.

161. Her s pozitif tam sayısı için $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_s} = 1$ denkleminin sonlu sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

162. Her $s \ge 2$ tam sayısı için $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_s} = 1$ denkleminin $x_1 < x_2 < \cdots < x_s$ eşitsizliklerini sağlayan bir pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız. Bu çözümlerin sayısını I_n ile gösterirsek, $s = 3, 4, \ldots$ için $I_{s+1} > I_s$ olduğunu gösteriniz.

163. s, 2'den farklı pozitif tam sayı ise, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_s} = 1$ denkleminin üçgen sayıları ile (yani $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ şeklinde olan sayılar) çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

164. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

165. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_s} = 1$ denkleminin en az bir pozitif tam sayı çözümünün bulunmasını sağlayan tüm s pozitif tam sayılarını bulunuz.

166. 1^2 sayısının sonlu sayıda artan pozitif tam sayının karelerinin terslerinin toplamı şeklinde gösteriniz.

167. Her m pozitif tam sayısı ve tüm yeterince büyük s pozitif tam sayıları için $\frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} + \cdots + \frac{1}{x_s^m} = 1$ denkleminin en az bir pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

168. Her s pozitif tam sayısı için

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_s^2} = \frac{1}{x_{s+1}^2}$$

denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

169. Her $s \ge 3$ pozitif tam sayısı için

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \cdots + \frac{1}{x_s^3} = \frac{1}{x_{s+1}^3}$$

denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

170. $x + y + z = 3$ ve $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ denklemler sisteminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

171. Hangi n pozitif tam sayıları için $3x + 5y = n$ denkleminin en az bir tane pozitif tam sayı çözümü bulunduğunu araştırın ve n sonsuzluğa gittiğinde bu çözüm sayısının da sonsuzluğa gittiğini kanıtlayınız.

172. $n^x + n^y = n^z$ denkleminin tüm n, x, y, z pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

173. Her (m, n) pozitif tam sayı ikilisi için tek bir $x = n, x = m$ pozitif tam sayı çözümü olan, a, b, c tam sayılar olmak üzere bir $ax + by = c$ denkleminin bulunduğunu kanıtlayınız.

174. Her m pozitif tam sayısı için tam m tane pozitif tam sayı çözümü olan, a, b, c tam sayılar olmak üzere bir $ax + by = c$ denkleminin bulunduğunu kanıtlayınız.

175. m verilen bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = 0$$

denkleminin tam m tane pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

176. $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

177. Her n pozitif tam sayısı için

$$(x+1)^3 + (x+2)^3 + \cdots + (x+n)^3 = y^3$$

denkleminin tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

178. $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 = (x+5)^3$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

179. $(x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 = (x+10)^3$ denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

180. $y(y+1) = x(x+1)(x+2)$ denkleminin iki tane pozitif tam sayı çözümünü bulunuz.

181. $1 + x^2 + y^2 = z^2$ denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

182. n, x, y, z, t pozitif tam sayılar olmak üzere $nx^2 + ny^2 + nz^2 = nt$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

183. x, y, z, t pozitif tam sayılar olmak üzere $4x + 4y + 4z = 4t$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

184. $2^m - 3^n = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

185. $3^n - 2^m = 1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

186. $2x + 1 = y^2$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

187. $2x + 1 = y^2$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

188. $x^2 + 2y^2 = z^2, 2x^2 + y^2 = t^2$ denklemler sisteminin x, y, z, t pozitif tam sayılar olmak üzere çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

189. $[2(3x + 2y + 1) + 1]^2 - 2(4x + 3y + 2)^2 = (2x + 1)^2 - 2y^2$ özdeşliğini kullanarak $x^2 + (x+1)^2 = y^2$ denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı kökünün bulunmadığını kanıtlayınız.

190. $[2(7y + 12x + 6)]^2 - 3[2(4y + 7x + 3) + 1]^2 = (2y)^2 - 3(2x+1)^2$ özdeşliğini kullanarak $(x+1)^3 - x^3 = y^2$ denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı kökünün bulunmadığını kanıtlayınız.

