2.2. El modelo de Solow (básico)

Tuesday, September 7, 2021 9:07 PM

EL MODELO DE SOLOW-SWAN

El modelo de crecimiento de Solow (1956) y Swan (1956), es un modelo neoclásico, que explica como el progreso tecnológico exógeno o que surge de manera arbitraria en la economía es el principal determinante del crecimiento económico de los países.

En el modelo de Solow-Swan los planes de ahorro e inversión se cumplen en forma simultánea y los mercados se vacían siempre. La oferta de bienes depende del nivel de producción. Además se supone que la función de producción cumple: a) para todo nivel positivo de capital y trabajo, los productos marginales de ambos factores serán positivos y decreciente; b) la función de producción tiene rendimientos constantes a escala y c) el producto marginal de cada factor se aproxima a infinito a medida que tiende a cero el volumen de utilización del mismo y se aproxima a cero a medida que el volumen de utilización del mismo se acerca a infinito (condición de Inada); y la producción per-cápita sólo depende de la cantidad de capital por trabajador.

En seguida, los supuestos del modelo son aplicados en una economía cerrada sin sector público.

En esta economía el Producto Bruto Interno (PBI) en el año t, Y_t, es utilizado de dos formas distintas:

$$Y_t = C_t + I_t \qquad (1)$$

donde, Y_t, es la Oferta Agregada, C_t, es el consumo privado y I_t, la inversión (estos dos últimos son los componentes de la demanda agregada).

La oferta agregada, es definida por:

$$Y_t = f(K_t, L_t, A_t) \qquad (2)$$

En la relación (2) K_t, es el capital (maquinarias, edificios, instrumentos, etc.), L_t, la cantidad de trabajadores en el momento t, y A_t, la tecnología o conocimiento, que no es tan tangible como los dos primeros. Entonces, la economía puede crecer si crece el stock de capital, la cantidad de trabajadores o si mejora la tecnología.

Por ejemplo, la función de producción Cobb-Douglas siguiente:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \quad \text{donde} \quad 0 < \alpha < 1$$

Operando, para despejar ΔK_t, obtenemos:

$$\boldsymbol{\Delta K_t = sF(K_t, L_t, A_t) - \delta K_t} \qquad (3)$$

Dados δ y s (son constantes conocidos), si conocemos los valores de K_t, L_t, y A_t en el momento t, la relación (3) nos dirá cuál es el aumento del stock de capital en el tiempo. El aumento en la cantidad de capital, a su vez, genera un aumento o crecimiento de la producción.

La relación (3) es básico porque es el fundamento de la propuesta del modelo de crecimiento.

Supongamos que la tecnología o conocimiento no varía (o es constante), por lo que, formalmente se puede definir por:

$$A_t = A$$

Expresando la relación (3) en términos per-cápita:

$$\boldsymbol{\Delta k_t = sf(k_t, A) - (\delta + n)k_t} \qquad \textbf{(4)}$$

La relación (4) es la ecuación fundamental del modelo, muestra la evolución del stock de capital por persona a través del tiempo (Δk_t).

La ecuación fundamental, expresa que el stock de capital por persona aumenta con la diferencia entre el ahorro bruto de la economía y el término $(\delta + n)k$. Si aumenta la tasa de ahorro, la inversión agregada aumenta y por ende el stock de capital también aumenta. Además, como δk es la depreciación total, cuanto mayor es la fracción de máquinas que se deprecia en un momento dado (δ), menor es el aumento en el stock de capital por persona.

En otros términos, la ecuación fundamental, nos dice que el stock de capital per-cápita disminuye por dos razones: la primera, que una fracción del capital se deteriora o se deprecia a cada momento, y la segunda, el stock de capital per-cápita decrece si no se invierte nada porque el número de personas aumenta, que es reflejado por el término nk_t.

