CRECIMIENTO ECONÓMICO

SESIÓN: La difusión de la tecnología

Profesor: Miguel Casares

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

ÍNDICE

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA

La difusión de la tecnología proporciona una motivación para predecir un patrón de convergencia entre las economías.

Utilizamos una extensión al modelo de variedades de bienes intermedios (sesión 9), **con dos países diferentes**, para analizar los efectos sobre el crecimiento económico de la difusión de las innovaciones tecnológicas a través de la copia o imitación de estas innovaciones.

El mundo real está lleno de experiencias positivas de desarrollo económico basadas en la absorción de conocimientos tecnológicos externos:

- Hong-Kong o Singapur han basado su fuerte crecimiento económico en la rápida adaptación de tecnologías punteras en la producción de productos electrónicos y servicios financieros.
- China o México han copiado tecnologías de producción de manufacturas ya empleadas anteriormente en Hong-Kong y EEUU, respectivamente.
- Isla Mauricio ha desarrollado una floreciente industria textil y el turismo con inversión extranjera proveniente de EEUU, Reino Unido, Francia e India.

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA

Vamos a presentar un modelo con distintas variedades de bienes intermedios y dos economías diferenciadas, basado en el trabajo de Barro y Sala-i-Martin (1997, *Journal of Economic Growth*).

Modelo con 2 países.

El comportamiento de las empresas innovadoras del país 1 (líder) es idéntico al analizado en la sesión 9.

En el país 2, las empresas van a imitar a las del país líder, destinando recursos a copiar la tecnología puntera que han desarrollado las empresas del país líder → difusión de la tecnología.

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – COMPORTAMIENTO DE LOS INNOVADORES EN EL PAÍS LÍDER

Si recordamos la función de producción de la sesión 9 (modelo con variedades de bienes intermedios) y la adaptamos al país 1 (líder), con un subíndice 1 como notación, tenemos:

$$Y_{1i} = A_1 L_{1i}^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N_1} X_{1ij}^{\alpha}$$

donde $A_1 > 0, 0 \leq \alpha \leq 1$ y X_{1ij} es la cantidad del bien intermedio j utilizado por la empresa i en el país 1. Agregando la producción entre todas las empresas del país 1 y calculando su población activa como $L_1 = \sum_i L_{1i}$, nos queda la función de producción agregada

$$Y_1 = A_1 L_1^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N_1} X_{1j}^{\alpha}$$

El coste de producción sigue siendo una unidad de producto. El precio de venta en monopolio se determina con el criterio de maximización del beneficio que, como ya se explicó en la sesión 9, para todas las variedades es

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – COMPORTAMIENTO DE LOS INNOVADORES EN EL PAÍS LÍDER

$$P_1 = 1/\alpha$$

con un margen unitario sobre el coste de producción positivo $\frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha} > 0$. Sustituyéndolo en la demanda de bien intermedio óptima para cada variedad, $X_{1j} = L_1 \left(\frac{A\alpha}{P_1}\right)^{1/(1-\alpha)}$, obtenemos la cantidad total de cada bien intermedio utilizada por las empresas que producen el bien final

$$X_{1j} = X_1 = (A_1)^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2/(1-\alpha)} L_1$$

que insertándola en la función de producción agregada nos da una relación lineal entre producción agregada y número de variedades (progreso tecnológico endógeno)

$$Y_1 = A_1 L_1^{1-\alpha} N_1 \left((A_1)^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2/(1-\alpha)} L_1\right)^{\alpha}$$

$$Y_1 = A_1^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} L_1 N_1$$

El producto medio por trabajador también es proporcional al número de variedades

$$y_1 \equiv \frac{Y_1}{L_1} = A_1^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} N_1$$

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – COMPORTAMIENTO DE LOS INNOVADORES EN EL PAÍS LÍDER

Todas las empresas innovadoras del país 1 alcanzan el mismo beneficio, que puede escribirse como el margen de monopolio multiplicado por la cantidad de bienes intermedios vendida por cada empresa

$$\pi_{1j} = \pi_1 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) X_1 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) (A_1)^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2/(1-\alpha)} L_1$$

En equilibrio, la rentabilidad de los activos financieros (bonos, préstamos) coincide con la rentabilidad de las empresas innovadoras

$$r_1 = \frac{\pi_1 + \dot{V}_1}{V_1}$$

Recuperamos el supuesto simplificador de un coste de I+D constante, $\eta_1 > 0$, lo que implica la condición de libre entrada

$$V_1 = \eta_1$$

y una variación nula para el valor de las empresas innovadoras a lo largo del tiempo, $\dot{V}_1 = 0$. Con una inversión requerida en I+D constante, η_1, el tipo de interés de equilibrio es

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – COMPORTAMIENTO DE LOS INNOVADORES EN EL PAÍS LÍDER

$$r_1 = \frac{\pi_1}{\eta_1}$$

y colocando la expresión del beneficio por periodo

$$r_1 = \frac{\pi_1}{\eta_1} = \left(\frac{L_1}{\eta_1}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(A_1)^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}$$

Finalmente, la habitual ecuación dinámica del consumo (basada en el ejercicio de optimización de los hogares) es

$$\frac{\dot{C}_1}{C_1} = \frac{1}{\theta}(r_1 - \rho)$$

con lo que la tasa de crecimiento del consumo es (para una población activa fija L_1) constante e igual a

$$\gamma_{C_1} \equiv \frac{\dot{C}_1}{C_1} = \frac{1}{\theta}\left(\left(\frac{L_1}{\eta_1}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(A_1)^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right)$$

