7.3: ALGORITHMISCHE KOMPLEXITÄT

A)

für n=32 ist t=5s, was ist t für n=64 unter bestimmten Komplexitäten

i). $\log_2(n)$

$$k \cdot \log_2(32) = 5 \tag{1}$$
$$\Leftrightarrow k = 1 \tag{2}$$
$$\Rightarrow \log_2(64) = 6 \tag{3}$$

Der Algorithmus benötigt 6s für 64 Elemente

ii). n

$$k \cdot 32 = 5 \tag{4}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{32} \tag{5}$$
$$\Rightarrow \frac{5}{32} \cdot 64 = 10 \tag{6}$$

Der Algorithmus benötigt 10s für 64 Elemente

iii). $n \cdot \log_2(n)$

$$k \cdot 32 \cdot \log_2(32) = 5 \tag{7}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{32} \tag{8}$$
$$\Rightarrow 64 \cdot \log_2(64) = 12 \tag{9}$$

Der Algorithmus benötigt 12s für 64 Elemente

iv). n^2

$$k \cdot 32^2 = 5 \tag{10}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{964} \tag{11}$$
$$\Rightarrow \frac{5}{964} \cdot 64^2 = 20 \tag{12}$$

Der Algorithmus benötigt 20s für 64 Elemente

v). 2^n

$$k \cdot 2^{32} = 5 \tag{13}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{2^{32}} \tag{14}$$
$$\Rightarrow \frac{5}{2^{32}} \cdot 2^{64} = 5 \cdot 2^{32} \tag{15}$$

Der Algorithmus benötigt ca. 640 Jahre für 64 Elemente

B)

z.z: $\forall a, b > 0 : \log_a(n) \in O(\log_b(n)) = \{f(n) \mid f(n) < k{\cdot}\log_b(n), k \in \mathbb{R},\ \text{ab einem Punkt } n_0\}$

$$\xrightarrow[nachLog.Ges.]{} \log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)} \tag{16}$$
$$\text{mit } \log_b(a) = const. \tag{17}$$
$$\Rightarrow \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)} = k \cdot \log_b(n), \tag{18}$$
$$\text{mit } k = \frac{1}{\log_b(a)} \tag{19}$$
$$\Rightarrow \log_a(n) \in O(\log_b(n)) \tag{20}$$

C)

Annahme: (effizient bis ineffizient) $\log(n) < n^{1/2} < n \cdot \log(n) < n^2 < 2^n$
Test:

- $\log(n), n^{1/2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^{1/2}} = 0 \tag{21}$$
$$\Rightarrow \log(n) < n^{1/2} \tag{22}$$

- $n^{1/2}, n \cdot \log(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{n \cdot \log(n)} = 0 \tag{23}$$
$$\Rightarrow n^{1/2} < n \cdot \log(n) \tag{24}$$

- $n \cdot \log(n), n^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log(n)}{n^2} = 0 \tag{25}$$

$$\Rightarrow n \cdot \log(n) < n^2 \tag{26}$$

- $n^2, 2^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n \cdot \ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n(\ln^2(n) + \frac{1}{n})} = 0 \tag{27}$$

$$\text{da} \lim_{n\to\infty} \left(\ln^2(n) + \frac{1}{n}\right) = \infty \tag{28}$$

$$\Rightarrow n \cdot n^2 < 2^n \tag{29}$$

$\Rightarrow$ die Annahme war Richtig (mit transitiven Eigenschaften auf $\mathbb{N}$)