

# 250 Temel Sayılar Teorisi Problemi

25 Ekim 2024

# İçindekiler

Hoşgeldiniz	3
1 Tam Sayıların Bölünmesi	4
2 Aralarında Asal Sayılar	14
3 Aritmetik Diziler	15
4 Asal ve Bileşik Sayılar	17
5 Diofant Denklemleri	22
6 Karışık Problemler	27
Kaynakça	31

# Hoşgeldiniz

Bu kitap, Waclaw Sierpinski'nin *250 Problems in Elementary Number Theory* (Sierpinski (1970)) kitabının Türkçeye uyarlanmasıyla oluşturulmuştur.

# 1 Tam Sayıların Bölünmesi

1.  $n^2 + 1$  sayısının  $n + 1$ 'e bölünecek şekilde tüm pozitif tam sayı  $n$  değerlerini bulunuz.<sup>1</sup>
2.  $x^3 - 3$  sayısının  $x - 3$ 'e bölünecek şekilde tüm  $x \neq 3$  tam sayılarını bulunuz.<sup>2</sup>
3.  $4n^2 + 1$  sayısının 5'e ve 13'e bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda pozitif tam sayı  $n$ 'nin bulunduğunu kanıtlayınız.<sup>3</sup>
4. Her pozitif tam sayı  $n$  için  $3n^3 + 26n - 27$  sayısının 169'a bölündüğünü kanıtlayınız.<sup>4</sup>
5.  $k = 0, 1, 2, \dots$  için  $22^{6k+2} + 3$  sayısının 19'a bölündüğünü kanıtlayınız.<sup>5</sup>
6.  $2^{70} + 3^{70}$  sayısının 13'e bölündüğünü gösteriniz.<sup>6</sup>

---

<sup>1</sup>Bu koşulu sağlayan yalnızca bir pozitif tam sayı vardır:  $n = 1$ . Gerçekten de  $n^2 + 1 = n(n + 1) - (n - 1)$ 'dir; bu nedenle,  $n + 1 \mid n^2 + 1$  ise,  $n + 1 \mid n - 1$  olur. Bu, pozitif tam sayılar için yalnızca  $n - 1 = 0$  olduğunda mümkündür, yani  $n = 1$  olmalıdır.

<sup>2</sup> $x - 3 = t$  olarak tanımlayalım. Böylece,  $t, t \neq 0$  olacak şekilde bir tam sayı olur ve  $t \mid (t + 3)^3 - 3$ , bu da  $t \mid 3^3 - 3$  yani  $t \mid 24$  koşuluna eşdeğerdir. Bu nedenle,  $t$ 'nin 24'ün bir tam sayı böleni olması gerekli ve yeterlidir. Bu durumda,  $t, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$  sayılarından biri olmalıdır.  $x = t + 3$  için şu değerleri elde ederiz:  $-21, -9, -5, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15$ , ve  $27$ .

<sup>3</sup>Örneğin,  $65k + 56$  aritmetik dizisindeki tüm  $n$  sayıları (burada  $k = 0, 1, 2, \dots$ ), istenen özelliğe sahiptir. Gerçekten de,  $n = 65k + 56$  için,  $k \geq 0$  tam sayısı ile  $n \equiv 1 \pmod{5}$  ve  $n \equiv 4 \pmod{13}$  olur. Bu nedenle,  $4n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$  ve  $4n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$  olur. Böylece,  $5 \mid 4n^2 + 1$  ve  $13 \mid 4n^2 + 1$ .

<sup>4</sup>İddiamızı tümevarım yöntemiyle kanıtlayacağız.  $169 \mid 3^6 - 26 - 27 = 676 = 4 \cdot 169$  olduğunu biliyoruz. Sonraki adımda,  $3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 - (3^{3n+3} - 26n - 27) = 26(3^{3n+3} - 1)$  elde ederiz. Ancak,  $13 \mid 3^3 - 1$ , bu nedenle  $13 \mid 3^{3(n+1)} - 1$  ve  $169 \mid 26(3^{3n+3} - 1)$ 'dir. Tümevarım yöntemiyle kanıt hemen ortaya çıkar.

<sup>5</sup> $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{9}$  olduğuna göre,  $k = 0, 1, 2, \dots$  için  $2^{6k} \equiv 1 \pmod{9}$  elde ederiz. Bu nedenle  $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod{9}$  olur ve her iki taraf da çift olduğundan,  $2^{6k+2} \equiv 2^2 \pmod{18}$  elde ederiz. Buradan  $2^{6k+2} = 18t + 2^2$  elde ederiz, burada  $t \geq 0$  bir tam sayıdır. Ancak, Fermat'ın küçük teoremine göre,  $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ 'dur ve  $2^{18t} \equiv 1 \pmod{19}$  olur,  $t = 0, 1, 2, \dots$  için. Böylece,  $2^{6k+2} \equiv 2^{18t+4} \equiv 2^4 \pmod{19}$  olur; buradan da  $2^{6k+2} + 3 \equiv 2^4 + 3 \equiv 0 \pmod{19}$  elde edilir ve bu da kanıtlanması gereken şeydir.

<sup>6</sup>Fermat'ın küçük teoremine göre,  $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$  olduğundan,  $2^{60} \equiv 1 \pmod{13}$  elde ederiz. Ayrıca,  $2^5 \equiv 6 \pmod{13}$  olduğu için,  $2^{10} \equiv -3 \pmod{13}$  elde ederiz. Öte yandan,  $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ 'tür, bu da  $3^{69} \equiv 1 \pmod{13}$  ve  $3^{70} \equiv 3 \pmod{13}$  anlamına gelir. Bu nedenle,  $2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$  olur, yani  $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$ , bu da kanıtlanması gereken şeydir.

7.  $20^{15} - 1$  sayısının  $11 \cdot 31 \cdot 61$  çarpanına bölündüğünü kanıtlayınız.<sup>7</sup>

8. Her pozitif tam sayı  $m$  ve  $a > 1$  tam sayısı için

$$\left( \frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1 \right) = (a - 1, m)$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.<sup>8</sup>

9. Her pozitif  $n$  sayısı için  $3 \cdot (15^5 + 25^5 + \dots + n^5)$  sayısının  $13^3 + 23^3 + \dots + n^3$ 'e bölündüğünü kanıtlayınız.<sup>9</sup>

---

<sup>7</sup>Açıkça görülüyor ki,  $20^{15} - 1$  sayısının her bir asal böleni olan 11, 31 ve 61'in  $20^{15} - 1$ 'i böldüğünü göstermek yeterlidir.  $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$  ve  $10 \equiv -1 \pmod{11}$  olduğundan,  $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$ , bu da  $20^5 \equiv 1 \pmod{11}$  ve  $20^{15} \equiv 1 \pmod{11}$  anlamına gelir. Dolayısıyla  $11 \mid 20^{15} - 1$ . Sonra,  $20 \equiv -11 \pmod{31}$  olduğundan,  $20^2 \equiv 121 \equiv -3 \pmod{31}$ 'dir. Bu nedenle,  $20^3 \equiv (-11)(-3) = 33 \equiv 2 \pmod{31}$  ve  $20^{15} \equiv 2^5 \equiv 1 \pmod{31}$  olur. Böylece,  $31 \mid 20^{15} - 1$ . Son olarak,  $3^4 \equiv 20 \pmod{61}$  ve bu da  $20^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1 \pmod{61}$  anlamına gelir (Fermat'ın küçük teoremine göre); bu nedenle  $61 \mid 20^{15} - 1$ .

<sup>8</sup> $d = \left( \frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1 \right)$  olarak tanımlayalım. Aşağıdaki eşitliği göz önünde bulunduralım:

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = (a^{m-1} - 1) + (a^{m-2} - 1) + \dots + (a - 1) + m \quad (1)$$

ve  $a - 1 \mid a^k - 1$  ifadesinin  $k = 0, 1, 2, \dots$  için geçerli olduğunu dikkate alarak,  $d \mid m$  elde ederiz. Bu nedenle,  $a - 1$  ve  $m$  sayılarının  $d > \delta$  ortak bir böleni olsaydı, (1) eşitliğine göre  $\delta \mid \frac{a^m - 1}{a - 1}$  olurdu ve  $a^m - 1$  ile  $a - 1$  sayıları  $\delta > d$  ortak bir bölenine sahip olurdu ki bu imkânsızdır. Bu nedenle,  $d$ ,  $a - 1$  ve  $m$  sayılarının en büyük ortak bölenidir ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

<sup>9</sup>Pozitif tam sayı  $n$  için, şu eşitliğe sahibiz:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(bu eşitlik tümevarım ile elde edilir). Yine tümevarım ile şu eşitliği de elde ederiz:

$$1^5 + 2^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

bu da tüm pozitif tam sayılar  $n$  için geçerlidir. Bu formüllerden şu sonucu elde ederiz:

$$3(1^5 + 2^5 + \dots + n^5) / (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = 2n^2 + 2n - 1$$

bu da istenen özelliği kanıtlar.

10.  $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$  sayısının  $n$ 'e bölünmesini sağlayan tüm  $n > 1$  tam sayılarını bulunuz.<sup>10</sup>

11. Pozitif tam  $n$  sayısı için  $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$  ve  $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$  sayılarından hangisinin 5'e bölünüp, hangisinin bölünmediğini tespit ediniz.<sup>11</sup>

<sup>10</sup>Bunlar, 1'den büyük tüm tek sayılardır. Aslında,  $n$  tek ve  $n > 1$  ise,  $(n-1)/2$  pozitif bir tam sayıdır ve  $k = 1, 2, \dots, (n-1)/2$  için kolayca şu ifadeyi elde ederiz:

$$n \mid k^n + (n-k)^n \quad (\text{çünkü } (-k)^n = -k^n)$$

Böylece,  $n \mid 1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$  elde ederiz. Diğer yandan, eğer  $n$  çift ise,  $2^s$ ,  $n$ 'yi bölen en yüksek 2 kuvveti olsun (bu nedenle  $s$  pozitif bir tam sayıdır).  $2^s \geq s$  olduğundan,  $k$  çift olduğunda  $2^s \mid k^n$  ve  $k$  tek olduğunda (bu dizideki  $k$  sayılarının sayısı  $(n-1)/2$ 'dir) Euler'in teoremine göre  $k^{2^s-1} \equiv 1 \pmod{2^s}$  ve  $k^n \equiv 1 \pmod{2^s}$  elde ederiz (çünkü  $2^s \mid n$ ). Böylece şu sonuca ulaşırız:

$$1^n + 3^n + \dots + (n-3)^n + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

bu da şu sonucu verir:

$$1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \pmod{2^s}$$

$2^n + 4^n + \dots + (n-2)^n \equiv 0 \pmod{2^s}$  olduğundan,  $n \mid 1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$  elde ederiz. Eğer  $2^s \mid n$  ise,  $\frac{n}{2} \equiv 0 \pmod{2^s}$  olur ve  $2^s \mid n$  ve  $2^{s+1} \mid n$  çelişmesini elde ederiz. Böylece,  $n$  çift olduğunda  $n \nmid 1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$  elde edilir.

