CRECIMIENTO ECONÓMICO

SESIÓN: Modelos de crecimiento endógeno con comportamiento optimizador (I)

Profesor: Miguel Casares

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

ÍNDICE

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – EL MODELO AK: LOS HOGARES, LAS EMPRESAS Y EL EQUILIBRIO

En la sesión 3 estudiamos modelos de crecimiento endógeno con un comportamiento de ahorro establecido exógenamente a través de una tasa de ahorro constante.

En las sesiones 5 y 6 (modelo de Ramsey) vimos como los hogares resolviendo un problema de control óptimo decidían la senda intertemporal del consumo y el ahorro que maximiza su bienestar. Las tasas de crecimiento de las variables per cápita a largo plazo coincidían con el crecimiento tecnológico exógeno

$$\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = \gamma_T = x$$

A partir de ahora vamos a buscar otras fuentes endógenas de crecimiento a largo plazo en un modelo en el que los hogares y las empresas toman todas sus decisiones racionalmente, es decir, resolviendo un problema de optimización.

Empezaremos por el caso más sencillo, en el que las empresas disponen de una tecnología de producción AK.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – EL MODELO AK: LOS HOGARES, LAS EMPRESAS Y EL EQUILIBRIO

Los hogares

El problema de optimización de la familia representativa con una función de utilidad de elasticidad constante es

$$Max \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \, \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} dt$$

sujeto a

$$\dot{a} = (r-n)a + w - c$$

Los 5 pasos para su resolución nos llevan a:

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – EL MODELO AK: LOS HOGARES, LAS EMPRESAS Y EL EQUILIBRIO

1. Variable de control c ; variable de estado a

2. Hamiltoniano $J = e^{-(\rho-n)t}\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + v[(r-n)a + w - c]$

3. Condición de primer orden variable de control

$$\frac{\partial J}{\partial c} = e^{-(\rho-n)t}c^{-\theta} - v = 0$$

4. Condición de primer orden variable de estado

$$\frac{\partial J}{\partial a} = v(r-n) = -\dot{v}$$

5. Condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} a(t)e^{\left[-\int_0^t (r(v)-n)dv\right]} = 0$$

Si hacemos la derivada en el tiempo $\dot{v}$ a partir de 3 y la sustituimos en 4 obtenemos:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – EL MODELO AK: LOS HOGARES, LAS EMPRESAS Y EL EQUILIBRIO

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

El consumo futuro (ahorro) aumenta, $\dot{c} > 0$, cuando el rendimiento de los activos es superior a la tasa de preferencia intertemporal que se marca la familia en sus preferencias.

Las empresas maximizan el beneficio (per cápita) incorporando una función de producción lineal en el capital físico, $y = f(k) = Ak$,

$$Max \quad Ak - (r + \delta)k$$

donde el tipo de interés al que se alquila el capital se ha sustituido por su valor de equilibrio en los mercados de activos, $R = r + \delta$. La condición de primer orden para k es

$$A = r + \delta$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – EL MODELO AK: LOS HOGARES, LAS EMPRESAS Y EL EQUILIBRIO

Si combinamos el comportamiento optimizador de demanda de capital de la empresa con el de consumo intertemporal de la familia, tenemos una ecuación dinámica para el consumo con tasa de crecimiento constante

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)$$

Tomamos la restricción presupuestaria de la familia y sustituimos tanto las condiciones de equilibrio en los mercados de activos de una economía cerrada ($k = a$, $\dot{k} = \dot{a}$) como las demanda óptimas de capital físico (y la ausencia de demanda de trabajo $k = 0$), para obtener la ecuación dinámica del capital per cápita

$$\dot{k} = Ak - (\delta + n)k - c$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – EL MODELO AK: LOS HOGARES, LAS EMPRESAS Y EL EQUILIBRIO

Dividiendo entre k, nos queda una tasa de crecimiento del capital per cápita que depende de términos constantes y del ratio c/k

$$\frac{\dot{k}}{k} = A - \delta - n - c/k$$

Una condición necesaria para que $\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k}$ sea constante (EE) es que el consumo per cápita y el capital per cápita crezcan a la misma tasa. Como el consumo per cápita crece siempre a tasa $\frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)$, el capital per cápita también tiene que hacerlo en EE a la misma tasa. Más aún, la función lineal AK implica la misma tasa de crecimiento para el producto per cápita.

