Clase 5: Modelo de Mehra y Prescott

CAPM Dinámico

Hamilton Galindo

UNMSM

Octubre 2012

Clase de hoy consiste en...

1. Papers base
2. Dos fenómenos empíricos
3. Dos enigmas
4. Equity premium puzzle
5. Cálculo del Equity Premium
6. Risk free rate puzzle
7. Posibles soluciones de los enigmas

Papers base

- Mehra, Rajnish and Prescott, Edward (1985). **The Equity Primium: A Puzzle**. Journal Monetary Economics, vol. 15, n0. 2 (March):145-161.
- Kocherlakota, Narayana R. (1996). **The Equity Primium: It's Still a Puzzle**. Journal of Economic Literature, vol. 34, n0. 1 (March):42-71.
- Mehra, Rajnish (2003). **The Equity Premium: Why is it a Puzzle?**. Financial Analysts Journal, (February):54-69.

Dos fenómenos empíricos
Estados Unidos

1. La diferencia entre el retorno anual promedio de las acciones (índice S&P500) y el retorno anual promedio del activo libre de riesgo (*treasury bills*) es grande (6 %).
2. El retorno anual promedio del "*treasury bills*" es muy pequeño (1 %).

Dos fenómenos empíricos
Crecimiento anual del consumo

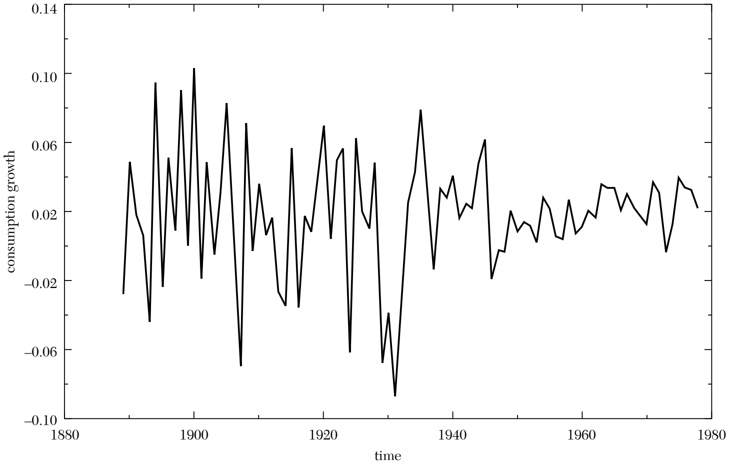


Figure 1. Annual Real Per Capita Consumption Growth

Fuente: Kocherlakota (1996)

Dos fenómenos empíricos
Retorno anual de las acciones

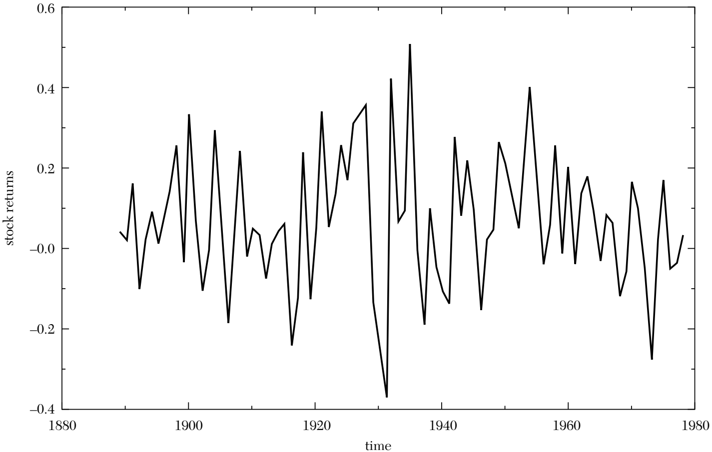


Figure 2. Annual Real Return to S & P 500

Fuente: Kocherlakota (1996)

Dos fenómenos empíricos

Retorno anual del activo libre de riesgo

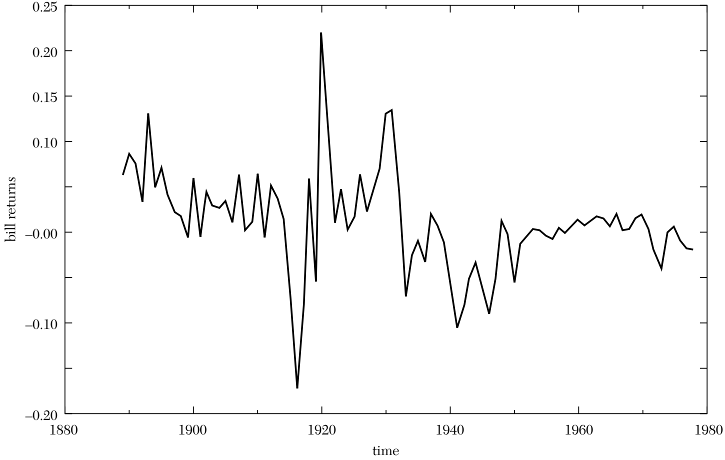


Figure 3. Annual Real Return to Nominally Risk Free Short Term Debt

Fuente: Kocherlakota (1996)

