250 Temel Sayılar Teorisi Problemi

24 Ekim 2024

İçindekiler

Hoşgeldiniz

Bu kitap, Waclaw Sierpinski'nin *250 Problems in Elementary Number Theory* (Sierpinski (1970)) kitabının Türkçeye uyarlanmasıyla oluşturulmuştur.

1 Tam Sayıların Bölünmesi

1. n^2+1 sayısının $n+1$'e bölünecek şekilde tüm pozitif tam sayı n değerlerini bulunuz.[1]

2. x^3-3 sayısının $x-3$'e bölünecek şekilde tüm $x \neq 3$ tam sayılarını bulunuz.[2]

3. $4n^2+1$ sayısının 5'e ve 13'e bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda pozitif tam sayı n'nin bulunduğunu kanıtlayınız.[3]

4. Her pozitif tam sayı n için $3n^3+26n-27$ sayısının 169'a bölündüğünü kanıtlayınız.[4]

5. $k=0,1,2,...$ için $22^{6k+2}+3$ sayısının 19'a bölündüğünü kanıtlayınız.[5]

6. $2^{70}+3^{70}$ sayısının 13'e bölündüğünü gösteriniz.[6]

---

[1] Bu koşulu sağlayan yalnızca bir pozitif tam sayı vardır: $n=1$. Gerçekten de $n^2+1=n(n+1)-(n-1)$'dir; bu nedenle, $n+1 \mid n^2+1$ ise, $n+1 \mid n-1$ olur. Bu, pozitif tam sayılar için yalnızca $n-1=0$ olduğunda mümkündür, yani $n=1$ olmalıdır.

[2] $x-3=t$ olarak tanımlayalım. Böylece, t, $t \neq 0$ olacak şekilde bir tam sayı olur ve $t \mid (t+3)^3-3$, bu da $t \mid 3^3-3$ yani $t \mid 24$ koşuluna eşdeğerdir. Bu nedenle, t'nin 24'ün bir tam sayı böleni olması gerekli ve yeterlidir. Bu durumda, t, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$ sayılarından biri olmalıdır. $x=t+3$ için şu değerleri elde ederiz: $-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15$, ve 27.

[3] Örneğin, $65k+56$ aritmetik dizisindeki tüm n sayıları (burada $k=0,1,2,...$), istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de, $n=65k+56$ için, $k \geq 0$ tam sayısı ile $n \equiv 1 \pmod 5$ ve $n \equiv 4 \pmod{13}$ olur. Bu nedenle, $4n^2+1 \equiv 0 \pmod 5$ ve $4n^2+1 \equiv 0 \pmod{13}$ olur. Böylece, $5 \mid 4n^2+1$ ve $13 \mid 4n^2+1$.

[4] İddiamızı tümevarım yöntemiyle kanıtlayacağız. $169 \mid 3^6-26-27=676=4\cdot169$ olduğunu biliyoruz. Sonraki adımda, $3^{3(n+1)+3}-26(n+1)-27-(3^{3n+3}-26n-27)=26(3^{3n+3}-1)$ elde ederiz. Ancak, $13 \mid 3^3-1$, bu nedenle $13 \mid 3^{3(n+1)}-1$ ve $169 \mid 26(3^{3n+3}-1)$'dir. Tümevarım yöntemiyle kanıt hemen ortaya çıkar.

[5] $2^6=64 \equiv 1 \pmod 9$ olduğuna göre, $k=0,1,2,...$ için $2^{6k} \equiv 1 \pmod 9$ elde ederiz. Bu nedenle $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod 9$ olur ve her iki taraf da çift olduğundan, $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod{18}$ elde ederiz. Buradan $2^{6k+2}=18t+2^2$ elde ederiz, burada $t \geq 0$ bir tam sayıdır. Ancak, Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$'dur ve $2^{18t} \equiv 1 \pmod{19}$ olur, $t=0,1,2,...$ için. Böylece, $2^{6k+2} \equiv 2^{18t+4} \equiv 2^4 \pmod{19}$ olur; buradan da $2^{6k+2}+3 \equiv 2^4+3 \equiv 0 \pmod{19}$ elde edilir ve bu da kanıtlanması gereken şeydir.

[6] Fermat'ın küçük teoremine göre, $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ olduğundan, $2^{60} \equiv 1 \pmod{13}$ elde ederiz. Ayrıca, $2^5 \equiv 6 \pmod{13}$ olduğu için, $2^{10} \equiv -3 \pmod{13}$ elde ederiz. Öte yandan, $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$'tür, bu da $3^{69} \equiv 1 \pmod{13}$ ve $3^{70} \equiv 3 \pmod{13}$ anlamına gelir. Bu nedenle, $2^{70}+3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$ olur, yani $13 \mid 2^{70}+3^{70}$, bu da kanıtlanması gereken şeydir.

