Crecimiento Económico y Empleo: keynesianos y neoclásicos:

Modelos Neoclásicos con Optimización del Consumo

Modelo de Generaciones de Diamond

Félix Jiménez

Profesor

ECO 339 Teoría del Crecimiento

Notas de Clase Nº 08

2016

Temario

1. Introducción: supuestos
2. Familias o consumidores: la determinación de las funciones de consumo y de ahorro
3. La relación entre la tasa de ahorro y la tasa de interés: Curvas de indiferencias y los efectos sustitución e ingreso
4. La determinación del equilibrio. Un caso simple de determinación del producto y del capital per cápita del estado estacionario
5. La identidad del ingreso gasto de la economía
6. La evolución del acervo de capital
7. Equilibrio, Regla de Oro e Ineficiencia dinámica
8. Seguridad Social y Acumulación de capital: Sistema de capitalización y sistema de reparto

Modelo de Generaciones de Diamond

Introducción

El *modelo de Ramsey* se basa en el supuesto de agentes que viven un número infinito de períodos.
Este supuesto es equivalente a considerar dinastías que están ligadas unas a otras por altruismo.

El modelo de generaciones sucesivas supone que el horizonte temporal de optimización es finito. *Cada persona vive dos períodos por lo tanto muere*. En cada período hay nuevas personas

Supuestos

1. Empresas

Muchas firmas o empresas idénticas que operan en mercados competitivos, tienen acceso a una función de producción bien comportada (satisface las condiciones de INADA, los factores tienen rendimientos marginales decrecientes y tiene RCE).

$$Y = F(K,L)$$

Modelo de Generaciones de Diamond

Las empresas observan la secuencia de precios $\{w_t, r_t\}$ y deciden la secuencia de demandas de factores $\{L_t, K_t\}$ para maximizar beneficios $F(L_t, K_t) - w_t L_t - r_t K_t$

La función de producción en su forma intensiva:

$$y = f(k) \quad \text{donde:} \quad y = \frac{Y}{L} \qquad k = \frac{K}{L}$$

Por el teorema de Euler, como se opera en mercados competitivos:

$$r_t = f'(k_t)$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

La firma alquila K y L hasta que sus productos marginales se igualen a sus precios. No hay depreciación: $\delta = 0$

En el período 0 hay un stock de capital K_0 y cada viejo tiene una parte igual de K_0. En el periodo t+1 el stock de capital es igual al ahorro de cada joven multiplicado por L_t:

$$K_{t+1} = L_t(w_t - C_{1t})$$

Modelo de Generaciones de Diamond

2. Familias o Consumidores (son idénticos)

La unidad de decisión es el individuo. Cada uno vive dos períodos. En el primero (es joven) trabaja y gana un ingreso; con su ingreso, consume y ahorra. En el segundo (es viejo) no trabaja y consume su ahorro. Por lo tanto, ahorran en el primer período y obtienen un retorno igual a la tasa de interés.

En el período t nacen L_t personas. La población de individuos crece cada período a la tasa n. Entonces:

$$L_t = (1+n)L_{t-1}$$

Periodo	t+1	t+2	t+3	t+4
Joven	$L_{t+1}=(1+n)L_t$	$L_{t+2}= (1+n)^2L_t$	$L_{t+3}= (1+n)^3L_t$	$L_{t+4}= (1+n)^4L_t$
Viejo	L_t	L_{t+1}	L_{t+2}	L_{t+3}

Cada individuo maximiza su bienestar eligiendo la mejor asignación de recursos entre todas las que puede financiar dada su restricción presupuestaria:

usos del ingreso = fuentes del ingreso

-

Modelo de Generaciones de Diamond

Comportamiento de un joven del período t: trabaja y gana un salario w en t y usa su ingreso en t para consumir C_{1t} y ahorrar. Cada joven es idéntico

Comportamiento de un viejo de periodo t en el periodo t+1: tiene su ahorro y los respectivos intereses. Consume C_{2t+1}. Después de su consumo, el viejo muere. Cada viejo es idéntico.

Así, el consumo del viejo en t+1 estará dado por:

$$C_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t - C_{1t})$$

Nótese que: $C_{1t} + S_t = w_t$

Reordenando se obtiene su restricción presupuestaria:

$$C_{1t} + \frac{C_{2t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t$$

Nota:
C_{ij}: i representa período de vida; j representa tiempo; i =1,2 por cada generación; j=0,1,…,t,… para todas las generaciones. Por ejemplo C_{2t+1} es el consumo de generación nacida en t durante su 2do período de vida (es decir, es el consumo de los viejos).

