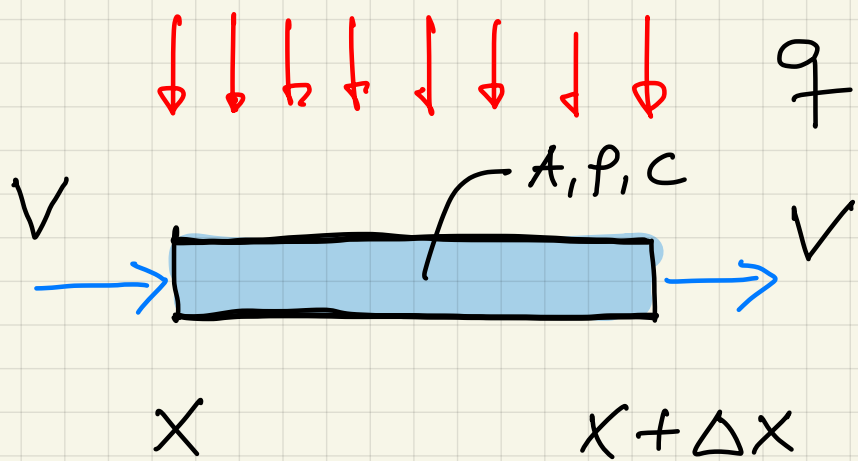


Wärmetransport in Rohr durch Strömung



$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Mittelwertsatz Int.} \\ \int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(\xi) \\ a \leq \xi \leq b \end{array}}$$

Zeitraum von t bis $t + \Delta t$

$$\Delta E = C \cdot \Delta x \cdot (T(\xi, t + \Delta t) - T(\xi, t))$$

$$\Delta Q^q = q \cdot \Delta x \cdot \Delta t$$

$$\Delta Q^l = C \cdot v \cdot \Delta t \cdot T(x, \tau)$$

$$\Delta Q^r = -C \cdot v \cdot \Delta t \cdot T(x + \Delta x, \tau)$$

$$\text{mit } C = A \cdot \rho \cdot c$$

Bilanz

$$\Delta E = \Delta Q^q + \Delta Q^l + \Delta Q^r$$

$$\begin{aligned} C \cdot \Delta x \cdot (T(\xi, t + \Delta t) - T(\xi, t)) &= q \cdot \Delta x \cdot \Delta t \\ + C \cdot v \cdot \Delta t \cdot T(x, \tau) - C \cdot v \cdot \Delta t \cdot T(x + \Delta x, \tau) \end{aligned}$$