7. $20^{15}-1$ sayısının $11 \cdot 31 \cdot 61$ çarpanına bölündüğünü kanıtlayınız.[7]

8. Her pozitif tam sayı m ve $a > 1$ tam sayısı için

$$\left(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1\right) = (a-1, m)$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.[8]

9. Her pozitif n sayısı için $3 \cdot (15^5 + 25^5 + \cdots + n^5)$ sayısının $13^3 + 23^3 + \cdots + n^3$'e bölündüğünü kanıtlayınız.[9]

---

[7]Açıkça görülüyor ki, $20^{15}-1$ sayısının her bir asal böleni olan 11, 31 ve 61'in $20^{15}-1$'i böldüğünü göstermek yeterlidir. $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ ve $10 \equiv -1 \pmod{11}$ olduğundan, $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$, bu da $20^5 \equiv 1 \pmod{11}$ ve $20^{15} \equiv 1 \pmod{11}$ anlamına gelir. Dolayısıyla $11 \mid 20^{15}-1$. Sonra, $20 \equiv -11 \pmod{31}$ olduğundan, $20^2 \equiv 121 \equiv -3 \pmod{31}$'dir. Bu nedenle, $20^3 \equiv (-11)(-3) = 33 \equiv 2 \pmod{31}$ ve $20^{15} \equiv 2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ olur. Böylece, $31 \mid 20^{15}-1$. Son olarak, $3^4 \equiv 20 \pmod{61}$ ve bu da $20^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1 \pmod{61}$ anlamına gelir (Fermat'ın küçük teoremine göre); bu nedenle $61 \mid 20^{15}-1$.

[8]$d = \left(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1\right)$ olarak tanımlayalım. Aşağıdaki eşitliği göz önünde bulunduralım:

$$\frac{a^m-1}{a-1} = (a^{m-1}-1) + (a^{m-2}-1) + \cdots + (a-1) + m \tag{1}$$

ve $a-1 \mid a^k-1$ ifadesinin $k = 0, 1, 2, \ldots$ için geçerli olduğunu dikkate alarak, $d \mid m$ elde ederiz. Bu nedenle, $a-1$ ve m sayılarının $d > \delta$ ortak bir böleni olsaydı, (1) eşitliğine göre $\delta \mid \frac{a^m-1}{a-1}$ olurdu ve a^m-1 ile $a-1$ sayıları $\delta > d$ ortak bir bölenine sahip olurdu ki bu imkânsızdır. Bu nedenle, d, $a-1$ ve m sayılarının en büyük ortak bölenidir ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

[9]Pozitif tam sayı n için, şu eşitliğe sahibiz:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(bu eşitlik tümevarım ile elde edilir). Yine tümevarım ile şu eşitliği de elde ederiz:

$$1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

bu da tüm pozitif tam sayılar n için geçerlidir. Bu formüllerden şu sonucu elde ederiz:

$$3(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5)/(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = 2n^2 + 2n - 1$$

bu da istenen özelliği kanıtlar.

10. $1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ sayısının n'e bölünmesini sağlayan tüm $n > 1$ tam sayılarını bulunuz.[10]

11. Pozitif tam n sayısı için $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ ve $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ sayılarından hangisinin 5'e bölünüp, hangisinin bölünmediğini tespit ediniz.[11]

---

[10]Bunlar, 1'den büyük tüm tek sayılardır. Aslında, n tek ve $n > 1$ ise, $(n-1)/2$ pozitif bir tam sayıdır ve $k = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$ için kolayca şu ifadeyi elde ederiz:

$$n \mid k^n + (n-k)^n \quad (\text{çünkü } (-k)^n = -k^n)$$

Böylece, $n \mid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ elde ederiz. Diğer yandan, eğer n çift ise, 2^s, n'yi bölen en yüksek 2 kuvveti olsun (bu nedenle s pozitif bir tam sayıdır). $2^s \geq s$ olduğundan, k çift olduğunda $2^s \mid k^n$ ve k tek olduğunda (bu dizideki k sayılarının sayısı $(n-1)/2$'dir) Euler'in teoremine göre $k^{2^{s-1}} \equiv 1 \pmod{2^s}$ ve $k^n \equiv 1 \pmod{2^s}$ elde ederiz (çünkü $2^s \mid n$). Böylece şu sonuca ulaşırız:

$$1^n + 3^n + \cdots + (n-3)^n + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

bu da şu sonucu verir:

$$1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

$2^n + 4^n + \cdots + (n-2)^n \equiv 0 \pmod{2^s}$ olduğundan, $n \mid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ elde ederiz. Eğer $2^s \mid n$ ise, $\frac{n}{2} \equiv 0 \pmod{2^s}$ olur ve $2^s \mid n$ ve $2^{s+1} \mid n$ çelişkisini elde ederiz. Böylece, n çift olduğunda $n \nmid 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$ elde edilir.