Dos fenómenos empíricos
Estadísticos de datos anuales - EEUU

TABLE 1
SUMMARY STATISTICS
UNITED STATES ANNUAL DATA, 1889–1978

		Sample Means	
R_t^s		0.070	
R_t^b		0.010	
C_t/C_{t-1}		0.018	
		Sample Variance-Covariance	
	R_t^s	R_t^b	C_t/C_{t-1}
R_t^s	0.0274	0.00104	0.00219
R_t^b	0.00104	0.00308	−0.000193
C_t/C_{t-1}	0.00219	−0.000193	0.00127

In this table, C_t/C_{t-1} is real per capita consumption growth, R_t^s is the real return to stocks and R_t^b is the real return to Treasury bills.

Fuente: Kocherlakota (1996)

- La tasa real promedio del *retorno de acciones* es 7 %, mientras que la tasa real promedio del *retorno de bonos* es 1 % anual.
- El crecimiento del consumo per cápita es alto: 1.8 % anual
- La cov. del crecimiento del consumo con el retorno de las acciones es ligeramente mayor que la cov. del crecimiento del consumo con el retorno de los bonos.

Prima por riesgo aún es alta (Datos al 2000)
Estados Unidos

El retorno promedio anual real (retorno ajustado por la inflación) del mercado de acciones de USA durante 110 años (1889-2000) ha sido 7.9 %. En el mismo periodo el correspondiente al activo libre de riesgo ha sido 1 %. La **prima por acciones** ("equity premium"), que es la diferencia entre esos dos retornos, fue de 6.9 %.

Table 1. U.S. Returns, 1802–2000

	Mean Real Return		
Period	Market Index	Relatively Riskless Security	Risk Premium
1802–1998	7.0%	2.9%	4.1 pps
1889–2000	7.9	1.0	6.9
1926–2000	8.7	0.7	8.0
1947–2000	8.4	0.6	7.8

Sources: Data for 1802–1998 are from Siegel (1998); for 1889–2000, from Mehra and Prescott (1985), updated by the author. The rest are the author's estimates.

Fuente: Mehra (2003)

Similar fenómeno en países desarrollados

La siguiente tabla confirma que el retorno de las acciones en otros países desarrollados también exhibe dicha regularidad empírica (alta prima por acciones).

Table 2. Returns for Selected Countries, 1947–98

Country	Period	Mean Real Return: Market Index	Mean Real Return: Relatively Riskless Security	Risk Premium
United Kingdom	1947–99	5.7%	1.1%	4.6 pps
Japan	1970–99	4.7	1.4	3.3
Germany	1978–97	9.8	3.2	6.6
France	1973–98	9.0	2.7	6.3

Sources: Data for the United Kingdom are from Siegel; the rest of the data are from Campbell (forthcoming 2003).

Fuente: Mehra (2003)

Valor final de 1$ invertido

Estados Unidos

Las dramáticas implicaciones de inversión de los diferentes retornos se pueden apreciar en la siguiente tabla, la cuál muestra la enorme diferencia en la apreciación de un 1$ invertido en acciones y bonos.

Table 3. Terminal Value of $1 Invested

	Stocks		T-Bills	
Investment Period	Real	Nominal	Real	Nominal
1802–1997	$558,945	$7,470,000	$276	$3,679
1926–2000	266.47	2,586.52	1.71	16.56

Sources: Ibbotson Associates (2001); Siegel (1998).

Fuente: Mehra (2003)

Equity premium puzzle
Mehra y Prescott (1985)

Equity premium puzzle

La diferencia del retorno promedio de las acciones con el rendimiento promedio del *Treasury bill* (activo libre de riesgo), llamado "**Equity premium**", no es capturado por la teoría estándar predominante de "asset pricing". A esta debilidad de la teoría para capturar este hecho empírico se le llamó "**Equity premium puzzle**" y fue mostrada por Mehra y Prescott (1985).

Risk free rate puzzle
Weil(1989)

Risk free rate puzzle

Bajo los mismos datos analizados por Mehra y Prescott (1985), Weil (1989) observó que la tasa de interés del activo libre de riesgo era cercano a 1 %. La teoría utilizada por Mehra y Prescott (1985) afirmaba que dicha tasa bordeaba el 12 %. A esta debilidad de la teoría para capturar ese hecho empírico Weil (1989) la llamó "**Risk free rate puzzle**".

Equity premium puzzle
Principales supuestos

Los principales supuestos del Modelo de Mehra y Prescott (1985) son:

1. Asume la existencia de un "Agente Representativo", estándar en los modelos "RBC".
2. Los individuos tienen *preferencias* asociadas con la función de utilidad estándar usada en macroeconomía (agentes racionales y maximizadores).
3. Los mercados de activos son completos: los indiviuos pueden acceder a un contrato de seguro en contra de cualquier posible contingencia.
4. No hay costos por transacción de activos
5. Los individuos pueden transar activos (acciones y bonos) en un mercado sin fricciones.