Las tasas de crecimiento del consumo, la producción de bienes finales, la producción de bienes intermedios y el número de variedades son iguales entre sí, $\gamma_{C_1} = \gamma_{Y_1} = \gamma_{X_1} = \gamma_{N_1}$ y constantes en todos los periodos (EE) :

$$\gamma_1 = \frac{1}{\theta}\left(\left(\frac{L_1}{\eta_1}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(A_1)^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right)$$

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – COMPORTAMIENTO DE LOS IMITADORES DEL PAÍS SEGUIDOR

Productores del bien final

La función de producción agregada del país seguidor (en el que las empresas productoras de bienes intermedios van a copiar la tecnología puntera desarrollada en el país líder) es la misma que para el país líder

$$Y_2 = A_2 L_2^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N_2} X_{2j}^{\alpha}$$

donde permitimos un parámetro de tecnología y un tamaño de la población específicos para el país, A_2 y L_2, además de observar cómo N_2 es el número de productos intermedios de los que dispone el país 2 e inicialmente suponemos que $N_2(0) < N_1(0)$ porque son un subconjunto de los bienes conocidos en el país 1.

Las condiciones de primer orden de los productores del bien final del país 2 implican la siguiente cantidad óptima de bienes intermedios demandados dependiendo de su precio

$$X_{2j} = L_2 (A_2 \alpha)^{1/(1-\alpha)} \left(P_{2j}\right)^{-\alpha/(1-\alpha)}$$

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – COMPORTAMIENTO DE LOS IMITADORES DEL PAÍS SEGUIDOR

Empresas imitadoras

Las empresas productoras de bienes intermedios del país 2 no tienen la capacidad tecnológica innovadora de las del país 1 (el coste del desarrollo de la I+D para innovar, η_2, es elevado) y toman decisiones sobre la inversión en adquirir las tecnologías punteras mediante la copia y adaptación (imitación).

El coste de imitación $v_2 > 0$ es función creciente del ratio de bienes copiados en el país 2 sobre el total de bienes ya inventados en el país 1

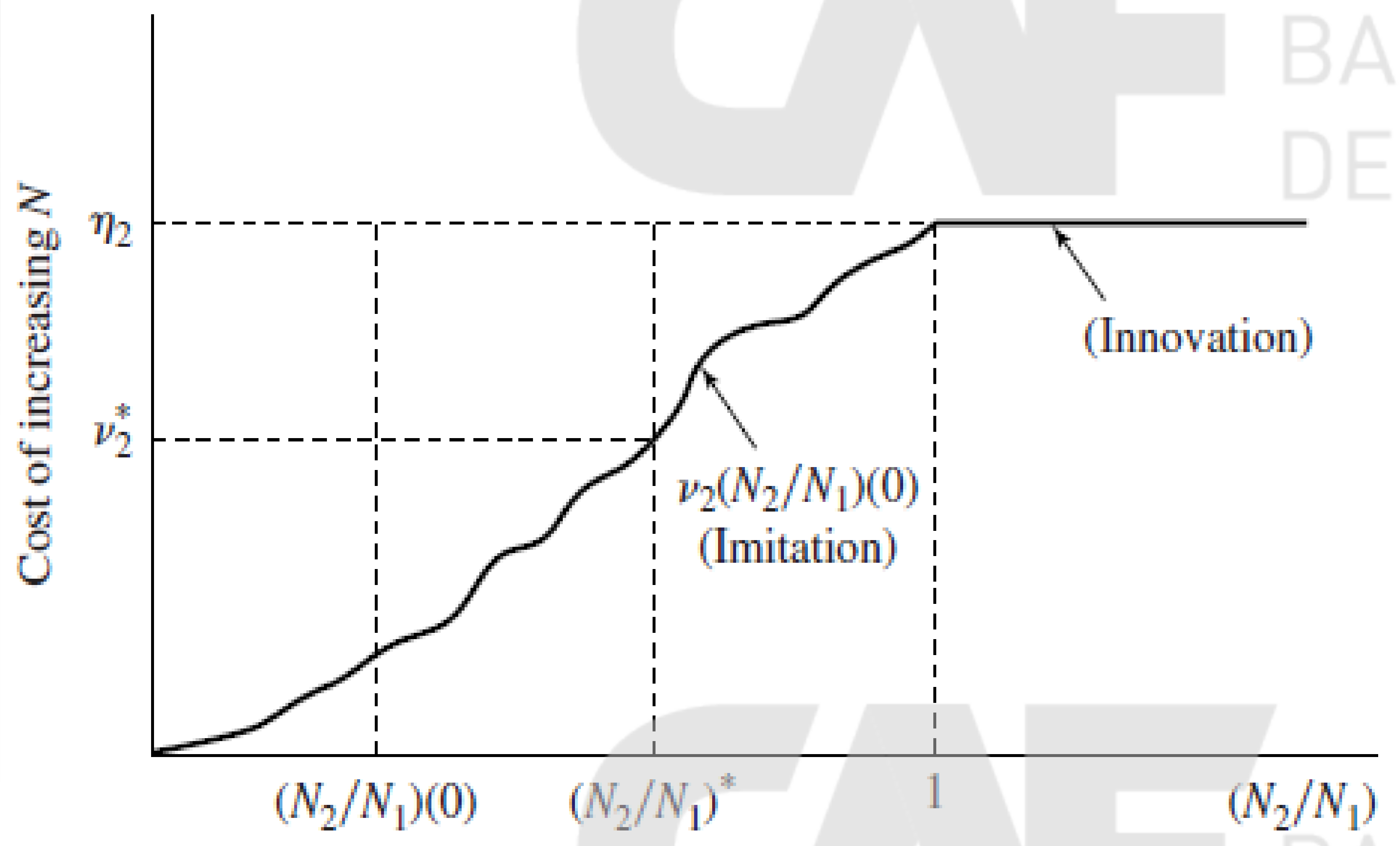
$$v_2 = v_2(N_2/N_1)$$

donde $v_2' > 0$ y $v_2(N_2/N_1) < \eta_2$ en el momento inicial de manera que la imitación es más barata que la innovación en el país seguidor.