Con todo ello, el EE del modelo se caracteriza por estas tasas de crecimiento:

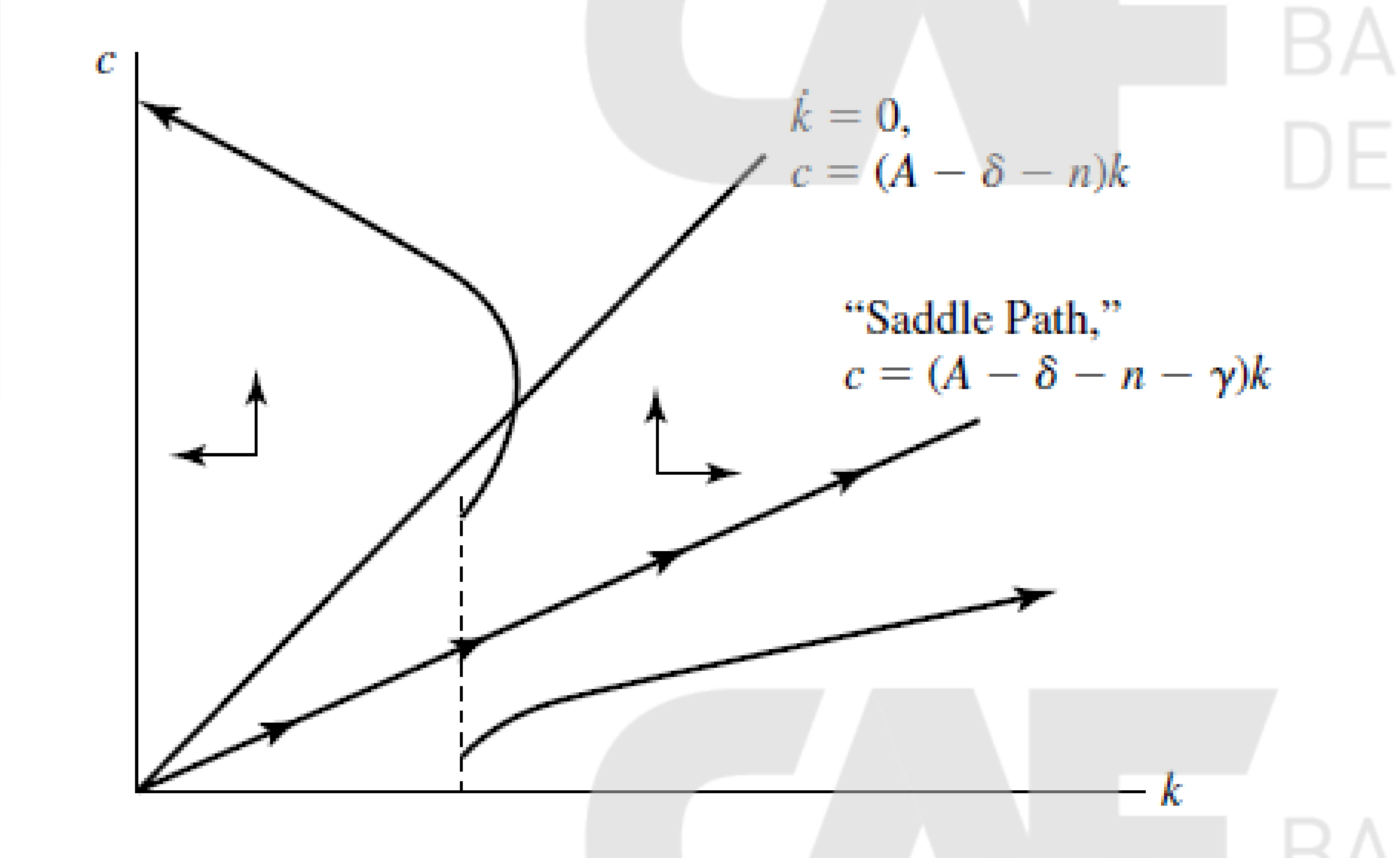
MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – EL MODELO AK: LOS HOGARES, LAS EMPRESAS Y EL EQUILIBRIO

Tasas de crecimiento en el EE del modelo AK con comportamiento optimizador

$$\gamma_k = \gamma_c = \gamma_y = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)$$

$$\gamma_K = \gamma_C = \gamma_Y = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho) + n$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – EL MODELO AK: LAS DINÁMICAS DE TRANSICIÓN Y EL DIAGRAMA DE FASES