**Not:** Fermat teoreminden şu sonucu kolayca çıkarırız: Eğer  $n$  bir asal sayıysa,  $n \mid 1^n + 1 - 1^n + \dots + (n-1)^n + 1$ . Ancak, bu ilişkiyi sağlayan bileşik bir sayı bilmiyoruz. G. Ginda, böyle bir bileşik sayı olmadığını öne sürdü, ancak bu 1'den küçük bileşik bir sayının var olmadığını henüz kanıtlayamadı.

<sup>11</sup>Dört durumu inceleyelim:

(a)  $n = 4k$  olsun, burada  $k$  pozitif bir tam sayıdır. Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+1} - 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 - 2 + 1 \equiv 1 \pmod{5},$$

$$b_n = 2^{8k+1} + 2^{4k+1} + 1 \equiv 2 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}.$$

( $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$  olduğundan,  $2^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$ 'tir.)

(b)  $n = 4k + 1$  olsun,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+3} - 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 - 4 + 1 \equiv 0 \pmod{5},$$

$$b_n = 2^{8k+3} + 2^{4k+2} + 1 \equiv 8 + 4 + 1 \equiv 3 \pmod{5}.$$

(c)  $n = 4k + 2$  olsun,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+5} - 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 - 8 + 1 \equiv 0 \pmod{5},$$

$$b_n = 2^{8k+5} + 2^{4k+3} + 1 \equiv 2 + 8 + 1 \equiv 1 \pmod{5}.$$

(d)  $n = 4k + 3$  olsun,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Bu durumda,

$$a_n = 2^{8k+7} - 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 - 1 + 1 \equiv 3 \pmod{5},$$

$$b_n = 2^{8k+7} + 2^{4k+4} + 1 \equiv 8 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Sonuç olarak,  $a_n$  sayıları yalnızca  $n \equiv 1$  veya  $2 \pmod{4}$  olduğunda 5'e bölünürken,  $b_n$  sayıları yalnızca  $n \equiv 0$  veya  $3 \pmod{4}$  olduğunda 5'e bölünür. Böylece, yalnızca  $a_n$  veya  $b_n$  sayılarından biri 5'e bölünür.

12. Her  $n$  pozitif tam sayısı için

$$x + 1, x^x + 1, x^{x^x} + 1, \dots$$

sonsuz dizisinin her bir terimi  $n$ 'ye bölünecek şekilde bir  $x$  pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.<sup>12</sup>

13. Her  $x$  çift pozitif tam sayısı için

$$x^x + 1, x^{x^x} + 1, x^{x^{x^x}} + 1, \dots$$

dizisinin terimlerinden hiçbirinin  $n$ 'ye bölünmeyecek şekilde sonsuz sayıda  $n$  tek pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.<sup>13</sup>

14. Her  $n$  pozitif tam sayısı için  $(n + 1)^n - 1$  sayısının  $n^2$ 'ye bölündüğünü kanıtlayınız.<sup>14</sup>

15. Her  $n$  pozitif tam sayısı için  $2^{(2^n-1)n} - 1$  sayısının  $(2^n - 1)^2$ 'ye bölündüğünü kanıtlayınız.<sup>15</sup>

---

<sup>12</sup> $x = 2n - 1$  seçmek yeterlidir. Böylece  $x, x^x, x^{x^x}, \dots$  sayılarının her biri tek olur ve dolayısıyla  $2n = x + 1$ , sonsuz dizinin her bir terimi olan  $x + 1, x^x + 1, x^{x^x} + 1, \dots$  sayılarının bir bölenidir.

<sup>13</sup>Örneğin,  $4k + 3$  biçimindeki tüm asal sayılar  $p$ . Aslında,  $x$  çift olduğunda, dizideki  $x, x^x, x^{x^x}, \dots$  terimlerinin her biri çifttir. Eğer dizideki  $x^x + 1, x^{x^x} + 1, x^{x^{x^x}} + 1, \dots$  terimlerinden herhangi biri  $p$ 'ye tam bölünseydi, pozitif bir tam sayı  $m$  için  $p \mid x^m + 1$  ilişkisine sahip olurduk, dolayısıyla  $(x^m)^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . Ancak,  $-1, 4k + 3$  biçimindeki asal bir modül için bir karekök kalamaz.

<sup>14</sup>Binom açılımından

$$(1 + n)^n = 1 + \binom{n}{1}n + \binom{n}{2}n^2 + \dots + \binom{n}{n}n^n$$

$n > 1$  için (bu,  $1^2 \mid 2^2 - 1$  durumu göz önüne alındığında varsayılabilir), üçüncü terimden itibaren tüm terimler  $n$ 'yi en az 2 üssünde içerir. İkinci terim  $\binom{n}{1}n = n^2$ 'ye eşittir. Bu nedenle,  $n^2 \mid ((1 + n)^n - 1)$  ve bu kanıtlanması gereken şeydir.

<sup>15</sup>Problem 14'e göre, pozitif tam sayılar  $m$  için

$$m^2 \mid ((m + 1)^m - 1)$$

ilişkisini elde ederiz.  $m = 2^n - 1$  için,  $(m + 1)^m = 2^{(2^n-1)}$  olduğundan, şu ilişkiyi elde ederiz:

$$(2^n - 1)^2 \mid (2^{(2^n-1)n} - 1),$$

ve bu, kanıtlanması gereken şeydir.

16.  $2^n + 1$  sayısı  $n$ 'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam  $n$  sayısı bulunduğunu kanıtlayınız. Bu koşulu sağlayan tüm asal sayıları bulunuz.<sup>16</sup>

17. Her  $a > 1$  tam sayısı için  $a^n + 1$  sayısının  $n$ 'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam  $n$  sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.<sup>17</sup>

<sup>16</sup> $3 \mid 2^3 + 1$  ve pozitif bir tam sayı  $m$  için  $3^m \mid 2^{3^m} + 1$  olduğunu varsayalım. O zaman  $2^{3^{m+1}} = (3^m k - 1)^3 = 3^m k^3 - 3^m k^2 + 3^m k - 1 = 3^m t - 1$ , burada  $t$  pozitif bir tam sayıdır. Böylece  $3^{m+1} \mid 2^{3^{m+1}} + 1$  ve tümevarım ile  $3^m \mid 2^{3^m} + 1$ 'i elde ederiz,  $m = 1, 2, \dots$ . Ancak,  $n \mid 2^n + 1$  ilişkisini sağlayan başka pozitif tam sayılar da vardır. Aslında, pozitif bir tam sayı  $n$  için  $n \mid 2^n + 1$  ise, aynı zamanda  $2^n + 1 \mid 2^{2^n+1} + 1$  olur. Gerçekten de  $2^n + 1 = kn$ , burada  $k$  bir tam sayıdır (açıkça, tektir), o zaman  $2^n + 1 \mid 2^{kn} + 1 = 2^{2^n+1} + 1$  olur. Böylece  $9 \mid 2^3 + 1$  ifadesi  $513 \mid 2^{513} + 1$  sonucunu verir.

$n$ 'nin asal olduğunu ve  $n \mid 2^n + 1$  olduğunu varsayalım. Fermat'ın teoremiyle,  $n \mid 2^n - 2$  elde ederiz, bu da  $n \mid 3$  sonucunu verir.  $n$  asal olduğuna göre,  $n = 3$  elde ederiz. Gerçekten,  $3 \mid 2^3 + 1$  olur. Böylece,  $n \mid 2^n + 1$  ilişkisini sağlayan tek asal sayı  $n = 3$  olur.

<sup>17</sup>Öncelikle O. Reutter'e ait aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız (bkz. [17]):

*Eğer  $a + 1$ , tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman  $n \mid a^n + 1$  ilişkisi pozitif tam sayılarla sonsuz çözümü vardır.*

Eğer  $a + 1$ , tam sayı üs ile bir 2 kuvveti değilse, o zaman  $p > 2$  olan bir asal bölüneni vardır. Bu durumda,  $p \mid a + 1$  olur.

**Lemma.** Eğer  $k \geq 0$  bir tam sayı ve  $p \mid a^k + 1$  ise, o zaman  $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$ .

**Lemmanın İspatı.**  $k \geq 0$  olan bir tam sayı için  $p^k \mid a^k + 1$  olduğunu varsayalım.  $a^k = b$  yazalım, bu durumda  $p^k \mid b + 1$  elde ederiz, dolayısıyla  $b = -1 \pmod{p^{k+1}}$  olur.

$p$  tek asal olduğundan,  $a^{p^{k+1}} + 1 = b^{p+1} = (b + 1)(b^{p-1} - b^{p-2} + \dots - b + 1)$  ifadesini elde ederiz.

Ve (çünkü  $b = -1 \pmod{p^{k+1}}$ ) bu da  $b^p = 1 \pmod{p^{k+1}}$  anlamına gelir)  $b^2 = 1 \pmod{p}$  ve  $b^{2^i} = 1 \pmod{p}$  elde ederiz. Bu nedenle:

$$b^{p-1} - b^{p-2} + \dots - b + 1 = 0 \pmod{p},$$

bu da ikinci terimin  $p$ 'ye bölünebilir olduğunu gösterir. Dolayısıyla,  $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$  elde ederiz ve bu ispatlanması gereken şeydir.

