Crecimiento Económico y Empleo: keynesianos y neoclásicos

Modelos Neoclásicos con Optimización del Consumo o con ahorro endógeno

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Félix Jiménez

Profesor

ECO 339 Teoría del Crecimiento

Notas de Clase Nº 07

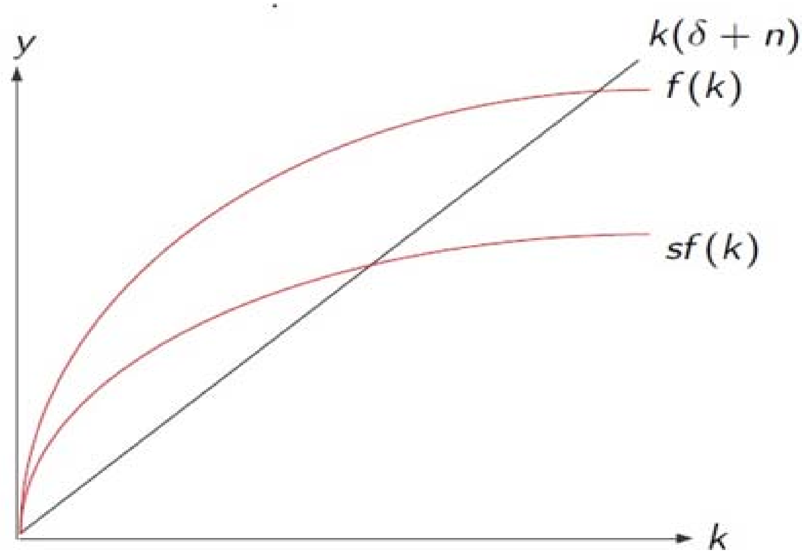
2016

Temario

1. Característica Principal
2. Supuestos
3. Nota sobre el factor de descuento
4. La Función Objetivo
5. Formulación del Problema (el problema del planeador en una economía centralizada)
6. Solución del Problema de Optimización (Control Óptimo)
7. El Estado Estacionario

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Como se recordará la Tasa de Ahorro (s) es una parámetro fundamental para la solución del modelo de Solow-Swan. Este es un modelo con tasa de ahorro exógena..



Ahora se levanta el supuesto de tasa de ahorro exógena. El ahorro será un resultado endógeno y se determinará óptimamente junto con el consumo por las familias u hogares que maximizan su función de utilidad intertemporalmente

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

1. *Característica Principal*

En el modelo de RCK los agentes eligen óptimamente la tasa de ahorro cada período; a partir de fundamentos micro (mediante la solución del problema de maximización intertemporal) se obtiene la trayectoria del consumo de la familia. Así la tasa de ahorro no es simplemente un porcentaje fijo de la producción.

2. Supuestos

- Los agentes–consumidores viven infinitamente y son idénticos porque tienen la misma función de utilidad: *μ'(c)>0, μ''(c)<0* y satisface condiciones de INADA:

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty \qquad \lim_{c \to \infty} u'(c) = 0$$

- Utilidad agregada de la sociedad en un instante determinado es igual a *μ(c)L(t)*, donde *L* es la población, igual a la fuerza laboral que crece a una tasa exógena n.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

- Los agentes-consumidores son propietarios de las empresas y perciben sus beneficios. Además, dividen su ingreso entre consumo y ahorro.

- Los mercados son perfectos por lo que la *solución del problema de asignación de recursos de manera descentralizada es igual a la solución obtenida por el planificador central*. Las empresas y las familias interactúan en mercados en competencia perfecta

-
- La economía que produce un solo bien con una función de producción neoclásica bien comportada y bajo competencia perfecta. La economía es cerrada.

- Se asume una tasa de depreciación del capital igual δ y un factor de descuento intertemporal ρ que permite expresar la utilidad en valor presente.

- El factor de descuento es mayor que la tasa de crecimiento de la fuerza laboral: $\rho - n > 0$.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

3. Nota sobre el factor de descuento

La actualización del valor de la utilidad del consumo futuro se mide con una tasa de descuento (ρ).

Esta tasa o factor de descuento es también conocido como una *tasa de impaciencia*. Si aumenta, genera un mayor deseo por parte de las familias por adelantar consumo futuro al presente. Lo contrario ocurre si el valor de la tasa disminuye.

