Calcolo Scientifico 2024/2025

Davide Torlo

Info sul docente

- Ricercatore in Sapienza dal 2024
- Mi occupo di metodi numerici per equazioni alle derivate parziali iperboliche
  - Metodi d'alto ordine
  - Metodi che preservano proprietà fisiche delle soluzioni
  - Modelli ridotti per accelerare la soluzione di problemi parametrici
- Mail davide.torlo@uniroma1.it
- Ufficio 5
- Ricevimento su appuntamento

Informazioni sul corso

- 48 ore
- Materiale su GitHub (slides, note, esercizi, codici, progetti)
- Lezioni: slides + note + codice
- Laboratorio: portate il PC e sviluppiamo il codice un po' in classe un po' a casa
- Lezioni: come siete messi il giovedì mattina?

Esame:

- Progetto (gruppi da 2/3 persone)
- Orale dove si presenta il progetto (preferibilmente tutto il gruppo assieme) e qualche domandina
- Date flessibili (meglio se tutto il gruppo insieme)

Informazioni sul corso

Progetto:

- Durante il corso vi faccio alcune proposte, ma sono ben accette anche vostre proposte
- Progetti di sviluppo di un metodo per alcune equazioni/problemi specifici con qualche difficoltà aggiunta rispetto a quello che facciamo in classe
- Repository su git -> Conoscete git?

Informazioni sul corso

Materiale

- Slides, pasticciandole qua e là
- Libri:
  - Quarteroni, Alfio. Modellistica Numerica per Problemi Differenziali. Springer Science & Business Media, 2016.
  - Cangiani, Andrea. Note del corso Numerical Solution of Partial Differential Equations in SISSA, 2024.
  - Evans, Lawrence C. Partial differential equations. Vol. 19. American Mathematical Society, 2010. [Introduzione alle PDE]
  - LeVeque, Randall J. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. [Metodi alle differenze finite]
  - LeVeque, Randall J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Vol. 31. Cambridge university press, 2002. [Metodi ai volumi finiti]
  - Langtangen, Hans Petter, and Anders Logg. Solving PDEs in python: the FEniCS tutorial I. Springer Nature, 2017. [Manuale per usare FEniCS]

Informazioni sul corso

Prerequisiti

- Analisi II
- Metodi numerici per (equazioni alle derivate ordinarie) ODE
- Python 3
- Git? Notes Slides by Pasquale Africa

Informazioni sul corso

Computer setting

- Python 3, ipykernel for Jupyter Notebooks (also Google Colab)
- IDE (Integrated Develpment Environment) tipo VisualStudio Code
- Mac/Linux/Windows tutto ok, io uso Linux

