Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Kann man nur selber lösen.

Aufgabe 2

Gleichung

$$EA\cdot\int_0^l u'\cdot\delta u'\,dx + C\cdot\int_0^l u\cdot\delta u\,dx + S\cdot u(l)\cdot\delta u(l)$$

$$= n\cdot\int_0^l \delta u\,dx + F\cdot\delta u(0)$$

Gegeben

$L=10,\quad EA=1,\quad C=2,\quad S=5,\quad u=1,\quad F=10$

$u(x) = 10 - \frac{x}{20}, \quad u'(x) = -\frac{1}{20}$

$\delta u(x) = x, \quad \delta u'(x) = 1$

Einsetzen

$$1\cdot\int_0^{10} -\frac{1}{20}\cdot 1\,dx + 2\cdot\int_0^{10}\left(10-\frac{x}{20}\right)\cdot x\,dx + 5\cdot\frac{19}{2}\cdot 10$$

$$= 1\cdot\int_0^{10} x\,dx + 10\cdot 0$$

$$-\frac{1}{2} + 2\cdot\left[5\cdot x^2 - \frac{1}{60}x^3\right]_0^{10} + 475 = 50$$

$$-\frac{1}{2} + 2\cdot\left(500 - \frac{50}{3}\right) + 475 = 50$$

Gleichung nicht erfüllt! Also ist u keine Lösung.

Aufgabe 3

3.1

Randwertproblem (elastisch gelagerter Balken):
Gesucht ist eine Funktion $w: [0,L] \to \mathbb{R}$
mit

$$EI\, w^{IV}(x) = q \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq L$$

und

$$k \cdot w(0) + EI \cdot w'''(0) = 0$$
$$k \cdot w(0) - EI \cdot w'''(L) = 0$$
$$w''(0) = w''(L) = 0$$

Nebenrechnung

$\uparrow$: $\quad k \cdot w(0) - V(0) = 0$

$$k \cdot w(0) + EI \cdot w'''(0) = 0$$

$\uparrow$: $\quad k \cdot w(L) + V(L) = 0$

$$k \cdot w(0) - EI \cdot w'''(L) = 0$$

3.2

DGL: $EI\, w^{IV} = q$

Multiplikation mit Testfunktion und Integral

$$EI \cdot \int_0^L w^{IV} \cdot \delta w \, dx = q \cdot \int_0^l \delta w \, dx$$

1. Partielle Integration

$$EI \cdot \int_0^l w^{IV} \delta w \, dx$$

$$= EI \cdot \left[w''' \cdot \delta w \right]_0^l - EI \cdot \int_0^l w''' \cdot \delta w' \, dx$$

$$= EI \cdot w'''(L) \cdot \delta w(L) - EI \cdot w'''(0) \cdot \delta w(0) - EI \cdot \int_0^l w''' \cdot \delta w' \, dx$$

(Stoffgesetz + Kinematik)

$$= -V(L) \cdot \delta w(L) + V(0) \cdot \delta w(0) - EI \cdot \int_0^l w''' \cdot \delta w' \, dx$$

(Randbedingungen)

$$= k \cdot w(L) \cdot \delta w(L) + k \cdot w(0) \cdot \delta w(0) - EI \cdot \int_0^l w''' \cdot \delta w' \, dx$$

2. Partielle Integration

$$EI \cdot \int_0^l w''' \cdot \delta w' \, dx$$

$$= EI \cdot \left[w'' \cdot \delta w' \right]_0^l \qquad - EI \cdot \int_0^l w'' \cdot \delta w'' \, dx$$

$$= EI \cdot w''(l) \cdot \delta w'(l) - EI \cdot w''(0) \cdot \delta w'(0) - EI \cdot \int_0^l w'' \cdot \delta w'' \, dx$$

$$= -M(l) \cdot \delta w'(l) + M(0) \cdot \delta w'(0) \quad - EI \cdot \int_0^l w'' \cdot \delta w'' \, dx$$

$$= -0 \cdot \delta w'(l) + 0 \cdot \delta w'(0) \quad - EI \cdot \int_0^l w'' \cdot \delta w'' \, dx$$