Como veremos más adelante, disminuir el consumo HOY para aumentar el consumo MAÑANA depende de la productividad marginal del capital. Disminuir el consumo HOY implica que el tasa de crecimiento del consumo aumenta; por lo tanto, el ahorro presente aumenta.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

4. La Función Objetivo

Es el índice de bienestar social intertemporal de la sociedad que según este modelo es equivalente al índice de bienestar intertemporal del individuo representativo multiplicado por el número de individuos.

Este índice se obtiene por la suma, actualizada con la tasa de descuento intertemporal a lo largo del horizonte infinito, del bienestar de cada período. En tiempo continuo esto se expresa como una integral:

$$V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u[c(t)] L_t dt$$

Donde: *c(t)* es el consumo *per capita* en *t*, y *μ(c(t))* es la función de utilidad individual. Cuanto mayor es la tasa de descuento ρ, se prefiere consumo presente y disminuyen las posibilidades de consumo futuro.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

5. Formulación del Problema (el problema del planeador en una economía centralizada)

Se trata de maximizar el bienestar intertemporal de la sociedad considerando las restricciones de la técnica, de las dotaciones iniciales, y de la situación final en un horizonte infinito. El problema se puede expresar como sigue:

$$Max\ V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u[c(t)]dt \qquad (2)$$

Sujeto a: $$y(t) = c(t) + i(t)$$

$$K_0 > 0,\ L_0 > 0$$

Donde: *c* es el consumo *per capita*;

i es la inversión bruta *per capita*;

y = f(k) es la producción *per capita.*

$L_t = L_0 e^{nt}$ y haciendo L_0=1 se tiene: $L_t = e^{nt}$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

De la identidad del Producto y dividiendo por K

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{Y}{K} - c\frac{L}{K} - \delta \qquad (3)$$

Rescribiendo en términos *per capita*:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{y}{k} - \frac{c}{k} - (n + \delta) \qquad (4)$$

$$donde \quad n = \frac{\dot{L}}{L}$$

Dado que el ingreso está dado por la función de producción:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\left(f(k) - c\right)}{k} - (n + \delta) \qquad (5)$$

$$\dot{k} = \left(f(k) - c\right) - k(n + \delta) = sf(k) - k(n + \delta) \qquad (6)$$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

6. Solución del Problema de Optimización (Control Óptimo)

$$Max\ V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\rho - n)t} u[c(t)]dt \qquad (7)$$

Sujeto a:

$$\dot{k} = f(k) - c - k(n + \delta) \qquad (8)$$

y la condición inicial $k(0)=k_0$ ($k_0>0$)

c: es la *variable de control* porque está sujeta a la decisión del agente que enfrenta el problema de optimización intertemporal. Su nivel en cualquier momento del tiempo puede ser elegido. El consumo no puede ser superior al producto; además, la economía cerrada no lo permite.

k: es la *variable de estado*, tiene ley de movimiento y su nivel en cualquier momento del tiempo es el resultado de las decisiones tomadas sobre la variable de control.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Se plantea el Hamiltoniano en valor presente

$$H = e^{-(\rho - n)t} u[c(t)] + v[f(k) - c - (\eta + \delta)k] \qquad (9)$$

Las condiciones de primer orden serían:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-(\rho - \eta)t} u'(c) - v = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = -\dot{v} = v[f'(k) - (\eta + \delta)] \qquad (11)$$

$$\lim(k_t v_t) = 0 \quad cuando \quad t \rightarrow \infty \qquad (12)$$

La variable v se denomina de coestado y se interpreta como el precio sombra de la variable de estado expresado en valor presente.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

De la ecuación (10) se tiene que :

$$e^{-(\rho-\eta)t}u'(c) = v \qquad (13)$$

Esta ecuación nos dice que en cada instante del tiempo el precio sombra del capital debe ser igual a la utilidad marginal del consumo en valor presente.

Si el precio sombra es menor, el valor marginal del capital sería inferior al del consumo, de modo que el bienestar aumentaría si se incrementa el consumo, es decir, si se reduce la inversión. El mayor consumo disminuiría el valor de su utilidad marginal hasta hacerla igual al precio sombra. Ocurre lo contrario si el precio sombra es mayor que la utilidad marginal del consumo.

En resumen, la única situación de equilibrio admisible es la igualdad del precio sombra con la utilidad marginal del consumo.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Por último, la ecuación (12) es la Condición de Transversalidad. A medida que la familia representativa se acerca al período terminal, el valor del capital será cero (sea porque el capital ha desaparecido o porque su valor es cero) tan pronto se llegue al horizonte temporal respecto al cual se está planificando. Sería ineficiente llegar al final con un valor del stock distinto de cero.