Lemma,  $p \mid a + 1$  olduğunda,  $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$  ve  $p^{k+1} \mid a^{p^{k+1}} + 1$  için  $k = 1, 2, \dots$  ifadesiyle tümevarım sağlar. Bu da  $n \mid a^n + 1$  ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı  $n$  olduğunu ve O. Reutter'in teoremini ispatladığımızı gösterir.

Reutter teoreminin koşullarını sağlayan pozitif tam sayılar için,  $a$ 'nın tek ve  $a > 1$  olduğunu varsaymak yeterlidir. Bu durumda,  $a^2 + 1$  ve  $a^2$  ifadesi  $8k + 1$  formundadır. Dolayısıyla,  $a^2 + 1 = 8k + 2 = 2(4k + 1)$  tek bir çift sayıdır. Şu lemayı ispatlayacağız:

**Lemma.** Eğer  $a$  tek ise, o zaman  $a$  ve  $a^2 + 1$  çift tek sayılar olup,  $s \mid a + 1$  ise, pozitif bir tam sayı  $s_1 > s$  vardır ki  $s_1$  ve  $a^{s_1} + 1$  de çift tek sayılardır ve  $s_1 \mid a^{s_1} + 1$ .

**İspat.**  $a^2 + 1$  ve  $a^{s_1} + 1$  çift tek sayılar olduğundan,  $a + 1 = ms$  elde ederiz, burada  $m$  tektir. Böylece  $a^s + 1 = a^{s_1} + 1 = a^{s_1} + 1$ 'dir ve  $a^{s_1} + 1$  çift bir çift tek sayıdır.

$s_1 \mid a + 1$  olduğunda,  $s_1 \mid a^{s_1} + 1$  ve  $s_1 \mid a^{s_1} + 1$  elde ederiz. Bu durumda,  $a > 1$  olduğundan,  $s_1 > s$  olur. Böylece lema ispatlanmış olur.

$a$  tek olduğundan,  $s = 2$  diyebiliriz, bu da lemanın koşullarını sağlar. Böylece,  $n \mid a^n + 1$  ilişkisini sağlayan sonsuz pozitif tam sayı  $n$  olduğunu gösteririz ve bu ispatlanması gereken şeydir (bkz. [35]).



18.  $2^n + 2$  sayısı  $n$ 'ye bölünecek şekilde sonsuz sayıda pozitif tam  $n$  sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.<sup>18</sup>

19.  $a^{10} + 1$  sayısının 10'a bölünmesini sağlayan tüm pozitif tam  $a$  sayılarını bulunuz.<sup>19</sup>

---

<sup>18</sup> $n$  çift ise ve  $n \mid 2^n + 2$  ve  $n \mid n - 1 \mid 2^{n-1} + 1$  ise (örneğin  $n = 2$  için bu doğrudur), o zaman  $n_1 = 2^n + 2$  sayısı için  $n_1 \mid 2^{n_1} + 2$  ve  $n_1 \mid n_1 - 1 \mid 2^{n_1-1} + 1$  elde ederiz. Aslında,  $n \mid 2^n + 2$  ve  $n$  çift olduğunda,  $2^n + 2 = nk$  elde edilir, burada  $k$  tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{2^n+2} + 1 = 2^{2^{2^n+2}} + 2$$

$n_1 = 2^n + 2$  için ise:

$$n_1 - 1 = 2^n + 1 \mid 2^{2^n+1} + 1$$

Sonra,  $n - 1 \mid 2^{n-1} + 1$  ifadesini elde ederiz ki bu da  $2^n + 1 = 2^{n-1}m + 1$ 'i verir, burada  $m$  tektir. Dolayısıyla:

$$2^n + 1 \mid 2^{a-1}m + 1 = 2^{2^n+1}$$

elde ederiz, bu da:

$$2^n + 2 \mid 2^{2^{2^n+2}+2}, \quad \text{ve} \quad n_1 \mid 2^{n_1+2}$$

Bu koşulları sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı  $n$  vardır.

$n_1 = 2^n + 2$  olduğundan, koşullarımızı sağlayan sonsuz sayıda çift tam sayı vardır.  $n = 2$ 'den başlayarak, ardışık sayılar 2, 6, 66,  $2^{66} + 2$ , ... Ancak, C. Bindschedler bu yöntemin  $n \mid 2^n + 2$  ilişkisini sağlayan tüm sayıları vermediğini fark etti; örneğin 946 sayısı  $2^{946} + 2$  ilişkisini sağlamaz. Bu problemi tartışan C. Bindschedler tarafından verilen çözümü, *Elemente der Mathematik* dergisinin 18. sayısındaki 430 numaralı problemimde görebilirsiniz (1963), sayfa 90.

<sup>19</sup>Eğer  $a$  bir pozitif tam sayıysa ve  $r$  sayısı  $a$  sayısının 10'a bölünmesinden kalan ise,  $a^{10} + 1$  ifadesi ancak ve ancak  $r^{10} + 1$  ifadesi 10'a bölünebiliyorsa 10'a bölünür. Bu nedenle, sadece  $r = 0, 1, 2, \dots, 9$  sayıları dikkate alınmalıdır ve bu sayılar için sadece  $3^{10} + 1$  ve  $7^{10} + 1$  ifadelerinin 10'a bölünebildiğini kolayca doğrularız. Dolayısıyla,  $a^{10} + 1$  ifadesi 10'a bölünebilen tüm  $a$  sayıları  $10k + 3$  ve  $10k + 7$  formundadır, burada  $k = 0, 1, 2, \dots$

20. Hiçbir  $n > 1$  tam sayısı için  $2^n - 1$  sayısının  $n$ 'ye bölünmediğini kanıtlayınız.<sup>20</sup>
- (a)  $2^n + 1$  sayısının  $n$ 'ye bölünmesini sağlayan sonsuz tane  $n$  pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz.<sup>21</sup>
21.  $3^n + 1$  sayısının  $n$ 'ye bölünmesini sağlayan tüm  $n$  tek pozitif tam sayılarını bulunuz.<sup>22</sup>
22.  $n \cdot 2^n + 1$  sayısının 3'e bölünmesini sağlayan tüm  $n$  pozitif tam sayılarını bulunuz.<sup>23</sup>

<sup>20</sup> $n > 1$  pozitif tamsayılarının olduğunu ve  $n$ 'in en küçüğü olduğunu varsayalım. Euler teoremine göre  $n \mid (2^n - 1)$ . Ancak, pozitif tamsayılar  $a$  ve  $b$  için  $2^a - 1$  ve  $2^b - 1$  sayıların en büyük ortak böleni  $2^d - 1$ 'dir, burada  $d = (a, b)$ 'dir.

$a = n$  ve  $b = \varphi(n)$  için  $d = (n, \varphi(n))$ 'dir, dolayısıyla  $n \mid (2^d - 1)$ 'dir. Ancak,  $n > 1$  olduğundan  $2^d - 1 > 1$  elde ederiz, bu da  $d > 1$  ve  $1 < d \leq \varphi(n) < n$  anlamına gelir ve  $d \mid n \mid (2^d - 1)$  ifadesi  $n$ 'in tanımına aykırıdır.

<sup>21</sup>Örneğin,  $n = 3^k$  biçimindeki tüm sayılar için ( $k = 1, 2, \dots$ ). Bu durumu matematiksel tümevarım yoluyla ispatlayacağız. Elimizde  $3 \mid 2^{3^k} + 1$  var. Eğer herhangi bir pozitif tam  $k$  için  $3 \mid 2^{3^k} + 1$ , o zaman, aşağıdaki özdeşlikten hareketle

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (2^{3^k} + 1)(2^{3^k} - 2^{3^k} + 1)$$

ve şu gözlemden yola çıkarak:

$$2^{3^k} - 2^{3^k} + 2 = 2^{3^k} + 2 - (2^{3^k} + 1), \quad \text{ve} \quad 3 \mid 2^{3^k} + 2$$

(çünkü  $4^3$  bölündüğünde kalan 1 verir), formülün ikinci terimi  $2^{3^{k+1}} + 1$ 'in 3 ile bölünebilir olduğunu gösterir, bu da  $3 \mid 2^{3^{k+1}} + 1$  anlamına gelir.

<sup>22</sup> $n = 1$  olan tek sayıdır. Varsayalım ki,  $n > 1$  olan bir tek sayı vardır ve  $n \mid 3^n + 1$ . Bu durumda,  $n \mid 9n - 1$ .  $n, n \mid 9^{\varphi(n)} - 1$  ile pozitif bir tam sayı olsun.  $d = (\varphi(n), n)$  olarak tanımlandığında,  $n \mid 9^d - 1$  elde edilir. Ancak,  $d > 1$  olduğunda,  $n \mid 8$  elde edilir ki,  $n$  tek olduğu için bu mümkün değildir. Sonuç olarak  $1 < d \leq \varphi(n) < n$  ve  $d \mid n$ , bu nedenle  $n > 1$  koşulunu sağlayan tek bir sayı yoktur.

<sup>23</sup>Açıkça,  $n$  sayısı 3'e bölünemez. Bu nedenle,  $n$  sayısı aşağıdaki formlardan birinde olmalıdır:  $6k + 1, 6k + 2, 6k + 4$  veya  $6k + 5$ , burada  $k = 0, 1, 2, \dots$

Eğer  $n = 6k + 1$  ise,  $2^6 \equiv 1 \pmod{3}$  olduğundan,

$$n2^n + 1 = (2^6)2 + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Bu durumda  $3 \mid n2^n + 1$  olur.

Eğer  $n = 6k + 2$  ise,

$$n2^n + 1 = 2(2^6)2 + 1 \equiv 8 + 1 \equiv 0 \pmod{3},$$

yani yine  $3 \mid n2^n + 1$ .

