Metody Numeryczne - Projekt 2

Układy Równań Liniowych

Adam Chabraszewski 193373 28.04.2024

Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie trzech metod rozwiązywania układów równań liniowych. Dwie z tych metod (Jacobiego i Gaussa - Seidla) były metodami iteracyjnymi, natomiast jedna (faktoryzacja LU) była metodą bezpośrednią. Do zaimplementowania metod oraz zebrania potrzebnych danych użyłem języka c++, natomiast do przedstawienia wyników użyłem biblioteki matplotlib w języku Python.

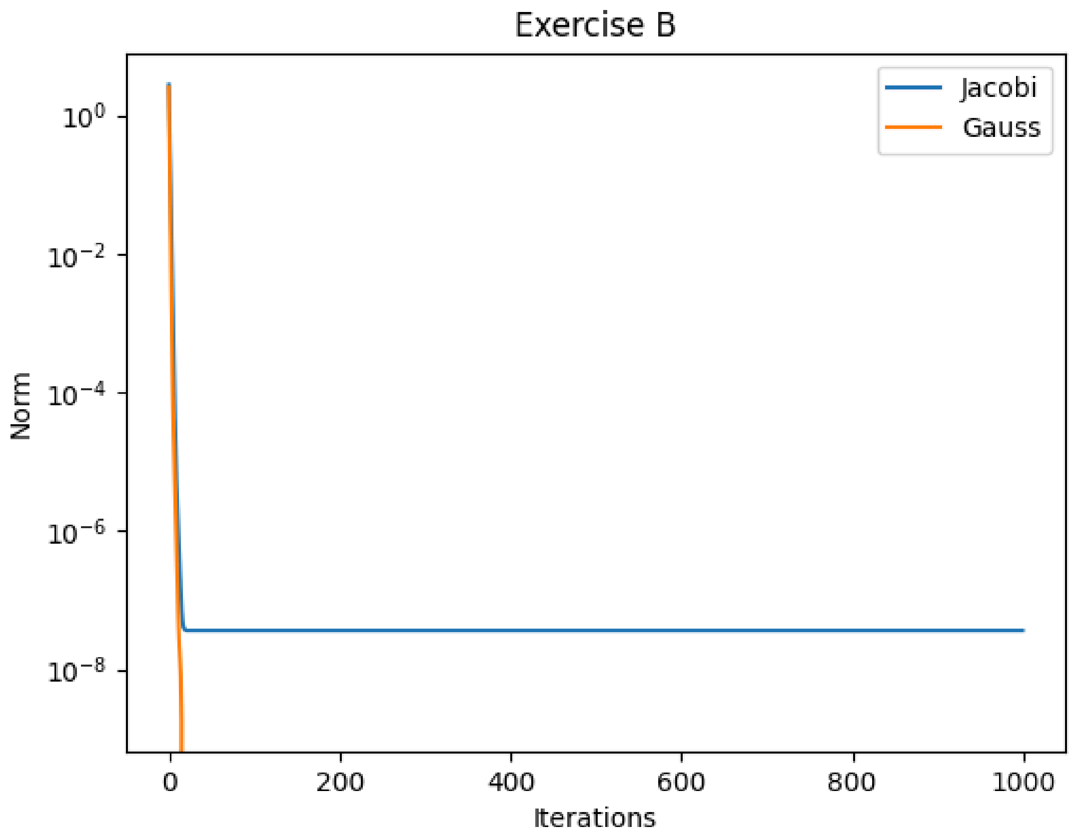
Zadanie

- **Podpunkt A**
  - Parametry startowe przybrały następujące wartości: a1 = 8, a2 = a3 = -1, N = 973
  - N-ty element wektora b przybierał wartość sin(4n).
- **Podpunkt B**
  - W tym podpunkcie badałem działanie metod Jacobiego oraz Gaussa - Seidla dla parametrów z podpunktu A. Iteracja była przeprowadzona dopóki norma z wektora residuum nie była mniejsza od 10e-9, albo nie przekroczyła liczby 1000 iteracji.