Las ecuaciones (10) y (11) se pueden reformular como sigue:

$$u'(c) = ve^{(\rho - \eta)t} \qquad (14)$$

$$-\frac{\dot{v}}{v} = f'(k) - (\eta + \delta) \qquad (15)$$

Tomando logaritmos a (14), derivando con respecto al tiempo y multiplicando y dividiendo por c el primer miembro de la ecuación, se obtiene:

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$\ln u'(c) = \ln v + (\rho - \eta)t$$

$$c\frac{u''(c)}{u'(c)}\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{v}}{v} + (\rho - \eta) \qquad (16)$$

De (15) y (16) se obtiene:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - (\rho + \delta)}{-c\dfrac{u''(c)}{u'(c)}} \qquad (17)$$

La ecuación (17) es conocida como la *Ecuación Euler*. Esta ecuación dice que para que el consumidor decida aceptar óptimamente una senda de consumo creciente, se le debe recompensar con un producto marginal superior.

También se puede hallar del modo siguiente:

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$Máx\int u[c(t)]\,dt$$

Reemplazando c(t) por su igual:

$$Máx\int u[f(k)-\dot{k}-(\eta+\delta)k]\,dt$$

La Ecuación de Euler es:

$$\boxed{u_k-\frac{du_{\dot{k}}}{dt}=0}$$

Resolviendo se tiene:

$$u'[f'(k)-(\eta+\delta)]+u''\dot{c}=0$$

$$\frac{\dot{c}}{c}=-\frac{u'(c)}{cu''(c)}[f'(k)-(\eta+\delta)] \Rightarrow \frac{\dot{c}}{c}=\frac{f'(k)-(\eta+\delta)}{-c\dfrac{u''(c)}{u'(c)}}$$

Note que:

$$u_{\dot{k}}=\frac{du}{dc}\frac{dc}{d\dot{k}}=u'(-1) \quad \textit{y} \quad \frac{du_{\dot{k}}}{dt}=-\frac{du'}{dc}\frac{dc}{dt}=-u''\dot{c}$$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$\varepsilon(c) = -c\frac{u''(c)}{u'(c)}$$

Coeficiente de aversión relativa al riesgo; (O, elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo)

$$\varepsilon(c) = -\frac{du'(c)}{dc}\frac{c}{u'(c)}$$

Elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo.

Esta elasticidad indica la sensibilidad de la utilidad marginal ante cambios en el nivel de consumo. Como en el numerador se encuentra la segunda derivada de la función de utilidad, la elasticidad mide el grado de concavidad de la función de utilidad. Cuando mayor sea la elasticidad, mayor será la curvatura de la función de utilidad.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Las ecuaciones (17) y (8) forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales.

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \delta - \rho}{\varepsilon(c)}$$

La (17) es la regla de Keynes-Ramsey de consumo óptimo.

$$\dot{k} = f(k) - c - k(n + \delta)$$

Si la productividad marginal del capital neta de depreciación es superior a la tasa de descuento, resulta conveniente destinar buena parte del producto al ahorro (o inversión), con lo que el consumo será mayor en el futuro que en el presente. Por lo tanto, la trayectoria temporal del consumo será creciente.

Si la tasa de descuento es mayor que la productividad neta de depreciación, la estrategia óptima será disminuir el ahorro (inversión) para incrementar el consumo presente con lo cual será menor el consumo futuro. Por lo tanto, la trayectoria temporal del consumo será decreciente.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Finalmente, mientras mayor sea la elasticidad, $\varepsilon(c)$, es decir, mientras mayor sea la concavidad de la función de utilidad, la senda óptima del consumo será más estable.

Por ejemplo, si dicha elasticidad tiende a infinito, la tasa de crecimiento del consumo tenderá a cero y, por lo tanto, el comportamiento del consumo será casi constante. Si su valor tiene a cero, la trayectoria del consumo será explosiva.

