Metody Numeryczne - Projekt nr 3

Aproksymacja Profilu Wysokościowego

Adam Chabraszewski 193373 26/05/2024

Wstęp

Celem tego projektu było zastosowanie dwóch metod aproksymacji interpolacyjnej, Lagrange'a oraz metodę wykorzystującą funkcje sklejane trzeciego stopnia, dla dwóch wybranych tras. Projekt zrealizowałem w języku Python z użyciem bibliotek: matplotlib - do stworzenia wykresów, pandas - do wczytania danych oraz numpy - do przechowywania danych oraz operacji macierzowych.

Metody stosowane w obliczeniach

W projekcie najpierw generuje zadaną liczbę węzłów jednym z dwóch sposobów:

- Równomiernym rozłożeniem
- Węzłami chebysheva drugiego stopnia

Do wygenerowania węzłów chebysheva drugiego stopnia używam następującego wzoru

$$x_k = \cos\left(\frac{k}{n-1}\pi\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Następnie dla wygenerowanych węzłów w celu interpolacji funkcji używam albo metody Lagrange'a albo metody funkcji sklejanych trzeciego stopnia.
Dla metody Lagrange'a najpierw tworzę bazę funkcji według tego wzoru

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

A następnie tworzę funkcję interpolującą według tego wzoru

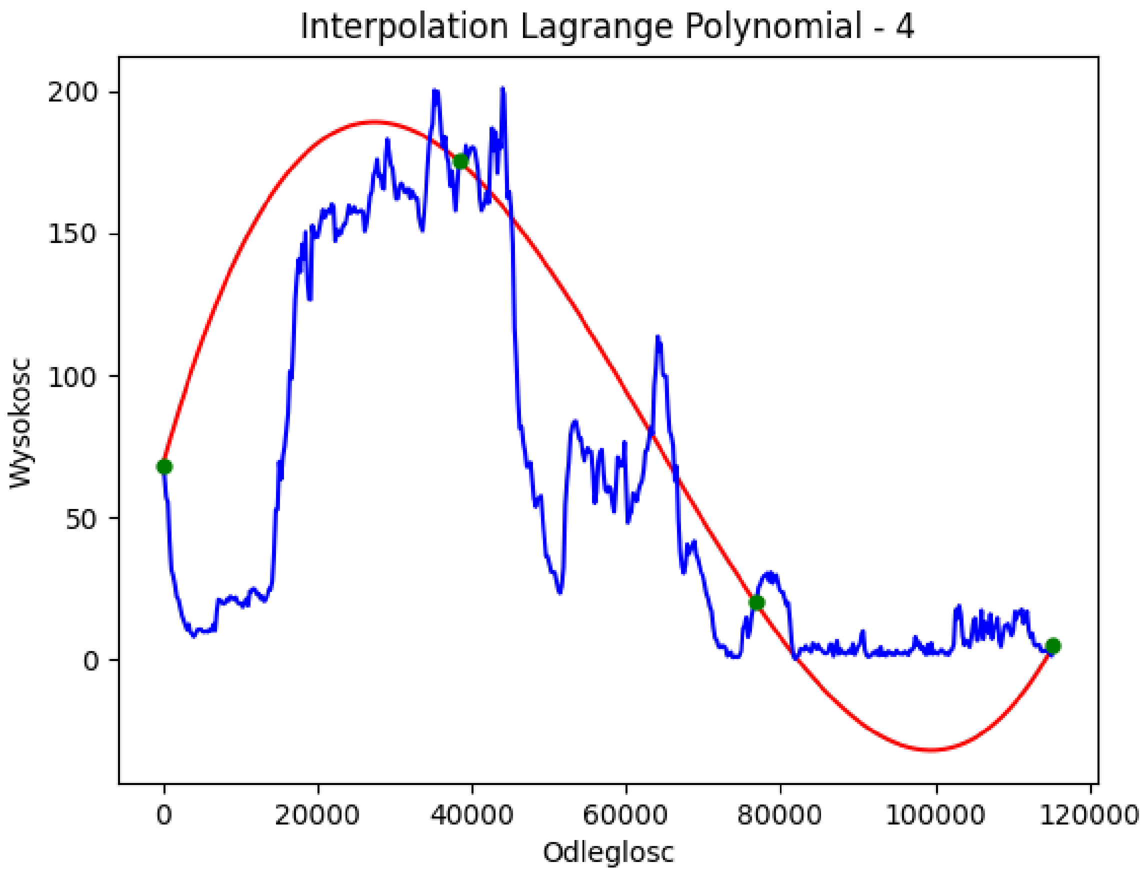
$$F(x) = \sum_{i=1}^{4} y_i \phi_i(x)$$

Przy metodzie sklejenia funkcji trzeciego stopnia, najpierw dla zadanych przedziałów tworzę układ równań liniowych, a następnie po rozwiązaniu go, wyznaczam współczynniki wielomianu funkcji dla poszczególnych przedziałów.

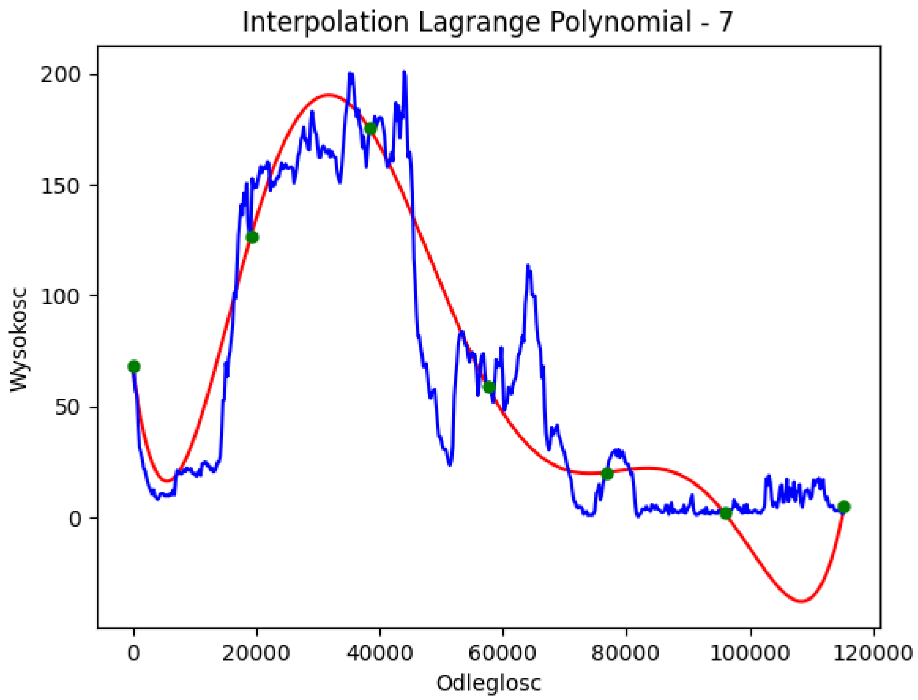
Analiza interpolacji wielomianowej pierwszej trasy

Na pierwszą analizowana trase wybralem te z pliku Hel_yeah.csv.