191. $x^2 + 5y^2 = z^2$ ve $5x^2 + y^2 = t^2$ denklemler sisteminin x, y, z, t pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

192. Problem 34'ü kullanarak $x^2 + 6y^2 = z^2$ ve $6x^2 + y^2 = t^2$ denklemler sisteminin x, y, z, t pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

a. $x^2 + 7y^2 = z^2$ ve $7x^2 + y^2 = t^2$ denklemler sisteminin x, y, z, t pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

193. V.A. Lebesprogue teoremini kullanarak $x^2 - y^3 = 7$ denkleminin x, y tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

194. c pozitif tam sayısı tekse, $x^2 - y^3 = (2c)^3 - 1$ denkleminin x, y tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

195. k pozitif tam sayı ise, $x^2 + 2k^2 + 1 = y^3$ denkleminin x, y pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

196. $x \leq y, x \leq z \leq t$ olmak üzere $x + y = zt$ ve $z + t = xy$ denklemler sisteminin x, y, z, t pozitif tam sayılarıyla tüm çözümlerinin bulunması ile ilgili A. Moessner problemini çözünüz. Sistemin sonsuz sayıda x, y, z, t tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

197. Her p pozitif tam sayıları için $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = z_n$ denkleminin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif tam sayılarıyla en az bir çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

198. Verilen her a ve n pozitif tam sayıları için $x^n - y^n = a$ denkleminin x, y pozitif tam sayı çözümlerinin belirlenmesi için yöntem bulunuz.

199. Elementer yöntemlerle, hem üçgen hem de beşgen (yani $\frac{k(3k-1)}{2}$ şeklinde) olan sonsuz sayıda sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

6 Karışık Problemler

200. Tam sayı katsayılı bir $f(x)$ polinomu için $f(x) = 0$ denkleminin bir tam sayı çözümü varsa, her p asal sayısı için $x \equiv 0 \pmod p$ denkleminin de çözümü vardır. Birinci dereceden $ax + b = 0$ denklemini kullanarak bunun tersinin doğru olmadığını kanıtlayınız.

201. a ve b tam sayıları olmak üzere $ax + b \equiv 0 \pmod m$ denkleminin her m pozitif tam sayısı için çözümü varsa, $ax + b = 0$ denkleminin de tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

202. $6x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \pmod m$ denkleminin her m pozitif tam sayısı için çözümü bulunduğunu, fakat $6x^2 + 5x + 1 = 0$ denkleminin tam sayı çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

203. Her k tek ve n pozitif tam sayısı için $2n^2 + 2 \mid k^{2n} - 1$ olduğunu kanıtlayınız.

204. k tam sayısı, x ve y tam sayılar olmak üzere $k = x^2 - 2y^2$ şeklinde gösterilebiliyorsa, bu sayının sonsuz sayıda değişik yolla bu şekilde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

205. k tam sayı olmak üzere $8k + 3$ ve $8k + 5$ şeklinde olan hiçbir sayının, x ve y tam sayı olmak üzere $x^2 - 2y^2$ şeklinde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.

206. k tam sayı olmak üzere $8k + 1$ şeklinde olan sayılardan sonsuz sayıda, x ve y tam sayı olmak üzere $x^2 - 2y^2$ şeklinde gösterilebilenlerin ve sonsuz bu şekilde gösterilemeyenlerin bulunduğunu kanıtlayınız. Gösterilemeyenlerin en küçüğünü bulunuz.

207. Her mükemmel sayının son rakamının 6 veya 8 olduğunu kanıtlayınız.

208. N. Anning'in şu teoremini kanıtlayınız: rakamları herhangi bir $g > 1$ tabanında yazılmış olan

$$\frac{101010101}{1100110011}$$

sayısının payında ve paydasında tam ortadaki 1 rakamının yerine herhangi tek sayıda 1 yazılırsa, kesrin değerinin değişmeyeceğini kanıtlayınız (örneğin,

$$\frac{1010110101}{1100110011} = \frac{1010111011}{110011110011} = \frac{1010111110101}{1100111110011} = \dots$$

).

209. 2^n sayısının ondalık yayılımındaki rakamları toplamının n'nin artması ile sonsuz arttığını kanıtlayınız.

210. $k > 1$ bir tam sayı ve c de bir rakam ise 2^n'nin sağdan k. rakamı c olacak şekilde bir n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

211. 5^n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sayılarının son 4 rakamlarının periyodik dizi oluşturduğunu kanıtlayınız. Periyodu bulunuz ve saf periyot olup olmadığını tespit ediniz.

212. Her s için pozitif tam sayının ondalık yazılımının ilk s rakamının herhangi bir şekilde (?) olabileceğini kanıtlayınız.