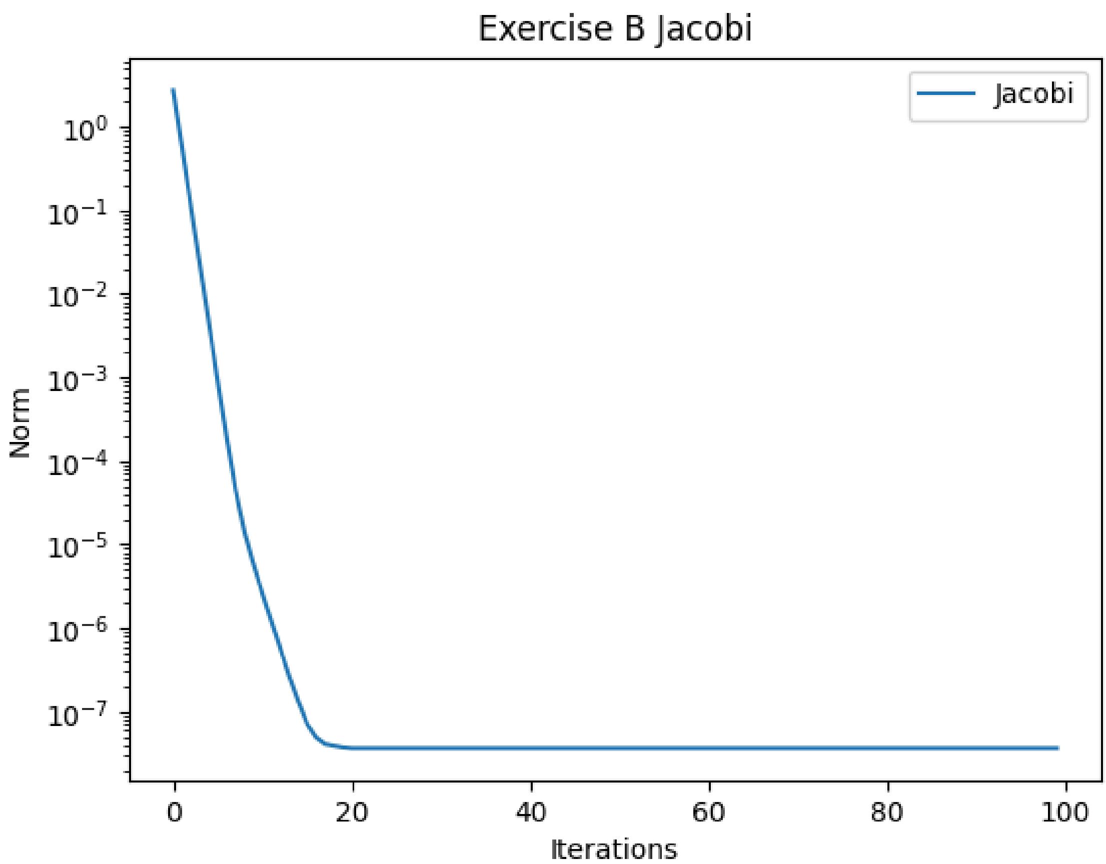
```
Exercise B

Jacobi Iterations:  1000
Jacobi Time:  894.0  ms
Jacobi Norm:  3.64527e-08
Gauss Iterations:  16
Gauss Time:  13.0  ms
Gauss Norm:  0.0
```