Equity premium puzzle I

Preferencias del agente representativo (AR)

[1] El AR busca maximizar su utilidad esperada descontada:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t u(c_t) \tag{1}$$

Donde:

- E_0 es el operador de expectativas racionales
- β es el factor de descuento
- $u(\cdot)$ es la función de utilidad instantanea concava, continuamente diferenciable y creciente
- c_t es el consumo per cápita

Equity premium puzzle II

Preferencias del agente representativo (AR)

[2] Se asume que la función de utilidad es del tipo CRRA (aversión relativa al riesgo constante)

$$u(c_t, \alpha) = \frac{c_t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Dos características importantes:

- Es invariante en escala (usado en los modelos RBC y de crecimiento económico)
- La agregación para el agente representativo es independiente de la ditribución inicial de dotaciones

Una desventaja:

Equity premium puzzle III

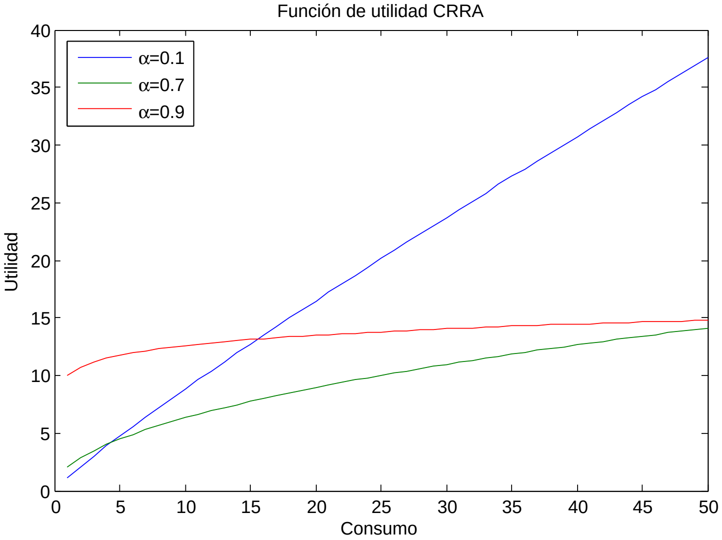
Preferencias del agente representativo (AR)

- Relaciona las preferencias por el riesgo con las preferencias temporales.
  Con preferencias del tipo CRRA, el agente que desea suavizar su consumo entre distintos estados de la naturaleza también prefiere suavizar su consumo en el tiempo. **No hay una razón económica para que esto se cumpla.**

En la función de utilidad, α mide la curvatura de la función de utilidad

Equity premium puzzle IV

Preferencias del agente representativo (AR)



Equity premium puzzle I

Optimización del agente representativo (un solo activo)

El problema del AR es maximizar su función de utilidad esperada descontada sujeta a su restricción presupuestaria (nominal):

Problema del agente representativo

$$\underset{\{c_t, e_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{Max}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

s.a

$$p_t c_t + e_{t+1} = p_t y_t + (1 + i_t^e) e_t$$

Donde:

- p_t es el precio de unidad de consumo (c_t).
- e_t es monto destinado (en unid. monetarias) a la adquisición de activos riesgosos (ahorro o inversión).

Equity premium puzzle II
Optimización del agente representativo (un solo activo)

- i_t^e es la tasa de interés nominal pagado por el activo riesgoso.

La solución de este problema es:

1. **Función lagrange**

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \left[u(c_t) + \lambda_t \Big(p_t y_t + (1 + i_t^e) e_t - p_t c_t - e_{t+1} \Big) \right]$$

2. **Condiciones de primer orden**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} &= 0 \longrightarrow u_{c_t} + \lambda_t (p_t) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_{t+1}} &= 0 \longrightarrow E_0 \left[\beta^t (\lambda_t (-1)) + \beta^{t+1} (\lambda_{t+1} (1 + i_{t+1}^e)) \right] = 0 \end{aligned}$$

Equity premium puzzle III

Optimización del agente representativo (un solo activo)

3. **Ecuación de Euler**

De las condiciones de primer orden se obtiene la ecuación principal del modelo:

$$\frac{u_{c_t}}{p_t} = \beta E_t \left[\frac{u_{c_{t+1}}}{p_{t+1}} \right] (1 + i^e_{t+1}) \tag{2}$$

Para obtener un rendimiento en términos reales se aplica la ecuación de Fisher:

$$(1 + i_t) = (1 + r_t)(1 + \pi_t)$$

Considerando que:

$$\pi_{t+1} = \frac{p_{t+1}}{p_t} - 1$$

Se tiene que la **Ecuación de Euler** es:

$$1 = \beta E_t \left[\frac{u_{c_{t+1}}}{u_{c_t}} \right] (1 + r^e_{t+1}) \tag{3}$$

Equity premium puzzle IV

Optimización del agente representativo (un solo activo)

4. **Aplicación para un activo libre de riesgo**

   La ecuación [3] se mantiene para un activo libre de riesgo (bono):

$$1 = \beta E_t \left[\frac{u_{c_{t+1}}}{u_{c_t}} \right] (1 + r^f_{t+1}) \tag{4}$$

   Donde r^f_t es la tasa de interés del activo libre de riesgo.