Not: Fermat teoreminden şu sonucu kolayca çıkarırız: Eğer n bir asal sayıysa, $n \mid 1^n + 1 - 1^n + \cdots + (n-1)^n + 1$. Ancak, bu ilişkiyi sağlayan bileşik bir sayı bilmiyoruz. G. Ginga, böyle bir bileşik sayı olmadığını öne sürdü, ancak bu 1'den küçük bileşik bir sayının var olmadığını henüz kanıtlayamadı.

[11]Dört durumu inceleyelim:

(a) $n = 4k$ olsun, burada k pozitif bir tam sayıdır. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+1} - 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 - 2 + 1 \equiv 1 \pmod{5},$$

$$b_n = 2^{8k+1} + 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}.$$

($2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ olduğundan, $2^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$'tir.)

(b) $n = 4k + 1$ olsun, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+3} - 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 - 4 + 1 \equiv 0 \pmod{5},$$

$$b_n = 2^{8k+3} + 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 + 4 + 1 \equiv 3 \pmod{5}.$$

(c) $n = 4k + 2$ olsun, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+5} - 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 - 8 + 1 \equiv 0 \pmod{5},$$

$$b_n = 2^{8k+5} + 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 + 8 + 1 \equiv 1 \pmod{5}.$$

(d) $n = 4k + 3$ olsun, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+7} - 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 - 1 + 1 \equiv 3 \pmod{5},$$

$$b_n = 2^{8k+7} + 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Sonuç olarak, a_n sayıları yalnızca $n \equiv 1$ veya $2 \pmod{4}$ olduğunda 5'e bölünürken, b_n sayıları yalnızca $n \equiv 0$ veya $3 \pmod{4}$ olduğunda 5'e bölünür. Böylece, yalnızca a_n veya b_n sayılarından biri 5'e bölünür.

12. Her n pozitif tam sayısı için

$$x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, \ldots$$

sonsuz dizisinin her bir terimi n'ye bölünecek şekilde bir x pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[12]

13. Her x çift pozitif tam sayısı için

$$x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \ldots$$

dizisinin terimlerinden hiçbirinin n'ye bölünmeyecek şekilde sonsuz sayıda n tek pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[13]

14. Her n pozitif tam sayısı için $(n+1)^n - 1$ sayısının n^2'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[14]

15. Her n pozitif tam sayısı için $2^{(2^n-1)n} - 1$ sayısının $(2^n-1)^2$'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[15]

---

[12] $x = 2n-1$ seçmek yeterlidir. Böylece $x, x^x, x^{x^x}, \ldots$ sayılarının her biri tek olur ve dolayısıyla $2n = x+1$, sonsuz dizinin her bir terimi olan $x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, \ldots$ sayılarının bir bölenidir.

[13] Örneğin, $4k+3$ biçimindeki tüm asal sayılar p. Aslında, x çift olduğunda, dizideki $x, x^x, x^{x^x}, \ldots$ terimlerinin her biri çifttir. Eğer dizideki $x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \ldots$ terimlerinden herhangi biri p'ye tam bölünseydi, pozitif bir tam sayı m için $p \mid x^m+1$ ilişkisine sahip olurduk, dolayısıyla $(x^m)^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Ancak, -1, $4k+3$ biçimindeki asal bir modül için bir karekök kalanı olamaz.

[14] Binom açılımından

$$(1+n)^n = 1 + \binom{n}{1}n + \binom{n}{2}n^2 + \cdots + \binom{n}{n}n^n$$

$n > 1$ için (bu, $1^2 \mid 2^2 - 1$ durumu göz önüne alındığında varsayılabilir), üçüncü terimden itibaren tüm terimler n'yi en az 2 üssünde içerir. İkinci terim $\binom{n}{1}n = n^2$'ye eşittir. Bu nedenle, $n^2 \mid ((1+n)^n - 1)$ ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

[15] Problem 14'e göre, pozitif tam sayılar m için

$$m^2 \mid ((m+1)^m - 1)$$

ilişkisini elde ederiz. $m = 2^n - 1$ için, $(m+1)^m = 2^{(2^n-1)}$ olduğundan, şu ilişkiyi elde ederiz:

$$(2^n-1)^2 \mid (2^{(2^n-1)n} - 1),$$

ve bu, kanıtlanması gereken şeydir.

