Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Pedro Miramontes
Augusto Cabrera Becerril
Ulises Rayón

20 de julio de 2020

Índice general

ÍNDICE GENERAL

Parte I

Primera Parte

Capítulo 1

Una nota histórica

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden: Lineales y no Lineales

2.1. Una idea intuitiva

Supongamos que tenemos los siguientes datos de una población de bacterias: La gráfica de los datos luce de la siguiente manera: Ahora, notemos que podemos calcular, dado los datos, la pendiente entre cualesquiera dos puntos. La pendiente es:

$$m_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} \tag{2.1}$$

Ahora, de alguna forma lo que esto nos quiere decir es que existe una curva $x(t)$ que evaluada en el intervalo δt_i tiene una pendiente $x'(\Delta t_i) = m_i$.
En realidad hay muchas curvas que cumplen que $x'(\Delta t_i) = m_i$ sin embargo existe sólo una curva que además de eso $x(t_i) = p_i$. Notemos que además esta relación define una relación biyectiva entre los datos del tiempo y el tamaño de la población, podemos aventurarnos a decir que el dominio de la curva $x(t)$ es justamente los el conjunto $T = \{t : t \in [0, 15] \subset \mathbb{R}\}$ y la imagen son todos los puntos correspondientes a la poblaci'
Ahora bien, consideremos los datos que se reportan de otro experimento

2.2. Modelos simples de poblaciones

Consideremos la hipótesis siguiente: Cierta población de seres vivos crece de forma proporcional al tamaño de la población actual. Si llamamos $X(t)$ al tamaño de la población actual entonces un mecanismo de crecimiento como el que se propone esta descrito por la siguiente ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \rho X(t) \tag{2.2}$$

donde $\rho \neq 0$ es la tasa de nacimientos per cápita

La ecuación anterior es equivalente a la ecuación integral:

$$\int_{X(0)}^{X(t)} \frac{\mathrm{d}X}{X} = \rho \int_0^t \mathrm{d}\tau \tag{2.3}$$

Si llamamos $X_0 = X(0)$ a la población inicial, tenemos por el teorema fundamental del Cálculo:

$$\ln(X(t)) - \ln(X_0) = \rho(t) \tag{2.4}$$

o bien:

$$\ln(X(t)) = \ln(X_0) + \rho(t) \tag{2.5}$$

Tomando exponencial de ambos lados, obtenemos:

$$X(t) = X_0 e^{\rho t} \tag{2.6}$$

Es decir que si la población cambia de forma proporcional a su tamaño actual, entonces esta crece de forma exponencial. El comportamiento predicho por este modelo es poco razonable.

El inglés Malthus propuso este modelo en el siglo XIX. Su argumento era que mientras los recursos (la comida, etc) se producida con una tasa geométrica, el crecimiento de la población es exponencial y por tanto crece indefinidamente.

2.3. La separación de variables

Para la ecuación del crecimiento malthusiano utilizamos que la ecuación $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \rho X$ es equivalente a

$$\int \frac{\mathrm{d}X}{X} = \int \rho \mathrm{d}t$$

Esta idea es una técnica estándar para resolver cierta clase de ecuaciones, llamadas de variables separadas, veamos algunos ejemplos antes de dilucidar por qué funciona el truco de la separación de variables.

Ejemplo 1. *Consideremos la ecuación* $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = -\frac{X}{Y}$ *esta ecuación diferencial es equivalente a la ecuación integral*

$$\int Y \mathrm{d}Y = -\int X \mathrm{d}X$$

integrando formalmente tenemos

$$Y^2 + X^2 = \xi$$

para alguna constante no-negativa ξ*, las soluciones de este problema son círculos de radio* ξ *.*