213. n^n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sayılarının son rakamlarının periyodik dizi oluşturduğunu kanıtlayınız. Periyodu bulunuz ve saf periyot olup olmadığını tespit ediniz.

214. Her sonsuz ondalık kesirde, her n sayısı için uzunluğu n olan ve dizide sonsuz sayıda rastlanan bir rakamlar dizisi bulunduğunu kanıtlayınız.

215. Her k pozitif tam sayısı için 32^k sayısını ardışık sayılardan oluşan 3^k tane sayının toplamı şeklinde gösteriniz.

216. Bir $s > 1$ tam sayısı verilmişse, her $n \geq m_s$ için n ile $2n$ arasında bir pozitif tam sayının s. dereceden kuvveti bulunacak şekilde bir m_s pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız. $s = 2$ ve $s = 3$ için en küçük m_s sayılarını bulunuz.

217. Her n için, hiçbir bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvveti olmayan n ardışık pozitif tam sayının bulunduğunu kanıtlayınız.

218. $u_1 = 1, u_2 = 3$ ve $n = 1, 2, \dots$ için $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$ olarak tanımlanan (u_n) dizisinin n. terimi için n'ye bağlı formül bulunuz.

219. $u_1 = a, u_2 = b$ ve $n = 1, 2, \dots$ için $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ olarak tanımlanan (u_n) dizisinin n. terimi için n'ye bağlı formül bulunuz.

220. $u_1 = a, u_2 = b$ ve $n = 1, 2, \dots$ için $u_{n+2} = -(u_n + 2u_{n+1})$ olarak tanımlanan (u_n) dizisinin n. terimi için n'ye bağlı formül bulunuz. $a = 1, b = -1$ ve $a = 1, b = -2$ özel durumlarını inceleyiniz.

221. $u_1 = a, u_2 = b$ ve $n = 1, 2, \dots$ için $u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}$ olarak tanımlanan (u_n) dizisinin n. terimi için n'ye bağlı formül bulunuz.

222. $n = 1, 2, \dots$ için $a^{a^n} = a$ eşitliğini sağlayan tüm $a \neq 0$ tam sayılarını bulunuz.

223. Hem toplamı hem de çarpımı tam kare olan tüm pozitif tam sayı ikililerini bulmak için bir yöntem veriniz.

224. İki ardışık pozitif tam sayının kareleri toplamına eşit olan tüm üçgen sayıları bulunuz.

225. V.E.Hogatt'ın, her pozitif tam sayının Fibonacci dizisinin birbirinden farklı terimlerinin toplamı şeklinde gösterilebileceğini söyleyen teoremini kanıtlayınız.

226. Fibonacci dizisinin u_n terimlerinin $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n-1}$$

eşitliğini sağladığını kanıtlayınız.

227. Her tam sayının sonsuz değişik sayıda beş tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

228. 3 sayısının sonsuz değişik sayıda 0 ve 1'den farklı dört tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

229. Elementer yöntemlerle, birbirinden farklı dört pozitif tam sayının kareleri toplamı şeklinde en az iki değişik şekilde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu ve birbirinden farklı dört pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde en az iki değişik şekilde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

230. Her m pozitif tam sayısı için $4m^4 \cdot 7$ sayısının negatif olmayan dört tam sayının kareleri toplamı şeklinde herhangi gösteriminde, bu sayılardan hiçbirinin 2^{m-1}'den küçük olmadığını kanıtlayınız.

231. İki pozitif tam sayının kareleri toplamı ve iki pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilen 2'den büyük en küçük tam sayıyı bulunuz ve aralarında asal iki pozitif tam sayının kareleri toplamı ve iki pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

232. s pozitif tam sayısı için verilmişse, her $k = 1, 2, \dots, n$ için n sayısı iki tane pozitif tam sayının k. dereceden kuvvetleri toplamı olacak şekilde bir $n > 2$ tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

233. İki tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilemeyen, fakat iki rasyonel sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

234. İki pozitif tam sayının küpleri farkı şeklinde gösterilebilen, fakat iki pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

235. Her $k > 1$, $k \neq 3$ tam sayısı için iki pozitif tam sayının k. dereceden kuvvetleri farkı şeklinde gösterilebilen, fakat iki pozitif tam sayının k. dereceden kuvvetleri toplamı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

236. Her $n > 1$ tam sayısı için iki pozitif tam sayının n. dereceden kuvvetleri toplamı şeklinde gösterilebilen, fakat iki pozitif tam sayının k. dereceden kuvvetleri farkı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

237. 1'den n'ye kadar olan pozitif tam sayıların kareleri toplamı tam kare olmasını sağlayan en küçük $n > 1$ tam sayısını bulunuz.

