Geometría Diferencial 1

Augusto Cabrera-Becerril

November 2022

Índice general

Capítulo 1

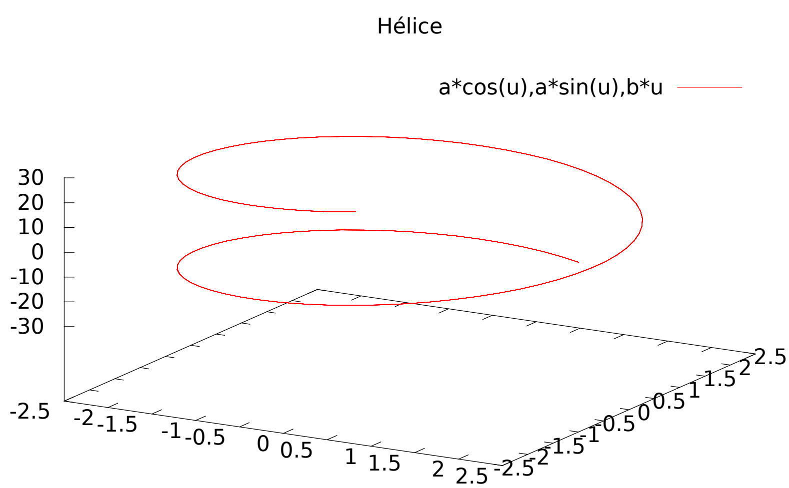
Curvas Diferenciables

En esta sección abordaremos algunos aspectos de la teoría de curvas diferenciables.

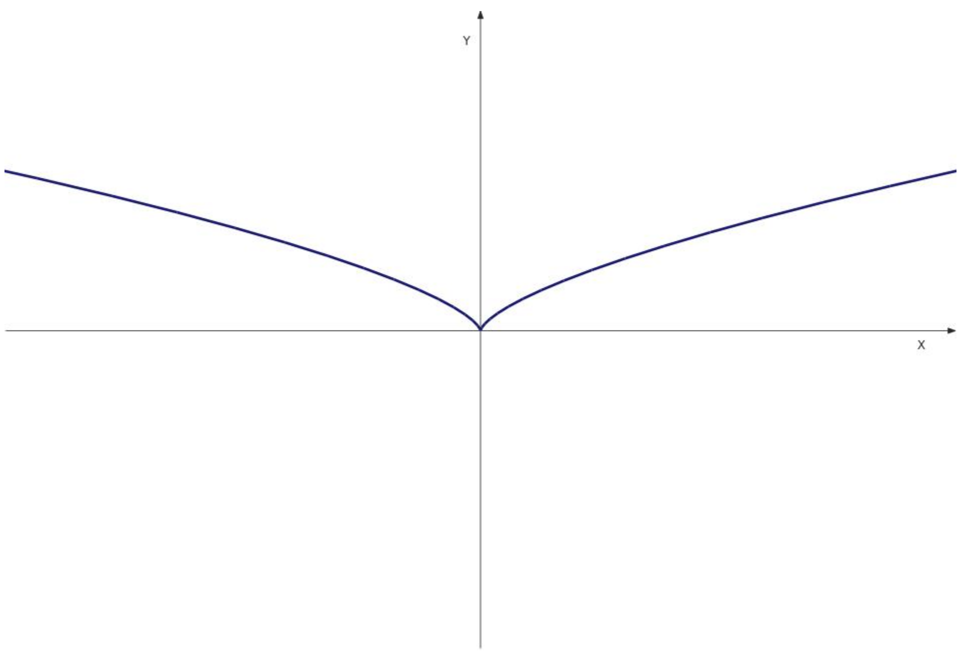
Definición 1. *Una curva diferenciable parametrizada es una función $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, es decir que cada componente $x_i(t)$ es una función diferenciable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. La variable t es llamada parámetro de la curva.*

Denotamos $\dot{\alpha}$ a la derivada de α respecto al parámetro t, el vector $\dot{\alpha}(t) = (\dot{x_i}(t))$ es llamado vector tangente de α. Debe distinguirse cuidadosamente una curva parametrizada de su traza.