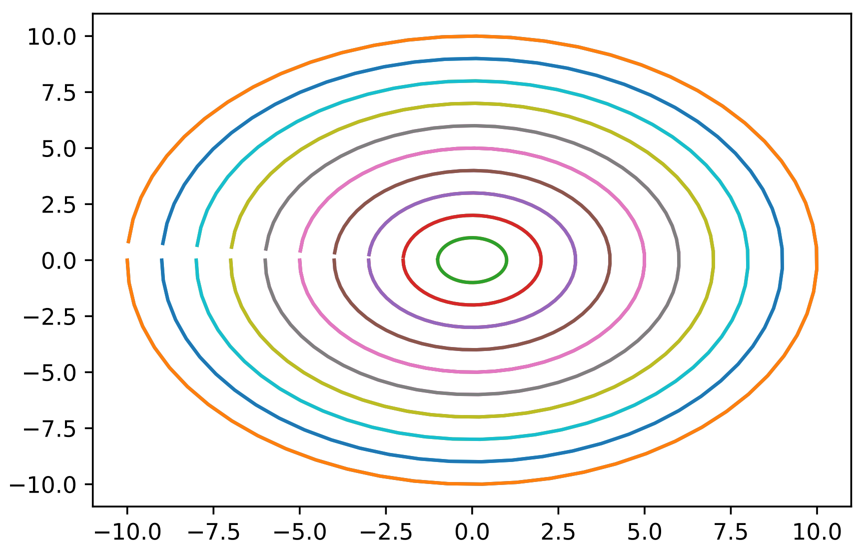

Figura 2.1: Soluciones para el problema $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = -\frac{X}{Y}$

Ejemplo 2. *Consideremos la ecuación* $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{Y}{X}$ *esta ecuación diferencial es equivalente a la ecuación integral*

$$\int \frac{\mathrm{d}Y}{Y} = -\int \frac{\mathrm{d}X}{X}X$$

integrando formalmente tenemos

$$\ln(Y) = \ln(X) + \xi$$

es decir

$$Y(X) = e^{\xi}X$$

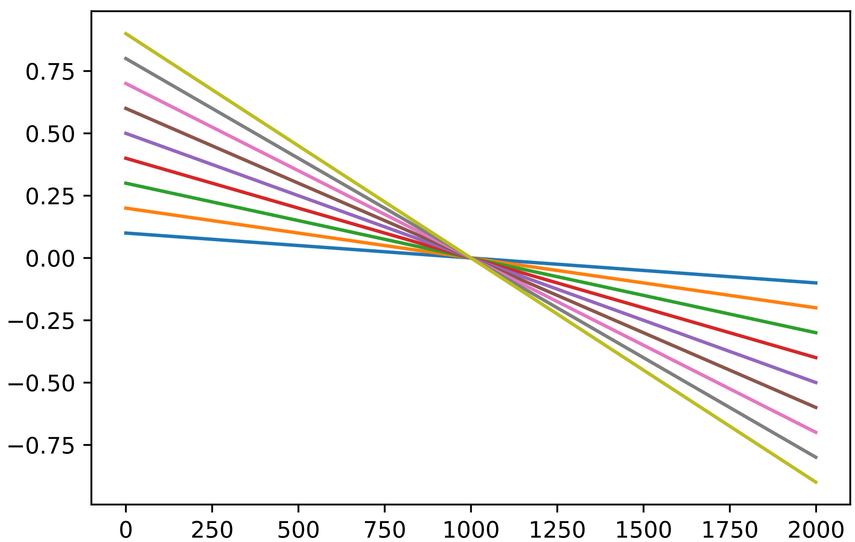

Figura 2.2: Soluciones para el problema $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{Y}{X}$ para distintas condiciones iniciales

Las ecuaciones que están dadas en la forma $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\Psi(X)}{\Phi(Y)}$ son llamadas de variables separadas, suponiendo que Ψy Φ son continuas en el dominio correspondiente, entonces la ecuación integral

$$\int \Phi(Y)\mathrm{d}Y = \int \Psi(X)\mathrm{d}X + \xi$$

Esta ecuación integral es llamada finita (¿Se imagina por qué?) y también la satisfacen las soluciones de la ecuación diferencial. Una función de la forma

$\Omega(x, y) = 0$ que determina a $Y(X)$ como función implícita es llamada integral de la ecuación diferencial, si además esta función determina sin excepción a todas las soluciones de la ecuación se llama una integral general.