Y, ¿cuál es la evolución del producto per-cápita?:

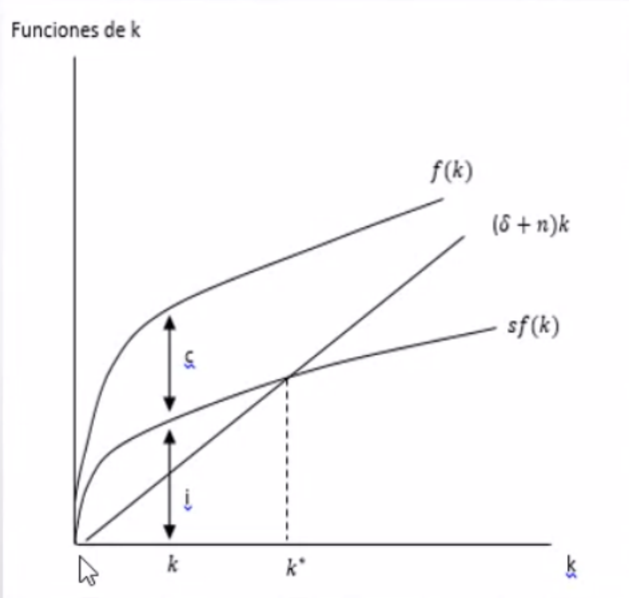
Como A_t es constante e $y_t = f(k_t, A)$ el producto per-cápita es función monotónica del capital per-cápita:

Como A_t, es constante e $y_t = f(k_t, A)$, el producto per-cápita es función monotónica del capital per-cápita: variaciones en k_t se reflejan en movimientos de y_t.

Graficando la ecuación fundamental:

Existe un valor de k_t donde las curvas de ahorro e inversión se cortan o cruzan. Estas dos curvas necesariamente se cruzan una vez y solamente una vez.

El punto k^*, donde las dos curvas se cruzan, se llama **estado estacionario**. Si la economía se encuentra en el punto k^*, entonces la curva de depreciación es igual a la curva de ahorro. La ecuación fundamental de Solow-Swan nos dice que cuando *sf(k)* es igual a *(δ +n)k*, entonces el capital per-cápita no aumenta.



LA TASA DE CRECIMEINTO DEL CAPITAL PER-CÁPITA

En esta sección, se analizará el comportamiento de la tasa de crecimiento del capital per-cápita en el tiempo, y para ello, haremos pequeños cambios para mostrar dicho comportamiento.

Para empezar, consideremos que la producción es una función creciente del capital. Además, como el consumo per-cápita es proporcional al producto per-cápita, tenemos que la tasa de crecimiento del consumo es igual a la tasa de crecimiento de la producción; por tanto, si analizamos el comportamiento de la tasa de crecimiento del capital sabremos también cómo se comporta la tasa de crecimiento de la producción y del consumo per-cápita.

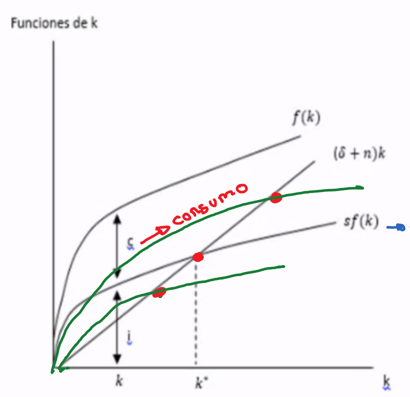
Dividiendo la ecuación fundamental (relación 4) por el stock de capital per-cápita, k_t, obtenemos la tasa de crecimiento del capital per-cápita, γ_k:

$$\gamma_k = \frac{\Delta k}{k} = s\frac{f(k,A)}{k} - (\delta + n) \qquad (5)$$

La relación (5) es otra versión de la ecuación fundamental del modelo, y nos dice que la tasa de crecimiento del capital per-cápita es igual a la diferencia entre el ahorro por unidad de capital y la tasa de depreciación (incluyendo la tasa de crecimiento de la población).