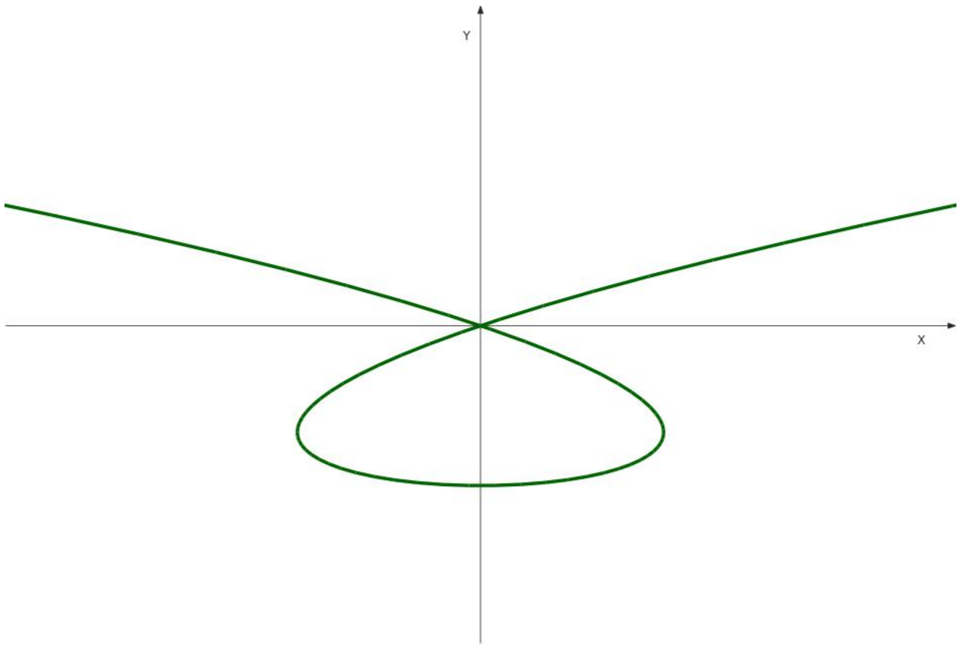
Ejemplo 1. *La curva $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, con $t \in \mathbb{R}$ tiene su traza en $\mathbb{R}^3$, se trata de una hélice de paso $2\pi b$ en el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. El parámetro t mide el ángulo que el eje X hace con la rect a que une al origen con la proyección de $\alpha(t)$ sobre el plano XY.*



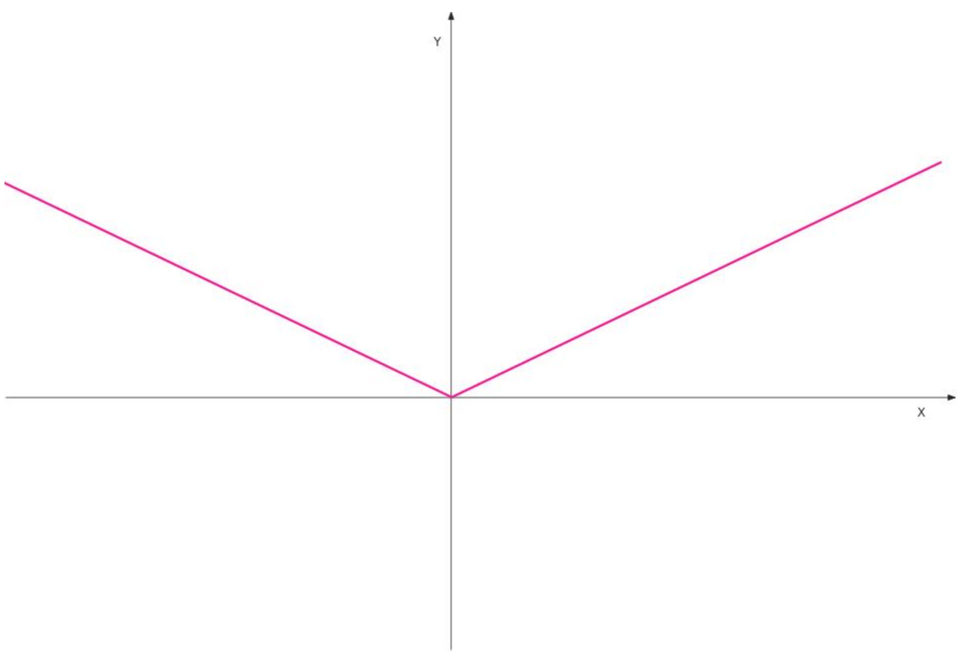
Ejemplo 2. *La curva* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $t \mapsto (t^3, t^2)$ *es una curva diferenciable parametrizada. Observe que* $\alpha'(0) = (0, 0)$.