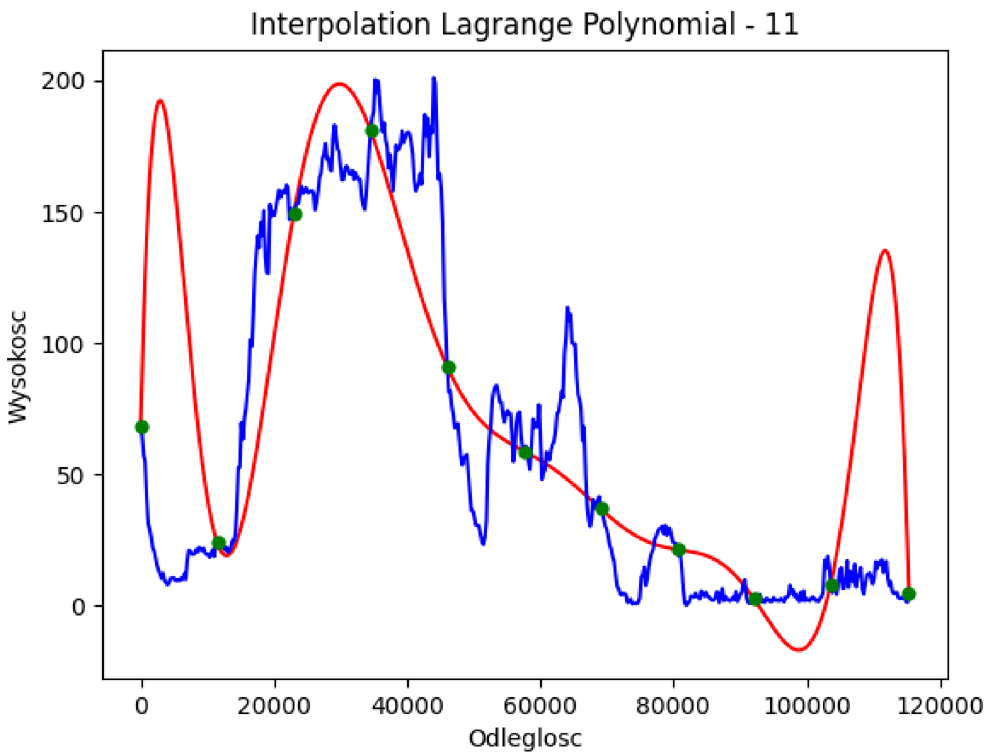
Jak widać na poniższym wykresie, interpolacja dla 4 węzłów nie jest w żaden sposób zadowalająca



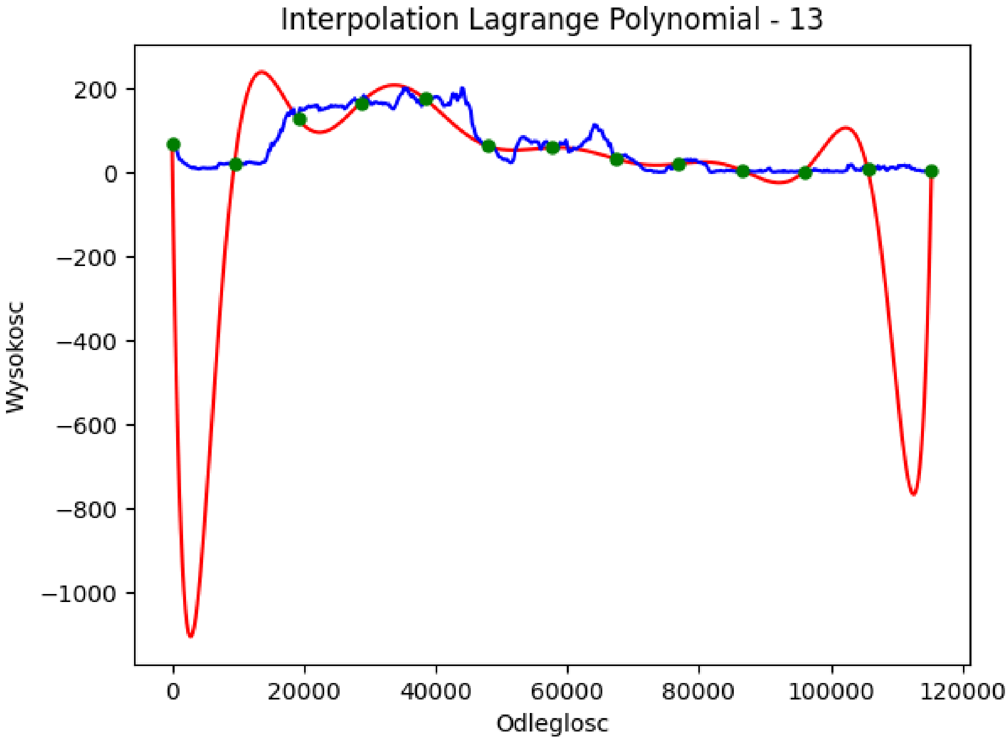
Przy zwiększeniu liczby węzłów do 7, interpolacja jest już dużo bardziej zadowalająca, jednak na lewym krańcu można dostrzec mocną oscylację - efekt Rungego.



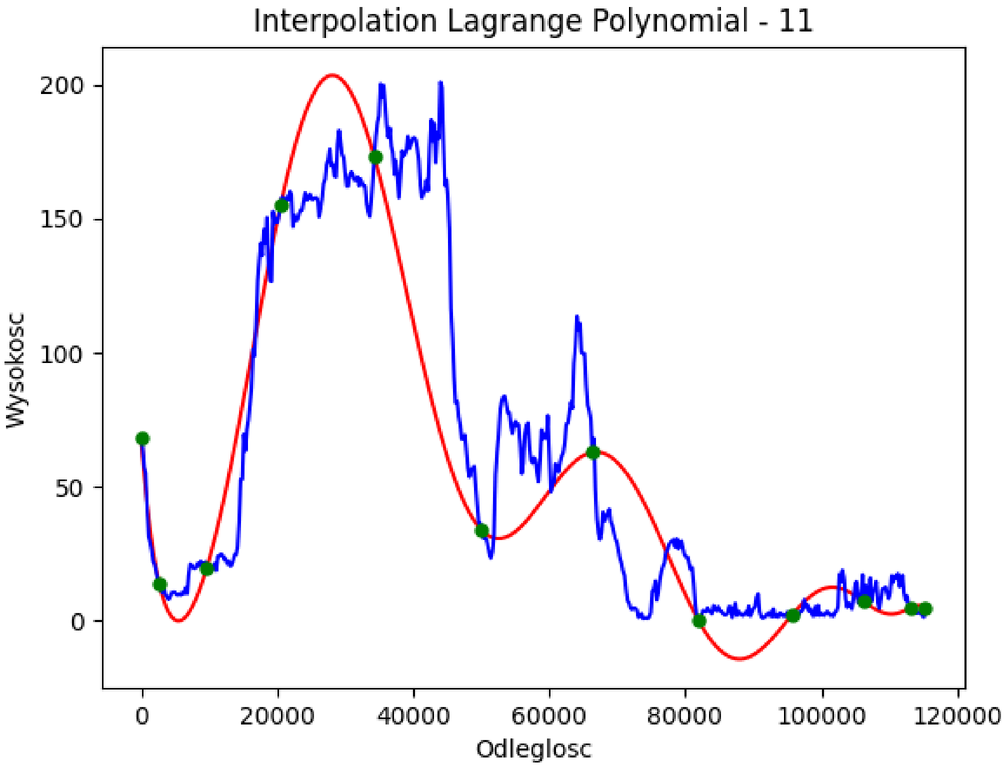
Dla 11 węzłów interpolacja nie zyskuje na jakośći, jednak efekt Rungego jest już dużo bardziej zauważalny



