Динамические кратчайшие пути

Салью Артур
371 группа

Задача 1

Вам дан ориентированный взвешенный граф G с положительными весами. Обновление — увеличение веса ребра (уменьшения запрещены). Предполагается, что кратчайшие пути уникальны: (между парой вершин x и y есть только один кратчайший путь). Из этого следует, что если между вершинами x и y есть несколько однородных путей, то вершины в этих путях попарно различны (кроме самих конечных вершин x и y).

Определение 1 (Однородные пути)**.** *Путь π_{xy} в графе G однородный, если любой его подпуть является кратчайшим в графе G.*

Докажите следующие утверждения:

Задача 1 (a). Не более, чем n^3 путей в графе после увеличения веса ребра становятся однородными. В качестве доказательства придумайте такой худший случай.

Доказательство. Пусть увеличили вес ребра (u, v). Рассмотрим все такие пути $\pi_{uz} = (u, v, ..., z)$. Для каждой фиксированной вершины z может существовать не более одного однородного π_{uz}, иначе нарушается условие уникальности кратчайшего пути (По определению однородного пути π_{vz} является кратчайшим). Так как число рёбер $(u, v) \leq m$, где m — число всех ребер в графе, а в качестве вершины z могут выступать оставшиеся $n - 2$ вершины графа, то стать однородными могут $O(nm)$ путей. Так как в полном графе $m = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, то финальная оценка однородных путей от числа вершин $O(n^3)$ □

Пример такого графа представлен на рисунке 1. Синим выделены однородные пути из вершин набора $1..N_1$ в вершины набора $1..N_4$. Изначально ребра с весами 5 не входили в однородные пути, однако при изменении веса (u, v) эти рёбра были включены. Учитывая число вершин наборов $N_i = \Theta(n)$, мы получили $|N_1| \cdot |N_2| \cdot |N_4| = \Theta(n^3)$ однородных путей.

Задача 1 (b). Не более, чем n^2 путей в графе после увеличения веса ребра перестают быть однородными

Доказательство. Пусть увеличили вес ребра (i, j). Рассмотрим все такие пути $\pi_{uv} = (u, ..., i, j, ..., v)$. В силу утверждения о попарно различных вершинах в однородных путях, существует единственный однородный π_{uv}. Вершины u, v можно выбрать $A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n - 1)$ способами. А значит при увеличении веса (i, j) исчезнуть могут не более $n(n - 1) < n^2$ однородных путей. □

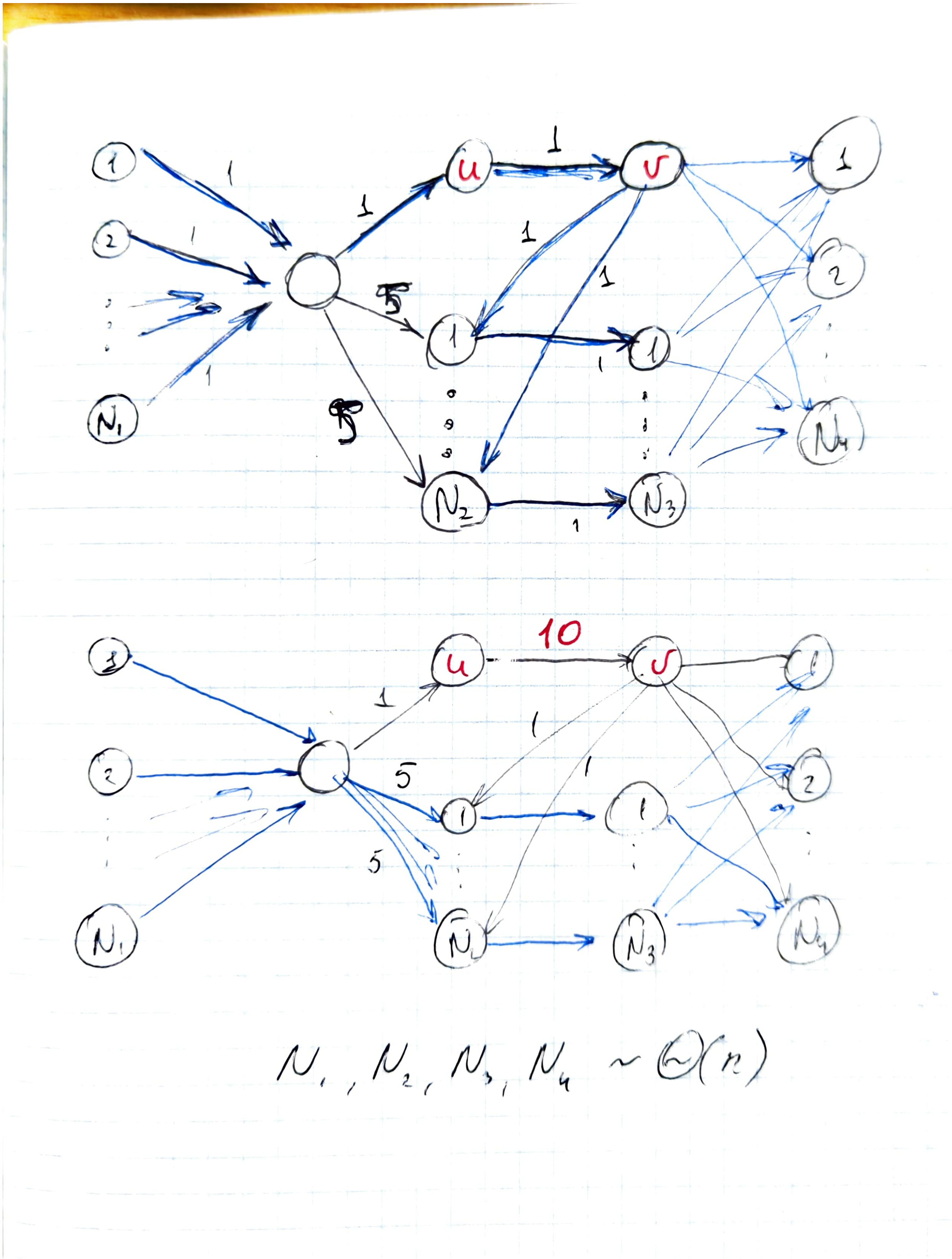

Рис. 1: Пример к задаче 1 (a)