Ejemplo 3. *La curva* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $t \mapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ *es una curva diferenciable parametrizada. Observe que* α *no es una función inyectiva. En efecto* $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$

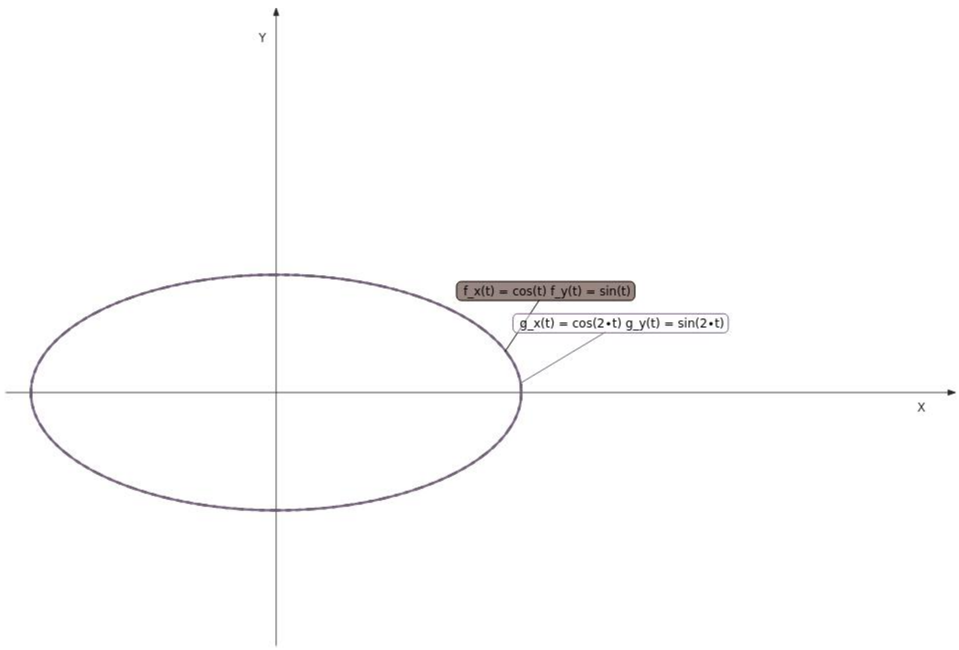


Ejemplo 4. *La aplicación* $\alpha(t) = (t, |t|)$ *no es una curva diferenciable, puesto que la función valor absoluto no es diferenciable en* 0.



Ejemplo 5. *Las curvas* $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ *y* $\beta(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$ *tienen la misma traza, es decir el*

círculo $x^2 + y^2 = 1$, la diferencia es que los vectores tangentes tienen una magnitud distinta.



(s)
k(s)(s)

(s)(s) $- \det \begin{pmatrix} \hat{t}(s) \\ k(s)\hat{n}(s) \\ k(s)\tau\hat{b}(s) \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \hat{t}(s) \\ k(s)\hat{n}(s) \\ k^2(s)\hat{t}(s) \end{pmatrix}$

$= k(s)\dot{k}(s) \det \begin{pmatrix} \hat{t}(s) \\ \hat{n}(s) \\ \hat{n}(s) \end{pmatrix} - k^2(s)\tau(s) \det \begin{pmatrix} \hat{t}(s) \\ \hat{n}(s) \\ \hat{b}(s) \end{pmatrix} - k^3(s) \det \begin{pmatrix} \hat{t}(s) \\ \hat{n}(s) \\ \hat{t}(s) \end{pmatrix}$

$= -k^2(s)\tau(s) \det \begin{pmatrix} \hat{t}(s) \\ \hat{n}(s) \\ \hat{b}(s)d \end{pmatrix} = -k^2(s)\tau(s)$

Ahora consideremos una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ y tomemos una reparametrización por longitud de arco $t : [c, d] \to [a, b]$. Por la regla de la cadena $\gamma'(s) = \dot{\gamma}t'$, $\gamma''(s) = \ddot{\gamma}(t'')^2 + {}_.ot\gamma t''$ y $\gamma'''(s) = \dddot{\gamma}(t')^3 + 3\ddot{\gamma}t''t' + \dot{\gamma}t'''$. Donde el punto es la derivada respecto a t y la prima es derivada respecto a s. Ahora

$$\begin{aligned} \gamma' \times \gamma'' &= (\dot{\gamma}t') \times (\ddot{\gamma}(t')^2 + \dot{\gamma}t'') \\ &= (\dot{\gamma}t') \times (\ddot{\gamma}(t')^2) + (\dot{\gamma}t') \times (\dot{\gamma}t'') \\ &= (t')^3(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) + (t')(t'')(\dot{\gamma} \times \dot{\gamma}) \\ &= (t')^3(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} = \gamma' \times \frac{\gamma''}{|\gamma''|} = \frac{1}{k}(\gamma' \times \gamma'') = \frac{1}{k}(\gamma' \times \gamma'')(t')^3$$

