

浅论均匀带电球冠和相切平面的电场等价性

朱中凯¹ 刘亲博¹ 王睿博² 朱钦圣³ 吴明和³ 滕保华³

(¹ 电子科技大学英才实验学院; ² 电子科技大学英才实验学院;

³ 电子科技大学物理学院; 四川 成都 611731)

摘 要 大学物理中不同带电体的电场等价性,能够较好的训练物理学习者的分析和解决复杂实际问题的逻辑思维,从而提高物理知识的具体应用能力。本文首先讨论了均匀带电球冠面和与之相切的均匀带电平面在球面北极点的电场等价性,然后证明了均匀带电圆弧和与之相切的均匀带电直线在圆环顶点处的场强是不等价的,并且指出只有引入随角度变化的电荷线密度才能使两者等价。

关键词 电场;等价性;北极点

ON THE ELECTRIC EQUIVALENCE OF UNIFORM CHARGED SPHERICAL CROWN AND ITS TANGENT PLANE

ZHU Zhongkai¹ LIU Qinbo¹ WANG Ruibo² ZHU Qinsheng³ WU Minghe³ TENG Baohua³

(¹ Yingcai Honors College, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 611731;

² School of Physics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 611731)

Abstract The electric field equivalence of different charged objects in college physics can train physical learners' logical thinking of analyzing and solving complex practical problems, so as to improve their application ability of physical knowledge. In this paper, the electric field equivalence between the uniformly charged sphere crown and the uniformly charged plane at the north pole of the sphere is discussed firstly. Then it is proved that the electric field strength of uniformly charged arc and the uniformly charged line at the apex of the ring is not equivalent. It is shown that they can be equivalent only by introducing the charge line density as a function of the angle.

Key words electric field; equivalence; north pole point

1 引言

电磁学教材及相关文献^[1-7]中常常会讨论不同带电体电场的等价性问题,因为利用一些等价关系可以使实际问题得以方便处理,如镜像法^[1-3]用等效的镜像电荷替代原本问题的某些元素,从

而可以将问题大为简化。文献[4]讨论了两种均匀带电体以及两种均匀带电面的场强等价关系,但是只是考虑在圆心及球心的特定位置,文献[5-7]计算了均匀带电球面上的电场强度,但没有讨论带电球面和带电平面间的场强等价关系。本文将讨论均匀带电球冠面和与之相切的均匀带电平面在球面北极点的电场等价性,以及均匀带电圆

收稿日期: 2019-06-28; 修回日期: 2019-08-22

基金项目: 本文得到了四川省教育发展研究中心重点项目(CJF18007)的资助。

作者简介:

引文格式: 朱中凯,刘亲博,王睿博,等. 浅论均匀带电球冠和相切平面的电场等价性[J]. 物理与工程, 2020, 30(6): 00-00.

弧和与之相切的均匀带电直线在圆环顶点处的不等价性,从而丰富不同带电体电场的等价性问题的内涵。

2 带电面在球面北极点的电场关系

首先定义北极点 P ,它是球面 O 与 QO 延长线的交点(Q 是平面与球面 O 的切点),然后利用测地投影法,可以建立球面上球带与平面上圆环之间的对应关系,如图 1 所示。

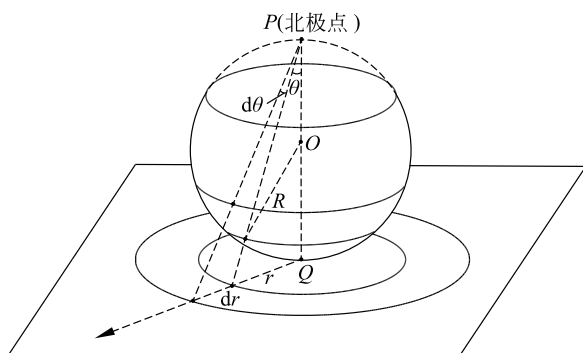


图 1 带电球冠面与带电平面示意图

若均匀带电球冠面与均匀带电平面相切于 Q 点,电荷密度皆为 σ ,球面的半径为 R ,则均匀带电平面上内半径为 r 、外半径为 $r+dr$ 的圆环在北极点 P 处产生的场强为

$$\begin{aligned} dE_{\text{圆环}} &= \frac{2R\sigma dS_{\text{圆环}}}{4\pi\epsilon_0 [(2R)^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2R\sigma 4\pi R^2 d\tan^2\theta}{4\pi\epsilon_0 [4R^2 + (2R\tan\theta)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin\theta d\theta \end{aligned} \quad (1)$$