Tasa bruta de interés

- R^e_t es la tasa bruta de interés del activo riesgoso y es igual a $[1 + r^e_t]$
- R^f_t es la tasa bruta de interés del activo libre de riesgo y es igual a $[1 + r^f_t]$

Equity premium puzzle I
Relación entre los dos retornos

La definición de covarianza entre dos variables aleatorias es:

$$\begin{aligned} Cov(a,b) &= E(ab) - E(a)E(b) \\ E(ab) &= E(a)E(b) + Cov(a,b) \end{aligned}$$

Aplicando esta definición a la ecuación de Euler [3] para el activo riesgoso:

$$1 = \beta E_t \left[\frac{u_{c_{t+1}}}{u_{c_t}} \right] (1 + r^e_{t+1}) \qquad (5)$$

$$1 = \beta E_t \left[\frac{u_{c_{t+1}}}{u_{c_t}} \right] (R^e_{t+1}) \quad \text{tasa bruta de interés} \qquad (6)$$

$$1 = \left[\frac{\beta}{u_{c_t}} \right] \underbrace{E_t(u_{c_{t+1}} R^e_{t+1})}_{E(ab)} \qquad (7)$$

Equity premium puzzle II
Relación entre los dos retornos

Donde:

$$E_t(u_{c_{t+1}} R^e_{t+1}) = E_t(u_{c_{t+1}})E_t(R^e_{t+1}) + Cov(u_{c_{t+1}}, R^e_{t+1})$$

Multiplicando por $\frac{\beta}{u_{c_t}}$ y operando se tiene:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\beta}{u_{c_t}}\left[E_t(u_{c_{t+1}})E_t(R^e_{t+1}) + Cov(u_{c_{t+1}}, R^e_{t+1})\right] \\
1 &= E_t\left(\frac{\beta u_{c_{t+1}}}{u_{c_t}}\right)E_t(R^e_{t+1}) + \frac{\beta}{u_{c_t}}Cov(u_{c_{t+1}}, R^e_{t+1}) \\
1 &= \underbrace{\frac{1}{R^f_{t+1}}}_{\text{De la EE del bono}} E_t(R^e_{t+1}) + \frac{\beta}{u_{c_t}}Cov(u_{c_{t+1}}, R^e_{t+1}) \\
R^f_{t+1} &= E_t(R^e_{t+1}) + \frac{\beta R^f_{t+1}}{u_{c_t}}Cov(u_{c_{t+1}}, R^e_{t+1})
\end{aligned}$$

Equity premium puzzle III

Relación entre los dos retornos

Pero:

$$\frac{\beta R^f_{t+1}}{u_{c_t}} = \frac{1}{E_t[u_{c_{t+1}}]}$$

Entonces:

$$R^f_{t+1} = E_t(R^e_{t+1}) + Cov\left(\frac{u_{c_{t+1}}, R^e_{t+1}}{E_t[u_{c_{t+1}}]}\right)$$

La prima por acciones (*equity premium*) es:

Equity Premium

$$E_t(R^e_{t+1}) = R^f_{t+1} + Cov\left(\frac{-u_{c_{t+1}}, R^e_{t+1}}{E_t[u_{c_{t+1}}]}\right) \tag{8}$$

Equity premium puzzle I

Optimización del agente representativo (dos activos)

1. En este caso se demuestra de manera riguroza la ecuación de Euler para el bono mostrado anteriormente.
2. Para ello se supone que el AR accede a 2 activos (acciones y bono); además, se modela explÍcitamente los dividendos.
3. La función de utilidad se mantiene y aumenta una variable de control "bonos". La restricción presupuestaria en términos reales es:

$$\underbrace{c_t + p_t e_{t+1} + b_{t+1}}_{\text{Egresos}} = \underbrace{R_t^f b_t + p_t e_t + y_t e_t}_{\text{Ingresos}}$$

- El consumo es el númerario.
- p_t es el precio del activo riesgoso (en unid. de consumo).
- R_t^f es el retorno bruto real del activo libre de riesgo (bono).

Equity premium puzzle II

Optimización del agente representativo (dos activos)

- b_t es el monto de bonos
- Cada acción paga un dividendo de y_t; por tanto, para el total de acciones que tiene el AR (e_t), el pago de dividendo que recibe es $y_t e_t$.
- El valor de sus acciones ($p_t e_t$) forma parte de sus ingresos.

