CRECIMIENTO ECONÓMICO

SESIÓN: Cambio tecnológico: modelos con una variedad ampliada de productos

Profesor: Miguel Casares

ÍNDICE

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS

En los modelos Solow-Swan y modelo de Ramsey el progreso tecnológico exógeno era la única fuente de crecimiento económico a largo plazo.

En las dos próximas sesiones (9 y 10) vamos a describir modelos que permiten obtener mejoras tecnológicas a largo plazo a partir de aumentos de la cantidad (sesión 9) o de la calidad (sesión 10) de las variedades de productos existentes en la economía.

Comenzamos por un modelo básico que permite cambios en el número de variedades utilizadas como bienes intermedios por parte de las empresas productoras de bienes finales.

CAF BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

En el modelo existen 3 tipos de agentes:

- Productores de bienes de consumo finales que contratan trabajo y bienes intermedios para producir, en competencia perfecta, bienes que consumen los hogares.
- Empresas de I+D que deciden la invención de nuevos productos intermedios que venden en exclusividad a las empresas productoras de bienes finales, fijando un precio óptimo y obteniendo un beneficio empresarial positivo.
- Hogares que deciden el consumo y la cantidad de activos financieros que acumulan en el tiempo para maximizar su bienestar de acuerdo a los supuestos establecidos en el modelo de Ramsey.

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

Productores de la producción final.

La función de producción de la empresa representativa i es

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N} X_{ij}^{\alpha}$$

donde $A > 0, 0 \leq \alpha \leq 1$ y X_{ij} es la cantidad del bien intermedio j utilizado por la empresa i . No hay capital físico ni humano, la productividad marginal es decreciente en el empleo de trabajadores y en el uso de bienes intermedios. Existen rendimientos constantes a escala para los factores L_i y X_{ij}. Los bienes intermedios no son ni sustitutivos ni complementarios porque su productividad marginal es independiente. Los descubrimientos de nuevos tipos de productos no provocan la sustitución por obsolescencia de los productos existentes (en la sesión 10 modificaremos este supuesto con mejoras de calidad).

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

El progreso tecnológico se incorpora como consecuencia de un aumento en el número de factores productivos intermedios. Como veremos más adelante, en equilibrio las cantidades de bienes intermedios empleadas de cada variedad son iguales

$$X_{ij} = X_i \quad para\ todo\ j = 1, 2, \dots, N$$

con lo que la función de producción queda

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} N X_i^{\alpha}$$

y la productividad marginal del trabajo o de los bienes intermedios aumenta con el número de variedades N (progreso tecnológico endógeno).

La función de beneficio del productor representativo de bienes finales es

$$AL_i^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N} X_{ij}^{\alpha} - wL_i - \sum_{j=1}^{N} P_j X_{ij}$$

que conlleva las siguientes condiciones de optimalidad para la demanda de trabajo y la demanda del bien intermedio j.

CAF BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

$$(1-\alpha)AL_i^{-\alpha}\sum_{j=1}^{N} X_{ij}^{\alpha} - w = 0$$

$$AL_i^{1-\alpha}\alpha X_{ij}^{\alpha-1} - P_j = 0$$

De la segunda condición obtenemos la función de demanda óptima del bien intermedio j dependiendo inversamente del precio al que se adquiere

$$X_{ij} = L_i\left(\frac{A\alpha}{P_j}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

Empresas de investigación para el desarrollo de innovaciones (I+D)

Son las empresas que crean las variedades de bienes intermedios con las que generar el avance tecnológico a través de un mayor número de variedades N.

La innovación (nueva variedad) puede ser utilizada de manera no rival por todos los productores y no se ve afectada por la creación posterior de nuevas variedades.

Precios, beneficios y producción (etapa 2)

El inventor del bien j puede vender su innovación al precio que desee (poder de monopolio) y el beneficio por la venta le permite asumir el coste de I+D. No obstante, la libertad de entrada hace que el valor de las empresas inventoras se vaya reduciendo hasta igualarse con el coste de I+D. En equilibrio, comprobaremos que todas las variedades se venden al mismo precio, se demandan las mismas cantidades por parte de las empresas productoras de bienes de consumo y las empresas de investigación obtienen el mismo beneficio.

El coste de producción unitario de la nueva variedad de bien intermedio es una unidad de producción final Y, con lo que el beneficio del innovador del bien j en el periodo v es:

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

$$\pi_j(\nu) = \left[P_j(\nu) - 1\right]X_j(\nu)$$

donde $P_j(\nu)$ es el precio de venta, el coste unitario de producción es 1 y la cantidad demandada de la nueva variedad de bienes intermedios por el conjunto de las empresas productoras de bienes finales es

$$X_j(\nu) = \sum_i X_{ij}(\nu) = \sum_i L_i \left(\frac{A\alpha}{P_j(\nu)}\right)^{1/(1-\alpha)} = L\left(\frac{A\alpha}{P_j(\nu)}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

en la que hemos incorporado la población activa $L = \sum_i L_i$. Sustituyendo la expresión de $X_j(\nu)$ en la función de beneficio nos queda la función a maximizar

$$\left[P_j(\nu) - 1\right]L(A\alpha)^{1/(1-\alpha)}\left(P_j(\nu)\right)^{-1/(1-\alpha)}$$

dependiendo exclusivamente del precio de venta $P_j(\nu)$ y no de la cantidad. La condición de primer orden es:

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

$$\frac{\partial \pi_j(\nu)}{\partial P_j(\nu)} = L(A\alpha)^{1/(1-\alpha)}\left[\left(P_j(\nu)\right)^{-1/(1-\alpha)} + \left(\frac{-1}{1-\alpha}\right)\left(P_j(\nu)\right)^{\frac{-2+\alpha}{1-\alpha}}\left[P_j(\nu)-1\right]\right] = 0$$

que, igualando a cero el término en corchete grande y tras unas cuantas simplificaciones, nos lleva al precio óptimo

$$P_j(\nu) = \frac{1}{\alpha}$$

Teniendo en cuenta que $0 \leq \alpha \leq 1$, el precio de venta es mayor que la unidad y se genera un margen positivo para el productor de innovaciones $\frac{1}{\alpha} - 1 > 1$. El precio óptimo es el mismo para cualquier variedad de bien intermedio. Además la cantidad demandada de cada variedad es la misma

$$X_j(\nu) = \left(\frac{A\alpha}{1/\alpha}\right)^{1/(1-\alpha)} L = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}L$$

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

con lo que el beneficio obtenido por la innovación en cualquier variedad también es el mismo

$$\pi_j(v) = (P_j(v) - 1)X_j(v) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) A^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2/(1-\alpha)} L$$

La producción agregada de bienes intermedios y de bienes finales quedan así

$$X = \sum_j X_j\,(v) = A^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2/(1-\alpha)} LN$$

$$Y = \sum_i Y_i = \sum_i A L_i^{1-\alpha} N X_i^{\alpha} = A\left(\sum_i L_i\right)^{1-\alpha} N\left(\frac{X}{N}\right)^{\alpha} = A L^{1-\alpha} N^{1-\alpha} X^{\alpha}$$

Sustituyendo el resultado de X en Y, se alcanza la siguiente solución analítica para la producción agregada:

$$Y = A L^{1-\alpha} N^{1-\alpha} \left(A^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2/(1-\alpha)} LN\right)^{\alpha}$$
$$Y = A^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} LN$$

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

Decisión de entrar en el sector de I+D (etapa 1)

Hemos calculado el precio óptimo y la cantidad de bienes intermedios producidos por las empresas innovadoras. Tenemos pendiente determinar el número de empresas de investigación que operan en la economía. El criterio para decidir entrar en el sector de I+D es la comparación entre el valor actual del beneficio de una invención con su coste. Si en el periodo t el valor de la innovación a desarrollar supera a su coste entrarán más empresas de investigación. La libertad de entrada conlleva que en equilibrio el valor de la innovación será igual a su coste.

De momento, suponemos que el coste de I+D requerido para crear un nuevo producto es constante

$$\eta > 0$$

es decir, no crece ni decrece con el número de empresas innovadoras. El valor del beneficio obtenido a lo largo de la vida del producto actualizado al periodo t es

$$V(t) = \int_t^{\infty} \pi_j(\nu) e^{-\bar{r}(\nu - t)} d\nu$$

donde $\bar{r}$ es el tipo de interés promedio entre los momentos t y ν.

CAF BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

La libre entrada de innovadores implica la condición de equilibrio

$$V(t) = \eta$$

Teniendo en cuenta que el beneficio es constante e idéntico para todas las innovaciones, $\pi_j(\nu) = \pi$, y que el tipo de interés promedio es $\bar{r}(\nu - t) = \frac{1}{\nu - t}\int_t^{\nu} r\,(\omega)\,d\omega$), podemos hacer la derivada con respecto al tiempo el valor actual del negocio innovador (que aparece en la diapositiva anterior) y obtenemos

$$\dot{V}(t) = V(t)r(t) - \pi$$

lo cual implica una tasa de rentabilidad de equilibrio para los activos financieros

$$r(t) = \frac{\pi}{V(t)} + \frac{\dot{V}(t)}{V(t)}$$

equivalente a la rentabilidad de la inversión en innovación obtenida sumando la tasa de beneficio más la tasa de ganancia (o pérdida) de capital por el cambio en el valor de la empresa de I+D.

La condición de equilibrio con coste de I+D constante en η provoca tanto que $V(t) = \eta$ como que $\dot{V}(t) = 0$, así que la tasa de rentabilidad en este modelo queda

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

$$r(t) = \frac{\pi}{\eta}$$

por lo que la rentabilidad de los activos es constante. Si sustituimos el beneficio π por periodo de actividad investigadora se obtiene

$$r = \frac{L}{\eta} A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \alpha^{2/(1-\alpha)}$$

El valor de mercado de cada empresa innovadora queda en equilibrio igual al coste de I+D necesario para obtener la nueva variedad, $V = \eta$, y el valor de mercado de todas estas empresas es $N \cdot \eta$.

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

Los hogares

Siguiendo los supuestos establecidos para el comportamiento optimizador de los hogares en el modelo de Ramsey (con tasa de crecimiento de la población nula), las familias toman sus decisiones sobre consumo resolviendo el siguiente problema de control óptimo

$$Max \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

sujeto a

$$\dot{a} = wL + r \cdot a - C$$

Siguiendo los 5 pasos habituales se alcanza la siguiente ecuación dinámica para la variación del consumo

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

que no incluye la habitual tasa de depreciación del capital físico porque no existe dicho capital.

Equilibrio general

Finalmente, vamos a hallar la restricción de recursos agregada y la tasa de crecimiento en el equilibrio general.