Modelo de Generaciones de Diamond

Las familias tienen funciones de utilidad, μ(C), estrictamente cóncavas. En particular se supone que:

$$\mu(C) = \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}$$

donde θ>0; si θ=1, $\mu(C) = \ln C$

Nota: Ver mi libro pág. 173. Por la regla de L'Hôpital-Bernoulli:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{\theta \to 1} \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} = \lim_{\theta \to 1} \frac{-C^{1-\theta} \ln C}{-1} = \ln C$$

La utilidad del ciclo vital (intertemporal) será:

$$\mu_t = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho} \frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}$$

donde *ρ* es la tasa de descuento subjetiva.

Modelo de Generaciones de Diamond

Utilizaremos el lagrangiano para determinar el *plan de consumo óptimo*.

$$\underset{(C_{1t}, C_{2t+1})}{Max} \; L = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda\left[w_t - \left(C_{1t} + \frac{C_{2t+1}}{1+r_{t+1}}\right)\right]$$

Condiciones de Primer Orden

(1) $$\frac{\partial L}{\partial C_{1t}} = C_{1t}^{-\theta} - \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_{1t}^{-\theta} = \lambda$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial C_{2t}} = \frac{1}{1+\rho} C_{2t+1}^{-\theta} - \frac{\lambda}{1+r_{t+1}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{1+\rho} C_{2t+1}^{-\theta} = \frac{\lambda}{1+r_{t+1}}$$

Las familias toman como dados w_t y r_{t+1} y escogen C_t y S_t (por lo tanto, C_{2t+1}) para maximizar su utilidad sujeta a su restricción presupuestaria

De (1) y (2) se obtiene:

(3) $$\frac{C_{2t+1}}{C_{1t}} = \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

Esta es la Ecuación de Euler en el modelo de Diamond

Modelo de Generaciones de Diamond

Para obtener la demanda de consumo, reemplazamos ecuación de Euler (3)

en la restricción presupuestaria: $C_{1t}+\dfrac{C_{2t+1}}{1+r_{t+1}}=w_t$

$$C_{1t}+\frac{C_{2t+1}}{C_{1t}}\frac{1}{1+r_{t+1}}C_{1t}=w_t$$

$$C_{1t}+\frac{1}{1+r_{t+1}}\left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{\theta}}C_{1t}=w_t$$

$$C_{1t}+\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}C_{1t}=w_t$$

$$C_{1t}\left(\frac{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}+(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}\right)=w_t$$

(4) $$C_{1t}=\left(\frac{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}+(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}\right)w_t$$

Demanda óptima de consumo, como función de los parámetros, tasa de interés e ingreso

Lo que está entre paréntesis es menor que la unidad; por lo tanto, el agente consume una fracción de su ingreso de trabajo durante el primer período y la fracción restante la ahorra.

w_t es el salario por trabajador (unidad de trabajo).

Modelo de Generaciones de Diamond

La *tasa de ahorro* se obtiene utilizando la definición de ahorro

(5) $$S_t = w_t - \left(\frac{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} \right) w_t$$

Derivando la función ahorro con respecto al ingreso, se obtiene la tasa de ahorro o la propensión marginal a ahorra:

$$s_w = \frac{\partial S_t}{\partial w_t} = \left(\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} \right)$$

Es la *tasa de ahorro* de un agente; es decir, su propensión a ahorrar en un período: $0<s_w<1$

$$s_w = s(r_{t+1}) = \left(\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} \right)$$

Modelo de Generaciones de Diamond

¿Cuál será la respuesta de la tasa de ahorro s_w cuando aumenta (o disminuye) la tasa de interés *r* ?

Se deriva la tasa de ahorro con respecto a la tasa de interés

$$s_r = \frac{\partial s(r_{t+1})}{\partial r_{t+1}} = \frac{\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)(1+r_{t+1})^{\frac{1-2\theta}{\theta}}(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}{\left[(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right]^2}$$

El valor de esta derivada depende del valor de θ. Hay tres casos:

$$Caso\,1: \quad s_r = 0 \quad si \quad \theta = 1 \quad \Rightarrow \frac{1-\theta}{\theta} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial s}{\partial r_{t+1}} = 0$$

Se cancelan los efectos sustitución e ingreso. Si *s* no cambia, no cambia el consumo C_{1t}

Modelo de Generaciones de Diamond

$$Caso\ 2: \quad s_r > 0 \quad si \quad \theta < 1 \quad \Rightarrow \frac{1-\theta}{\theta} > 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial r_{t+1}} > 0$$

La tasa de ahorro aumenta cuando la tasa de interés aumenta, y viceversa. El consumo del joven C_{1t} disminuye cuando la tasa de interés aumenta.
El efecto sustitución domina al efecto ingreso.

$$Caso\ 2: \quad s_r < 0 \quad si \quad \theta > 1 \quad \Rightarrow \frac{1-\theta}{\theta} < 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial r_{t+1}} < 0$$

La tasa de ahorro disminuye cuando la tasa de interés aumenta, y aumenta en caso contrario. El consumo del joven C_{1t} aumenta cuando la tasa de interés aumenta.
El efecto ingreso domina al efecto sustitución.