238. a ve b 1'den büyük tam sayılarsa a^b şeklinde olan sayıya **öz kuvvet** diyelim. Sonlu sayıda öz kuvvetin toplamı şeklinde yazılabilen tüm pozitif tam sayıları bulunuz.

b. 6'dan farklı her $n \leq 10$ pozitif tam sayısının iki öz kuvvetin farkı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

239. Kenar uzunlukları tam sayı olan her dik üçgen ve her n pozitif tam sayısı için bu üçgene benzer ve her kenar uzunluğu bir pozitif tam sayının n'den büyük dereceden kuvveti olan bir üçgen bulunduğunu kanıtlayınız.

240. $(n-1)! + 1 = n^2$ eşitliğini sağlayan tüm $n > 1$ tam sayılarını bulunuz.

241. İki ardışık üçgen sayısının çarpımının hiçbir zaman tam kare olmayacağını, fakat her $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ sayısı için $t_n t_m$ çarpımının tam kare olacak şekilde t_n'den büyük olan sonsuz sayıda t_m üçgen sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

242. Logaritma tablosu kullanmadan $F_{1945} = 2^{2^{1945}} + 1$ sayısının basamak sayısının 10^{582}'den büyük olduğunu kanıtlayınız ve (F_{1945} sayısının en küçük asal böleni olan) $5 \cdot 2^{1947} + 1$ sayısının basamak sayısını bulunuz.

243. $2^{11213} - 1$ (bilinen en büyük asal sayı) sayısının basamak sayısını bulunuz.

244. $2^{12112}(2^{12112} - 1)$ (bilinen en büyük mükemmel sayı) sayısının basamak sayısını bulunuz.

245. 3!!! sayısının basamak sayısının 1000'den fazla olduğunu kanıtlayınız ve bu sayının sonundaki 0 sayısını bulunuz.

246. Aşağıdaki özelliğe sahip olan $m > 1$ tam sayısı bulunuz: bir x tam sayı sayısı için $f(x)$ değeri m'ye bölünecek, başka bir x değeri için $f(x)$ değeri m'ye bölündüğünde 1 kalanı verecek ve tüm x tam sayı değerleri için $f(x)$ değerleri m'ye bölündüğünde 0 veya 1 kalanı verecek şekilde tam sayı katsayılı bir $f(x)$ polinomu bulunur.

247. m ve n pozitif tam sayılar ve $D = [(4m^2 + 1)n + m]^2 + 4mn + 1$ olmak üzere $\sqrt{D}$ sayısının sürekli kesir şeklinde gösteriniz.

248. $\varphi(n)$ Euler fonksiyonu, $d(n)$ de n sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısını göstermek üzere $\varphi(n) = d(n)$ eşitliğini sağlayan tüm $n \leq 30$ pozitif tam sayısını bulunuz.

249. Her g pozitif tam sayısı için, her $w > 1$ rasyonel sayısının, $k > g$ ve $s \geq 0$ tam sayılar olmak üzere

$$w = (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{k+1}) \ldots (1 + \frac{1}{k+s})$$

şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

250. P. Erdős ve M. Surányi'nin şu teoremini kanıtlayınız: her k tam sayısı sonsuz değişik yolla, m pozitif tam sayı olmak üzere ve $+$ veya $-$ işaretleri belirli bir şekilde seçilerek

$$k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm m^2$$

şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

Kaynakça

Anning, P. 1956. *Scripta Mathematica* 22: 227.

Baker, C. L., ve F. J. Gruenberger. 1959. *The first six millions prime numbers*. The RAND Corp., Santa Monica, publ. by the Microcard Foundation, Madison, Wisc.

Cassels, J. W. S. 1960/61. "On a diophantine equation". *Acta Arithmetica* 6 (1960/61): 47-52.

Cassels, J. W. S., ve G. Sansone. 1960/61. "Sur le problème de M. Werner Mnich". *Acta Arithmetica* 7 (1960/61): 187-90.

