从平面角和立体角讨论静电场中的某些电场等价性

曹灵吉[1] 滕保华[2]
([1]电子科技大学英才计划07级实验班,四川 成都 611731)
([2]电子科技大学物理电子学院,四川 成都 610054)

(收稿日期:2009-03-30)

摘 要 本文利用平面角的概念讨论了均匀带电的直线微元和圆弧微元在圆心处的场强等价性,并将结论推广到一些均匀带电的线几何体;然后利用立体角的概念进一步讨论带电的平面微元和球面微元在球心处的场强等价关系,结果表明,只有非均匀的电荷面密度才能使两者等价.

关键词 平面角;立体角;静电场;等价性

SOME EQUIVALENCE IN THE ELECTROSTATIC FIELD BASED ON THE PLANE AND SOLID ANGLES

Cao Lingji[1] Teng Baohua[2]
([1] Experimental Class 2007, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 611731)
([2] School of Physical Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054)

Abstract According to the concept of the plane angle, the equivalence of the electric field intensities at the centre of a circle caused by the uniformly charged infinitesimal line and infinitesimal arc has been obtained. This equivalence has been extended to some complex charged lines. The relationship between the electric field intensities of the charged infinitesimal plane and infinitesimal spherical surface at the centre of the sphere based on the solid angle has been derived. The result shows that they are equivalent only for the non-uniform surface density of charge.

Key Words plane angle; solid angle; electrostatic field; equivalence

引言

静电学[1~3]中一个简单的结论就是电荷线密度相等的均匀带电的1/4圆弧与其相应的半无限长直线在圆心处产生的场强相等,由此引发了我们对静电场中某些等价性的思考.一般情形下,均匀带电的直线元和圆弧元是否具有普遍的等价性?同时从带电线元的等价能否推广到带电面元的等价?下面我们从平面角和立体角的概念[4]出发来讨论这些等价形式及等价条件.

从平面角讨论线带电体的场强等价性

如图1所示,电荷线密度均为λ的均匀带电直线和均匀带电圆弧相切,在平面角成θ处取线

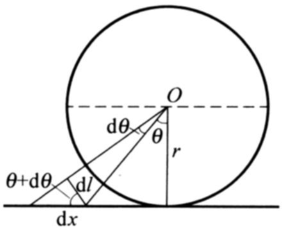

图 1

元 dx，其所对应的平面角和圆弧元分别为 $d\theta$ 和 dl. 这时线元在圆心 O 处产生的场强为

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{(r/\cos\theta)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}d\theta$$

而圆弧元在圆心处产生的场强为

$$dE_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}d\theta$$

显然，$dE_1 = dE_2$. 故有：

等价性 1　对于电荷线密度相等的均匀带电直线微元和均匀带电圆弧微元，若两者所对的平面角相等，则两者在相应的圆心处产生的场强等价.

事实上，上述等价性可以推广到有限长均匀带电线情形，从而有如下推论.

推论 1　对于电荷线密度相等的均匀带电的直线(段)和圆弧，若两者所对应的平面角相等，则两者在圆心处产生的场强等价.

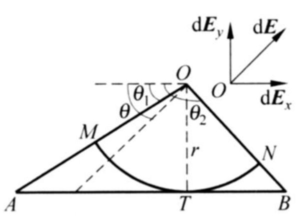

图　2

事实上，由等价性 1 可知对直线段 AB 在圆心处的场强的积分即为对 $\overset{\frown}{MTN}$ 在圆心处场强的积分(如图 2). 从而直线段 AB 和圆弧 $\overset{\frown}{MTN}$ 在圆心处场强等价.

由此，均匀带电直线(段)和均匀带电圆弧在圆心处产生的场强均为

$$E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dE\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

特殊的，当 $\theta_1 \to 0$ 及 $\theta_2 \to \pi$，就是我们熟知的无限长均匀带电直线和均匀带电半圆弧在相应的圆心处的场强结果，即

$$E_x = 0 \quad 及 \quad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

推论 2　对于电荷线密度相等的均匀带电的直线段和折线段，若两者所对的平面角相等，则两者在圆心处产生的场强等价. (其中组成折线段的两线段或其延长线均与圆弧相切)

如图 3 所示，若线密度相等的直线段 AB 段和折线段 $A'TB'$ 所对的平面角相等，由等价性 1 和推论 1 易得

$$E_{折线A'TB'} = E_{\overset{\frown}{MR}} + E_{\overset{\frown}{NR}} = E_{\overset{\frown}{MRN}} = E_{AB}$$

从而推论 2 得证.

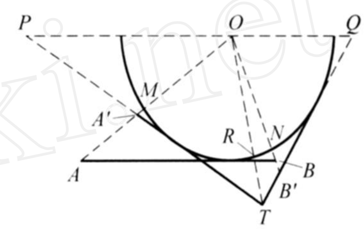

图　3

推论 3　有内切圆的均匀带电多边直线在内切圆圆心处产生的场强等价于该均匀带电内切圆在圆心处产生的场强，即为零.

