Übungsblatt 9

Aufgabe 1

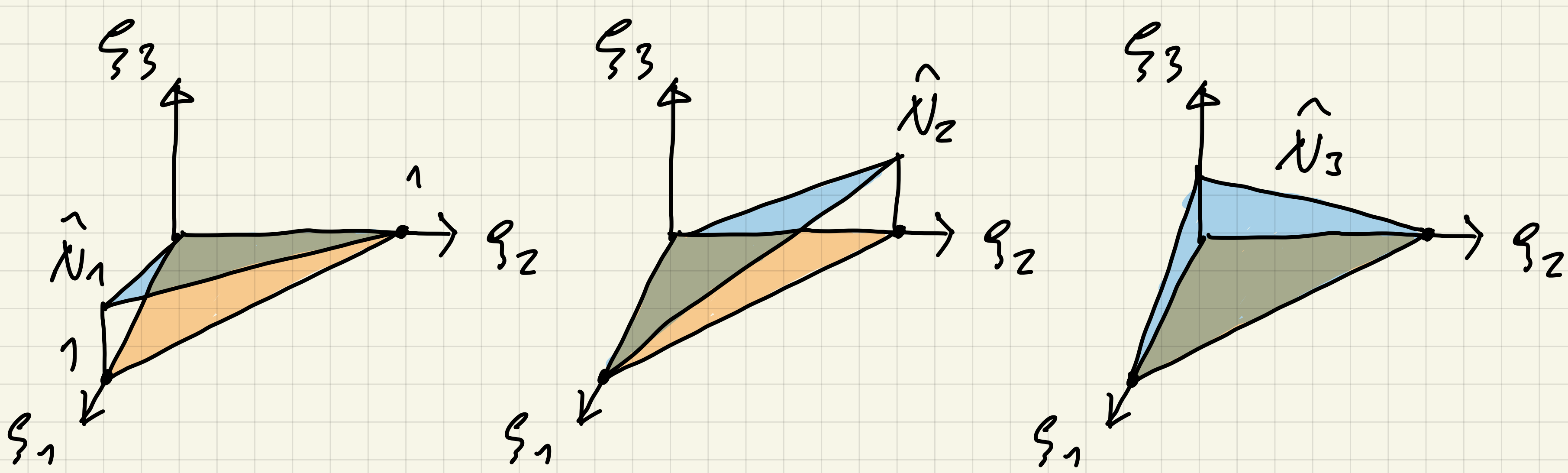
1. Funktionen auf

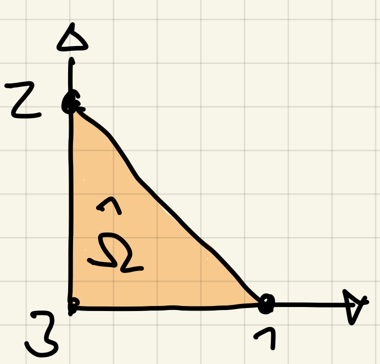
$$\hat{\Omega} = \{(\xi_1, \xi_2) \mid 0 \leq \xi_2 \leq 1 - \xi_1,\ 0 \leq \xi_1 \leq 1\}$$

$$\hat{N}_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$$

$$\hat{N}_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2$$

$$\hat{N}_3(\xi_1, \xi_2) = 1 - \xi_1 - \xi_2$$





Funktionen haben an einem Knoten den Wert 1 und an den anderen Knoten den Wert 0.

