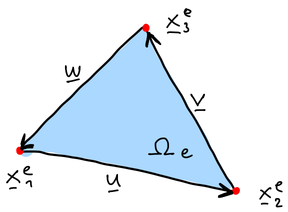
Übungsblatt 6: Wärmeleitung in 2D

Aufgabe 1: Lineare Elementfunktionen auf dem Dreieck



Wir betrachten das links dargestellte Element Ω_e mit den Knoten

$$\mathbf{x}_1^e = \begin{pmatrix} x_{11}^e \\ x_{12}^e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2^e = \begin{pmatrix} x_{21}^e \\ x_{22}^e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3^e = \begin{pmatrix} x_{31}^e \\ x_{32}^e \end{pmatrix}$$

sowie den dargestellten Verbindungsvektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

1.1 Kreuzprodukt für Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$.

Für zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ erklären wir das Kreuzprodukt durch

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Anders als im $\mathbb{R}^3$ wird zwei Vektoren hier eine Zahl zugeordnet. Es gelten jedoch genau dieselben Rechenregeln.

Warum macht diese Definition Sinn?

Tipp: Interpretieren Sie Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ als Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ deren dritte Komponenten gleich null ist.

1.2 Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten:

$$A_e = \frac{1}{2}\mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad \text{und} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}.$$

Dabei ist A_e der Flächeninhalt von Ω_e.

Tipp: Schauen Sie nochmal im Skript von Mathematik 1 nach.

1.3 Leiten Sie mithilfe der Bezeichnungen oben die Gleichungen der Elementfunktionen N_1^e, N_2^e sowie N_3^e her und geben Sie die Gradienten an.

Tipp für die Funktion N_1^e: Stellen Sie die Normalenform der Geraden durch $\mathbf{x}_2^e$ und $\mathbf{x}_3^e$ auf. Skalieren Sie die Gleichung so, dass Sie den Wert 1 erhalten, wenn Sie $\mathbf{x}_1^e$ in die Gleichung einsetzen.

Aufgabe 2: Element-Wärmeleitfähigkeitsmatrix und Quellvektor

2.1 Zeigen Sie, dass Sie die Elementmatrix

$$\mathbf{K}^e = \lambda \cdot A_e \cdot \begin{pmatrix} \nabla N_1^e \cdot \nabla N_1^e & \nabla N_1^e \cdot \nabla N_2^e & \nabla N_1^e \cdot \nabla N_3^e \\ \nabla N_1^e \cdot \nabla N_2^e & \nabla N_2^e \cdot \nabla N_2^e & \nabla N_2^e \cdot \nabla N_3^e \\ \nabla N_1^e \cdot \nabla N_3^e & \nabla N_2^e \cdot \nabla N_3^e & \nabla N_3^e \cdot \nabla N_3^e \end{pmatrix}$$

mithilfe der B-Matrix

$$\mathbf{B}^e = \begin{pmatrix} \nabla N_1^e & \nabla N_2^e & \nabla N_3^e \end{pmatrix}$$

in der Form

$$\mathbf{K}^e = \lambda \cdot A_e \cdot \mathbf{B}^{e\top} \mathbf{B}^e$$

berechnen können.

Tipp: Verwenden Sie die Schreibweise

$$\nabla N_i^e = \begin{pmatrix} N_{i,1}^e \\ N_{i,2}^e \end{pmatrix}.$$

Um Schreibarbeit zu sparen können Sie den hochgestellten Index e weglassen.

2.2 Implementieren Sie die Funktion `heatKe` zur Bereitstellung einer Funktion, mit der die Element-Wärmeleitfähigkeitsmatrix berechnet wird (vergleiche `pileKe`). Einen entsprechenden Test finden Sie auf Moodle.

2.3 Leiten Sie den Quellvektor $\mathbf{r}^e$ her.

Tipp: Sie können die Formel zur Berechnung des Volumens einer Pyramide verwenden. Die Aufgabe lässt sich dann auf einer Viertelseite lösen.

2.4 Implementieren Sie die Funktion `heatRe` analog zur Vorgehensweise beim Bohrpfahl.