

Ejercicios de Macroeconomía Avanzada

José L. Torres Chacón
Departamento de Teoría e Historia Económica
Universidad de Málaga

Septiembre 2010

Indice

I	Sistemas dinámicos básicos	5
1	Introducción a la dinámica	7
2	Modelos dinámicos básicos	29
II	Introducción al Equilibrio General	90
3	La elección intertemporal de los consumidores	91
4	Las empresas y la decisión de inversión	121
5	El gobierno y la política fiscal	133
6	El modelo simple de equilibrio general	163
III	Crecimiento Económico	171
7	Introducción al crecimiento económico	173

Indice 1

8 El modelo de Ramsey 191

9 La tecnología AK 205

Prefacio

El presente documento forma parte de un conjunto de tres manuales que se corresponden con la materias de la asignatura Macroeconomía Avanzada II, que imparte el Departamento de Teoría e Historia Económica en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Málaga, en el cuarto curso de la Licenciatura de Economía. Se trata fundamentalmente de un curso de introducción a la macroeconomía dinámica con el cual se cierra el aprendizaje de macroeconomía en la Licenciatura pero que al mismo tiempo sienta las bases para que el alumno pueda seguir cursando estudios de postgrado en economía con una sólida base respecto a los fundamentos de la macroeconomía actual.

El material que se imparte en esta asignatura se ha dividido en un total de tres manuales: Uno teórico, Apuntes de Macroeconomía Avanzada (AMA); otro de ejercicios resueltos, Ejercicio de Macroeconomía Avanzada (EMA); y un tercero de ejercicios numéricos y de computación, Macroeconomía Avanzada Computacional (MAC). En los tres manuales se ha intentado mantener una estructura similar, correspondiente al programa de la asignatura, pero con unos objetivos y contenidos muy diferentes entre ellos, siendo totalmente complementarios.

El presente manual, Ejercicios de Economía Avanzada (EMA) contiene un conjunto de ejercicios y sus correspondientes propuestas

de resolución. El objetivo de esta recopilación de ejercicios es permitir que los alumnos dispongan de una serie de ejercicios sobre el temario de la asignatura con sus respectivas soluciones. Se trata de un conjunto de propuestas de resolución como en todo manual de ejercicios resueltos. Esto significa que la resolución de cada ejercicio no tiene porqué ser exactamente la propuesta, si bien los resultados tienen que ser los mismos. La propuesta de resolución es una guía para ser aplicada en la resolución de otros ejercicios similares. Aunque el presente texto tiene un enfoque fundamentalmente práctico, también resulta de gran utilidad a nivel teórico, por cuanto se analiza una gran variedad de problemas económicos y permite observar cómo los desarrollos teóricos realizados pueden ser aplicados para responder a un conjunto muy amplio de cuestiones.

Málaga, Septiembre de 2010

José L. Torres

Parte I

**Sistemas dinámicos
básicos**

1

Introducción a la dinámica

Este tema tiene como objetivo básico la introducción al alumno en una de las herramientas básicas que vamos a utilizar para el análisis económico dinámico: los diagramas de fases. Los diagramas de fases constituyen una herramienta gráfica que se usa profusamente en el análisis macroeconómico dinámico y permite estudiar la dinámica temporal de las principales variables macroeconómicas, siendo una forma de presentar la solución de un modelo teórico así como la dinámica de las diferentes variables ante una determinada perturbación. Tal y como hemos estudiado en el tema correspondiente, la forma básica que vamos a utilizar para describir la economía es un sistema de ecuaciones diferenciales, las cuales describen el comportamiento a lo largo del tiempo de las variables de interés en función de ellas mismas y de un conjunto de variables exógenas. Para ello los ejercicios propuestos consisten en la aplicación de diferentes conceptos, tales como el estado estacionario, la estabilidad del sistema y su representación gráfica, a un conjunto de sistemas de ecuaciones diferenciales que no tienen significado económico. El objetivo que se persigue es simplemente familiarizarse con estos instrumentos y los conceptos asociados a los mismos, que posteriormente aplicaremos a modelos con contenido económico.

EJERCICIO 1.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones dinámicas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta & \beta \\ \gamma & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \eta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Calcule el valor de las variables en estado estacionario.

SOLUCIÓN:

El sistema de ecuaciones diferenciales planteado tiene la siguiente forma matricial en términos generales:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

donde A es la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas ($x_{1,t}$, $x_{2,t}$)

$$A = \begin{bmatrix} \theta & \beta \\ \gamma & -\delta \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

y B es la matriz de coeficientes asociados a las variables exógenas ($z_{1,t}$, $z_{2,t}$, $z_{3,t}$),

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \eta & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular el Estado Estacionario partimos de su definición. El Estado Estacionario se define como aquella situación en la cual todas las variables del sistema son constantes, es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

para lo cual se hace necesario que se cumpla:

$$A \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

siendo en este caso $x_{1,t} = \bar{x}_{1,t}$ y $x_{2,t} = \bar{x}_{2,t}$. Por tanto, para calcular el valor de las variables en estado estacionario tenemos que calcular el siguiente vector:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t \quad (1.6)$$

La inversa de matriz A , junto con la matriz B y el vector de variables exógenas es:

$$-A^{-1} = \frac{1}{\theta\delta + \beta\gamma} \begin{bmatrix} -\delta & -\beta \\ -\gamma & \theta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \eta & 1 \end{bmatrix}, z_t = \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

por lo que sustituyendo obtendríamos:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\theta\delta + \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & -\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \eta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

y multiplicando ambas matrices obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta\delta + \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta\eta & \delta + \beta \\ \gamma & \theta\eta & \theta - \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Por tanto, el valor de las variables en estado estacionario sería:

$$\bar{x}_{1,t} = \frac{\delta}{\theta\delta + \gamma\beta} z_{1,t} + \frac{-\beta\eta}{\theta\delta + \gamma\beta} z_{2,t} - \frac{(\delta + \beta)}{\theta\delta + \gamma\beta} z_{3,t} \quad (1.10)$$

$$\bar{x}_{2,t} = \frac{\gamma}{\theta\delta + \gamma\beta} z_{1,t} + \frac{\theta\eta}{\theta\delta + \gamma\beta} z_{2,t} + \frac{(\theta - \gamma)}{\theta\delta + \gamma\beta} z_{3,t} \quad (1.11)$$

Como podemos comprobar el valor de las dos variables endógenas en estado estacionario depende del valor de las tres variables exógenas y de las constantes del sistema.

EJERCICIO 1.2: Analice la estabilidad del siguiente sistema de ecuaciones dinámicas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta & -\beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

SOLUCIÓN:

Para realizar el análisis de estabilidad del sistema y conocer cómo van a ser las trayectorias de las variables en relación al Estado Estacionario, debemos de calcular las raíces asociadas a la matriz de las variables endógenas. Para ello lo que tenemos que hacer es resolver una ecuación de segundo grado que la obtenemos de igualar a cero el determinante de la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas menos la matriz identidad. De este modo calcularíamos:

$$\text{Det} \left[A - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (1.13)$$

de la cual obtendríamos una ecuación de segundo grado del tipo:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (1.14)$$

siendo sus raíces:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (1.15)$$

El signo de las dos raíces va a depender, por un lado del signo del coeficiente inmediatamente anterior a la raíz cuadrada ($-b$) y, por otro lado, del signo que aparece dentro de la raíz cuadrada. Así, podemos comprobar que el primer término dentro de la raíz cuadrada simplemente es el coeficiente anterior a dicha raíz pero elevado al cuadrado (b^2). Por tanto, si el segundo término de la raíz cuadrada fuese cero ($c = 0$), entonces tendríamos que al resolver la raíz cuadrada nos quedaría:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2} = \frac{-b \pm b}{2} \quad (1.16)$$

por lo que nos quedaría que una de las raíces sería negativa y la otra nula: $\lambda_1 = -b$; $\lambda_2 = 0$. Por tanto, la clave está en el signo que aparece en la raíz cuadrada, que es el que nos va a decir si al resolver la raíz cuadrada, el resultado es mayor o menor que el coeficiente anterior a la misma. Obviamente, si el signo es positivo, el resultado de resolver la raíz cuadrada es superior al coeficiente anterior a la misma y lo contrario sucedería si el signo dentro de la raíz cuadrada fuese negativo. Con este sencillo truco ya podemos calcular el signo de las raíces asociadas a la matriz A .