A medida que aumenta N_2 en relación a N_1 quedan menos bienes por copiar y los que quedan suponen un coste de adquisición de la tecnología mayor.

La siguiente ilustración muestra como evoluciona el coste del cambio tecnológico en el país 2 (seguidor)

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – COMPORTAMIENTO DE LOS IMITADORES DEL PAÍS SEGUIDOR



Empresas imitadoras

$$v_2 = v_2(N_2/N_1)$$

donde $v_2' > 0$ y $v_2(N_2/N_1) < \eta_2$

En EE, se alcanza un ratio constante $(N_2/N_1)^* < 1$ en el que todavía resulta menos costoso adquirir la mejora tecnológica por imitación que a través de la innovación.

Mansfield, Schwartz y Wagner (1981, *Economic Journal*) hallaron un coste medio de imitación en varios sectores productivos de EEUU equivalente al 65% del coste medio de una innovación.

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – COMPORTAMIENTO DE LOS IMITADORES DEL PAÍS SEGUIDOR

Empresas imitadoras (continuación)

Suponemos que en el momento de copiar una variedad de bien intermedio del país 1, la empresa imitadora obtiene un monopolio permanente sobre el uso de este bien intermedio en el país 2 al que pertenece. El precio óptimo se obtiene resolviendo el problema de maximización del beneficio. Dadas las condiciones tecnológicas establecidas y manteniendo el coste marginal unitario, el precio óptimo para todas las variedades sigue siendo el mismo que el de las empresas del país líder

$$P_{2j} = P_2 = \frac{1}{\alpha}$$

e insertándolo en la cantidad de bienes intermedios vendidos del país seguidor obtenemos una expresión equivalente a la del país líder

$$X_{2j} = X_2 = (A_2)^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2/(1-\alpha)} L_2$$

Con valores específicos para el parámetro de la tecnología, A_2, y para la población activa, L_2.

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – COMPORTAMIENTO DE LOS IMITADORES DEL PAÍS SEGUIDOR

La producción agregada, la producción por trabajador (per cápita) y el beneficio de las empresas imitadoras en el país seguidor son

$$Y_2 = A_2^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} L_2 N_2$$

$$y_2 \equiv \frac{Y_2}{L_2} = A_2^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} N_2$$

$$\pi_{2j} = \pi_2 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) X_2 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) (A_2)^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2/(1-\alpha)} L_2$$

Comparando con las expresiones obtenidas en la sección anterior para el país líder podemos obtener el siguiente ratio entre las producciones por trabajador de los dos países:

$$\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)$$

que depende positivamente tanto de la productividad relativa, $\frac{A_2}{A_1}$, como del valor relativo del número de variedades conocidas de bienes intermedios, $\frac{N_2}{N_1}$.

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – COMPORTAMIENTO DE LOS IMITADORES DEL PAÍS SEGUIDOR

La condición de libre entrada para los potenciales imitadores de tecnología del país 2 conlleva que en equilibrio el valor de mercado de la copia tecnológica coincida con su coste

$$V_2 = v_2(N_2/N_1)$$

mientras que la condición de no arbitraje en la elección de óptima de portfolio es

$$r_2 = \frac{\pi_2 + \dot{V}_2}{V_2}$$

Combinando las dos últimas condiciones obtenemos el tipo de interés de equilibrio dependiendo del ratio N_2/N_1 como determinante del coste de la imitación y de su variación

$$r_2 = \frac{\pi_2 + \dot{v}_2}{v_2}$$

Finalmente, el comportamiento de los hogares del país 2 como consumidores va a ser simétrico al de los del país 1, con lo que obtenemos la expresión habitual para la tasa de crecimiento del consumo

$$\frac{\dot{C}_2}{C_2} = \frac{1}{\theta}(r_2 - \rho)$$

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – COMPORTAMIENTO DE LOS IMITADORES DEL PAÍS SEGUIDOR

El tipo de interés r_2 no va a ser constante y, por tanto, la tasa de crecimiento del consumo tampoco.

Esto se debe a que en equilibrio tanto el coste actual del I+D necesario para la imitación tecnológica, v_2, como su variación en el tiempo, $\dot{v}_2$, dependen del ratio N_2/N_1

$$r_2 = \frac{\pi_2 + \dot{v}_2}{v_2}$$

con $v_2 = v_2(N_2/N_1)$. Esquemáticamente:

$$N_2/N_1 \rightarrow v_2(N_2/N_1), \dot{v}_2(N_2/N_1) \rightarrow r_2 \rightarrow \frac{\dot{c}_2}{c_2}$$

De esta forma, en el país seguidor no vamos a tener la propiedad que observamos en la país líder de un comportamiento a corto plazo constante caracterizando directamente el equilibrio a largo plazo (EE).

