4)

$$\frac{dU}{dt} = u^q \qquad t \in [0, 10]$$

$$du \, \frac{1}{u^q} = dt$$

$$\int \frac{1}{u^q} \, du = dt$$

Consideremos tres casos:

$q = 1$:

$$\int \frac{1}{u} \, du = dt$$

$$\ln u = t + U_0$$

$$u(t) = e^{t + U_0}$$

$$\boxed{U(t) = U_0 e^t}$$

El enunciado nos dice que la solución exacta para $q = 1$ es:

$$u(t) = e^t$$

$$e^t = U_0 e^t$$

$$\boxed{U_0 = 1}$$

$q \neq 1$:

$$\int \frac{1}{u^q} \, du = \int dt$$

$$= \int_0^u u^{-q} \, du = \int_0^t dt$$

$$\frac{u^{-q+1}}{-q+1} = t + U_0$$

$$\Downarrow$$

$$u^{1-q} = (t + U_0)(1-q)$$

$$u = \left((t + U_0)(1-q) \right)^{\frac{1}{1-q}}$$

$$\boxed{u(t) = \left(t(1-q) + U_0(1-q) \right)^{\frac{1}{1-q}}}$$

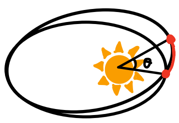
De la solución exacta para $q = 1$ se encontró que $U(0) = 1$ por lo que se tiene

$$u(0) = \left(U_0 (1-q) \right)^{1/1-q} = 1$$

$$U_0 = \frac{1}{1-q}$$

Y por ende la solución queda como:

$$\boxed{u(t) = \left(t(1-q) + 1\right)^{\frac{1}{1-q}}}$$

6. 

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{43''}{\text{siglo}}$

Corrección a Newton:

$$F = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right)\hat{r}$$

Método de Verlet:

$\Delta t = h$

- $\underset{i+1}{\vec{r}(t+\Delta t)} = r(t) + v(t)\,\Delta t + \frac{1}{2}\,a(t)\,(\Delta t)^2$
- $v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{\Delta t}{2}\left(\vec{a}(t+\Delta t) + \vec{a}(t)\right)$

Para demostrarlo hacemos expansion de Taylor para $r(t+\Delta t)$ y $v(t+\Delta t)$:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t\,\frac{d\vec{r}(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2 r(t)}{d^2 t} + O(\Delta t^3)$$

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta t\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2\vec{v}(t)}{d^2 t} + O(\Delta t^3)$$

Expandimos para $\vec{a}(t+\Delta t) = \frac{d\vec{v}(t+\Delta t)}{dt}$:

$$\frac{d\vec{v}(t+\Delta t)}{dt} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \Delta t\,\frac{d^2\vec{v}(t)}{d^2 t} + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{d^2\vec{v}(t)}{dt}\frac{\Delta t^2}{2} = \frac{dv(t+\Delta t)}{dt}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) - \frac{dv(t)}{dt}\,\frac{\Delta t}{2}$$

De forma que $\vec{v}(t+\Delta t)$ queda como:

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta t\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{dv(t+\Delta t)}{dt}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) - \frac{dv(t)}{dt}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) + O(\Delta t^3)$$

$$\vec{v}(t+\Delta t) = v(t) + \frac{\Delta t}{2}\,\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\Delta t}{2}\,\frac{dv(t+\Delta t)}{dt} + O(\Delta t^3)$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{dv(t+\Delta t)}{dt} + \frac{dv(t)}{dt}\right) + O(t^3)$$

Por definición la derivada de la velocidad es la aceleración por lo que queda:

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{\Delta t}{2}\left(\vec{a}(t+\Delta t) + \vec{a}(t)\right) + O(t^3)$$

Por otro lado para la expansión de la posición por definición $\frac{dr(t)}{dt} = v(t)$ y $\frac{d^2 r(t)}{d^2 t} = \vec{a}(t)$:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\,\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2}\,\vec{a}(t) \quad \therefore$$

De la teoría de einstein se puede encontrar $\vec{a}(t)$:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\frac{G M_1 M_2}{r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right)\hat{r}$$

$$= \left(-\frac{G M_1 M_2}{r^2} - \frac{\alpha G M_1 M_2}{r^4}\right)\hat{r} \qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$= -\frac{G M_1 M_2}{r^3} - \frac{\alpha G M_1 M_2}{r^5}\,\vec{r}$$

$$\vec{a} = -\frac{G M_\odot \cancel{m}}{|r|^3 \cancel{m}}\left(1 + \frac{\alpha}{|r|^2}\right)\vec{r} \qquad |r| = d$$

$$M_\odot = 1$$

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{G\,\vec{r}}{d^3}\left(1 + \frac{\alpha}{d^2}\right)}$$