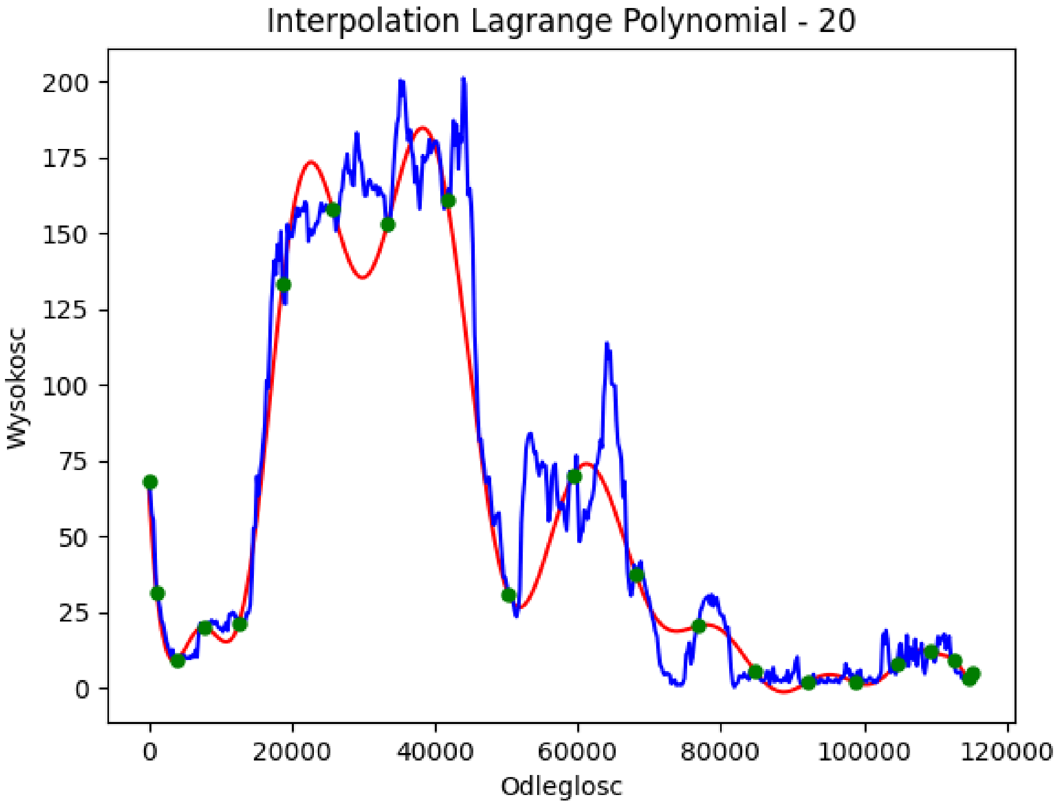
Przy 13 węzłach efekt Rungego przyćmiewa jakąkolwiek jakość interpolacji.



Jednak przy zmianie rozmieszczenia węzłów, używając węzłów chebysheva, możemy zarówno zwiększyć jakość interpolacji jak i pozbyć się efektu Rungego z powodu większego rozmieszczenia węzłów na krańcach przedziału.



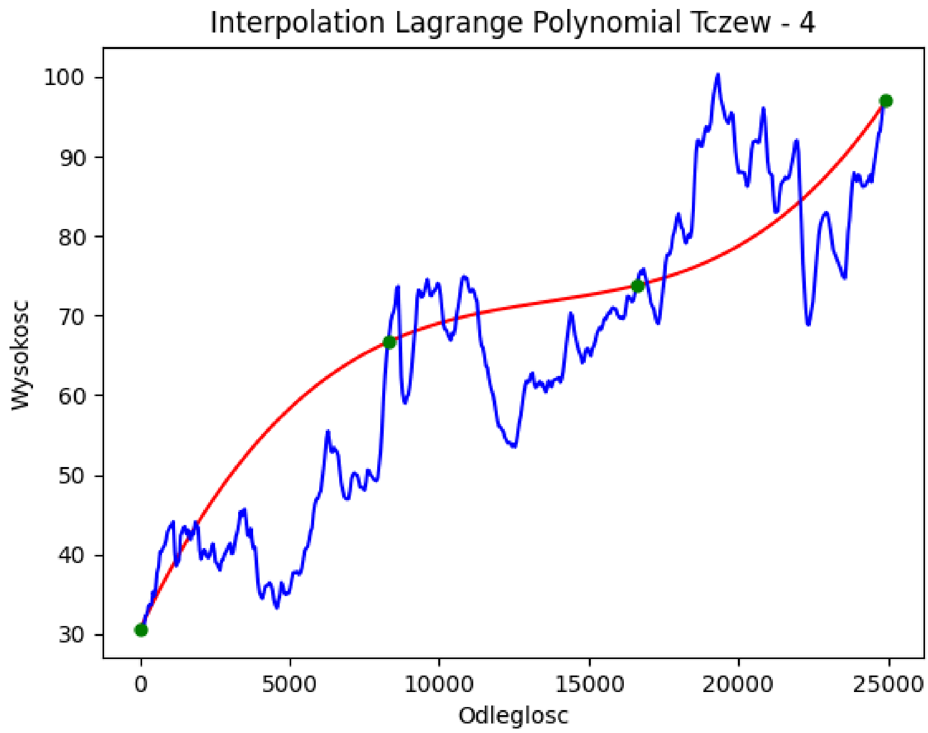
A dodatkowo po zwiększeniu liczby węzłów uzyskujemy jeszcze dokładniejsza interpolację.



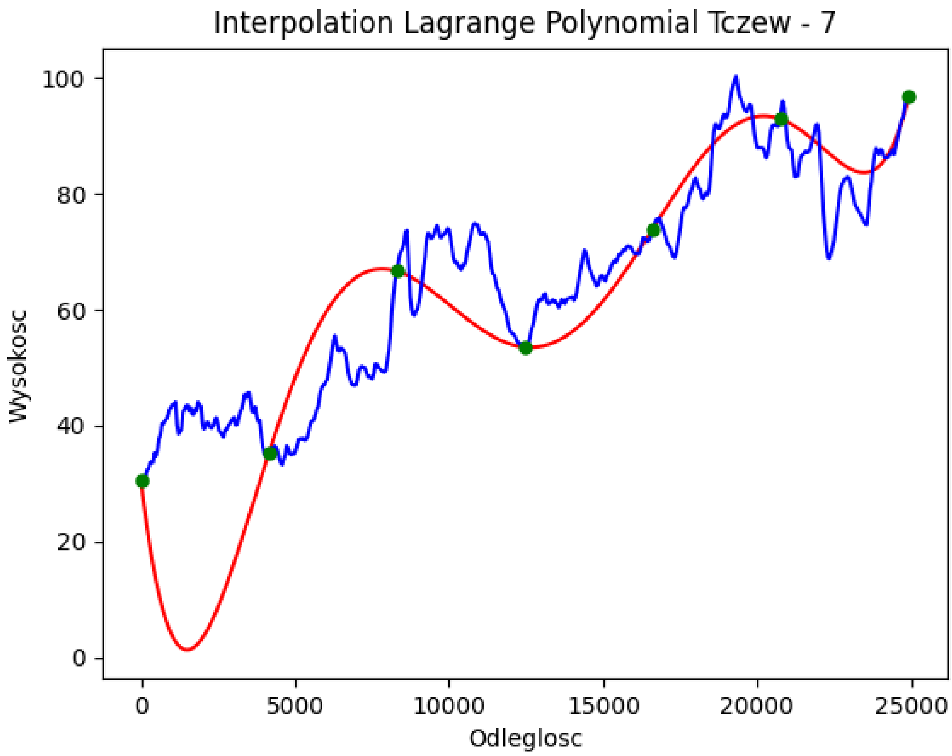
Analiza interpolacji wielomianowej drugiej trasy

Do analizy drugiej trasy wybrałem trasę pomiędzy Tczewem, a Starogardem.

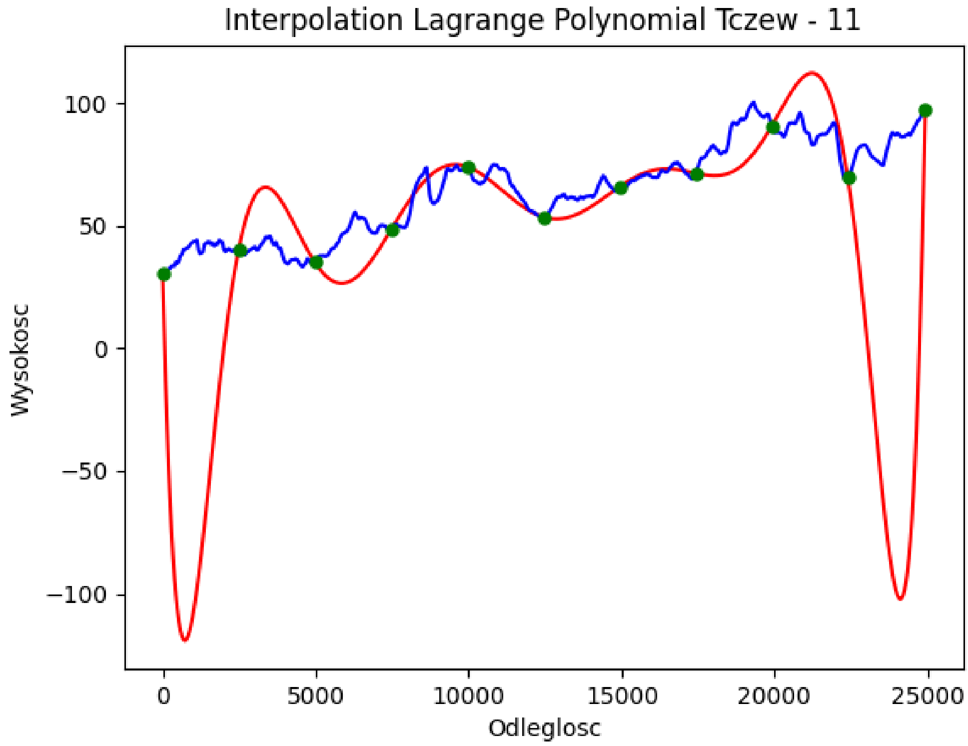
Ponownie dla niskiej liczby węzłów otrzymujemy interpolację bardzo niskiej jakości