Si $Y(X_0) = Y_0$ es una condición inicial, entonces la integral

$$\int_{Y_0}^{Y} \Phi(Y)\mathrm{d}Y = \int_{X_0}^{X} \Psi(X)\mathrm{d}X$$

determina de manera unívoca la solución.

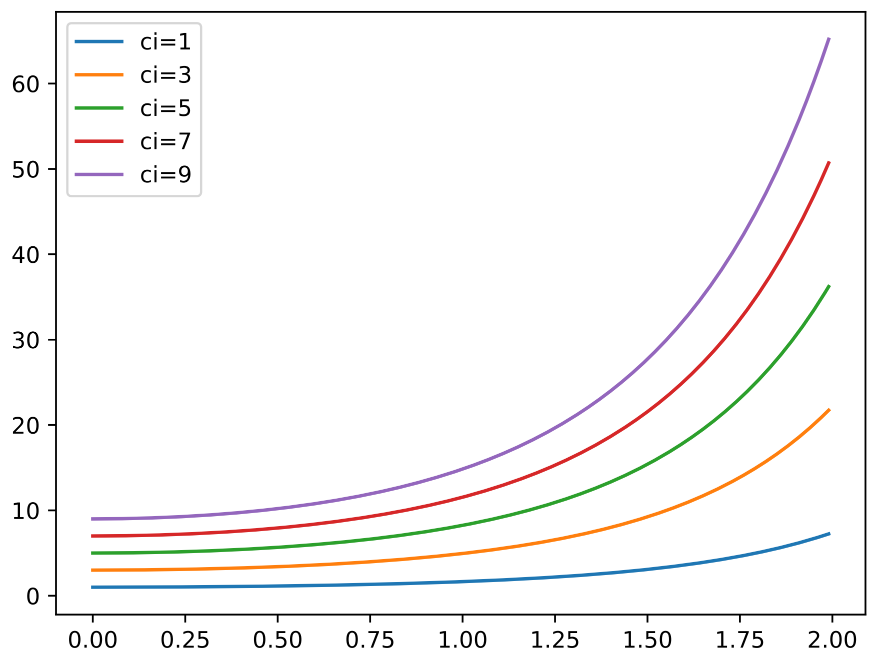

Figura 2.3: Soluciones de la ecuación de Malthus para distintos valores iniciales

Dada una condición inicial, para el problema del crecimiento exponencial, hay una solución única, para un valor fijo del parámetro ρ, ahora variaremos un poco este parámetro. Tenemos el siguiente comportamiento.

1. Para $\rho = 0$ la solución es constante, en general una solución constante es llamada estacionaria.

2. Para $\rho > 0$ El modelo describe u8n crecimiento ilimitado.

3. Para $\rho < 0$ El modelo describe un decrecimiento asintótico a cero. Podemos representar el cambio cualitativo de las soluciones cuando variamos el parámetro mediante la llamada linea fase.

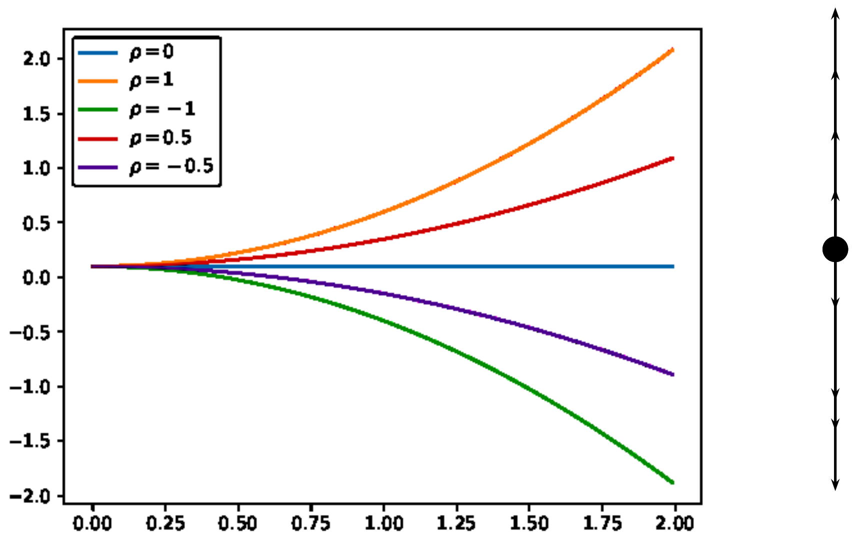

Figura 2.4: distintos valores para el parámetro ρ

Ahora pensemos en la siguiente ecuación:

$$\varphi_1(x)\psi(y)\mathrm{d}x = \varphi_2(x)\psi_2(y)\mathrm{d}y$$

no es una de variables separadas. Ahora si tenemos garantizado que : $\varphi_2(x) \neq 0$ y $\psi_2(y) \neq 0$, podemos considerar la ecuación equivalente

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\mathrm{d}x = \frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)}\mathrm{d}y$$

que si es de variables separadas. A este tipo de ecuación se le llamda de variables separables.

Ahora hagamos un par de ejemplos sencillos:

Ejemplo 3. *Consideremos la ecuación*

$$x(1+y^2)\mathrm{d}x - y(1+x^2)\mathrm{d}y = 0$$

está garantizado que tanto $1+y^2$ como $1+x^2$ son estríctamente positivos, así que nuestra ecuación es equivalente a la ecuación de variables separadas

$$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

que a su vez es equivalente a la ecuación integral

$$\int \frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

cuya solución es

$$\ln(1+y^2) - \ln(1+x^2) = \xi$$

y finalmente, tomando exponencial en ambos términos de la ecuación

$$\frac{1+y^2}{1+x^2} = e^{\xi} = \zeta$$

Ejemplo 4. *La ecuación*

$$\dot{x} = 4t\sqrt{x}$$

con condición inicial $x(1) = 1$ *es de variables separables puesto que* $\sqrt{(}x)$ *no se anula si empezamos en* 1*. Nuestra ecuación es equivalente a:*

$$\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = 2t\mathrm{d}t$$

asi que

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}\xi}{2\sqrt{\xi}} = \int_1^t 2\tau\mathrm{d}\tau$$

y finalmente

$$x(t) = t^4$$

2.4. Decaimiento radioactivo

La velocidad de la desintegración radioactiva es proporcional a la cantidad x de sustancia no desintegrada. Supongamos que en un momento inicial t_0 tenemos una masa $x(t_0)$ y k es el coeficiente de desintegración, el fenómeno queda descrito por el siguiente problema de valores iniciales

$$\dot{x} = -kx \tag{2.7}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.8}$$

La solución para este problema de valores iniciales ya la conocemos

$$x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}$$

Ahora qué tanta información obtenemos del conocimiento de esta solución. Podemos calcular el tiempo en el cual ya se ha desintegrado la mitad de la masa inicial. Haciendo $\tau = t - t_0$ tenemos:

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-k\tau}$$

así, tomando $x_0 = 1$

$$\frac{1}{2} = e^{-k\tau}$$

y finalmente

$$\ln(\frac{1}{2}) = -k\tau$$

o equivalentemente

$$\tau = \frac{\ln 2}{k}$$

2.5. Problemas de mezclado

2.6. Un modelo de poblaciones más realista

En la primera sección vimos que el modelo propuesto por Malthus además de ser políticamente malintencionado, es a todas luces equivocado, ninguna población puede crecer permanente e ilimitadamente. Cualquier población ve acotado su crecimiento por cierta "presión" ejercida por el ambiente. ¿Cómo modelamos esta "presión"? El problema es ahora proponer un modelo para una población cuyo crecimiento quede acotado por su propia dinámica. Llamemos K a tal presión ambiental, en la literatura se le llama capacidad de carga del sistema, representa la cantidad de individuos de cierta población, a los que el medio puede proveer de subsistencia. Nuevamente consideraremos que la tasa intrínseca (natural) de crecimiento de la población es ρ y que el crecimiento es proporcional no sólo al tamaño de la población actual, sino que decrece proporcionalmente a la proporción entre la población actual y la capacidad de carga.

$$\dot{x} = \rho(1 - \frac{x}{K})x \tag{2.9}$$

Lo primero que debemos notar es que esta ecuación ya no es lineal en x, tiene un término cuadrático que de alguna forma nos da información sobre las interacciones intraespecíficas de la población. Ahora busquemos las soluciones de equilibrio, es decir aquellas para las cuales no hay cambios en la población. En este caso es claro que cuando $x = 0$ ó $\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) = 0$, entonces $\dot{x} \equiv 0$. Al caso $x = 0$ lo llamaremos el equilibrio trivial, y corresponde a que no hay ningún cambio en la población, cuando $\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) = 0$ tenemos que $x \equiv K$, es decir que al alcanzar la capacidad de carga del sistema el crecimiento se detiene.