Damit

$$EI \int_0^l w^{IV} \delta w \, dx$$

$$= k \cdot w(l) \cdot \delta w(l) + k \cdot w(0) \cdot \delta w(0) \quad - EI \cdot \int_0^l w''' \cdot \delta w' \, dx$$

$$= EI \cdot \int_0^l w'' \cdot \delta w'' \, dx + k \cdot w(l) \cdot \delta w(l) + k \cdot w(0) \cdot \delta w(0)$$

Variationsproblem (elastisch gelagerter Balken):

Gesucht ist eine Funktion $w: [0,L] \to \mathbb{R}$ mit

$$EI \cdot \int_0^l w'' \cdot \delta w'' \, dx + k \cdot w(l) \cdot \delta w(l) + k \cdot w(0) \cdot \delta w(0) = q \cdot \int_0^l \delta w \, dx$$

für alle Testfunktionen $\delta w: [0,L] \to \mathbb{R}$.

3.3

$$w(x) = \frac{12 \cdot EI \cdot l \cdot q + k \cdot l^3 \cdot q \cdot x - 2k \cdot l \cdot q \cdot x^3 + k \cdot q \cdot x^4}{24 \cdot EI \cdot k} \quad \text{und} \quad \delta w(x) = 1 + x$$

Es ist $\delta w''(x) = 0$ und somit

$$EI \cdot \int_0^l w'' \cdot \delta w'' \, dx = 0$$

$$w(0) = \frac{12 \cdot EI \cdot l \cdot q}{24 \cdot EI \cdot k} = \frac{l \cdot q}{2 \cdot k}$$

$$w(l) = \frac{12 \cdot EI \cdot l \cdot q + k \cdot l^4 \cdot q - 2 \cdot k \cdot l^4 \cdot q + k \cdot q \cdot l^4}{24 \cdot EI \cdot k}$$

$$= \frac{l \cdot q}{2k}$$

$\delta w(0) = 1$, $\delta w(l) = 1 + l$

Damit

$$k \cdot w(0) \cdot \delta w(0) + k \cdot w(l) \cdot \delta w(l)$$

$$= \frac{l \cdot q}{2} \cdot (1 + 1 + l) = q \cdot \left(l + \frac{1}{2} \cdot l^2\right)$$

$$q \cdot \int_0^l \delta w \, dx = q \cdot \int_0^l (1 + x) \, dx = q \cdot \left[x + \frac{1}{2} x^2\right]_0^l$$

$$= q \cdot \left(l + \frac{1}{2} \cdot l^2\right)$$

Gleichung ist erfüllt! Wir können w nicht als Lösung ausschließen.

Aufgabe 4

(a) Offensichtlich (ein ähnliches Funktional haben wir in der Vorlesung untersucht) ist a eine Bilinear~~form~~form. Wegen der Kommutativität der Multiplikation ist a darüber hinaus symmetrisch. Weiterhin ist

$$a(u,u) = \int_0^1 (u'(x))^2\,dx + (u(0))^2$$

nur dann null wenn sowohl

$$u'(x) = 0 \quad \text{als auch} \quad u(0) = 0$$

gilt. Dies ist nur für $u(x) = 0$ der Fall, a ist also auch positiv definit. Damit ist a ein Skalarprodukt.

(b) Keine Bilinearform:

$$a(3u,v) = \int_0^1 (3\cdot u(x) + v(x))\,dx$$

$$\neq 3\,a(u,v) = 3\int_0^1 (u(x) + v(x))\,dx$$

(c) Wie (b)

$$a(3u,v) = 42 \neq 3\cdot a(u,v) = 126$$

(d) Hier ist a eine symmetrische Bilinearform. Allerdings ist für

$$u(x) = c$$

$a(u,u) = 0$ so dass a nicht positiv definit ist.

(e) $a(u+v,w) = (u(0)+v(0))\cdot w(1)$

$$= u(0)\cdot w(1) + v(0)\cdot w(1)$$

$$= a(u,w) + a(v,w)$$

$$a(\alpha\cdot u, v) = \alpha\cdot u(0)\cdot v(1) = \alpha\cdot a(u,v)$$

Genau so für zweiten Parameter.

Allerdings ist a nicht symmetrisch (i.Allg. ist $u(0)\cdot v(1)$ nicht gleich $u(1)\cdot v(0)$) und somit kein Skalarprodukt.