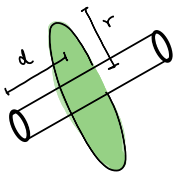
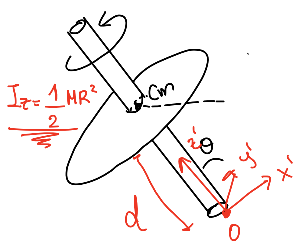


$$L = \frac{1}{2} I_0 \left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_z \left(\dot\phi^2 \cos\theta + \dot\psi\right)^2 - mgd\cos\theta$$

a) $I_0 = \frac{1}{4} m r^2 + m d^2$ → Alrededor de la dirección azimutal

Es equivalente a encontrar $I_{x'}, I_{y'}$



La dirección azimutal viene dada por los ejes x', y' (ver imagen derecha)

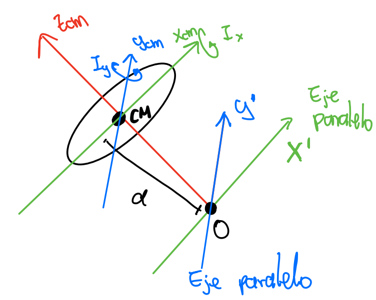
$I_z = \frac{1}{2} m R^2$ → Ver punto b para más detalle

El momento de inercia I_z se debe a las inercias I_x, I_y

$I_{z_{cm}} = I_{xcm} + I_{ycm}$ En este caso x y y tienen simetría por lo que $I_x = I_y$

$$I_{z_{cm}} = 2 I_{xcm} \rightarrow I_{xcm} = \underline{\frac{1}{4} m R^2} = I_y$$

Lo anterior es cierto si el disco estuviera girando en el centro de masas, sin embargo gira en torno a un eje desplazado en d.

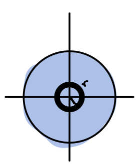


Para solucionar este problema usamos el teorema de ejes paralelos $\Big\}$ $I_{y'} = I_{x'} = I_{xcm} + m d^2$

De esta forma $\boxed{I_{x'} = \frac{1}{4} M R^2 + m d^2}$ y de forma similar para $I_{y'}$.

b) $I_z = \frac{1}{2} m r^2 \longmapsto \frac{1}{2} M R^2$

M → Masa disco
R → Radio disco



$$I_z = \int r^2\, dm$$

Asumir disco homogéneo $\longmapsto$ $\frac{dm}{dA} = \sigma$ $\quad dm = \sigma\, dA$

$$I = \int_0^R r^3\, 2\pi\sigma\, dr$$

$\boxed{\frac{M}{\pi R^2} = \sigma}$ Área del disco

$\boxed{A = \pi r^2}$ → Área del disco

$da = 2\pi r dr$ → Diferencial de área

$$I = 2\cancel{\pi}\frac{M}{\cancel{\pi}R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2} \checkmark$$

$\boxed{dm = \sigma\, 2\pi r\, dr}$

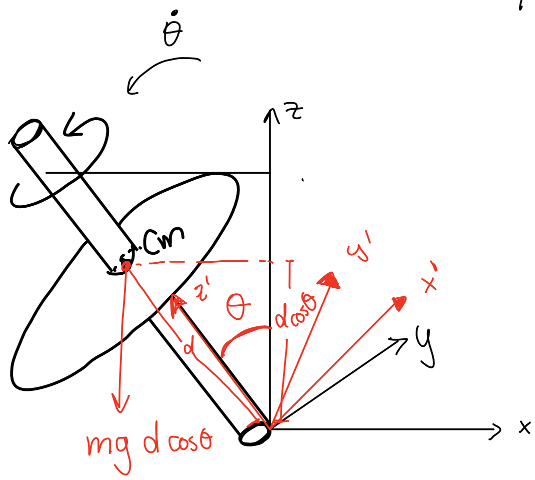
diferencial de masa en términos de dr

c) Usando Euler - Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = \dot\phi\left(I_0 \sin^2\theta + I_z \cos^2\theta\right) + I_z \dot\chi \cos\theta = p_\phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\chi} = I_z\left(\dot\chi + \dot\phi \cos\theta\right) = p_\chi$$

$$I_0 \ddot\theta = \dot\chi^2 \sin\theta \cos\theta \left(I_0 - I_z\right) - \dot\phi\dot\chi I_z \sin\theta + mgd\sin\theta$$