Consideremos la función polinomial $x \mapsto \rho(1-\frac{x}{K})x$ es una cuadrática cóncava en la dirección negativa del eje Y, que cruza al eje horizontal en los puntos $(0, 0)$ y $(0, K)$ el punto máximo de la parábola $\rho x - \rho\dfrac{x^2}{K} = 0$ se alcanza cuando $\rho - 2\rho\dfrac{x}{K} = 0$ o equivalentemente $x = \dfrac{K}{2}$, así para distintos valores de K, el máximo de la parábola está más o menos alejado de la gráfica de la identidad. Las soluciones de la ecuación se alejan del $(0, 0)$ y se aproximan a $(0, K)$.

Nótese que si la condición inicial es menor que el parametro K, entonces . Ahora si iniciamos en una condición $x_0 > K$ entonces el cociente $\dfrac{x_0}{K} > 1$ y la derivada $\dot{x} < 0$ y por lo tanto las soluciones son decrecientes y en ambos casos se aproximan asintóticamente a $x \equiv K$, en efecto tomamos el límite

Ahora analicemos el caso más sencillo. Tomamos $K = 1$. Si aplicamos el truco de la separación de variables, tenemos la ecuación integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)} = \rho \int \mathrm{d}t \tag{2.10}$$

resolviendo por fracciones parciales tenemos

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \rho x + \xi_0$$

tenemos que:

$$\ln(\frac{x}{(1-x)} = \rho t + \xi_1$$

se sigue que:

$$x(t) = \xi \frac{e^{\rho t}}{1+e}$$

2.7. Teoremas de existencia y unicidad de las soluciones

La clase de las ecuaciones diferenciales ordinarias que son integrables por cuadraturas es muy limitada, por ello la mayoría de las ecuaciones se resuelve usando métodos de aproximación numérica.

Teorema 1. *Si en la ecuación*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f(x,y)$$

la función f es continua en $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, además f es Lipschitz-continua en D, es decir que existe una constante N tal que $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq N|y_1, y_2|$ para $(x_i, y_i) \in D$.

Entonces existe una solución única $y = \bar{y}(x)$ en el intervalo $[x_0 - H, x_0 + H]$ que satisface $y(x_0) = y_0$ y donde $H < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\}$, $M = \max_D\{|f(x,y)|\}$

Las condiciones del teorema requieren aclaración. La solución para la ecuación, que satisface las condiciones iniciales existe sólo para $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ pero y puede existir fuera del rectángulo D. Es decir $y = y_0 \pm b$ para algún $x = x_1 \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Si $x_1 > x_0$ para $x > x_1$, la solución puede no estar definida.

Podemos garantizar que $y = \bar{y}(x)$ no se sale de D cuando $x \in [x_0 - H, x_0 + H]$ con $H < a$ y $H < \frac{b}{M}$, $M = \tan\alpha$. Donde α es el coeficiente angular de latangente a la curva integral buscada. Si estas rectas se salen de D entonces las absisas de los puntos de corte son $x_0 \pm \dfrac{b}{M}$. Así la absisa del punto de salida de lacurva inegral de D puede solamente ser menor o igual que $x_0 + \frac{b}{M}$ y mayor o igual que $x_0 - \frac{b}{M}$. Puede mostrarse la existencia dela solución en $[x_0 - H, x_0 + H]$ con $H = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ pero será más sencillo mostrarlo para $H < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\}$

