Tarea 3: Grafos Planares

Grupo 3: Daniel Mahecha - 200822098, Raul de la Rosa
Ana Sofía Castellanos - 202114167

Análisis de Algoritmos

19 - febrero - 2025

Punto 1:
Se implementó el siguiente algoritmo para generar grafos planares con n vértices mediante la generación modular de subciclos conectados. La construcción se realiza en tres pasos:

1. Cálculo de x y del remanente:

Se determina el mayor entero x que satisface:

x*(x+1)/2 <= n

utilizando la fórmula analítica:

x = floor((sqrt(1+8*n) - 1)/2)

Además se calcula el remanente:

rem = n - x*(x+1)//2

2. Definición de subgrafos (subciclos):

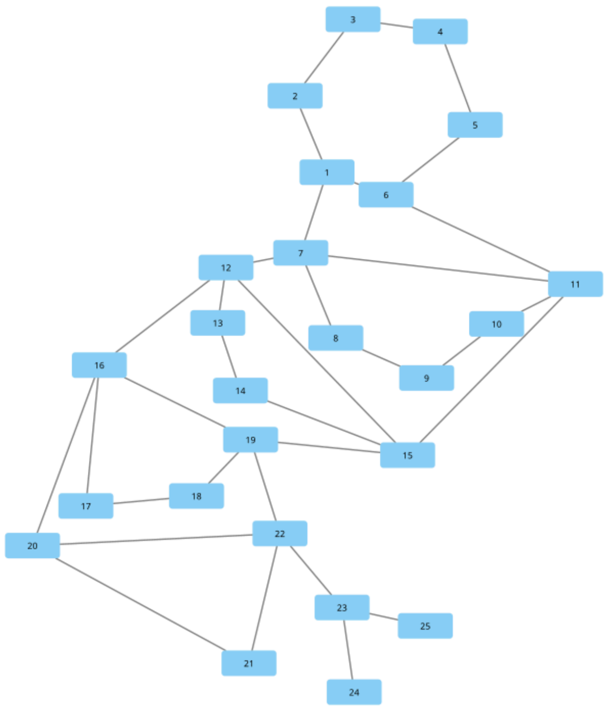
- Si rem > 0 se generan (x+1) subgrafos; de lo contrario, se generan x subgrafos.
- Los tamaños de los subgrafos se establecen como: [x, x-1, x-2, ..., 1] y se incluye rem (si rem > 0)
- Se ordenan en forma descendente para que el subgrafo de mayor tamaño (el ciclo principal) sea el primero.

3. Conexión de subgrafos:

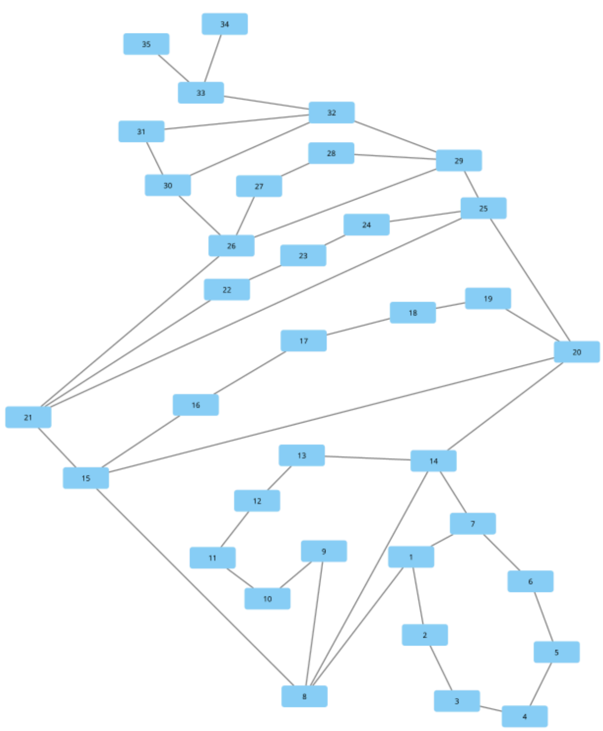
Cada subgrafo se une como "apéndice" al inmediato mayor, según las siguientes reglas:
- Si el subgrafo (apéndice) tiene más de 2 vértices, se forma un ciclo cerrado y se conecta a través de dos pares de vértices arbitrarios.
- Si tiene 2 o menos vértices, se conecta mediante un único eje.