$\mathcal{L} = T - U$

$T \to$ Energía cinética

$U \to$ Energía potencial

↓ Dada por el

La energía potencial viene dada por el movimiento rotacional

$$T = \frac{1}{2} I_0 \left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right) + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$$

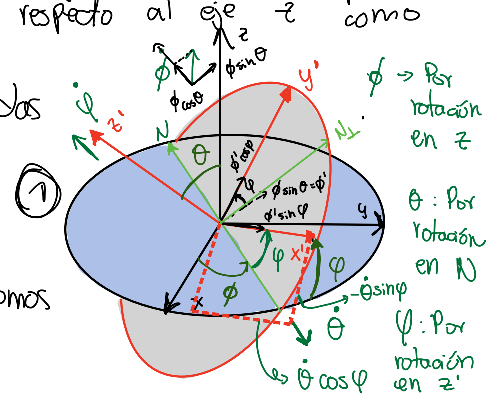
$$U = mgd\cos\theta$$

Hallemos ω_x, ω_y, ω_z de forma que podamos aplicar las ecuaciones de Euler Lagrange! Para ello usaremos los ángulos de Euler ya que estos codifican tanto la rotación respecto al eje z como en los ejes x', y':

De esta forma tenemos nuevas coordenadas generalizadas que describen el sistema

$$\langle \theta, \phi, \varphi \rangle = q_i$$

Para ver el cambio $\dot\theta$, $\dot\phi$ y $\dot\varphi$ usaremos el nuevo sistema x', y', z'



• Como φ ocurre debido a rotación en z':

$$\dot{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

• Como θ ocurre debido a rotación en N proyectamos $\dot{\theta}$ en los coordenadas x', y', z' → Es 0 No rota en z'

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}(\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)$$

• Como ϕ ocurre por rotación en z proyectamos 'z' (dirección de ϕ) en z', y', x':

$$\dot{\phi} = (\dot{\phi}\sin\theta\sin\varphi, \dot{\phi}\sin\theta\cos\varphi, \dot{\phi}\cos\theta)$$

De forma que la velocidad $\vec{\omega}$ total en mis ejes $\vec{x}', y', z'$ esta dada por:

$$\vec{\omega} = \underbrace{\dot{\varphi} + \dot{\theta} + \dot{\phi}}_{\text{Los angulos de Euler son rotaciones seguidas}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dot{\phi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\phi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}$$

De esta forma T queda:

$$T = \frac{1}{2} I_0 (\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + \frac{1}{2} I_z (\omega_{z'}^2)$$

$$\begin{aligned} \omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 = {} & \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \cancel{\sin^2\varphi} + \cancel{2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi} + \dot{\theta}^2\cancel{\cos^2\varphi} \\ & + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\cancel{\cos^2\varphi} - \cancel{2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi} + \dot{\theta}^2\cancel{\sin^2\varphi} \\ \hline & \dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\omega_z^2 = (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2$$

$$T = \frac{1}{2} I_0 (\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2$$

$$U = mgd\cos\theta$$

De forma que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_o \left(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} I_z \left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi} \right)^2 - mgd\cos\theta$$

Ahora usamos Euler-Lagrange para encontrar las Ec movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

- $q_i = \phi$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = I_o \dot{\phi} \sin^2\theta + I_z\left(\dot{\phi}\cos^2\theta + \dot{\varphi}\cos\theta \right) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \rightsquigarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = p_\phi$$

$$\boxed{\dot{\phi}\left(I_o \sin^2\theta + I_z \cos^2\theta \right) + I_z \dot{\varphi}\cos\theta = p_\phi}$$

- $q_i = \varphi$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = I_z\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi} \right) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi$$

$$\boxed{I_z\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi} \right) = p_\varphi}$$

