Aufgabe 2.2

a) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

① Drücke Quadrate durch Multiplikation aus:

$\sqrt{x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z}$

② Füge Klammern ein:

$(\sqrt{((x \cdot x) + (y \cdot y)) + (z \cdot z))})$

③ Präfix-Notation:

sqrt(add(add(mul(x,x), mul(y,y)), mul(z,z)))

Wende Substitutionsmethode an (für $x=3, y=4, z=12$):

sqrt(add(add(mul(3,3), mul(4,4)), mul(12,12)))

sqrt(add(add(9, mul(4,4)), mul(12,12)))

sqrt(add(add(9, 16), mul(12,12)))

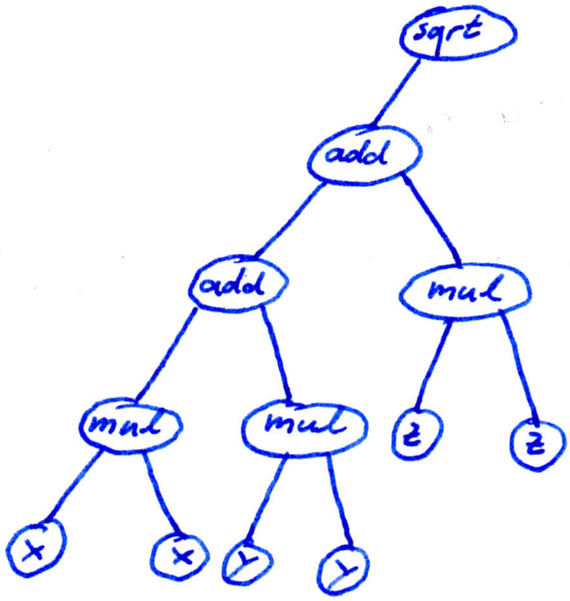
sqrt(add(25, mul(12,12)))

sqrt(add(25, 144))

sqrt(169)

$\Rightarrow$ 13

Baumdarstellung:



b) Maschinensprache:

Implementierung nach Baumdarstellung:

1	1	0		Initialisieren der Speicherzellen nach Baumstruktur für add, mul, sqrt ...
1	2	0		
1	4	0		
1	5	0		
1	8	0		
1	9	0		
1	10	12		Initialisieren der Werte für x, y, z hier an sich nur für ein Blatt nötig
(1	11	12	)	
1	16	3		
(1	17	3	)	
1	18	4		
(1	19	4	)	
4	8	16	16 (bzw. 17)	// Spz8 ← mul(Spz16, Spz16/17)
4	9	18	18 (bzw. 19)	// analog
2	4	8	9	// Spz4 ← add(Spz8, Spz9)
4	5	10	10 (bzw. 11)	
2	2	4	5	
6	1	2		// Spz1 ← sqrt(Spz2)

Implementierung nach Präfix-Notation:

1	1	3		Initialisieren der Werte für x, y, z
1	2	4		
1	3	12		
4	1	1	1	// Spz1 ← mul(Spz1, Spz1)
4	2	2	2	// analog
~~4~~	~~3~~	~~3~~	~~3~~	~~// analog~~
2	2	1	2	// Spz2 ← add(Spz1, Spz2)
4	3	3	3	// Spz3 ← mul(Spz3, Spz3)
2	1	2	3	// Spz1 ← add(Spz2, Spz3)
6	1	1		// Spz1 ← sqrt(Spz1)

c) $2 + 3\cdot x - 4x^2 + 5x^3$ [illegible] $2 + 3\cdot x - 4\cdot x\cdot x + 5\cdot x\cdot x\cdot x$

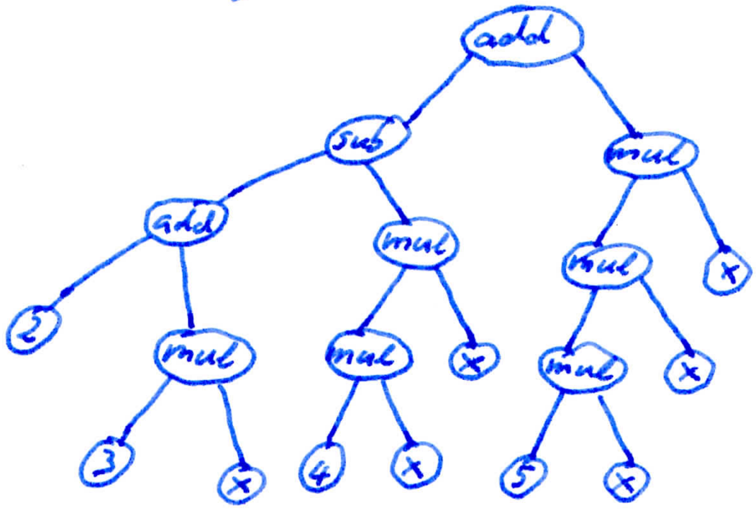
Klammern einfügen:

$$\left(\left((2 + (3\cdot x)) - ((4\cdot x)\cdot x)\right) + (((5\cdot x)\cdot x)\cdot x)\right)$$