El script planarGraphGenerator.py genera grafos de 25, 35, 50 y 100 vértices utilizando el algoritmo previamente descrito. Cada uno fue validado cómo planar a través del método [‘is_planar’](#) de networkx. Adicionalmente, los grafos resultantes se cargaron en Cytoscape y los tres de menor tamaño se acomodaron manualmente para evidenciar su planaridad. A continuación se muestran los resultados:

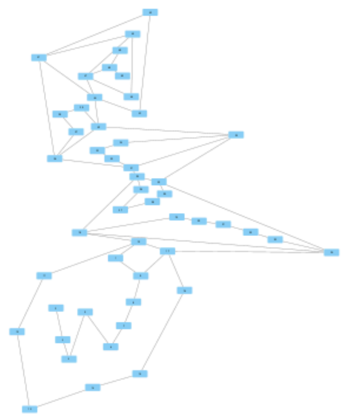
<u>25 vertices:</u>



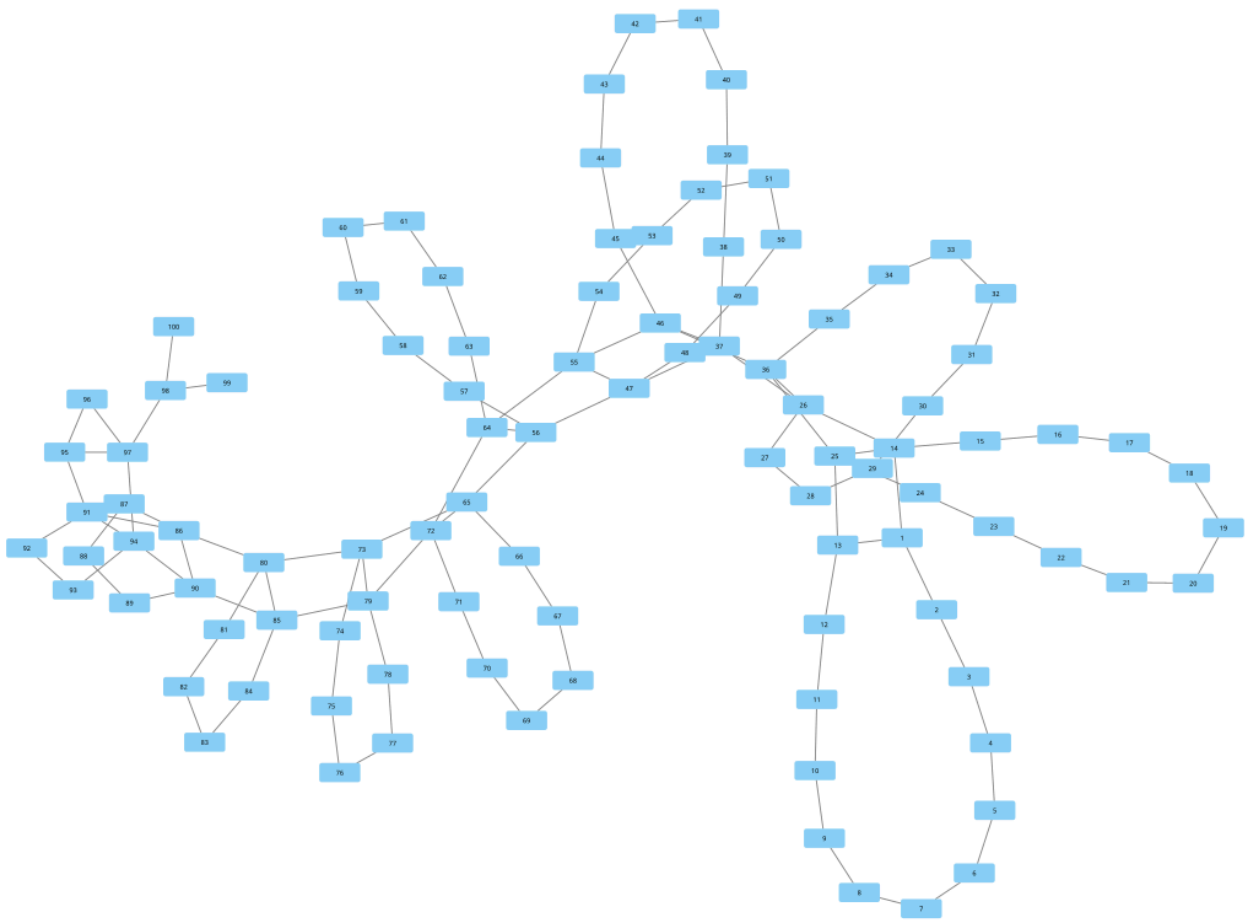
<u>35 vértices:</u>



50 vértices:



100 vértices:



Punto 2

En el punto 2 se utiliza la función graphGenerator para generar un grafo aleatorio considerando los siguientes parámetros

N = número de vértices -20

numMax = Número máximo de ejes - 3*N-6 = 54

randEdges= si se puede generar un número aleatorio de ejes menos al número máximo - False

Escribir = Parámetro que indica si se desea o no guardar los resultados en archivos .csv - True (prueba con 3 iteraciones) y False (prueba con 1000 iteraciones)

Esta función se llama dentro de la función generateMultipleGraphs_withResultsPlanar con los siguientes parámetros:

numIt = Número de iteraciones que se realizan por cada grafo con un número de ejes fijo -5 o 1000

numVertex = 20

maxEdges = 3*N-6 = 54

Step = Paso entre cada uno del número de ejes - 5 ejes o 2 ejes

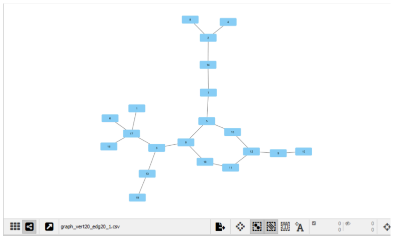
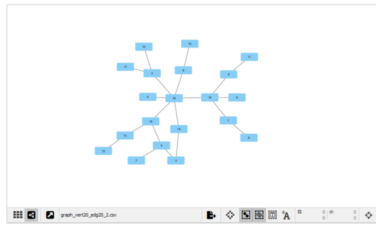
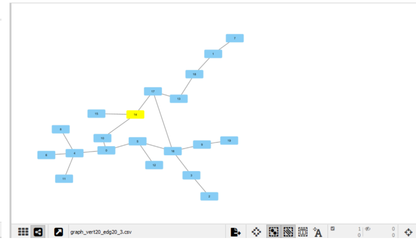
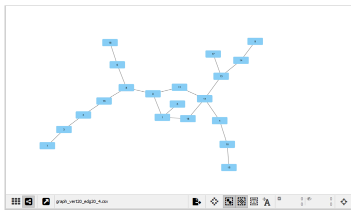
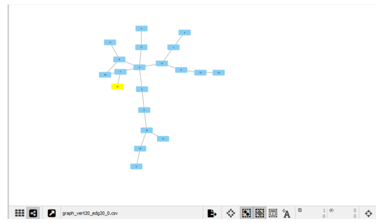
Con el fin de evaluar si el plano resultante es planar o no, se realizan dos tipos de pruebas con herramientas diferentes. En primer lugar se realiza una prueba con 5 iteraciones y un paso de 5 ejes, para un total de 35 grafos, los cuales se ingresan a la plataforma Cytoscape y se modifican manualmente con el fin de identificar si estos son planares o no, también se realiza la comprobación con el método is_planar() de la librería.

Por otro lado, se realiza una prueba de 1000 iteraciones y un paso de 2 ejes, con el fin de mejorar la predicción de probabilidad de planaridad para un número de ejes fijo. Dada la cantidad de grafos, estos no se analizaron de forma manual con Cytoscape sino que se utilizó el método is_planar de la librería networkx que determina si un grafo es planar o no.

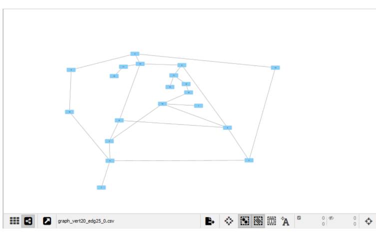
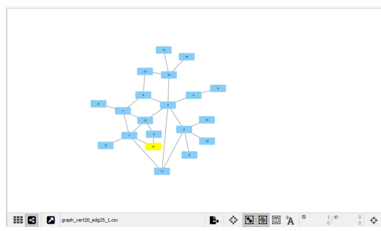
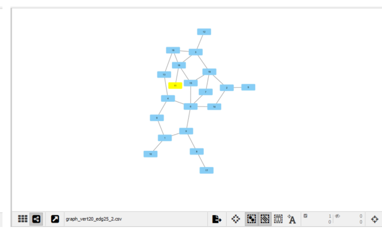
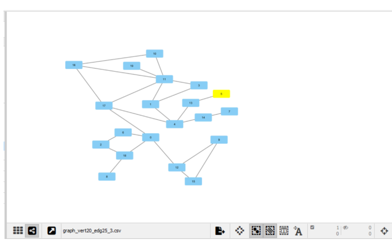
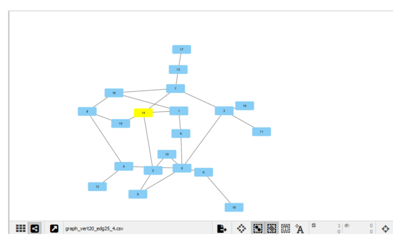
La funcionalidad de networkx se evaluó manualmente con la primera prueba al buscar el grafo planar de los grafos con Cytoscape