Al tratarse de una economía cerrada y sin sector público, el total de activos de los hogares es el valor de mercado del conjunto de las empresas innovadoras

$$a = N \cdot \eta$$

La variación de estos activos es $\dot{a} = \eta \dot{N}$, el salario de equilibrio coincide con la productividad marginal del trabajo, $w = (1-\alpha)Y/L$, y el tipo de interés de equilibrio es $r = \frac{1}{\eta}\alpha(1-\alpha)Y/N$. Sustituyendo estos cuatro elementos en la restricción presupuestaria de los hogares, llegamos a la restricción de recursos agregada

$$\eta \dot{N} = (1-\alpha)Y + \frac{1}{\eta}\alpha(1-\alpha)Y/N \cdot N \cdot \eta - C$$
$$\eta \dot{N} = (1-\alpha)Y + \alpha(1-\alpha)Y - C$$
$$\eta \dot{N} = Y - \alpha^2 Y - C$$

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

Recordando que la cantidad agregada de bienes intermedios es una proporción α^2 de la producción final de bienes de consumo, $X = \alpha^2 Y$,tenemos

$$Y = C + X + \eta\dot{N}$$

Los usos de la producción agregada son tres: el consumo, la producción de bienes intermedios y la creación de nuevos productos.

La tasa de crecimiento del consumo en equilibrio puede obtenerse insertando la solución del tipo de interés, r , en su ecuación dinámica

$$\gamma_C \equiv \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{L}{\eta} A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right)$$

que es constante para tanto un nivel de población activa fijo, L, como para un coste fijo de crear un nuevo producto, η.

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

La producción agregada, Y, para un L fijo, depende linealmente del número de empresas produciendo variedades de bienes intermedios, N,

$$Y = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}LN$$

La cantidad agregada de bienes intermedios X también es proporcional a la producción agregada

$$X = \alpha^2 Y$$

Con lo que sus tasas de crecimiento coinciden: $\gamma_Y = \gamma_N = \gamma_X$. El consumo tiene una relación lineal con las tres variables, $C = Y - X - \eta\gamma_N N$, por lo que todas ellas han de crecer a la misma tasa en EE (y también a corto plazo en este caso). Así que tenemos una tasa de crecimiento común y constante para las 4 variables:

$$\gamma = \gamma_C = \gamma_Y = \gamma_N = \gamma_X = \frac{1}{\theta}\left(\frac{L}{\eta}A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right)$$

que explica el **crecimiento económico endógeno a corto plazo y largo plazo** como resultado de los factores que se recogen en la siguiente diapositiva:

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

$$\gamma = \frac{1}{\theta}\left(\frac{L}{\eta}A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right)$$

- Disposición al ahorro de los hogares: una reducción en la tasa de preferencia intertemporal, ρ, o en la elasticidad de la utilidad marginal del consumo, θ, aumentan la tasa de crecimiento γ.
- Tecnología de la producción: un aumento en el parámetro tecnológico A incrementa la tasa de crecimiento γ.
- Efecto escala: un aumento del tamaño de la población, L, incrementa la tasa de crecimiento γ.
- Coste de inventar un nuevo producto: una caída del coste del I+D requerido para diseñar nuevos bienes intermedios, η, aumenta la tasa de crecimiento γ.

¿Es la tasa de crecimiento γ óptima? ¿Coincide con la que conseguiría un planificador social benevolente?

CAF BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

Solución del planificador social

El planificador es benevolente y toma como suyas las preferencias de los hogares teniendo en cuenta la siguiente restricción global de los recursos

$$AL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^{\alpha} = C + X + \eta\dot{N}$$

Por lo tanto, el planificador social ha de resolver el siguiente problema de optimización:

$$Max\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\,\frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt$$

sujeto a

$$\dot{N} = \frac{1}{\eta}\left(AL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^{\alpha} - C - X\right)$$

Las variables de control son el consumo, C, y los bienes intermedios, X, mientras que la variable de estado es el número de variedades, N. Las condiciones de primer orden implican:

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

$$\rho + \theta \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\eta} A L^{1-\alpha} X^{\alpha} (1-\alpha) N^{1-\alpha}$$
$$A L^{1-\alpha} N^{1-\alpha} \alpha X^{\alpha-1} = 1$$

que permiten insertar el valor de X obtenido en la segunda, $X = (A\alpha)^{1/(1-\alpha)} LN$, dentro de la primera y hallar

$$\rho + \theta \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\eta} A L^{1-\alpha} (1-\alpha) N^{1-\alpha} \left((A\alpha)^{1/(1-\alpha)} LN \right)^{\alpha}$$
$$\rho + \theta \frac{\dot{C}}{C} = \frac{L}{\eta} A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \alpha^{1/(1-\alpha)}$$

que da lugar a una tasa de crecimiento del consumo

$$\gamma_C \equiv \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \left[\frac{L}{\eta} A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \alpha^{1/(1-\alpha)} - \rho \right]$$

superior a la obtenida en la economía descentralizada donde $r = \frac{L}{\eta} A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \alpha^{2/(1-\alpha)}$ porque $\alpha < 1$. Por tanto, la solución competitiva no es óptimo de Pareto. Se puede demostrar también que las cantidades de producción de bienes finales y de bienes intermedios son mayores con la planificación central:

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

Tabla resumen de resultados en el modelo básico con variedad de productos

	Economía descentralizada		Planificación central
Producción final, Y	$A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}LN$	<	$A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}LN$
Producción intermedia, X	$A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}LN$	<	$A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{1/(1-\alpha)}LN$
Tasa de rentabilidad, r	$\frac{L}{\eta}A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)}$	<	$\frac{L}{\eta}A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{1/(1-\alpha)}$
Tasa de crecimiento, γ	$\frac{1}{\theta}\left(\frac{L}{\eta}A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)}-\rho\right)$	<	$\frac{1}{\theta}\left[\frac{L}{\eta}A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{1/(1-\alpha)}-\rho\right]$

Los precios de monopolio de los bienes intermedios generan una distorsión que produce un diferencial entre los rendimientos sociales y los rendimientos privados. Podemos observar como el margen (*mark-up*) del precio sobre el coste de producción $\frac{1}{\alpha} > 1$ explica las diferencias entre la producción de bienes intermedios de ambas economías, que posteriormente se traslada a la producción de bienes finales y las tasas de rendimiento de los activos y de crecimiento de la actividad económica.