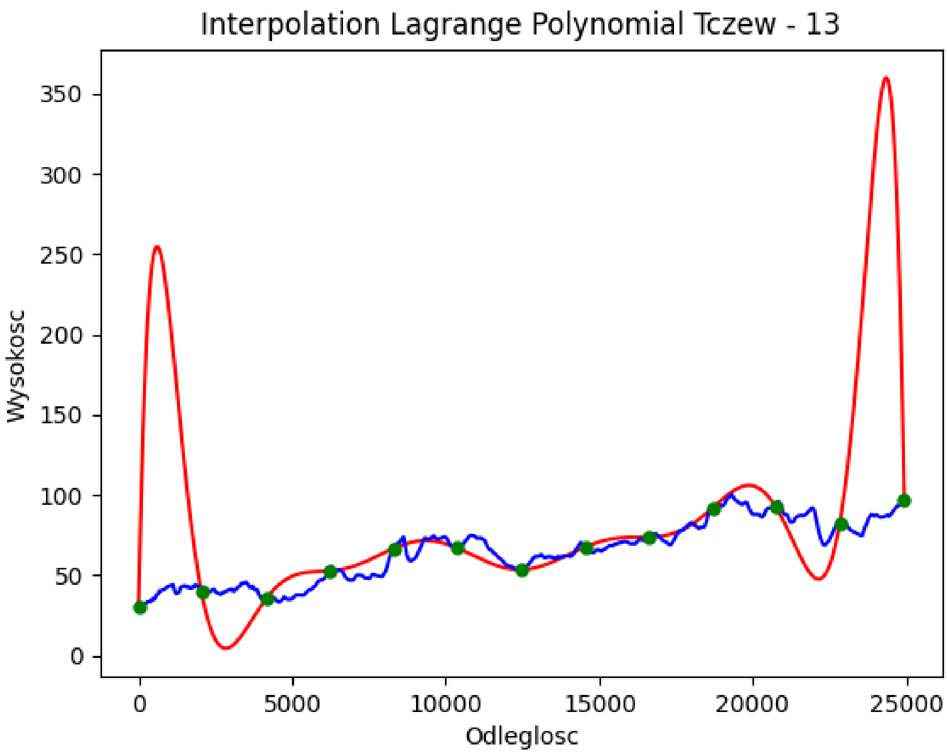
Przy zwiększeniu liczby węzłów do 7 uzyskujemy nieco lepszy wynik, ale można zauważyć efekt rungego na początku przedziału



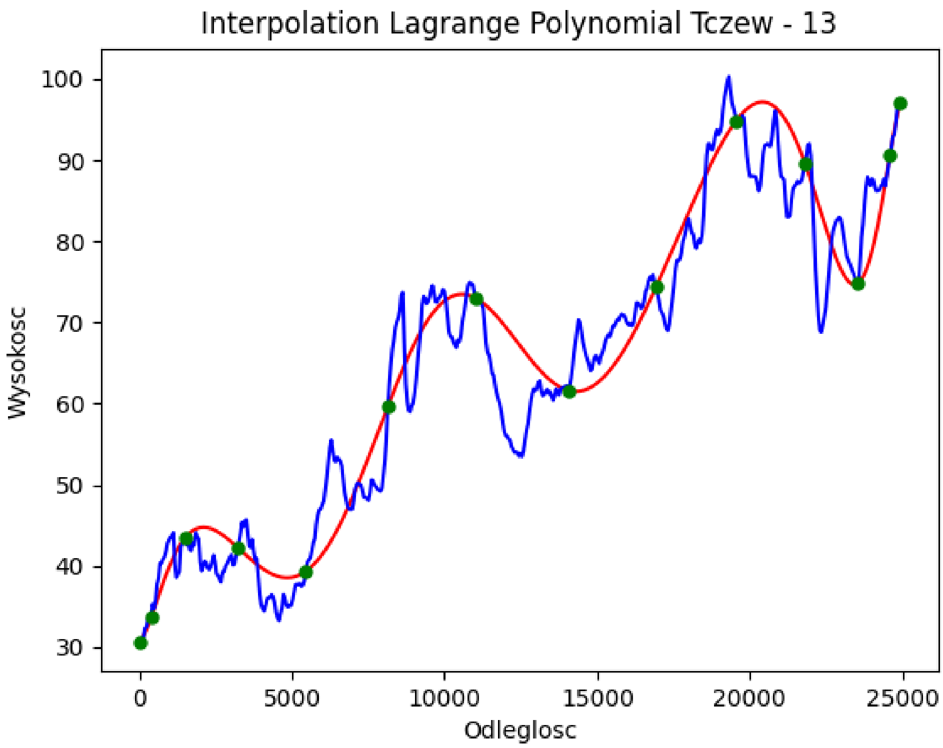
Dla 11 węzłów efekt Rungego jest już bardzo widoczny, a jego rozmiar powoduje relatywne spłaszczenie wykresu.



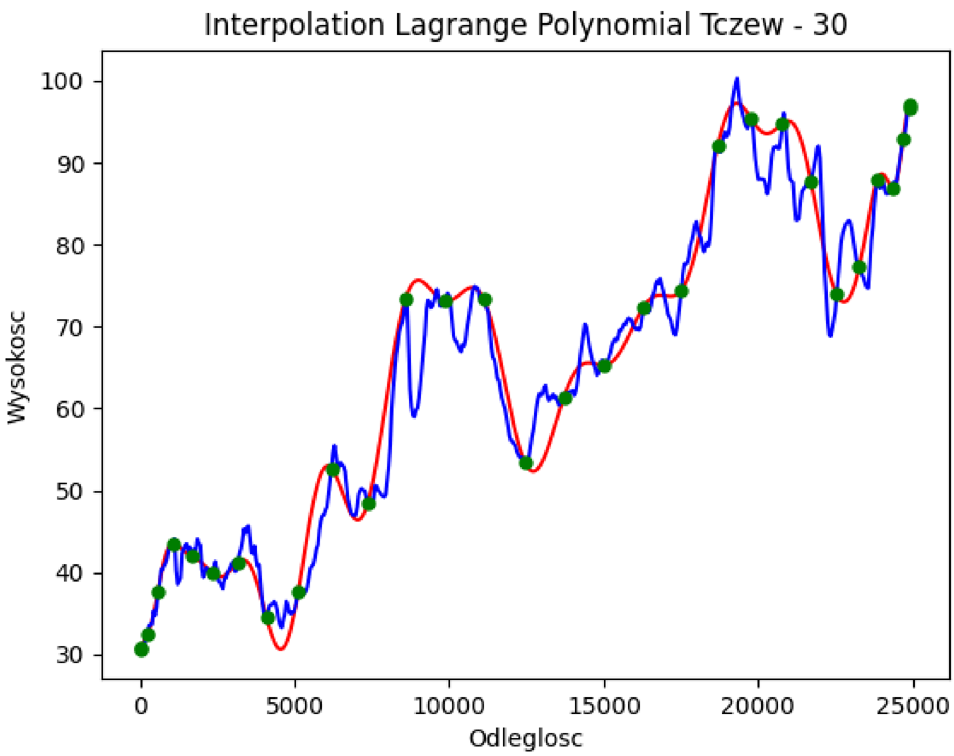
Dla 13 węzłów efekt Rungego jest jeszcze większy, a profil wysokościowy jeszcze mniej widoczny.