Primera prueba

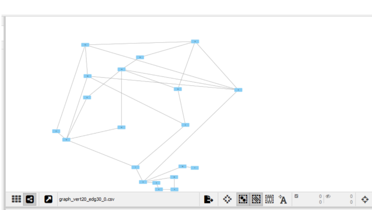
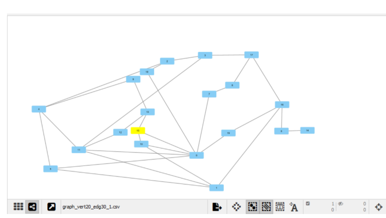
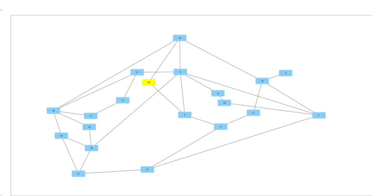
20 ejes: Todos los grafos son planares

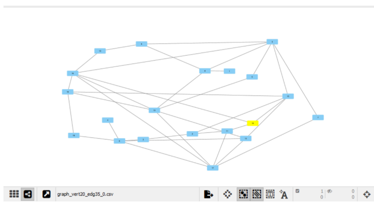
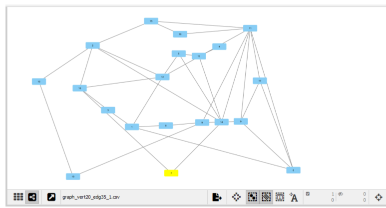
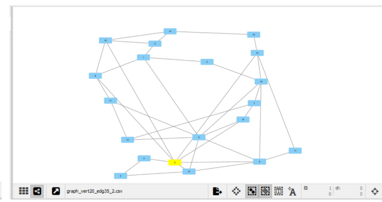
<u>25 ejes:</u> 2 no son planares, y 3 si lo son

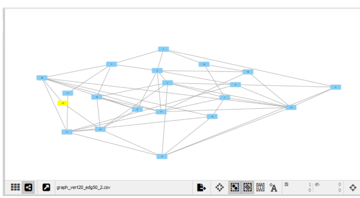
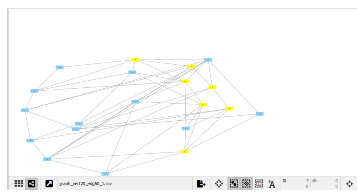
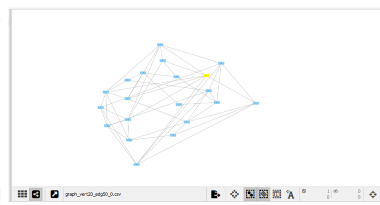
<u>30 ejes:</u> Ningún grafo es planar

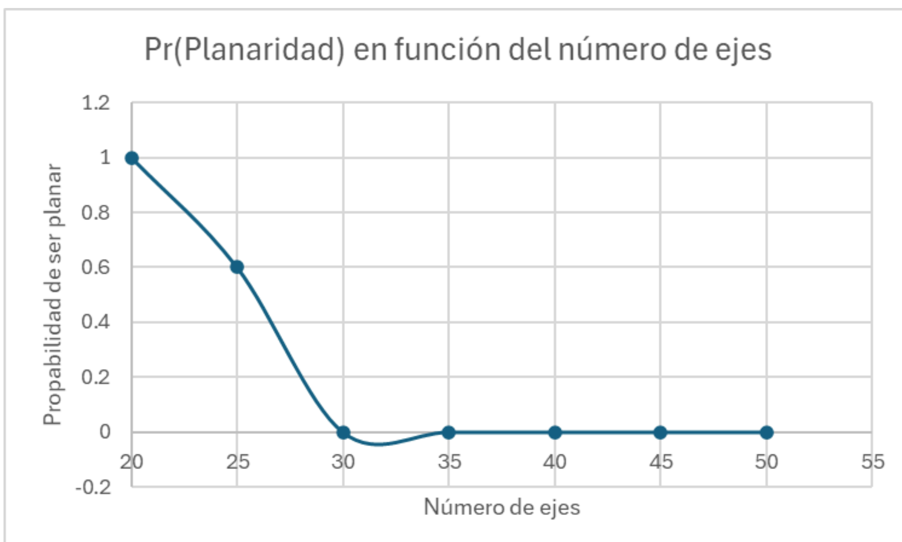
<u>35 ejes:</u> Ningún grafo es planar.

