**Problema 1** ***Lotka-Volterra: 2 presas y un depredador:***
*Considera el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_1}{x_1} &= a_1 - b_1 y \\ \frac{\dot{x}_2}{x_2} &= -b_2 y \\ \frac{\dot{y}}{y} &= -c + d_1 x_1 + d_2 x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

*Donde $a_i$,$b_i$,$c_i$,$d_i$ son constantes positivas. Ahora, este modelo fue usado ampliamente para describir en Australia la interacción kiwi-conejo-armiño, donde el armiño es el depredador y el kiwi y el conejo ocupaban distintos nichos (arbusto y pradera, respectivamente).*

*Caracteriza los puntos de estabilidad del sistema y construye una función de Lyapunov, determina las condiciones para las cuales la extinción de las tres especies es inminente sin importar la condición inical que se dé. ¿Existe algún punto en $intR^3_+$ tal que las tres especies puedan convivir?*

**Problema 2** ***Bifurcación de Andrew-Hopf-Poincaré***
*Considera el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x &= x + x(\lambda - x^2 - y^2) \\ y &= -y + y(\lambda - x^2 - y^2) \end{aligned} \tag{2}$$

*Construye una función de Lyapunov y usando su teorema determina la estabilidad de los puntos de equilibrio para $\lambda < 0$, lambda $> 0$ y $\lambda = 0$. Dibuja los retratos fase correspondientes.*

**Problema 3** ***Péndulo esférico***
*Uno de los primeros sistemas no-lineales que vimos y estudiamos en clase es el sistema del péndulo ideal.*
*Construye el Hamiltoniano para este sistema y a partir de este determina la estabilidad de los puntos de equilibrio y realiza el retrato fase. ¿Se puede construir el Hamiltoniano para cuando hay un fuerza de arrastre?*
*Ahora bien, en clase vimos el péndulo doble y construimos el Hamiltoniano de este sistema, vamos a considerar un sistema nuevo: el péndulo esférico. Construye las ecuaciones de movimiento del péndulo esférico; a partir de esta construye su Hamiltoniano.*
*Determina los puntos de equilibrio y su estabilidad.* ***Extra****: Usando lo anterior explica el funcionamiento del péndulo de Foucault. ¿Cómo prueba que rota la Tierra?*

**Problema 4** ***Atractor de Rössler*** *Considera el siguiente siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ax \\ \dot{z} &= b + z(x - c) \end{aligned} \tag{3}$$

*Considera también los parámetros $a = 0.2$, $b = 0.2$ y $c = 5.7$.*

- *Encuentra todos los puntos de equilibrio del sistema*
- *Usando el análisis local caracteriza la estabilidad de estos puntos*
- *Supón z=0 así obtienes el siguiente sistema:*

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = x + ay$$

  *Así puedes realizar el análisis del* $plano - xy$. *Este es un sistema lineal acoplado, realiza el análisis de estabilidad y el plano fase ¿Sigue siendo igual la estabilidad del origen?*

- *Toma dos conjuntos de valores para* $a, b$ *y* $c$ *diferentes ¿Cómo cambia la estabilidad? ¿Por qué decimos que este sistema exhibe caos con los valores iniciales?*
- *Usando algún método numérico realiza el plano fase para este sistema con condiciones iniciales cerca de los puntos de equilibrio.*