En el problema propuesto tendríamos

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \theta - \lambda & -\beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (1.17)$$

Calculando el determinante, agrupando términos e igualando a cero, llegamos a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\lambda^2 - (\theta + \delta)\lambda + (\theta\delta + \gamma\beta) = 0 \quad (1.18)$$

cuyas raíces van a ser las siguientes:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{(\theta + \delta) \pm \sqrt{(\theta + \delta)^2 - 4(\theta\delta + \gamma\beta)}}{2} \quad (1.19)$$

Resolviendo, obtenemos que las dos raíces son positivas:

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \quad (1.20)$$

Como podemos comprobar, al resolver la raíz cuadrada, el resultado que nos queda es un valor más pequeño que el coeficiente asociado a λ , dado que:

$$\sqrt{(\theta + \delta)^2 - 4(\theta\delta + \gamma\beta)} < (\theta + \delta) \quad (1.21)$$

Por otra parte, el primer término de la expresión (1.21), $(\theta + \delta)$ es positivo. Por tanto tenemos que un valor positivo más algo más pequeño, resulta en un valor positivo. Un valor positivo menos algo más pequeño, resulta en un valor positivo. Por tanto, las dos raíces son positivas.

EJERCICIO 1.3: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones dinámicas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta & \beta \\ \gamma & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \eta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

y represente gráficamente las condiciones de equilibrio dinámicas y el diagrama de fases.

SOLUCIÓN:

A partir del sistema en notación matricial, podemos obtener las siguientes ecuaciones diferenciales, para cada una de las variables endógenas, que nos dicen como éstas varían en el tiempo:

$$\dot{x}_{1,t} = \theta x_{1,t} + \beta x_{2,t} - z_{1,t} + z_{3,t} \quad (1.23)$$

$$\dot{x}_{2,t} = \gamma x_{1,t} - \delta x_{2,t} + \eta z_{2,t} + z_{3,t} \quad (1.24)$$

La interpretación de estas ecuaciones es sencilla, al tiempo que contiene toda la información necesaria para describir el movimiento de las variables endógenas a lo largo del tiempo. Así, la ecuación (1.23) nos indica que las variaciones en la variable 1 dependen positivamente de dicha variable, positivamente de la variable endógena 2, negativamente de la variable exógena 1 y positivamente de la variable exógena 3. Esto es, un aumento en la variable exógena 1 provocaría una disminución en la variable endógena 1, mientras que un aumento en la variable exógena 3 provocaría un aumento en la variable endógena 1. De forma similar la ecuación (1.24) nos indica que los cambios en la variable endógena 2 dependen positivamente de la variable endógena 1, negativamente de dicha variable y positivamente de las variables exógenas 2 y 3.

A continuación representamos gráficamente dichas ecuaciones. En realidad lo que vamos a representar es una solución particular de las

mismas, de las infinitas soluciones que tiene. En concreto vamos a representar dichas ecuaciones cuando su valor es cero, que es a lo que vamos a denominar una ecuación de equilibrio dinámico, ya que estamos representando la combinación de valores de las variables endógenas, dadas unas variables exógenas, tal que las variables endógenas no cambien, es decir, sean constantes en el tiempo. Como son ecuaciones lineales, para realizar su representación gráfica únicamente tenemos que calcular su pendiente.

Para calcular la pendiente de la ecuación diferencial de la primera variable endógena, bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, partimos de la condición de equilibrio parcial para dicha variable:

$$\dot{x}_{1,t} = \theta x_{1,t} + \beta x_{2,t} - z_{1,t} + z_{3,t} = 0 \quad (1.25)$$

esto es, igualamos a cero la primera ecuación diferencial del sistema. Para hacer la derivada únicamente tenemos que despejar una variable endógena en términos de otra, tal que:

$$-\theta x_{1,t} = \beta x_{2,t} - z_{1,t} + z_{3,t} \quad (1.26)$$

Dado que vamos a representar a la variable endógena 1 en el eje horizontal y a la variable endógena 2 en el eje vertical, para calcular la pendiente de la expresión (1.26), tenemos que despejar $x_{2,t}$ en función de $x_{1,t}$, de forma que:

$$x_{2,t} = -\frac{\theta}{\beta} x_{1,t} + \frac{1}{\beta} z_{1,t} - \frac{1}{\beta} z_{3,t} \quad (1.27)$$

por lo que la pendiente de esta condición de equilibrio dinámica parcial simplemente sería el coeficiente que multiplica a la variable $x_{1,t}$, y la expresamos de la siguiente forma:

$$\frac{dx_{2,t}}{dx_{1,t}} \big|_{\dot{x}_{1,t}=0} = -\frac{\theta}{\beta} < 0 \quad (1.28)$$

esto es, la pendiente de esta condición de equilibrio dinámica es negativa, por lo que su representación gráfica es la que aparece en la figura 1.1.

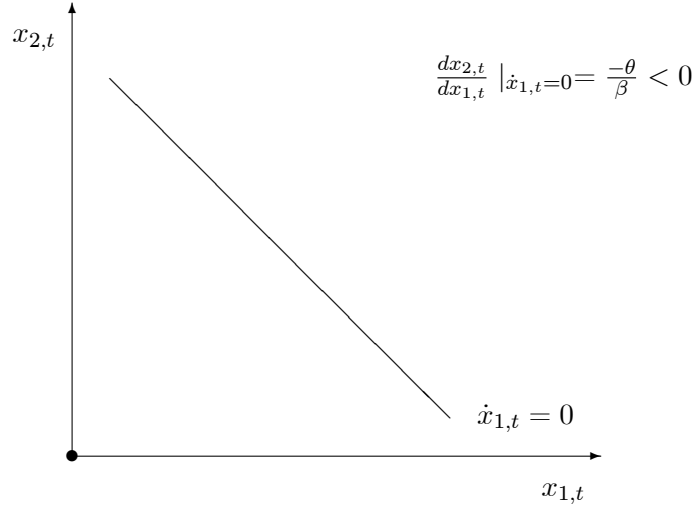


Figura 1.1: Condición de equilibrio dinámica parcial para la variable $x_{1,t}$

Esta representación gráfica nos indica la combinación de valores para las variables endógenas que tiene que existir en un momento dado del tiempo para que la variable endógena 1 permanezca constante, es decir, no cambie de valor. Así, obtenemos que dicha relación es negativa. Es decir, si el valor de $x_{1,t}$ es muy alto, para que dicho valor permanezca constante en el tiempo, entonces el valor de $x_{2,t}$ tiene que ser muy bajo.

A continuación, repetimos el mismo procedimiento para la segunda variable endógena. Igualando a cero la segunda ecuación diferencial del sistema:

$$\dot{x}_{2,t} = \gamma x_{1,t} - \delta x_{2,t} + \eta z_{2,t} + z_{3,t} = 0 \quad (1.29)$$

Despejando la segunda variable endógena en términos de la primera, obtenemos que:

$$x_{2,t} = \frac{\gamma}{\delta} x_{1,t} + \frac{\eta}{\delta} z_{2,t} + \frac{1}{\delta} z_{3,t} = 0 \quad (1.30)$$

Por tanto, la pendiente de la ecuación diferencial de la segunda variable endógena, bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, sería la siguiente:

$$\frac{dx_{2,t}}{dx_{1,t}} \big|_{\dot{x}_{2,t}=0} = \frac{\gamma}{\delta} > 0 \quad (1.31)$$

esto es, la pendiente de esta condición de equilibrio dinámica es positiva, por lo que la representaríamos tal y como aparece en la figura 1.2.

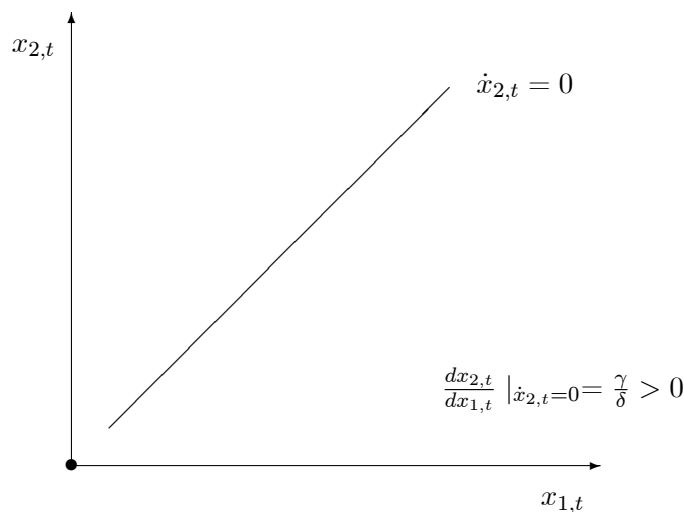


Figura 1.2: Condición de equilibrio dinámica parcial para la variable $x_{2,t}$

Una vez representadas la dos condiciones de equilibrio dinámicas parciales para nuestras variables endógenas, a continuación vamos a utilizar unas flechitas para indicar el comportamiento de las variables endógenas en situaciones de desequilibrio. Estas flechas, que es lo que nos va a permitir construir lo que vamos a denominar diagrama de fases, simplemente consisten en la representación gráfica del signo de la derivada de las variables respecto al tiempo, es decir, es una representación del signo (positivo o negativo) que toman las ecuaciones diferenciales del sistema.

