V SPAZIO FUNZIONI es. $C([0,1])$, C^3, L^2

L FUNZIONALE LINEARE

$L : V \to \mathbb{R}$ $\quad v, u \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

es.

$L(u) = u(0)$

$L(5 \cdot \sin(x) + 3 \cos(x)) =$

$5 \cdot \sin(0) + 3 \cos(0) =$

$= 5 \cdot L(\sin(x)) + 3 L(\cos(x))$

FUNZIONALE BILINEARE

$B : V \times V \to \mathbb{R}$

$B(\alpha u + \beta v, w) =$

$\alpha B(u, w) + \beta B(v, w)$

$B(u, \alpha v + \beta w) =$

$= \alpha B(u, v) + \beta B(u, w)$

$u, w, v \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- es. $B(u, v) := \int_0^1 u \cdot v \, dx$

- L UN FUNZIONALE $: V \to \mathbb{R}$

SI DICE LIMITATO se $\exists C : |L(u)| \leq C \cdot \|u\|_V$

- ERRORE SCIOGE Z $\|\cdot\|_V \in |\cdot|$

SE V È UNO SPAZIO DI BANACH

COMPLETO = OGNI SUCCESSIONE DI CAUCHY IN V CONVERGE A UN ELEMENTO IN V

es. $\mathbb{Q}$

- UNA SUCCESSIONE $x_k \subset V$ è di CAUCHY se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0$:

$$\boxed{d(x_k, x_z) < \varepsilon} \quad \forall \ k, z > N$$

$\sqrt{2} = 1,41\ldots$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1,4$

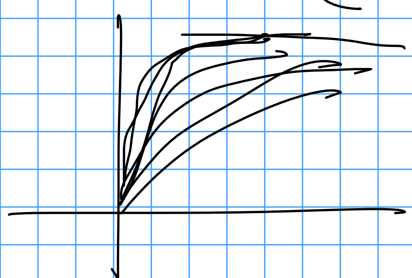
$x_2 = 1,41$

$x_k \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \mathbb{Q}$ NON È COMPLETO

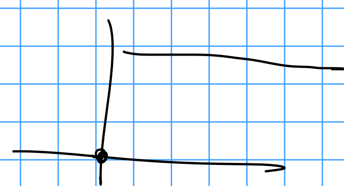
es. $\mathbb{R}$

$\mathcal{C}$



$\Rightarrow$

$\notin \mathcal{C}$



$$d(f_k, f_z) = \sup_{x \in [a,b]} |f_k(x) - f_z(x)|$$

$$\mathcal{C}([a,b])$$

$|L(u)| \le c \|u\|$

- L LINEARE E LIMITATO SU V È SPAZIO DI BANACH

$$d(u,v) = \|u - v\|_V$$

$\Rightarrow L$ È CONTINUO.

- SPAZIO DUALE

V SPAZIO FUNZIONALE DEFINIATO

$V^* = V'$ SPAZIO DUALE

$V^* := \{ F : V \to \mathbb{R} \mid F$ È LINEARE E LIMITATO $\}$

NORMA SUL DUALE

$$\|L\| := \sup_{\|u\|_V \leq 1} |L(u)| = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{|L(u)|}{\|u\|_V} \qquad u \in V$$

---

es. $L^2([0,1])$: $\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^1 u^2 \, dx}$

SPAZIO DI HILBERT H È SPAZIO

+ PRODOTTO SCALARE $\langle u, v \rangle_H \in \mathbb{R}$ $u, v \in H$

È COMPLETO RISPETTO ALLA METRICA DEDOTTA DAL PRODOTTO SCALARE $d(u,v) = \|u - v\|_H$

$$= \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \to \mathbb{R}$

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ

$\forall L : H \to \mathbb{R}$ H HILBERT $\exists! \, v_L \in H$:

LIMITATO E LINEARE

$L(u) = (u, v_L)_H \quad \forall u \in H$

INOLTRE $\|L\|_{H^*} = \|v_L\|_H$.

$\forall u \in H \quad \exists!\ L_u \in H^*$ LIMITATO e LINEARE:

$L_u(v) = (u, v)_H \quad \forall v \in H$.

$\|L_u\|_{H^*} = \|u\|_H$

---

es. $\mathbb{R}^2 \quad ? = (\mathbb{R}^2)^*$

$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle = ac + bd$

$\left\| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{a^2+b^2} \qquad L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\forall L\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \exists! \begin{pmatrix} c_L \\ d_L \end{pmatrix}$

$L\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} c_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}$

$\langle u, v \rangle_{L^2} := \int_a^b u \cdot v \, dx$

es. $L^2((a,b)) = \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_a^b f^2 < \infty \right\}$

$L^2((a,b))$ HILBERT $\Rightarrow$

F FUNZ. LINEARE su L^2 LIMITATO $\qquad F : L^2(a,b) \to \mathbb{R}$

$\forall u \in L^2(a,b)$

$\exists\, g_F \in L^2(a,b) : \quad F(u) = \int_a^b g_F \cdot u \, dx = \langle u, g_F \rangle_{L^2}$

FUNZIONALE BILINEARE $a(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$

- CONTINUITÀ se $\exists M > 0$:

$$a(u,v) \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u,v \in V$$

$$\frac{a(u,v)}{\|u\|_V \|v\|_V} \leq M$$

$$C = \sup_{u,v \neq 0} \frac{a(u,v)}{\|u\|_V \|v\|_V}$$

$\downarrow$

COSTANTE DI CONTINUITÀ DI a

$\Rightarrow$ EQUIVALENTE C IL PIÙ PICCOLO $M > 0$

$: \quad a(u,v) \leq M \cdot \|u\|_V \cdot \|v\|_V$

- a è SIMMETRICO se $a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v \in V$
- a è POSITIVO se $a(u,u) > 0 \quad \forall u \in V$, $u \neq 0 \in V$
- a è COERCIVO se $\exists \alpha > 0$