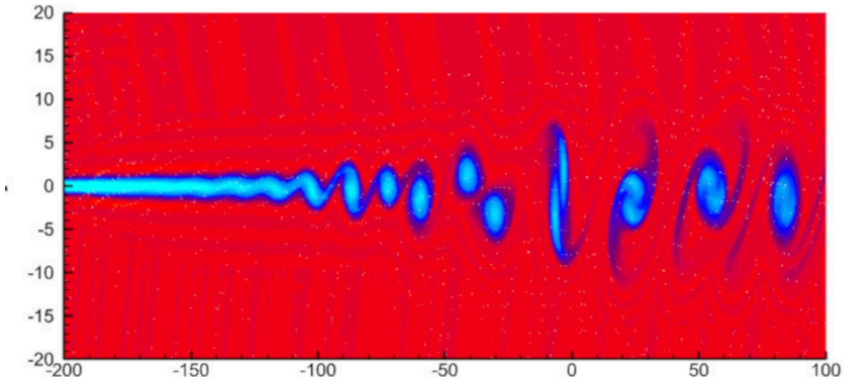
Introduzione al corso

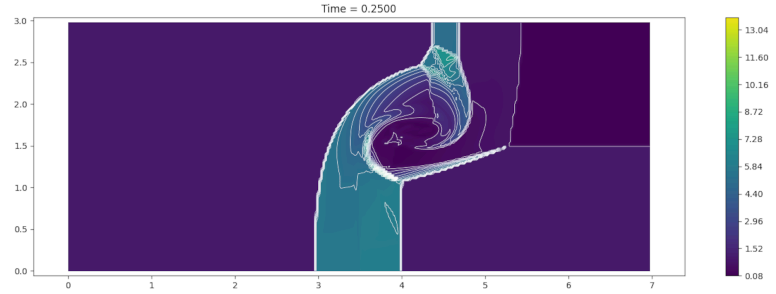
Equazioni alle derivate parziali

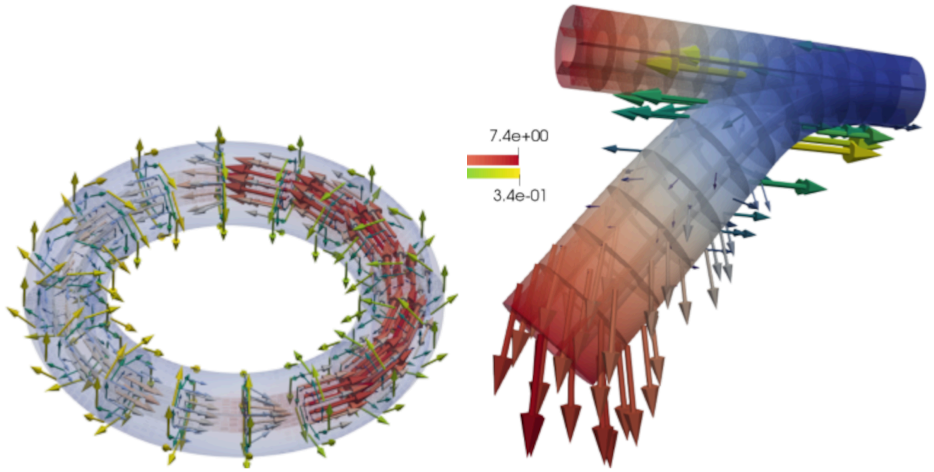
- La **fisica** ha sempre studiato i fenomeni naturali e ha cercato di descriverli in strumenti matematici.
- I **modelli** sono approssimazioni matematiche della descrizione dei fenomeni naturali, per un singolo fenomeno diversi livelli di approssimazione possono portare a diversi modelli.
- Le **equazioni alle derivate parziali** (PDE) sono strumenti che hanno permesso di descrivere molti fenomeni fisici.
- La **matematica** fornisce gli strumenti per studiare ed analizzare le equazioni che descrivono i modelli fisici.
- L'**analisi numerica** approssima le soluzioni di queste equazioni quando soluzioni analitiche non sono disponibili.

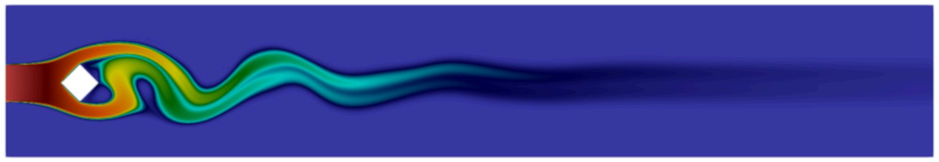
Applicazioni delle PDE

- Diffusione di calore
- Elasticità e deformazione di solidi
- Vibrazioni
- Fluidi: acqua, gas, meteo
- Interazione fluidi-strutture
- Diffusione di agenti biologici/inquinanti
- Elettro-magnetismo
- Combinazioni di questi









PDE

$\Omega \in \mathbb{R}^d$ where $d > 1$

$u : \Omega \to R^s$ where $s \in \mathbb{N}_0$

Una PDE di ordine k si scrive come

$$F(\nabla^{(k)}u, \nabla^{(k-1)}u, \ldots, \nabla u, u) = 0$$

Dove indico con $\nabla^{(j)}u$ il tensore con tutte le possibili derivate di ordine j-esimo. Per esempio in 2D $(x, y) \in \Omega$,

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}, \qquad \nabla^{(2)}u = \begin{pmatrix} \partial_{xx}u & \partial_{xy}u \\ \partial_{yx}u & \partial_{yy}u \end{pmatrix}.$$

Esempi

Nome	Equazione
Equazione del trasporto in 1D	$\partial_t u + c\partial_x u = 0$
Equazione del calore in 1D	$\partial_t u + c\partial_{xx} u = 0$
Equazione di Burgers in 1D	$\partial_t u + u\partial_x u = 0$
Equazione di Laplace in 2D	$\partial_{xx} u + \partial_{yy} u = 0$
Navier Stokes incomprimibile	$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f$ and $-\mathrm{div} u = 0$

Notazione derivate

Come già avete potuto notare dall'ultima slide, ci sono più notazioni per indicare le derivate parziali e totali.

Notazione	Significato
$\partial_t u(t, x, y, \ldots)$	Derivata parziale in una variabile
$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x, y, \ldots)$	Derivata parziale in una variabile
$u_t(t, x, y, \ldots)$	Derivata parziale in una variabile
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t, x(t), y(t), \ldots)$	Derivata totale in una variabile
$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}$	Gradiente in 2D
$\Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u$	Laplaciano in 2D
$\operatorname{div} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \nabla \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \partial_x u + \partial_y v$	Divergenza in 2D

Metodi Numerici

Trovare soluzioni esatte di PDE non è sempre facile, in particolare se:

- la geometria del dominio Ω è complicata (ponti, aerei, etc.),
- le equazioni sono complicate (nonlinearità, ordini alti, etc.).

L'analisi numerica fornisce strumenti per la risoluzione delle PDE. Vari metodi, ma più o meno tutti seguono queste procedure:

1. Discretizzazione del dominio
2. Discretizzazione dello spazio delle funzioni dove cerco la soluzione
3. Discretizzazione delle equazioni (il metodo numerico vero e proprio)
4. Risoluzione delle equazioni discretizzate

Alcuni Metodi Numerici

Nel tempo numerosi metodi numerici sono stati sviluppati (alcuni più specifici per alcune applicazioni, altri più generici)

- Finite Difference (FD)
- Finite Volume (FV)
- Galerkin approximations:
  - Continous Finite Elements (FEM)
  - Discontinuous Galerkin (DG)
  - Spectral Methods
  - Spectral Element Methods (SEM)
  - Summation by parts (SBP)
- Physics Informed Neural Networks (PINN)

Syllabus del corso

- Topic: metodi numerici per l'approssimazione di equazioni alle derivate parziali (PDE: partial differential equations)

Argomenti (circa):

- ripasso di ODE [2h] (se necessario);
- introduzione alle PDE [6h];
- finite difference methods [8h = 4h classes + 4h lab];
- finite element methods [18h = 10h classes + 8h lab];
- finite volume methods [10h = 7h classes + 3h lab];
- physics informed neural networks [2h = 1h class + 1h lab];
- model order reduction [2h = 1h class + 1h lab].

Ripasso di ODE?

Sì

- Teoria delle ODE
- Eulero Implicito ed esplicito
- Runge Kutta e Multistep

No