La figura 1.3. muestra el diagrama de fases correspondiente a la variable endógena 1. Estas flechitas nos indican como se comporta esta variable en los dos tipos de desequilibrios en los que puede encontrarse. Como podemos observar las flechitas son horizontales, dado que hemos representado a la variable endógena 1 en el eje

horizontal. Una flechita hacia la derecha nos indicaría que la variable aumenta (su derivada respecto al tiempo sería positiva) mientras que una flechita hacia la izquierda nos indicaría que la variable disminuye (su derivada respecto al tiempo sería negativa).

Para construir este diagrama de fases procedemos de siguiente modo. En primer lugar, fijamos un punto de desequilibrio, por ejemplo a la derecha de la condición de equilibrio dinámica parcial. En todos estos puntos, o bien, la variable endógena 1 es muy elevada respecto al valor que tendría que tener en equilibrio, o bien dado un valor de la variable endógena 1, el valor de la variable endógena 2 es muy elevado. Con esta información nos vamos a nuestra ecuación diferencial, que sabemos es diferente de cero, dado que no estamos situados sobre ella:

$$\dot{x}_{1,t} = \theta x_{1,t} + \beta x_{2,t} - z_{1,t} + z_{3,t} \neq 0 \quad (1.32)$$

Ahora lo que tenemos que hacer es ver como sería el signo en función de los valores de las variables endógenas en desequilibrio y del signo de los coeficientes asociados a los mismos. Por ejemplo, en esta zona, la variable $x_{1,t}$ sería muy elevada (dado un valor de $x_{2,t}$) y lleva asociado un signo positivo, por lo que dicha ecuación sería positiva, $\dot{x}_{1,t} > 0$, es decir, en esta zona $x_{1,t}$ aumentaría en el tiempo. Por tanto, la flechita en esta zona la dibujamos hacia la derecha, indicando que en todas estas situaciones de desequilibrio la derivada de la variable endógena 1 respecto al tiempo es positiva, por lo que su valor aumentaría. El mismo análisis lo podríamos hacer usando la variable $x_{2,t}$ dado un valor de $x_{1,t}$, y obtendríamos el mismo resultado. Si repetimos este mismo análisis en la zona de la izquierda, observamos que ahora la derivada sería negativa, por lo que la flechita iría hacia la izquierda.

La figura 1.3 muestra como sería el diagrama de fases para la variable $x_{1,t}$. La línea recta con pendiente negativa indica la combinación de valores de las variables endógenas tal que la derivada de esta variable con respecto al tiempo es cero, es decir, su valor permanece constante en el tiempo. Fuera de esta línea con pendiente negativa, la derivada es distinta de cero (o positiva o negativa). Como podemos comprobar, a la derecha de esta línea, la derivada es positiva, lo que indicamos con una flecha hacia la derecha, mientras que a la izquierda su derivada es negativa, lo que viene indicado por una flecha hacia la izquierda.

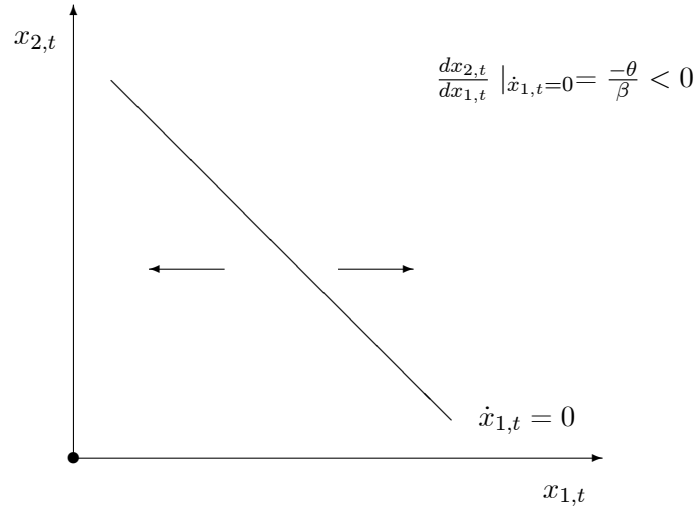


Figura 1.3: Diagrama de fases de la variable $x_{1,t}$

El mismo procedimiento lo aplicaríamos a la variable endógena 2. La representación gráfica del diagrama de fases correspondiente para esta variable aparece en la figura 1.4.

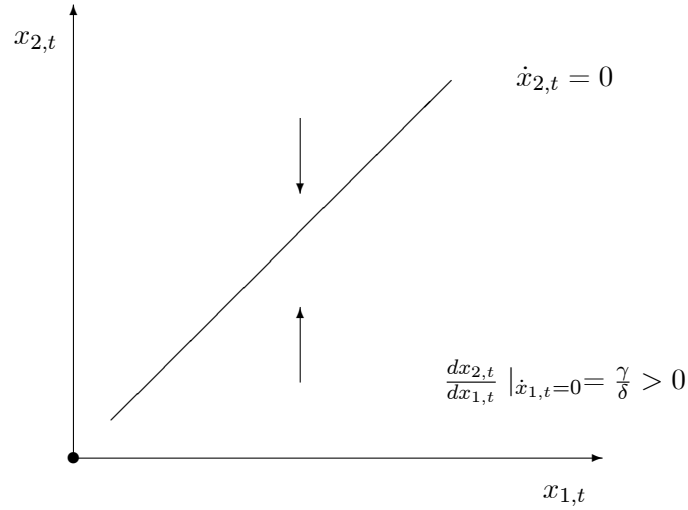


Figura 1.4: Diagrama de fases de la variable $x_{2,t}$

Una vez que hemos representado la información contenida en las ecuaciones diferenciales para nuestras variables endógenas, a continuación vamos a unir toda esa información en un único gráfico. Este gráfico, combinación de las figuras 1.3 y 1.4, sería nuestra representación del sistema dinámico en su conjunto, tal y como aparece en la figura 1.5.

Tal y como podemos observar, esta representación gráfica nos muestra las condiciones de equilibrio dinámicas parcial para cada variable (que aparecen como dos líneas rectas dado que ambas ecuaciones son lineales), la condición de equilibrio conjunto del sistema, que viene dada por el estado estacionario y en términos gráficos es el punto de corte de las condiciones anteriores, así como una serie de flechitas que nos indican como se mueve cada variable (si aumenta o disminuye) en cualquier situación. La flechas verticales nos indicarían los movimientos de la variable $x_{2,t}$ mientras que las flechas horizontales indicarían los movimientos de la variable $x_{1,t}$. Partiendo de cualquier punto, podemos conocer cómo es la trayectoria que siguen ambas variables. De este modo ya tenemos representada en términos gráficos (casi) toda la información que contiene el sistema de ecuaciones estudiado, representación gráfica que resulta muy útil para su utilización en el análisis de perturbaciones.

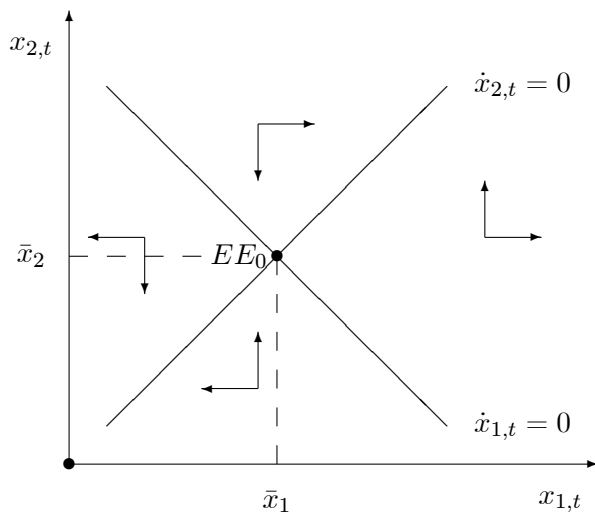


Figura 1.5: Representación del sistema dinámico

EJERCICIO 1.4: Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta & -\beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & -\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Se pide:

1. Valor de las variables en estado estacionario.
 2. Análisis de estabilidad.
 3. Representación gráfica de las condiciones de equilibrio dinámicas y diagrama de fases.
 4. Análisis de los efectos de un aumento en $z_{1,t}$.
-

SOLUCIÓN:

1. Valor de las variables en Estado Estacionario: El sistema de ecuaciones diferenciales planteado tiene la siguiente forma matricial en términos generales:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

donde A es la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas y B es la matriz de coeficientes asociados a las variables exógenas.