Para acabar, citamos tres ejemplos de políticas industriales que corregirían esta ineficiencia:

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – UN MODELO BÁSICO CON VARIEDAD DE PRODUCTOS

Políticas industriales para que la solución de la economía descentralizada sea eficiente:

- Subsidio a la compra de bienes intermedios. Diseñar un subsidio al tipo $1-\alpha$ que se conceda a las empresas de producción de bienes de consumo finales cuando adquieren bienes intermedios. Aumentaría su demanda de manera equivalente a la que provocaría la desaparición del precio de monopolio. El subsidio se financia con un impuesto no distorsionador sobre las actividades productivas (por ejemplo de cuantía fija o que grave el consumo).
- Subsidio a la venta de productos finales. Diseñar un subsidio al tipo $(1-\alpha)/\alpha$ que se conceda por unidad producida a las empresas de producción de bienes de consumo finales. El subsidio alimentaría la demanda de bienes intermedios requeridos para aumentar la producción de manera equivalente a la que provocaría la desaparición del precio de monopolio. El subsidio se financia con un impuesto no distorsionador sobre las actividades productivas (por ejemplo de cuantía fija o que grave el consumo).
- Subsidio a la investigación. Reducir el coste de la investigación requerida para crear nuevos productos, η, de tal manera que la rentabilidad de la creación de nuevas variedades alcance el nivel obtenido por el planificador social. La ayuda concedida a las empresas innovadoras se debe financiar con un impuesto no distorsionador sobre las actividades productivas (por ejemplo de cuantía fija o que grave el consumo).

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EFECTOS DE ESCALA Y EL COSTE DE I+D

El modelo con creación de bienes descrito anteriormente asume un coste del I+D requerido para crear un nuevo producto constante ($\eta > 0$) y alcanza un equilibrio con efectos de escala, ya que la tasa de crecimiento de la producción agregada aumenta con el tamaño de la población activa L.
Ambas cuestiones son problemáticas.
Comenzando por los costes de I+D. Existe evidencia empírica que contradice el supuesto sobre los gastos en innovación constante porque se ha observado un fuerte incremento del gasto en I+D, muy por encima del de la productividad (Charles Jones, 1995, *Journal of Political Economy*).
En el modelo, el coste de I+D es

$$C(I + D) = \eta \dot{N}$$

lo cual implica

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{1}{\eta} \frac{C(I + D)}{N}$$

y dado que la productividad por trabajador, Y/L, es proporcional al número de variedades, N,

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EFECTOS DE ESCALA Y EL COSTE DE I+D

el modelo predice una relación directa entre la tasa de crecimiento de la productividad y el coste de I+D que no se observa en la realidad (en la que crece más deprisa la segunda).

La evidencia muestra un ratio entre gasto en I+D y PIB sin tendencia a largo plazo (por ejemplo, en EEUU era 2,6% en 1970 y apenas cambió al 2,5% en 1996).

Así que sería deseable (más realista) que el modelo implicara una relación directa y fija entre el crecimiento del número de variedades y el ratio entre gasto en I+D y producción agregada.

La producción por cada variedad de bien intermedio es

$$\frac{Y}{N} = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L$$

con lo que vamos a asignar el coste unitario de I+D como una fracción η de Y/N para tener un ratio de coste total de I+D sobre producción agregada

$$\frac{C(I+D)}{Y} = \frac{\eta A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L \cdot \dot{N}}{A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}LN} = \eta\frac{\dot{N}}{N}$$

cuyo resultado está respaldado por la evidencia empírica de Charles Jones.

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EFECTOS DE ESCALA Y EL COSTE DE I+D

Reemplazando η en la solución general de la economía descentralizada por el nuevo coste unitario de I+D, $\eta A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L$, se alcanza estas nuevas rentabilidad de la innovación y tasa de crecimiento

$$r = \frac{1}{\eta\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{(2-2\alpha)/(1-\alpha)} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\eta}$$

$$\gamma = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{\eta} - \rho\right]$$

que además de implicar un ratio entre gasto en I+D y producción agregada constante eliminan el efecto de escala porque desaparece la población activa de la solución de las tasas de crecimiento del modelo.

Los dos problemas de incoherencia con los datos extraídos de la realidad se resuelven. No obstante, la tasa de crecimiento ya no mejora con el parámetro global de productividad A.

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EFECTOS DE ESCALA Y EL COSTE DE I+D

Como alternativa, ahora supongamos que el coste unitario de I+D es creciente con el número de variedades. Consideramos una forma de función sencilla con elasticidad constante

$$\eta(N) = \phi N^{\sigma}$$

con coeficientes positivos $\phi > 0$ y $\sigma > 0$. Este caso es plausible si pensamos que el principal efecto de un aumento en el número de variedades es el agotamiento del número total de posibles buenas ideas que haga más difícil su búsqueda y puesta en práctica.

