

Lecture 10 - Hypothesis Testing 2

Sim, Min Kyu, Ph.D., mksim@seoultech.ac.kr



서울과학기술대학교 IT정책전문대학원

1 I. 연습 문제

2 II. 두 개의 모집단의 모비율에 대한 검정

I. 연습 문제

단일 모집단의 모평균에 대한 검정

Exercise 1

- 7개의 표본으로 부터 표본평균은 36.6, 표본분산은 15.5를 얻었다. 모평균이 34와 같은지 90% 수준에서 검증하라.

두개의 모집단의 모평균에 대한 검정 (독립표본)

Exercise 2

- 20개로 이루어진 A 표본의 표본평균은 38.6이고, 표본분산은 13.7이다.
- 30개로 이루어진 B 표본의 표본평균은 35.4이고, 표본분산은 10.9이다.
- 두 그룹의 모평균의 차이가 있는지 95% 수준에서 검정하라.

두 개의 모집단의 모평균에 대한 검정 (쌍대표본)

Exercise 3

- 10명을 대상으로 왼손과 오른손의 악력을 측정한 결과가 아래와 같다. 오른손 악력의 모평균이 왼손 악력의 모평균보다 큰지 95% 수준에서 검정하라.

```
left <- c(25, 24, 35, 34, 33,  
          26, 40, 38, 23, 41)  
right <- c(22, 27, 40, 41, 35,  
           35, 47, 42, 24, 38)
```


II. 두 개의 모집단의 모비율에 대한 검정

Overview

단일모집단 두개의 모집단

모평균에 대한 검정
모비율에 대한 검정
모상관계수에 대한 검정
모분산에 대한 검정

Recap

Recap - 단일모집단의 모비율에 대한 검정 (L09, Sec III)

- 이항분포의 정규분포 근사 성질을 이용
- 분포

$$p \sim N(\hat{p}, \frac{\hat{p}\hat{q}}{n})$$

- 검정 통계량

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

- $100(1 - \alpha)\%$ 신뢰구간

$$p \in [\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}]$$

Development

분포의 유도 (1/2)

- 두 개의 모집단에 대한 이항시행에 대해서 각각의 성공확률을 p_1 과 p_2 라고 한다면,
- (첫 번째 집단에 대해서 n_1 번 시행하여 \hat{p}_1 비율의 성공을 거두었음)
- (두 번째 집단에 대해서 n_2 번 시행하여 \hat{p}_2 비율의 성공을 거두었음)
- 분포

$$p_1 \sim N\left(\hat{p}_1, \frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1}\right), p_2 \sim N\left(\hat{p}_2, \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}\right)$$

- 두 개의 모집단이 독립이므로 (why?), 두 모집단의 모비율의 차이는 아래와 같이 요약할 수 있다.

$$p_1 - p_2 \sim N\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2, \frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}\right)$$

분포의 유도 (2/2)

- From

$$p_1 - p_2 \sim N \left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2, \frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2} \right)$$

- 위의 분포식의 간소화 과정

1. Notation 추가 (x_1 과 x_2)

- 첫 번째 집단: n_1 번 시행, x_1 번 성공, \hat{p}_1 의 성공 비율
- 두 번째 집단: n_2 번 시행, x_2 번 성공, \hat{p}_2 의 성공 비율

2. 분산을 간소화 함

$$\begin{aligned} Var(p_1 - p_2) &= \frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2} = \hat{p}_1 \hat{q}_1 \frac{1}{n_1} + \hat{p}_2 \hat{q}_2 \frac{1}{n_2} \\ &\approx \hat{p} \hat{q} \frac{1}{n_1} + \hat{p} \hat{q} \frac{1}{n_2} = \hat{p} \hat{q} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right), \end{aligned}$$

여기에서 $\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ and $\hat{q} = 1 - \hat{p}$. 즉, \hat{p} 는 두 표본집단을 통틀어서 이항실험의 성공비율