7. El Estado Estacionario

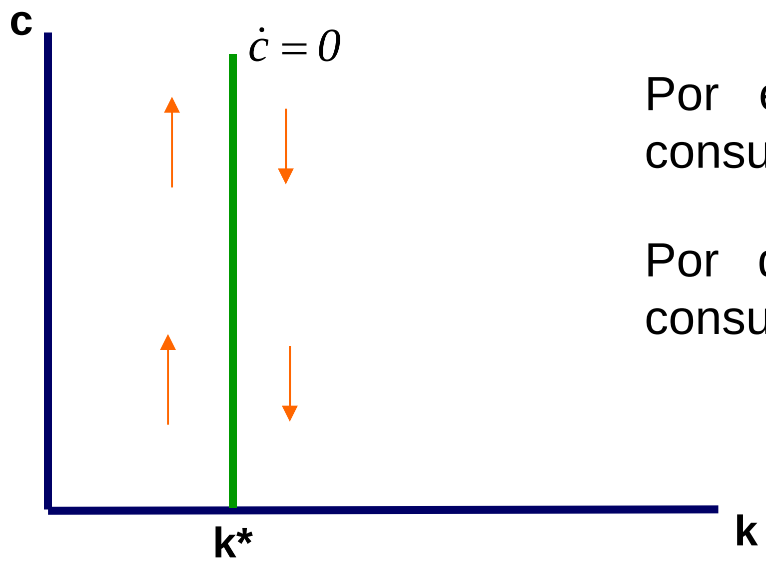
En el steady state las ecuaciones diferenciales no lineales se transforman en:

$$\dot{c} = 0 \rightarrow f'(k) = \delta + \rho \qquad (18)$$

$$\dot{k} = 0 \rightarrow c = f(k) - (n + \delta)k \qquad (19)$$

La ecuación (18) constituye una recta que parte de una constante k* (en el plano (k, c)), para la cual *f'(k*)*= δ+ρ.

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans



Por encima de k* el consumo decrece.

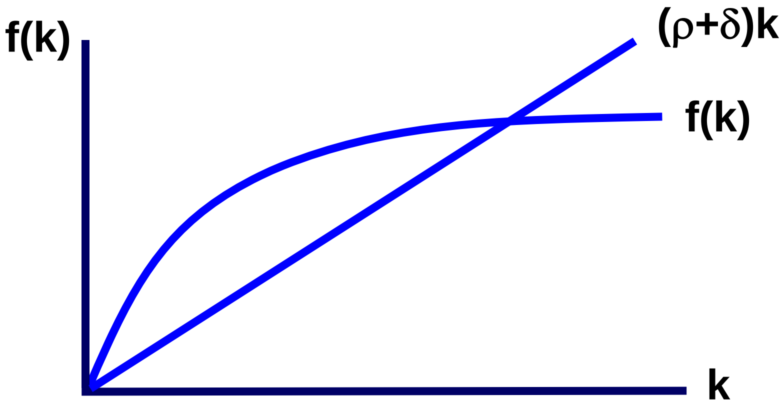
Por debajo de k* el consumo crece.

Se sabe, además, que conforme se incrementa el stock de capital la variación del consumo disminuye y, por ende, el consumo. La derivada de la variación de c con respecto a k, es menor que cero (véase ecuación 17).

La ecuación (19) representa la diferencia de la función de producción *per cápita* y la inversión destinada a reponer el capital gastado y dotar de capital a la nueva población laboral.

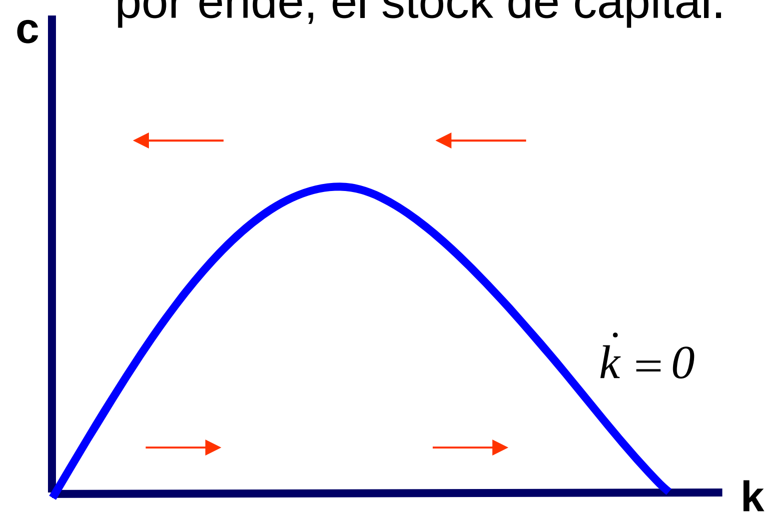
Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

La función de producción se puede representar como una función cóncava pues cumple las condiciones de INADA. La diferencia de ambas funciones constituye una función similar a una parábola.