El Estado Estacionario se define como aquella situación en la cual todas las variables del sistema son constantes, es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

para lo cual se hace necesario que:

$$A \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

siendo en este caso $x_{1,t} = \bar{x}_{1,t}$ y $x_{2,t} = \bar{x}_{2,t}$. Por tanto, para calcular el valor de las variables en estado estacionario tenemos que calcular el siguiente vector:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t \quad (1.37)$$

por lo que tendríamos:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\theta\delta + \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & \beta \\ -\gamma & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & -\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

y multiplicando ambas matrices obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\theta\delta + \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & \delta\sigma - \beta\eta \\ -\gamma & -\gamma\sigma - \theta\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Por tanto, el valor de las variables en estado estacionario sería:

$$\bar{x}_{1,t} = \frac{-\delta}{\theta\delta + \beta\gamma} z_{1,t} - \frac{\delta\sigma - \beta\eta}{\theta\delta + \beta\gamma} z_{2,t} \quad (1.40)$$

$$\bar{x}_{2,t} = \frac{\gamma}{\theta\delta + \beta\gamma} z_{1,t} + \frac{\gamma\sigma + \theta\eta}{\theta\delta + \beta\gamma} z_{2,t} \quad (1.41)$$

Como podemos comprobar el valor de las dos variables endógenas en estado estacionario depende del valor de las dos variables exógenas.

2. Análisis de estabilidad del sistema: Para analizar la estabilidad del sistema tenemos que calcular los valores propios asociados al mismo y en concreto, es su signo (positivo o negativo) lo que nos interesa. Para calcular el signo de los valores propios procedemos como sigue. En primer lugar calculamos el siguiente determinante y lo igualamos a cero:

$$\text{Det}[A - \lambda I] = 0$$

$$\text{Det} \left[\begin{bmatrix} \theta & -\beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = \text{Det} \begin{bmatrix} \theta - \lambda & -\beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (1.42)$$

a partir del cual obtendríamos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\lambda^2 - \lambda(\theta + \delta) + (\theta\delta + \beta\gamma) = 0 \quad (1.43)$$

Resolviendo obtenemos:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\theta + \delta \pm \sqrt{(\theta + \delta)^2 - 4(\theta\delta + \beta\gamma)}}{2} \quad (1.44)$$

La clave está en ver como es el signo asociado al segundo componente dentro de la raíz cuadrada. Si el segundo componente de la raíz cuadrada fuese cero, entonces al resolver dicha raíz cuadrada el resultado sería igual que el coeficiente asociado a λ . Por tanto si este segundo componente de la raíz cuadrada tiene signo positivo, al resolver la raíz nos quedaría un número mayor (en valor absoluto) que el coeficiente asociado a λ . Por el contrario, si el signo fuese negativo, entonces al resolver nos daría un número menor (en valor absoluto) al coeficiente de λ . Como el signo que hay dentro de la raíz cuadrada es negativo, esto quiere decir que al resolver la raíz cuadrada lo que nos queda va a ser inferior al negativo del coeficiente de λ . Por tanto, como el coeficiente asociado a λ es negativo, el primer término de la expresión es positivo. Para la primera raíz tendríamos: positivo más algo más pequeño, positivo. Para la segunda raíz tendríamos: positivo menos algo más pequeño, positivo. Por tanto, las dos raíces son positivas ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$), por lo que el sistema presenta inestabilidad global, es decir, todas las trayectorias que siguen las variables nos alejan del estado estacionario. Así, pues este sistema de ecuaciones no tendría significado económico, ya que una vez se produzca una perturbación no se vuelve a alcanzar el nuevo estado estacionario.

3. Representación gráfica de las condiciones de equilibrio dinámicas: Para realizar la representación gráfica únicamente debemos calcular la pendiente de cada condición en equilibrio parcial, dado que las ecuaciones que estamos utilizando son lineales. En concreto, lo que representaríamos sería una solución particular correspondiente al equilibrio dinámico parcial, aquella para la cual las derivadas temporales son cero, esto es:

$$\dot{x}_{1,t} = \theta x_{1,t} - \beta x_{2,t} + z_{1,t} + \sigma z_{2,t} = 0 \quad (1.45)$$

$$\dot{x}_{2,t} = \gamma x_{1,t} + \delta x_{2,t} - \eta z_{2,t} = 0 \quad (1.46)$$

Vamos a representar $x_{2,t}$ en el eje vertical y $x_{1,t}$ en el eje horizontal, por lo que tendríamos que derivar $x_{2,t}$ respecto a $x_{1,t}$. Calculamos la pendiente de la primera ecuación diferencial:

$$\theta x_{1,t} - \beta x_{2,t} + z_{1,t} + \sigma z_{2,t} = 0 \quad (1.47)$$

$$-\beta x_{2,t} = -\theta x_{1,t} - z_{1,t} - \sigma z_{2,t} \quad (1.48)$$

$$x_{2,t} = \frac{\theta}{\beta} x_{1,t} - \frac{1}{\beta} z_{1,t} - \frac{\sigma}{\beta} z_{2,t} \quad (1.49)$$

Por tanto, obtenemos que:

$$\frac{dx_{2,t}}{dx_{1,t}} \big|_{\dot{x}_{1,t}=0} = \frac{\theta}{\beta} > 0 \quad (1.50)$$

por lo que la pendiente sería positiva. A continuación realizamos el mismo procedimiento con la segunda ecuación de equilibrio parcial:

$$\gamma x_{1,t} + \delta x_{2,t} - \eta z_{2,t} = 0 \quad (1.51)$$

$$x_{2,t} = -\frac{\gamma}{\delta} x_{1,t} + \frac{\eta}{\delta} z_{2,t} \quad (1.52)$$

por lo que resulta

$$\frac{dx_{2,t}}{dx_{1,t}} \big|_{\dot{x}_{2,t}=0} = -\frac{\gamma}{\delta} < 0 \quad (1.53)$$

es decir, la pendiente sería negativa.

Esta línea con pendiente positiva nos indica la combinación de valores que tienen que tomar las variables endógenas 1 y 2, para que la variable endógena 1 sea constante en el tiempo, es decir, su derivada con respecto al tiempo sea nula. Por tanto, cualquier combinación de valores que se encuentre fuera de dicha recta nos indicaría que la variable endógena 1 no es constante, y por tanto, o bien estaría aumentando (su derivada respecto al tiempo sería positiva) o bien estaría disminuyendo (su derivada respecto al tiempo sería negativa). A la derecha de dicha condición de equilibrio dinámica nos encontramos con que o bien $x_{1,t}$ es muy grande (respecto al valor que tendría que tener para que existiese equilibrio parcial) o bien $x_{2,t}$ es muy pequeño (respecto al valor que tendría

que tener para que existiese equilibrio parcial). Analizamos los signos que tienen dichas variables en la ecuación dinámica para la variable $x_{1,t}$. Como podemos comprobar, el signo asociado a $x_{1,t}$ es positivo, mientras que el signo asociado a $x_{2,t}$ es negativo. Por tanto, si $x_{1,t}$ es muy grande y su signo es positivo, entonces la ecuación es mayor que cero, es decir, la derivada con respecto al tiempo de la variable endógena $x_{1,t}$ es positiva, por lo que su valor aumentaría. Alternativamente, podemos hacer el mismo análisis en términos de $x_{2,t}$. Así, a la derecha de esta condición de equilibrio dinámica $x_{2,t}$ es muy pequeño y dado que tiene un signo negativo, este valor negativo sería inferior al que se requiere para que $x_{1,t}$ sea constante, por lo que la ecuación sería positiva. Por tanto, $x_{1,t}$ aumentaría a la derecha de esta condición dinámica mientras que disminuiría en cualquier combinación de valores situados a su izquierda.

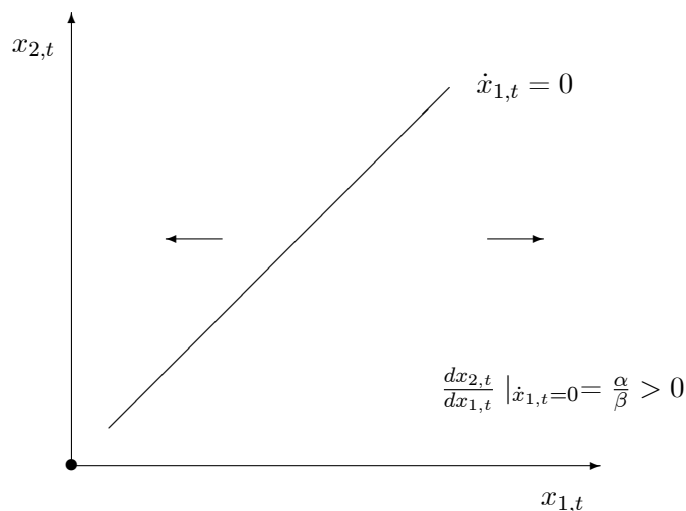


Figura 1.6: Representación de la dinámica de la variable 1

A continuación repetimos el mismo análisis en términos de la ecuación dinámica de equilibrio parcial para la variable endógena 2. En primer lugar representamos gráficamente dicha condición de equilibrio dinámica parcial, observando que tiene pendiente negativa. En este caso, para que $x_{2,t}$ sea constante en el tiempo, se requiere que la relación entre las dos variables endógenas sea inversa, es decir

si $x_{1,t}$ aumenta entonces $x_{2,t}$ tiene que ser inferior para que $x_{2,t}$ permanezca constante.