La solución de este problema es:

1. **Función lagrange**

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \left[u(c_t) + \lambda_t \left(R_t^f b_t + p_t e_t + y_t e_t - c_t - p_t e_{t+1} - b_{t+1} \right) \right]$$

Equity premium puzzle III

Optimización del agente representativo (dos activos)

2. **Condiciones de primer orden**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} &= 0 \longrightarrow u_{c_t} + \lambda_t(p_t) = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_{t+1}} &= 0 \longrightarrow E_0\left[\beta^t(\lambda_t(-p_t)) + \beta^{t+1}(\lambda_{t+1}(p_{t+1} + y_{t+1}))\right] = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_{t+1}} &= 0 \longrightarrow E_0\left[\beta^t(\lambda_t(-1)) + \beta^{t+1}(\lambda_{t+1}(R^f_{t+1}))\right] = 0
\end{aligned}$$

3. **Ecuación de Euler**

De las condiciones de primer orden se obtiene la ecuación de Euler para el **activo riesgoso**:

$$1 = \beta E_t\left[\frac{u_{c_{t+1}}}{u_{c_t}}\right]\left(\frac{p_{t+1} + y_{t+1}}{p_t}\right) \tag{9}$$

Equity premium puzzle IV
Optimización del agente representativo (dos activos)

y para el **bono**:

$$1 = \beta E_t \left[\frac{u_{c_{t+1}}}{u_{c_t}} \right] (R^f_{t+1}) \tag{10}$$

Comparando la ecuación [9] con [3] se tiene que:

$$R^e_{t+1} = \frac{p_{t+1} + y_{t+1}}{p_t} \tag{11}$$

Cálculo del Equity Premium
Supuestos

Para poder encontrar una solución cerrada del modelo del AR se asume lo siguiente (Mehra, 2003):

Supuestos

1. La tasa de crecimiento del consumo, $x_{t+1} \equiv c_{t+1}/c_t$ es identicamente e independientemente distribuida (i.i.d.)
2. La tasa de crecimiento de dividendos, $z_{t+1} \equiv y_{t+1}/y_t$, es i.i.d.
3. (x_t, z_t) tiene una distribución conjunta lognormal

Dos consecuencias inmediatas de estos supuestos son:

- El retorno de las acciones, R_t^e, es i.i.d.
- (x_t, R_t^e) tiene una distribución conjunta lognormal

Cálculo del Equity Premium I

Expresiones algebraicas importantes

1. **Precio del activo riesgoso**

   El precio de las acciones se define como el valor actual del flujo de dividendos:

$$p_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left[\beta^{t+i} \frac{u_{c_{t+i}}}{u_{c_t}} \right] y_{t+i} \tag{12}$$

   Donde: $\left[\beta^{t+i} \frac{u_{c_{t+i}}}{u_{c_t}} \right]$ es el factor de descuento estocástico.

2. **Tasa de crecimiento de los dividendos**

$$\begin{aligned} \frac{y_{t+1}}{y_t} &= z_t \\ y_{t+1} &= z_t y_t \\ y_{t+i} &= z_{t+i} \ldots z_t y_t \end{aligned} \tag{13}$$

   Esta expresión se introduce en la euación del precio [12].

Cálculo del Equity Premium II

Expresiones algebraicas importantes

3. **p_t es una función H-1 en y_t** Sea:

$$p_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left[\beta^{t+i} \frac{u_{c_{t+i}}}{u_{c_t}} \right] z_{t+i} \ldots z_(t) y_t = F(y_t)$$

Evaluando la homogeneidad en y_t:

$$F(\lambda y_t) = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left[\beta^{t+i} \frac{u_{c_{t+i}}}{u_{c_t}} \right] z_{t+i} \ldots z_t \lambda y_t = \lambda E_t \sum_{i=0}^{\infty} \left[\beta^{t+i} \frac{u_{c_{t+i}}}{u_{c_t}} \right] z_{t+i} \ldots z_t y_t = \lambda F(y_t)$$

Por tanto:

Homogeneidad

$$p_t = F(\lambda y_t) = \lambda F(y_t)$$

p_t es homogenea de grado uno en y_t. La ecuación del precio se podría escribir así:

$$p_t = \omega y_t$$

Cálculo del Equity Premium I

Cálculo de retornos

1. **Cálculo de ω**
En la ecuación de Euler para las acciones se sustituye $u_{c_t} = c_t^{-\alpha}$, $p_t = \omega y_t$ y $x_{t+1} = c_{t+1}/c_t$ y $z_{t+1} = y_{t+1}/y_t$,

$$1 = \beta E_t \left[\frac{u_{c_{t+1}}}{u_{c_t}}\right]\left(\frac{p_{t+1} + y_{t+1}}{p_t}\right)$$

$$1 = \beta E_t \left[\frac{c_{t+1}}{c_t}\right]^{-\alpha}\left(\frac{p_{t+1} + y_{t+1}}{p_t}\right)$$

$$1 = \beta E_t \left[x_{t+1}\right]^{-\alpha}\left(\frac{\omega y_{t+1} + y_{t+1}}{\omega y_t}\right)$$

$$1 = \beta E_t \left[x_{t+1}\right]^{-\alpha}\left(\frac{(\omega + 1)}{\omega} z_{t+1}\right)$$

$$\frac{\omega}{\omega + 1} = \beta E_t (x_{t+1}^{-\alpha} z_{t+1})$$

$$\omega = \frac{\beta E_t (x_{t+1}^{-\alpha} z_{t+1})}{1 - \beta E_t (x_{t+1}^{-\alpha} z_{t+1})} \tag{14}$$