Para graficar y analizar los efectos ingreso y sustitución de estos tres casos ayúdese con lo desarrollado en las diapositivas 12 y 13

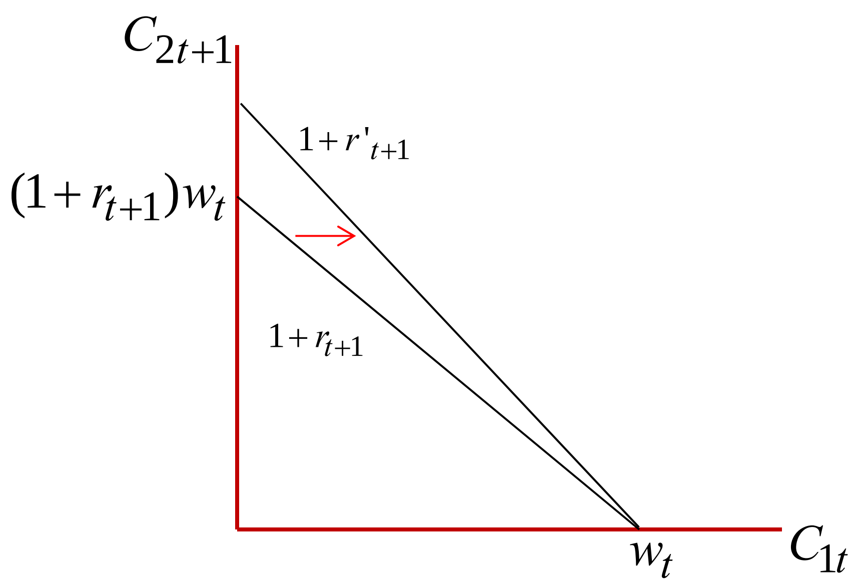
Modelo de Generaciones de Diamond

¿Cómo afecta la variación de r a la restricción presupuestaria?

Recuérdese que la restricción presupuestaria es:

$$C_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t - C_{1t})$$

Un aumento de la tasa de interés eleva la pendiente de la restricción:



Félix Jiménez
Departamento de Economía

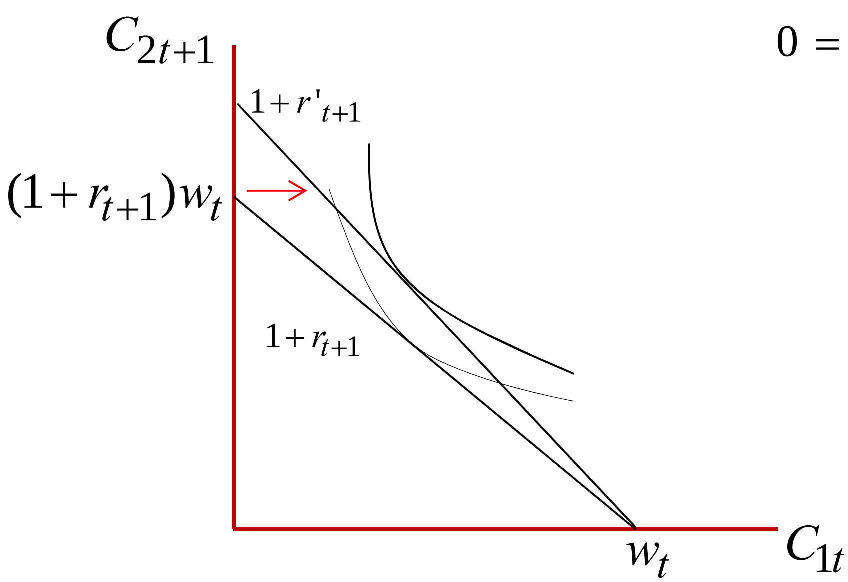
Modelo de Generaciones de Diamond

Las Curvas de Indiferencia

La función de utilidad es:

$$\mu_t = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}$$

Se diferencia la función de utilidad y se iguala a cero. Esta curva se grafica en el mismo plano donde se grafica la restricción presupuestaria:



$$0 = d\mu_t = C_{1t}^{-\theta}dC_{1t} + \frac{1}{1+\rho}C_{2t+1}^{-\theta}dC_{2t+1}$$