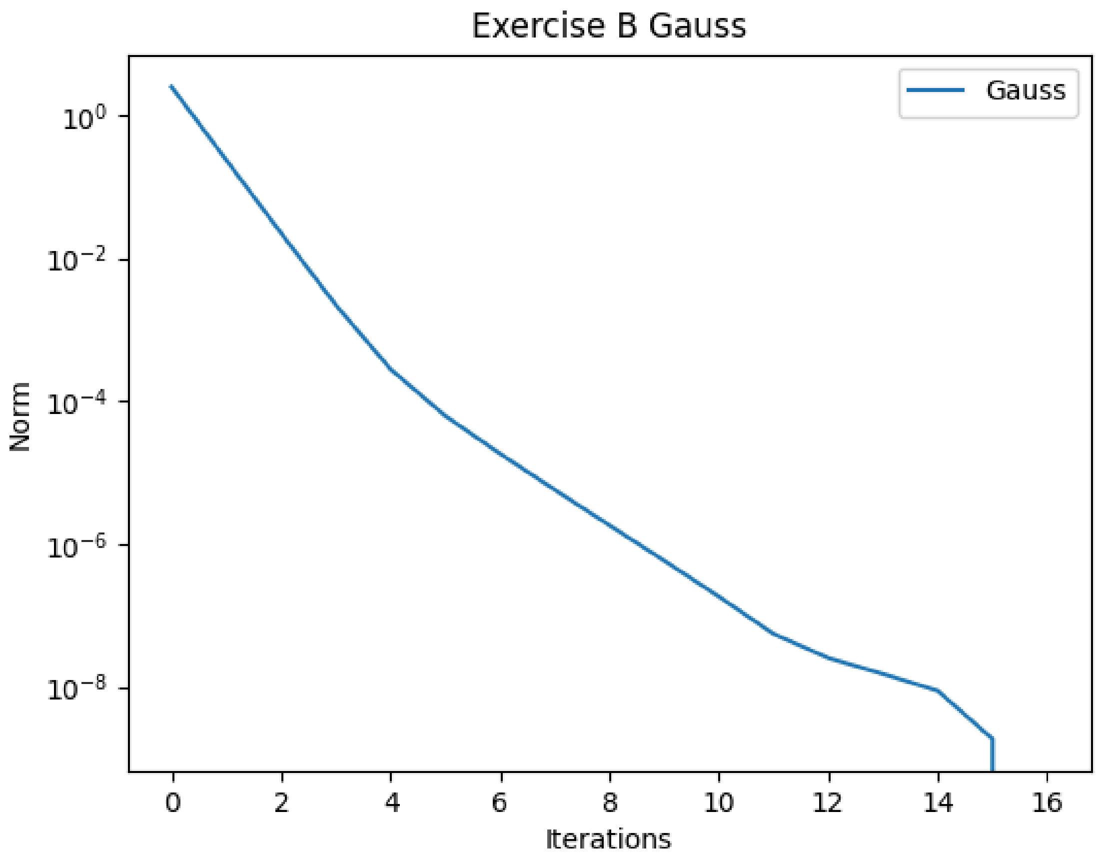
Jak można zauważyć, metoda Gaussa - Seidla spisała się znacznie lepiej od metody Jacobiego. Czas wykonania był 69 - krotnie krótszy oraz zakończyła się w zaledwie 16 iteracjach. Mimo że metoda Jacobiego nie zamknęła się w 1000 iteracji, obydwie metody były zbieżne odpowiednio do 3.65e-8 dla metody Jacobiego, na którym to poziomie utrzymała się aż do ostatniej iteracji, oraz do zera dla metody Gaussa - Seidla.



Exercise B
Jacobi
Gauss
Norm
10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
0
200
400
600
800
1000
Iterations



Exercise B Jacobi
Jacobi
Norm
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
0
20
40
60
80
100
Iterations