2. Element - Speichermatrix

$$M_{ij}^e = \rho \cdot c \cdot \int_{\Omega^e} N_i^e \cdot N_j^e \, dA$$

$$= \frac{A^e}{1/2} \cdot \rho \cdot c \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \hat{N}_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \hat{N}_j(\xi_1, \xi_2) \, d\xi_2 \, d\xi_1}_{I_{ij}}$$

Flächenverhältnis

$$I_{11} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \xi_1^2 \, d\xi_2 \, d\xi_1$$

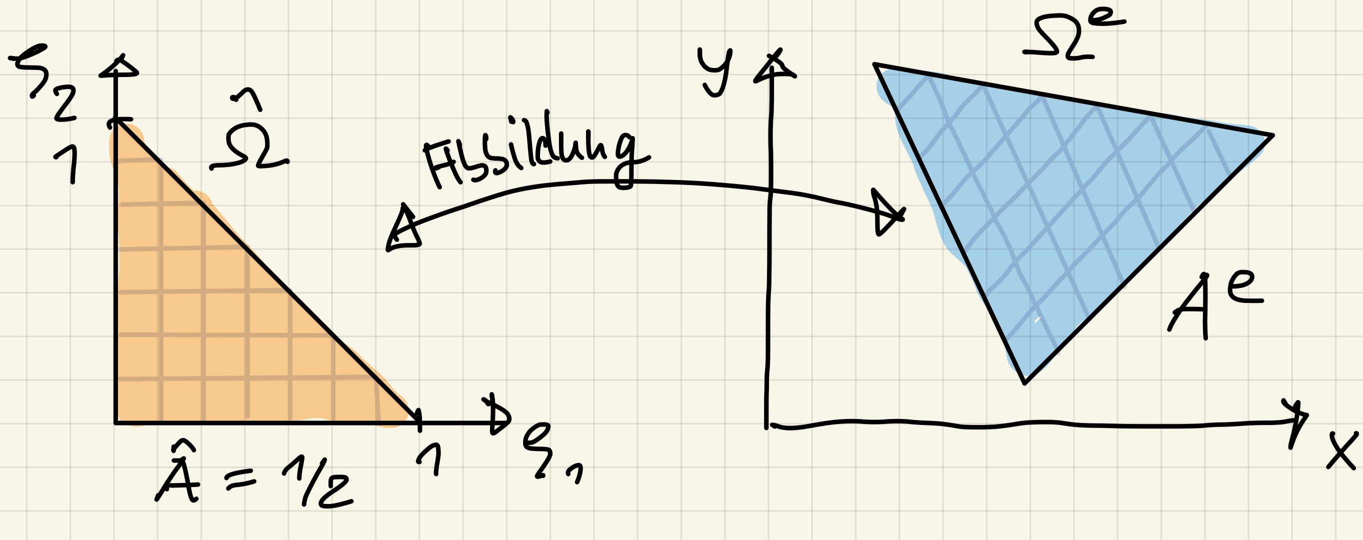
$$= \int_0^1 \left[\xi_1^2 \cdot \xi_2 \right]_0^{1-\xi_1} d\xi_1 = \int_0^1 \xi_1^2 \cdot (1-\xi_1) \, d\xi_1$$

$$= \int_0^1 (\xi_1^2 - \xi_1^3) \, d\xi_1 = \left[\frac{1}{3} \xi_1^3 - \frac{1}{4} \xi_1^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

Warum darf man über $\hat{\Omega}$ integrieren?

Weil alle Bereiche von $\hat{\Omega}$ bei der Abbildung auf Ω^e gleich verzerrt werden.



Alle Rauten sind gleich groß!

Mit der Symbolic Toolbox in Matlab

Einträge der Element-Speichermatrix

Symbolische Variablen deklarieren

```
syms xi1 xi2 I
```

Funktionen

```
Nhat = [1 - xi1 - xi2, xi1, xi2]
```

$$\text{Nhat} = \begin{pmatrix} 1-\xi_2-\xi_1 & \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}$$

Bilinearform

```
a = @(u, v) int(int(u * v, xi2, 0, 1 - xi1), xi1, 0, 1);
```

Einträge der Matrix

```
for i = 1:3
    for j = 1:3
        I(i, j) = a(Nhat(i), Nhat(j));
    end
end
```

Matrix mit Integralen

```
I
```

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{I}} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit

$$\underline{\underline{M}}^e = 2 \cdot \rho \cdot c \cdot A^e \cdot \underline{\underline{I}} = \frac{\rho \cdot c \cdot A^e}{12}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$