Representación gráfica:

$A-\delta-\rho>0 \leftrightarrow \dot{c}>0$ (siempre flechas hacia arriba)

$$\frac{\dot{k}}{k}=A-\delta-n-c/k$$

$$\dot{k}=0 \rightarrow c=(A-\delta-n)k$$

Si disminuye $k \rightarrow \dot{k}<0$ (flechas izquierda)

Si aumenta $k \rightarrow \dot{k}>0$ (flechas derecha)

En EE el ratio c/k que implica la ecuación dinámica del capital es

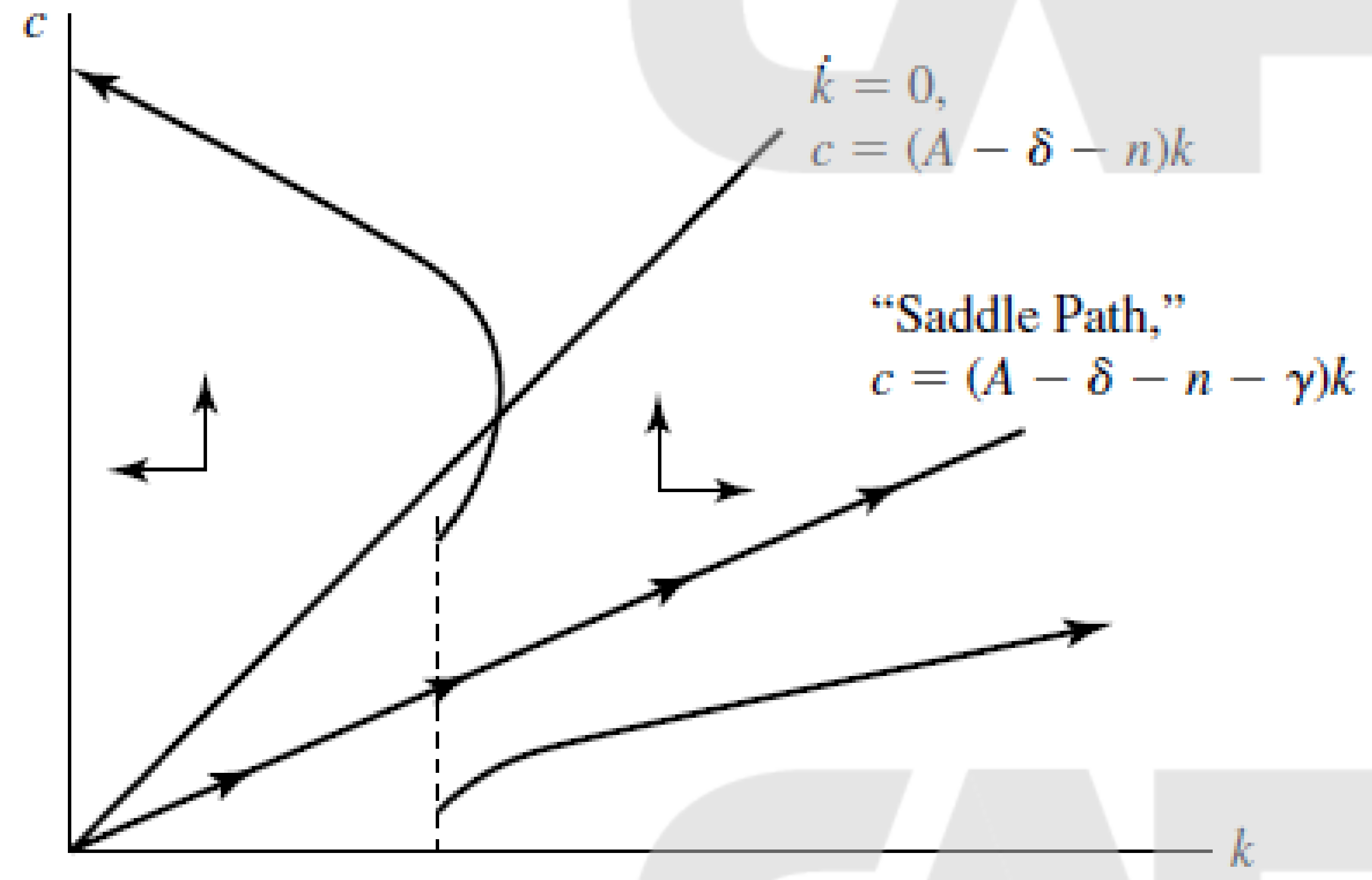
$$\frac{c}{k}=(A-\delta-n)-\frac{\dot{k}}{k}$$