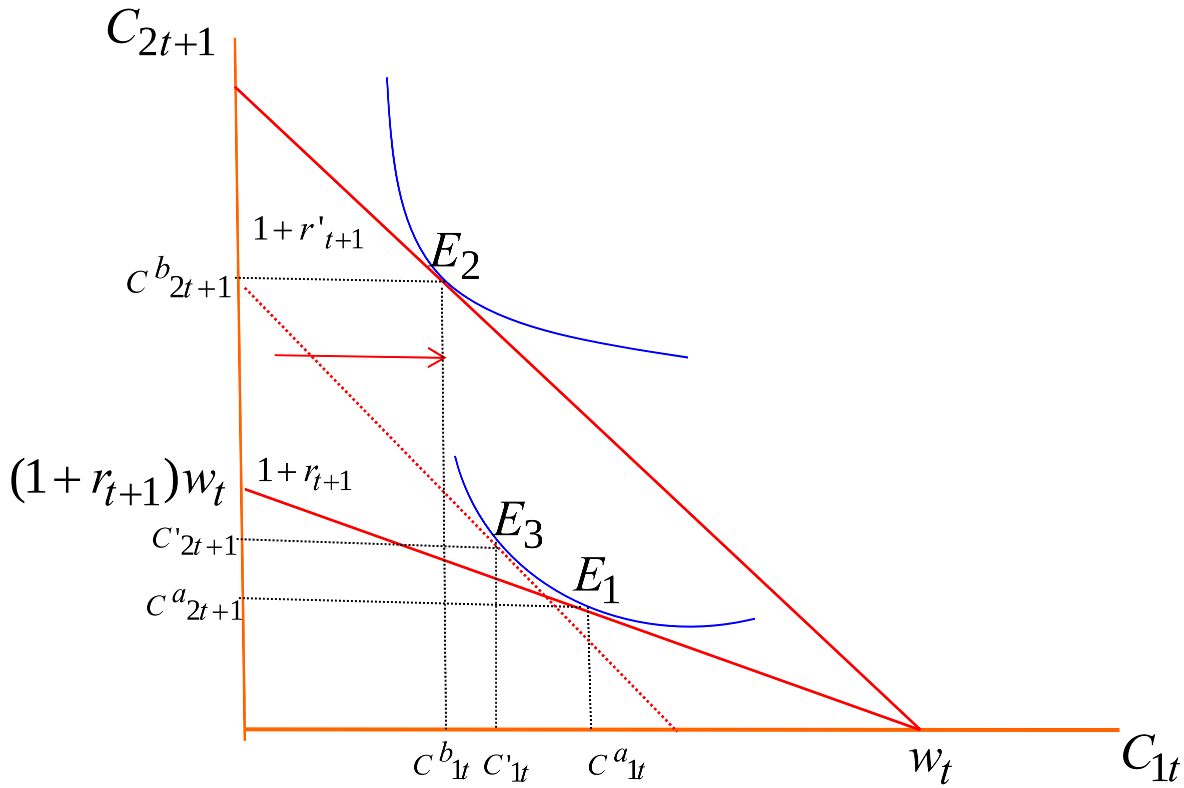
La pendiente de la curva de indiferencia es:

$$\frac{dC_{2t+1}}{dC_{1t}} = -(1+\rho)\frac{C_{2t+1}^{\theta}}{C_{1t}^{\theta}}$$

¡Graficar las curvas de indiferencia!

Modelo de Generaciones de Diamond

Las Curvas de Indiferencia



El paso de E1 a E3 es el efecto sustitución y el paso del E3 a E2 es el efecto ingreso. El efecto sustitución es mayor que el efecto ingreso.

Modelo de Generaciones de Diamond

El Equilibrio

Debemos hallar el valor de equilibrio de k_t. Con este valor podemos determinar los valores de r_t y w_t. El stock total de capital en t+1 está dado por el ahorro de la generación (ahora ya vieja) nacida en t

$$K_{t+1} = s(r_{t+1})L_t w_t \qquad (6)$$

$s(r_{t+1})w_t$ es el monto de ahorro por agente y hay L_t agentes nacidos en el período t.

$s(r_{t+1})L_t w_t$ es el ahorro total, pues todos los agentes son iguales

Nótese que L crece a la tasa n

$$L_{t+1} = (1+n)L_t = (1+n)^{t+1} L_0$$

Modelo de Generaciones de Diamond

Para obtener el capital por unidad de trabajo, dividimos ambos lados de la ecuación (6) por L_{t+1}:

$$k_{t+1} = s(r_{t+1})w_t \frac{L_t}{L_{t+1}} \Rightarrow k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)}\left(\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}\right)w_t$$

(7) $$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)}\left(\frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}\right)[f(k_t) - k_t f'(k_t)]$$

En forma simplificada: $k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)} s(f'(k_{t+1}))[f(k_t) - k_t f'(k_t)]$

Donde: $w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$

La ec. (7) es una ecuación no lineal en diferencias en k_t. Para cada valor de k_t, la ecuación implícitamente determina el valor de equilibrio de k_{t+1}.

Para el estado estacionario, debemos encontrar el valor de k* tal que si k_t=k*, entonces k_{t+1}=k*.