De nuevo, realizamos el mismo análisis anterior para conocer que le sucede a $x_{2,t}$ en situaciones de desequilibrio. Por ejemplo, a la derecha de esta condición de equilibrio dinámico parcial $x_{1,t}$ es muy elevado (respecto al valor que debería tener para que existiese equilibrio parcial, es decir, para que $x_{2,t}$ fuese constante). Como su signo es positivo en dicha ecuación, esto quiere decir que este positivo es muy elevado, por lo que la ecuación sería positiva, es decir, la derivada de $x_{2,t}$ respecto al tiempo sería positiva, por lo que $x_{2,t}$ estaría aumentando. A la izquierda de dicha condición de equilibrio dinámico parcial $x_{1,t}$ sería muy pequeño, por lo que la ecuación sería negativa (dado que dicha variable tiene un signo positivo), es decir, $x_{2,t}$ estaría disminuyendo.

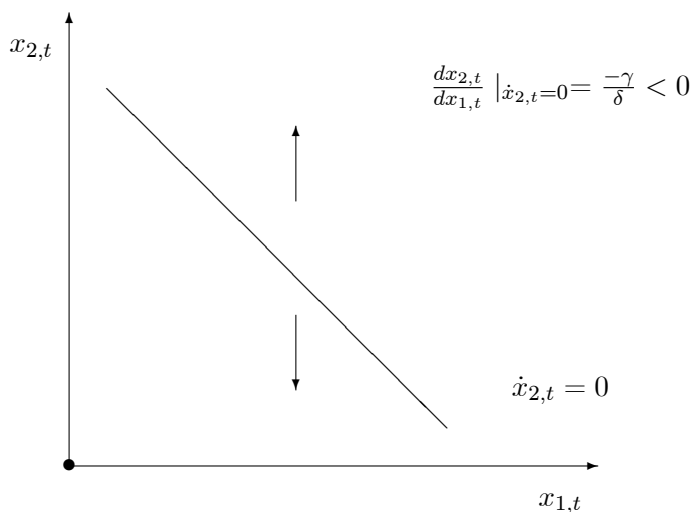


Figura 1.7: Representación de la dinámica de la variable 2

4. Diagrama de fases: Una vez tenemos representadas las dos condiciones de equilibrio dinámico y el comportamiento de ambas variables en situación de desequilibrio, a continuación representamos en un mismo gráfico los resultados anteriores, obteniendo la representación gráfica de nuestro sistema de ecuaciones y dando lugar al denominado diagrama de fases del sistema, que nos indica

el comportamiento de nuestras variables en cada situación, a la vez que podemos definir el estado estacionario en términos gráficos.

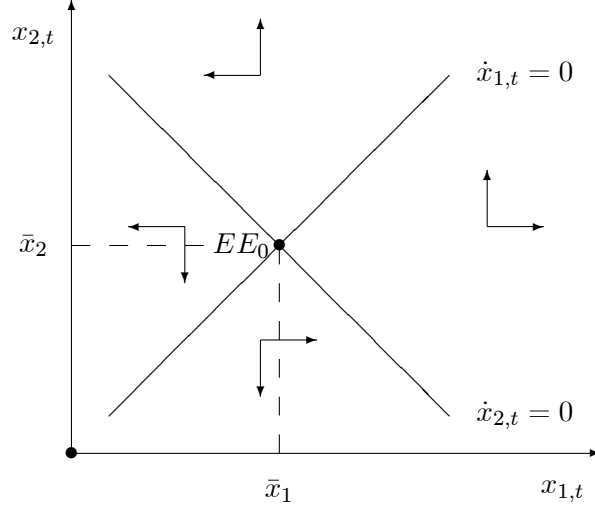


Figura 1.8: Representación del diagrama de fases

5. Análisis de los efectos de un aumento en $z_{1,t}$: Para analizar los efectos temporales de una perturbación, en primer lugar, tenemos que calcular el nuevo estado estacionario una vez que se ha producido dicha perturbación, que correspondería con sus efectos en el largo plazo. El nuevo estado estacionario puede ser calculado de dos formas. O bien derivamos el valor de las variables en estado estacionario respecto a la perturbación y vemos cuáles son sus signos, o bien analizamos como cambian las condiciones de equilibrio dinámicas, para representar su nueva solución.

Así, dados los valores de estado estacionario obtenemos que:

$$\bar{x}_{1,t} = \frac{-\delta}{\theta\delta + \beta\gamma} z_{1,t} - \frac{\delta\sigma - \beta\eta}{\theta\delta + \beta\gamma} z_{2,t} \quad (1.54)$$

$$\bar{x}_{2,t} = \frac{\gamma}{\theta\delta + \beta\gamma} z_{1,t} + \frac{\gamma\sigma + \theta\eta}{\theta\delta + \beta\gamma} z_{2,t} \quad (1.55)$$

Por tanto, derivando respecto a la perturbación que se ha producido obtenemos:

$$\frac{\partial \bar{x}_{1,t}}{\partial z_{1,t}} = \frac{-\delta}{\theta\delta + \beta\gamma} < 0 \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial \bar{x}_{2,t}}{\partial z_{1,t}} = \frac{\gamma}{\theta\delta + \beta\gamma} > 0 \quad (1.57)$$

Vemos como la derivada del valor de estado estacionario de $x_{1,t}$ respecto a la perturbación es negativa, mientras que la derivada de $x_{2,t}$ es positiva. Esto significa que, a largo plazo, en el nuevo estado estacionario esta perturbación ha provocado una disminución de $x_{1,t}$ y un aumento de $x_{2,t}$, respecto al estado estacionario inicial. Por tanto, el nuevo equilibrio se situaría hacia arriba y hacia la izquierda del punto de equilibrio inicial.

Otra forma de calcular el nuevo estado estacionario es a través del análisis gráfico, analizando cómo cambia la solución particular igual a cero de nuestras condiciones de equilibrio dinámicas. Tal y como podemos observar, la variable exógena $z_{1,t}$ sólo aparece en la ecuación correspondiente a la variable endógena $x_{1,t}$. Esto significa que la representación gráfica para la ecuación diferencial de la variable endógena $x_{2,t}$ no experimenta ninguna variación, pero si cambia la correspondiente a $x_{1,t}$, ya que cambia la constante de la misma (representada por las variables exógenas). Esto significa que únicamente se va a producir una alteración en la representación gráfica de la condición de equilibrio dinámica parcial de la variable $x_{1,t}$, mientras que la correspondiente a la variable $x_{2,t}$ permanece sin alteración.

Para conocer la nueva representación gráfica de esta ecuación diferencial, tenemos que observar el signo de la perturbación y el signo de una de las variables endógenas. Así, vemos que el signo de $z_{1,t}$ es positivo. Por tanto, la ecuación, que partía de un valor de cero, al aumentar su constante (que tiene signo positivo) se hace positiva. Para volver a representar su solución para la cual la ecuación es cero, tenemos que volver a equilibrarla, es decir, o algo positivo dentro de dicha ecuación tiene que disminuir o algo negativo tiene que aumentar. Si observamos el signo asociado a $x_{1,t}$ vemos que este es positivo, por lo que $x_{1,t}$ tendría que disminuir para que esta ecuación volviese a ser cero. Esto significa que ahora para cada valor de $x_{2,t}$, el valor de $x_{1,t}$ tiene que ser menor para que su valor se mantenga constante en el tiempo. En términos gráficos es como si esta condición de equilibrio dinámica se hubiese desplazado hacia la izquierda.

Alternativamente, podemos realizar dicho análisis en términos de la otra variable endógena. Así, observamos que el signo asociado a $x_{2,t}$ es negativo, por lo que para que esta ecuación volviese a ser cero, esta variable tendría que aumentar (el negativo tendría que ser más grande). Esto significa que para cada $x_{2,t}$, $x_{1,t}$ tiene que ser menor, o alternativamente, para cada $x_{1,t}$, $x_{2,t}$ tendría que ser mayor. Por tanto, la nueva solución la tenemos que representar a la izquierda de la que teníamos antes de que se produjese la perturbación, tal y como aparece reflejado en la figura 1.9.