Es decir,

$$c=(A-\delta-n)k-\gamma_k k$$

$$c=\left[(A-\delta-n)-\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho)\right]k$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – EL MODELO AK: LAS DINÁMICAS DE TRANSICIÓN Y EL DIAGRAMA DE FASES



Trayectoria en punto de silla. Convergencia a largo plazo hacia un EE con

$$c = (A - \delta - n - \gamma_k)k$$

Sin permitir un consumo excesivo que lleve a desviaciones a la izquierda (desacumulación de capital, fuerte aumento del consumo) al atravesar la recta $\dot{k} = 0$.

Sin permitir niveles demasiado bajos del consumo y altos del capital que impidan alcanzar el nivel de c/k de la región deseable.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – EL MODELO AK: LAS DINÁMICAS DE TRANSICIÓN Y EL DIAGRAMA DE FASES

Factores (endógenos) determinantes de las tasas de crecimiento. Políticas económicas que favorezcan el crecimiento económico a largo plazo, $\gamma_y = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho)$:

- Mejora del nivel tecnológico de las empresas
  - Productividad media y marginal del capital (aumentar A)
  - Durabilidad técnica del capital físico (disminuir δ)
- Preferencias de los hogares
  - Disposición a ahorrar (disminuir la tasa de preferencia intertemporal ρ)
  - Sensibilidad del bienestar a cambios en el nivel del consumo (disminuir la elasticidad de la utilidad marginal del consumo respecto a la cantidad de consumo θ)

Diseñar políticas fiscales, monetarias, industriales, culturales, educativas orientadas a aumentar el crecimiento del consumo per cápita a largo plazo.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

Paul Romer (1986, *Journal of Political Economy*) → modelo de crecimiento económico endógeno basado en los efectos de la difusión del conocimiento.

Se consigue eliminar la tendencia de los rendimientos marginales decrecientes para el capital físico gracias a la mejora tecnológica **endógena**.

La creación del conocimiento es un subproducto de la inversión en acumulación de capital físico. Dos características:

1. El aprendizaje mediante la experiencia que proporciona la inversión en capital físico implica una mejora del conocimiento (mejora tecnológica)
2. Difusión inmediata sin coste del conocimiento generado por la inversión a nivel de cada empresa. Este alcance global del aprendizaje es crucial.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

Partimos de una función de producción neoclásica de la empresa individual i en la que el progreso tecnológico es potenciador del trabajo

$$Y_i = F(K_i, A_i L_i)$$

En la que vamos a considerar que la variable del conocimiento la determina el stock de capital **agregado** (resultado de **todas** las inversiones pasadas de **todas** las empresas)

$$A_i = K$$

para recoger las características del aprendizaje mediante la experiencia en el modelo de Romer obteniendo la función de producción en términos totales

$$Y_i = F(K_i, K\,L_i)$$

y en términos por trabajador (per cápita)

$$y_i = F(k_i, K)$$

con $y_i = \frac{Y_i}{L_i}, k_i = \frac{K_i}{L_i}$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

La función de beneficios per cápita para la empresa individual i es

$$F(k_i, K) - (r + \delta)k_i - w$$

Definamos la productividad marginal del capital individual con la siguiente notación

$$F_1(k_i, K) \equiv \frac{\partial F(k_i, K)}{\partial k_i}$$

La maximización del beneficio requiere cumplir con las siguientes condiciones habituales para determinar la demanda de capital físico y de trabajo

$$F_1(k_i, K) = (r + \delta)$$

$$F(k_i, K) - k_i F_1(k_i, K) = w$$

donde $F(k_i, K) - k_i F_1(k_i, K)$ es la productividad marginal del trabajo $\frac{\partial Y_i}{\partial L_i}$.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

A continuación presentamos el producto medio del capital, que debido a la propiedad de rendimientos constantes a escala depende del ratio $\frac{K}{k_i}$:

$$\frac{F(k_i, K)}{k_i} = F\left(\frac{k_i}{k_i}, \frac{K}{k_i}\right) = f\left(\frac{K}{k_i}\right)$$

En el equilibrio, todas las empresas toman las mismas decisiones y se cumple que su capital por trabajador coincide con el valor agregado (sin subíndice)

$$k_i = k$$

que sustituido en el producto medio del capital, junto con la definición de capital agregado $k = K/L$, obtenemos

$$\frac{F(k_i, K)}{k_i} = f\left(\frac{K}{K/L}\right) = f(L)$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

Así que el producto medio del capital depende, exclusivamente, de la población activa L , rompiendo con la dependencia (decreciente) del stock de capital utilizado.