Ponownie używając węzłów chebysheva zwiększamy jakość interpolacji oraz niweluje efekt Rungego.

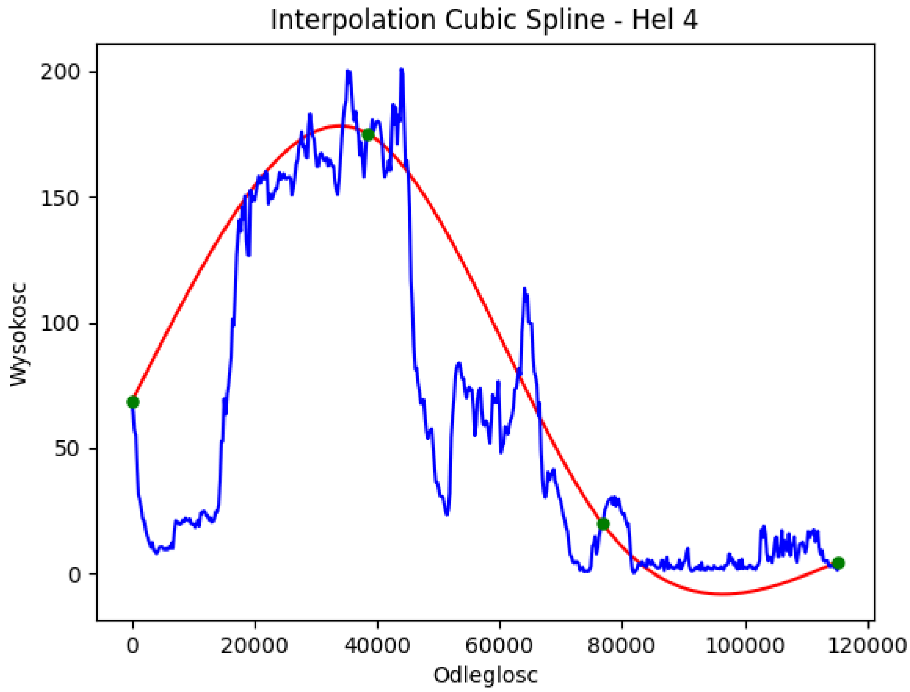


Tak samo jak dla pierwszej trasy, większa liczba węzłów chebysheva jakość interpolacji.

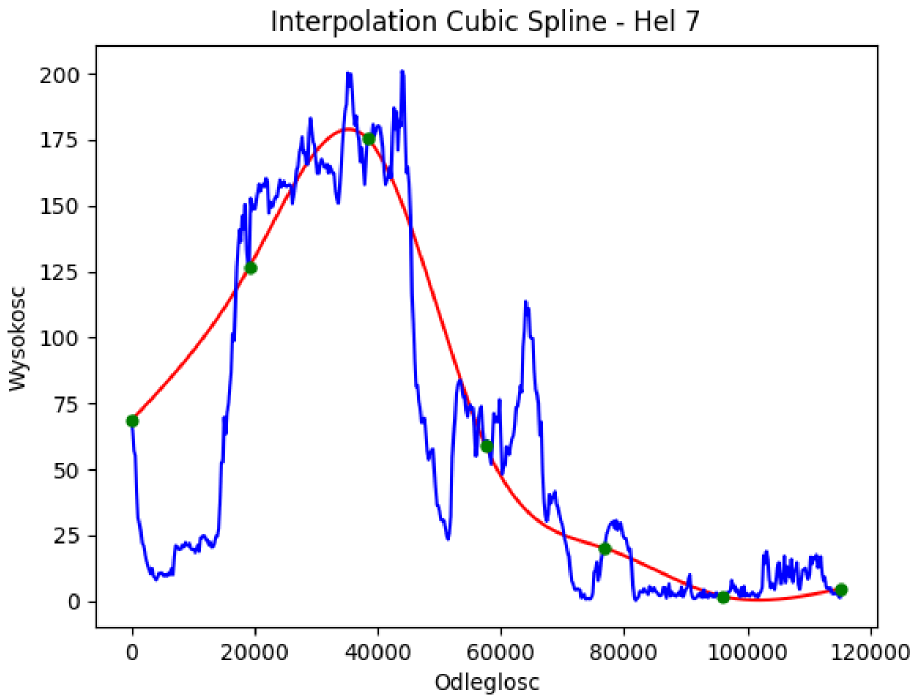


Analiza interpolacji funkcjami sklejanymi pierwszej trasy

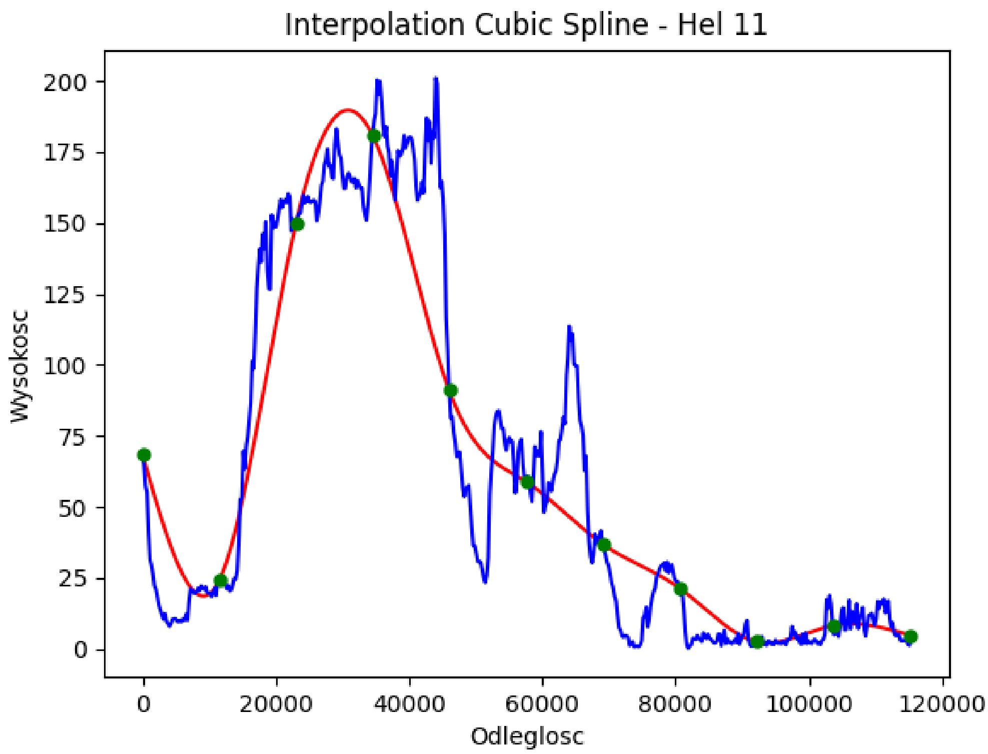
Używając interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia dla 4 węzłów, podobnie jak przy metodzie Lagrange'a, nie uzyskujemy interpolacji wysokiej jakości, jednak jest ona bliższa, aniżeli przy pierwszej metodzie interpolacji.



