Übungsblatt 3: FE-Lösung des Bohrpfahlproblems

Aufgabe 1: Beitrag der verteilten Feder C

1.1 Vorüberlegungen.

- Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $u, v : [0, h] \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = 1 - x/h$ und $v(x) = x/h$ sowie der Produktfunktionen u^2, uv und v^2.

- Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$I_1 = \int_0^h u^2(x)\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^h u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{sowie} \quad I_3 = \int_0^h v^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ die stückweise linearen Basisfunktionen auf einem gleichmäßigen Gitter der Elementgröße h. Skizzieren Sie die Graphen der Produktfunktionen

$$\varphi_1\varphi_1, \quad \varphi_1\varphi_2, \quad \varphi_1\varphi_3, \quad \varphi_2\varphi_1, \quad \varphi_2\varphi_2 \quad \text{und} \quad \varphi_2\varphi_3$$

  und schreiben Sie jeweils den Wert des Integrals $\int_0^l \varphi_i\varphi_j\,\mathrm{d}x$ dazu.

1.2 Geben Sie die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^{\mathrm{C}}$ an.

Aufgabe 2: Beitrag der Feder S

2.1 Geben Sie die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^{\mathrm{S}}$ an.

Aufgabe 3: Lastvektor

3.1 Geben Sie den Beitrag $\mathbf{r}^n$ des Eigengewichts n zum Lastvektor an.

3.2 Geben Sie den Beitrag $\mathbf{r}^F$ der Auflast F zum Lastvektor an.

Aufgabe 4: Näherungslösung für den Bohrpfahl

Es soll in Matlab eine Näherungslösung für den Bohrpfahl bestimmt werden. Dabei sind die folgenden Systemparameter anzunehmen.

$E = 35 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m^2}$	$d = 0.8\,\mathrm{m}$	$l = 20\,\mathrm{m}$
$F = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$	$\rho = 2500\,\mathrm{kg/m^3}$	$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$
$C = 1.75 \cdot 10^7\,\pi\, d\,\mathrm{N/m^2}$	$S = 120 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m}$	

Für die Programmierung in Matlab bietet es sich an, die Werte in einem so genannten Struct zu speichern. Das geht so:

```
p = struct();
p.E = 35e9;
p.F = 2e6;
...
```

Unter einem Struct kann man sich eine Mehrfachvariable vorstellen, die unter einem übergeordnetem Namen mehrere Werte speichert. Auf die Werte in dem Struct kann dann mit dem Punkt zugegriffen werden, so ist zum Beispiel `p.E` der E-Modul.

Für den Bohrpfahl lässt sich die Lösungsfunktion analytisch bestimmen, zum Beispiel mithilfe des Computeralgebrasystems Mathematica. Mit den Konstanten $a_1 = 3 + 7\pi$ und $a_2 = 7\pi - 3$ und den Parametern oben lautet die Verschiebungsfunktion

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{\exp(-x/20)}{3500000 \cdot \pi \cdot (a_1 \cdot \exp(2) - a_2)} \cdot \Big(& 25000 \cdot \big(a_1 \cdot \exp(2) + a_2 \cdot \exp(x/10)\big) \\ & - 2943 \cdot \pi \cdot \exp(1) \cdot \big(\exp(x/10) + 1\big) \\ & + 981 \cdot \pi \cdot \exp(x/20) \cdot \big(a_1 \cdot \exp(2) - a_2\big)\Big). \end{aligned}$$

Zur Kontrolle: Es ist $u(0) \approx 0.003\,047\,\mathrm{m}$ und $u(20) \approx 0.001\,878\,\mathrm{m}$.

Die Funktion der Normalkraft ist

$$\begin{aligned} N(x) = -\frac{80 \cdot \exp(-x/20)}{a_1 \cdot \exp(2) - a_2} \Big(& 25000 \cdot \big(a_1 \cdot \exp(2) - a_2 \cdot \exp(x/10)\big) \\ & + 2943 \cdot \pi \cdot \exp(1) \cdot \big(\exp(x/10) - 1\big)\Big). \end{aligned}$$

Zur Kontrolle: Es gilt $N(0) = -2 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$ und $N(20) \approx -225\,418\,\mathrm{N}$.

Aufgaben

4.1 Definieren Sie das Struct `p` mit allen notwendigen Systemparametern.

Tipp: Es bietet sich an, hier auch aus den Parametern berechnete Werte wie n oder EA zu speichern.

4.2 Implementieren Sie die oben angegebenen Funktionen u und N als anonyme Matlab-Funktion. Verwenden Sie die Variablen `xR, uR, NR` um Referenzwerte auf einem sehr feinen Gitter (z.B. 1000 Punkte) zu speichern. Plotten Sie den Verlauf der Funktionen.

Tipp: Die Funktionen lassen sich einfach vektorisieren.

4.3 Programmieren Sie die Matlab-Funktion

```
function [xK, uHatK] = pileFEM(p, k)
    ...
end
```

die für die Systemparameter in `p` und die Anzahl der Elemente k den Vektor der Knotenpunkte $\mathbf{x}^k = (x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ sowie Lösungsvektor $\hat{\mathbf{u}}^k = (\hat{u}_1, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{k+1})$ berechnet. Testen Sie ihre Funktion für $k = 2$ Elemente und plotten Sie die zugehörige Näherungslösung zusammen mit der Referenzlösung. Zur Kontrolle: Es ist

$$\hat{\mathbf{u}}^2 = 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 3.0090 & 2.1786 & 1.8435 \end{pmatrix}^\top$$

Tipp: Schauen Sie sich die Matlab-Funktion `diag` *an. Selbstverständlich können Sie auch eine Schleife verwenden.*

4.4 Berechnen Sie Näherungslösungen für $k = 2, 4, 8, \ldots, 256$ Elemente. Plotten Sie alle Näherungslösungen zusammen mit der Referenzlösung.

Tipp: Wenn Sie mehrere Kurven in einer Schleife plotten wollen, dann geht das am einfachsten so:

```
for i = 1:100
  ...
  plot(...);
  hold on
end
hold off
```

4.5 Stellen Sie die Fehlerfunktion $e^k(x) = u(x) - u_h^k(x)$ für $k = 2, 4, 8, \dots, 256$ in einem gemeinsamen Plot dar.

Tipp: Verwenden Sie die Referenzlösung aus 4.2 sowie die Matlab-Funktion `interp1`.

4.6 Plotten Sie eine Approximation des maximalen Fehlers

$$\|e^k\|_{\max} = \max_{x \in [0,l]} |e^k(x)|$$

über die Elementgröße $h^k = l/k$ für $k = 2, 4, 8, \dots, 8192$. Vergleichen Sie dabei eine 'normale' und eine doppelt-logarithmische (Funktion `loglog`) Darstellung.

Tipp: Mit `plot(x, y, 'o-')` *sehen Sie die Datenpunkte.*

4.7 Plotten Sie für $k = 2, 4, 8, \dots, 256$ die zu den Näherungslösungen gehörende Normalkraft $N_h^k(x) = EA \cdot \hat{u}_h^{k\prime}(x)$ zusammen mit der exakten Lösung N.

Tipp: Verwenden Sie die Matlab-Funktionen `diff` *und* `stairs`.

Versehen Sie alle Plots der Berechnungsergebnisse mit einem kurzen Kommentar der beschreibt, was zu erkennen ist.