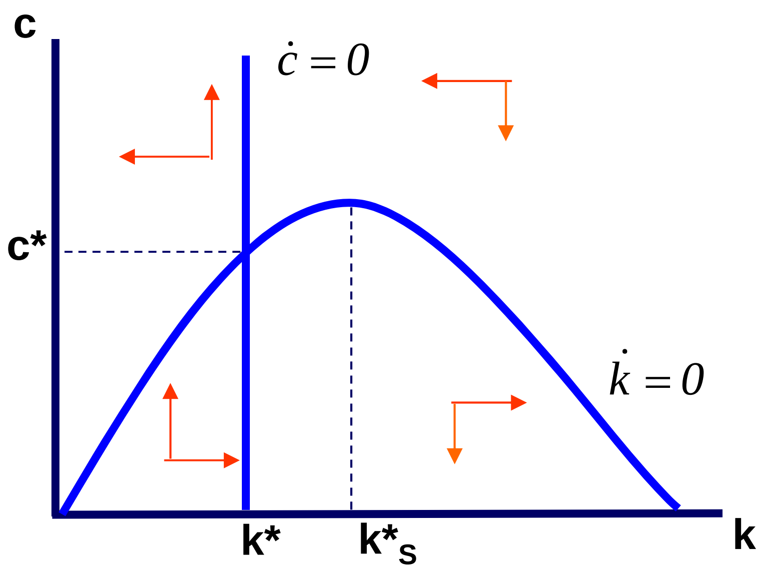
La derivada de la variación de k con respecto al consumo, es igual a -1 (véase ecuación 8). Esto indica que el aumento de c disminuye la variación de k y, por ende, el stock de capital.

Por lo tanto, niveles de c por encima de la curva del *steady state* de k, (ecuación 19), reducen el stock de capital. Y niveles de c por debajo, aumentan el stock de capital.



Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Juntando los gráficos del *steady state* de c y de k, en el mismo plano obtenemos los diagramas de fases:



El valor de k* del equilibrio no es el que maximiza el consumo (*Golden Rule*) sino que es menor:

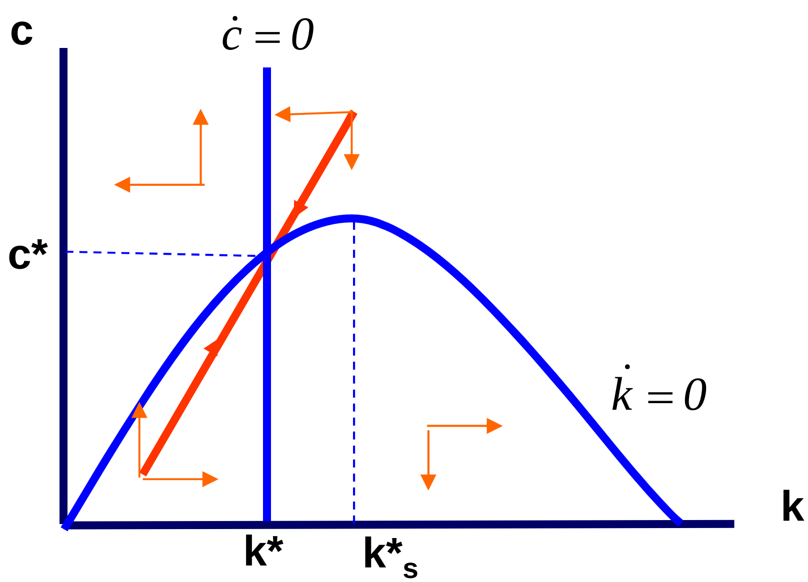
$$k^*_{\text{SOLOW (Golden Rule)}} > k^*_{\text{RAMSEY}}$$

O, lo que es lo mismo:

$$[f'(k^*)-\delta = \rho] > [f'(k^*_S) - \delta = \eta], \text{ pues } \rho > \eta$$

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

El equilibrio es de ensilladura. Recordar que agentes son racionales y hay predicción perfecta. El estado estacionario, o el *steady state*, se alcanza sólo a través del *Saddle Path.*



Esto se verifica calculando el determinante del Jacobiano del sistema original linealizado alrededor de (c, k*) mediante la expansión de Taylor de grado uno (ecuaciones 17 y 8)*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{f'(k) - \delta - \rho}{\varepsilon(c)} & \dfrac{cf''(k)}{\varepsilon(c)} \\ -1 & f'(k) - \delta - n \end{bmatrix}$$

El determinante de este Jacobiano es negativo.