Jorge Gonzalez Izquierdo

* Faltan diapositivas



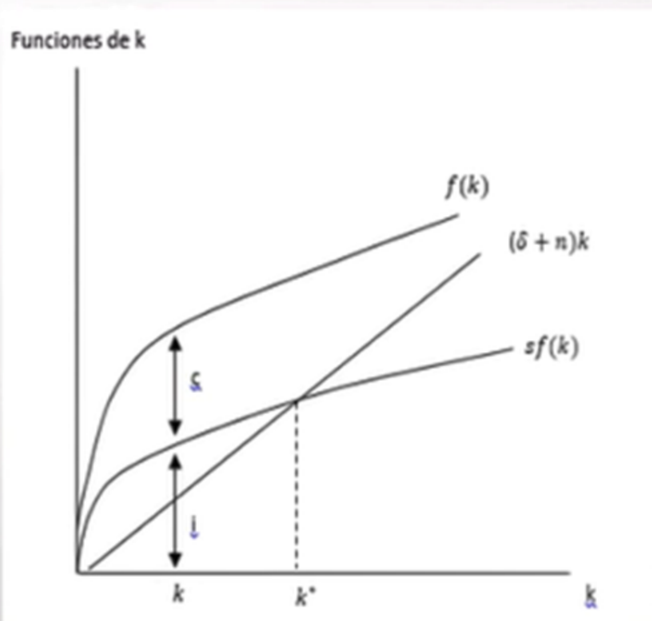
El punto de equilibrio depende de los diferentes niveles de ahorro.

S – C

* Situación de bienestar de las personas es cuando consumen más
* Fijar el tasa de ahorro donde el consumo percápita sea máximo.
▷ Los puntos de equilibrio estan en estado estacionario.

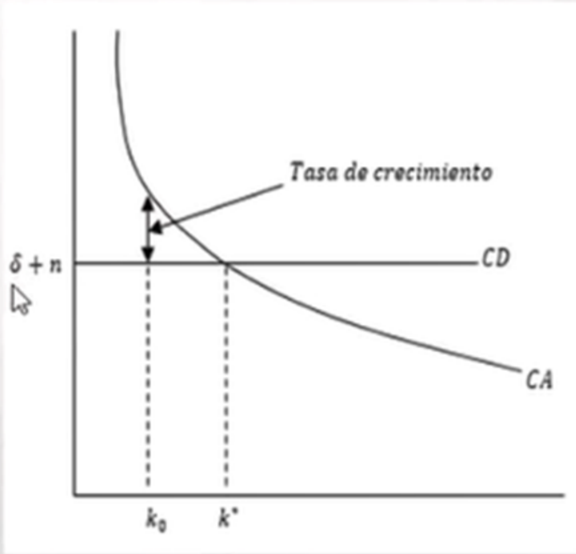
Existe un valor de k_t donde las curvas de ahorro e inversión se cortan o cruzan. Estas dos curvas necesariamente se cruzan una vez y solamente una vez.

El punto k^*, donde las dos curvas se cruzan, se llama **estado estacionario**. Si la economía se encuentra en el punto k^*, entonces la curva de depreciación es igual a la curva de ahorro. La ecuación fundamental de Solow-Swan nos dice que cuando *sf(k)* es igual a *(δ +n)k*, entonces el capital per-cápita no aumenta.



Para graficar el lado derecho de la relación (5), representaremos por CA el primer término (la tasa de ahorro multiplicada por el producto medio del capital, $\frac{f(k,A)}{k}$) y por CD el Segundo término (la tasa de depreciación, incluyendo la tasa de crecimiento de la población).

la curva de ahorro es estrictamente decreciente (función de producción neoclásica y, por tanto, presenta rendimientos decrecientes del capital) y toma valores entre ∞ y 0;mientras la curva de depreciación, $(\delta + n)$, es independiente de k y está representada por una línea recta horizontal. Dado que la curva de depreciación es estrictamente positiva, las dos curvas se cruzarán solamente una vez en el cuadrante positivo del gráfico. El valor de k para el cual ambas curvas se cruzan, k^*, es el stock de capital per-cápita de estado estacionario.