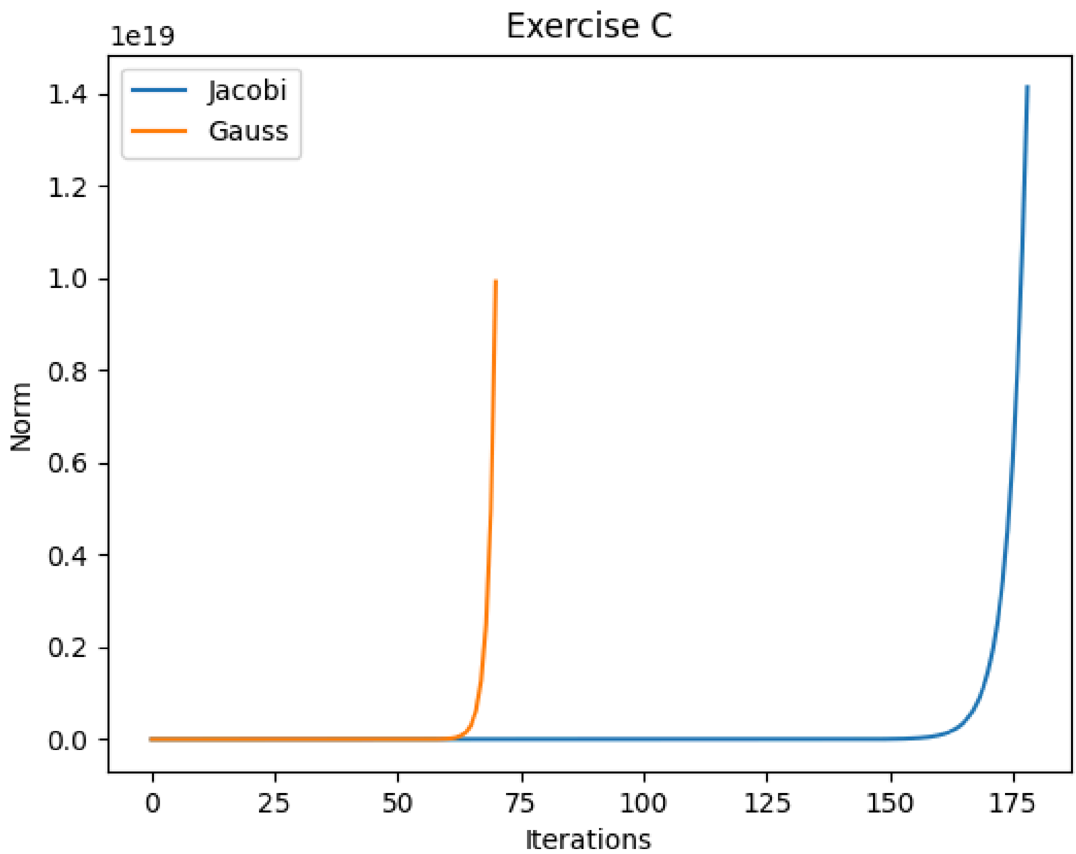


- **Podpunkt C**
  - W tym podpunkcie, również należało zbadać działanie metod Jacobiego oraz Gaussa - Seidla, jednak z parametrem a1 = 3.

```
Exercise C

Jacobi Iterations:  1000
Jacobi Time:  819.0  ms
Jacobi Norm:  inf
Gauss Iterations:  1000
Gauss Time:  801.0  ms
Gauss Norm:  inf
```

Jak widać na wynikach, żadna z metod nie była w stanie dać rezultatu przed tysięczną iteracją, ani metody nie są zbieżne, gdzie normy wektora residuum dąży do nieskończoności. Oznacza to, że metody nie dążą do konkretnego rozwiązania i nie da się rozwiązać tego równania tymi metodami.