Además $\gamma' = \dot{\gamma} t'$, así que al tomar normas obtenemos: $|t'| = \frac{1}{|ga\dot{m}ma|}$. Por lo tanto tenemos que:

$$|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} (t')^3| = k|\hat{b}| = k = \frac{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|}{|\dot{\gamma}|^3}$$

Capítulo 2

Superficies Diferenciables

2.1. Introducción

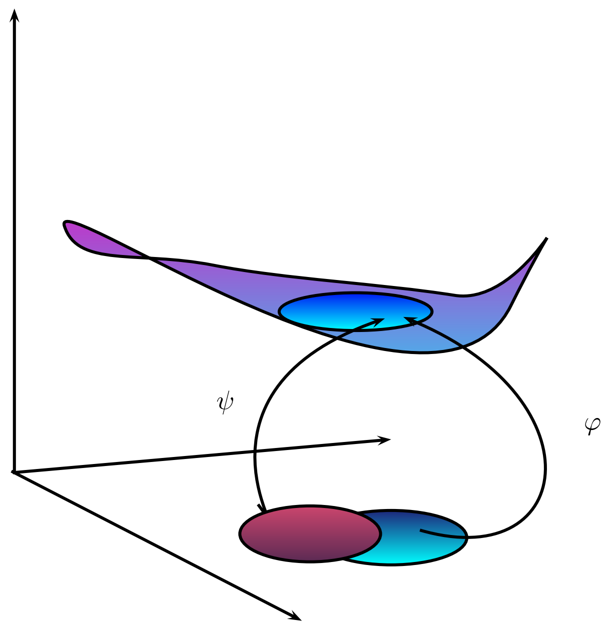
2.2. Superficies Regulares en $\mathbb{R}^n$

Definición 2. *El conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si para cualquier punto $p \in S$ existe una vecindad abierta V y una función $\varphi : U \to V \cap S$, con $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto. Donde*

1. *φ es diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$.*

2. *φ es un homeomorfismo*

3. *$\forall q \in U$ la aplicación $\mathrm{d}\varphi_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva.*



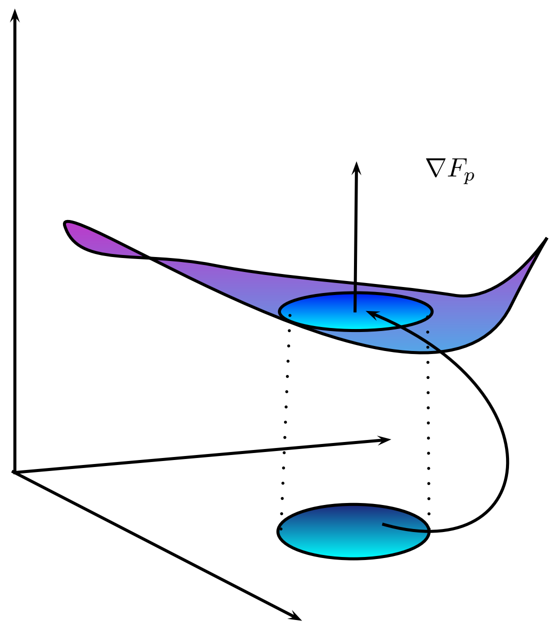
Lema 1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La aplicación* $\mathrm{d}\varphi_p$ *es inyectiva*
2. *La matriz* $\mathrm{d}\varphi_p$ *es de rango* 2
3. $\dfrac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} \neq 0$ *para algún par* (i, j)
4. $\sum_{i,j=1}^{3} \dfrac{\partial(x_i, x_j)^2}{\partial(u, v)}|_q \neq 0$
5. $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$
6. φ_u *y* φ_v *son linealmente independientes en todo su dominio.*

Lema 2. *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable. Entonces* $\mathrm{graf}(f)$ *es una superficie diferenciable.*

Demostración. Basta considerar la aplicación $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, esta es una parametrización. La proyección $\Pi(x, y, z) = (x, y)$ define una carta global para nuestra superficie. □