Si $\frac{F(k_i, K)}{k_i} = f(L) \rightarrow F(k_i, K) = k_i f(L)$

lo cual nos permite escribir la productividad marginal del capital físico también dependiendo exclusivamente de L con lo que desaparecen los rendimientos marginales decrecientes del capital. Veámoslo a partir de la fórmula de la derivada de un producto:

$$F_1(k_i, K) = \frac{\partial k_i}{\partial k_i} f(L) + \frac{\partial f(L)}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial k_i} k_i$$

$$F_1(k_i, K) = f(L) + f'(L)\left(\frac{-K}{k_i^2}\right) k_i = f(L) - f'(L)\left(\frac{K}{k_i}\right)$$

$$F_1(k_i, K) = f(L) - f'(L)\left(\frac{K}{k}\right) = f(L) - f'(L)\left(\frac{K}{K/L}\right) = f(L) - f'(L)L$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

$$F_1(k_i, K) = f(L) - f'(L)L$$

El producto marginal del capital no depende de la cantidad de capital instalado (ni agregado ni a nivel de empresa) y es creciente con la cantidad de personas que forman la población activa L. (Recuérdese que $f''(L) < 0$ de acuerdo a las propiedades asignadas a la función de producción).

Consecuencia:

En el modelo de aprendizaje mediante la experiencia de Romer, hay un efecto escala que va a resultar muy relevante para el análisis del EE y de la política económica óptima.

A continuación, vamos a obtener el equilibrio del modelo incorporando el comportamiento de los hogares con función de utilidad de elasticidad constante. Su problema de control óptimo es:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

$$Max \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} dt$$

sujeto a

$$\dot{a} = (r-n)a + w - c$$

Los 5 pasos para su resolución nos llevan a la siguiente ecuación dinámica (¡ya conocida a estas alturas!) del consumo per cápita:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r-\rho)$$

En la que insertamos la condición de demanda óptima de capital físico de las empresas $F_1(k_i, K) = (r+\delta)$, con $F_1(k_i, K) = f(L) - f'(L)L$, para obtener

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

Ecuación dinámica del consumo en el modelo de Romer

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(f(L) - f'(L)L - \delta - \rho\right)$$

La ecuación dinámica del capital surge de sustituir en la restricción presupuestaria de los hogares las condiciones de equilibrio en los mercados de activos de una economía cerrada ($\dot{a} = \dot{k}$, $a = k$), el tipo de interés de equilibrio ($r = f(L) - f'(L)L - \delta$) y el salario de equilibrio ($w = F(k_i, K) - k_i F_1(k_i, K)$) para alcanzar

$$\dot{k} = f(L)k - c - (\delta + n)k$$

donde conviene recordar que $f(L)k$ es la producción (ingreso) per cápita y advertir del error tipográfico de la ecuación 4.40, página 217 del libro (falta $-nk$). Si asumimos que el tamaño de la población no cambia con el paso del tiempo se corrige el error...

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

Tasas de crecimiento del consumo y el capital en el modelo de Romer

$$\gamma_c = \frac{1}{\theta}\left(f(L) - f'(L)L - \delta - \rho\right)$$

$$\gamma_k = f(L) - c/k - (\delta + n)$$

Dos condiciones necesarias para que exista un EE:

$i)$ $\quad L\ constante \quad \rightarrow f(L)$ constante, $f'(L)$ constante

$ii)$ $\quad \gamma_c = \gamma_k$

Ahora sí, con población constante: $\frac{\dot{L}}{L} = n = 0$, la ecuación dinámica del capital es

$$\dot{k} = f(L)k - c - \delta k$$

tal y como aparece en la página 217 del libro

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

¿La solución descentralizada coincide con la solución del planificador central? Recordemos que en la versión básica del modelo de Ramsey son equivalentes.

El planificador central (benevolente) tomará las decisiones económicas que maximicen el bienestar de los hogares sujeto a la restricción global de los recursos.