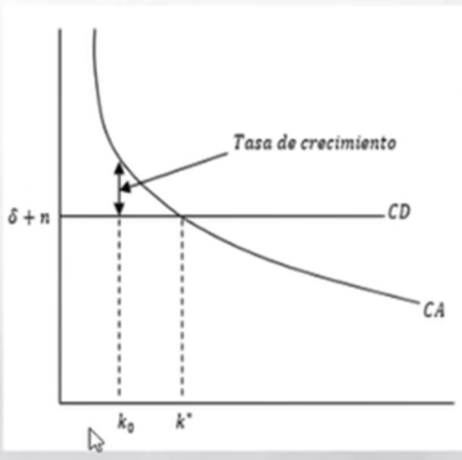
Observando el gráfico, la tasa de crecimiento de k viene dada por la diferencia vertical entre las curvas CA y CD. La tasa de crecimiento es positiva para valores de k inferiores a k^*, $k < k^*$, y negativa para valores superiores a k^*, $k > k^*$. Además, la tasa de crecimiento es tanto mayor cuanto más por debajo está la economía del estado estacionario, pero va disminuyendo monotónicamente con el paso del tiempo (rendimientos del capital decrecientes), al ir aproximándose la economía a su posición de estado estacionario. Cuando se alcanza este punto, el crecimiento se detiene. El comportamiento de la economía es simétrico cuando el capital inicial está por encima de k^*.

CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONVERGENCIA CONDICIONAL

Hemos notado que la tasa de crecimiento de una economía neoclásica es decreciente. Esto significa que, si las economías se diferenciasen únicamente en el stock de capital por trabajador, en el mundo real deberíamos observar un crecimiento superior en las economías pobres que en las ricas. Este fenómeno se puede observar también en la relación (5), donde la tasa de crecimiento del capital per-cápita $\boldsymbol{\gamma_k}$ está inversamente relacionada con el nivel de k_t.

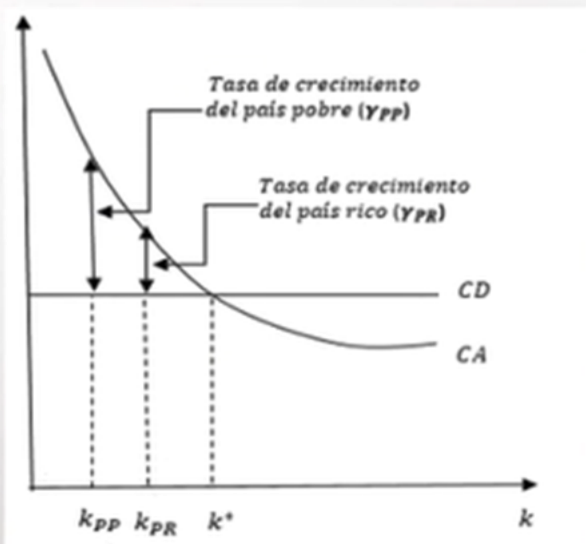
Para graficar el lado derecho de la relación (5), representaremos por CA el primer término (la tasa de ahorro multiplicada por el producto medio del capital, $\frac{f(k,A)}{k}$) y por CD el Segundo término (la tasa de depreciación, incluyendo la tasa de crecimiento de la población).

la curva de ahorro es estrictamente decreciente (función de producción neoclásica y, por tanto, presenta rendimientos decrecientes del capital) y toma valores entre ∞ y 0;mientras la curva de depreciación, $(\delta + n)$, es independiente de k y está representada por una línea recta horizontal. Dado que la curva de depreciación es estrictamente positiva, las dos curvas se cruzarán solamente una vez en el cuadrante positivo del gráfico. El valor de k para el cual ambas curvas se cruzan, k^*, es el stock de capital per-cápita de estado estacionario.



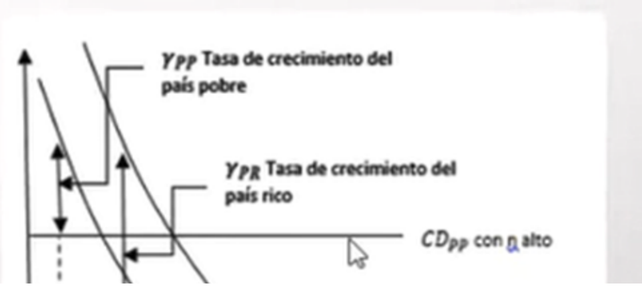
Dado que el capital per-cápita de un país pobre $\boldsymbol{k_{PP}}$, es menor que la de un país rico, $\boldsymbol{k_{PR}}$, el país pobre crecerá a una mayor tasa y más rápido que el país rico, hasta que ambos convergerán al mismo nivel de equilibrio de largo plazo, si comparten los mismos parámetros: s, n, δ y la forma de la función de producción F (.). A este tipo de convergencia se le denomina «convergencia absoluta».