Eğer  $n = 6k + 4$  ise,

$$n2^n + 1 \equiv 4(2^6)2^4 + 1 \equiv 2^5 + 1 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Son olarak,  $n = 6k + 5$  ise,

$$n2^n + 1 = 5(2^6)2^5 + 1 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Bu durumda,  $n2^n + 1$  ifadesi ancak ve ancak  $n, 6k + 1$  veya  $6k + 2$  formunda olduğunda 3'e bölünebilir. Burada  $k = 0, 1, 2, \dots$

23. Her tek  $p$  asal sayısı için  $n \cdot 2^n + 1$  sayısının  $p$ 'ye bölünmesini sağlayan sonsuz sayıda  $n$  pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.<sup>24</sup>
24. Her pozitif tam  $n$  sayısı için,  $y^y$  sayısı  $x^x$ 'e bölünecek, fakat  $y$  sayısı  $x^x$ 'e bölünmeyecek şekilde  $x > n$  ve  $y$  pozitif tam sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.<sup>25</sup>
25. Her  $n$  tek pozitif tam sayısı için  $2^n - 1$  sayısının  $n$ 'ye bölündüğünü kanıtlayınız.<sup>26</sup>
26.  $2^n - 3$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) sonsuz dizisinin 5'e bölünen sonsuz sayıda terimi olduğunu; 13'e bölünen sonsuz tane terimin bulunduğunu, fakat 65'e bölünen hiçbir terimin bulunmadığını kanıtlayınız.<sup>27</sup>

<sup>24</sup>Eğer  $p$  tek bir asal sayıysa ve  $n = (p-1)(kp+1)$ , burada  $k = 0, 1, 2, \dots$ , o zaman  $n \equiv -1 \pmod{p}$  ve  $p-1 \mid n$ . Fermat'ın küçük teoremi gereğince,  $2^n \equiv 1 \pmod{p}$  olur, dolayısıyla  $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ .

**Not:** Bu problemde,  $n2^n + 1$  formunda sonsuz sayıda bileşik sayı olduğu sonucu çıkarılabilir, burada  $n$  pozitif bir tam sayıdır. Bu formdaki sayılar Cullen sayıları olarak bilinir.  $1 < n < 141$  aralığında bu formdaki tüm sayılar bileşik olduğu ispatlanmıştır, ancak  $n = 141$  için  $n2^n + 1$  asal bir sayıdır. Sonsuz sayıda asal Cullen sayısı olup olmadığı bilinmemektedir.

<sup>25</sup> $n$  verilen bir pozitif tam sayı olsun ve  $k > 1$  olmak üzere  $2^k > n$  olacak şekilde pozitif bir tam sayı olsun.  $p$ ,  $2^k - 1$ 'den büyük bir asal sayı olsun.  $k > 1$  olduğu için,  $x = 2^k$ ,  $y = 2p$  olarak alalım. Buradan  $x \nmid y$  ve  $x^x \mid y^y$  olur, çünkü  $x = 2^{2^k}$  ve  $y^y = (2p)^{2p}$ , burada  $2p > 2^k$ .

Örneğin,  $4 \nmid 10$ , fakat  $4^4 \mid 10^{10}$ ,  $8 \nmid 12$ , fakat  $8^8 \mid 12^{12}$ ,  $9 \nmid 21$ , fakat  $9^9 \mid 21^{21}$ .

<sup>26</sup>Pozitif tam sayılar için,  $\varphi(n) \mid n!$  olduğu açıktır. Aslında,  $n = 1$  için bu doğrudur; eğer  $n > 1$  ise ve  $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_k^{a_k}$  asal çarpanlarına ayrılmışsa, burada  $q_1 < q_2 < \dots < q_k$  olmak üzere, o zaman

$$\varphi(n) = q_1^{a_1-1} q_2^{a_2-1} \dots q_k^{a_k-1} (q_1 - 1)(q_2 - 1) \dots (q_k - 1)$$

ve  $q_1^{a_1-1} q_2^{a_2-1} \dots q_k^{a_k-1} \mid n$ ,  $q_1 - 1 < q_2 - 1 < \dots < q_k - 1$  olduğu için  $q_k - 1 < n$  ve  $q_1 - 1 < q_2 - 1 < \dots < q_k - 1$ ,  $n$ 'den küçük farklı pozitif tam sayılardır. Böylece  $(q_1 - 1)(q_2 - 1) \dots (q_k - 1)(n - 1)! \mid n!$  elde edilir ve buradan  $\varphi(n)(n - 1)! \mid n!$  olduğu sonucu çıkar.

Eğer  $n$  tek ise, (Euler teoremine göre)  $n \mid 2^{\varphi(n)} - 1 \mid 2^{n!} - 1$ , dolayısıyla  $n \mid 2^{n!} - 1$ , bu da kanıtlanması gereken şeydi.

<sup>27</sup>Fermat'ın teoremine göre,  $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$  ve  $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ .

$2^3 \equiv 3 \pmod{5}$  ve  $2^4 \equiv 3 \pmod{13}$  olduğu için,  $24k + 3 \equiv 3 \pmod{5}$  ve  $2^{12k+4} \equiv 3 \pmod{13}$  elde ederiz, burada  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Dolayısıyla,  $5 \mid 2^{4k+3} - 3$  ve  $13 \mid 2^{12k+4} - 3$ , burada  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Bir sonraki adımda,  $2^6 \equiv 1 \pmod{65}$  olduğunu ve bu nedenle  $2^{12} \equiv 1 \pmod{65}$  olduğunu görürüz. Böylece  $2^n - 3 \equiv 2^n - 3 \pmod{65}$ , bu da  $2^n - 3$  dizisinin ( $n = 2, 3, \dots$ ) 12 periyotlu olduğunu gösterir.  $2^n - 3$  sayılarının hiçbirisi ( $n = 2, 3, \dots$ ) 65'e bölünmüyorsa, bunu göstermek için  $n = 2, 3, \dots, 13$  için  $2^n - 3$  sayılarının 65'e bölünüp bölünmediğini kontrol etmek yeterlidir. 65'e bölündüğünde kalanlar sırasıyla 1, 5, 13, 29, 61, 60, 58, 54, 46, 30, 63, 64 olup, bunların hiçbirisi sıfır değildir.

27.  $2^n - 2$  ve  $3^n - 3$  sayıları  $n$ 'ye bölünmesini sağlayan iki en küçük bileşik  $n$  sayısını bulunuz.
28.  $2^n - 2$  sayısının  $n$ 'ye bölünmesini,  $3^n - 3$  sayısının da  $n$ 'ye bölünmesini sağlayan en küçük  $n$  pozitif tam sayısını bulunuz.
29.  $2^n - 2$  sayısının  $n$ 'ye bölünmemesini,  $3^n - 3$  sayısının da  $n$ 'ye bölünmesini sağlayan en küçük  $n$  pozitif tam sayısını bulunuz.
30. Her  $a$  pozitif tam sayısı için  $a^n - a$  sayısının  $n$ 'e bölünecek şekilde bir  $n$  bileşik sayısı bulunuz.
31.  $a, b, c$  tam sayılar olmak üzere  $a^3 + b^3 + c^3$  sayısı 9'a bölünüyorsa,  $a, b, c$  sayılarından en az birinin 3'e bölündüğünü kanıtlayınız.
32.  $a_k, k = 1, 2, 3, 4, 5$  tam sayılar olmak üzere

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 + a_5^3$$

sayısı 9'a bölünüyorsa,

$$3 \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5)$$

olduğunu kanıtlayınız.

33.  $(x, y) = 1$  ve  $x^2 + y^2 = z^4$  olmak üzere  $x, y, z$  pozitif tam sayılarsa,  $7 \mid x$  ya da  $7 \mid y$  olduğunu kanıtlayınız.  $(x, y) = 1$  koşulunun gerekli olduğunu gösteriniz.
34.  $a, b$  tam sayıları için  $7 \mid a^2 + b^2$  ise  $7 \mid a$  veya  $7 \mid b$  olduğunu kanıtlayınız.
35. Aşağıdaki koşulları sağlayan sonsuz sayıda  $x, y$  pozitif tam sayı çiftinin bulunduğunu kanıtlayınız ve böyle çiftlerden en küçüğünü bulunuz:

$$x(x+1) \mid y(y+1), \quad x+y, \quad x+1 \mid y, \quad x \cdot y + 1, \quad x+1 \mid y+1$$

36. Her  $s \leq 25$  pozitif tam sayısı ve  $s = 100$  için basamakları toplamı  $s$ 'ye eşit olan ve  $s$ 'ye bölünen en küçük  $n$  pozitif tam sayısını bulunuz.
37. Her  $s$  pozitif tam sayısı için,  $s$ 'ye bölünen ve basamakları toplamı  $s$ 'ye eşit olan bir  $n$  pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.
38. Aşağıdakileri kanıtlayınız:
- (a) Her pozitif tam sayının  $4k+1$  şeklindeki bölenlerinin sayısı  $4k+3$  şeklindeki bölenlerinin sayısından az değildir.
  - (b)  $4k+1$  şeklindeki bölenlerinin sayısı  $4k+3$  şeklindeki bölenlerinin sayısına eşit olan sonsuz tane pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
  - (c)  $4k+1$  şeklindeki bölenlerinin sayısı  $4k+3$  şeklindeki bölenlerinin sayısından fazla olan sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunur.