Definición 3. *Sea* $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *función diferenciable y* $p \in V$ *Decimos que* p *es un punto regular si* $\mathrm{D}F_p$ *no se anula y diremos que* $a \in \mathbb{R}$ *es valor regular de* F *si para cualquier* $p \in F^{-1}(a)$ *es punto regular.*



Lema 3. *Sea $F : V \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, $a \in F(V)$ un valor regular de F. Entonces el conjunto de nivel*

$$S = \{(x, y, z) \in V | F(x, y, z) = a\}$$

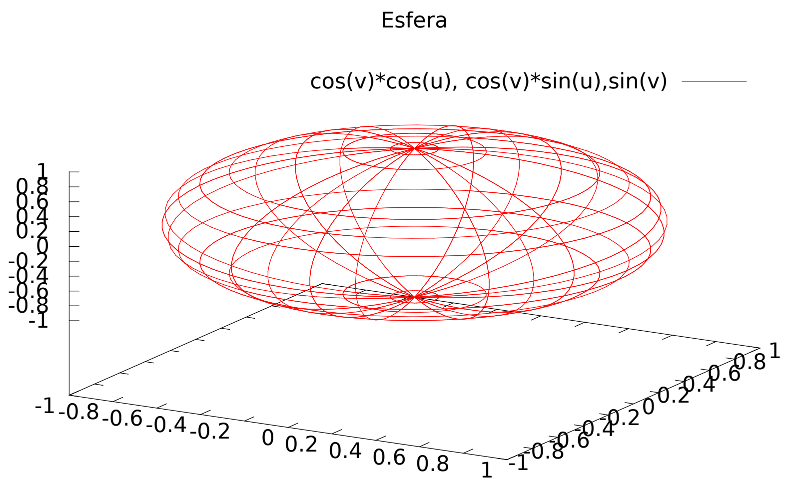
es una superficie regular y es un cerrado en $\mathbb{R}^3$

Demostración. Sea $p_0 \in F^{-1}(a)$, entonces $\nabla F_p \neq 0$. Sin perder la generalidad supongamos que $F_z(p_0) \neq 0$. Por el Teorema de la Función Implicita, existe Ω una vecindad abierta de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$ y una función f definida en Ω tal que $(x, y, z) \in V \cap F^{-1}(a)$ si y sólo sí $z = f(x, y)$. Es decir $F^{-1}(a)$ se puede describir localmente como la gráfica de una función, así es claro que se trata de una superficie diferencianle regular. $\square$

Ejemplo 6. *El elipsoide dado por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Consideremos la función $F(x, y, z) = 1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, observese que $\nabla F(x, y, z) = (-\frac{2x}{a^2}, \frac{-2y}{b^2} + \frac{-2z}{c^2})$ sólo se anula en $(0, 0, 0)$, pero éste no es un punto en el elipsiode. Así nuestro elipsoide $F^{-1}(0)$ es una superficie diferenciable. En particular la esfera es una superficie diferenciable.



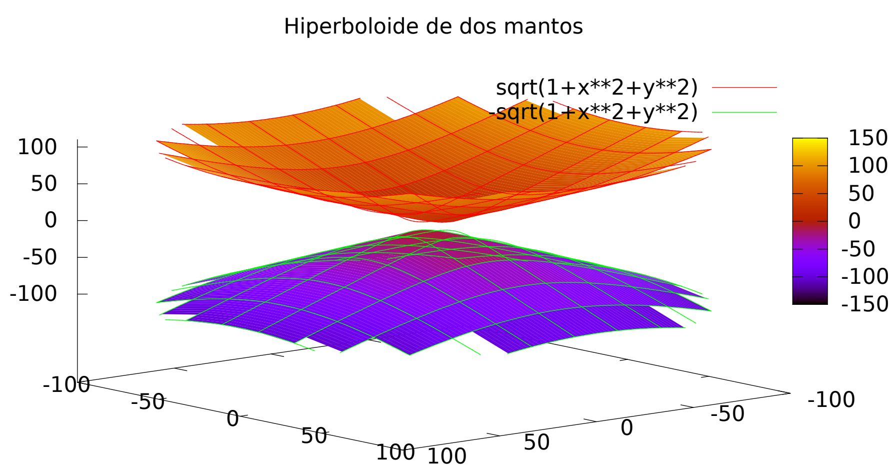
Ejemplo 7. *El hiperboloide de dos mantos dado por:*

$$-x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

es una suoerficie diferenciable. Consideremos la función

$$F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$$

es claro que ∇F *no se anula más que en el punto* $(0, 0, 0)$ *y el hiperboloide esta dado por* $F^{-1}(1)$ *que no contiene a* $F(0, 0, 0)$.