3. 결론적으로,

$$p_1 - p_2 \sim N \left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2, \hat{p} \hat{q} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \right)$$

Summary

- 이항분포의 정규분포 근사 성질 + 두 정규분포의 합
- 분포

$$p_1 - p_2 \sim N \left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2, \hat{p}\hat{q} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \right)$$

- 검정 통계량

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

- $100(1 - \alpha)\%$ 신뢰구간

$$p_1 - p_2 \in [\pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}]$$

- Case 1. 양측검정
 - 가설: $H_0 : p_1 - p_2 = 0$ vs $H_A : p_1 - p_2 \neq 0$
 - 기각역: $|Z| \geq z_{\alpha/2}$
- Case 2. 단측검정
 - 가설: $H_0 : p_1 - p_2 \leq 0$ vs $H_A : p_1 - p_2 > 0$
 - 기각역: $Z \geq z_{\alpha}$
- Case 3. 단측검정
 - 가설: $H_0 : p_1 - p_2 \geq 0$ vs $H_A : p_1 - p_2 < 0$
 - 기각역: $Z \leq -z_{\alpha}$

Exercise 4

- 두 모집단에 대해서 이항시험을 실행하였다.
 - 모집단 A에 대해서는 9382번 시행하여 69.20%의 성공을 거두었다.
 - 모집단 B에 대해서는 3023번 시행하여 67.48%의 성공을 거두었다.
- 두 모집단에 대한 이항시험의 성공확률이 같은지 신뢰수준 95%에서 검정하라.

Exercise 5

- 아래 논문에 처음 등장하는 검정통계량인 -0.19가 맞게 계산되었는지를 확인하라.

6 M. K. SIM AND D. G. CHOI

Table 4. Test of path dependency on different surfaces.

Current state	Last point won by	Grass			Hard			Clay		
		Server's winning prob. in the next point (%)	Number of obs.	χ^2 statistics	Server's winning prob. in the next point (%)	Number of obs.	χ^2 statistics	Server's winning prob. in the next point (%)	Number of obs.	χ^2 statistics
15:15	Server	66.59	7,079	-0.19	64.40	34,302	0.76	62.06	17,513	-0.53
	Receiver	66.74	7,445		64.12	35,576		62.34	17,627	
30:15	Server	66.45	9,683	1.16	63.67	44,903	1.44	62.13	21,857	-1.67*
	Receiver	65.45	4,504		63.09	21,400		63.10	10,132	
15:30	Server	63.85	2,606	-0.41	61.83	13,130	1.11	60.77	6,829	0.44
	Receiver	64.33	4,841		61.25	24,975		60.45	13,283	
40:15	Server	69.20	9,382	1.77*	67.12	42,091	2.93***	65.06	19,972	3.60***
	Receiver	67.48	3,023		65.77	13,933		62.58	6,390	
30:30	Server	66.76	4,778	0.82	63.60	23,414	-0.12	60.58	12,180	-1.91**
	Receiver	65.97	4,805		63.65	24,212		61.78	12,017	
15:40	Server	63.66	853	0.18	61.50	4,893	0.66	60.28	2,694	1.1
	Receiver	63.32	2,669		60.96	14,691		59.08	7,932	
40:30	Server	65.74	6,360	0.06	63.52	30,304	-1.16	61.98	14,803	1.25
	Receiver	65.69	3,873		64.04	18,608		61.18	9,369	
30:40	Server	64.49	2,233	1.20	61.55	11,965	-0.04	60.06	6,310	0.43
	Receiver	62.89	3,223		61.57	17,322		59.72	9,394	
Deuce	Server	64.37	6,289	-0.42	62.79	32,997	1.09	60.82	17,458	0.08
	Receiver	64.72	6,327		62.38	33,012		60.78	17,220	

*p < 0.1; **p < 0.05; ***p < .01.


```
"This note is made with Rmarkdown"
```

```
## [1] "This note is made with Rmarkdown"
```