Cálculo del Equity Premium II

Cálculo de retornos

2. **Cálculo de R^e_{t+1}**

   Por definición, R^e_{t+1}, el retorno de las acciones es:

$$R^e_{t+1} = \frac{p_{t+1} + y_{t+1}}{p_t} \tag{15}$$

   Sustituyendo $p_t = \omega y_t$

$$\begin{aligned}
R^e_{t+1} &= \frac{p_{t+1} + y_{t+1}}{p_t} = \frac{(\omega+1) y_{t+1}}{\omega y_t} = \frac{\omega + 1}{\omega} z_{t+1} \\
E_t(R^e_{t+1}) &= \frac{\omega + 1}{\omega} E_t(z_{t+1}) \\
E_t(R^e_{t+1}) &= \frac{1}{\beta E_t(x_{t+1}^{-\alpha} z_{t+1})} E_t(z_{t+1}) \\
E_t(R^e_{t+1}) &= \frac{E_t(z_{t+1})}{\beta E_t(x_{t+1}^{-\alpha} z_{t+1})} \qquad (16)
\end{aligned}$$

Cálculo del Equity Premium III
Cálculo de retornos

3. **Cálculo de R^f_{t+1}**

De la ecuación de Euler para el bono:

$$1 = \beta E_t \left[\frac{u_{c_{t+1}}}{u_{c_t}} \right] (R^f_{t+1}) \tag{17}$$

Debido a que la covarianza de la tasa de crecimiento del consumo con el retorno del activo libre de riesgo es cero, entonces se cumple que: E(ab) = E(a)E(b).

$$\begin{aligned} 1 &= \beta E_t \left[\frac{u_{c_{t+1}}}{u_{c_t}} \right] E_t(R^f_{t+1}) \\ 1 &= \beta E_t \Big[x_{t+1} \Big]^{-\alpha} E_t(R^f_{t+1}) \\ E_t(R^f_{t+1}) &= \frac{1}{\beta E_t(x_{t+1})^{-\alpha}} \end{aligned} \tag{18}$$

Cálculo del Equity Premium I

Función de distribución Log-normal

Definición: Función de distribución log-normal

Se dice que una variable aleatoria z_t tiene un distribución de probabilidad log-normal si el $ln(z_t)$ se distribuye como una normal.

$$ln(z_t) \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$$

Donde: μ_z y σ_z^2 es la media y la varianza de $ln(z_t)$

1. **Propiedades**
   - $E(z_t) = e^{\mu_z + \sigma^2/2}$
   - Si $w_t \sim N(\mu_w, \sigma_w^2)$, entonces $e^{w_t} \sim LogN(\mu_w, \sigma_w^2)$

   $$E(w_t) = E(e^{w_t})$$

   - $aln(z_t) \sim N(a\mu_z, a^2\sigma_z^2)$

Cálculo del Equity Premium II
Función de distribución Log-normal

- Si $x_t \sim LogN(\mu_x, \sigma_x^2)$, entonces se tiene que:

$$a(lnz_t) + b(lnx_t) \sim N(a\mu_z + b\mu_x, a^2\sigma_z^2 + b^2\sigma_x^2 + 2abCov(lnz_t, lnx_t))$$

2. **Dos resultados previos**
   - $E(z_t^a)$

$$E(z_t^a) = E(e^{lnz_t^a}) = E(e^{alnz_t})$$

Por propiedas (en el bullet 1):

$$E(e^{alnz_t}) = E(alnz_t)$$

$$E(z_t^a) = E(alnz_t) = e^{a\mu_z + a^2\sigma_z^2/2}$$

Cálculo del Equity Premium III

Función de distribución Log-normal

- $E(z_t^a x_t^b)$

$$E(z_t^a x_t^b) = E(e^{ln(z_t^a x_t^b)})$$

$$E(e^{ln(z_t^a x_t^b)}) = E(e^{alnz_t + blnx_t}) = E(alnz_t + blnx_t)$$

$$E(z_t^a x_t^b) = E(alnz_t + blnx_t) = e^{a\mu_z + b\mu_x + \frac{1}{2}(a^2\sigma_z^2 + b^2\sigma_x^2 + 2abCov(lnz_t, lnx_t))}$$