16. $2^n + 1$ sayısı n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız. Bu koşulu sağlayan tüm asal sayıları bulunuz.[16]

17. Her $a > 1$ tam sayısı için $a^n + 1$ sayısının n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[17]

---

[16] $3 \mid 2^3 + 1$ ve pozitif bir tam sayı m için $3^m \mid 2^{3^m} + 1$ olduğunu varsayalım. O zaman $2^{3^m+1} = (3^m k - 1)^3 = 3^m k^3 - 3^m k^2 + 3^m k - 1 = 3^m t - 1$, burada t pozitif bir tam sayıdır. Böylece $3^{m+1} \mid 2^{3^{m+1}} + 1$ ve tümevarım ile $3^m \mid 2^{3^m} + 1$'i elde ederiz, $m = 1, 2, \ldots$. Ancak, $n \mid 2^n + 1$ ilişkisini sağlayan başka pozitif tam sayılar da vardır. Aslında, pozitif bir tam sayı n için $n \mid 2^n + 1$ ise, aynı zamanda $2^n + 1 \mid 2^{2^n+1} + 1$ olur. Gerçekten de $2^n + 1 = kn$, burada k bir tam sayıdır (açıkça, tektir), o zaman $2^n + 1 \mid 2^{kn} + 1 = 2^{2^n+1} + 1$ olur. Böylece $9 \mid 2^3 + 1$ ifadesi $513 \mid 2^{513} + 1$ sonucunu verir.
n'nin asal olduğunu ve $n \mid 2^n + 1$ olduğunu varsayalım. Fermat'ın teoremiyle, $n \mid 2^n - 2$ elde ederiz, bu da $n \mid 3$ sonucunu verir. n asal olduğuna göre, $n = 3$ elde ederiz. Gerçekten, $3 \mid 2^3 + 1$ olur. Böylece, $n \mid 2^n + 1$ ilişkisini sağlayan tek asal sayı $n = 3$ olur.

[17] Öncelikle O. Reutter'e ait aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız (bkz. [17]):
Eğer $a + 1$, tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman $n \mid a^n + 1$ ilişkisi pozitif tam sayılarla sonsuz çözümü vardır.
Eğer $a + 1$, tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman $p > 2$ olan bir asal böleni vardır. Bu durumda, $p \mid a + 1$ olur.
Lemma. Eğer $k \geq 0$ bir tam sayı ve $p \mid a^k + 1$ ise, o zaman $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$.
Lemmanın İspatı. $k \geq 0$ olan bir tam sayı için $p^k \mid a^k + 1$ olduğunu varsayalım. $a^k = b$ yazalım, bu durumda $p^k \mid b + 1$ elde ederiz, dolayısıyla $b = -1 \pmod{p^{k+1}}$ olur.
p tek asal olduğundan, $a^{p^{k+1}} + 1 = b^{p+1} = (b+1)(b^{p-1} - b^{p-2} + \cdots - b + 1)$ ifadesini elde ederiz.
Ve (çünkü $b = -1 \pmod{p^{k+1}}$ bu da $b^p = 1 \pmod{p^{k+1}}$ anlamına gelir) $b^2 = 1 \pmod{p}$ ve $b^{2i} = 1 \pmod{p}$ elde ederiz. Bu nedenle:

$$b^{p-1} - b^{p-2} + \ldots - b + 1 = 0 \pmod{p},$$

bu da ikinci terimin p'ye bölünebilir olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ elde ederiz ve bu ispatlanması gereken şeydir.
Lemma, $p \mid a + 1$ olduğunda, $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ ve $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ için $k = 1, 2, \ldots$ ifadesiyle tümevarım sağlar. Bu da $n \mid a^n + 1$ ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı n olduğunu ve O. Reutter'in teoremini ispatladığımızı gösterir.
Reutter teoreminin koşullarını sağlayan pozitif tam sayılar için, a'nın tek ve $a > 1$ olduğunu varsaymak yeterlidir. Bu durumda, $a^2 + 1$ ve a^2 ifadesi $8k + 1$ formundadır. Dolayısıyla, $a^2 + 1 = 8k + 2 = 2(4k + 1)$ tek bir çift sayıdır. Şu lemayı ispatlayacağız:
Lemma. Eğer a tek ise, o zaman a ve $a^2 + 1$ çift tek sayılar olup, $s \mid a + 1$ ise, pozitif bir tam sayı $s_1 > s$ vardır ki s_1 ve $a^{s_1} + 1$ de çift tek sayılardır ve $s_1 \mid a^{s_1} + 1$.
İspat. $a^2 + 1$ ve $a^{s_1} + 1$ çift tek sayılar olduğundan, $a + 1 = ms$ elde ederiz, burada m tektir. Böylece $a^s + 1 = a^{s_1} + 1 = a^{s_1} + 1$'dir ve $a^{s_1} + 1$ çift bir çift tek sayıdır.
$s_1 \mid a + 1$ olduğunda, $s_1 \mid a^{s_1} + 1$ ve $s_1 \mid a^{s_1} + 1$ elde ederiz. Bu durumda, $a > 1$ olduğundan, $s_1 > s$ olur. Böylece lema ispatlanmış olur.
a tek olduğundan, $s = 2$ diyebiliriz, bu da lemanın koşullarını sağlar. Böylece, $n \mid a^n + 1$ ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı n olduğunu gösteririz ve bu ispatlanması gereken şeydir (bkz. [35]).