Habrá una trayectoria dinámica de aproximación al EE, hasta que se alcancen unas tasas de crecimiento constantes y un ratio N_2/N_1 fijo como estudiaremos en la siguiente sección.

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

En el EE, N_2 tiene que crecer a la misma tasa que N_1 para tener un ratio fijo N_2/N_1. Si no fuera así la economía del país 2 entraría en una continua divergencia respecto del país líder que le llevaría asintóticamente a tener una posición relativa de bienes intermedios que tiende a cero (en el caso $\gamma_{N_2} < \gamma_{N_1}$) o a infinito (si $\gamma_{N_1} > \gamma_{N_2}$). Por lo tanto, en EE

$$\gamma^*_{N_2} = \gamma_{N_1} = \gamma_1$$

Además, las tasas de crecimiento del consumo, la producción de bienes finales, la producción de bienes intermedios y el número de variedades han de ser la misma en EE por la proporcionalidad con la que estas variables están relacionadas en el modelo. Por lo tanto, en EE

$$\gamma^*_{C_2} = \gamma^*_{Y_2} = \gamma^*_{X_2} = \gamma^*_{N_2} = \gamma^*_2$$

Combinando los dos últimos resultados y recordando el valor de γ_1, tenemos en EE

$$\gamma^*_2 = \gamma_1 = \frac{1}{\theta}\left(\left(\frac{L_1}{\eta_1}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(A_1)^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right)$$

con el siguiente tipo de interés de EE para el país 2

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

$$r_2^* = r_1 = \frac{\pi_1}{\eta_1} = \left(\frac{L_1}{\eta_1}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(A_1)^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}$$

que implica que a largo plazo el proceso de difusión tecnológica iguala las tasas de rendimiento aunque ambos países no compartan un mercado de capital común.

En EE sabemos que $\dot{v}_2 = 0$ porque no cambia el ratio N_2/N_1. Por tanto el tipo de interés de equilibrio en EE es

$$r_2^* = \frac{\pi_2}{v_2^*}$$

y el coste de la imitación en EE es

$$v_2^* = \frac{\pi_2}{\pi_1/\eta_1} = \eta_1\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{L_2}{L_1}\right)$$

Este resultado lo utilizamos para establecer una condición que garantice que las empresas del país 2 siempre van a preferir imitar al país líder que innovar por su cuenta. Esto será así si $v_2^* < \eta_1$ lo cual implica

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

$$(\eta_1/\eta_2)\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{L_2}{L_1}\right) < 1$$

Esta condición se cumplirá si el parámetro del coste de innovar es menor en el país líder, $\eta_1 < \eta_2$ y el parámetro de productividad es menor en la economía seguidora, $A_2 < A_1$(ambos supuestos son razonables) para el mismo nivel de población activa en las dos economías, $L_2 = L_1$. En cualquier caso, la calibración de los parámetros del modelo debería respetar esta condición. Recordemos que en cualquier periodo

$$\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{N_2}{N_1}\right)$$

En EE, si se cumple que $A_2 < A_1$, la producción por trabajador va a ser siempre menor en la economía seguidora que en la economía líder puesto que $\frac{N_2}{N_1} < 1$ en el EE. El mismo resultado es aplicable al ratio de consumo por trabajador, $\frac{c_2}{c_1}$.

En EE no hay diferencias en tasas de crecimiento pero sí en niveles entre ambas economías.

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

El ratio entre el número de bienes intermedios de los dos países N_2/N_1 tiene un valor constante en el EE, y dicho valor va a determinar el diferencial a largo plazo entre la producción o el consumo por trabajador para ambos países. Además, la evolución de N_2/N_1 a corto plazo va a ser una variable de estado que determina la trayectoria que sigue la economía del país 2 en su aproximación al EE.

Para obtener esta solución de EE necesitamos especificar una función concreta para el coste de imitación $v_2(N_2/N_1)$. Para simplificar la notación llamemos

$$\hat{N} \equiv N_2/N_1$$

a la posición relativa de número de bienes intermedios de ambos países.

La función del coste de la imitación va a depender del parámetro fijo $\eta_2 > 0$ y va ser creciente en el de la evolución de $\hat{N}$ con elasticidad constante

$$v_2 = \eta_2 \hat{N}^{\sigma}$$

donde $\sigma > 0$ representa la elasticidad constante de $\hat{N}$ sobre v_2.

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

En EE recordamos que

$$v_2^* = \frac{\pi_2}{\pi_1/\eta_1} = \eta_1 \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{L_2}{L_1}\right)$$

Dado que en cada periodo el coste de imitación es $v_2 = \eta_2 \widehat{N}^{\sigma}$, también los es en el EE

$$v_2^* = \eta_2 \left(\widehat{N}^*\right)^{\sigma}$$

Combinando las últimas dos ecuaciones tenemos el valor de equilibrio a largo plazo (EE)

$$\widehat{N}^* = \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{L_2}{L_1}\right)\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)\right]^{1/\sigma}$$

que merece una interpretación de los determinantes a largo plazo del grado de aproximación del país seguidor al país líder:

- Diferencial de productividades en la tecnología del producto de consumo
- Diferencial de población activa
- Diferencial entre el coste de innovación, η_1, y el coste de imitación si $\widehat{N} = 1$, η_2.