Graficando:

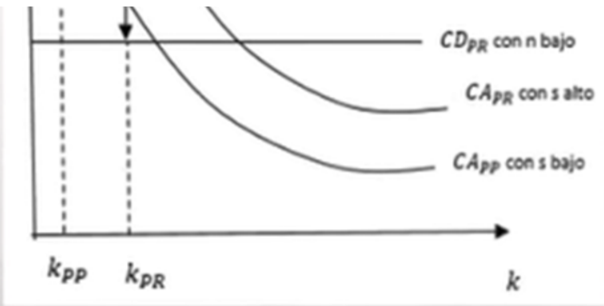


Si por el contrario, las economías también se diferencian en su nivel de tecnología, A, en su tasa de ahorro, s, en su tasa de depreciación, δ, o en su tasa de crecimiento de la población, n, el modelo no predice un mayor crecimiento para los países más pobres.

En el gráfico, se presenta la situación de dos economías: país pobre, representado por P y país rico, por R. Los países poseen



un stock de capital k_{PP} y k_{PR}, respectivamente, siendo $k_{PP} <$ k_{PR}. Supongamos, además que la tasa de ahorro en el país pobre es diferente a la del país rico (con $s_{PP} < s_{PR}$) y la tasa de crecimiento de la población del país rico es diferente a la del país pobre (con $n_{PP} > n_{PR}$); entonces la tasa de crecimiento per-cápita de los países depende de cuan lejos están con respecto al punto de equilibrio (o estado estacionario). Lo que se observa es que el país pobre crece a una tasa de crecimiento menor que el país rico, y los países convergen a un estado estacionario distinto. Esto es lo que se llama convergencia condicional o relativa.



LA "REGLA DE ORO" DE LA ACUMULACIÓN DEL CAPITAL

Para cada tasa de ahorro, s, existe un stock de capital estacionario k^*. Supongamos que un país pude cambiar su tasa de ahorro al nivel que más desee, entonces, ¿qué nivel escogerá?

El objetivo de una sociedad debe ser el aumento del nivel de bienestar de sus individuos, que depende de la cantidad de producto que las familias consumen. Es decir, la sociedad escogerá una tasa de ahorro que comporte un mayor nivel de consumo per-cápita.

El estado estacionario que conlleva el mayor nivel de consumo per-cápita se llama <u>la regla de oro de la acumulación de capital</u> y lo denotaremos como k_{oro}.

Capital Percápita

Para determinar el stock de capital per-cápita de la Regla de oro, primero, debemos observar que estamos hablando de estado estacionario, por lo que $\Delta k_t = 0$. Si tenemos en cuenta que el ahorro es igual a la producción menos el consumo, podemos reescribir la relación (4):

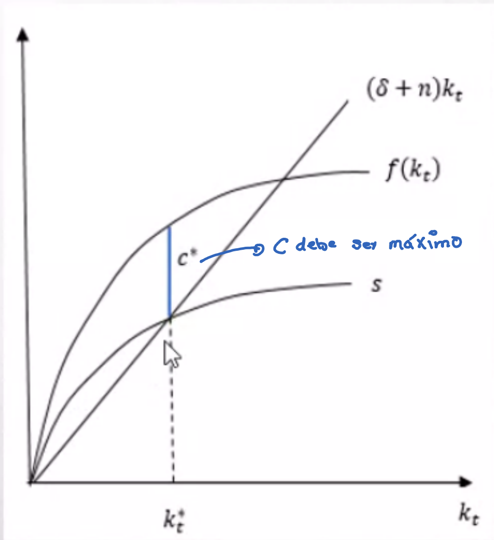
$$0 = f(k^*) - c^* - (\delta + n)k^*$$

Expresando el consumo estacionario, c^*, como función del capital de estado estacionario k^*.

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^* \qquad (6)$$

La relación (6) muestra que, en el estado estacionario, el consumo per-cápita es igual a la diferencia entre la producción y la depreciación.

Graficando:



Geométricamente, el consumo por trabajador en el estado estacionario, c^*, es la distancia entre la función de producción y el ahorro s o la recta de depreciación, $(\delta + n)k_t$.