而均匀带电球冠面上与上述均匀带电平面圆环相对应的球带在北极点 P 处的场强为

$$\begin{aligned} dE_{\text{球带}} &= \frac{(R + R\cos(2\theta)) \sigma dS_{\text{球带}}}{4\pi\epsilon_0 [(R + R\cos(2\theta))^2 + (R\sin(2\theta))^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(R + R\cos(2\theta)) 2\pi\sigma R^2 \sin 2\theta d(2\theta)}{4\pi\epsilon_0 [(R + R\cos(2\theta))^2 + (R\sin(2\theta))^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin\theta d\theta \end{aligned} \quad (2)$$

也就是说,电荷面密度相等的均匀带电球带和与之对应的均匀带电圆环,在北极点处产生的电场强度完全等价。这就意味着均匀带电球冠和与之

对应的均匀带电圆盘在北极点的场强是等价的,即

$$E_{\text{球冠}} = \int_0^\theta \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin\theta d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos\theta) = E_{\text{圆盘}} \quad (3)$$

利用上述结论,可以得到均匀带电几何球面上一点的场强。对于均匀带电的几何球面,其电场分布在该球面的邻域内不连续,所以直接求解该点场强有一定困难,但是许多文献计算了该点场强值收敛于 $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ^[5-7]。

其实,由上述等价关系知道,一无限大均匀带电平面和与之相切的均匀带电球面在北极点处产生的电场强度完全等价,在(3)式中取 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 可得均匀带电球面对该点的电场强度为 $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$,与无限大均匀带电平面对该点的电场强度等价。

当然,上述均匀带电几何球面也可以看成是均匀带电薄球壳的极限情形。对于带电量为 Q ,内半径为 R_1 ,外半径为 R_2 的同心带电球壳,由高斯定理可以得到 r 处($R_1 \leq r \leq R_2$)的场强为

$$E = \frac{(r^3 - R_1^3)Q}{\epsilon_0 (R_2^3 - R_1^3) 4\pi r^2} \quad (4)$$

设 $R_1 = r - \delta$, $R_2 = r + \delta$ 则

$$E = \frac{(r^3 - R_1^3)Q}{\epsilon_0 (R_2^3 - R_1^3) 4\pi r^2} = \frac{(3r^2 - 3r\delta + \delta^2)Q}{\epsilon_0 2(3r^2 + \delta^2) 4\pi r^2} \quad (5)$$

当 δ 趋于无穷小时该球壳即趋于一个几何球面,此时可得:

$$E = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(3r^2 - 3r\delta + \delta^2)Q}{\epsilon_0 2(3r^2 + \delta^2) 4\pi r^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (6)$$

为了更加直观起见,这里给出了均匀带电球壳的场强与 r 的图像,如图 2 所示。可以发现,当 R_1 与 R_2 非常接近时,场强大小 E 与 r 在 $R_1 < r < R_2$

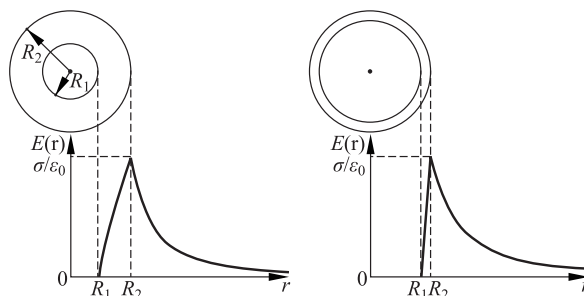


图 2 均匀带电球壳的场强

中近似呈线性关系,且 $E(R_1)=0, E(R_2)=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, 于是在 $r=(R_1+R_2)/2$ 处其场强大小为 $E(r)=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, 这就是均匀带电几何球面上的场强。