39.  $a, b, c$  herhangi tam sayılar ve  $n$  de 3'ten büyük olan bir tam sayı ise,  $k = a, k + b, k + c$  sayıların hiçbirinin  $n$ 'ye bölünmeyecek şekilde bir  $k$  tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
40.  $F_n = 2^{2^n} + 1$  için  $F_n \mid 2^{F_n} - 2$  olduğunu kanıtlayınız ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

## 2 Aralarında Asal Sayılar

41. Her  $k$  tam sayısı için  $2k + 1$  ve  $9k + 4$  sayılarının aralarında asal olduğunu kanıtlayınız.  $2k - 1$  ve  $9k + 4$  sayılarının OBEB'ini  $k$ 'ya bağlı bir fonksiyon olarak bulunuz.
42.  $\frac{n(n+1)}{2}$  şeklinde olan her ikilisi aralarında asal olan sonsuz tane tam sayı bulunduğunu gösteriniz.
43.  $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$  şeklinde olan her ikilisi aralarında asal olan sonsuz tane tam sayı bulunduğunu gösteriniz.
44.  $a$  ve  $b$  birinden farklı tam sayılar ise,  $a + n$  ve  $b + n$  sayıları aralarında asal olacak şekilde sonsuz sayıda  $n$  tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.
45.  $a, b, c$  birbirinden farklı tam sayılarsa,  $a + n, b + n, c + n$  sayıları ikişer ikişer aralarında asal olacak şekilde sonsuz sayıda  $n$  pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
46.  $a + n, b + n, c + n$  ve  $d + n$  sayılarının ikişer ikişer aralarında asal olmamasını sağlayan hiçbir  $n$  pozitif tam sayısı olmayacak şekilde birbirinden farklı  $a, b, c, d$  pozitif tam sayıları bulunuz.
47. 6'dan büyük olan her tam sayının 1'den büyük ve aralarında asal olan iki tam sayının toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.
48. 17'den büyük olan her tam sayının ikişer ikişer aralarında asal olan 1'den büyük 3 tam sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini ve 17'nin de bu şekilde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.
49. Her  $m$  pozitif tam sayısı için hem tek  $2k$  çift sayısının  $m$  ile aralarında asal olan iki pozitif tam sayının farkı şeklinde yazılabileceğini kanıtlayınız.
50. Fibonacci dizisinin, tüm terimleri ikişer ikişer aralarında asal olan bir alt dizisinin bulunduğunu kanıtlayınız.
51. Her  $n = 1, 2, \dots$  için  $\text{OBEB}(n, 2^n + 1) = 1$  olduğunu gösteriniz.
  - 51a.  $\text{OBEB}(n, 2^n - 1) > 1$  olmasını sağlayan sonsuz tane  $n$  pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız ve bunlardan en küçüğünü bulunuz.

### 3 Aritmetik Diziler

52. Pozitif tam sayılardan oluşan ve tüm terimleri ikişer ikişer aralarında asal olan ve terim sayısı yeterince önceden verilen herhangi bir  $n$  sayısından büyük olan bir aritmetik dizi bulunduğunu kanıtlayınız.
53. Her  $k$  pozitif tam sayısı için, pozitif tam bölenlerinin sayısı  $k$ 'yı bölen tüm  $n$  sayıları kümesinin bir sonsuz aritmetik dizi içerdiğini kanıtlayınız.
54.  $x(x+1), y(y+1), z(z+1)$  sayıları artan aritmetik dizi oluşturacak şekilde sonsuz sayıda  $x, y, z$  pozitif tam sayı üçlüsünün bulunduğunu kanıtlayınız.
55. Kenarları bir aritmetik dizi oluşturma tam sayılar olan tüm dik üçgenleri bulunuz.
56. Pozitif tam sayılardan oluşan, hiçbir üçgen  $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$  sayısını içermeyen ve farkı en küçük olan artan bir aritmetik dizi bulunuz.
57.  $a$  ve  $b$  pozitif tam sayılar olmak üzere  $ak + b$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) aritmetik dizisinin sonsuz tane tam kare içermesi için gerek ve yeterli koşulu bulunuz.
58. Birbirinden farklı pozitif tam sayılardan oluşan ve her terimi bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan ve terim sayısı önceden verilen  $n$  sayısından büyük olan bir aritmetik dizi bulunduğunu kanıtlayınız.
59. Birbirinden farklı pozitif tam sayılardan oluşan ve her terimi bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan sonsuz bir aritmetik dizi bulunmadığını kanıtlayınız.
60. Her biri bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvvetine eşit olan dört ardışık sayı bulunmadığını kanıtlayınız.
61. Pozitif tam sayılardan oluşan her artan aritmetik dizinin bileşik sayılardan oluşan, önceden verilen  $n$ 'den fazla sayıda ardışık teriminin bulunduğunu kanıtlayınız.
62.  $a$  ve  $b$  aralarında asal pozitif tam sayılarsa her  $m$  pozitif tam sayısı için  $ak + b$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) aritmetik dizisinin  $m$  ile aralarında asal olan sonsuz sayıda terimi bulunduğunu kanıtlayınız.
63. Her  $s$  pozitif tam sayısı için pozitif tam sayılardan oluşan her artan aritmetik dizide önceden verilen herhangi  $s$  tane rakamla başlayan terimlerinin bulunduğunu kanıtlayınız.
64. Fibonacci dizisinin üç teriminden oluşan tüm artan aritmetik dizileri bulunuz ve bu dizinin dört teriminden oluşan hiçbir artan aritmetik dizi bulunmadığını kanıtlayınız.

65. Tam sayılardan oluşan, Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermeyen ve farkı en az olan bir artan aritmetik dizi bulunuz.
66.  $a$  ve  $b$  aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere  $ak + b$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) şeklinde olan ve Fibonacci dizisinin hiçbir terimini içermeyen bir aritmetik dizi bulunuz.
67.  $a$  ve  $b$  aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere  $ak + b$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) şeklinde olan her aritmetik dizinin ikişer ikişer aralarında asal olan sonsuz sayıda teriminin bulunduğunu kanıtlayınız.
68.  $a$  ve  $b$  pozitif tam sayılar olmak üzere her  $ak + b$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) aritmetik dizisinde asal çarpanları aynı olan sonsuz tane terim bulunduğunu kanıtlayınız.
69.  $a$  ve  $b$  pozitif tam sayılar olmak üzere her  $ak + b$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) aritmetik dizisi ve her  $s$  pozitif tam sayısı için,  $s$  tane birbirinden farklı asal sayının çarpımına eşit olan sonsuz tane terim bulunduğunu kanıtlayınız.
70. Farkı 10 olan ve sadece asal sayılardan oluşan en az 3 terimli tüm aritmetik dizileri bulunuz.
71. Farkı 100 olan ve sadece asal sayılardan oluşan en az 3 terimli tüm aritmetik dizileri bulunuz.
72. Sadece asal sayılardan oluşan, 10 terimli ve son terimi en küçük olan artan bir aritmetik dizi bulunuz.
73. Pozitif tam sayılardan oluşan ve hiçbir terimi iki asal sayının ne toplamı, ne de farkı şeklinde gösterilemeyen artan bir sonsuz aritmetik dizi bulunuz.



## 4 Asal ve Bileşik Sayılar

74. Her çift  $n > 6$  tam sayısı için  $(n - p, n - q) = 1$  olacak şekilde  $p$  ve  $q$  asal sayılarının bulunduğunu kanıtlayınız.
75. Hem iki asal sayının toplamı hem de farkı şeklinde yazılabilen tüm asal sayıları bulunuz.
76.  $n$  ile  $n + 10$  arasında hiçbir asal sayı olmayacak şekilde üç en küçük  $n$  pozitif tam sayısını bulunuz.  $10m$  ile  $10(m + 1)$  arasında hiçbir asal sayı olmayacak şekilde üç en küçük  $m$  pozitif tam sayısını bulunuz.
77.  $4k + 1$  şeklinde olan her asal sayının, kenar uzunlukları tam sayılar olan bir dik üçgenin hipotenüzünün uzunluğuna eşit olduğunu kanıtlayınız.
78.  $p, q, r$  asal sayılar olmak üzere,  $p^2 + 1 = q^2 + r^2$  denkleminin tüm çözümünü bulunuz.
79.  $p, q, r, s, t$  asal sayılar olmak üzere  $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$  denkleminin çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
80.  $(p + 1) + q(q + 1) = r(r + 1)$  denkleminin tüm  $p, q, r$  asal çözümlerini bulunuz.
81.  $p(p + 1), q(q + 1), r(r + 1)$  sayılarının bir artan aritmetik dizi oluşturmasını sağlayan tüm  $p, q, r$  asal sayılarını bulunuz.
82.  $n + 1, n + 3, n + 7, n + 9, n + 13$  ve  $n + 15$  sayılarının her birinin asal olmasını sağlayan tüm  $n$  pozitif tam sayılarını bulunuz.
83. İki tam sayının dördüncü dereceden kuvvetinin toplamına eşit olan beş asal sayıyı bulunuz.
84. İkiz asal sayılar olmayan sonsuz sayıda ardışık asal sayılar çiftinin bulunduğunu kanıtlayınız.
85. Hiçbir ikiz asal sayıda bulunmayan sonsuz tane asal sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
86.  $n^2 - 1$  sayısının birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan en küçük beş  $n$  pozitif sayısını bulunuz.
87.  $n^2 + 1$  sayısının birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan en küçük beş  $n$  pozitif sayısını bulunuz.  $n^2 + 1$  sayısının birbirinden farklı üç tek sayının çarpımına eşit olmasını sağlayan bir  $n$  pozitif sayısı bulunuz.
88. 7'den büyük olan her ardışık üç sayının en az birinin en az iki birbirinden farklı asal böleninin bulunduğunu kanıtlayınız.

89.  $n, n+1, n+2$  sayılarından her biri birbirinden farklı iki asal sayının çarpımına eşit olacak şekilde beş en küçük pozitif tam sayıyı bulunuz. Bu özellikle sahip olan dört ardışık sayı dizisini bulunmadığını kanıtlayınız. Her birinin tam iki asal böleni bulunan dört ardışık pozitif tam sayıyı bulunuz.
90. Aşağıdaki teoremlerin birbirine denk olduğunu gösteriniz:
- (a)  $n$  ve  $n+1$  sayılarının her birinin sadece bir asal böleni olmasını sağlayan  $n$  pozitif tam sayıları sonlu sayıdadır.
- (b) Sadece sonlu sayıda Mersenne asal sayıları ve sonlu sayıda Fermat asal sayıları vardır.
91.  $n$  pozitif tam sayı olmak üzere milyonlarca büyük olmayan ve iki asal sayının çarpımına eşit olan tüm  $2^n - 1$  şeklinde olan sayıları bulunuz. Eğer  $n$  çift ise ya da  $n > 4$ 'ten büyükse,  $2^n - 1$  sayısının 1'den büyük en az üç asal sayının çarpımı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.
92. Problem 47'yi kullanarak,  $p_n, n$ . asal sayıyı göstermek üzere, her  $n \geq 3$  için  $p_{n+1} + p_{n+2} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$  eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız.
93.  $n$  pozitif tam sayısı için  $q_n$  ile,  $n$ 'nin böleni olmayan en küçük asal sayıyı gösterelim. 92. problemi kullanarak  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{n} = 0$  olduğunu kanıtlayınız.
94. Her  $n > 4$  tam sayısı için  $n$  ile  $2n$  arasında birbirinden farklı iki asal sayının çarpımına eşit olan en az bir tam sayının bulunduğunu ve her  $n > 15$  tam sayısı için  $n$  ile  $2n$  arasında, birbirinden farklı üç asal sayının çarpımına eşit olan en az bir sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
95. Her  $s$  pozitif tam sayısı için, yeterince büyük  $n$ 'ler için  $n$  ile  $2n$  arasında  $s$  tane birbirinden farklı asal sayının çarpımına eşit olan en az bir sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
96.  $1, 31, 331, 3331, \dots$  sonsuz dizisinde sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız ve bunlardan en küçüğünü bulunuz.
97.  $n^4 + (n+1)^4$  sayısının bileşik olmasını sağlayan en küçük  $n$  pozitif tam sayısını bulunuz.
98.  $10^n + 3$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) şeklinde olan sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
99.  $n > 1$  tam sayıları için  $\frac{2^{4n+2} + 1}{5}$  sayısının bileşik olduğunu kanıtlayınız.
100. Her  $m$  pozitif tam sayısı için  $2^n - 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) sonsuz dizisinin, bileşik sayılardan oluşan  $m$  ardışık teriminin bulunduğunu kanıtlayınız.
101. Bir basamağı değiştirilerek bir asal sayı elde edilemeyen bir pozitif tam sayı bulunduğunu gösteriniz.
102. Aşağıdaki teoremlerin birbirine denk olduğunu kanıtlayınız:
- (a) **T.** Her  $n > 1$  tam sayısı için  $n$  ile  $2n$  arasında en az bir asal sayı bulunur.

