FEM for 1D problems

Approximation of functions

- Subspaces

Mathematik 1

6.2.2 Linearkombination und lineare Hülle

Sei $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ ein n-Tupel von Vektoren aus dem $\mathbb{R}^m$, dann versteht man unter einer **Linearkombination** der Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \boldsymbol{a}_k = c_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + c_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n \cdot \boldsymbol{a}_n,$$

in der jeder Vektor $\boldsymbol{a}_k$ mit einer reellen Zahl c_k skalar multipliziert wird. Die Menge

$$\mathrm{Lin}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \boldsymbol{a}_k \mid c_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \ldots, n \right\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

aller Linearkombinationen von $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ heißt **lineare Hülle** der Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Da jeder Vektor $\boldsymbol{a}_i$ ein Element des $\mathbb{R}^m$ ist, bildet die lineare Hülle eine Untermenge des $\mathbb{R}^m$. Uns wird später insbesondere der Fall $\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \mathbb{R}^m$ interessieren, denn dann lässt sich jeder Vektor des $\mathbb{R}^m$ als Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ darstellen. Unter bestimmten Voraussetzungen ist diese Darstellung sogar eindeutig bestimmt.

Linear combination of basis functions

$$u_h(x) = \varphi_1(x)\cdot\hat{u}_1 + \varphi_2(x)\cdot\hat{u}_2 + \ldots + \varphi_N(x)\cdot\hat{u}_N$$

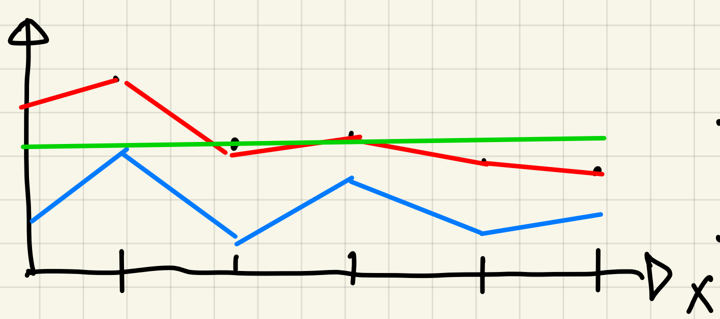
Short

$$u_h = \varphi_1\cdot\hat{u}_1 + \varphi_2\cdot\hat{u}_2 + \ldots + \varphi_N\cdot\hat{u}_N = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i\cdot\hat{u}_i$$

→ Linear combination

$$\mathrm{Lin}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N) = \left\{ \sum_{i=1}^{N}\varphi_i\cdot\hat{u}_i \;\middle|\; \hat{u}_i \in \mathbb{R} \right\}$$

→ Linear span



$$\Big\} \in \mathrm{Lin}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$$

The subspace V_h

- We already introduced

V = "The set of all (nice) functions on $[0,L]$"

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$\mathrm{Dim}(V) = \infty$ (V is infinite dimensional)

- We now introduced the set

$$V_h = \mathrm{Lin}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$$

$\mathrm{Dim}(V_h) = N$ (V_h is finite dimensional)