Como podemos observar en esta figura, ahora el nuevo estado estacionario está situado a la izquierda y arriba del estado estacionario inicial, indicando que a largo plazo esta perturbación va a provocar un aumento de $x_{2,t}$ y una disminución en $x_{1,t}$.

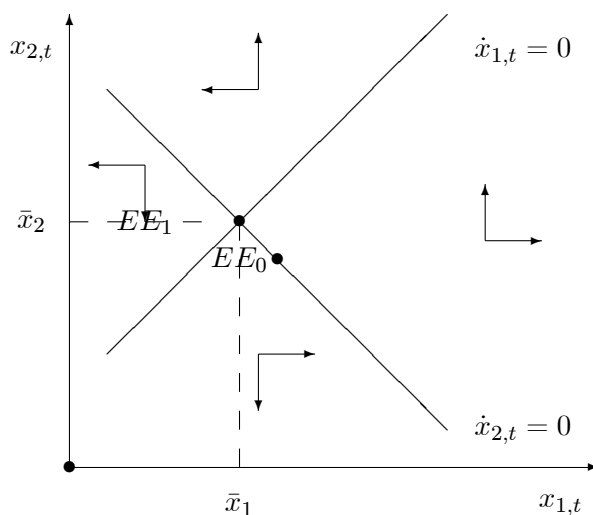


Figura 1.9: Efecto a largo plazo de un aumento en $z_{1,t}$

Una vez hemos representado gráficamente el nuevo estado estacionario, a continuación describimos la dinámica de las variables una vez se ha producido la perturbación. Esta dinámica nos va a indicar cómo se mueven las variables endógenas a partir de la situación inicial, es decir, del estado estacionario inicial, representando el corto y el medio plazo. Sin embargo, en este caso, y tal y como nos indica el diagrama de fases, el sistema no va a alcanzar el nuevo estado estacionario, sino que tanto $x_{1,t}$ como $x_{2,t}$ van a ir

aumentando de forma indefinida. Este resultado es consecuencia del obtenido anteriormente en términos de la estabilidad del sistema, según el cual los valores propios de la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas eran positivos, por lo que el sistema era globalmente inestable, es decir, todas las trayectorias nos alejaban del estado estacionario.

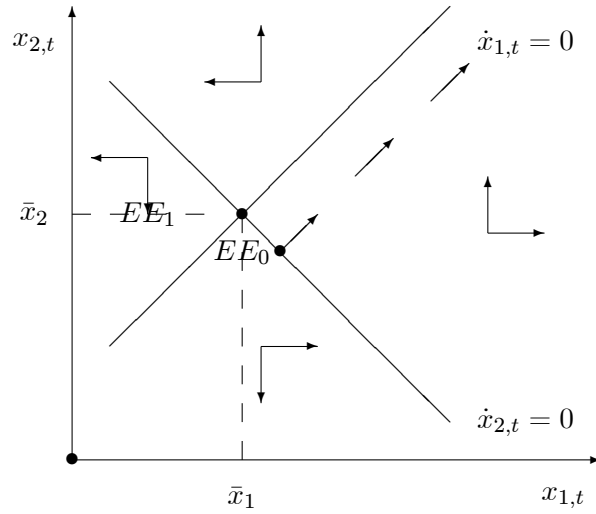


Figura 1.20: Efectos a medio plazo de un aumento en $z_{1,t}$

2

Modelos dinámicos básicos

En este tema vamos a realizar una serie de ejercicios con modelos básicos que tienen contenido económico con el objetivo de aplicar las técnicas de análisis dinámico que hemos ilustrado en el tema anterior. Los ejercicios que vamos a resolver son muy similares a los realizados en el tema 2 de AMA, pero introduciendo algunos elementos diferenciadores en las ecuaciones que definen la estructura de una economía. Se trata de ir adquiriendo práctica en la resolución de este tipo de modelos dinámicos, así como en la representación del diagrama de fases para la economía resultante. El objetivo que se persigue es familiarizarse con este tipo de análisis al tiempo que estudiar los efectos dinámicos de determinadas perturbaciones que pueden ser muy ilustrativas para conocer el comportamiento de una economía y la interrelación entre las diferentes variables macroeconómicas.

Tal y como veremos, los pasos a seguir y los instrumentos a utilizar son siempre los mismos en todos los casos. Así, lo que importa no es conocer estos modelos (pueden existir miles de variantes distintas) sino aprender a resolverlos e interpretarlos en términos económicos así como familiarizarse con el uso de los diagramas de fases que constituye un elemento gráfico de gran utilidad a la hora de estudiar una gran variedad de problemas económicos en un contexto dinámico.

EJERCICIO 2.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones que definen una economía

$$m_t - p_t = \psi y_t - \theta i_t \quad (2.1)$$

$$y_t^d = \beta_0 - \beta_1 i_t \quad (2.2)$$

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) \quad (2.3)$$

$$\dot{y}_t = v(y_t^d - y_t) \quad (2.4)$$

donde m es el logaritmo de la cantidad de dinero, p el logaritmo del nivel de precios, y el logaritmo del nivel de producción, \bar{y} el logaritmo del nivel de producción potencial, i el tipo de interés nominal e y^d el logaritmo del nivel de demanda.

Resuelva el modelo aplicando los 10 pasos enumerados en el tema 2 de AMA y analice cuáles son los efectos de un aumento en el nivel de producción potencial de la economía.

SOLUCIÓN:

Como podemos observar, el sistema de ecuaciones que definen nuestra economía es muy similar al correspondiente al ejercicio 2.1 del manual AMA. El modelo está compuesto de cuatro ecuaciones. La primera ecuación determina el equilibrio en el mercado de dinero. La segunda ecuación es la demanda agregada. La tercera ecuación determina la dinámica de los precios, es decir, la inflación. Por último, la cuarta ecuación determina la dinámica del nivel de producción, es decir, del crecimiento económico. En este caso, hemos introducido un cambio respecto al modelo resuelto en AMA. En este ejercicio hemos simplificado la función de demanda agregada. En lugar de depender negativamente del tipo de interés real, va a depender del tipo de interés nominal. Este cambio no va a tener

consecuencias sobre el comportamiento explicativo del modelo, ya que no suponemos la existencia de una tasa de crecimiento positiva de la cantidad de dinero. En el caso en que la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero fuese positiva, entonces no podríamos realizar esta simplificación.

En primer lugar, vamos a enumerar los 10 pasos que debemos aplicar para trabajar con este tipo de modelos y poder responder a la pregunta planteada, esto es, cuáles son los efectos de un aumento en el nivel de producción potencial. De forma esquemática estos pasos son los siguientes:

1. Variables endógenas y exógenas.
2. Definir variables endógenas de referencia
3. Obtención de las ecuaciones diferenciales.
4. Modelo en notación matricial.
5. Valor de las variables en estado estacionario.
6. Análisis de estabilidad.
7. Representación gráfica de las condiciones de equilibrio dinámicas.
8. Diagrama de fases.
9. Senda estable.
10. Análisis de perturbaciones.

Paso 1: Variables endógenas y exógenas: En primer lugar tenemos que clasificar a las variables en función de si se trata de variables endógenas o bien son exógenas. Este procedimiento es, en principio, bastante sencillo. Únicamente tenemos que pensar si en nuestra economía dicha variable se determina "**dentro**" de la economía o bien se determina "**fuera**" de la economía. Así, las variables que se determinan dentro del mercado como fruto de la interacción de los distintos agentes económicos son variables endógenas, que son las que tenemos que determinar. Por el contrario, las variables que no se determinan dentro del funcionamiento de los

mercados como resultado de la interacción de los distintos agentes económico o son determinadas por un sólo agente económico, son variables exógenas. Esto es lo que sucede con las variables que son determinadas a través de la política económica.

Las variables que aparecen en el modelo son las siguientes seis:

1. Cantidad de dinero (exógena)
2. Precios (endógenos)
3. Nivel de producción potencial (exógeno)
4. Tipo de interés nominal (endógeno)
5. Nivel de demanda (endógeno)
6. Nivel de producción (endógeno)

Tal y como podemos observar, tenemos cuatro variables endógenas y dos variables exógenas, por lo que podemos resolver el sistema. También vamos a considerar como variable exógena el componente autónomo de la demanda agregada, β_0 , que lo vamos a identificar como el gasto público.