Cipolla, M. 1904. "Sui numeri compositi P che verificiano la congruenza di Fermat $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$". *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 9: 139-60.

Demjanenko, V. A. 1966. "On sums of four cubes, (Russian)". *Izv. Vyssich Ucebnykh Zavedenii, Matematika*, 63-69.

Dickson, L. E. 1920. *History of the Theory of Numbers, vol. II*. Carnegie Institution.

Erdős, P. 1962. "On a problem of Sierpiński". *Atti Accad. Nazionale dei Lincei* 33: 122-24.

———. 1963. *Quelques problèmes de la Théorie des Nombres*. Monographies de l'Enseignement Math. 6. Genève.

Hyyro, S. 1964. "Uber das Catalansche Problem". *Annales Universitatis Turkuensis, Series AI*, sy 79.

Kaprekar, D. R. 1955. "Multidigital numbers". *Scripta Mathematica* 21: 27.

Khatri, M. N. 1954. "An interesting geometrical progression". *Scripta Mathematica* 20: 57.

———. 1962. "Three consecutive integers cannot be powers". *Colloquium Mathematicum* 9: 297.

Pólya, G. 1918. "Functions not formulas for primes". *Mathematische Zeitschrift* 1: 144.

Pólya, G., ve G. Szegő. 1925. *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis, II*. Berlin.

Reiner, J. 1943. "Zur arithmetischen Untersuchung der Polynome". *American Mathematical Monthly* 50: 619.

Reutter, O. 1963. *Elemente der Mathematik* 18: 89.

Schinzel, A. 1958. "Sur l'existence d'un cercle passant par un nombre donne de points aux coordonnees entieres". *L'Enseignement Mathématique* 4: 71-72.

———. 1959. "Démonstration d'une conséquence de l'hypothèse de Goldbach". *Compositio Mathematica* 14: 74-76.

———. 1963. "Remarque au travail de W. Sierpiński sur les nombres $a^x + 1$". *Colloquium Mathematicum* 10: 137-38.

Schinzel, A., ve W. Sierpiński. 1958a. "Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers". *Acta Arithmetica* 4: 185-208.

———. 1958b. "Sur les sommes de quatre cubes". *Acta Arithmetica* 4: 20-30.

Selmer, F. S. 1951. "The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$". *Acta Mathematica* 85: 203-362.

Sierpiński, W. 1950. "Sur les puissances du nombre 2". *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* 33: 246-51.

———. 1957. *On representations of rational numbers as sums of unit fractions, (in Polish)*. Warszawa.

———. 1958a. "Sur une question concernant le nombre de diviseurs premiers d'un nombre naturel". *Colloquium Mathematicum* 6: 209-10.

———. 1958b. *Teoria liczb, (Number Theory; in Polish) Cz. II*. Monografie Matematyczne 38. Warszawa.

———. 1961a. “Démonstration élémentaire d’un théorème sur les sommes de trois nombres premiers distincts”. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Drustvo Mat. Fiz. Hrvatske, ser. II* 16: 87-88.

———. 1961b. “Remarques sur le travail de M. J. W. S. Cassels "On a diophantine equation"”. *Acta Arithmetica* 6: 469-71.

———. 1961c. “Sur les sommes des chiffres de nombres premiers”. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Ser. II* 10: 229-32.

———. 1961d. “Sur un problème concernant les nombres $k \cdot 2^n + 1$”. *Elemente der Mathematik* 15: 73-74.

———. 1962a. “O liczbach naturalnych D, dla których okres rozwinieęia $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy arytmetyczny ma trzy wyrazy, (On positive integers D for which the period of expansion of $\sqrt{D}$ into an arithmetic continued fraction has three terms; in Polish)”. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości Matematyczne* 5: 53-55.

———. 1962b. “Sur quelques conséquences d’une hypothèse de M. A. Schinzel”. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* 31: 317-20.

———. 1963. “Sur les nombres qui sont sommes et différences de deux nombres premiers”. *Publ. Electr. Facultet, Sér. Math. Phys., Beograd*, sy 84: 1-2.

———. 1964a. *Elementary Theory of Numbers*. Monografie Matematyczne 42. Warszawa.

———. 1964b. “Remarques sur un problème de M. P. Erdős”. *Publications de l’Institut Mathématique de Beograd* 4 (18): 125-34.

———. 1964c. “Sur les nombres $a^x + 1$”. *Elemente der Mathematik* 19: 106.