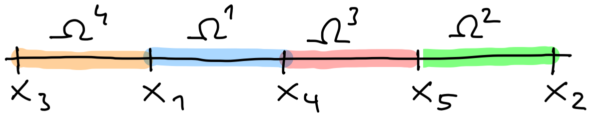
Übungsblatt 4: Elementweise Berechnung

Aufgabe 1: Globale Basisfunktionen und lokale Ansatzfunktionen

1.1 Elemente und Knoten müssen nicht zwangsläufig fortlaufend nummeriert sein. Stellen Sie für das (originell nummerierte) Netz



die Assemblierungsmatrizen $\mathbf{A}^e,\ e = 1, \ldots, 4$ auf. Skizzieren Sie hierfür die Basisfunktionen $\varphi_i,\ i = 1, \ldots, 5$ und die Ansatzfunktionen $N_k^e,\ k = 1, 2$.

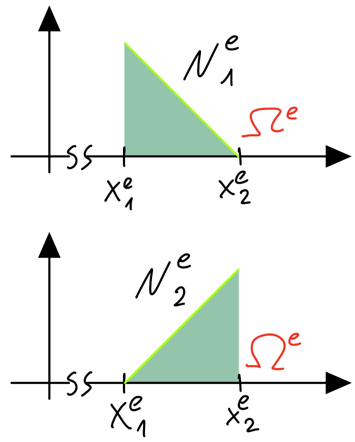
Können Sie das Schema erkennen, nach dem die Einsen in den Matrizen platziert werden? Schreiben sie hierzu für jedes Element die in einem Spaltenvektor Knotennummern neben die Matrix.

Aufgabe 2: Assemblierung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{r}$

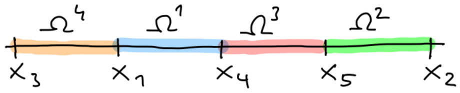
2.1 Geben Sie für den Bohrpfahl die Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^e$ für ein Element der Länge h an.

2.2 Leiten Sie (analog zur globalen Steifigkeitsmatrix) die Assemblierung des globalen Lastvektors r her. Wie lautet der hierzu benötigte Elementlastvektor $\mathbf{r}^e$ eines Elements der Länge h?

Aufgabe 1: Globale Basisfunktionen und lokale Ansatzfunktionen



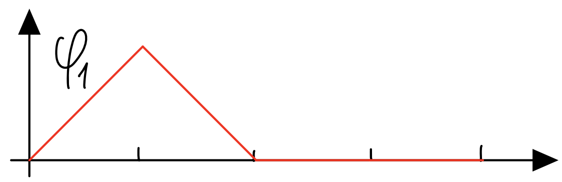
1.1 Elemente und Knoten müssen nicht zwangsläufig fortlaufend nummeriert sein. Stellen Sie für das (originell nummerierte) Netz



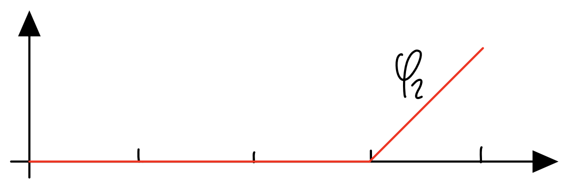
die Assemblierungsmatrizen $\mathbf{A}^e,\ e = 1, \ldots, 4$ auf. Skizzieren Sie hierfür die Basisfunktionen $\varphi_i,\ i = 1, \ldots, 5$ und die Ansatzfunktionen $N_k^e,\ k = 1, 2$.

Können Sie das Schema erkennen, nach dem die Einsen in den Matrizen platziert werden? Schreiben sie hierzu für jedes Element die in einem Spaltenvektor Knotennummern neben die Matrix.