Modelo de Generaciones de Diamond

Para $\mu(C)=\dfrac{C^{1-\theta}}{1-\theta}$ y $f(k)=k^{\alpha}$, donde $\alpha \in (0,1)$

La ecuación (7) adopta la forma siguiente:

(7a) $$k_{t+1}=\frac{1}{1+n}\,\frac{(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}+(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}(1-\alpha)k_t^{\alpha}$$

Donde:

$$s(f'(k_{t+1}))=\frac{(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}+(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}$$

$$f(k_t)-k_t f'(k_t)=(1-\alpha)k_t^{\alpha}$$

Modelo de Generaciones de Diamond

Un Caso Simple

(10) $$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\frac{1}{2+\rho}(1-\alpha)k_t^{\alpha}$$

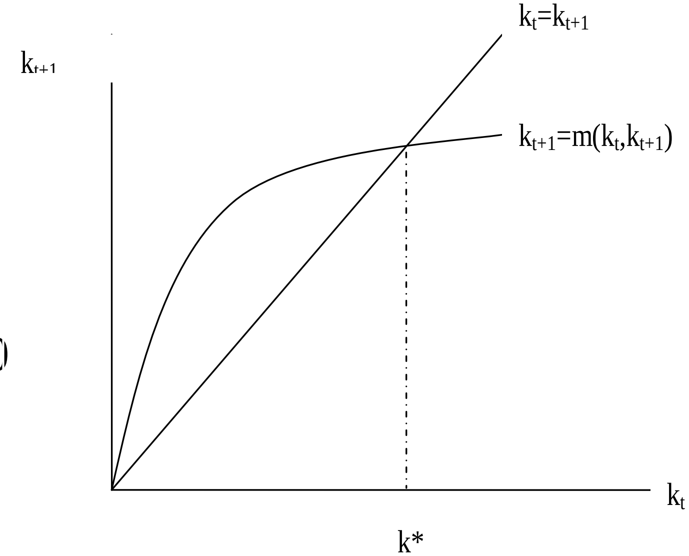
Supuestos: Función de producción Cobb-Douglas

$\theta = 1 \Rightarrow \mu(c) = \ln(c)$

¿Cuál es la relación entre k_t y k_{t+1}?

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{1}{1+n}\frac{1}{2+\rho}\alpha(1-\alpha)k_t^{\alpha-1} > 0$$

$$\frac{\partial^2 k_{t+1}}{\partial k_t^2} = \frac{1}{1+n}\frac{1}{2+\rho}\alpha(1-\alpha)(\alpha-1)k_t^{\alpha-2} < 0$$



Modelo de Generaciones de Diamond

El Estado Estacionario se da cuando el capital per cápita es el mismo en los períodos.

Imponiendo $k_{t+1}=k_t=k^*$, se obtiene: $k^* = \frac{1}{1+n}\frac{1}{2+\rho}(1-\alpha)k^{\alpha}$

(11) $$k^* = \left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(2+\rho)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(12) $$y^* = \left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(2+\rho)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

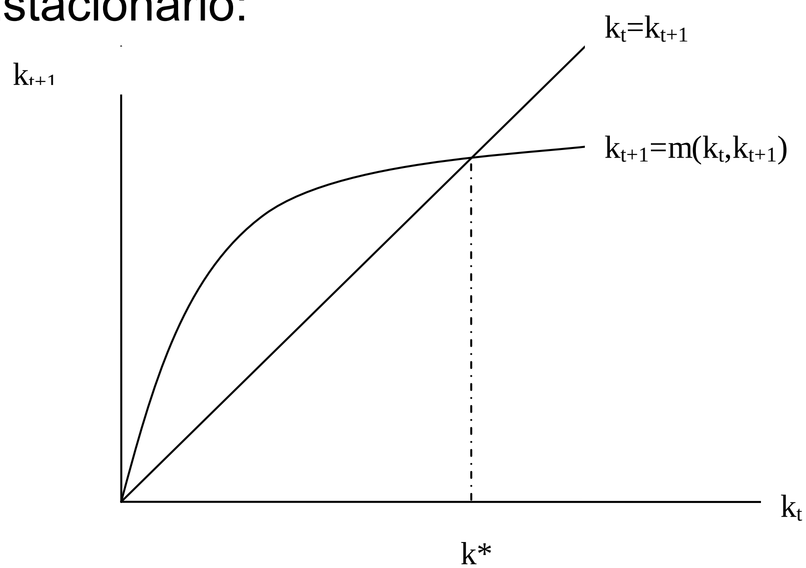
El supuesto θ=1 no es inocuo, pues implica que la tasa de ahorro es independiente de la tasa de interés. El consumo, el ahorro y la producción son constantes en el estado estacionario

k^* es un equilibrio estable: a) Si $k^*<k_t$ entonces $k_{t+1}<k_t$
b) Si $k^*>k_t$ entonces $k_{t+1}>k_t$

El movimiento es en la dirección del valor del estado estacionario.

Modelo de Generaciones de Diamond

Gráfico del Estado Estacionario:



El estado estacionario parece al del modelo de Solow. Sin embargo, en el modelo de Solow:

- la tasa de ahorro es constante
- la tasa de interés es constante
- la inversión neta es cero

En el modelo de Diamond los dos primeros son endógenos y están asociados a la conducta optimizadora de los agentes.