$: \quad a(u,u) > \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$

COEFFICIENTE DI COERCIVITÀ A

$$\inf_{u \neq 0} \frac{a(u,u)}{\|u\|_V^2} = A$$

es. in $\mathbb{R}^2 = V$ $\qquad [\;\;][\;\;][\;] = \square \in \mathbb{R}$

$$q(u,v) := \underset{\mathbb{R}^2}{u^T} \; \underset{\mathbb{R}^{2\times 2}}{B} \; \underset{\mathbb{R}^2}{v} \in \mathbb{R}$$

$$\sup_{u,v \neq 0} \frac{u^T B v}{\|u\|_2 \|v\|_2} \qquad\qquad \inf_{u \neq 0} \frac{u^T B u}{\|u\|^2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \inf \frac{|u^T B v|}{\|u\| \|v\|} = 0$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \|u\|^2 \leq \frac{q(u,u)}{\alpha}$$

$$u^T B u = u^T u = \|u\|^2 > 0$$

POSITIVA $\qquad \forall u \neq 0$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u^T B u = -1$$

NON POSITIVA

DISTRIBUZIONI

$\Omega \subset \mathbb{R}^d \qquad f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subset \Omega = (a,b)$$

$$f(x) \equiv 1 \qquad \overline{(a,b)} = [a,b]$$

$$(a,b)$$

SUPPORTO COMPATTO
||
CHIUSO e LIMITATO

f : $\operatorname{supp}(f)$ è COMPATTO

$$C^\infty_c(\Omega) =: D(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty \mid \operatorname{supp}(f) \text{ è compatto} \}$$

DEFINIZIONE
$D(\Omega)$

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(\Omega)$$

$$f_n \to f \in D(\Omega)$$

se $\exists K \subset \Omega$: $\operatorname{supp}(f_n) \subset K \quad \forall n$

e se TUTTE LE DERIVATE DI f_n

$$\partial^{p_1}_{x_1} \cdots \partial^{p_d}_{x_d} f_n \longrightarrow \partial^{p_1}_{x_1} \cdots \partial^{p_d}_{x_d} f \qquad \forall p_1, \dots, p_d$$

UNA DISTRIBUZIONE è UN FUNZIONALE LINEARE

$T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ CONTINUO cioè

$$\lim_{k \to \infty} T(\varphi_k) = T(\varphi) \qquad \forall \varphi_k \xrightarrow[D]{} \varphi$$

$D^*(\Omega)$ È IL DUALE DI $D(\Omega)$.

$T \in D^*(\Omega)$ $\quad T(f) = \langle T, f \rangle$

$f \in D(\Omega)$

es. $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ $\quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi \in D(\mathbb{R})$

δ_a È CONTINUO PERCHÉ $\quad \delta_a \in D^*(\mathbb{R})$

$\forall \varphi_k \xrightarrow{D} \varphi \quad \delta_a(\varphi_k) = \varphi_k(a) \to \varphi(a) = \delta_a(\varphi)$ $\boxtimes$

DEFINIZIONE CONVERGENZA IN $D^*(\Omega)$

$\underset{\substack{\uparrow \\ D^*(\Omega)}}{T_n}$ CONVERGE A $T \in D^*(\Omega)$ se

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ \int_\Omega f^2(x)\,dx < \infty \right\}$$

$L^2(\Omega)$ È SPAZIO HILBERT CON

- PRODOTTO SCALARE $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_\Omega f \cdot g \, dx$
- $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}} = \sqrt{\int_\Omega f^2(x)\,dx}$
- $f \in L^2 \longrightarrow T_f : L^2 \to \mathbb{R}$

$$T_f(g) := \int_\Omega f \cdot g \, dx \qquad \forall g \in L^2$$

$$\forall g \in D(\Omega) \subset L^2$$

$$\rightarrow T_f \in D^*(\Omega)$$

$D(\Omega)$ è DENSO IN $L^2(\Omega)$ $\quad \forall f \in L^2(\Omega)$

$$\exists \ \varphi_k \subset D(\Omega) : \|\varphi_k - f\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

$$D(\Omega) \subset L^2 = \left(\underline{L^2(\Omega)}\right)^* = L^2(\Omega) \subset D^*(\Omega)$$

---

es. DIRAC DELTA $\qquad \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$

$\qquad \in D^*(\Omega)$

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [a,b] \\ 1 & \text{se } x \in [a,b] \end{cases}$$

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \chi_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(x) \in L^2((-1,1))$$

$$\in L^{2*}$$

$$T_{f_n}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \cdot \varphi(x) \, dx = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x) \, dx$$

$$= \left(\Phi\left(\frac{1}{n}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{n}\right) \right) \frac{n}{2} \qquad \frac{d}{dx} \Phi(x) = \varphi(x)$$

$$\lim_{n \to \infty} T_{f_n}(\varphi) = \lim_{n \to \infty} \frac{\Phi\left(\frac{1}{n}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{n}\right)}{2/n} = \frac{d}{dx} \Phi(0)$$

$= \varphi(0)$

$T_{f_n}(\varphi) \longrightarrow \varphi(0) = \delta_0(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$