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

La solución de EE de $\widehat{N}^*$ puede sustituirse en el cociente de producciones por trabajador y_2/y_1 que obtuvimos en una diapositiva anterior para hallar el siguiente ratio de producciones por trabajador (per cápita) en el equilibrio a largo plazo del modelo (EE)

$$\frac{y_2^*}{y_1^*} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{(1+\sigma)/(\sigma(1-\alpha))} \left[\left(\frac{L_2}{L_1}\right)\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)\right]^{1/\sigma}$$

que vuelve a establecer las diferencias entre productividades, población activa y costes de imitación *versus* innovación como factores explicativos de las diferencias de renta a largo plazo entre una economía líder y una seguidora.

A continuación, vamos a estudiar la trayectoria dinámica de aproximación al EE.

Las variables de estado van a ser $\widehat{N} \equiv N_2/N_1$ y el ratio entre consumo y número de variedades del país 2

$$\chi_2 \equiv \frac{C_2}{N_2}$$

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

Recordando que la tasa de crecimiento en el tiempo de un cociente es igual a la diferencia entre las tasas de crecimiento del numerador y del denominador, las tasas de crecimiento de las variables de estado, $\widehat{N}$ y χ_2, son

$$\frac{\dot{\widehat{N}}}{\widehat{N}} = \frac{\dot{N}_2}{N_2} - \frac{\dot{N}_1}{N_1} \quad ; \quad \frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{\dot{C}_2}{C_2} - \frac{\dot{N}_2}{N_2}$$

La variación de N_2 viene fijada por la restricción agregada de recursos

$$Y_2 = C_2 + N_2 X_2 + v_2 \dot{N}_2$$

que marca como destinos de la producción final el gasto en bienes de consumo, el gasto en bienes intermedios (con un coste unitario de producción) y el gasto en la imitación de nuevos bienes intermedios. Despejando $\dot{N}_2$, obtenemos

$$\dot{N}_2 = (1/v_2)[Y_2 - C_2 - N_2 X_2]$$

Vamos a introducir el beneficio de las empresas monopolistas π_2 en su relación con las producciones del bien final y el bien intermedio. Repasando los resultados anteriores del país 2:

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

$$Y_2 = A_2^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L_2N_2 \;;\; X_2 = (A_2)^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}L_2 \;;\; \pi_2 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)X_2$$

Podemos escribir las producciones del bien final y del bien intermedio en relación al beneficio

$$Y_2 = \pi_2\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}}{\alpha^{2/(1-\alpha)}}\right)N_2 = \pi_2\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\alpha^{-2}N_2 = \pi_2\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)N_2$$

$$X_2 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\pi_2$$

y sustituirlas en la ecuación de $\dot{N}_2$ para obtener

$$\dot{N}_2 = (1/v_2)\left[\pi_2\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\right)N_2 - C_2 - N_2\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\pi_2\right]$$

$$\dot{N}_2 = (1/v_2)\left[\pi_2\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha(1-\alpha)}\right)N_2 - C_2\right] = (1/v_2)\left[\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)N_2 - C_2\right]$$

Dividiendo ambos lados entre N_2 nos queda la tasa de crecimiento del número de bienes intermedios del país2

$$\frac{\dot{N}_2}{N_2} = (1/v_2)\left[\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) - \chi_2\right]$$

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

Para el diagrama de fase nos queda pendiente hallar la tasa de crecimiento de χ_2. Esto es un cierto desafío técnico, pero nos vamos a enfrentar a él. Desarrollaremos con detalle la derivación que aparece en las páginas 360 y 361 del libro. De acuerdo a la definición de χ_2, sabemos que

$$\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{\dot{C}_2}{C_2} - \frac{\dot{N}_2}{N_2}$$

así que tenemos pendiente hallar la tasa de crecimiento del consumo del país 2. Los hogares deciden su consumo óptimo de acuerdo a esta ecuación

$$\frac{\dot{C}_2}{C_2} = \frac{1}{\theta}(r_2 - \rho)$$

con un tipo de interés en equilibrio $r_2 = \frac{\pi_2 + \dot{v}_2}{v_2}$. Dada la función de costes de imitación, $v_2 = \eta_2 \widehat{N}^{\sigma}$, tenemos

$$\dot{v}_2 = \frac{\partial v_2}{\partial \widehat{N}} \frac{\partial \widehat{N}}{\partial t} = \eta_2 \sigma \widehat{N}^{\sigma - 1} \dot{\widehat{N}} = v_2 \sigma \frac{\dot{\widehat{N}}}{\widehat{N}}$$

y nos queda la ecuación dinámica del consumo como sigue

$$\frac{\dot{C}_2}{C_2} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\pi_2}{v_2} + \sigma \frac{\dot{\widehat{N}}}{\widehat{N}} - \rho\right)$$

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

Insertando los resultados tanto $\frac{\dot{C}_2}{C_2}$ como de $\frac{\dot{N}_2}{N_2}$ en la tasa de crecimiento de χ_2 obtenemos

$$\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\pi_2}{v_2} + \sigma\frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} - \rho\right) - (1/v_2)\left[\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) - \chi_2\right]$$