Ni el precio óptimo de la innovación ni la cantidad de bienes intermedios demandados se van a ver afectadas por estas nuevas condiciones de entrada. Sí será afectada la condición de equilibrio para determinar cuantas empresas deciden innovar donde ahora tendremos

$$V(t) = \phi N^{\sigma}$$

lo cual implica tanto que $V(t)$ ya no es una constante como que su derivada en el tiempo, $\dot{V(t)}$, ya no es nula. Recordando que el valor actual de los beneficios de la innovación es $V(t) = \int_t^{\infty} \pi e^{-\bar{r}(v-t)} dv$ al derivar en el tiempo $V(t) = \phi N^{\sigma}$ obtenemos el siguiente tipo de interés de equilibrio:

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EFECTOS DE ESCALA Y EL COSTE DE I+D

$$r(t) = \frac{\pi}{\phi N^{\sigma}} + \sigma\left(\frac{\dot{N}}{N}\right)$$

donde el segundo término representa la tasa de crecimiento del valor de la empresa que posee los derechos de monopolio sobre la venta de un bien intermedio ya existente.

Si sustituimos la expresión de $r(t)$ en la ecuación de la tasa de crecimiento del consumo tenemos

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\pi}{\phi N^{\sigma}} + \sigma\left(\frac{\dot{N}}{N}\right) - \rho\right]$$

Es decir, con costes de I+D crecientes la tasa de crecimiento del consumo es variable y depende de N. Para resolver el modelo necesitamos una ecuación dinámica para N. Si sustituimos la función del coste de I+D requerido en la restricción agregada de recursos obtenemos esta expresión

$$Y = C + X + \phi N^{\sigma}\dot{N}$$

donde insertando $X = \alpha^2 Y$ y dividiendo entre N nos queda

$$(1-\alpha^2)\frac{Y}{N} = \frac{C}{N} + \phi N^{\sigma}\frac{\dot{N}}{N}$$

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EFECTOS DE ESCALA Y EL COSTE DE I+D

Recordando la solución del producto final agregado, $Y = A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}LN$, y despejando la tasa de crecimiento del número de empresas innovadoras tenemos

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{1}{\phi N^{\sigma}}\left[(1-\alpha^2)A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L - \frac{C}{N}\right]$$

Definiendo el parámetro auxiliar $\psi_1 = (1-\alpha^2)A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L$, simplificamos el resultado a

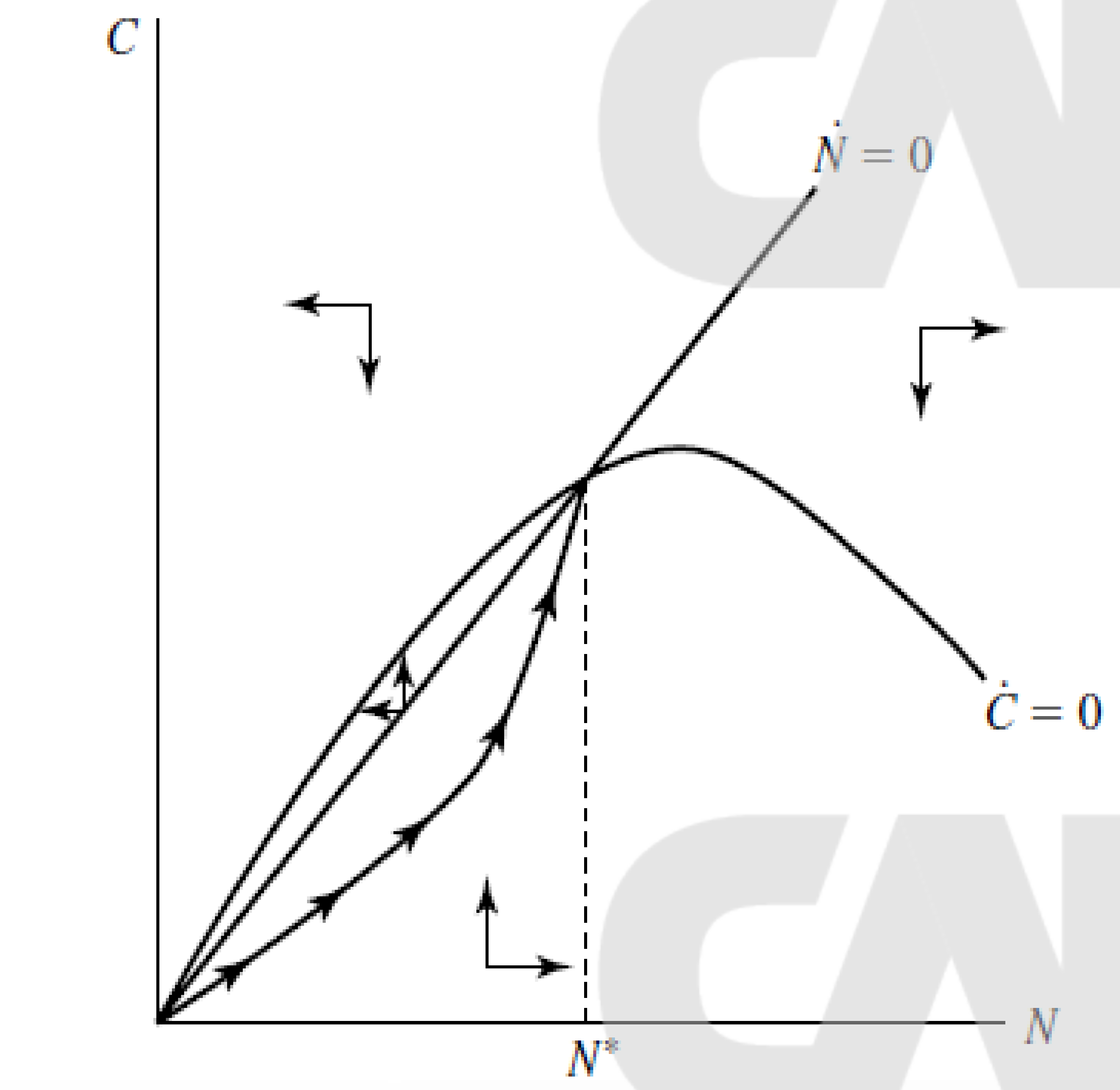
$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{\psi_1}{\phi}N^{-\sigma} - \frac{C}{\phi}N^{-(1+\sigma)}$$