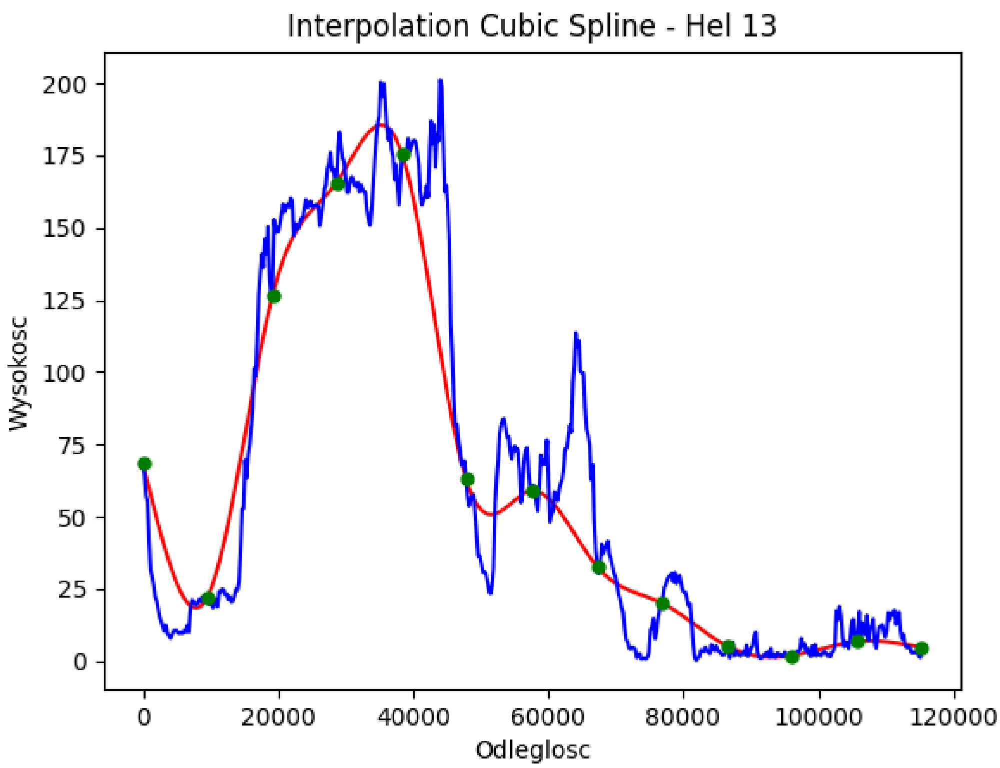
Przy zwiększeniu liczby węzłów do 7 również uzyskujemy lekką poprawę, natomiast nie zachodzi efekt Rungego.



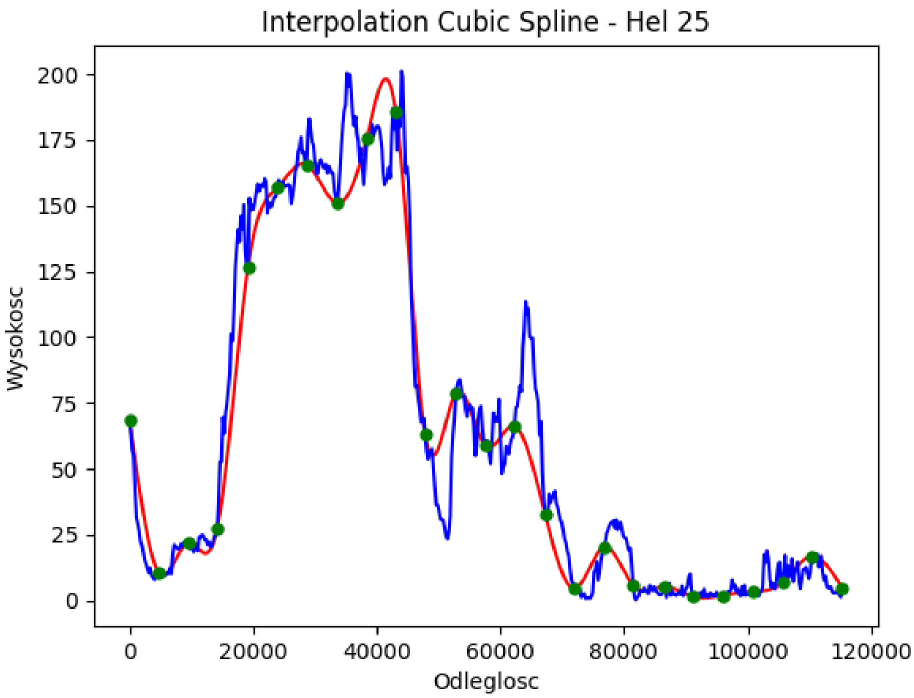
Przy 11 węzłach widzimy znaczącą poprawę na krańcach przedziału z powodu braku efektu Rungego.



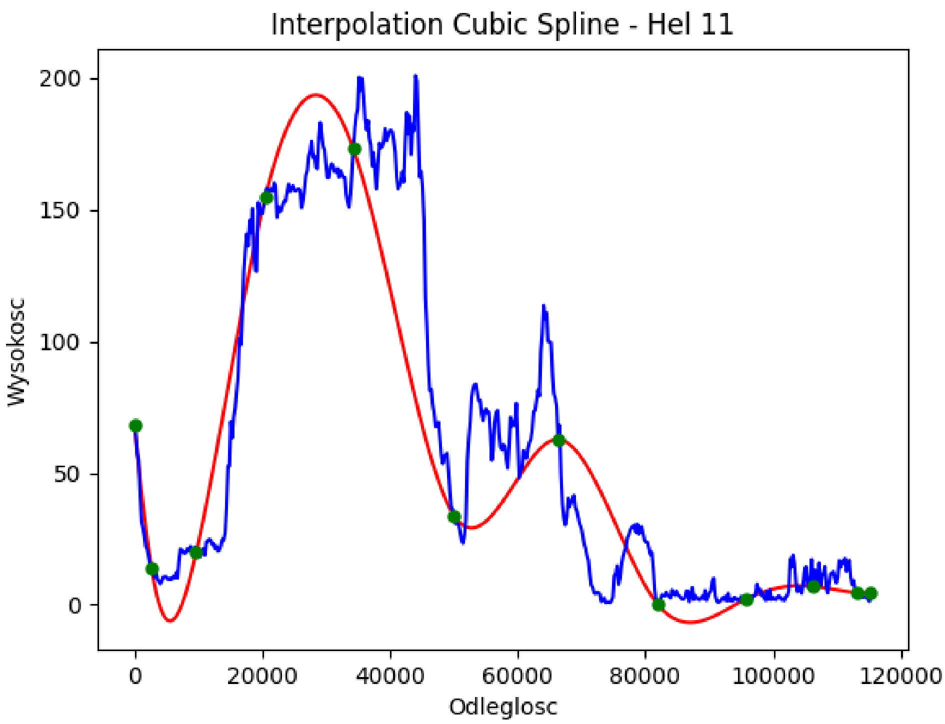
Zwiększenie liczby węzłów do 13 nie przynosi znacznych zmian.



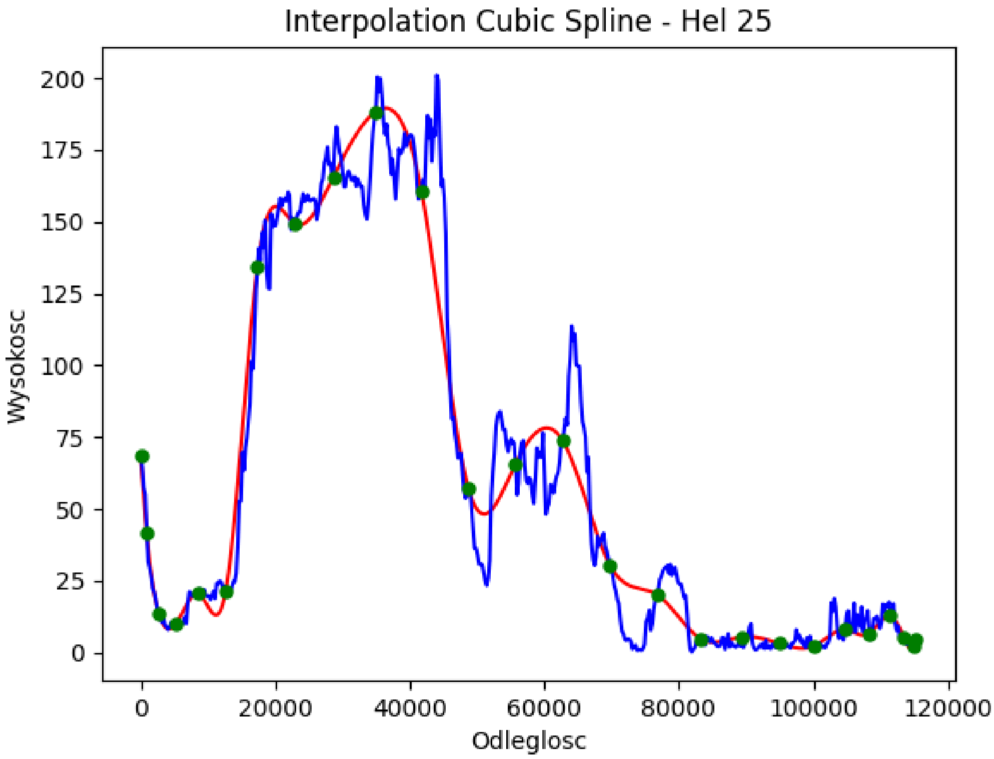
Dopiero znaczne zwiększenie liczby węzłów do poziomu 25 przynosi nam interpolację znacznie większej jakości.