- (b) **T1.** Her  $n > 1$  tam sayısı için  $n!$  sayısının asal çarpanlarına ayrılışında üstü bir olan en az bir asal sayı bulunur.
103. Her  $n$  pozitif tam sayısı için  $n!$  sayısının asal çarpanlarına ayrımında kuvveti 1 olan en az iki asal sayı bulunur.
104. Her  $n$  pozitif tam sayısı için,  $p - 1$  ve  $p + 1$  sayılarının her birinin en az  $n$  tane pozitif tam böleni olacak şekilde bir  $p$  asal sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.
105.  $p - 1$  ve  $p + 1$  sayılarından her birinin en az 3 farklı asal böleni bulunacak şekilde en küçük  $p$  asal sayısını bulunuz.
106. Her  $n$  pozitif tam sayısı için,  $p - 1$ ,  $p + 1$  ve  $p + 1$  sayılarının her birinin en az  $n$  tane farklı asal böleni olacak şekilde sonsuz sayıda  $p$  asal sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
107. Her  $n$  ve  $s$  pozitif tam sayıları için, her biri terimlerinin en az  $n$  farklı asal böleni olacak ve bu asal sayılardan her birinin kuvveti en az  $s$  olacak şekilde istenilen uzunlukta ardışık sayılar dizisinin bulunduğunu kanıtlayınız.
108.  $n > 1$  tek sayısı için  $n$  ve  $n + 2$  sayılarının sayılarının asal olması için,  $(n - 1)!$  sayısının  $n$  ve  $n + 2$  sayılarıyla bölünmemesinin gerek ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.
109. Her  $m$  pozitif tam sayısı için basamakları toplamı 10'dan büyük olan bir asal sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
110. Her  $n$  pozitif tam sayısı için en az  $m$  basamağı 0 olan asal sayılar bulunduğunu kanıtlayınız.
111.  $p^4$  sayısının tüm pozitif tam bölenlerinin toplamı tam kare olacak şekilde olan tüm asal sayıları bulunuz.
112.  $2 \leq s \leq 10$  olmak üzere her  $s$  için pozitif tam bölenlerinin toplamı bir tam sayının  $s$ . dereceden kuvvetine eşit olan asal sayıları bulunuz.
113.  $(p - 1)! + 1 = p^m$  denkleminin,  $p > 5$  bir asal sayı ve  $m$  bir pozitif tam sayı olacak şekilde hiçbir çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
114. Bir  $n < q$  pozitif tam sayısı için  $q_n$ ,  $(n - 1)!$  sayısını bölecek şekilde sonsuz sayıda  $q$  asal sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
115. Her  $k \neq 1$  için,  $2^n + k$  sayısı bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda  $n$  pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
116. Tüm  $2^n + k$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) sayıları bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda  $k > 0$  tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
117. Her  $n = 1, 2, \dots$  sayısı için  $2^{2n+1} + 3$ ,  $2^{2n+1} + 7$ ,  $2^{2n+2} + 13$ ,  $2^{2n+1} + 19$  ve  $2^{2n+2} + 21$  sayılarının her birinin bileşik olduğunu kanıtlayınız.

118. Tüm  $k \cdot 2^n + 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) sayıları bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda  $k$  pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.
119. Her  $2^n + k$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) sayısı bileşik olacak şekilde sonsuz sayıda  $k$  tek sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
120.  $k$  sayısı 2'nin bir kuvveti ise, yeterince büyük  $n$  sayıları için tüm  $k \cdot 2^n + 1$  sayılarının bileşik olduğunu kanıtlayınız.
121. Her  $k \leq 10$  pozitif tam sayısı için  $2^n + k$  sayısının bileşik olmasını sağlayan en küçük  $n$  pozitif tam sayısını bulunuz.
122. Her  $k \cdot 2^n + 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) sayısının bileşik olmasını sağlayan tüm  $k \leq 10$  pozitif tam sayılarını bulunuz.
123. Her  $n > 1$  tam sayısı için  $\frac{2^{2n+1} + 2^n + 1}{3}$  sayısının bileşik olduğunu kanıtlayınız.
124.  $(2^n + 1)^2 + 2^n$  şeklinde olan sonsuz sayıda bileşik sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
125.  $1 < a \leq 100$  olmak üzere her  $a$  tam sayısı için  $a^{2^n} + 1$  sayısının bileşik olacak şekilde en az bir  $n \leq 6$  pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
126. Üç tane asal sayının toplamı şeklinde gösterilebilen fakat üçten az sayıda asal sayının toplamı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda tek sayı bulunduğunu kanıtlayınız.
127.  $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5$  eşitliklerini sağlayan ve katsayıları tam sayılar olan hiçbir  $f(x)$  polinomunun bulunmadığını ve her  $m > 1$  tam sayısı için,  $p_n = n$  asal sayılar dizisi türese ( $f(k) = p_n(n = 1, 2, \dots)$ ) olacak şekilde katsayıları rasyonel sayılar olan bir  $f(x)$  polinomunun bulunduğunu kanıtlayınız.
128. Her  $n$  pozitif tam sayısı için  $f(1) < f(2) < \dots < f(n)$  sayıları asal olacak şekilde katsayıları tam sayılar olan bir  $f(x)$  polinomu bulunduğunu kanıtlayınız.
129.  $x$  değişkeninin  $m$  farklı değerinde  $m$  farklı asal sayı veren ve katsayıları tam sayılar olan bir indirgenmez  $f(x)$  polinomu bulunuz.
130.  $f(x)$ , derecesi 0'dan büyük olan tam sayı katsayılı bir polinomsal, sonsuz sayıda  $p$  asal sayısı için  $f(x) = 0 \pmod{p}$  denkleminin çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
131.  $k + 1, k + 2, \dots, k + 10$  dizisi maksimum sayıda asal sayı içerecek şekilde tüm  $k \geq 0$  tam sayılarını bulunuz.
132.  $k + 1, k + 2, \dots, k + 100$  dizisi maksimum sayıda asal sayı içerecek şekilde tüm  $k \geq 0$  tam sayılarını bulunuz.
133. 25 tane asal sayı içeren tüm 100 ardışık sayıdan oluşan dizileri bulunuz.
134. 8 tane asal sayı içeren tüm 21 ardışık sayıdan oluşan dizileri bulunuz.

135.  $p, p + 2, p + 6, p + 8, p + 12, p + 14$  sayılarının her biri asal olacak şekilde tüm  $p$  asal sayılarını bulunuz.
136. Aşağıdaki koşulları sağlayan sonsuz sayıda bir birinden farklı  $m$  ve  $n$  pozitif tam sayı ikilisinin bulunduğunu kanıtlayınız:
- (a)  $m$  ve  $n$  sayılarının asal bölenleri aynıdır;
  - (b)  $m + 1$  ve  $n + 1$  sayılarının asal bölenleri aynıdır.

## 5 Diofant Denklemleri

137.  $3x^2 - 7y^2 + 1 = 0$  denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
138.  $2x^3 + xy - 7 = 0$  denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz ve pozitif rasyonel sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
139.  $(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1$  denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
140.  $x(x+1) = 4y(y+1)$  denkleminin pozitif tam sayı çözümünün bulunmadığını, fakat pozitif rasyonel sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
141.  $p$  bir asal sayı ve  $n$  de bir pozitif tam sayı ise,  $x(x+1) = p^n y(y+1)$  denkleminin pozitif tam sayılarla hiçbir çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
142. Verilen  $k$  tam sayısı için  $x^2 - 2y^2 = k$  denkleminin bir  $(x_0, y_0)$  tam sayı çözümü varsa,  $x^2 - 2y^2 = -k$  denkleminin bir tam sayı çözümünü bulunuz.
143. Her  $D$  tam sayısı için  $x^2 - Dy^2 = z^2$  denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
144.  $D$ , sıfırdan farklı herhangi tam sayı ise,  $x^2 - Dy^2 = z^2$  denkleminin,  $\text{OBEB}(x, y) = 1$  olacak şekilde çözümleri olan tam sayılarla sonsuz tane  $(x, y, z)$  çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
145.  $xy + x + y = 3z^2$  denkleminin pozitif tam sayılarla çözümlerinin bulunduğunu ve  $x \leq y$  koşulunu sağlayan sayılarla çözümlerinin sonlu olduğunu kanıtlayınız.
146.  $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$  denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
147.  $y^2 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1$  denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
148.  $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$  denkleminin tüm rasyonel sayı çözümlerini bulunuz.
149.  $4xy - x - y = z^2$  denkleminin pozitif tam sayı çözümlerinin bulunmadığını ve negatif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
150.  $m$  pozitif tam sayı olmak üzere  $D = m^2 + 1$  ise,  $x^2 + Dy^2 = 1$  denkleminin pozitif tam sayılarla sonsuz tane çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
151.  $y^2 = x^3 + (x+4)^2$  denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