3. **Tres expresiones necesarias para cálculo de rendimientos**
   - $E(z_t)$

$$E(z_t) = e^{\mu_z + \sigma_z^2/2}$$

   - $E(x_t^{-\alpha})$

$$E(x_t^{-\alpha}) = e^{-\alpha\mu_x + \alpha^2\sigma_x^2/2}$$

   - $E(z_t x_t^{-\alpha})$

$$E(z_t x_t^{-\alpha}) = e^{\mu_z - \alpha\mu_x + \frac{1}{2}(\sigma_z^2 + \alpha^2\sigma_x^2 - 2\alpha Cov(lnz_t, lnx_t))}$$

Cálculo del Equity Premium IV

Función de distribución Log-normal

4. **Rendimientos**
   - **Acciones**

$$E_t(R^e_{t+1}) = \frac{E_t(z_{t+1})}{\beta E_t(x^{-\alpha}_{t+1} z_{t+1})}$$

Reemplazando las expresiones anteriores se tiene:

$$E_t(R^e_{t+1}) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha\mu_x - \frac{1}{2}(\alpha^2\sigma^2_x - 2\alpha Cov(lnz_t, lnx_t))} \quad (19)$$

Log del rendimiento - acciones

$$ln[E_t(R^e_{t+1})] = -ln\beta + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}(\alpha^2\sigma^2_x - 2\alpha Cov(lnz_t, lnx_t)) \quad (20)$$

Cálculo del Equity Premium V

Función de distribución Log-normal

- **Bonos**

$$E_t(R^f_{t+1}) = \frac{1}{\beta E_t(x_{t+1})^{-\alpha}}$$

Reemplazando las expresiones anteriores se tiene:

$$E_t(R^f_{t+1}) = \frac{1}{\beta e^{-\alpha\mu_x + \frac{1}{2}(\alpha^2\sigma^2_x)}} \tag{21}$$

Log del rendimiento - bonos

$$ln[E_t(R^f_{t+1})] = -ln\beta + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}(\alpha^2\sigma^2_x) \tag{22}$$

Cálculo del Equity Premium VI

Función de distribución Log-normal

5. **Equity Premium**
   De la diferencia entre la ecuación [20] y [22] se tiene:

Log del Equity Premium

$$ln[E_t(R^e_{t+1})] - ln[E_t(R^f_{t+1})] = \alpha Cov(lnz_t, lnx_t) \tag{23}$$

La prima por acciones depende del coeficiente de aversión al riesgo (α) y de la covarianza de la tasa de crecimiento del consumo con la tasa de crecimiento de los dividendos (o del retorno del activo riesgoso).

Bajo la condición de equilibrio (tasa de crecimiento del consumo es igual a la tasa de crecimiento de los dividendos) se tiene que:

$$x_{t+1} = z_{t+1}$$

Cálculo del Equity Premium VII
Función de distribución Log-normal

Entonces,

$$Cov(lnz_t, lnx_t) = Cov(lnx_t, lnx_t) = Var(ln_x) = \sigma_x^2$$

El "Equity Premium" dependería, además de α, de la varianza de la tasa de crecimiento del consumo.

Cálculo del Equity Premium I
Calibrando los parámetros

Para la calibración de los parámetros se toma los estadísticos hallados por Mehra y Prescott (1985).

Table 4. U.S. Economy Sample Statistics, 1889–1978

Statistic	Value
Risk-free rate, R_f	1.008
Mean return on equity, $E(R_e)$	1.0698
Mean growth rate of consumption, $E(x)$	1.018
Standard deviation of growth rate of consumption, $\sigma(x)$	0.036
Mean equity premium, $E(R_e) - R_f$	0.0618

Cálculo del Equity Premium II

Calibrando los parámetros

Dado estos estadísticos se calcula los siguientes parámetros:

Parámetro	Ecuación o comentario
σ_x^2	$= ln\left(1 + \frac{Var(x)}{[E(x_t)]^2}\right)$
μ_x	$= lnE(x) - \frac{1}{2}\sigma_x^2$
α	Según Mehra y Prescott (1985), α está entre $[0, 10]$
β	Se considera 0.99 (estándar en "RBC Theory")

Cálculo del Equity Premium III

Calibrando los parámetros

Nota de cálculo

- σ_x^2 surge de;

$$\begin{aligned} var(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\ &= e^{2\mu_x + 2\sigma_x^2} - e^{2\mu_x + \sigma_x^2} \\ &= e^{2\mu_x + \sigma_x^2}\left[e^{\sigma_x^2} - 1\right] \\ &= [E(x)]^2\left[e^{\sigma_x^2} - 1\right] \\ \sigma_x^2 &= ln\left(1 + \frac{var(x)}{[E(x)]^2}\right) \end{aligned}$$

- μ_t se despeja luego de tomar logaritmo a $E(x) = e^{\mu_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2}$