Użycie węzłów chebysheva podobnie jak w przypadku pierwszej metody interpolacji podnosi jakość wykresu, jednak nie aż tak znacząco jak w przypadku pierwszej metody z uwagi na to że metoda sklejania funkcji 3 stopnia już sama w sobie niweluje efekt Rungego.

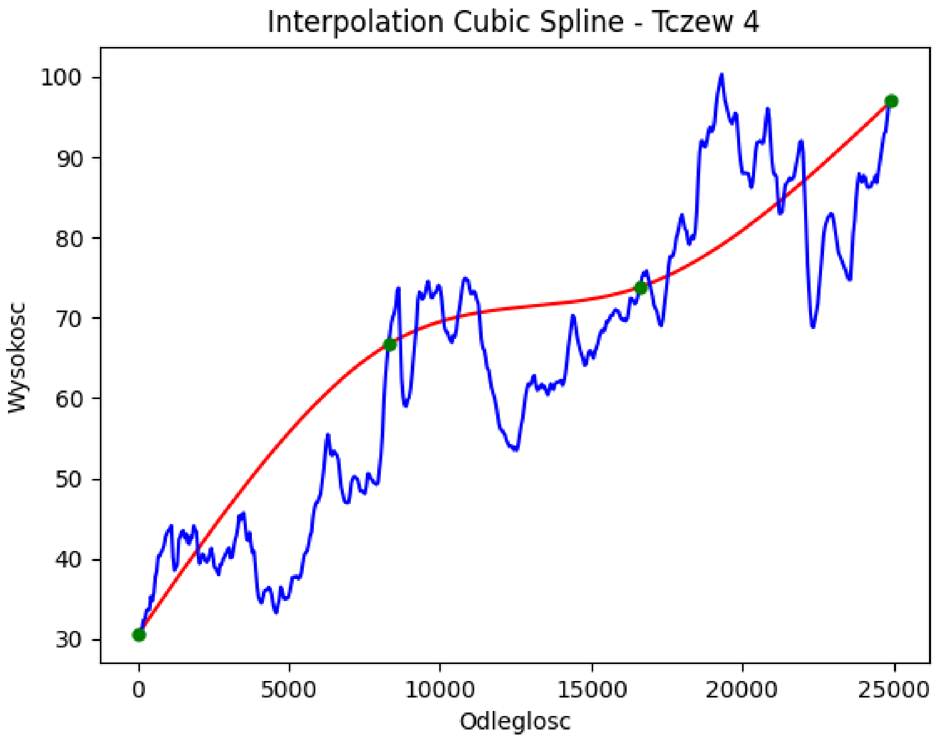


Użycie znacznie większej ilości węzłów chebysheva nie podnosi aż tak jakosci interpolacji a nawet zmniejsza jej skuteczność w środku przedziału poprzez większe skupienie węzłów na krańcach przedziału.

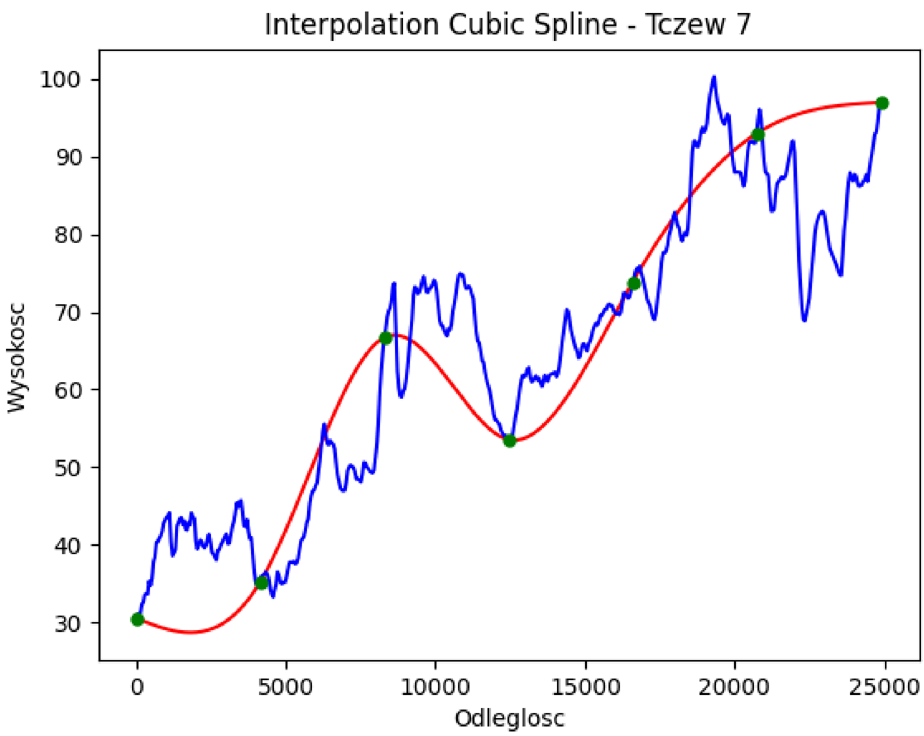


Analiza interpolacji funkcjami sklejanymi drugiej trasy

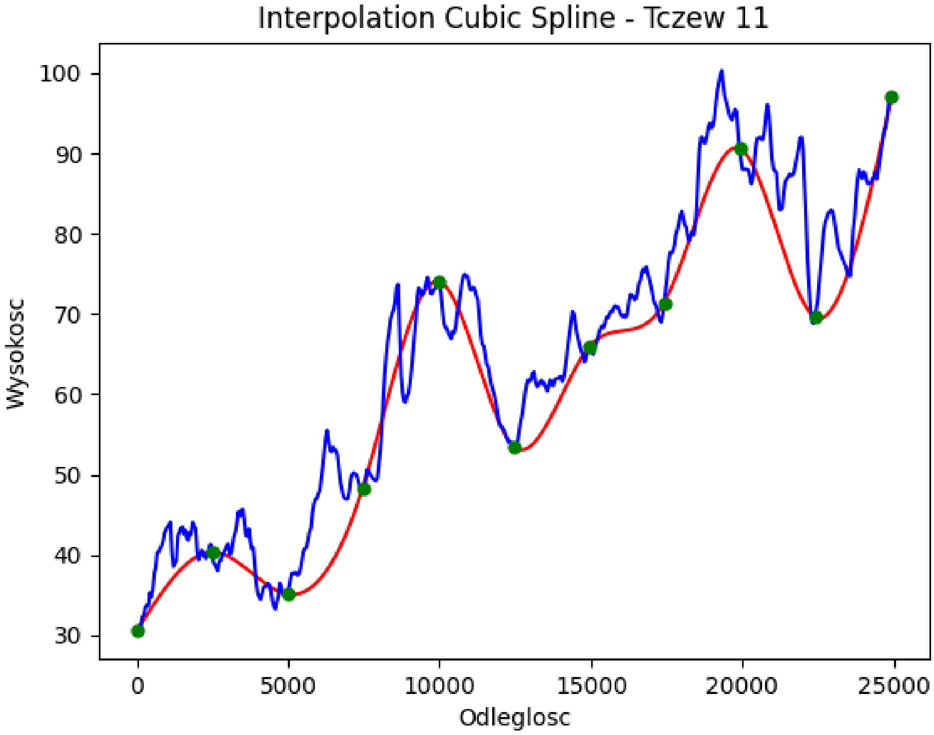
Tak samo jak w poprzednich przypadkach 4 węzły dają niska jakość interpolacji