Lema 4. *Toda superficie diferenciable $S \subset \mathbb{R}^3$ es localmente la gráfica de una función diferenciable de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$*

Demostración. Sea $p \in S$, elegido arbitrariamente. Como S es diferenciable, tomemos una parametrización local $\varphi(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$ tal que uno de los menores $\dfrac{\partial(x_i,x_j)}{\partial(u,v)}$ no se anula. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$, con $\varphi(q) = p$.

Tomamos $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. Al aplicar $\Pi \circ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ en cualquier (u,v) en el dominio de la parametrización tenemos

$$\Pi \circ \varphi(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v))$$

tomando la diferencial

$$\mathrm{D}\left(\Pi \circ \varphi\right)_q = \begin{pmatrix} x_u^1 & x_v^1 \\ x_u^2 & x_v^2 \end{pmatrix}$$

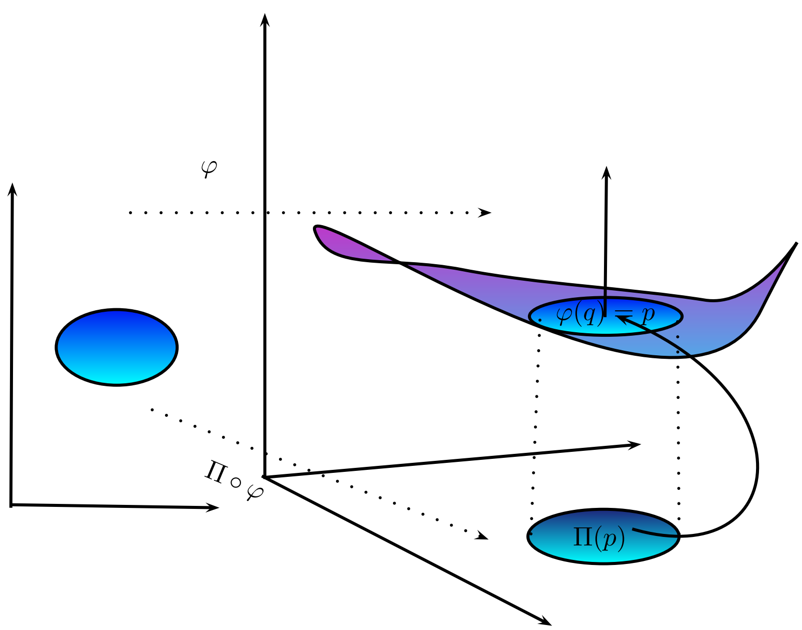
y además

$$\det \mathrm{D}\left(\Pi \circ \varphi\right)_q = \frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

Por el teorema de la función inversa, existen vecindades $V_1(q) \subset \mathbb{R}^2$ y $V_2(\Pi(p)) \subset \mathbb{R}^2_{XY}$ tal que la función $\Pi \circ \varphi : V_1 \to V_2$ tiene inversa diferenciable. Denotemosla por:

$$\begin{cases} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{cases}$$

De este modo $z = f(x,y)$ y S es localmente la gráfica de una función diferenciable.



$\square$

Teorema 1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, entonces se cumple que:*

a *S es localmente la imagen inversa de un valor regular de una función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$*

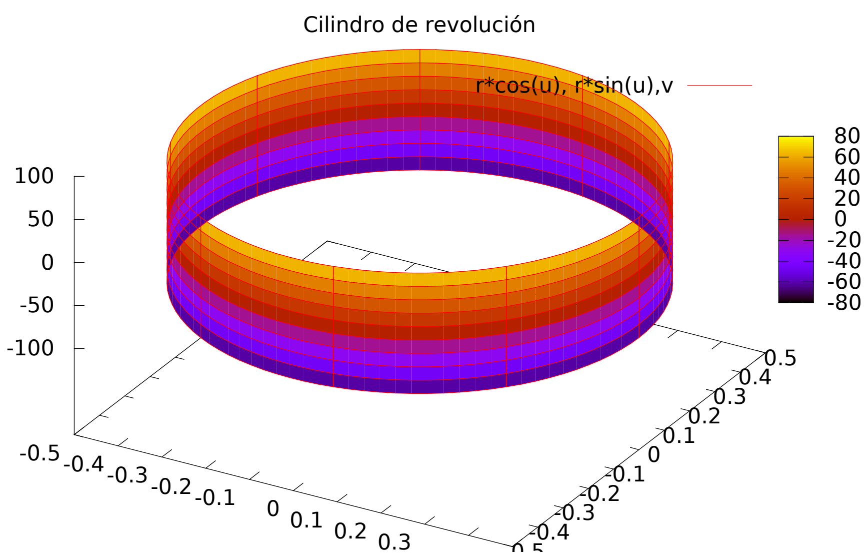
b *S es localmente la gráfica de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

c *S es localmente la imagen de una parametrización $\varphi : \Omega \to U \subset \mathbb{R}^3$*