18. $2^n + 2$ sayısı n'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam n sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.[18]

19. $a^{10} + 1$ sayısının 10'a bölünmesini sağlayan tüm pozitif tam a sayılarını bulunuz.[19]

[18] n çift ise ve $n \mid 2^n + 2$ ve $n \mid n-1 \mid 2^{n-1} + 1$ ise (örneğin $n = 2$ için bu doğrudur), o zaman $n_1 = 2^n + 2$ sayısı için $n_1 \mid 2^{n_1} + 2$ ve $n_1 \mid n_1 - 1 \mid 2^{n_1 - 1} + 1$ elde ederiz. Aslında, $n \mid 2^n + 2$ ve n çift olduğunda, $2^n + 2 = nk$ elde edilir, burada k tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{2^n+2} + 1 = 2^{2^{2^n+2}} + 2$$

$n_1 = 2^n + 2$ için ise:

$$n_1 - 1 = 2^n + 1 \mid 2^{2^n+1} + 1$$

Sonra, $n-1 \mid 2^{n-1}+1$ ifadesini elde ederiz ki bu da $2^n+1 = 2^{n-1}m+1$'i verir, burada m tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{a-1}m + 1 = 2^{2^n+1}$$

elde ederiz, bu da:

$$2^n + 2 \mid 2^{2^{2^n+2}+2}, \quad ve \quad n_1 \mid 2^{n_1+2}$$

Bu koşulları sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı n vardır.
$n_1 = 2^n + 2$ olduğundan, koşullarımızı sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı vardır. $n = 2$'den başlayarak, ardışık sayılar 2, 6, 66, $2^{66} + 2$, ... Ancak, C. Bindschedler bu yöntemin $n \mid 2^n + 2$ ilişkisini sağlayan tüm sayıları vermediğini fark etti; örneğin 946 sayısı $2^{946} + 2$ ilişkisini sağlamaz. Bu problemi tartışan C. Bindschedler tarafından verilen çözümü, *Elemente der Mathematik* dergisinin 18. sayısındaki 430 numaralı problemimde görebilirsiniz (1963), sayfa 90.

[19] Eğer a bir pozitif tam sayıysa ve r sayısı a sayısının 10'a bölünmesinden kalan ise, $a^{10} + 1$ ifadesi ancak ve ancak $r^{10} + 1$ ifadesi 10'a bölünebiliyorsa 10'a bölünür. Bu nedenle, sadece $r = 0, 1, 2, \dots, 9$ sayıları dikkate alınmalıdır ve bu sayılar için sadece $3^{10} + 1$ ve $7^{10} + 1$ ifadelerinin 10'a bölünebildiğini kolayca doğrularız. Dolayısıyla, $a^{10} + 1$ ifadesi 10'a bölünebilen tüm a sayıları $10k + 3$ ve $10k + 7$ formundadır, burada $k = 0, 1, 2, \dots$.

20. Hiçbir $n > 1$ tam sayısı için $2^n - 1$ sayısının n'ye bölünmediğini kanıtlayınız.[20]

   (a) $2^n + 1$ sayısının n'ye bölünmesini sağlayan sonsuz tane n pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.[21]

21. $3^n + 1$ sayısının n'ye bölünmesini sağlayan tüm n tek pozitif tam sayılarını bulunuz.[22]

22. $n \cdot 2^n + 1$ sayısının 3'e bölünmesini sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.[23]

---

[20] $n > 1$ pozitif tamsayılarının olduğunu ve n'in en küçüğü olduğunu varsayalım. Euler teoremine göre $n \mid (2^n - 1)$. Ancak, pozitif tamsayılar a ve b için $2^a - 1$ ve $2^b - 1$ sayıların en büyük ortak böleni $2^d - 1$'dir, burada $d = (a, b)$'dir.
$a = n$ ve $b = \varphi(n)$ için $d = (n, \varphi(n))$'dir, dolayısıyla $n \mid (2^d - 1)$'dir. Ancak, $n > 1$ olduğundan $2^d - 1 > 1$ elde ederiz, bu da $d > 1$ ve $1 < d \leq \varphi(n) < n$ anlamına gelir ve $d \mid n \mid (2^d - 1)$ ifadesi n'in tanımına aykırıdır.