先以四边形为例，如图 4 所示，圆 O 是四边形 $ABCD$ 的内切圆，易得四边形 $ABCD$ 的场强形式

$$\begin{aligned} E_{四边形ABCD} &= E_{AB} + E_{BC} + E_{CD} + E_{DA} \\ &= E_{\overset{\frown}{EF}} + E_{\overset{\frown}{FG}} + E_{\overset{\frown}{GH}} + E_{\overset{\frown}{HE}} \\ &= E_{\odot O} = 0 \end{aligned}$$

更一般地，对于有内切圆的均匀带电 n 边形同样通过连接各顶点和圆心将内切圆分为 n 段圆弧，分别与各边对应，此时

$$E_{n边形} = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} E_i' = E_{\odot O} = 0$$

其中，E_i 为 n 边形第 i 边在圆心处产生的场强；E_i' 为第 i 边所对应的圆弧在圆心处产生的场强.

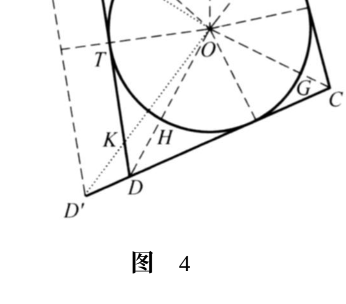

图　4

若多边形无内切圆，如图 4 所示，此时所求的是四边形 $A'B'CD$ 在 O 点处的场强. 由推论 2 得，

$E_{AA'} = E_{AJ}$ 及 $E_{DD'} = E_{KD}$，所以有

$$E_{四边形A'B'CD'} = E_{DA'} + (E_{四边形ABCD} - E_{JK}) = E_{DA'} - E_{JK}.$$

从立体角讨论带电面的电场等价关系

如图 5 所示，面密度为 σ_1 的带电平面与面密度为 σ_2 半径为 r 带电半球面相切，在与 z 轴夹角成 θ 处取微元 $\mathrm{d}S$，所对应的立体角和球面元分别为 $\mathrm{d}\Omega$ 和 $\mathrm{d}S'$。平面元在圆心处产生的场强为

$$\mathrm{d}E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_1\mathrm{d}S}{(r/\cos\theta)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_1}{\cos\theta}\mathrm{d}\Omega$$

球面元在圆心处产生的场强

$$\mathrm{d}E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_2\mathrm{d}S'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma_2\mathrm{d}\Omega$$

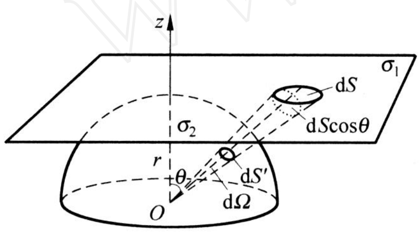

图 5

可以看出，对于电荷面密度相等的均匀带电的平面元和球面元，两者在相应的球心处产生的场强并不等价。因为只有满足 $\sigma_1 = \sigma_2\cos\theta$，才有 $\mathrm{d}E_1 = \mathrm{d}E_2$，由此我们得到

等价性 2 对于电荷面密度满足 $\sigma_1 = \sigma_2\cos\theta$ 关系的带电平面元与球面元，若两者所对的立体角相等，则两者在相应的球心处产生的场强等价。

作为一个推论，如图 6 所示，面密度为 σ 均匀带电圆盘在 O 处场强，与具有非均匀面密度 $\sigma/\cos\theta$ 的带电球面在球心 O 处产生的场强等价，它们均为

$$E_z = \oint \mathrm{d}E_z = \int_0^{\alpha}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \cos\alpha)$$

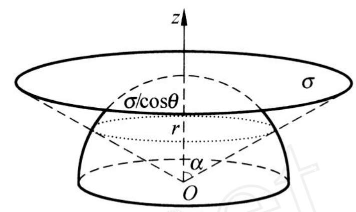

图 6

特殊的，当 $\alpha \to \frac{\pi}{2}$，就是我们熟知的无限大均匀平面和非均匀带电半球面在相应的圆心处的场强结果：$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

结论

本文从平面角和立体角出发，分别讨论了均匀带电直线微元与均匀带电圆弧微元及带电平面微元和带电球面微元的等价关系，并进一步推广到一些具体带电几何体。结果表明，带电线的场强等价性与带电面的场强等价性有很大区别，前者是完全等价的，而后者则必须引入随空间变化的电荷面密度关系才能等价。

参 考 文 献

[1] 张三慧. 大学基础物理学(下)[M]. 北京:清华大学出版社,2007

[2] 马文蔚. 物理学(上)[M]. 北京:高等教育出版社,2006

[3] 赵凯华,陈熙谋. 电磁学[M]. 北京:高等教育出版社, 2003

[4] 余守宪. 立体角在电磁学中的应用[J]. 物理与工程,2004, **14**,5～19