Cálculo del Equity Premium I
Resultados

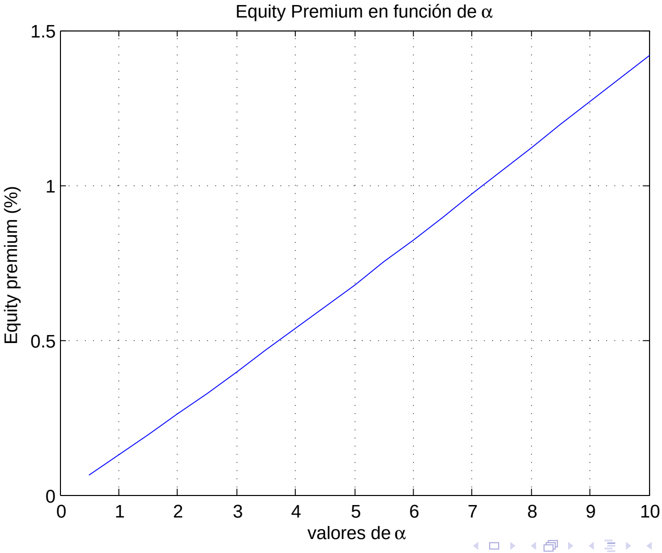
R_t^f	12.7 %
R_t^e	14.1 %
Equity Premium (modelo)	1.42 %
Equity Premium (datos)	6.1 %

Equity premium puzzle

La teoría estándar del AR no puede explicar la magnitud de la prima por activos. La evidencia empírica dice que esta es 6.1 % y la teoría indica que es 1.4 %. A esto se le llama "El enigma de la prima por acciones".
*Cabe resaltar que este enigma es solo "***cuantitativo***", en el sentido que la teoría explica bien las relaciones entre los retornos de los activos y demás variables, pero no captura la totalidad de la diferencia entre rendimientos.*

Cálculo del Equity Premium II

Resultados



Risk free rate puzzle

Risk free rate puzzle (Weil,1989)

Weil (1989), basado en el trabajo de Mehra y Prescott (1985), denominó al alto valor de la tasa de retorno del activo libre de riesgo "el enigma de la tasa libre de riesgo" (**the risk-free rate puzzle**).

Posibles soluciones de los enigmas I

Función de utilidad separable en el tiempo y estado

1. Epstein y Zin (1991) proponen la “función de utilidad esperada generalizada” (FUEG), que permite la independización del coeficiente de aversión y de la elasticidad de sustitución intertemporal.
2. La función de utilidad en forma recursiva es definida:

$$U_t = \left[c_t^{1-\rho} + \beta (E_t U_{t+1}^{1-\alpha})^{(1-\rho)/(1-\alpha)} \right]^{1/1-\rho}$$

3. α representa el coeficiente de aversión alriesgo, mientras que $1/\rho$ es la elasticidad de sustitución intertemporal.
4. Se obtiene la función de utilidad usada por Mehra y Prescott (1985) si $\alpha = \rho$

Posibles soluciones de los enigmas II

Función de utilidad separable en el tiempo y estado

5. El principal beneficio de modelar las preferencia de esta forma (FUEG) es que la actitud del individuo hacia el riesgo y el crecimiento del consumo no es gobernada por el mismo parámetro.
6. La ventaja de este tipo de preferencias es que un coeficiente de aversión al riesgo alto (α) no implica que los agentes deseen suavizar su consumo en el tiempo.
7. La principal dificultad en evaluar estas preferencias es que la función de utilidad esperada en "$t+1$" no es observable, lo cual hace difícil la calibración.
8. Según Kocherlakota (1996), el enigma de la tasa libre de riesgo puede ser resuelto con este tipo de preferencias; en particular, co una combinación de $\beta = 0.99$ y $\alpha \in (0, 18]$
9. Según Mehra (2003) este modelo mejora el enigma de la tasa libre de riesgo pero no resuelve el enigma de la prima por acciones.

Posibles soluciones de los enigmas I

Formación de hábitos

1. Un segundo enfoque para modificar las preferencias fue propuesto por Constantinides (1900), quien incorpora **formación de hábitos** en la función de utilidad.
2. Esta formulación asume que la función de utilidad es afectada no solo por el consumo actual (c_t) sino también por el consumo pasado (c_{t-1}).
3. Estas preferencias captura lo siguiente:
   - La utilidad es función decreciente del consumo pasado
   - La utilidad marginal es una función creciente del consumo pasado
4. La función de utilidad está defina:

$$U(c) = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \frac{(c_{t+i} - \lambda c_{t+i-1})^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Posibles soluciones de los enigmas II
Formación de hábitos

5. El parámetro $\lambda > 0$ captura el efecto de la formación de hábitos (consumo pasado).
6. Este orden de preferencia hace que al agente extremadamente adverso al riesgo de consumo incluso cuando el coeficiente de aversión al riesgo es pequeño.
7. No logra resolver el enigma de "equity premium".
8. Resuelve el enigma de la tasa de interés libre de riesgo debido a que la aversión al riesgo de consumo incrementa la demanda de bonos, reduciendo la tasa libre de riesgo.