[21] Örneğin, $n = 3^k$ biçimindeki tüm sayılar için $(k = 1, 2, ...)$. Bu durumu matematiksel tümevarım yoluyla ispatlayacağız. Elimizde $3 \mid 2^{3^k} + 1$ var. Eğer herhangi bir pozitif tam k için $3 \mid 2^{3^k} + 1$, o zaman, aşağıdaki özdeşlikten hareketle

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (2^{3^k} + 1)(2^{3^k} - 2^{3^k} + 1)$$

ve şu gözlemden yola çıkarak:

$$2^{3^k} - 2^{3^k} + 2 = 2^{3^k} + 2 - (2^{3^k} + 1), \quad \text{ve} \quad 3 \mid 2^{3^k} + 2$$

(çünkü 4^3 bölündüğünde kalan 1 verir), formülün ikinci terimi $2^{3^{k+1}} + 1$'in 3 ile bölünebilir olduğunu gösterir, bu da $3 \mid 2^{3^{k+1}} + 1$ anlamına gelir.

[22] $n = 1$ olan tek sayıdır. Varsayalım ki, $n > 1$ olan bir tek sayı vardır ve $n \mid 3^n + 1$. Bu durumda, $n \mid 9n - 1$. n, $n \mid 9^{\varphi(n)} - 1$ ile pozitif bir tam sayı olsun. $d = (\varphi(n), n)$ olarak tanımlandığında, $n \mid 9^d - 1$ elde edilir. Ancak, $d > 1$ olduğunda, $n \mid 8$ elde edilir ki, n tek olduğu için bu mümkün değildir. Sonuç olarak $1 < d \leq \varphi(n) < n$ ve $d \mid n$, bu nedenle $n > 1$ koşulunu sağlayan tek bir sayı yoktur.

[23] Açıkça, n sayısı 3'e bölünemez. Bu nedenle, n sayısı aşağıdaki formlardan birinde olmalıdır: $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 4$ veya $6k + 5$, burada $k = 0, 1, 2, ...$
Eğer $n = 6k + 1$ ise, $2^6 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan,

$$n2^n + 1 = (2^6)2 + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

Bu durumda $3 \mid n2^n + 1$ olur.
Eğer $n = 6k + 2$ ise,

$$n2^n + 1 = 2(2^6)2 + 1 \equiv 8 + 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

yani yine $3 \mid n2^n + 1$.
Eğer $n = 6k + 4$ ise,

$$n2^n + 1 \equiv 4(2^6)2^4 + 1 \equiv 2^5 + 1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Son olarak, $n = 6k + 5$ ise,

$$n2^n + 1 = 5(2^6)2^5 + 1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Bu durumda, $n2^n + 1$ ifadesi ancak ve ancak n, $6k + 1$ veya $6k + 2$ formunda olduğunda 3'e bölünebilir. Burada $k = 0, 1, 2, ...$

23. Her tek p asal sayısı için $n \cdot 2^n + 1$ sayısının p'ye bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.[24]

24. Her pozitif tam n sayısı için, y^y sayısı x^x'e bölünecek, fakat y sayısı x^x'e bölünmeyecek şekilde $x > n$ ve y pozitif tam sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.[25]

25. Her n tek pozitif tam sayısı için $2^n - 1$ sayısının n'ye bölündüğünü kanıtlayınız.[26]

26. $2^n - 3$ $(n = 2, 3, \dots)$ sonsuz dizisinin 5'e bölünen sonsuz sayıda terimi olduğunu; 13'e bölünen sonsuz tane terimin bulunduğunu, fakat 65'e bölünen hiçbir terimin bulunmadığını kanıtlayınız.[27]

---

[24] Eğer p tek bir asal sayıysa ve $n = (p-1)(kp+1)$, burada $k = 0, 1, 2, \dots$, o zaman $n \equiv -1 \pmod{p}$ ve $p - 1 \mid n$. Fermat'nın küçük teoremi gereğince, $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ olur, dolayısıyla $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.
Not: Bu problemden, $n2^n + 1$ formunda sonsuz sayıda bileşik sayı olduğu sonucu çıkarılabilir, burada n pozitif bir tam sayıdır. Bu formdaki sayılar Cullen sayıları olarak bilinir. $1 < n < 141$ aralığında bu formdaki tüm sayılar bileşik olduğu ispatlanmıştır, ancak $n = 141$ için $n2^n + 1$ asal bir sayıdır. Sonsuz sayıda asal Cullen sayısı olup olmadığı bilinmemektedir.