Paso 2: Variables endógenas de referencia: En segundo lugar, definimos las variables endógenas de referencia, que son las únicas variables en términos de las cuales vamos a representar nuestra economía. Podemos elegir como variable endógena cualquiera de las variables endógenas de nuestra economía, u otras variables endógenas que sean función de alguna de las endógenas. En este caso, el enunciado del problema no nos especifica que variables endógenas vamos a usar para describir nuestra economía, por lo que escogemos directamente las dos variables endógenas para las cuales tenemos una ecuación dinámica. Esto es:

1. Nivel de precios
2. Nivel de producción

Paso 3: Ecuaciones diferenciales: Para obtener las dos ecuaciones dinámicas que van a representar nuestra economía,

necesitamos comprimir la información de las cuatro ecuaciones de nuestro sistema en sólo dos. Para ello hemos de resolver para las variables endógenas que no van a ser de referencia, esto es, el tipo de interés nominal y el nivel de demanda agregada. Así, tenemos que calcular el valor de estas variables en función de las variables endógenas de referencia y de las exógenas. Una vez que tenemos sus valores, sustituimos dichos valores en las ecuaciones (2.3) y (2.4).

Despejamos el tipo de interés nominal de la ecuación (2.1):

$$i_t = -\frac{1}{\theta}(m_t - p_t - \psi y_t) \quad (2.5)$$

Sustituimos (2.5) en (2.2):

$$y_t^d = \beta_0 - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} y_t + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) \quad (2.6)$$

Sustituyendo la expresión (2.6) en la ecuación dinámica del nivel de producción (expresión 2.4):

$$\begin{aligned} \dot{y}_t &= v \left[\beta_0 - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} y_t + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) - y_t \right] \\ \dot{y}_t &= v \left[\beta_0 - \left(\frac{\beta_1 \psi}{\theta} + 1 \right) y_t + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) \right] \end{aligned}$$

Por tanto, ya tenemos nuestras dos ecuaciones diferenciales, ya que la correspondiente al nivel de precios, no necesita ninguna transformación al ser una función de las variables endógenas de referencia y de variable exógenas.

Paso 4: Modelo en notación matricial: Una vez que tenemos nuestra dos ecuaciones diferenciales, escribimos el modelo en notación matricial con el objetivo de identificar la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas, ya que vamos a tener que trabajar con esta matriz. Las dos ecuaciones diferenciales de nuestro modelo son:

$$\begin{aligned} \dot{p}_t &= \mu(y_t - \bar{y}_t) \\ \dot{y}_t &= v \left[\beta_0 + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) - \left(\frac{\beta_1 \psi}{\theta} + 1 \right) y_t \right] \end{aligned}$$

Puestas en notación matricial resultaría:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\frac{v\beta_1}{\theta} & -v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu \\ v & \frac{v\beta_1}{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

Paso 5: Cálculo de los valores de estado estacionario: Para calcular el valor de las variables en Estado Estacionario, invertimos la matriz A , la multiplicamos por -1, multiplicamos por la matriz B y multiplicamos por el vector de variables exógenas, es decir:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t = - \begin{bmatrix} -v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) & -\mu \\ -\frac{v\beta_1}{\theta} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu \\ v & \frac{v\beta_1}{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\frac{v\beta_1}{\theta} & -v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu \\ v & \frac{v\beta_1}{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_t = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

Comenzamos invirtiendo la matriz A . Para ello, en primer lugar calculamos la adjunta de la matriz A , siendo:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) & -\frac{v\beta_1}{\theta} \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$$

Su traspuesta es:

$$adj(A)' = \begin{bmatrix} -v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) & -\mu \\ \frac{v\beta_1}{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

siendo su determinante:

$$|A| = \frac{v\beta_1\mu}{\theta}$$

por lo que el negativo de la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{\theta}{v\beta_1\mu} \begin{bmatrix} -v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) & -\mu \\ \frac{v\beta_1}{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

o bien:

Por tanto obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t = -\frac{\theta}{v\beta_1\mu} \begin{bmatrix} -v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) & -\mu \\ \frac{v\beta_1}{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

y multiplicando las matrices $-A^{-1}B$ se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t = -\frac{\theta}{v\beta_1\mu} \begin{bmatrix} -\mu v & -\mu \frac{v\beta_1}{\theta} & \mu v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) \\ 0 & 0 & -\mu \frac{v\beta_1}{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

Finalmente obtenemos los valores de las variables en estado estacionario:

$$\bar{p}_t = \frac{\theta\beta_0}{\beta_1} + m_t - (\psi + \frac{\theta}{\beta_1})\bar{y}_t$$

$$\bar{y}_t = \bar{y}_t$$

Paso 6: Análisis de estabilidad: A continuación analizamos la estabilidad del sistema, calculando el signo de los valores propios asociados a la matriz de coeficientes de las variables endógenas. Para ello tenemos que calcular el siguiente determinante:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 0 - \lambda & \mu \\ \frac{-v\beta_1}{\theta} & -v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

cuyo resultado es la siguiente ecuación:

$$\lambda^2 + \lambda \left[v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) \right] + \frac{v\beta_1\mu}{\theta} = 0$$

Resolviendo obtenemos que los valores propios son los siguientes:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) \pm \sqrt{\left[v(\frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1) \right]^2 - \frac{4v\beta_1\mu}{\theta}}}{2}$$

Tal y como podemos observar el signo dentro de la raíz cuadrada es negativo, por lo que al resolver esta raíz cuadrada lo que queda es menor que el primer término. Dado que el primer término es negativo, resulta que ambas raíces serían negativas. En efecto: negativo más algo más pequeño, negativo y negativo menos algo más pequeño, negativo. Por tanto, existiría estabilidad global, es decir, todas las trayectorias nos conducirían al estado estacionario

Paso 7: Representación gráfica: A continuación, representamos gráficamente las dos condiciones de equilibrio dinámicas, o más exactamente, aquella solución para la cual las ecuaciones valen cero. Esto también nos va a permitir describir el comportamiento de las variables endógenas fuera de su equilibrio respectivo. Dado que las ecuaciones diferenciales son lineales lo único que tenemos que hacer es calcular su pendiente. Para ello lo que hacemos es igualar a cero cada ecuación (equilibrio dinámico parcial) y despejar la variable que colocamos en el eje vertical en función de la variable que colocamos en el eje horizontal. Vamos a representar al nivel de precios en el eje vertical, mientras que en el eje horizontal vamos a representar al nivel de producción. Por tanto, despejaríamos el nivel de precios en términos del nivel de producción en cada ecuación. Así por ejemplo, respecto a la primera ecuación tenemos:

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) = 0$$

Despejando el nivel de precios obtenemos:

$$0p_t = \mu y_t - \mu \bar{y}_t$$

$$p_t = \frac{\mu}{0} y_t - \frac{\mu}{0} \bar{y}_t$$

Con respecto a la segunda ecuación tendríamos:

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) - \left(\frac{\beta_1 \psi}{\theta} + 1 \right) y_t \right] = 0$$

De nuevo, despejando el nivel de precios obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{v\beta_1}{\theta} p_t &= v \left[\beta_0 + \frac{\beta_1}{\theta} m_t - \left(\frac{\beta_1 \psi}{\theta} + 1 \right) y_t \right] \\ p_t &= \frac{v \left[\beta_0 + \frac{\beta_1}{\theta} m_t - \left(\frac{\beta_1 \psi}{\theta} + 1 \right) y_t \right]}{\frac{v\beta_1}{\theta}} \end{aligned}$$

Por tanto, únicamente tendríamos que derivar el nivel de precios respecto al nivel de producción en cada ecuación, por lo que la pendiente en este caso sería igual al coeficiente que multiplica al nivel de producción.

La pendiente de la ecuación diferencial de la primera variable endógena (nivel de precios), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, es:

$$\frac{dp_t}{dy_t} \Big|_{\dot{p}_t=0} = \frac{\mu}{0} = \infty$$

La pendiente de la ecuación diferencial de la segunda variable endógena (nivel de producción), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, sería:

$$\frac{dp_t}{dy_t} \Big|_{\dot{y}_t=0} = \frac{-v \left(\frac{\beta_1 \psi}{\theta} + 1 \right)}{\frac{v\beta_1}{\theta}} < 0$$

dado que por el análisis de estabilidad sabemos que el numerador de esta expresión es negativo.

Por tanto, la presentación gráfica de la condición de equilibrio parcial para el nivel de precios es una línea vertical. Esto significa que para que exista equilibrio parcial del nivel de precios, es decir, para que los precios sean constantes, lo único que se requiere es que

el nivel de producción sea igual a su nivel potencial, sin importar el nivel de precios de la economía.

A continuación, representamos gráficamente el comportamiento del nivel de precios en situación de desequilibrio. Tal y como podemos observar a la derecha de esta condición de equilibrio dinámica, el nivel de producción es superior al potencial, por lo que esta ecuación sería positiva, indicando que los precios aumentan. Por el contrario, a la izquierda el nivel de producción es inferior al potencial, por lo que los precios disminuirían. En efecto, a la derecha de esta condición de equilibrio dinámica el nivel de producción de la economía es superior a su nivel potencial, por lo que las empresas estarían produciendo por encima de su capacidad productiva, lo que se traduciría en tensiones inflacionistas. Por el contrario, a la izquierda de esta condición de equilibrio dinámica, el nivel de producción es inferior al potencial, es decir, las empresas están produciendo por debajo de su capacidad productiva, lo que se traduciría en disminuciones en los precios, tal y como viene descrito por la ecuación (2.4).