152. Her  $m$  pozitif tam sayısı için  $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m$  denkleminin,  $x, y, z$  aralarında asal olmak üzere tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
153.  $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 1$  denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
154.  $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 2$  denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
155.  $x^2 + y^2 + z = 3$  denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
156.  $m = 1$  ve  $m = 2$  için  $x^3 + y^3 + z^3 = mxyz$  denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız ve  $m = 3$  için tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
157. Aşağıdaki  $(T_1)$  ve  $(T_2)$  teoremlerinin denk olduğunu kanıtlayınız:
- $(T_1) : \frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$  denkleminin pozitif tam sayılarla çözümü yoktur.
  - $(T_2) : u^3 + v^3 = w^3$  denkleminin pozitif tam sayılarla çözümü yoktur.
158.  $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = 1$  denkleminin pozitif tam sayılarla çözümünün bulunduğunu, fakat sonsuz sayıda tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
159.  $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = m$  denkleminin,  $m = 2$  ve  $m = 3$  için pozitif tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız ve  $m = 4$  için tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
160.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1$  denkleminin,  $x \leq y \leq z \leq t$  olmak üzere tüm pozitif tam çözümlerini bulunuz.
161. Her  $s$  pozitif tam sayısı için  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$  denkleminin sonlu sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
162. Her  $s \geq 2$  tam sayısı için  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$  denkleminin  $x_1 < x_2 < \dots < x_s$  eşitsizliklerini sağlayan bir pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız. Bu çözümlerin sayısını  $I_n$  ile gösterirsek,  $s = 3, 4, \dots$  için  $I_{s+1} > I_s$  olduğunu gösteriniz.
163.  $s, 2$ 'den farklı pozitif tam sayı ise,  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$  denkleminin üçgen sayıları ile (yani  $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$  şeklinde olan sayılar) çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
164.  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 1$  denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
165.  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_s} = 1$  denkleminin en az bir pozitif tam sayı çözümünün bulunmasını sağlayan tüm  $s$  pozitif tam sayılarını bulunuz.
166.  $1^2$  sayısının sonlu sayıda artan pozitif tam sayının karelerinin terslerinin toplamı şeklinde gösteriniz.
167. Her  $m$  pozitif tam sayısı ve tüm yeterince büyük  $s$  pozitif tam sayıları için  $\frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} + \dots + \frac{1}{x_s^m} = 1$  denkleminin en az bir pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

168. Her  $s$  pozitif tam sayısı için

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_s^2} = \frac{1}{x_{s+1}^2}$$

denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

169. Her  $s \geq 3$  pozitif tam sayısı için

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \cdots + \frac{1}{x_s^3} = \frac{1}{x_{s+1}^3}$$

denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

170.  $x + y + z = 3$  ve  $x^3 + y^3 + z^3 = 3$  denklemler sisteminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

171. Hangi  $n$  pozitif tam sayıları için  $3x + 5y = n$  denkleminin en az bir tane pozitif tam sayı çözümü bulunduğunu araştırın ve  $n$  sonsuzluğa gittiğinde bu çözüm sayısının da sonsuzluğa gittiğini kanıtlayınız.

172.  $n^x + n^y = n^z$  denkleminin tüm  $n, x, y, z$  pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.

173. Her  $(m, n)$  pozitif tam sayı ikilisi için tek bir  $x = n, x = m$  pozitif tam sayı çözümü olan,  $a, b, c$  tam sayılar olmak üzere bir  $ax + by = c$  denkleminin bulunduğunu kanıtlayınız.

174. Her  $m$  pozitif tam sayısı için tam  $m$  tane pozitif tam sayı çözümü olan,  $a, b, c$  tam sayılar olmak üzere bir  $ax + by = c$  denkleminin bulunduğunu kanıtlayınız.

175.  $m$  verilen bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = 0$$

denkleminin tam  $m$  tane pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

176.  $x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 = (x + 3)^3$  denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

177. Her  $n$  pozitif tam sayısı için

$$(x + 1)^3 + (x + 2)^3 + \cdots + (x + n)^3 = y^3$$

denkleminin tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.

178.  $(x + 1)^3 + (x + 2)^3 + (x + 3)^3 + (x + 4)^3 = (x + 5)^3$  denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

179.  $(x + 1)^3 + (x + 2)^3 + (x + 3)^3 + (x + 4)^3 = (x + 10)^3$  denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

180.  $y(y + 1) = x(x + 1)(x + 2)$  denkleminin iki tane pozitif tam sayı çözümünü bulunuz.

181.  $1 + x^2 + y^2 = z^2$  denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.



182.  $n, x, y, z, t$  pozitif tam sayılar olmak üzere  $nx^2 + ny^2 + nz^2 = nt$  denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.
183.  $x, y, z, t$  pozitif tam sayılar olmak üzere  $4x + 4y + 4z = 4t$  denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.
184.  $2^m - 3^n = 1$  denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
185.  $3^n - 2^m = 1$  denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
186.  $2x + 1 = y^2$  denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
187.  $2x + 1 = y^2$  denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz.
188.  $x^2 + 2y^2 = z^2, 2x^2 + y^2 = t^2$  denklemler sisteminin  $x, y, z, t$  pozitif tam sayılar olmak üzere çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
189.  $[2(3x+2y+1)+1]^2 - 2(4x+3y+2)^2 = (2x+1)^2 - 2y^2$  özdeşliğini kullanarak  $x^2 + (x+1)^2 = y^2$  denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı kökünün bulunmadığını kanıtlayınız.
190.  $[2(7y + 12x + 6)]^2 - 3[2(4y + 7x + 3) + 1]^2 = (2y)^2 - 3(2x + 1)^2$  özdeşliğini kullanarak  $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$  denkleminin sonsuz sayıda pozitif tam sayı kökünün bulunmadığını kanıtlayınız.
191.  $x^2 + 5y^2 = z^2$  ve  $5x^2 + y^2 = t^2$  denklemler sisteminin  $x, y, z, t$  pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
192. Problem 34'ü kullanarak  $x^2 + 6y^2 = z^2$  ve  $6x^2 + y^2 = t^2$  denklemler sisteminin  $x, y, z, t$  pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
- a.  $x^2 + 7y^2 = z^2$  ve  $7x^2 + y^2 = t^2$  denklemler sisteminin  $x, y, z, t$  pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
193. V.A. Lebesprogue teoremini kullanarak  $x^2 - y^3 = 7$  denkleminin  $x, y$  tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
194.  $c$  pozitif tam sayısı tekse,  $x^2 - y^3 = (2c)^3 - 1$  denkleminin  $x, y$  tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
195.  $k$  pozitif tam sayı ise,  $x^2 + 2k^2 + 1 = y^3$  denkleminin  $x, y$  pozitif tam sayılarıyla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
196.  $x \leq y, x \leq z \leq t$  olmak üzere  $x+y = zt$  ve  $z+t = xy$  denklemler sisteminin  $x, y, z, t$  pozitif tam sayılarıyla tüm çözümlerinin bulunması ile ilgili A. Moessner problemini çözünüz. Sistemin sonsuz sayıda  $x, y, z, t$  tam sayı çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
197. Her  $p$  pozitif tam sayıları için  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = z_n$  denkleminin  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pozitif tam sayılarıyla en az bir çözümünün bulunduğunu kanıtlayınız.
198. Verilen her  $a$  ve  $n$  pozitif tam sayıları için  $x^n - y^n = a$  denkleminin  $x, y$  pozitif tam sayı çözümlerinin belirlenmesi için yöntem bulunuz.

199. Elementer yöntemlerle, hem üçgen hem de beşgen (yani  $\frac{k(3k-1)}{2}$  şeklinde) olan sonsuz sayıda sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

## 6 Karışık Problemler

200. Tam sayı katsayılı bir  $f(x)$  polinomu için  $f(x) = 0$  denkleminin bir tam sayı çözümü varsa, her  $p$  asal sayısı için  $x \equiv 0 \pmod{p}$  denkleminin de çözümü vardır. Birinci dereceden  $ax + b = 0$  denklemini kullanarak bunun tersinin doğru olmadığını kanıtlayınız.
201.  $a$  ve  $b$  tam sayıları olmak üzere  $ax + b \equiv 0 \pmod{m}$  denkleminin her  $m$  pozitif tam sayısı için çözümü varsa,  $ax + b = 0$  denkleminin de tam sayı çözümünün bulunduğu kanıtlayınız.
202.  $6x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \pmod{m}$  denkleminin her  $m$  pozitif tam sayısı için çözümü bulunduğunu, fakat  $6x^2 + 5x + 1 = 0$  denkleminin tam sayı çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.
203. Her  $k$  tek ve  $n$  pozitif tam sayısı için  $2n^2 + 2 \mid k^{2n} - 1$  olduğunu kanıtlayınız.
204.  $k$  tam sayısı,  $x$  ve  $y$  tam sayılar olmak üzere  $k = x^2 - 2y^2$  şeklinde gösterilebiliyorsa, bu sayının sonsuz sayıda değişik yolla bu şekilde gösterilebileceğini kanıtlayınız.
205.  $k$  tam sayı olmak üzere  $8k + 3$  ve  $8k + 5$  şeklinde olan hiçbir sayının,  $x$  ve  $y$  tam sayı olmak üzere  $x^2 - 2y^2$  şeklinde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.
206.  $k$  tam sayı olmak üzere  $8k + 1$  şeklinde olan sayılardan sonsuz sayıda,  $x$  ve  $y$  tam sayı olmak üzere  $x^2 - 2y^2$  şeklinde gösterilebilenlerin ve sonsuz bu şekilde gösterilemeyenlerin bulunduğunu kanıtlayınız. Gösterilemeyenlerin en küçüğünü bulunuz.
207. Her mükemmel sayının son rakamının 6 veya 8 olduğunu kanıtlayınız.
208. N. Anning'in şu teoremini kanıtlayınız: rakamları herhangi bir  $g > 1$  tabanında yazılmış olan

$$\frac{101010101}{1100110011}$$

sayısının payında ve paydasında tam ortadaki 1 rakamının yerine herhangi tek sayıda 1 yazılırsa, kesrin değerinin değişmeyeceğini kanıtlayınız (örneğin,

$$\frac{1010110101}{1100110011} = \frac{1010111011}{110011110011} = \frac{1010111110101}{11001111110011} = \dots$$

).