[25] n verilen bir pozitif tam sayı olsun ve $k > 1$ olmak üzere $2^k > n$ olacak şekilde pozitif bir tam sayı olsun. p, $2^k - 1$'den büyük bir asal sayı olsun. $k > 1$ olduğu için, $x = 2^k$, $y = 2p$ olarak alalım. Buradan $x \nmid y$ ve $x^x \mid y^y$ olur, çünkü $x = 2^{2^k}$ ve $y^y = (2p)^{2p}$, burada $2p > 2^k k$.
Örneğin, $4 \nmid 10$, fakat $4^4 \mid 10^{10}$, $8 \nmid 12$, fakat $8^8 \mid 12^{12}$, $9 \nmid 21$, fakat $9^9 \mid 21^{21}$.

[26] Pozitif tam sayılar için, $\varphi(n) \mid n!$ olduğu açıktır. Aslında, $n = 1$ için bu doğrudur; eğer $n > 1$ ise ve $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_k^{a_k}$ asal çarpanlarına ayrılmışsa, burada $q_1 < q_2 < \dots < q_k$ olmak üzere, o zaman

$$\varphi(n) = q_1^{a_1-1} q_2^{a_2-1} \dots q_k^{a_k-1}(q_1-1)(q_2-1)\dots(q_k-1)$$

ve $q_1^{a_1-1} q_2^{a_2-1} \dots q_k^{a_k-1} \mid n$, $q_1 - 1 < q_2 - 1 < \dots < q_k - 1$ olduğu için $q_k - 1 < n$ ve $q_1 - 1 < q_2 - 1 < \dots < q_k - 1$, n'den küçük farklı pozitif tam sayılardır. Böylece $(q_1-1)(q_2-1)\dots(q_k-1)(n-1)! \mid n!$ elde edilir ve buradan $\varphi(n)(n-1)! \mid n!$ olduğu sonucu çıkar.
Eğer n tek ise, (Euler teoremine göre) $n \mid 2^{\varphi(n)} - 1 \mid 2^{n!} - 1$, dolayısıyla $n \mid 2^{n!} - 1$, bu da kanıtlanması gereken şeydi.

[27] Fermat'nın teoremine göre, $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ ve $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.
$2^3 \equiv 3 \pmod{5}$ ve $2^4 \equiv 3 \pmod{13}$ olduğu için, $24k + 3 \equiv 3 \pmod{5}$ ve $2^{12k+4} \equiv 3 \pmod{13}$ elde ederiz, burada $k = 0, 1, 2, \dots$. Dolayısıyla, $5 \mid 2^{4k+3} - 3$ ve $13 \mid 2^{12k+4} - 3$, burada $k = 0, 1, 2, \dots$.
Bir sonraki adımda, $2^6 \equiv 1 \pmod{65}$ olduğunu ve bu nedenle $2^{12} \equiv 1 \pmod{65}$ olduğunu görürüz. Böylece $2^n - 3 \equiv 2^n - 3 \pmod{65}$, bu da $2^n - 3$ dizisinin $(n = 2, 3, \dots)$ 12 periyotlu olduğunu gösterir. $2^n - 3$ sayılarının hiçbiri $(n = 2, 3, \dots)$ 65'e bölünmüyorsa, bunu göstermek için $n = 2, 3, \dots, 13$ için $2^n - 3$ sayılarının 65'e bölünüp bölünmediğini kontrol etmek yeterlidir. 65'e bölündüğünde kalanlar sırasıyla $1, 5, 13, 29, 61, 60, 58, 54, 46, 30, 63, 64$ olup, bunların hiçbiri sıfır değildir.

27. $2^n - 2$ ve $3^n - 3$ sayıları n'ye bölünmesini sağlayan iki en küçük bileşik n sayısını bulunuz.

28. $2^n - 2$ sayısının n'ye bölünmesini, $3^n - 3$ sayısının da n'ye bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

29. $2^n - 2$ sayısının n'ye bölünmemesini, $3^n - 3$ sayısının da n'ye bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

30. Her a pozitif tam sayısı için $a^n - a$ sayısının n'e bölünecek şekilde bir n bileşik sayısı bulunuz.

31. a, b, c tam sayılar olmak üzere $a^3 + b^3 + c^3$ sayısı 9'a bölünüyorsa, a, b, c sayılarından en az birinin 3'e bölündüğünü kanıtlayınız.