De manera similar para grafos de 40 y 45 ejes ningún grafo resulta planar.
<u>50 ejes:</u> Ningún grafo es planar

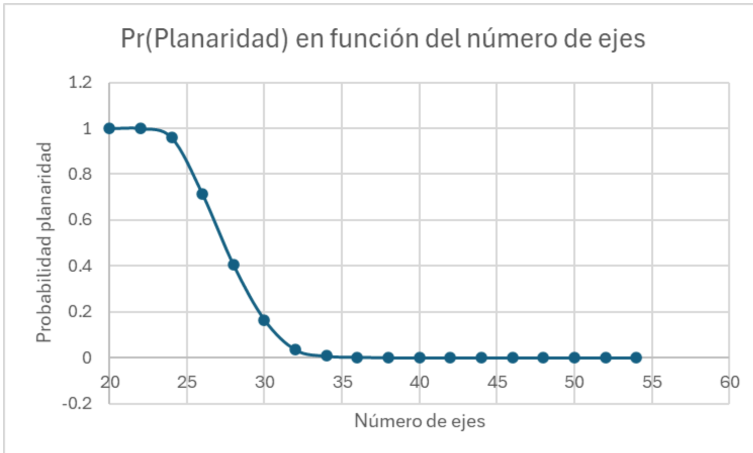
Para estas ejecuciones se encuentra la siguiente distribución de probabilidad de la planaridad:



Con esto se evidencia que entre menor número de ejes tenga el grafo mayor es la probabilidad de que este sea planar.
Así mismo, gracias a la visualización en Cytoscape se puede encontrar fácilmente los ejes que no permiten la planaridad del grafo, para esto se hace la búsqueda del ciclo más grande y se encuentran los adyacentes. Una vez identificados se detallan las reglas de que dos adyacentes no pueden estar en la misma región si comparten tres puntos de contacto o si están encerrados con puntos de contacto intercalados entre sí. A partir de esto una vez se encuentra un par de adyacentes con los que se genera una contradicción se puede afirmar que el grafo no es planar.

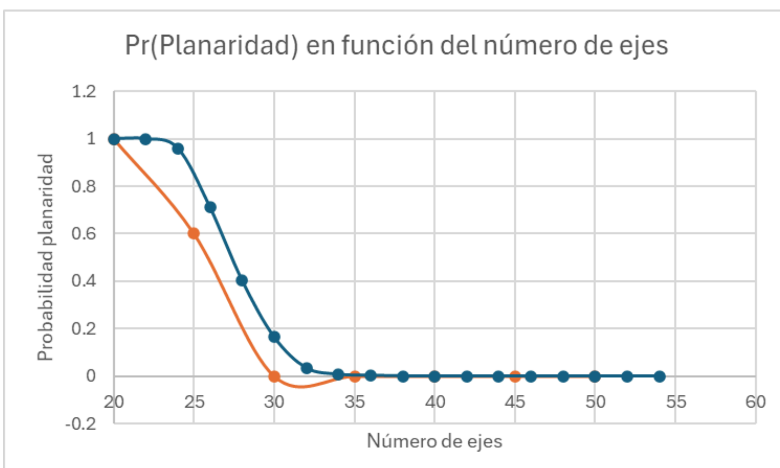
Segunda prueba

La probabilidad anterior, sin embargo, no es tan fiable, ya que se utilizaron solamente 5 muestras por cada número de ejes; debido a esto se realiza una segunda prueba con 1000 muestras por cada número de ejes y con ello se obtiene:



Si bien la tendencia de ambas gráficas es la misma, lo cual implica que a un menor número de ejes la probabilidad de ser planar aumenta, con la segunda prueba se obtiene una distribución de probabilidad mucho más fiable que la primera.

