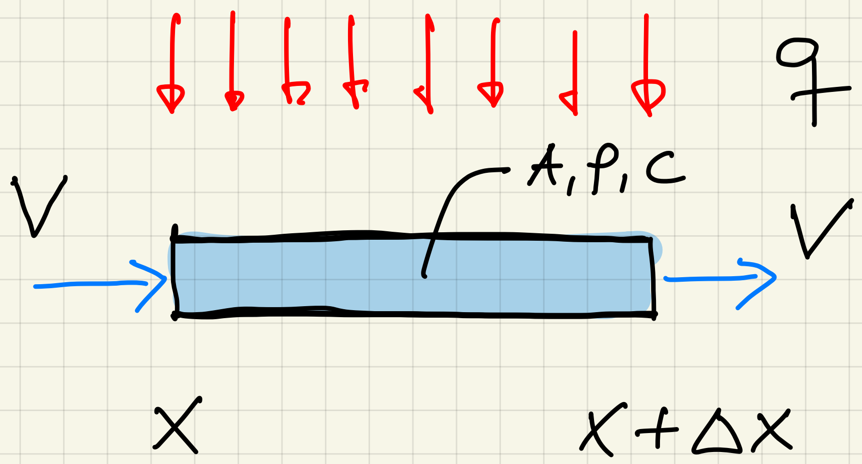
Wärmetransport im Rohr durch Strömung



Mittelwertsatz Int.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\xi)$$

$$a \le \xi \le b$$

Zeitraum von t bis t+Δt

$$\Delta E = C \cdot \Delta x \cdot (T(\xi, t+\Delta t) - T(\xi, t))$$

$$\Delta Q^q = q \cdot \Delta x \cdot \Delta t$$

$$\Delta Q^l = C \cdot V \cdot \Delta t \cdot T(x, \tau)$$

$$\Delta Q^r = - C \cdot V \cdot \Delta t \cdot T(x+\Delta x, \tau)$$

mit $C = A \cdot \rho \cdot c$

Bilanz

$$\Delta E = \Delta Q^q + \Delta Q^l + \Delta Q^r$$

$$C \cdot \Delta x \cdot (T(\xi, t+\Delta t) - T(\xi, t)) = q \cdot \Delta x \cdot \Delta t$$

$$+ C \cdot V \cdot \Delta t \cdot T(x, \tau) - C \cdot V \cdot \Delta t \cdot T(x+\Delta x, \tau)$$