32. a_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ tam sayılar olmak üzere

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3$$

sayısı 9'a bölünüyorsa,

$$3 \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5)$$

olduğunu kanıtlayınız.

33. $(x, y) = 1$ ve $x^2 + y^2 = z^4$ olmak üzere x, y, z pozitif tam sayılarsa, $7 \mid x$ ya da y olduğunu kanıtlayınız. $(x, y) = 1$ koşulunun gerekli olduğunu gösteriniz.

34. a, b tam sayıları için $7 \mid a^2 + b^2$ ise $7 \mid a$ veya $7 \mid b$ olduğunu kanıtlayınız.

35. Aşağıdaki koşulları sağlayan sonsuz sayıda x, y pozitif tam sayı çiftinin bulunduğunu kanıtlayınız ve böyle çiftlerden en küçüğünü bulunuz:

$$x(x+1) \mid y(y+1), \quad x+y, \quad x+1 \mid y, \quad x \cdot y + 1, \quad x+1 \mid y+1$$

36. Her $s \leq 25$ pozitif tam sayısı ve $s = 100$ için basamakları toplamı s'ye eşit olan ve s'ye bölünen en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.

37. Her s pozitif tam sayısı için, s'ye bölünen ve basamakları toplamı s'ye eşit olan bir n pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

38. Aşağıdakileri kanıtlayınız:

(a) Her pozitif tam sayının $4k+1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k+3$ şeklindeki bölenlerinin sayısından az değildir.
(b) $4k+1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k+3$ şeklindeki bölenlerinin sayısına eşit olan sonsuz tane pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
(c) $4k+1$ şeklindeki bölenlerinin sayısı $4k+3$ şeklindeki bölenlerinin sayısından fazla olan sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunur.

39. a, b, c herhangi tam sayılar ve n de 3'ten büyük olan bir tam sayı ise, $k = a, k + b, k + c$ sayıların hiçbirinin n'ye bölünmeyecek şekilde bir k tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

40. $F_n = 2^{2^n} + 1$ için $F_n \mid 2^{F_n} - 2$ olduğunu kanıtlayınız ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

2 Aralarında Asal Sayılar

41. Her k tam sayısı için $2k+1$ ve $9k+4$ sayılarının aralarında asal olduğunu kanıtlayınız. $2k-1$ ve $9k+4$ sayılarının OBEB'ini k'ya bağlı bir fonksiyon olarak bulunuz.

42. $\frac{n(n+1)}{2}$ şeklinde olan her ikilisi aralarında asal olan sonsuz tane tam sayı bulunduğunu gösteriniz.

43. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ şeklinde olan her ikilisi aralarında asal olan sonsuz tane tam sayı bulunduğunu gösteriniz.

44. a ve b birinden farklı tam sayılar ise, $a+n$ ve $b+n$ sayıları aralarında asal olacak şekilde sonsuz sayıda n tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

45. a, b, c birbirinden farklı tam sayılarsa, $a+n, b+n, c+n$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal olacak şekilde sonsuz sayıda n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

46. $a+n, b+n, c+n, ved+n$ sayılarının ikişer ikişer aralarında asal olmamasını sağlayan hiçbir n pozitif tam sayısı olmayacak şekilde birbirinden farklı a, b, c, d pozitif tam sayıları bulunuz.

47. 6'dan büyük olan her tam sayının 1'den büyük ve aralarında asal olan iki tam sayının toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

48. 17'den büyük olan her tam sayının ikişer ikişer aralarında asal olan 1'den büyük 3 tam sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini ve 17'nin de bu şekilde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.

49. Her m pozitif tam sayısı için hem tek $2k$ çift sayısının m ile aralarında asal olan iki pozitif tam sayının farkı şeklinde yazılabileceğini kanıtlayınız.

50. Fibonacci dizisinin, tüm terimleri ikişer ikişer aralarında asal olan bir alt dizisinin bulunduğunu kanıtlayınız.

51. Her $n = 1, 2, ...$ için OBEB$(n, 2^n+1) = 1$ olduğunu gösteriniz.

    51a. OBEB$(n, 2^n-1) > 1$ olmasını sağlayan sonsuz tane n pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız ve bunlardan en küçüğünü bulunuz.

Kaynakça

Sierpinski, Waclaw. 1970. *250 problems in elementary number theory*. American Elsevier Publishing Company.