Modelo de Generaciones de Diamond

La identidad ingreso gasto o producción igual demanda agregada

$$K_{t+1} = s(r_{t+1})L_t w_t$$

donde $s(r_{t+1})L_t w_t$ es el ahorro total, en t de los jóvenes.

La inversión bruta coincide con la inversión neta porque no hay deprecación.

$$K_{t+1} - K_t = I_t = S_t$$
$$K_{t+1} - K_t = s(r_{t+1})L_t w_t - K_t$$

El lado derecho de la ecuación es el ahorro neto (ahorro de los jóvenes nacidos en t y el ahorro de los viejos nacidos en t-1). En realidad los viejos des-ahorran. Hay que mostrar que Y=C+I.

$$K_{t+1} = s(r_{t+1})L_t w_t$$
$$K_{t+1} - K_t = s(r_{t+1})L_t w_t - s(r_t)L_{t-1}w_{t-1}$$
$$(K_{t+1} - K_t) + L_t(w_t - s(r_{t+1})w_t) = L_t w_t - s(r_t)L_{t-1}w_{t-1}$$

Modelo de Generaciones de Diamond

La identidad ingreso gasto o producción igual demanda agregada

$$(K_{t+1} - K_t) + L_t(w_t - s(r_{t+1})w_t) = L_t w_t - s(r_t)L_{t-1}w_{t-1}$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación anterior es igual a:

$$s(r_t)L_{t-1}w_{t-1} + L_{t-1}s(r_t)r_t w_{t-1} - L_{t-1}s(r_t)r_t w_{t-1} = s(r_t)L_{t-1}w_{t-1}$$

$$s(r_t)L_{t-1}w_{t-1}(1 + r_t) - L_{t-1}s(r_t)r_t w_{t-1} = s(r_t)L_{t-1}w_{t-1}$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$(K_{t+1} - K_t) + L_t(w_t - s(r_{t+1})w_t) = L_t w_t - s(r_t)L_{t-1}w_{t-1}(1 + r_t) + L_{t-1}s(r_t)r_t w_{t-1}$$

$$(K_{t+1} - K_t) + L_t[w_t - s(r_{t+1})w_t] + s(r_t)L_{t-1}w_{t-1}(1 + r_t) = L_t w_t + L_{t-1}s(r_t)r_t w_{t-1}$$

Félix Jiménez
Departamento de Economía

Modelo de Generaciones de Diamond

La identidad ingreso gasto o producción igual demanda agregada

De la restricción presupuestaria se obtiene el consumo agregado de los jóvenes y los viejos:

$$L_t[w_t - s(r_{t+1})w_t] = L_t C_{1t} = \overline{C}_{1t}$$

$$s(r_t)L_{t-1}w_{t-1}(1+r_t) = L_{t-1}C_{2t} = \overline{C}_{2t}$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$(K_{t+1} - K_t) + \overline{C}_{1t} + \overline{C}_{2t} = L_t w_t + L_{t-1}s(r_t)r_t w_{t-1}$$

Beneficios agregados en t de los ahorros que se hicieron en t-1.

$$B_t = L_{t-1}s(r_t)r_t w_{t-1}$$

Por lo tanto, el producto agregado es la suma de los ingresos de los factores. La demanda agregada es igual a la suma del consumo más la inversión:

$$I_t + \overline{C}_t = Y_t$$

Modelo de Generaciones de Diamond

La evolución del acervo del capital per cápita

La ecuación general del stock de capital per cápita es:

$$K_{t+1} = s(r_{t+1})L_t w_t$$

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = s(r_{t+1})\frac{L_t}{L_{t+1}} w_t$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n} s(r_{t+1}) w_t$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)} s(f'(k_{t+1}))[f(k_t) - k_t f'(k_t)]$$

Haciendo del ahorro total per cápita una función de r_{t+1} y w_t, tenemos:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)} s_t(f'(k_{t+1}, w_t)$$

Modelo de Generaciones de Diamond

La evolución del acervo del capital per cápita

¿Cómo varía k_{t+1} cuando varía k_t?:

$$(1+n)\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{ds_t}{dw_t}\frac{dw_t}{dk_t} + \frac{ds_t}{dr_{t+1}}\frac{dr_{t+1}}{dk_t}$$

$$(1+n)\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = s_w[f'(k_t) - k_t f''(k_t) - f'(k_t)] + s_r\frac{dr_{t+1}}{dk_t}$$