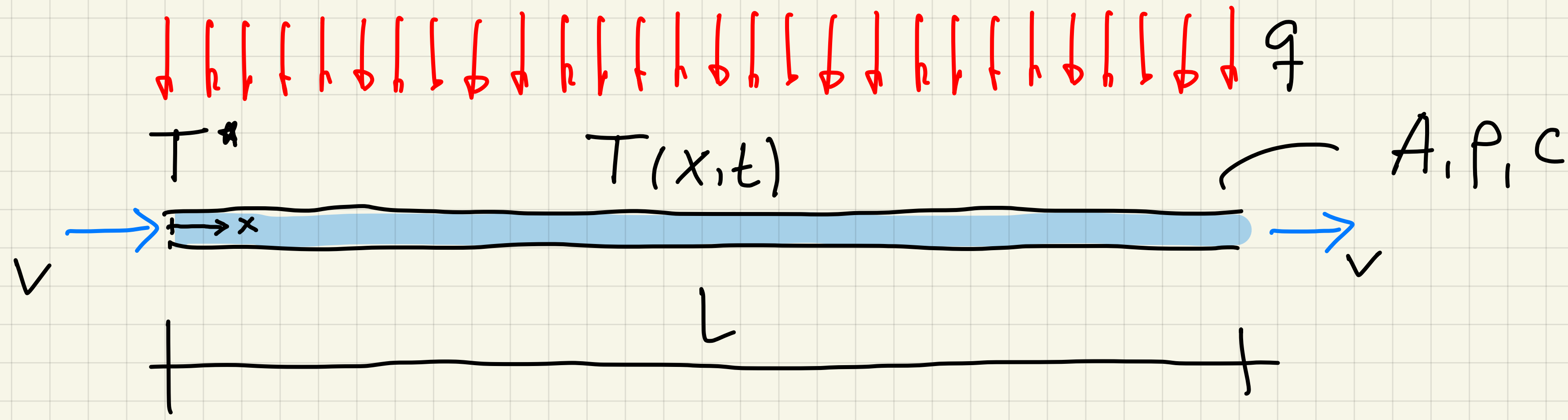
$$\Big| : (\Delta x \Delta t)$$

$$C \cdot \frac{T(\xi, t+\Delta t) - T(\xi, t)}{\Delta t} + C \cdot V \cdot \frac{T(x+\Delta x, \tau) - T(x, \tau)}{\Delta x} = q$$

$$\Big| \Delta x, \Delta t \to 0$$

$$C \cdot \dot{T}(x,t) + C \cdot V \cdot T'(x,t) = q$$

Anfangs-Randwertproblem



Gesucht ist $T : [0, L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$c \cdot \dot{T}(x,t) + c \cdot v \cdot T'(x,t) = q \,, \quad 0 \leq x \leq L$$

und $T(0,t) = T^*$ und $T(x,0) = T^\circ(x)$.

Schwache Formulierung

Für Lösung des Anfangwertproblems ist die Dirichlet Randbedingung unhandlich. Daher gleich in die schwache Form (penalty-Methode). Mult. mit Testfunktion und Integration liefert

$$
\begin{aligned}
& c \cdot \int_0^L \dot{T}(x,t) \cdot \delta T(x)\, dx \\
+ \; & c \cdot v \cdot \int_0^L T'(x,t) \cdot \delta T(x)\, dx \\
+ \; & \alpha \cdot (T(0,t) - T^*) \cdot \delta T(0) = q \cdot \int_0^L \delta T(x)\, dx
\end{aligned}
$$

mit Penalty-Parameter $\alpha > 0$.

Umstellen zu

$$C \cdot \int_0^L \dot{T}(x,t) \cdot \delta T(x)\, dx$$

$$+ \quad C \cdot v \cdot \int_0^l T'(x,t) \cdot \delta T(x)\, dx$$

$$+ \alpha \cdot T(0,t) \cdot \delta T(0)$$

$$= \alpha \cdot T^* \cdot \delta T(0) + q \cdot \int_0^l \delta T(x)\, dx$$

Mit

$$a(T, \delta T) = C \cdot \int_0^l \dot{T} \cdot \delta T\, dx + C \cdot v \cdot \int_0^l T' \cdot \delta T\, dx$$
$$+ \alpha \cdot T(0,t) \cdot \delta T(0)$$

$$b(\delta T) = \alpha \cdot T^* \cdot \delta T(0) + q \cdot \int_0^l \delta T(x)\, dx$$

erhalten wir das Variationsproblem

Gesucht ist $T: [0,L] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ so dass
$a(T, \delta T) = b(\delta T)$
für alle δT und $t \in \mathbb{R}^+$

Unterschied zu vorher: Bilinearform a ist nicht mehr symmetrisch!

Numerische Lösung

$$T(x,t) = \sum_j \varphi_j(x) \cdot \hat{T}_j(t)$$

Einsetzen mit $\delta T = \varphi_i$

$$C \cdot \sum_j \int_0^L \varphi_j \cdot \varphi_i \, dx \cdot \dot{\hat{T}}_j(t)$$

$$+ C \cdot v \cdot \sum_j \int_0^L \varphi_j' \cdot \varphi_i \, dx \cdot \hat{T}_j(t)$$

$$+ \alpha \cdot \varphi_i(0) \cdot \varphi_j(0) \cdot \hat{T}_j(t)$$

$$= \alpha \cdot T^* \cdot \varphi_i(0) + q \cdot \int_0^L \varphi_i \, dx$$

Damit

$$\underline{M} \, \dot{\hat{\underline{T}}} + \underline{A} \, \underline{T} = \underline{r}$$

Mit

$$M_{ij} \overset{C}{=} \int \varphi_i \varphi_j$$

$$A_{ij} \overset{C*V}{=} \int \varphi_i \varphi_j' \, dx + \alpha \cdot S_{ij}, \qquad S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$