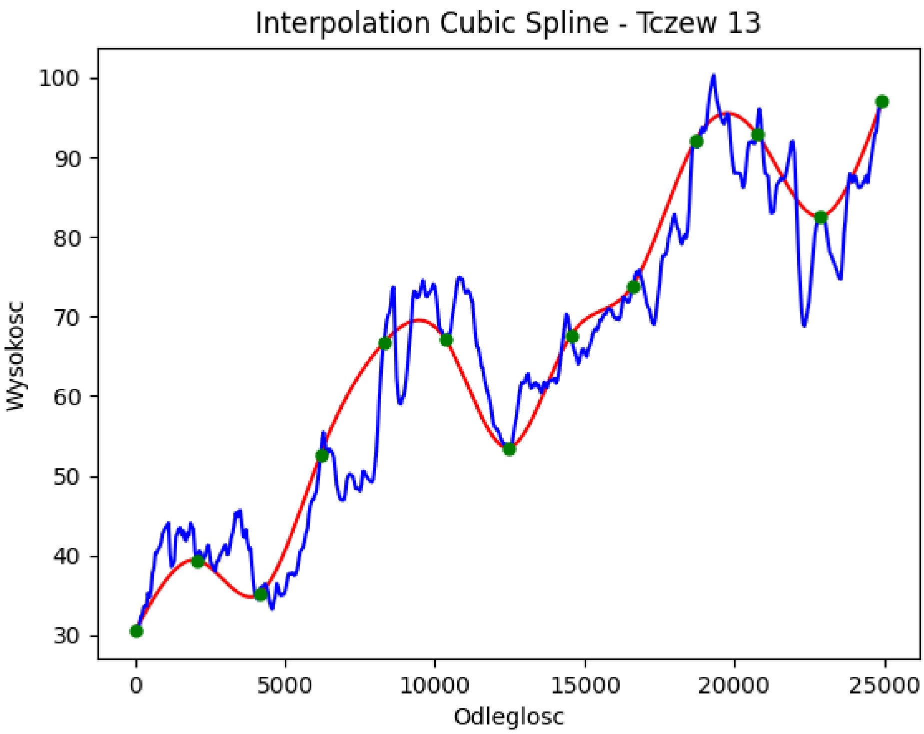
7 węzłów poprawia jakość wykresu bez powodowania efektu Rungego.



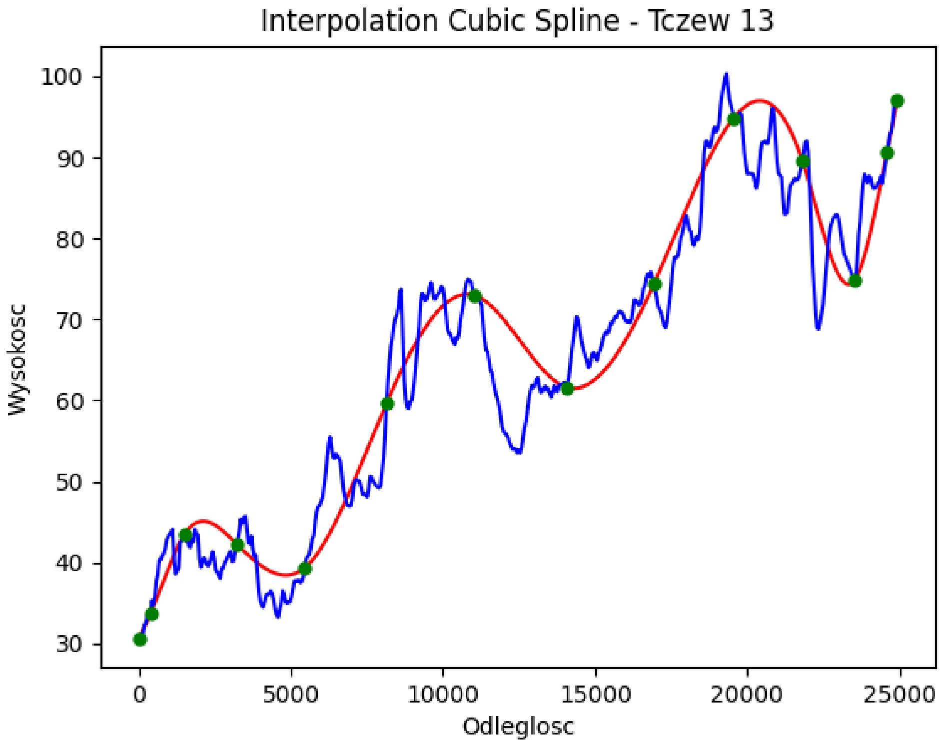
Przy 11 węzłach nasza interpolacja już powoli zbliża się do funkcji macierzystej.



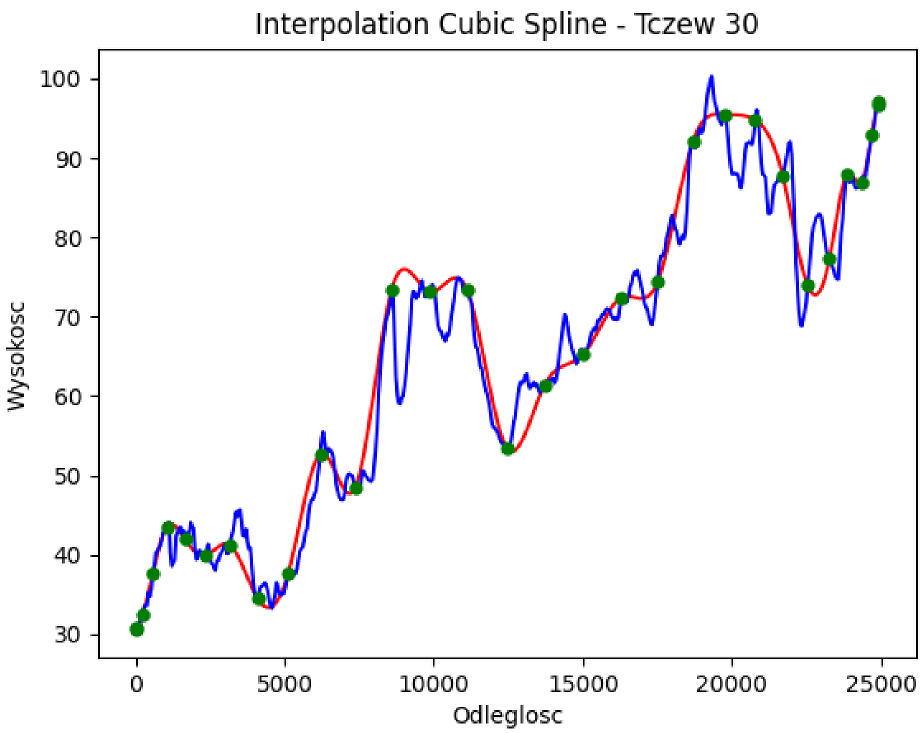
Między 11 a 13 węzłami nie ma juz az tak znaczącej poprawy.



W przeciwieństwie do interpolacji metodą Lagrange'a, użycie węzłów chebysheva nie daje znaczącej poprawy jakości interpolacji



Poprawę jakości interpolacji uzyskujemy dopiero po znacznym zwiększeniu liczby węzłów chebysheva



Podsumowanie

Metoda interpolacji Lagrange'a mimo swojej prostoty implementacji oraz wymaganych niskich zasobów komputera, nie gwarantuje interpolacji wysokiej jakości poprzez podatność na efekt Rungego. Dopiero zmiana rozkładu węzłów interpolacji poprzez np. zastosowanie węzłów chebysheva pozwala uniknąć tego efektu.

Metoda interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia, mimo dużo większych kosztów procesowych spowodowanych działaniami macierzowymi, jest lepsza, ponieważ od razu pozwala uniknąć efektu Rungego. Tym samym, zmiana rozmieszczenia węzłów interpolacji nie wpływa znacząco na jakość interpolacji, a nawet miejscami potrafi ją pogorszyć.