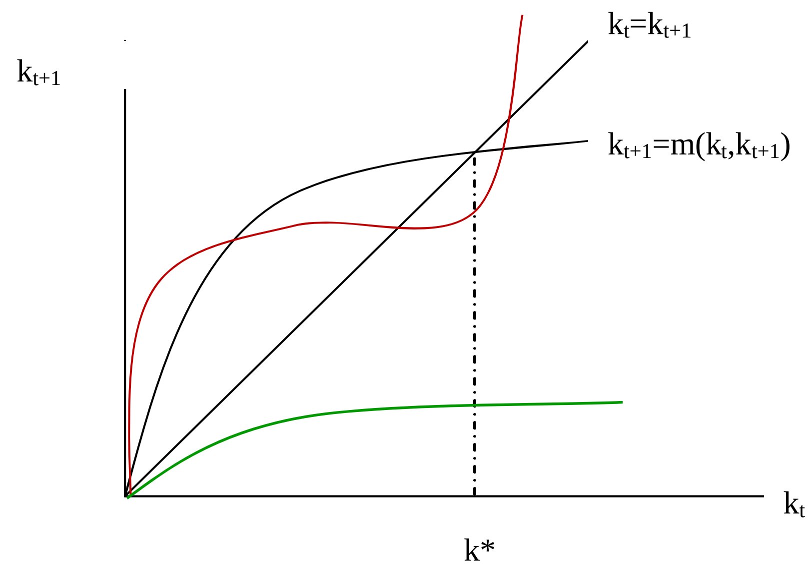
$$(1+n)\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = -s_w[k_t f''(k_t)] + s_r f''(k_{t+1})\frac{dk_{t+1}}{dk_t}$$

$$[(1+n) - s_r f''(k_{t+1})]\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = -s_w[k_t f''(k_t)]$$

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{-s_w[k_t f''(k_t)]}{[(1+n) - s_r f''(k_{t+1})]}$$

Modelo de Generaciones de Diamond

La evolución del acervo del capital per cápita



$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\frac{-s_w[k_t f''(k_t)]}{[(1+n)-s_r f''(k_{t+1})]}$$

El numerador es mayor que cero, pero el denominador tiene un signo ambiguo. Puede haber equilibrio múltiple o no existir equilibrio con k positivo.

Modelo de Generaciones de Diamond

La evolución del acervo del capital per cápita

Para garantizar un equilibrio con capital positivo hay que poner restricciones o a la tecnología o a las preferencias.

Ya vimos el caso de un equilibrio estable (diapositiva 17) a partir de dos restricciones

La siguiente ecuación esta formulada alrededor del estado estacionario:

$$\left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k_t=k^*} = \frac{-s_w[k^* f''(k^*)]}{[(1+n)-s_r f''(k^*)]} = b$$

Una aproximación lineal de la evolución del acervo del capital per cápita sería:

$$k_{t+1} = k^* + b(k_t - k^*)$$

$$k_{t+1} - k^* = b(k_t - k^*)$$

Modelo de Generaciones de Diamond

La evolución del acervo del capital per cápita

Si hacemos $\tilde{k}_t = (k_t - k^*)$, entonces: $\tilde{k}_{t+1} = b\tilde{k}_t$

Iterando, se tiene:

$$\tilde{k}_{t+1} = b(b\tilde{k}_{t-1}) = b^2\tilde{k}_{t-1}$$
$$\tilde{k}_{t+1} = b^3\tilde{k}_{t-2}$$
$$\tilde{k}_{t+1} = b^4\tilde{k}_{t-3}$$
$$\vdots$$
$$\tilde{k}_{t+1} = b^{t+1}\tilde{k}_0$$

Si 0 < b < 1, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{k}_{t+1} = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} k_{t+1} = k^*$$

Félix Jiménez
Departamento de Economía

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Modelo de Generaciones de Diamond

La evolución del acervo del capital per cápita

Si se cumple que 0 < b < 1 (el ahorro no es influido negativamente por los cambios en la tasa de interés), entonces cada generación estará mejor que las anteriores porque la acumulación del capital per cápita eleva la productividad marginal del trabajo y, por lo tanto, eleva los salarios.

Equilibrio, Regla de Oro e Ineficiencia Dinámica

El equilibrio analizado es de una economía descentralizada. La asignación Este equilibrio no es un optimo de Pareto. La economía descentralizada no conduce a la misma asignación que la del planificador central que cumple la REGLA DE ORO. Por esta razón se puede decir que el equilibrio competitivo no es dinámicamente eficiente.

El caso del modelo de Ramsey, el capital del estado estacionario no coincide tampoco con el capital de la REGLA DE ORO (es menor). La razón es que esta regla de oro modificada toma en cuenta la impaciencia de los consumidores representada por la tasa de preferencia intertemporal .