El siguiente paso consiste en buscar la solución para $\frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}}$, que tiene en cuenta tanto la tasa de crecimiento del número de variedades en el país 1 (líder) como la del país 2 (seguidor)

$$\frac{\dot{\hat{N}}}{\hat{N}} = \frac{\dot{N}_2}{N_2} - \frac{\dot{N}_1}{N_1} = \frac{\dot{N}_2}{N_2} - \gamma_1 = \left(\frac{1}{v_2}\right)\left[\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) - \chi_2\right] - \gamma_1$$

donde hemos insertado el resultado de la tasa de crecimiento de las variedades del país seguidor y el hecho de que el país líder tiene siempre la misma tasa de crecimiento para el número de bienes, el consumo o la producción (γ_1). Sustituyendo tanto esta ecuación como el coste de imitación $v_2 = \eta_2\hat{N}^{\sigma}$ en la de $\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2}$, sale

$$\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\pi_2}{\eta_2\hat{N}^{\sigma}} + \sigma\left(\left(\frac{1}{\eta_2\hat{N}^{\sigma}}\right)\left[\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) - \chi_2\right] - \gamma_1\right) - \rho\right) - (1/\eta_2\hat{N}^{\sigma})\left[\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) - \chi_2\right]$$

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

Tomando factor común $\theta\eta_2\hat{N}^\sigma$ en el primer gran término, tenemos

$$\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{1}{\theta\eta_2\hat{N}^\sigma}\left(\pi_2 + \sigma\left[\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) - \chi_2\right] - \eta_2\hat{N}^\sigma(\sigma\gamma_1 + \rho)\right) - (1/\eta_2\hat{N}^\sigma)\left[\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) - \chi_2\right]$$

para juntar después elementos comunes de ambos términos y alcanzar

$$\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{1}{\theta\eta_2\hat{N}^\sigma}\left(\pi_2 + \sigma\left[\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) - \chi_2\right] - \theta\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) + \theta\chi_2 - \eta_2\hat{N}^\sigma(\sigma\gamma_1 + \rho)\right)$$

A continuación, agrupamos tanto los términos en el beneficio, π_2, como los que incorporan el ratio entre consumo y número de variedades, χ_2,

$$\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{1}{\theta\eta_2\hat{N}^\sigma}\left(\pi_2 - (\theta - \sigma)\left[\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)\right] + (\theta - \sigma)\chi_2 - \eta_2\hat{N}^\sigma(\sigma\gamma_1 + \rho)\right)$$

Ahora tomamos factor común $(\theta - \sigma)$

$$\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{1}{\theta\eta_2\hat{N}^\sigma}\left(\pi_2 + (\theta - \sigma)\left[\chi_2 - \pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)\right] - \eta_2\hat{N}^\sigma(\sigma\gamma_1 + \rho)\right)$$

Para finalmente extraer el último término y alcanzar la ecuación (8.30) del libro de texto (página 361):

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

$$\frac{\dot{\chi}_2}{\chi_2} = \frac{1}{\theta\eta_2\widehat{N}^{\sigma}}\left(\pi_2 + (\theta - \sigma)\left[\chi_2 - \pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)\right]\right) - \frac{1}{\theta}(\sigma\gamma_1 + \rho)$$

que vamos a asociar, en el diagrama de fase, a la correspondiente a la otra variable de estado

$$\frac{\dot{\widehat{N}}}{\widehat{N}} = \frac{1}{\eta_2\widehat{N}^{\sigma}}\left[\pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) - \chi_2\right] - \gamma_1$$

donde hemos usado $v_2 = \eta_2\widehat{N}^{\sigma}$.

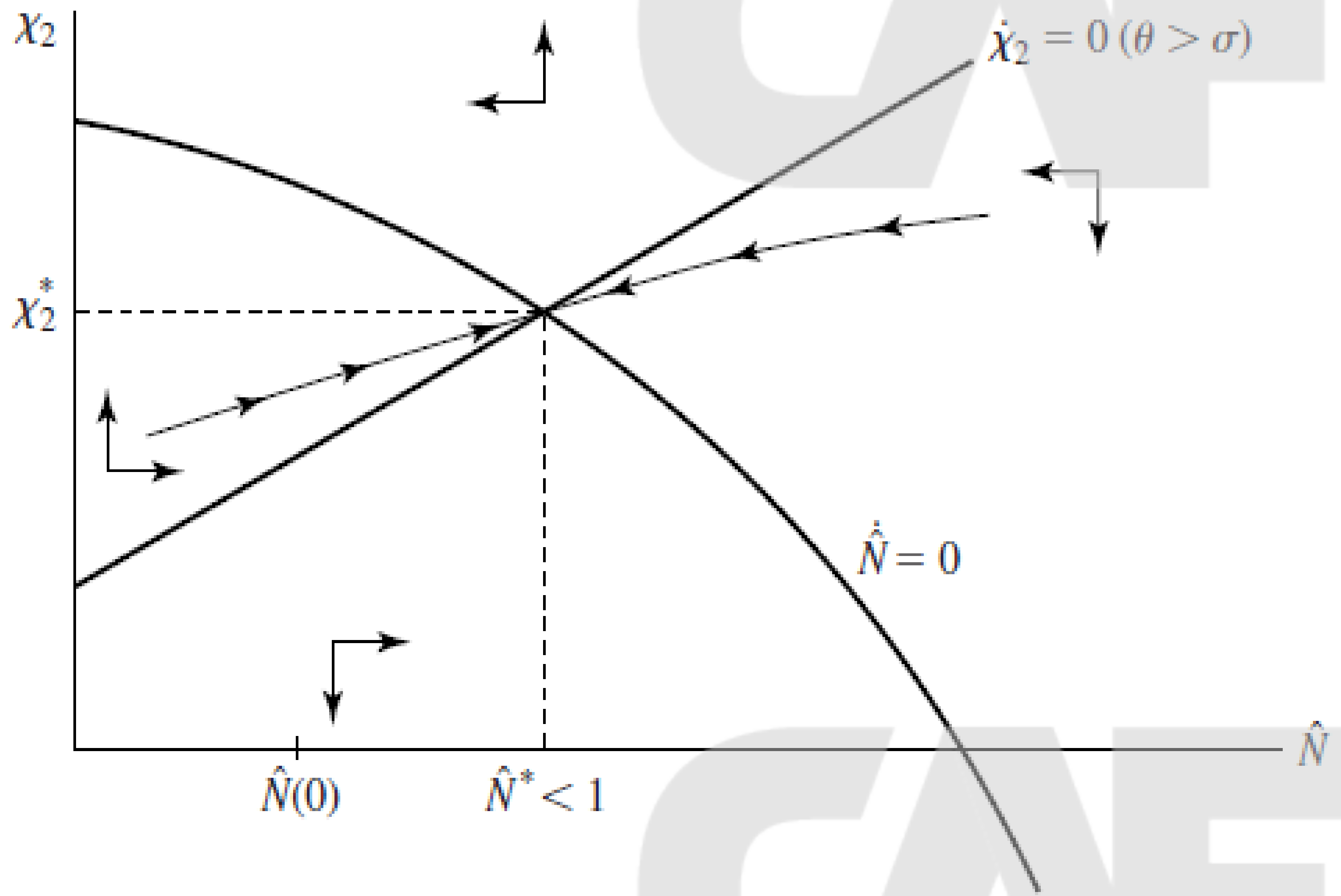
Para representar el diagrama de fase, necesitamos establecer un supuesto sobre el signo de $(\theta - \sigma)$. La relación entre los valores numéricos de ambos parámetros nos va a llevar a estudiar un primer caso con $\theta > \sigma$, es decir una elasticidad de la utilidad marginal del consumo en la función de utilidad mayor que la elasticidad del ratio de variedades imitadas en la función de coste de la imitación. En el segundo caso tenemos el signo opuesto con $\theta < \sigma$.