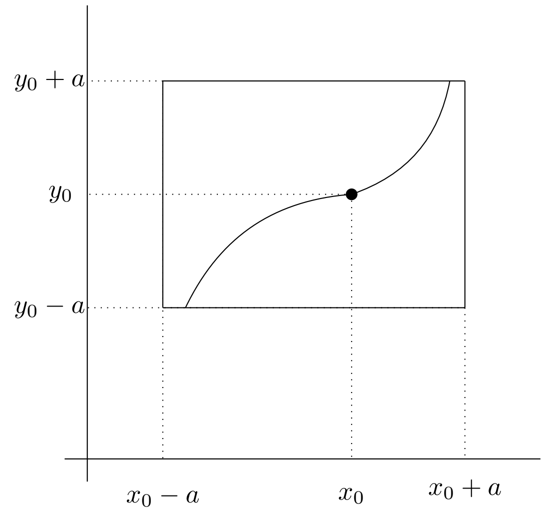

Figura 2.5:

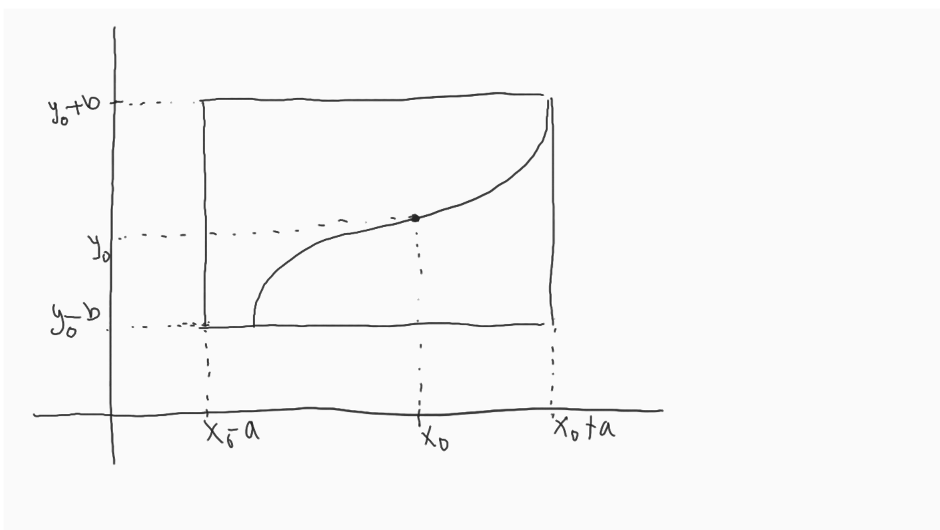

Figura 2.6: Caption

La condición de Lipschitz

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq N(y_1 - y_2)$$

puede ser sustituida por otra más fuerte, pero más fácilmente comprobable, la existencia de $\partial_y f^{'}$ en D y que sea acotada.

En efecto para $(x, y) \in D$ y $|f'_y(x, y)| \leq N$ entonces por el teorema del valor intermedio:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |f'_y(x, \xi)| - |y_1 - y_2|$$

con $\xi \in (y_1, y_2)$. Así $(x, \xi) \in D$ y $|f_y(x, \xi)| \leq N$, $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$.

Prueba. Observemos primero que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

es equivalente a

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x$$

En efecto:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x$$

así

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x$$

y por tanto

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x$$

Ahora, hagamos una aproximación de la solución usando Euler

$$y = y_n(x)$$

con paso $h_n = \frac{H}{n}$ en $[x_0, x_0 + H]$.

La poligonal asociada a la aproximación de Euler no sale de la región D pues el coeficiente angular de cada segnmento es menor que M en módulo.

A continuación probaremos que

1. la sucesión (y_n) converge uniformemente.
2. $\bar{y}(x) = \text{lím}_{n \to infty}\, y_n$ es solución para la ecuación integral.
3. La solución es única

Probemos (**1**). $\square$

Capítulo 3

Sistemas Lineales Planos y Ecuaciones de Orden Superior

Capítulo 4

Sistemas Tres Dimensionales y Sistemas No Lineales

Capítulo 5

Atractores Extraños y Caos

Capítulo 6

Teoría de Estabilidad

Capítulo 7

Sistemas Conservativos y Disipativos

Bibliography