Präfix-Notation:

add(sub(add(2, mul(3, x)), mul(mul(4, x), x)), mul(mul(mul(5, x), x), x))

Baumdarstellung:



zu c) Substitutionsmethode für $x=2$

add(sub(add(2, mul(3,2)), mul(mul(4,2),2)), mul(mul(mul(5,2),2),2))

add(sub(add(2,6)), mul(mul(4,2),2)), mul(mul(mul(5,2),2),2))

add(sub(8, mul(mul(4,2),2)), mul(mul(mul(5,2),2),2))

add(sub(8, mul(8,2)), mul(mul(mul(5,2),2),2))

add(sub(8,16), mul(mul(mul(5,2),2),2))

add(−8, mul(mul(mul(5,2),2),2))

add(−8, mul(mul(10,2),2))

add(−8, mul(20,2))

add(−8, 40)

$\Rightarrow$ 32

d) $2 + (3 + (-4 + 5 \cdot x) \cdot x) \cdot x$

$= 2 + (3 - 4x + 5x^2) \cdot x = 2 + 3x - 4x^2 + 5x^3$

Präfix-Notation:

add(2, mul(add(3, mul(add(−4, mul(5,x)), x)), x))

Substitutionsmethode für $x=2$

add(2, mul(add(3, mul(add(−4, mul(5,2)),2)),2))

add(2, mul(add(3, mul(add(−4,10),2)),2))

add(2, mul(add(3, mul(6,2)),2))

add(2, mul(add(3,12),2))

add(2, mul(15,2))

add(2, 30)

$\Rightarrow$ 32

Warum ist Horner Schema sinnvoll?

→ vereinfacht Rechenverfahren von Polynomen

→ hierbei kommen keine Potenzen vor, sondern nur Addition und Multiplikation

→ Berechnung wird dadurch beschleunigt, weil weniger Multiplikationen nötig sind

↳ Anzahl wird durch Horner Schema auf fast Hälfte reduziert

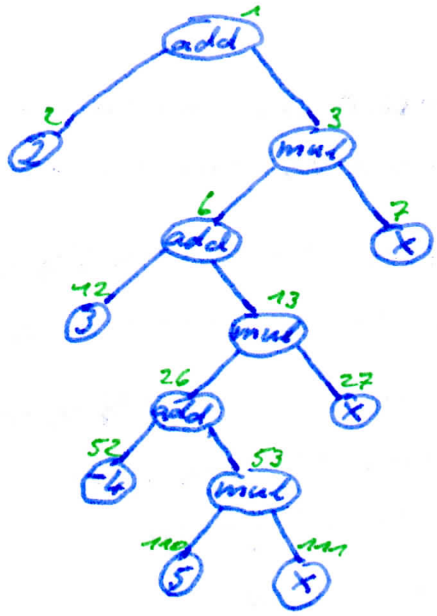
↳ Klassisch $2n-1$ Multiplikationen von nöten für Polynom von Grad n

↳ $n-1$ für Bildung der Potenzen

n weitere Multiplikationen für Multiplikation mit Koeffizienten } $\Rightarrow 2n-1$

↳ Horner Schema benötigt nur n Multiplikationen

Baumdarstellung:



Knotennumer

e) Maschinensprache aus Baumdarstellung in d) für x = 2

1	1	0		// Initialisierung Baum wie in b)
1	2	2		
1	3	0		
1	6	0		
1	7	2		// x = 2
1	12	3		
1	13	0		
1	26	0		
1	27	2		// x = 2
1	52	-4		
1	53	0		
1	110	5		
1	111	2		// x = 2
4	53	110	111	// Spz53 ← mul(Spz110, Spz111)
2	26	52	53	
4	13	26	27	
2	6	12	13	
4	3	6	7	
2	1	2	3	

Implementierung nach Präfix-Notation

1	1	2		
1	2	3		
1	3	2		// x = 2
1	6	-4		
1	7	5		
4	7	7	3	// Spz7 ← mul(Spz7, Spz3)
2	6	6	7	
4	6	6	3	
2	2	2	6	
4	2	2	3	
2	1	1	2	