3 带电线在顶点处的场强关系

下面讨论带电直线和与之相切的带电圆弧在圆环顶点的场强关系。如图3所示,电荷线密度为 λ_1 的带电直线与电荷线密度为 λ_2 半径为 R 的带电圆弧相切。

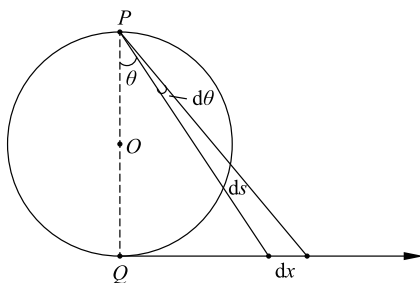


图3 带电直线和带电圆弧示意图

当 θ 变化到 $\theta+d\theta$ 时,带电直线上对应线元 dx ,而带电圆弧上对应圆弧元 ds ,则线元在圆弧顶点 P 处产生的场强为

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_1 dx}{r_1^2} \quad (7)$$

由几何关系可以简化为:

$$dE_1 = \frac{2R \sec^2 \theta \cdot \lambda_1 d\theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4R^2 \sec^2 \theta} = \frac{\lambda_1}{8\pi\epsilon_0 R} d\theta \quad (8)$$

而圆弧元在圆弧顶点 P 处产生的场强为:

$$dE_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_2 ds}{r_2^2} \quad (9)$$

同样利用几何关系有

$$dE_2 = \frac{\lambda_2 R d(2\theta)}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4R^2 \cos^2 \theta} = \frac{\lambda_2}{8\pi\epsilon_0 R} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \quad (10)$$

可以看出,若电荷线密度相等的均匀带电线元和均匀带电圆弧元,二者在相应圆弧的北极点 P 处产生的场强是不等价的。只有当电荷线密度满足 $\lambda_2 = \lambda_1 \cos^2 \theta$ 时,带电圆弧微元与带电直线微元在相应的圆弧顶点处产生的场强才是等价的。

结合文献[4]可以得到,均匀带电球冠面和与之相切的均匀带电平面在球面北极点的电场是等价的,但是在球面圆心处的电场是不等价的;均匀

带电圆弧和与之相切的均匀带电直线在圆环顶点处是不等价的,而在圆心处的电场是等价的,从而把不同带电体电场的等价性问题进行了拓宽和推广。

4 结论

本文首先讨论了均匀带电球面微元与均匀带电平面微元在球面北极点的电场等价关系,并应用两种面微元的电场等价性得出均匀带电球面上的场强,然后分析了均匀带电圆弧微元与均匀带电直线微元的不等价关系。结果表明,带电面的场强等价性与带电线的场强等价性的区别在于:对于北极点,前者电荷密度相同则完全等价,而后者需要引入随夹角变化的电荷密度关系才等价;对于圆心,后者电荷密度相同则完全等价,而前者需要引入随夹角变化的电荷密度关系才等价。

参 考 文 献

- [1] 赵凯华,陈熙谋. 新概念物理教程(电磁学)[M]. 北京:高等教育出版社,2003.
- [2] R. P. 费恩曼. 费恩曼物理学讲义(第2卷)[M]. 上海:上海科学技术出版社,2013.
- [3] 孙云卿,雷雨. 大学物理学(下)[M]. 北京:科学出版社,2010.
- [4] 曹灵吉,滕保华. 从平面角和立体角讨论静电场中的某些电场等价性[J]. 物理与工程,2009,19(4):14-16.
CAO L J, TENG B H. Some equivalence in the electrostatic field based on the plane and solid angles[J]. Physics and Engineering, 2009,19(4): 14-16. (in Chinese)
- [5] 彭海鹰. 均匀带电球面的电场强度分布再讨论[J]. 物理与工程,2003(1):60-61.
PENG H Y. Discussion on the electric field intensity distribution of a uniformly charged spherical surface[J]. Physics and Engineering, 2003(1): 60-61. (in Chinese)
- [6] 何志巍,李纯,崔文宏,等. 均匀带电球壳球面电场强度计算方法的讨论[J]. 物理通报,2016(4):7-10.
HE Z W, LI C, CUI W H, et al. Discussion on the calculation method of the electric field intensity on surface of evenly-charged spherical shell[J]. Physics Bulletin, 2016(4): 7-10. (in Chinese)
- [7] 刘倩,翟晓霞,艾丽娜. 电场强度在带电表面突变问题的深入探讨[J]. 物理通报,2016(8):16-18.
LIU Q, ZHAI X X, AI L N. In-depth discussion on the problem of electric field strength abrupt change on charged surface[J]. Physics Bulletin, 2016(8): 16-18. (in Chinese)