- $q_i = \theta$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_o \dot{\theta} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I_o \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - I_z\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\varphi} \right)\dot{\phi}\sin\theta + mgd\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

$$\boxed{I_o \ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta\left(I_o - I_z \right) - \dot{\phi}\dot{\varphi} I_z \sin\theta + mgd\sin\theta}$$

d) Usando las Ec. Euler

$\underbrace{I_x = I_y = I_0}_{\text{Por simetría}}$ y I_z

Las ecuaciones de Euler nos dicen:

$$\frac{dL}{dt} = \Omega \times L$$

Por ser un sistema NO inercial

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \Omega \times H$$

Momento angular:

$$L_x = I_0 \omega_x$$
$$L_y = I_0 \omega_y$$
$$L_z = I_z \omega_z$$

De la figura (1) vamos a elegir un instante en el cual no hemos usado la rotación en φ (tiene sentido cuando no hemos cambiado la posición del disco respecto al eje de rotación)

De esta manera las velocidades angulares quedan como:

$$\omega_x = \cancelto{0}{\dot\phi \sin\theta \sin\varphi} + \dot\theta \cancelto{1}{\cos\varphi}$$
$$\omega_y = \dot\phi \sin\theta \cancel{\cos}\varphi - \cancelto{0}{\dot\theta \sin\varphi}$$
$$\omega_z = \dot\varphi + \dot\phi \cos\theta$$

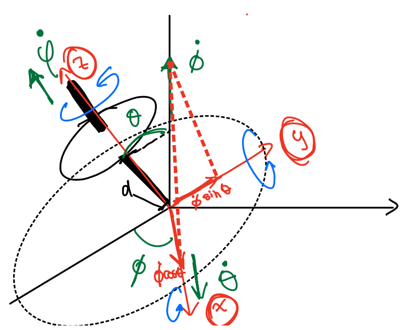
$$\omega_x = \dot\theta$$
$$\omega_y = \dot\phi \sin\theta$$
$$\omega_z = \dot\varphi + \dot\phi \sin\theta$$

De manera que nuestro L queda:

$$\dot L_x = I_0 \ddot\theta$$
$$\dot L_y = I_0 (\ddot\phi \sin\theta + \dot\phi \dot\theta \cos\theta)$$
$$\dot L_z = I_z (\ddot\phi \cos\theta - \dot\phi \dot\theta \sin\theta + \ddot\varphi)$$

En este caso nuestro sistema coordenado gira con velocidad Ω dado por:

$$\Omega_x = \dot\theta$$
$$\Omega_y = \dot\phi \sin\theta$$
$$\Omega_z = \dot\phi \cos\theta$$



→ $\dot\varphi$ no afecta en Ω pq en nuestro sistema x, y, z $\dot\varphi$ va en dirección de z.

Ahora si podemos calcular $\Omega \times \alpha$ que nos queda

$$(\Omega \times L)_x = I_z \cos\theta \sin\theta \dot{\phi}^2 - I_0 \cos\theta \sin\theta \dot{\phi}^2 + I \sin\theta \dot{\phi} \dot{\varphi}$$
$$(\Omega \times L)_y = I_0 \cos\theta \dot{\phi} \dot{\theta} - I_z \cos\theta \dot{\phi} \dot{\theta}$$
$$(\Omega \times L)_z = 0$$

De forma que las ecuaciones nos quedan:

$$I_0 \ddot{\theta} = I_z \cos\theta \sin\theta \dot{\phi}^2 - I_0 \cos\theta \sin\theta \dot{\phi}^2 , I \sin\theta \dot{\phi} \dot{\varphi} + \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

$$I_0 (\ddot{\phi} \sin\theta + \dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta) = I_0 \cos\theta \phi \theta - I_z \cos\theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$I_z (\ddot{\phi} \cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta + \ddot{\varphi}) = 0 + \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

Ahora para incluir el momentum debido a g vemos que la rotación debido a g afecta solo al eje x pq $\dot{\theta}$ va en dirección (g) de las coordenadas originales:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = mgd \sin\theta$$

↳ Las otras NO se ven afectadas

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

$$I_0 \ddot{\theta} = I_z \cos\theta \sin\theta \dot{\phi}^2 - I_0 \cos\theta \sin\theta \dot{\phi}^2 + I_z \sin\theta \dot{\phi} \dot{\varphi} + mgd \sin\theta$$

$$I_0 (\ddot{\phi} \sin\theta + \dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta) = I_0 \cos\theta \phi \theta - I_z \cos\theta \dot{\phi} \dot{\theta}$$

$$I_z (\ddot{\phi} \cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin\theta + \ddot{\varphi}) = 0$$