Aufgabe 8.1

a) Ist a eine negative Zahl, so errechnet sich a in Zweierkomplementdarstellung a_z mit x Stellen

$$a_z = 2^x - |a| \quad \Rightarrow \quad a_z + |a| = 2^x$$

man erkennt, da |a| einer positiven Zahl entspricht, dass sich die Binärdarstellung nicht ändert.
d.h. will man eine natürliche Zahl in eine negative Zahl umwandeln (also zum ganzen Zahlenbereich erweitern).

- Sei $a \in \mathbb{N}_0$
  Wandel a in Binärdarstellung $a_B \Rightarrow \sim a_B + 1 = a_B'$
  $\rightarrow$ wandel a_B' in Zahlendarstellung ("Dezimal") um und erhalte negative Zahl (ganzer Zahlenbereich)

umgekehrt analog:

Sei $a \in \mathbb{Z}$ und a negativ
Wandel a in Binärdarstellung $a_B \Rightarrow \sim a_B + 1 = a_B'$
$\rightarrow$ Wandel a_B' in Zahlendarstellung um und erhalte natürliche Zahl.

Bsp.: 8 Bit (= x)

$127 \quad 0111\ 1111 = a_B$

$-127 \rightarrow \sim a_B + 1 = 1000\ 0000 + 1 = 1000\ 0001 = 129$

b) zz.: $c = (a+b) \bmod' 2^x \Leftrightarrow c = intx\_t((uintx\_t(a) + uintx\_t(b)) \bmod 2^x)$

Bew: $intx\_t((uintx\_t(a) + uintx\_t(b)) \bmod 2^x)$

$\Leftrightarrow ((uint\cancel{x\_t}(a) + uintx\_t(b)) \bmod 2^x) \bmod' 2^x$

$\Leftrightarrow (a (\bmod 2^x) + b (\bmod 2^x)) \bmod 2^x) \bmod' 2^x$

$\Leftrightarrow ((a + b)(\bmod 2^x)) \bmod' 2^x$

$\Leftrightarrow ((a+b) \bmod' 2^x) \bmod 2^x$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{(a+b) \bmod' 2^x}}$

$\square$

zz: $c = (a \cdot b) \bmod' 2^x \Leftrightarrow c = intx\_t((uintx\_t(a) + uintx\_t(b)) \bmod 2^x)$

Bew: $intx\_t((uintx\_t(a) \cdot uintx\_t(b)) \bmod 2^x)$

$\Leftrightarrow ((uintx\_t(a) \cdot uintx\_t(b)) \bmod 2^x) \bmod' 2^x$

$\Leftrightarrow (a (\bmod 2^x) \cdot b (\bmod 2^x)) \bmod 2^x) \bmod' 2^x$

$\Leftrightarrow ((a \cdot b) \bmod 2^x) \bmod' 2^x$

$\Leftrightarrow ((a \cdot b) \bmod' 2^x) \bmod 2^x$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{(a \cdot b) \bmod' 2^x}}$

$\square$

c) z.z.: für $u, v, w \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$((u+v)\cdot w) \bmod 2^x = (((u+v) \bmod 2^x)\cdot w) \bmod 2^x$$

Beweis: $((u+v)\cdot w) \bmod 2^x$

$\iff ((u+v)(\bmod 2^x) \cdot w(\bmod 2^x)) \bmod 2^x$

$\iff ((u(\bmod 2^x) + v(\bmod 2^x)) \bmod 2^x \cdot w(\bmod 2^x)) \bmod 2^x$

$\iff (((u(\bmod 2^x) + v(\bmod 2^x)) \cdot w) \bmod 2^x) \bmod 2^x$

$\iff (((u(\bmod 2^x) + v(\bmod 2^x)) \cdot w) \bmod 2^x$

$\iff (((u+v) \bmod 2^x) \cdot w) \bmod 2^x$

$\square$

Gegenbeispiel für $((u+v)/w) \bmod 2^x = (((u+v) \bmod 2^x)/w) \bmod 2^x$

8 Bit $(=x)$:

Sei $u = 220$, $v = 140$, $w = 60$

$((u+v)/w) \bmod 2^x = ((220+140)/60) \bmod 2^8 = 6 \bmod 2^8 = \underline{\underline{6}}$

aber:

$(((u+v) \bmod 2^x)/w) \bmod 2^x = (((220+140) \bmod 2^8)/60) \bmod 2^8$

$= (104/60) \bmod 2^8 = \frac{26}{15} \approx \underline{\underline{1{,}7}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{6 \neq 1{,}7}}$