El ejercicio se hace para una economía cerrada, sin sector público, con población constante ($n = 0$) en el que el planificador resuelve el problema de control óptimo:

$$Max \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} dt$$

sujeto a

$$\dot{k} = f(L)k - c - \delta k$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

Siguiendo la mecánica en 5 pasos ya descrita en muchas ocasiones a lo largo de este curso, llegamos a la siguiente ecuación dinámica para el consumo per cápita:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f(L) - \delta - \rho)$$

que podemos compararla con la que las familias aplicarían de manera autónoma

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f(L) - f'(L)L - \delta - \rho)$$

Dado que $f(L) > f(L) - f'(L)L$, la tasa de crecimiento del consumo per cápita es mayor en la solución del planificador central → **El equilibrio de la economía descentralizada no es Pareto óptimo**

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

El equilibrio de la economía descentralizada no es Pareto óptimo

Intuitivamente, los productores individuales no internalizan los efectos de la difusión de conocimiento. Las empresas toman como suya solamente la productividad marginal del capital privado.

El aprendizaje mediante la experiencia y los efectos de la difusión de conocimiento contrarrestan exactamente los rendimientos decrecientes a los que se enfrenta el capital.

Una economía descentralizada puede moverse hacia la solución óptima mediante un impulso a la compra de bienes de capital (incentivos fiscales como subvenciones a la inversión o la producción) . Veamos un ejemplo con función de producción Cobb-Douglas:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

Función de producción Cobb-Douglas en el modelo con aprendizaje mediante la experiencia

$$Y_i = A(K_i)^{\alpha}(KL_i)^{1-\alpha}$$

con $0 < \alpha < 1$. En equilibrio ($y_i = y,\ k_i = k = K/L$), la función de producción per cápita es

$$y = A(k)^{\alpha}(K)^{1-\alpha} = A(k)^{\alpha}(kL)^{1-\alpha} = AkL^{1-\alpha}$$

con un producto medio por unidad de capital

$$\frac{y}{k} = AL^{1-\alpha} = f(L)$$

y un producto marginal del capital

$$F_1(k_i, K) = f(L) - f'(L)L = AL^{1-\alpha} - (1-\alpha)AL^{-\alpha}L = \alpha AL^{1-\alpha}$$

Las soluciones de la tasa de crecimiento del consumo per cápita en la economía descentralizada y la gestionada por el planificador central quedan así:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – MODELOS CON APRENDIZAJE MEDIANTE LA EXPERIENCIA

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(\alpha A L^{1-\alpha} - \delta - \rho)$$ Economía competitiva descentralizada

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(A L^{1-\alpha} - \delta - \rho)$$ Economía de planificación central

Para alcanzar el óptimo social en una economía competitiva descentralizada, podemos plantear dos alternativas que hagan que la empresas internalicen los efectos de la acumulación de capital agregado para su productividad individual:

- Deducción fiscal a la inversión al tipo $1-\alpha$ financiada con un impuesto que no afecte a la decisiones de la empresa
- Subvención a la producción al tipo $\frac{1-\alpha}{\alpha}$ financiada con un impuesto que no afecte a la decisiones de la empresa

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

En esta sección vamos a estudiar los efectos que tendría la participación del sector público (gobierno) en un modelo de crecimiento endógeno basado en los efectos de la mejora tecnológica que surge de la utilización de bienes y servicios públicos no rivales en los procesos productivos. Construiremos un modelo sencillo de crecimiento económico endógeno con gasto público basado en el artículo de Robert Barro (1990, *Journal Political Economy*).

Suponemos que el Estado define su política fiscal con:

- Impuestos neutrales a la decisión de producción (sobre el consumo de los hogares o la renta salarial de los trabajadores como vimos en la sesión 6)
- El ratio entre el gasto público y la producción agregada, G/Y, es constante
- El Estado mantiene un presupuesto equilibrado

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

La tecnología de producción es tipo Cobb-Douglas que incorpora una cantidad de gasto público G, no rival, generador de mejoras tecnológicas

$$Y_i = A(L_i)^{1-\alpha}(K_i)^{\alpha}G^{1-\alpha} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

Dependiendo de la evolución del gasto público y asumiendo una población activa fija, el exponente con el que aparece G en la tecnología productiva resulta crucial para definir sus propiedades. Concretamente, puede comprobarse que:

Si el exponente fuera menor que $1-\alpha$, la función de producción tendría rendimientos decrecientes a escala para K_i y G con un valor fijo de L_i. EE sin crecimiento endógeno.

