

**COLECCIÓN DE EJERCICIOS PROPUESTOS con soluciones**

**CRECIMIENTO ECONÓMICO**

**MIGUEL CASARES**

Esta colección de ejercicios pretende mostrar las múltiples posibilidades de aplicación de los modelos teóricos de crecimiento económico a casos reales con resultados numéricos. El libro de texto incorpora, al final de cada capítulo, una serie de ejercicios de corte teórico que pueden también plantearse como trabajo a realizar durante el desarrollo del curso. Mi intención, no obstante, es la de proponer ejercicios numéricos que faciliten la comprensión de los modelos teóricos y permitan entender su aplicabilidad a partir del uso de datos reales. El estudiante podría comprobar fácilmente los efectos que tiene una modificación de alguno de los parámetros del modelo sobre el resultado de las variables endógenas en estado estacionario o en su dinámica de corto plazo. Las últimas dos sesiones se dedican al análisis de datos sobre contabilidad del crecimiento y convergencia económica y se proponen sendos ejercicios a partir de datos reales.

**EJERCICIOS - MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO  
OPTIMIZADOR (II)**

1. Modelo de Uzawa-Lucas. Para la siguiente calibración de los parámetros del modelo Uzawa-Lucas:

$$\rho = 0,04 \text{ (4\% anual)} ; \alpha = 0,36 ; \delta = 0,1 ; A = 1 ; B = 0,18 ; \theta = 2$$

i) Hallar los siguientes valores en el EE:

Tasa de crecimiento,  $\gamma^*$ , rentabilidad neta del capital,  $r^*$ , producto promedio del capital físico,  $z^*$  intensidad del uso del capital físico en la producción de bienes,  $u^*$ , el ratio consumo sobre capital físico,  $\chi^*$ , ratio capital físico sobre capital humano  $\omega^*$ .

ii) Dibujar el diagrama de fase (según el diagrama que aparece en la ilustración 5.4 de la página 255 del libro o en las diapositivas 38 y 39 de la sesión 8). Mostrar los niveles de estado estacionario  $u^*$ ,  $z^*$  y  $\chi^*$  y la trayectoria óptima de aproximación al estado estacionario.

iii) En el momento actual se conoce los valores del ratio entre capital físico y capital humano,  $\omega(0) = 0,9$ , la intensidad del capital humano utilizado en la producción de bienes,  $u(0) = 0,42$

y el ratio entre consumo y capital físico,  $\chi(0) = 0,45$ . Calcular la productividad promedio del capital físico, el tipo de interés y la tasa de crecimiento del consumo en el momento actual,  $z(0)$ ,  $r(0)$ ,  $\gamma_{C(0)}$ , y los valores para el próximo periodo de las siguientes variables:

$$\omega(1), u(1), \chi(1), z(1), r(1)$$

Discutir la dinámica de transición de estas variables. ¿Podría estar la dotación inicial situada en la trayectoria óptima de aproximación al estado estacionario?

**Soluciones:**

- i)  $\gamma^* = 0,02$  (2%),  $r^* = 0,08$  (8%),  $z^* = 0,50$ ,  $u^* = 0,3333$ ,  $\chi^* = 0,38$ ,  $\omega^* = 0,9846$ .
- ii) En la parte derecha del diagrama aparecen las rectas vertical  $\dot{z} = 0$  y la recta  $\dot{\chi} = 0$  con pendiente positiva  $\frac{\theta - \alpha}{\theta} = \frac{2 - 0,36}{0,36} = 4,5556$ . La intersección de ambas rectas se obtiene para  $z^* = 0,50$ , medido en el eje horizontal, y para  $\chi^* = 0,38$  medido en el eje vertical. La trayectoria óptima se aproxima al estado estacionario desde la posición noreste (desde combinaciones situadas a la derecha y por encima de los valores de estado estacionario). En la parte izquierda del diagrama la recta  $\dot{u} = 0$ , con pendiente  $\frac{1}{B} = \frac{1}{0,18} = 5,5556$ , determinará la cantidad de  $u^*$  medida sobre el eje horizontal.
- iii)  $z(0) = 0,6140$ ,  $r(0) = 0,1210$  (12,10%),  $\gamma_{C(0)} = 0,0405$  (4,05%)  
 $\omega(1) = 0,9546$ ,  $u(1) = 0,3972$ ,  $\chi(1) = 0,4394$ ,  $z(1) = 0,5692$ ,  $r(1) = 0,1055$  (10,55%). El producto promedio del capital  $z$  disminuye por la acumulación de capital, la intensidad del uso de capital humano en la producción de bienes  $u$  disminuye, el ratio entre consumo y capital  $\chi$  también disminuye por la acumulación de capital físico resultante del ahorro de los hogares, el ratio entre capital físico y capital humano  $\omega$  aumenta porque el capital humano crece en menor medida que el capital físico Finalmente la rentabilidad de los activos cae por los rendimientos marginales decrecientes del capital físico.

2. A partir de los datos y resultados del ejercicio anterior, supongamos que estando la economía en estado estacionario la productividad del capital humano aumenta a  $B = 0,20$

- i) Analizar los efectos sobre el nuevo EE para la tasa de crecimiento,  $\gamma^*$ , rentabilidad neta del capital,  $r^*$ , intensidad del uso del capital físico en la producción de bienes,  $u^*$ , el ratio consumo sobre capital físico,  $\chi^*$ , ratio capital físico sobre capital humano  $\omega^*$ .
- ii) Representar los cambios de la trayectoria óptima y el estado estacionario en el diagrama de fase.

**Soluciones:**

- i)  $\gamma^* = 0,03$  (3%),  $r^* = 0,10$  (10%),  $z^* = 0,5556$ ,  $u^* = 0,35$ ,  $\chi^* = 0,4256$ ,  $\omega^* = 0,8769$ . Aumenta la tasa de crecimiento,  $\gamma$ , y la rentabilidad de la inversión,  $r$ , por el aumento en la productividad del capital humano,  $u$ , porque mejora en términos relativos su productividad respecto del capital físico. El ratio entre consumo y capital

físico aumenta por lo que crece más el consumo que el capital físico. Finalmente disminuye el ratio entre capital físico y capital humano porque crece en mayor medida el capital humano dado el aumento de su productividad específica.

- ii) Las recta vertical  $\dot{z} = 0$  se desplaza hacia la derecha porque la determina el valor de estado estacionario  $z^* = B/\alpha$  que aumenta gracias al incremento de  $B$ . La recta  $\dot{\chi} = 0$  no cambia su pendiente  $\frac{\theta-\alpha}{\theta} = \frac{2-0,36}{0,36}$  pero se desplaza paralelamente hacia la derecha porque  $\chi^*$  crece con  $B$  y mueve hacia abajo el punto de corte con el eje vertical. Finalmente, en la parte izquierda del diagrama la recta  $\dot{u} = 0$  disminuye su pendiente  $1/B$  y aumenta el punto de corte con el eje vertical por el efecto positivo del aumento de  $B$  en  $u^*$ . Los efectos sobre el nuevo estado estacionario son un aumento de  $z^*$ , un aumento de  $\chi^*$  y un aumento de  $u^*$ .