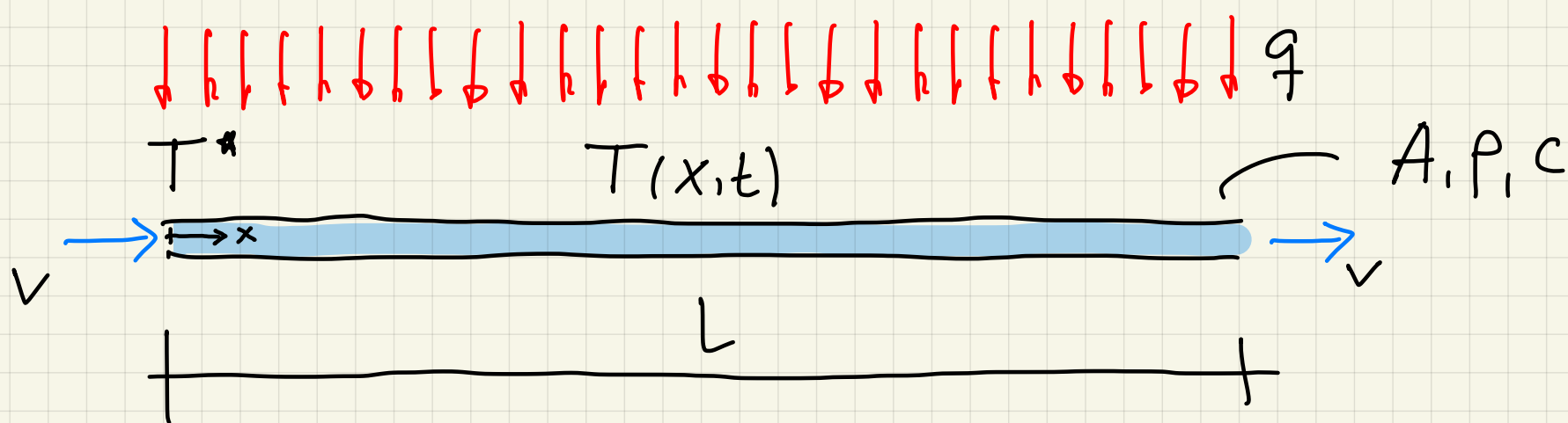
$|\div (\Delta x \Delta t)$

$$C \cdot \frac{T(\xi, t + \Delta t) - T(\xi, t)}{\Delta t} + C \cdot v \cdot \frac{T(x + \Delta x, \tau) - T(x, \tau)}{\Delta x} = q$$

$|\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$

$$C \cdot \dot{T}(x, t) + C \cdot v \cdot T'(x, t) = q$$

Anfangs-Randwertproblem



Gesucht ist $T: [0, L] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$C \cdot \dot{T}(x, t) + C \cdot v \cdot T'(x, t) = q, \quad 0 \leq x \leq L$$

und $T(0, t) = T^*$ und $T(x, 0) = T^0(x)$.

Schwache Formulierung

Für Lösung des Anfangswertproblems ist die Dirichlet Randbedingung unhandlich. Daher gleich in die Schwache Form (penalty-Methode). Mult. mit Testfunktion und Integration liefert

$$\begin{aligned} & C \cdot \int_0^L \dot{T}(x, t) \cdot \delta T(x) dx \\ & + C \cdot v \cdot \int_0^L T'(x, t) \cdot \delta T(x) dx \\ & + \alpha \cdot (T(0, t) - T^*) \cdot \delta T(0) = q \cdot \int_0^L \delta T(x) dx \end{aligned}$$

mit Penalty-Parameter $\alpha > 0$.

Umstellen zu

$$C \cdot \int_0^L \dot{T}(x,t) \cdot \delta T(x) dx$$

$$+ C \cdot v \cdot \int_0^L T'(x,t) \cdot \delta T(x) dx$$

$$+ \alpha \cdot T(0,t) \cdot \delta T(0)$$

$$= \alpha \cdot T^* \cdot \delta T(0) + q \cdot \int_0^L \delta T(x) dx$$

Mit

$$a(T, \delta T) = C \cdot \int_0^L \dot{T} \cdot \delta T dx + C \cdot v \cdot \int_0^L T' \cdot \delta T dx$$

$$+ \alpha \cdot T(0,t) \cdot \delta T(0)$$

$$b(\delta T) = \alpha \cdot T^* \cdot \delta T(0) + q \cdot \int_0^L \delta T(x) dx$$

erhalten wir das Variationsproblem

Gesucht ist $T: [0, L] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ so dass

$$a(T, \delta T) = b(\delta T)$$

für alle δT und $t \in \mathbb{R}^+$

Unterschied zu vorher: Bilinearform a ist nicht mehr symmetrisch!

Numerische Lösung

$$T(x, t) = \sum_j \varphi_j(x) \cdot \hat{T}_j(t)$$

Einsetzen mit $\delta T = \varphi_i$

$$C \cdot \sum_j \int_0^L \varphi_j \cdot \dot{\varphi}_i \, dx \cdot \hat{T}_j(t)$$

$$+ C \cdot v \cdot \sum_j \int_0^L \varphi_j' \cdot \varphi_i \, dx \cdot \hat{T}_j(t)$$

$$+ \alpha \cdot \varphi_i(0) \cdot \varphi_j(0) \cdot \hat{T}_j(t)$$

$$= \alpha \cdot T^* \cdot \varphi_i(0) + q \cdot \int_0^L \varphi_i \, dx$$

Damit

$$\underline{M} \underline{\hat{T}} + \underline{A} \underline{T} = \underline{r}$$

Mit

$$M_{ij} = \int \varphi_i \varphi_j$$

$$A_{ij} = \int \varphi_i \varphi_j' \, dx + \alpha \cdot S_{ij}, \quad S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$