Si el exponente fuera mayor que $1-\alpha$, la función de producción tendría rendimientos crecientes a escala para K_i y G con un valor fijo de L_i. Sin EE.

Si el exponente es $1-\alpha$, la función de producción tiene rendimientos constantes a escala para K_i y G con un valor fijo de L_i. EE con crecimiento endógeno.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

Las empresas van a desear maximizar el beneficio y decidirán alquilar la cuantía de capital físico que iguala su producto marginal al coste marginal:

$$\alpha A(K_i/L_i)^{\alpha-1}G^{1-\alpha} = r + \delta$$

Siendo todas las empresas de la economía idénticas, van a tener el mismo comportamiento y las cantidades elegidas individualmente de capital por trabajador van a ser iguales que la agregada ($k_i = k$)

$$\alpha A k^{\alpha-1}G^{1-\alpha} = r + \delta$$

Del mismo modo, la función de producción agregada (con población constante) es

$$Y = AL^{1-\alpha}(kL)^{\alpha}G^{1-\alpha} = ALk^{\alpha}G^{1-\alpha}$$

donde podemos elevar ambos lados a $1/\alpha$ obteniendo

$$Y^{1/\alpha} = A^{1/\alpha}L^{1/\alpha}kG^{(1-\alpha)/\alpha} = A^{1/\alpha}L^{1/\alpha}kG^{1/\alpha}G^{-1}$$

y moviendo a la parte izquierda G^{-1} mientras que $Y^{1/\alpha}$ pasa a la parte derecha:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

$$G = (G/Y)^{1/\alpha}(AL)^{1/\alpha}k$$

Sustituyendo este resultado en la condición de demanda de capital óptima para la empresa obtenemos:

$$\alpha A k^{\alpha-1}\left((G/Y)^{1/\alpha}(AL)^{1/\alpha}k\right)^{1-\alpha} = r + \delta$$

donde pueden simplificarse términos para alcanzar una expresión en la que el producto marginal del capital no depende del nivel de capital instalado (y eliminamos los rendimientos decrecientes del capital)

$$\alpha A^{1/\alpha}(G/Y)^{(1-\alpha)/\alpha}L^{(1-\alpha)/\alpha} = r + \delta$$

A continuación escribimos el problema de optimización de los hogares. Asumiendo función de utilidad de elasticidad constante, población constante ($n = 0$), un impuesto proporcional al consumo ($\tau_c > 0$) y una transferencia per cápita del Estado a la familia ($v > 0$), tenemos este problema de control óptimo:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

$$Max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

sujeto a

$$\dot{a} = ra + w - (1 + \tau_c)c + v$$

Los 5 pasos para su resolución nos llevan a:

1. Variable de control c ; variable de estado a
2. Hamiltoniano:

$$J = e^{-\rho t} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \nu[ra + w - (1 + \tau_c)c + v]$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

3. Condición de primer orden variable de control

$$\frac{\partial J}{\partial c} = e^{-\rho t} c^{-\theta} - \nu(1+\tau_c) = 0$$

4. Condición de primer orden variable de estado

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \nu r = -\dot{\nu}$$

5. Condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} \ a(t)e^{\left[-\int_0^t (r(v)dv\right]} = 0$$

La condición 3 implica $\nu = e^{-\rho t} c^{-\theta}/(1+\tau_c)$ donde, aplicando la regla de la derivada de un producto, calculamos $\dot{\nu}$ el resultado lo cambiamos de signo y lo sustituimos en 4 para llegar a la conocidísima ecuación dinámica del consumo per cápita:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

en la que vamos a reemplazar el tipo de interés de los activos por su valor de equilibrio dado el comportamiento de las empresas y el gobierno $r = \alpha A^{1/\alpha}(G/Y)^{(1-\alpha)/\alpha} L^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta$

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(\alpha A^{1/\alpha}(G/Y)^{(1-\alpha)/\alpha} L^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta - \rho\right)$$

La tasa de crecimiento del consumo per cápita va a ser constante (requisito de EE) si tanto G/Y como L son constantes en el tiempo. Como ambos supuestos han sido establecidos con anterioridad el consumo crecerá siempre a esta tasa. Dos consideraciones relevantes:

- El crecimiento del producto per cápita depende del ratio G/Y, a establecer por el gobierno. En breve analizaremos qué ratio sería el que proporciona mayor bienestar a los hogares.
- Efectos escala. Una economía con mayor población activa L tendrá un mayor crecimiento del consumo per cápita. Este resultado no se corrobora empíricamente. Se puede introducir congestión (rendimientos decrecientes) en el gasto público para eliminar el efecto escala.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