209.  $2^n$  sayısının ondalık yayılımındaki rakamları toplamının  $n$ 'nin artması ile sonsuz arttığını kanıtlayınız.

210.  $k > 1$  bir tam sayı ve  $c$  de bir rakam ise  $2^n$ 'nin sağdan  $k$ . rakamı  $c$  olacak şekilde bir  $n$  pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
211.  $5^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) sayılarının son 4 rakamlarının periyodik dizi oluşturduğunu kanıtlayınız. Periyodu bulunuz ve saf periyot olup olmadığını tespit ediniz.
212. Her  $s$  için pozitif tam sayının ondalık yazılımının ilk  $s$  rakamının herhangi bir şekilde (?) olabileceğini kanıtlayınız.
213.  $n^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) sayılarının son rakamlarının periyodik dizi oluşturduğunu kanıtlayınız. Periyodu bulunuz ve saf periyot olup olmadığını tespit ediniz.
214. Her sonsuz ondalık kesirde, her  $n$  sayısı için uzunluğu  $n$  olan ve dizide sonsuz sayıda rastlanan bir rakamlar dizisi bulunduğunu kanıtlayınız.
215. Her  $k$  pozitif tam sayısı için  $32^k$  sayısını ardışık sayılardan oluşan  $3^k$  tane sayının toplamı şeklinde gösteriniz.
216. Bir  $s > 1$  tam sayısı verilmişse, her  $n \geq m_s$  için  $n$  ile  $2n$  arasında bir pozitif tam sayının  $s$ . dereceden kuvveti bulunacak şekilde bir  $m_s$  pozitif tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.  $s = 2$  ve  $s = 3$  için en küçük  $m_s$  sayılarını bulunuz.
217. Her  $n$  için, hiçbir bir pozitif tam sayının 1'den büyük dereceden kuvveti olmayan  $n$  ardışık pozitif tam sayının bulunduğunu kanıtlayınız.
218.  $u_1 = 1, u_2 = 3$  ve  $n = 1, 2, \dots$  için  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$  olarak tanımlanan  $(u_n)$  dizisinin  $n$ . terimi için  $n$ 'ye bağlı formül bulunuz.
219.  $u_1 = a, u_2 = b$  ve  $n = 1, 2, \dots$  için  $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$  olarak tanımlanan  $(u_n)$  dizisinin  $n$ . terimi için  $n$ 'ye bağlı formül bulunuz.
220.  $u_1 = a, u_2 = b$  ve  $n = 1, 2, \dots$  için  $u_{n+2} = -(u_n + 2u_{n+1})$  olarak tanımlanan  $(u_n)$  dizisinin  $n$ . terimi için  $n$ 'ye bağlı formül bulunuz.  $a = 1, b = -1$  ve  $a = 1, b = -2$  özel durumlarını inceleyiniz.
221.  $u_1 = a, u_2 = b$  ve  $n = 1, 2, \dots$  için  $u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}$  olarak tanımlanan  $(u_n)$  dizisinin  $n$ . terimi için  $n$ 'ye bağlı formül bulunuz.
222.  $n = 1, 2, \dots$  için  $a^{a^n} = a$  eşitliğini sağlayan tüm  $a \neq 0$  tam sayılarını bulunuz.
223. Hem toplamı hem de çarpımı tam kare olan tüm pozitif tam sayı ikililerini bulmak için bir yöntem veriniz.
224. İki ardışık pozitif tam sayının kareleri toplamına eşit olan tüm üçgen sayıları bulunuz.
225. V.E.Hogatt'ın, her pozitif tam sayının Fibonacci dizisinin birbirinden farklı terimlerinin toplamı şeklinde gösterilebileceğini söyleyen teoremini kanıtlayınız.

226. Fibonacci dizisinin  $u_n$  terimlerinin  $n = 1, 2, 3, \dots$  için

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n-1}$$

eşitliğini sağladığını kanıtlayınız.

227. Her tam sayının sonsuz değişik sayıda beş tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

228. 3 sayısının sonsuz değişik sayıda 0 ve 1'den farklı dört tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

229. Elementer yöntemlerle, birbirinden farklı dört pozitif tam sayının kareleri toplamı şeklinde en az iki değişik şekilde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu ve birbirinden farklı dört pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde en az iki değişik şekilde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

230. Her  $m$  pozitif tam sayısı için  $4m^4 \cdot 7$  sayısının negatif olmayan dört tam sayının kareleri toplamı şeklinde herhangi gösteriminde, bu sayılardan hiçbirinin  $2^{m-1}$ 'den küçük olmadığını kanıtlayınız.

231. İki pozitif tam sayının kareleri toplamı ve iki pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilen 2'den büyük en küçük tam sayıyı bulunuz ve aralarında asal iki pozitif tam sayının kareleri toplamı ve iki pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

232.  $s$  pozitif tam sayısı için verilmişse, her  $k = 1, 2, \dots, n$  için  $n$  sayısı iki tane pozitif tam sayının  $k$ . dereceden kuvvetleri toplamı olacak şekilde bir  $n > 2$  tam sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

233. İki tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilemeyen, fakat iki rasyonel sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilebilen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

234. İki pozitif tam sayının küpleri farkı şeklinde gösterilebilen, fakat iki pozitif tam sayının küpleri toplamı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

235. Her  $k > 1$ ,  $k \neq 3$  tam sayısı için iki pozitif tam sayının  $k$ . dereceden kuvvetleri farkı şeklinde gösterilebilen, fakat iki pozitif tam sayının  $k$ . dereceden kuvvetleri toplamı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

236. Her  $n > 1$  tam sayısı için iki pozitif tam sayının  $n$ . dereceden kuvvetleri toplamı şeklinde gösterilebilen, fakat iki pozitif tam sayının  $k$ . dereceden kuvvetleri farkı şeklinde gösterilemeyen sonsuz sayıda pozitif tam sayı bulunduğunu kanıtlayınız.

237. 1'den  $n$ 'ye kadar olan pozitif tam sayıların kareleri toplamı tam kare olmasını sağlayan en küçük  $n > 1$  tam sayısını bulunuz.

238.  $a$  ve  $b$  1'den büyük tam sayılarsa  $a^b$  şeklinde olan sayıya **öz kuvvet** diyelim. Sonlu sayıda öz kuvvetin toplamı şeklinde yazılabilen tüm pozitif tam sayıları bulunuz.
- b. 6'dan farklı her  $n \leq 10$  pozitif tam sayısının iki öz kuvvetin farkı şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.
239. Kenar uzunlukları tam sayı olan her dik üçgen ve her  $n$  pozitif tam sayısı için bu üçgene benzer ve her kenar uzunluğu bir pozitif tam sayının  $n$ 'den büyük dereceden kuvveti olan bir üçgen bulunduğunu kanıtlayınız.
240.  $(n-1)! + 1 = n^2$  eşitliğini sağlayan tüm  $n > 1$  tam sayılarını bulunuz.
241. İki ardışık üçgen sayısının çarpımının hiçbir zaman tam kare olmayacağını, fakat her  $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$  sayısı için  $t_n t_m$  çarpımının tam kare olacak şekilde  $t_n$ 'den büyük olan sonsuz sayıda  $t_m$  üçgen sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.
242. Logaritma tablosu kullanmadan  $F_{1945} = 2^{2^{1945}} + 1$  sayısının basamak sayısının  $10^{582}$ 'den büyük olduğunu kanıtlayınız ve  $(F_{1945}$  sayısının en küçük asal böleni olan)  $5 \cdot 2^{1947} + 1$  sayısının basamak sayısını bulunuz.
243.  $2^{11213} - 1$  (bilinen en büyük asal sayı) sayısının basamak sayısını bulunuz.
244.  $2^{12112}(2^{12112} - 1)$  (bilinen en büyük mükemmel sayı) sayısının basamak sayısını bulunuz.
245.  $3!!!$  sayısının basamak sayısının 1000'den fazla olduğunu kanıtlayınız ve bu sayının sonundaki 0 sayısını bulunuz.
246. Aşağıdaki özelliğe sahip olan  $m > 1$  tam sayısı bulunuz: bir  $x$  tam sayı sayısı için  $f(x)$  değeri  $m$ 'ye bölünecek, başka bir  $x$  değeri için  $f(x)$  değeri  $m$ 'ye bölündüğünde 1 kalanı verecek ve tüm  $x$  tam sayı değerleri için  $f(x)$  değerleri  $m$ 'ye bölündüğünde 0 veya 1 kalanı verecek şekilde tam sayı katsayılı bir  $f(x)$  polinomu bulunur.
247.  $m$  ve  $n$  pozitif tam sayılar ve  $D = [(4m^2 + 1)n + m]^2 + 4mn + 1$  olmak üzere  $\sqrt{D}$  sayısının sürekli kesir şeklinde gösteriniz.
248.  $\varphi(n)$  Euler fonksiyonu,  $d(n)$  de  $n$  sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısını göstermek üzere  $\varphi(n) = d(n)$  eşitliğini sağlayan tüm  $n \leq 30$  pozitif tam sayısını bulunuz.
249. Her  $g$  pozitif tam sayısı için, her  $w > 1$  rasyonel sayısının,  $k > g$  ve  $s \geq 0$  tam sayılar olmak üzere

$$w = (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{k+1}) \dots (1 + \frac{1}{k+s})$$

şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

250. P. Erdős ve M. Surányi'nin şu teoremini kanıtlayınız: her  $k$  tam sayısı sonsuz değişik yolla,  $m$  pozitif tam sayı olmak üzere ve  $+$  veya  $-$  işaretleri belirli bir şekilde seçilerek

$$k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2$$

şeklinde gösterilebileceğini kanıtlayınız.

## Kaynakça

Sierpinski, Waclaw. 1970. *250 problems in elementary number theory*. American Elsevier Publishing Company.