Modelo de Generaciones de Diamond

Equilibrio, Regla de Oro e Ineficiencia Dinámica

Partamos de la identidad ingreso gasto:

$$(K_{t+1} - K_t) + \overline{C}_{1t} + \overline{C}_{2t} = Y_t$$

$$(K_{t+1} - K_t) + L_t C_{1t} + L_{t-1} C_{2t} = Y_t$$

Dividimos ambos miembros entre L_t:

$$(1+n)k_{t+1} - k_t + C_{1t} + (1+n)^{-1} C_{2t} = f(k_t)$$

Hacemos el consumo per cápita agregado en t:

$$C_t = C_{1t} + (1+n)^{-1} C_{2t}$$

Se obtiene:

$$(1+n)k_{t+1} - k_t + C_t = f(k_t)$$

Modelo de Generaciones de Diamond

Equilibrio, Regla de Oro e Ineficiencia Dinámica

En el estado estacionario el consumo per cápita agregado es constante:

$$(1+n)k^* - k^* + C^* = f(k^*)$$

El efecto de un cambio en k* sobre sobre C*, es igual a:

$$\frac{dC^*}{dk^*} = f'(k^*) - n$$

Este efecto puede ser mayor, menor o igual a cero. Si es igual a cero se maximiza el consumo per cápita agregado.

$$\frac{dC^*}{dk^*} = f'(k^*) - n = 0$$

$$f'(k_{RO}) = n$$

Modelo de Generaciones de Diamond

Equilibrio, Regla de Oro e Ineficiencia Dinámica

El valor de k_{RO} que maximiza el consumo per cápita agregado solo por casualidad coincidirá con el capital k* del estado estacionario que satisface la ecuación:

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)} s_t(f\acute{}(k_{t+1}, w_t)$$

Si el capital k* del estado estacionario que satisface la ecuación anterior es mayor es mayor que k_{RO} , entonces una disminución del acervo de capital aumenta el nivel del consumo per capita del estado estacionario.

El equilibrio competitivo es en este modelo dinámicamente ineficiente.

Modelo de Generaciones de Diamond

Seguridad Social y acumulación de capital

El equilibrio en la economía descentralizada, con una función de producción bien comportada, es:

$$u'(w_t - s_t) = \frac{1}{1+\rho}(1+r_{t+1})u'[(1+r_{t+1})s_t]$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)} s[w_t, r_{t+1}]$$

Seguridad Social de capitalización (completamente fondeado)

Las contribuciones de los jóvenes en t se invierten y regresan con interés en t+1 a los que son viejos en ese período. Si T_t es la aportación del joven en t y P_t es el pago que recibe el viejo cuándo se retira:

$$P_{t+1} = (1+r_{t+1})T_t$$

Modelo de Generaciones de Diamond

El equilibrio ahora será:

$$u'(w_t - s_t - T_t) = \frac{1}{1+\rho}(1+r_{t+1})u'[(1+r_{t+1})(s_t + T_t)]$$

$$(1+n)k_{t+1} = s_t + T_t$$

Siempre que $T_t < (1+n)k_{t+1}$, un sistema completamente fondeado no tiene efectos sobre el ahorro y la acumulación de capital. $s_t + T_t$ es igual a s_t sin el sistema de seguridad social completamente fondeado.

Seguridad Social de Reparto (*Pay-as-you-go*)

En este caso se transfiere las contribuciones de los jóvenes a los viejos. En *t+1* hay L_{t+1} jóvenes y cada uno transfiere las contribuciones T_{t+1}. Por lo tanto, el total de transferencias es $L_{t+1}T_{t+1}$. Pero hay solo L_1 viejos y cada uno recibe:

$$\frac{L_{t+1}T_{t+1}}{L_t} = (1+n)T_{t+1}$$

Es decir: $P_{t+1} = (1+n)T_{t+1}$

Modelo de Generaciones de Diamond

El equilibrio en la economía descentralizada ahora será:

$$u'(w_t - s_t - T_t) = \frac{1}{1+\rho}(1+r_{t+1})u'[(1+r_{t+1})s_t + (1+n)T_{t+1}]$$

$$(1+n)k_{t+1} = s_t$$

La tasa de rendimiento de las aportaciones es *n* que es diferente de *r*. Se puede pagar *n* como rendimiento porque en cada período existen más personas activas trabajando que hacen sus aportes a la seguridad social.

Como es un sistema de pura transferencia de jóvenes a viejos, los recursos no se invierten (se gastan en pagar a los viejos). Por lo tanto, la única fuente de ahorro en la economía es el ahorro de los jóvenes. Se reduce el ahorro privado dependiendo de si *n* es mayor, igual o menor que *r*.

Modelo de Generaciones de Diamond

Supongamos que hay un único equilibrio estable con k positivo:

$$0 < \frac{dk_{t+1}}{dk_t} < 1_t$$

En el caso del sistema de reparto:

$$(1+n)k_{t+1} = s[w_t(k_t), r_{t+1}(k_{t+1}), T_t]$$

Diferenciando k_{t+1} con respecto a T_t:

$$\frac{dk_{t+1}}{dT_t} = \frac{\frac{\partial s_t}{\partial T_t}}{1+n-s_r f''(k_{t+1})}$$

El numerador es menor que cero y el denominador es positivo dado el supuesto de la estabilidad. Por lo tanto un aumento e la contribución desplaza la curva de ahorro hacia abajo en el plano (k_t, k^{t+1}).