La tasa de crecimiento del consumo dependía de la tasa de crecimiento del número de bienes intermedios. Sustituyendo el resultado de $\frac{\dot{N}}{N}$ en el de $\frac{\dot{C}}{C}$ alcanzamos la siguiente expresión

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\pi}{\phi}N^{-\sigma} + \sigma\left(\frac{\psi_1}{\phi}N^{-\sigma} - \frac{C}{\phi}N^{-(1+\sigma)}\right) - \rho\right]$$

Las ecuaciones de transición de C y N vamos a representarlas en el diagrama de fase para analizar la evolución de ambas variables hacia el EE.

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EFECTOS DE ESCALA Y EL COSTE DE I+D



$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{\psi_1}{\phi} N^{-\sigma} - \frac{C}{\phi} N^{-(1+\sigma)}$$

$\dot{N} = 0 \rightarrow C = \psi_1 N$ (línea recta con pendiente positiva)

Por debajo de $\dot{N} = 0$: $\downarrow C \rightarrow \dot{N} > 0$ flecha derecha

Por encima de $\dot{N} = 0$: $\uparrow C \rightarrow \dot{N} < 0$ flecha izquierda

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\pi}{\phi} N^{-\sigma} + \sigma\left(\frac{\psi_1}{\phi} N^{-\sigma} - \frac{C}{\phi} N^{-(1+\sigma)}\right) - \rho\right]$$

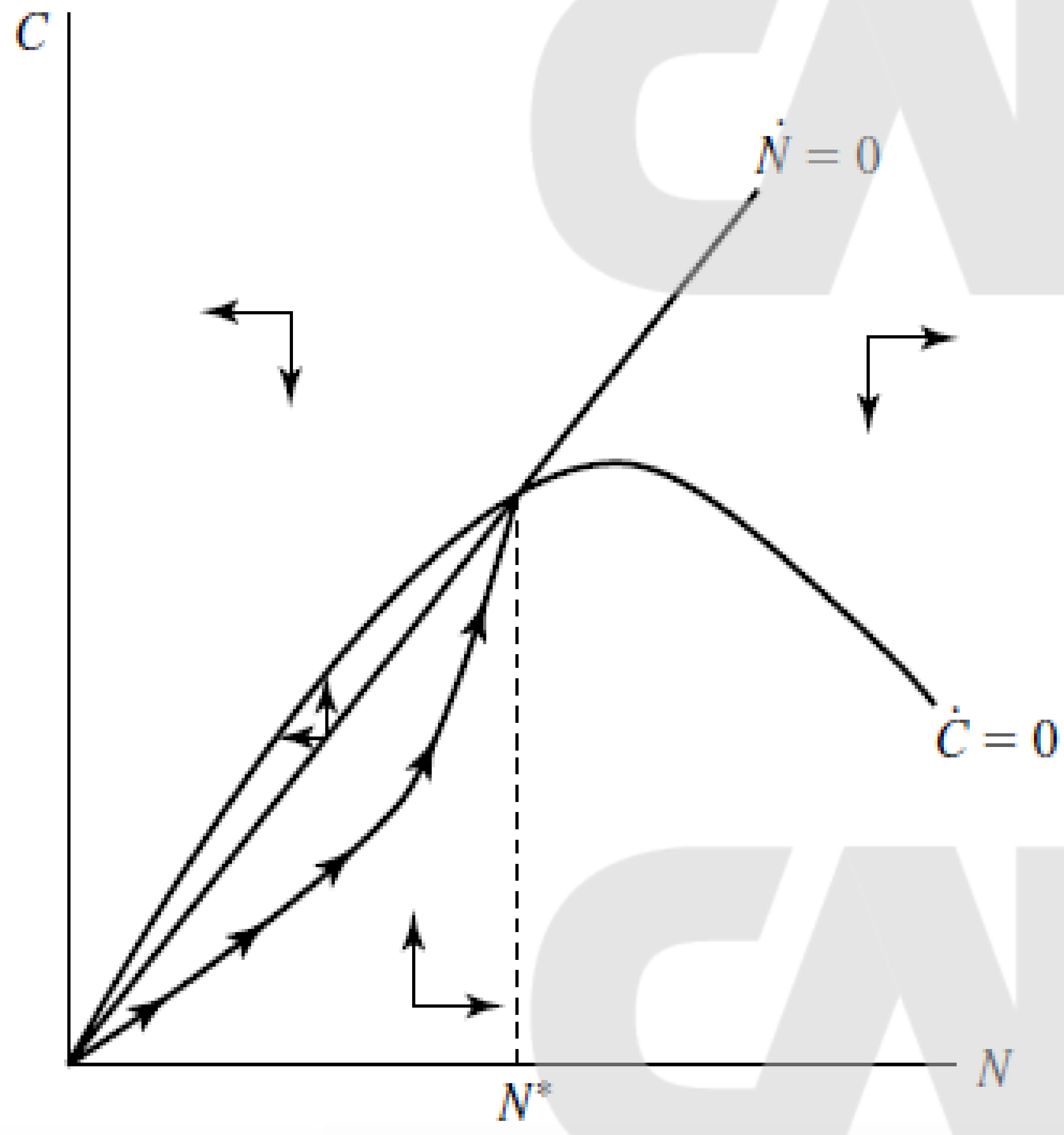
$\dot{C} = 0 \rightarrow C = \left(\frac{\pi}{\sigma} + \psi_1\right) N - \frac{\rho\phi}{\sigma} N^{-(1+\sigma)}$, curva cóncava

con máximo en $N^{máx} = \left(\frac{\pi+\sigma\psi_1}{\rho\phi(1+\sigma)}\right)^{1/\sigma}$.