Un aumento de capital per-cápita del estado estacionario tiene dos efectos: por un lado, aumenta la producción $f(k^*)$ y por otro lado, aumenta la cantidad de máquinas que es necesario reemplazar,$(\delta + n)k^*$.

Hay cierta cantidad de capital por trabajador en el estado estacionario para la cual es máximo el consumo per-cápita, que se denota por k^*_{oro},y se llama regla de oro del capital per-cápita.

Formalmente se obtiene derivando la función c^* (relación 6) con respecto a k_t^*:

$$\frac{dc^*}{dk^*} = f'(k^*) - (\delta + n) = 0$$

Operando:

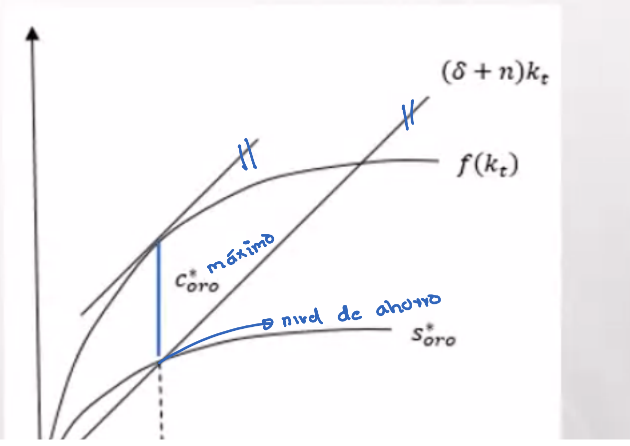
$$f'(k^*_{oro}) = \delta + n. \qquad (7)$$

es decir, para el nivel de capital per-cápita de la regla de oro, k_{oro}, la pendiente de la función de producción es igual a la pendiente de la función de depreciación, en consecuencia, el consumo per-cápita correspondiente es el máximo.

Graficando:

https://meet.google.com/rvw-yviy-ehy?authuser=1

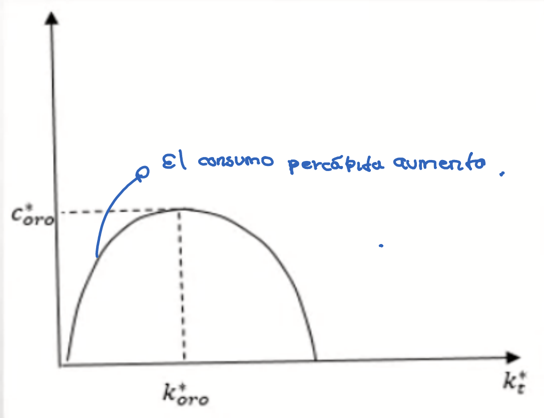
En el punto donde la distancia entre las dos curvas es máxima, la tangente en el punto sobre la función de producción es paralela a la recta de depreciación. Además, s^*_{oro} es la tasa de ahorro de la regla de oro, y tendremos en este estado estacionario a la población actual consumiendo y ahorrando la cantidad adecuada para que, en cada periodo sucesivo, la población pueda continuar consumiendo esta cantidad máxima por persona.



¿Cómo la economía tendería a ir hacia la Regla de oro?

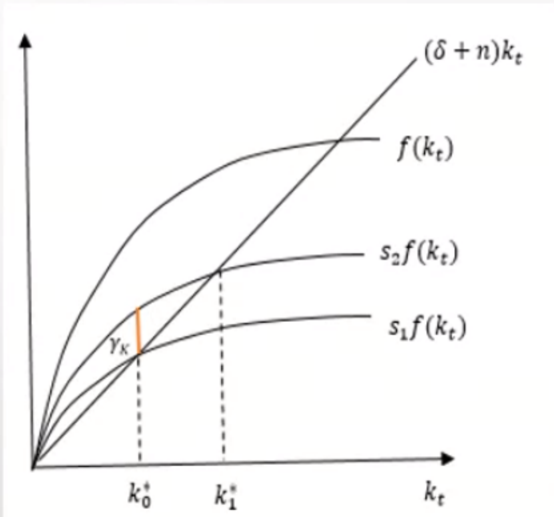
Para alcanzar este punto, habrá que escoger la tasa de ahorro, , s, que haga que el estado estacionario sea precisamente para k^*_{oro}. Si la tasa de ahorro es superior a s^*_{oro}, entonces el stock de capital será superior a k^*_{oro}; mientras que si la tasa de ahorro es inferior a s^*_{oro}, entonces el stock de capital será inferior a k^*_{oro}.