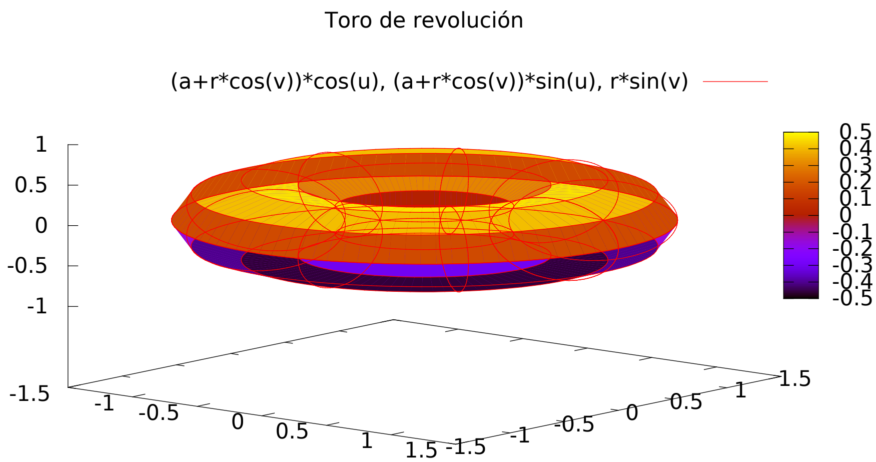
Ejemplo 8. *Consideremos el cilindro circular recto.*

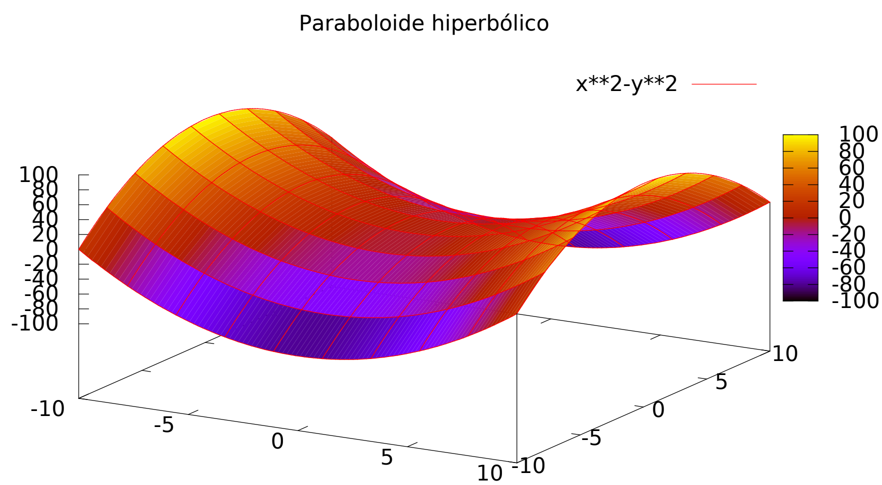
1. *El cilindro es la imagen inversa de 1, bajo la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = x^2 + y^2$. Observese que $\nabla F = (2x, 2y, 0)$. Claramente 1 es valor regular de F.*

2. *La parametrización $\varphi(u, v) = (cos(u), sin(u), v)$, cubre todo el cilindro menos una recta.*



Ejemplo 9 (Superficies de revolución)**.** *Consideremos una curva γ contenida en el plano XY y que no cruza el eje Z*