Como en otras ocasiones, analizaremos la evolución de las variables en el diagrama de fase a partir de una relación de las variables de estado para la que no hay variación de cada una de las variables de estado, es decir o bien $\dot{\widehat{N}} = 0$, o bien $\dot{\chi}_2 = 0$.

Comencemos por el caso $\theta > \sigma$

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

caso $\theta > \sigma$



Si $\dot{\hat{N}} = 0$, se obtiene la relación

$$\chi_2 = \pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) - \gamma_1\eta_2\hat{N}^{\sigma}$$

que presenta una relación de sentido inverso entre χ_2 y $\hat{N}$. A partir de cualquier punto de esta relación

Aumento de χ_2 → Disminución de $\hat{N}$ → $\dot{\hat{N}} < 0$ (flecha izquierda)

Disminución de χ_2 → Aumento de $\hat{N}$ → $\dot{\hat{N}} > 0$ (flecha derecha)

Si $\dot{\chi}_2 = 0$, se obtiene la relación

$$\chi_2 = \frac{\pi_2(1+\alpha)}{\alpha} - \frac{\pi_2}{\theta - \sigma} + (\sigma\gamma_1 + \rho)\eta_2\hat{N}^{\sigma}/(\theta - \sigma)$$

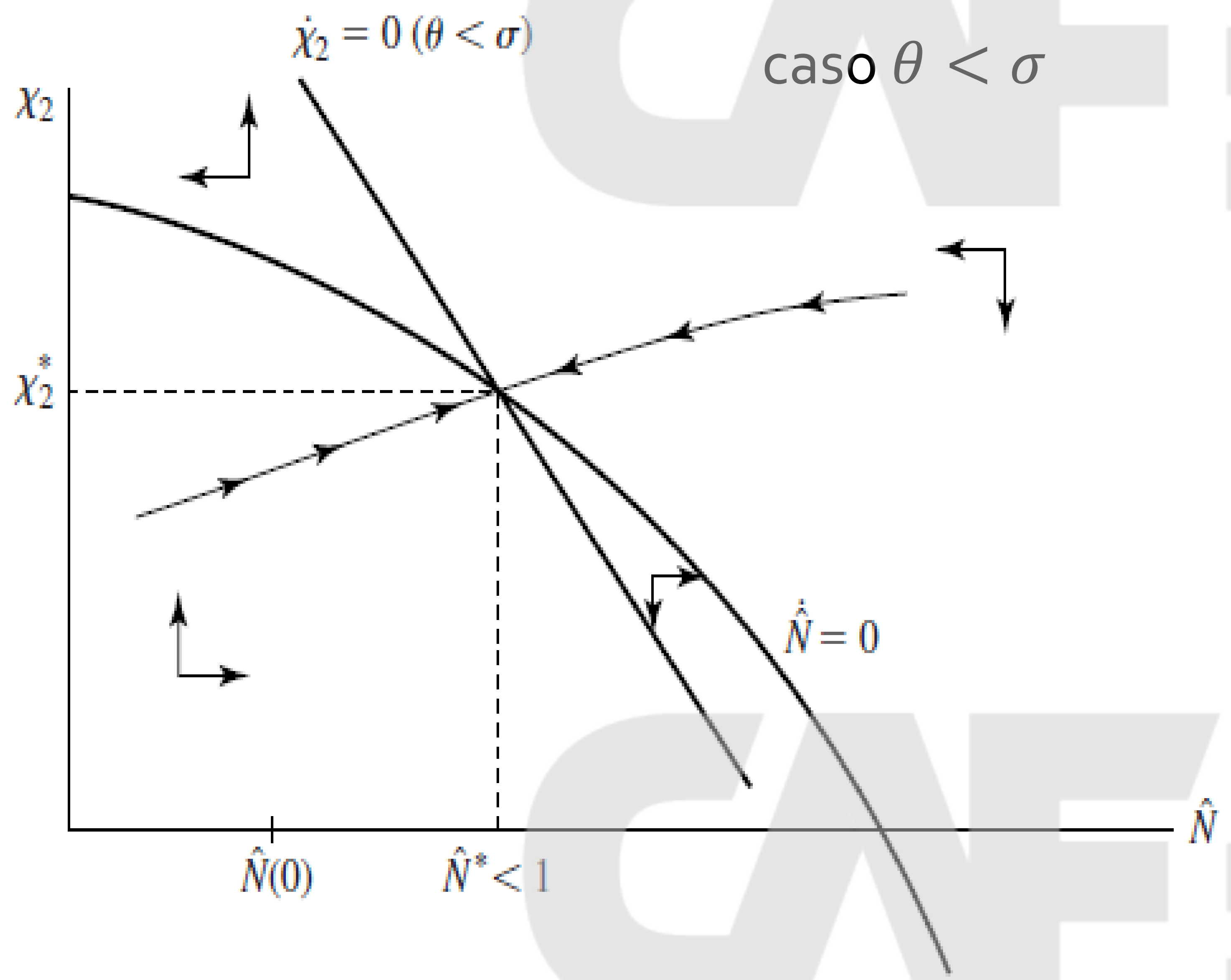
que presenta una relación de sentido positivo entre χ_2 y $\hat{N}$. A partir de cualquier punto de esta relación