Si el stock de capital por trabajador del estado estacionario es menor que el k^*_{oro}, entonces un aumento de la tasa de ahorro, , s, incrementará el stock de capital por trabajador y el consumo por trabajador; sin embargo, si el stock de capital per-cápita del estado estacionario es mayor que k^*_{oro}, un aumento en la tasa de ahorro incrementará el stock de capital per-cápita y provoca una disminución en el consumo por trabajador. Si la economía se encuentra a la derecha de la regla de oro, seguro que la economía es ineficiente

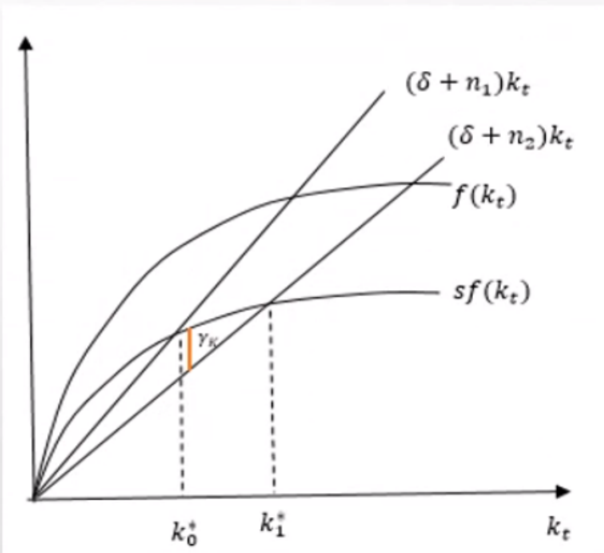


CRECIMIENTO DE LA ECONOMÍA A CORTO PLAZO

1) Aumenta la tasa de ahorro, s:

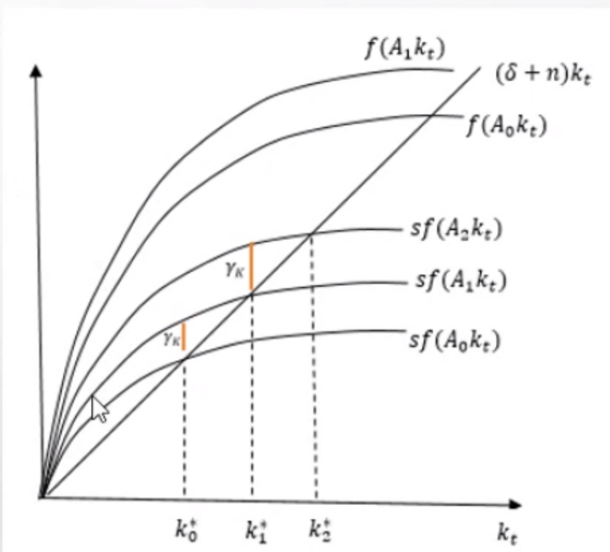


2) Baja la tasa de natalidad, n: $n_2 < n_1$

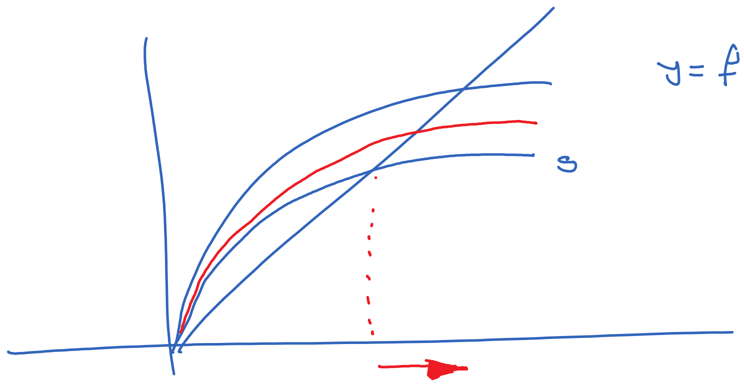


CRECIMIENTO DE LA ECONOMÍA A LARGO PLAZO

Cambio tecnológico, A_t: $A_1 > A_0$



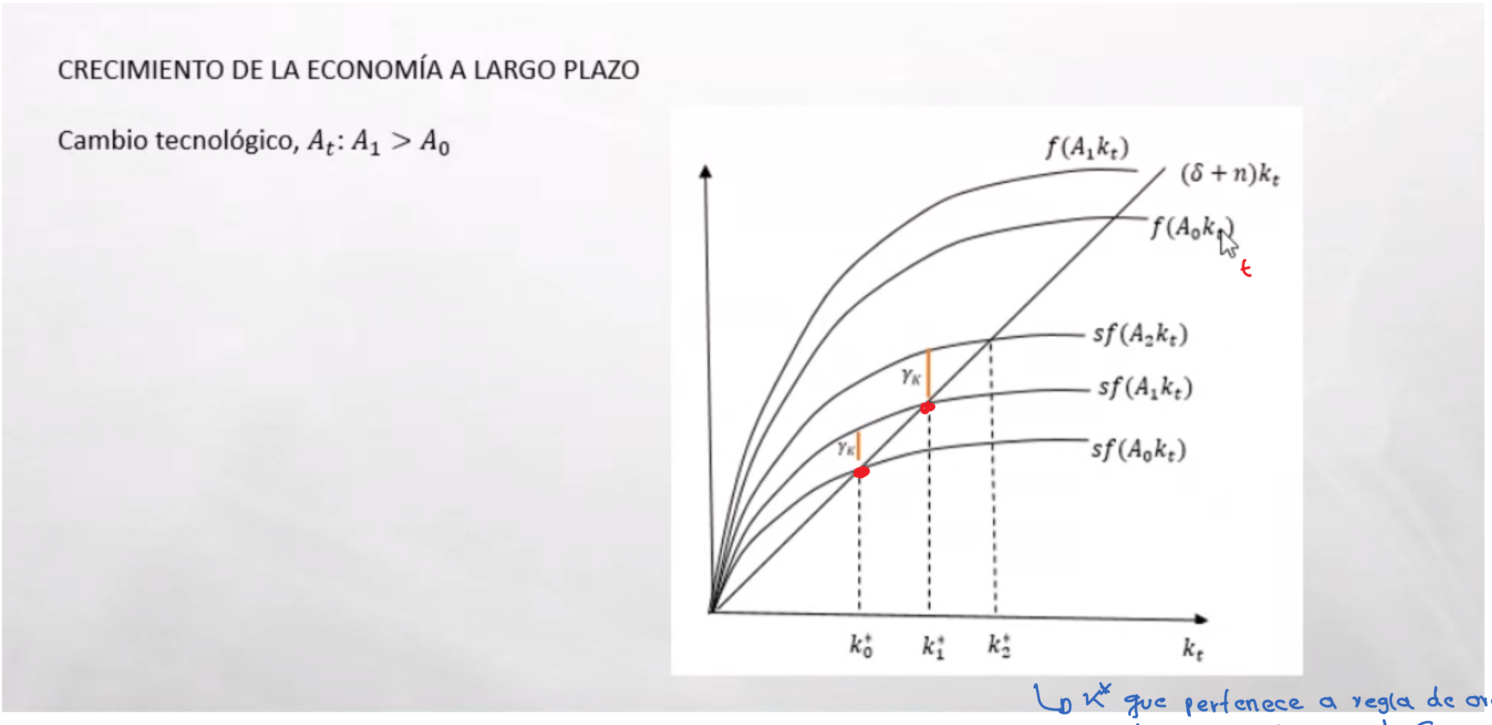
↑ Mano de obra (factor trabajo)



esto se puede variar

$y = f(A, M)$

A_t : Productividad Total de factores (residuo de Solow). PTF



↳ k^* que pertenece a regla de oro es la que maximiza el Consumo percapita

El modelo de Harrod-Domar no tiene un fundamento Micro.