Si comparamos ambas curvas, vemos que son bastantes cercanas entre sí y a medida que se aumenta el número de muestreo se llega a una distribución mucho más cercana a la que describe realmente la probabilidad de planaridad real dado un número de ejes:



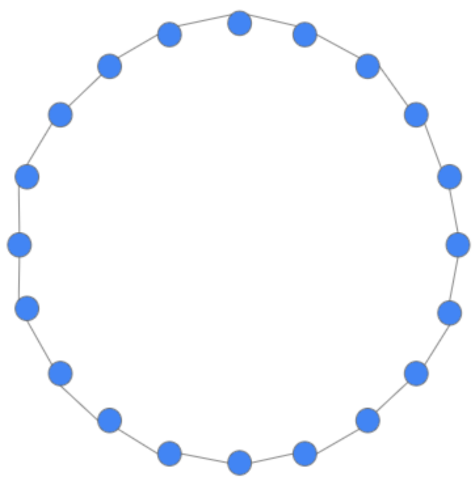
En este caso, si bien el límite teórico es de 54 ejes para ser planar, se observa que cuando se llega a 34 muestras se llega a una probabilidad de 0, esto se puede deber a que se podrían generar homeomorfismos de K5 o K3,3 con este número de ejes.

Por otro lado, a partir de esta distribución de probabilidad podemos ver que entre 26 y 28 vértices se alcanza la probabilidad de 0.5, lo cual implica que en este rango del número de ejes la probabilidad de ser planar es equivalente a no serlo. Finalmente, cabe resaltar que se utilizó como número de ejes mínimo el número de vértices, ya que esta es la cantidad mínima que se requiere para generar un grafo conexo. Así mismo el límite superior de ejes viene dado por 3*V-6 que es el límite teórico de ejes con los que se es planar.

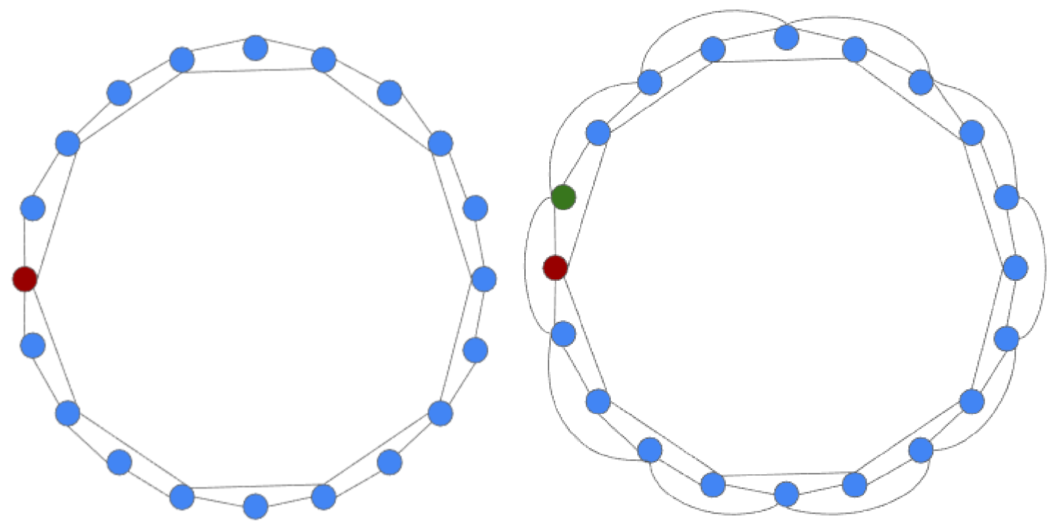
Punto 3.