Aumento de $\hat{N}$ → Aumento de χ_2 → $\dot{\chi}_2 > 0$ (flecha arriba)

Disminución de $\hat{N}$ → Disminución de χ_2 → $\dot{\chi}_2 < 0$ (flecha abajo)

Trayectoria estable de punto de silla (única) hacia EE con χ_2 inicial alto y $\hat{N}$ inicial bajo → $\dot{\chi}_2 > 0$, $\dot{\hat{N}} > 0$ → CONVERGENCIA entre país 2 y país 1

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS



Si $\dot{\hat{N}} = 0$, se obtiene la relación

$$\chi_2 = \pi_2\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) - \gamma_1\eta_2\hat{N}^{\sigma}$$

que presenta una relación de sentido inverso entre χ_2 y $\hat{N}$. No se ve afectada por el signo de $\theta - \sigma$. Desde cualquier punto

Aumento de χ_2 → Disminución de $\hat{N}$ → $\dot{\hat{N}} < 0$ (flecha izquierda)

Disminución de χ_2 → Aumento de $\hat{N}$ → $\dot{\hat{N}} > 0$ (flecha derecha)

Si $\dot{\chi}_2 = 0$, se obtiene la relación

$$\chi_2 = \frac{\pi_2(1+\alpha)}{\alpha} - \frac{\pi_2}{\theta - \sigma} + (\sigma\gamma_1 + \rho)\eta_2\hat{N}^{\sigma}/(\theta - \sigma)$$

que presenta una relación de sentido **negativo** entre χ_2 y $\hat{N}$. A partir de cualquier punto de esta relación

Aumento de $\hat{N}$ → Disminución de χ_2 → $\dot{\chi}_2 < 0$ (flecha abajo)

Disminución de $\hat{N}$ → Aumento de χ_2 → $\dot{\chi}_2 < 0$ (flecha arriba)

Trayectoria estable de punto de silla (única) hacia EE desde valores iniciales de χ_2 y $\hat{N}$ → $\dot{\chi}_2 > 0$, $\dot{\hat{N}} > 0$ → CONVERGENCIA entre país 2 y país 1

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

LA DIFUSIÓN DE LA TECNOLOGÍA – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LAS TRAYECTORIAS DINÁMICAS

Modelo con difusión de la tecnología. Resumen de resultados.

- País 1 (líder)

- Tasas de crecimiento constantes en $\gamma_{C_1} = \frac{1}{\theta}\left(\left(\frac{L_1}{\eta_1}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(A_1)^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right) = \gamma_{Y_1} = \gamma_{X_1} = \gamma_{N_1} = \gamma_1$ en todos los periodos (EE) .

- País 2 (seguidor)

- A largo plazo (en EE), las tasas de crecimiento y los tipo de interés son idénticos a los del país líder, $\gamma_2^* = \gamma_1 = \frac{1}{\theta}\left(\left(\frac{L_1}{\eta_1}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(A_1)^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right)$ y $r_2^* = r_1 = \left(\frac{L_1}{\eta_1}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(A_1)^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}$. Se mantienen diferencias de renta por trabajador en $\frac{y_2^*}{y_1^*} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{(1+\sigma)/(\sigma(1-\alpha))}\left[\left(\frac{L_2}{L_1}\right)\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)\right]^{1/\sigma}$.

- A corto plazo, tanto el número relativo de variedades, $\widehat{N}$, como el ratio de consumo entre variedades χ_2 crecen monótonamente en una trayectoria estable en punto de silla hacia el EE en el que se alcanza el valor fijo $\widehat{N}^* = \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{L_2}{L_1}\right)\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)\right]^{1/\sigma}$. La tasa de crecimiento del seguidor se va ralentizando durante la transición porque γ_{N_2} converge a la baja hacia γ_{N_1} y el impacto del progreso tecnológico es menor.