Por debajo de $\dot{C} = 0$: $\downarrow C \rightarrow \dot{C} > 0$ flecha arriba

Por encima de $\dot{C} = 0$: $\uparrow C \rightarrow \dot{C} < 0$ flecha abajo

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EFECTOS DE ESCALA Y EL COSTE DE I+D



EE en la intersección de

$\dot{N} = 0 \rightarrow C = \psi_1 N$

$\dot{C} = 0 \rightarrow C = \left(\frac{\pi}{\sigma} + \psi_1\right) N - \frac{\rho\phi}{\sigma} N^{-(1+\sigma)}$

Valores fijos para el consumo y el número de variedades de productos:

$$N^* = \left(\frac{\pi}{\rho\phi}\right)^{1/\sigma} = \left(\frac{LA^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)}}{\rho\phi}\right)^{1/\sigma}$$

$$C^* = \left(\frac{\pi}{\sigma} + \psi_1\right)\left(\frac{LA^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)}}{\rho\phi}\right)^{1/\sigma} - \frac{\rho\phi}{\sigma}\left(\frac{LA^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)}}{\rho\phi}\right)^{-(1+\sigma)/\sigma}$$

Estabilidad en trayectoria de punto de silla hacia el EE, con combinaciones (C, N) por debajo de la recta $\dot{N} = 0$

No hay efectos de escala.

No hay crecimiento económico a largo plazo a no ser que crezca la población activa en cuyo caso $\gamma = n$.

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EL MODELO DE CAMBIO TECNOLÓGICO DE ROMER

Paul Romer (1990, Journal of Political Economy)

Modifica la manera de medir el coste de I+D requerido para descubrir un nuevo tipo de bien → medido en unidades de trabajo, en lugar de unidades de producto.

El modelo de Romer genera crecimiento económico endógeno que no conseguía el modelo con costes crecientes de I+D:

Un incremento del número de productos ($\uparrow N$) provoca una mejora en la productividad marginal del trabajo y por tanto una reducción en el coste de inventar un nuevo producto.

Dos supuestos adicionales al modelo básico:

- La población activa se reparte entre aquellos trabajadores que se dedican a la producción de bienes finales (fracción λ) y aquellos que investigan en la creación de nuevos productos (fracción $1-\lambda$).
- El gasto en I+D requerido para crear una nueva variedad se mide en unidades de trabajo.

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EL MODELO DE CAMBIO TECNOLÓGICO DE ROMER

Bajo estos supuestos, la variación de N depende del cociente entre la cantidad de trabajo dedicada a I+D, $(1-\lambda)L$, dividida por el coste requerido para crear una nueva unidad, η/N,

$$\dot{N} = \frac{(1-\lambda)L}{\eta/N}$$

lo cual implica una tasa de crecimiento de las variedades

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{(1-\lambda)L}{\eta}$$

Charles Jones (1999, *American Economic Review*) critica esta formulación al mostrar datos empíricos que la refutan. En concreto, la parte derecha (número de científicos e ingenieros en el sector de I+D multiplicados por la constante η^{-1}) ha registrado aumentos proporcionalmente mayores que la parte izquierda (tasa de crecimiento de la productividad identificada por la tasa de crecimiento del número de variedades).

Mantenemos la formulación de Romer para conseguir crecimiento económico a largo plazo. Además se añade una nueva externalidad positiva: la decisión de emprender un gasto en I+D permite aumentar el número de variedades, N, reduciendo el gasto requerido para crear una nueva unidad , η/N.

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EL MODELO DE CAMBIO TECNOLÓGICO DE ROMER

En el modelo de Romer la condición de libre entrada es

$$V(t) = \frac{(1-\lambda)L}{\dot{N}} w = \left(\frac{\eta}{N}\right) w$$

donde el valor de la empresa de investigación se obtiene como el flujo actualizado de beneficios previstos

$$V(t) = \int_t^{\infty} \pi e^{-\bar{r}(\nu - t)} d\nu$$

con el tipo de interés resultante en equilibrio

$$r(t) = \frac{\pi}{V(t)} + \frac{\dot{V(t)}}{V(t)}$$

Si tomamos la expresión que determina el beneficio cada periodo, $\pi = \lambda L A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \alpha^{2/(1-\alpha)}$, el valor del salario en equilibrio como la productividad marginal del trabajo, $w = \frac{(1-\alpha)Y}{\lambda L}$, junto con la producción agregada de bienes finales en equilibrio, $Y = A^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} \lambda L N$, obtenemos el siguiente resultado para la tasa de beneficio $\frac{\pi}{V(t)} = \frac{\pi}{\left(\frac{\eta}{N}\right) w}$