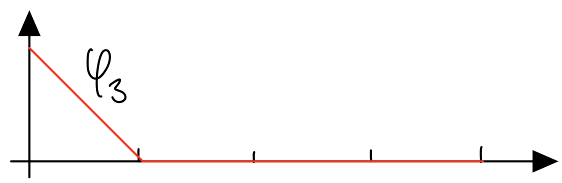
$$A^{\Omega_1} = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$



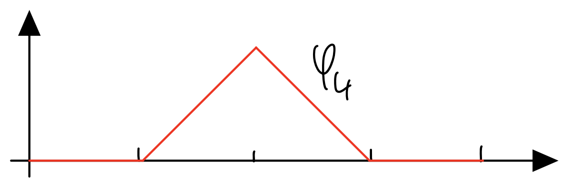
$$A^{\Omega_2} = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \qquad I = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

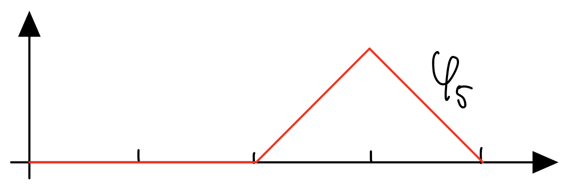


$$A^{\Omega_3} = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \qquad I = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$



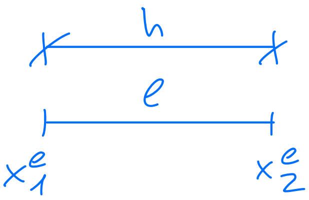
$$A^{\Omega_4} = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \qquad I = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$





Aufgabe 2: Assemblierung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{r}$

2.1 Geben Sie für den Bohrpfahl die Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^e$ für ein Element der Länge h an.

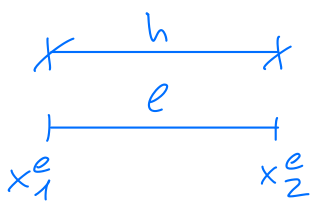


$$K^e_{k\ell} = a^e(N^e_k, N^e_\ell) = EA \cdot \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} N_k^{e\prime} \cdot N_\ell^{e\prime}\, dx}_{\substack{1/h \text{ für } k=\ell \\ -1/h \text{ sonst}}} + c \cdot \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} N_k^e \cdot N_\ell^e \, dx}_{\substack{h/3 \text{ für } k=\ell \\ h/6 \text{ sonst}}}$$

$$\rightarrow \underline{k}^e = \frac{EA}{h} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{Lh}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2 Leiten Sie (analog zur globalen Steifigkeitsmatrix) die Assemblierung des globalen Lastvektors r her. Wie lautet der hierzu benötigte Elementlastvektor $\mathbf{r}^e$ eines Elements der Länge h?

$$r^e_k = b^e(N^e_k) = n \cdot \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} N_k^e \, dx}_{h/2}$$



$$\underline{r}^e = \begin{bmatrix} n \cdot h/2 \\ n \cdot h/2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3: Programmierung

3.1 Addition einer Untermatrix mit Indexvektor. Erklären Sie die Arbeitsweise der folgenden Zeilen Matlab-Code:

```
K = zeros(6, 6);
I = [6, 1];
Ke = [1, 2; 3, 4];
K(I, I) = K(I, I) + Ke;
```

Zeigen Sie, dass sich dasselbe Ergebnis auch mit einer Assemblierungsmatrix erzielen lässt.

3.2 Erzeugen Sie in Matlab die FE-Datenstruktur für das Netz aus Aufgabe 1.1 (es sei $x_3 = 0$ und $x_2 = 20$). Geben Sie mithilfe einer Schleife die Knotenkoordinaten aller Elemente aus.

3.3 Implementieren Sie die Funktionen `pileKe`, `pileRe` und `assembleKr` wie im Video erläutert. Nutzen Sie ein Live-Skript um die Funktionen zu testen.

3.4 Kopieren Sie den Programmcode von Übungsblatt 3 und ändern Sie die Funktion `pileFEM` dahingehend, dass die Berechnung mithilfe der Funktionen aus Aufgabe 5.3 erfolgt.