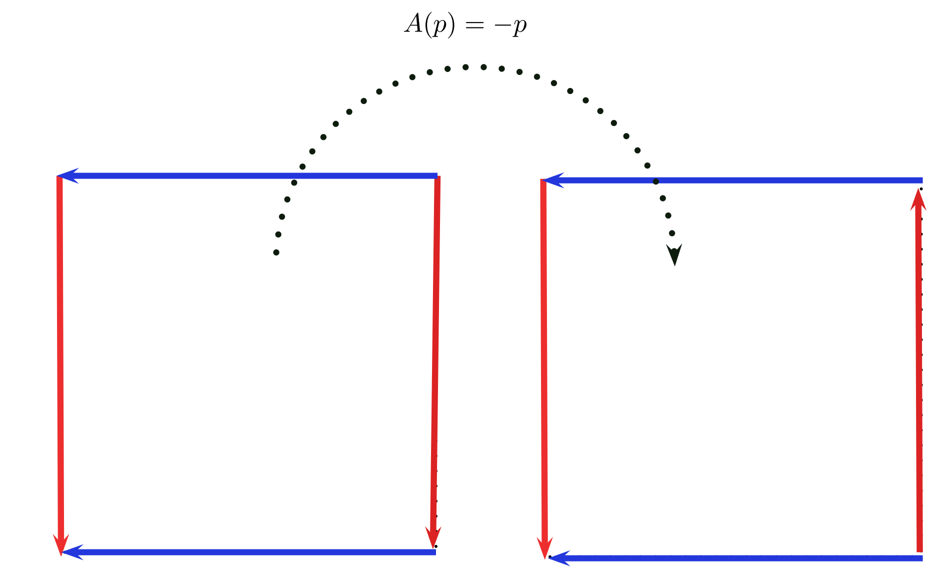


2.3. Curvatura gaussiana

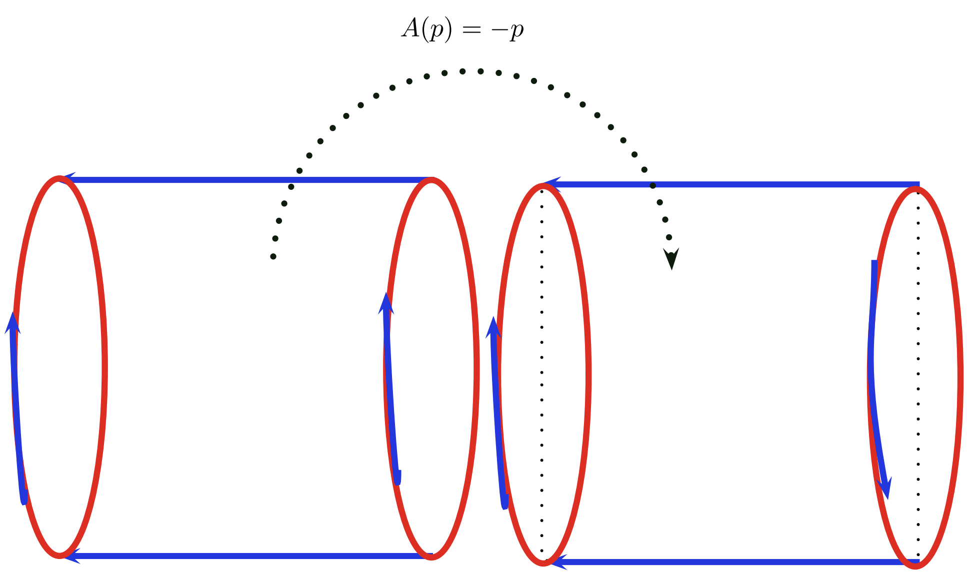
Consideremos una curva definida en una superficie diferenciable

2.4. Variedades diferenciales I

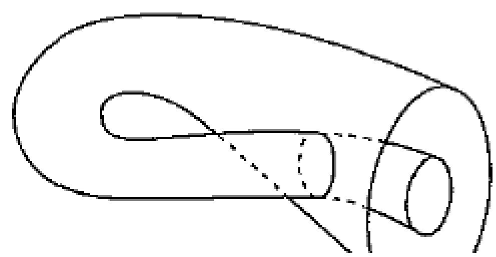
Hasta ahora nuestros ejemplos se restringen a que nuestras superficies están completamente contenidas en el euclidiano $\mathbb{R}^3$. Consideremos un ejemplo sencillo. La botella de Klein. Topológicamente se trata de un espaci

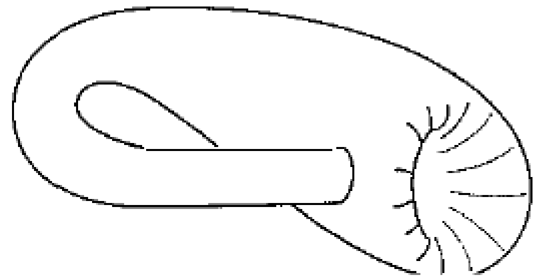


S



S





Capítulo 3

Variedades diferenciables