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EL MODELO DE CAMBIO TECNOLÓGICO DE ROMER

$$\frac{\pi}{V(t)}=\frac{\pi}{\left(\frac{\eta}{N}\right)\frac{(1-\alpha)Y}{\lambda L}}=\frac{\lambda L A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)}}{\left(\frac{\eta}{N}\right)\frac{(1-\alpha)Y}{\lambda L}}=\frac{\lambda L A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)}}{\left(\frac{\eta}{N}\right)\frac{(1-\alpha)A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}\lambda L N}{\lambda L}}$$

que se simplifica notablemente hasta

$$\frac{\pi}{V(t)}=\frac{\lambda L\left(\frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{2/(1-\alpha)}}{\eta\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}}=\frac{\lambda L\left(\frac{1}{\alpha}\right)\alpha^{2}}{\eta}=\frac{\lambda L\alpha}{\eta}$$

La variación del valor de la empresa investigadora es nula, $\frac{\dot{V(t)}}{V(t)}=0$, porque la decisión de entrada no va a afectar a su coste. Por tanto la rentabilidad de la inversión en investigación viene dada por la tasa de beneficio

$$r=\frac{\pi}{V(t)}=\frac{\lambda L\alpha}{\eta}$$

que se puede insertar en la ecuación de decisión intertemporal óptima del consumo, $\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}[r-\rho]$, obteniendo:

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EL MODELO DE CAMBIO TECNOLÓGICO DE ROMER

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\lambda L \alpha}{\eta} - \rho\right]$$

En el modelo de Romer, la tasa de crecimiento del consumo y de las variedades de productos intermedios coinciden. Recordando el valor de $\frac{\dot{N}}{N} = \frac{(1-\lambda)L}{\eta}$ presentado con anterioridad, lo podemos sustituir por $\frac{\dot{C}}{C}$ arriba y obtener la siguiente expresión

$$\frac{(1-\lambda)L}{\eta} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\lambda L \alpha}{\eta} - \rho\right]$$

que permite determinar la fracción de la población activa que en equilibrio se dedica a trabajar en la producción de bienes de consumo

$$\lambda = \frac{\theta L + \eta\rho}{L(\theta + \alpha)}$$

Sustituyendo λ en la ecuación que determina el tipo de interés y en la que da la tasa de crecimiento del consumo tenemos

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EL MODELO DE CAMBIO TECNOLÓGICO DE ROMER

$$r = \frac{\left(\frac{\theta L + \eta\rho}{L(\theta + \alpha)}\right) L\alpha}{\eta} = \frac{\alpha(\theta L + \eta\rho)}{\eta(\theta + \alpha)}$$

$$\gamma = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\alpha(\theta L + \eta\rho)}{\eta(\theta + \alpha)} - \rho\right] = \frac{\alpha L - \eta\rho}{\eta(\theta + \alpha)}$$

El crecimiento endógeno del modelo de Romer presenta similitudes y diferencias respecto a la tasa de crecimiento $\gamma = \frac{1}{\theta}\left(\frac{L}{\eta} A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right)$ que obtuvimos para una economía con un coste fijo de I+D medido en unidades de producción.

Factores comunes

- La disposición a ahorrar (bajos valores de ρ, θ) tiene efectos positivos sobre el crecimiento económico en ambos casos.
- Una reducción en el coste de I+D (disminución de η) fomenta un mayor crecimiento en ambos casos.
- El efecto escala (aumento en población activa L) favorece el crecimiento económico en ambos casos.

Factor específico

- El parámetro de la productividad en la producción de bienes finales no aparece en el modelo de Romer. Un aumento de la productividad A en la producción de bienes de consumo genera mayor crecimiento en el modelo con coste fijo de I+D en términos de producción y no tiene efecto en el modelo de Romer en el que el coste de I+D se mide en términos de trabajo.

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EL MODELO DE CAMBIO TECNOLÓGICO DE ROMER

Finalmente, vamos a resolver el problema de optimización del planificador social que busca maximizar el bienestar de los hogares respetando las restricciones de recursos globales y de creación de nuevas variedades

$$Max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

sujeto a

$$A(\lambda L)^{1-\alpha} N^{1-\alpha} X^{\alpha} = C + X$$

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{(1-\lambda)L}{\eta}$$

Las variables de control son C, X y λ mientras que la variable de estado es N. La solución del ejercicio de optimización permite alcanzar los resultados recogidos en la siguiente tabla (comparados con los del equilibrio descentralizado):

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

CAMBIO TECNOLÓGICO: MODELOS CON UNA VARIEDAD AMPLIADA DE PRODUCTOS – EL MODELO DE CAMBIO TECNOLÓGICO DE ROMER

Resultados del modelo de Romer

	Economía descentralizada		Planificación central
Fracción de población ocupada en producción, λ	$\frac{\theta L + \eta\rho}{L(\theta + \alpha)}$	>	$\left(\frac{1}{\theta}\right)\left(\frac{L - \rho\eta}{L}\right)$
Tasa de rentabilidad, r	$\frac{\alpha(\theta L + \eta\rho)}{\eta(\theta + \alpha)}$	<	$\frac{L}{\eta}$
Tasa de crecimiento, γ	$\frac{\alpha L - \eta\rho}{\eta(\theta + \alpha)}$	<	$\left(\frac{1}{\theta}\right)\left(\frac{L}{\eta} - \rho\right)$

El planificador escoge una mayor de trabajo dedicado a la actividad investigadora (λ más bajo) y con ello consigue una mayor rentabilidad de la investigación y un mayor crecimiento. La solución descentralizada no es un óptimo de Pareto por la infrainversión en innovación. Las políticas industriales a diseñar deberían eliminar la distorsión del precio de monopolio a la hora de vender las innovaciones a las empresas de producción final con las medidas ya descritas anteriormente (subsidio a la compra de bienes intermedios, ayuda pública que cubra el gasto en I+D,...)