Vamos a estudiar el comportamiento del planificador social benévolo para los hogares de nuestra economía con servicios públicos. En particular, prestaremos atención a la determinación óptima de G, como un ejercicio de diseño de política fiscal óptima. Necesitamos escribir la restricción de recursos globales que debe respectar el planificador. Esta surge al combinar la restricción presupuestaria del Estado (en términos per cápita):

$$\frac{G}{L} + v = \tau_c c$$

Con la restricción presupuestaria de los hogares (también en términos per cápita y con el equilibrio de los mercados de activos de una economía cerrada)

$$\dot{k} = rk + w - (1 + \tau_c)c + v$$

Despejando las transferencias v en la primera restricción y sustituyendo el resultado en la segunda tenemos:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

$$\dot{k} = rk + w - (1+\tau_c)c + \tau_c c - \frac{G}{L} = rk + w - c - \frac{G}{L}$$

En equilibrio, el salario y el tipo de interés del capital coinciden son

$$r = f'(k) - \delta \quad ; \quad w = f(k) - f'(k)k$$

donde la función de producción incorpora gasto público

$$f(k) = Ak^{\alpha}G^{1-\alpha}$$

Consolidando las tres líneas anteriores obtenemos la restricción global de recursos:

$$\dot{k} = Ak^{\alpha}G^{1-\alpha} - c - \frac{G}{L} - \delta k$$

cuya interpretación tendría que tener clara a estas alturas el estudiante y que nos permite escribir el problema de control óptimo del planificador central:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

$$Max \int_{0}^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} dt$$

sujeto a

$$\dot{k} = Ak^{\alpha}G^{1-\alpha} - c - \frac{G}{L} - \delta k$$

Los 5 pasos para su resolución son

1. Variables de control $c, \ G$; variable de estado k
2. Hamiltoniano:

$$J = e^{-\rho t} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \nu \left[Ak^{\alpha}G^{1-\alpha} - c - \frac{G}{L} - \delta k\right]$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

3. Condiciones de primer orden de las variables de control

$$\frac{\partial J}{\partial c} = e^{-\rho t} c^{-\theta} - v = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial G} = v((1-\alpha)Ak^{\alpha}G^{-\alpha} - 1/L) = 0$$

4. Condición de primer orden para la variable de estado

$$\frac{\partial J}{\partial k} = v(\alpha A k^{\alpha-1} G^{1-\alpha} - \delta) = -\dot{v}$$

5. Condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} k(t) e^{\left[-\int_0^t (r(v)dv\right]} = 0$$

La condición $\frac{\partial J}{\partial G} = 0$ implica que el stock óptimo de gasto público es:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

$$G = \left((1-\alpha)AL\right)^{1/\alpha} k$$

En la sesión 6 se dijo que el nivel óptimo de gasto público debe cumplir con la condición de que la productividad marginal del gasto público sea igual a la unidad, $\frac{\partial Y}{\partial G} = 1$. Recordando que

$$Y = ALk^{\alpha} G^{1-\alpha}$$

la condición queda

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = (1-\alpha)ALk^{\alpha} G^{-\alpha} = 1$$

Como se puede comprobar fácilmente, solución óptima de G calculada por el planificador central es consistente con $\frac{\partial Y}{\partial G} = 1$. Respecto a la tasa de crecimiento del consumo, las condiciones de primer orden nos llevan a:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (I) – SERVICIOS PÚBLICOS Y CRECIMIENTO ENDÓGENO

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(\alpha A k^{\alpha-1} G^{1-\alpha} - \delta - \rho)$$

Insertando la solución del gasto público, $G = \left((1-\alpha)AL\right)^{1/\alpha} k$, obtenemos

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(\alpha A k^{\alpha-1}\left(\left((1-\alpha)AL\right)^{1/\alpha} k\right)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right)$$

que puede simplificarse a

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(\alpha A^{1/\alpha}(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} L^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta - \rho\right)$$

El crecimiento endógeno del consumo aumentaría con una escala mayor (aumento en L), un aumento del índice tecnológico (aumento en A), un capital físico más resistente (disminución en δ), unas familias más pacientes (disminución en ρ) y unas familias con preferencias menos sensibles a cambios en el consumo (disminución en θ).