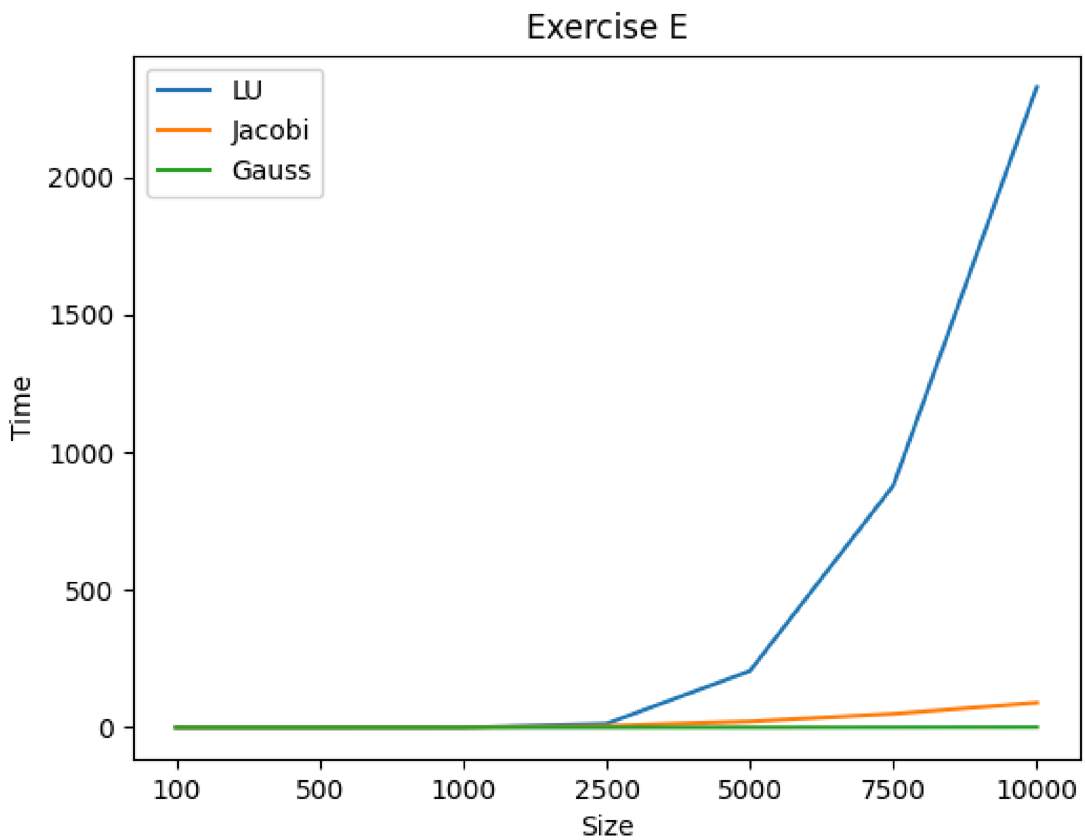


- **Podpunkt D**
  - Dla tych samych parametrów co w podpunkcie C używamy metody bezpośredniej (faktoryzacji LU). W rezultacie uzyskujemy normę wektora residuum bliską 78, co oznacza lepszy rezultat rozwiązania układu równania liniowego od innych metod, jednak nie idealny, gdyż nie jest on bliski zeru.

```
Exercise D

LU Norm:  77.9445
```

- **Podpunkt E**
  - W tym podpunkcie należało porównać czas wykonania każdej ze wcześniej badanych metod, dla parametrów z podpunktu A ze zmienną wartością N. Badanie przeprowadziłem dla N = {100, 500, 1000, 2500, 5000, 7500, 10000} (czas na osi y wyrażony w sekundach).



Dla pierwszych trzech macierzy najgorzej czasowo wypadała metoda Jacobiego, a najlepiej metoda Gaussa - Seidla, jednak różnica czasowa nie była znacząca, gdyż zamykała się w paruset milisekundach.

```
Jacobi Method 100
Time: 7
Gauss Method 100
Time: 0
LU Method 100
Time: 0
Jacobi Method 500
Time: 214
Gauss Method 500
Time: 3
LU Method 500
Time: 38
Jacobi Method 1000
Time: 858
Gauss Method 1000
Time: 11
LU Method 1000
Time: 302
```

(czas wyrażony w milisekundach)

Natomiast dla macierzy o N równych lub większym 2500, najgorzej wychodziła metoda faktoryzacji LU. Metoda Gaussa - Seidla nadal pozostawała najlepsza, a metoda Jacobiego wolniejsza o kilkadziesiąt sekund.

```
Jacobi Method 2500
Time: 5634
Gauss Method 2500
Time: 81
LU Method 2500
Time: 13539
Jacobi Method 5000
Time: 21980
Gauss Method 5000
Time: 306
LU Method 5000
Time: 205059
Jacobi Method 7500
Time: 49564
Gauss Method 7500
Time: 730
LU Method 7500
Time: 879598
Jacobi Method 10000
Time: 89725
Gauss Method 10000
Time: 1310
LU Method 10000
Time: 2327703
```

(czas w milisekundach)

- **Podpunkt F**
  - Wszystkie trzy metody doświadczają wzrostu czasu obliczeniowego wraz ze wzrostem liczby parametrów równania (rozmiaru macierzy). Dla metod iteracyjnych ten wzrost nie jest aż tak dotkliwy, jak dla metody bezpośredniej, której to czas rośnie wykładniczo. Znaczącą wadą metod iteracyjnych jest niemożliwość rozwiązania niektórych układów równań, gdyż metody te nie zawsze się zbiegają. W takich wypadkach, mimo wolniejszego czasu wykonania, należy użyć metody bezpośredniej.