Para diseñar un grafo de al menos 20 vértices, que sea planar y contenga al menos 2|V| ejes, se llevaron a cabo los siguientes pasos:

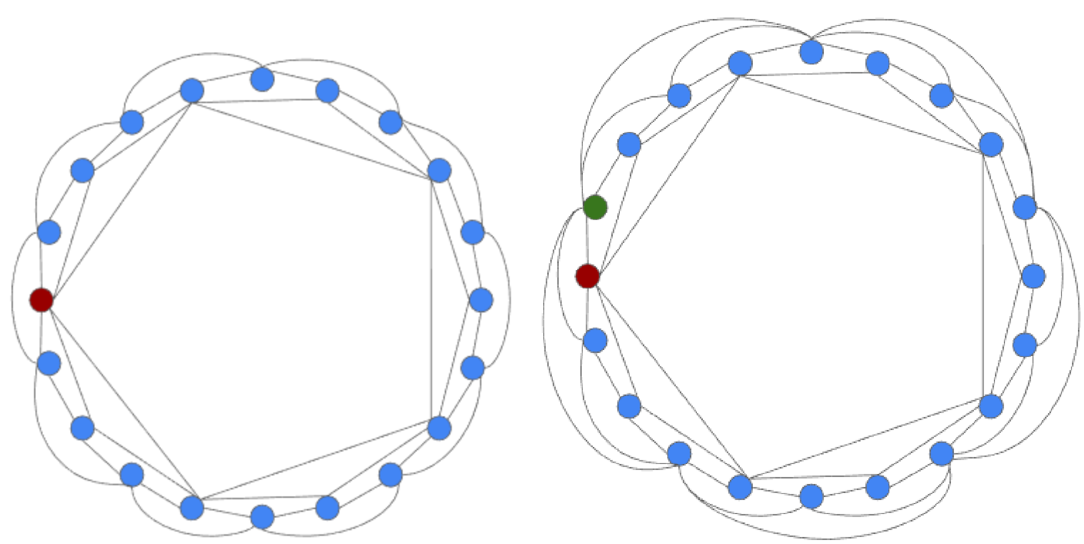
1. Crear un grafo de 20 (o más) vértices con un eje entre cada par de vértices 1+k,1+k+1. Donde k es un entero entre $0 \leqslant k < 20$. Esto suma 20 ejes:



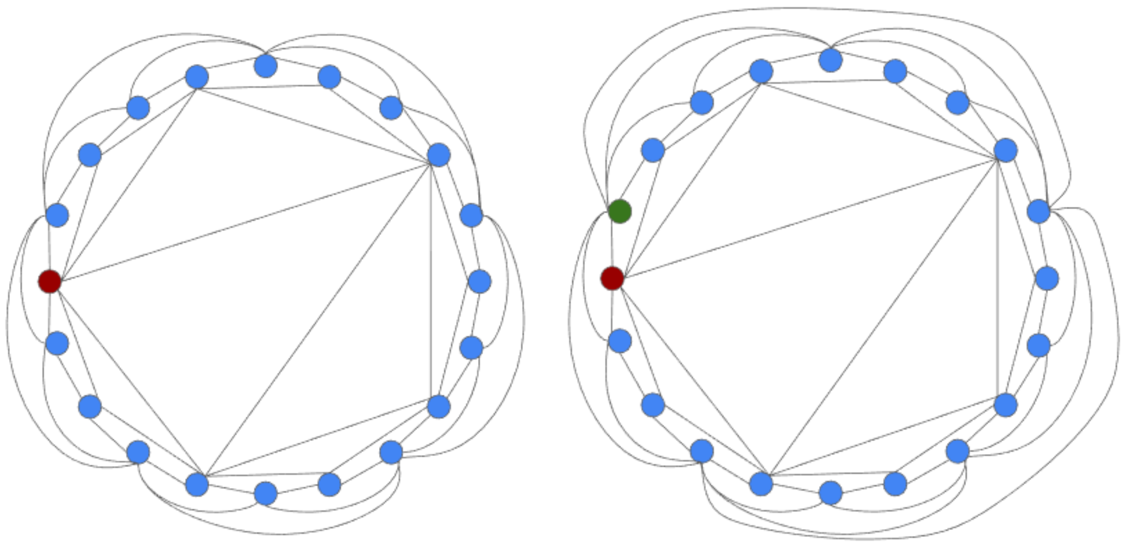
2. Añadir un eje entre cada par de vértices (2k, 2k+2) y (1+2k, 1+2k+2) , donde k es un entero tal que $0 \leqslant k < 20/2$ y . Esto suma 20 ejes:



3. Añadir un eje entre cada par de vértices (4k, 4k+4) y (4k+1,4k+1+4), donde k es un entero tal que 0⩽k<20/4. Esto suma 10 ejes:



4. Añadir un eje entre cada par de vértices (8k, 8k+8) y (1+8k, 1+8k+8), donde k es un entero tal que 0⩽k<20/8. Esto suma 4 ejes:



Esto genera un grafo planar con 54 ejes > 2|V|.