La representación gráfica de la condición de equilibrio parcial para el nivel de producción tiene pendiente negativa, indicando que para que el nivel de producción permanezca constante se requiere que si los precios son muy altos el nivel de producción sea muy bajo, mientras que si el nivel de precios es muy bajo, el nivel de producción debería ser muy alto.

De nuevo, calculamos el comportamiento de esta variable en situación de desequilibrio. Así, a la derecha de esta condición de equilibrio dinámica, dado un nivel de producción, los precios son muy elevados. Dado que el nivel de precios aparece en esta ecuación con signo negativo, esto quiere decir que dicha ecuación sería negativa, por lo que disminuiría el nivel de producción. Por el contrario, a la izquierda, dado un nivel de producción los precios serían muy bajos, por lo que aumentaría el nivel de producción. En términos de desequilibrio entre la oferta y la demanda agregada, los puntos situados a la derecha de esta condición de equilibrio dinámico se corresponden con situaciones de exceso de oferta, mientras que los puntos situados a la izquierda reflejan situaciones de exceso de demanda.

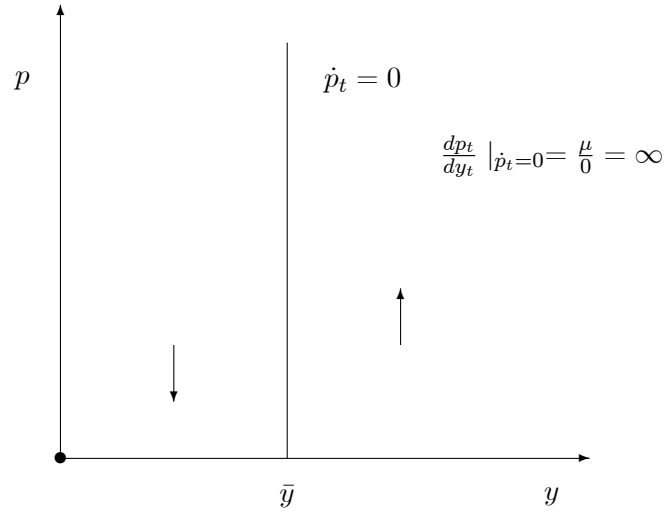


Figura 2.1: Condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de precios

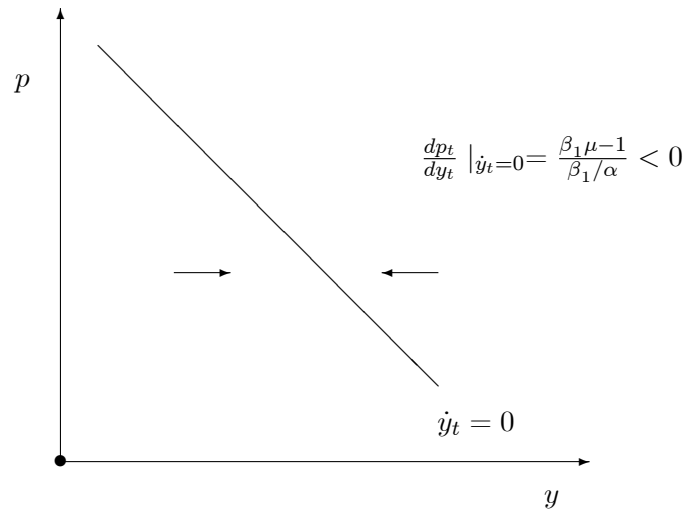


Figura 2.2: Condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de producción

Paso 8: Diagrama de fases: El diagrama de fases hace referencia a la representación gráfica de nuestra economía, tal y como viene descrita por nuestro sistema de ecuaciones diferenciales. Para ello lo que hacemos es representar ambas condiciones de equilibrio dinámicas de forma conjunta, junto con el comportamiento de cada variable en situación de desequilibrio. De este modo tenemos recogida en un mismo gráfico toda la información relevante de nuestra economía. A partir de esta representación gráfica podemos determinar el Estado Estacionario, es sería el punto de equilibrio de nuestra economía en términos de precios y de nivel de producción, así como los diferentes tipos de desequilibrios que pueden existir en términos de estas dos variables así como el comportamiento de estas dos variables en desequilibrio.

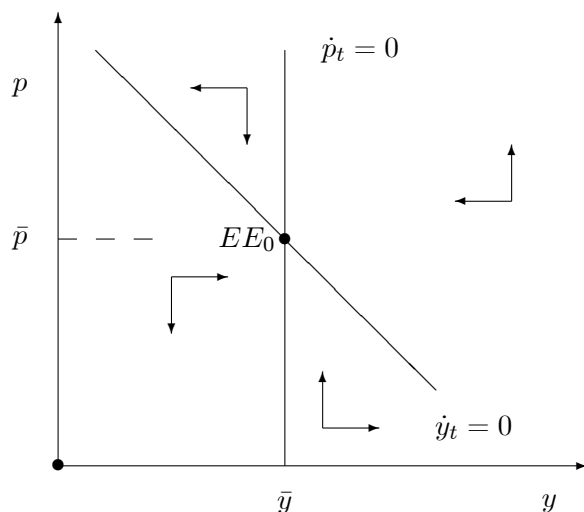


Figura 2.3: Diagrama de fases del modelo

Tal y como podemos observar en la representación gráfica de nuestra economía (según el modelo planteado) nos encontramos con la existencia de cuatro diferentes situaciones de desequilibrio posibles:

- Exceso de demanda con sobreproducción (los precios aumentan y el nivel de producción aumenta).

- Exceso de oferta con sobreproducción (los precios aumentan y el nivel de producción disminuye).
- Exceso de oferta e infraproducción (los precios disminuyen y el nivel de producción disminuye).
- Exceso de demanda e infraproducción (los precios disminuyen y el nivel de producción disminuye).

Paso 9: Senda Estable: La senda estable hace referencia a aquellas trayectorias que nos llevan al estado estacionario. En este caso obtenemos que existe estabilidad global, por lo que todas las trayectorias conducen al estado estacionario. Por tanto en este caso no existiría la senda estable, ya que como podemos comprobar, todas las trayectorias del modelo son estables y nos llevan al estado estacionario, bien de forma directa o bien de forma asintótica, es decir, no nos conducen directamente al estado estacionario sino que vamos pasando de un tipo de desequilibrio a otro (ciclos económicos) aunque cada vez más cerca del estado estacionario.

Paso 10: Análisis de perturbaciones: Finalmente, procedemos a utilizar nuestro modelo para el análisis de perturbaciones. En particular, vamos a analizar cuáles son los efectos a lo largo del tiempo de un aumento en el nivel de producción potencial. Esto equivale a preguntarnos por las implicaciones económicas de un aumento en la tecnología, que es el elemento determinante del nivel de producción potencial de una economía (al margen de la disposición de recursos productivos)

Tal y como podemos comprobar, el nivel de producción potencial aparece en ambas ecuaciones diferenciales, por lo que su representación gráfica va a cambiar, dado que se altera la constante de las mismas, indicando que ambas variables van a verse afectadas a largo plazo por esta perturbación, por lo que la situación actual ya no la podemos considerar de equilibrio.

Vamos a suponer que el punto de partida de nuestra economía es el reflejado en la figura 2.3, representado por el punto EE_0 . Al producirse la perturbación, la economía sigue estando situada en este punto ya que ambas variables son rígidas a corto plazo, si bien dicho punto ya no es el estado estacionario de la economía. Por tanto, lo primero que tenemos que hacer es representar gráficamente el nuevo estado estacionario.

El nuevo estado estacionario lo podemos calcular únicamente en términos gráficos o bien también podemos calcularlo en términos de la variación que experimentan las variables en estado estacionario.

Tal y como podemos comprobar, la condición de equilibrio dinámica para el nivel de precios tenemos que dibujarla más a la derecha, justo en aquel punto que corresponda al nuevo nivel de producción potencial de la economía. En efecto, al aumentar el nivel de producción potencial esta ecuación se hace negativa, por lo que para que vuelva a ser cero tiene que aumentar el nivel de producción.

Por otra parte, el nivel de producción potencial también tiene signo negativo en la condición de equilibrio dinámica para el nivel de precios, por lo que también se hace negativa esta ecuación. Dado que el signo asociado al nivel de precios en esta ecuación es negativo, esto quiere decir que el nivel de precios tiene que disminuir para que esta ecuación vuelva a ser cero. Es decir, para cada nivel de producción el nivel de precios tiene que ser inferior, por lo que ahora tendríamos que representarla hacia la izquierda.

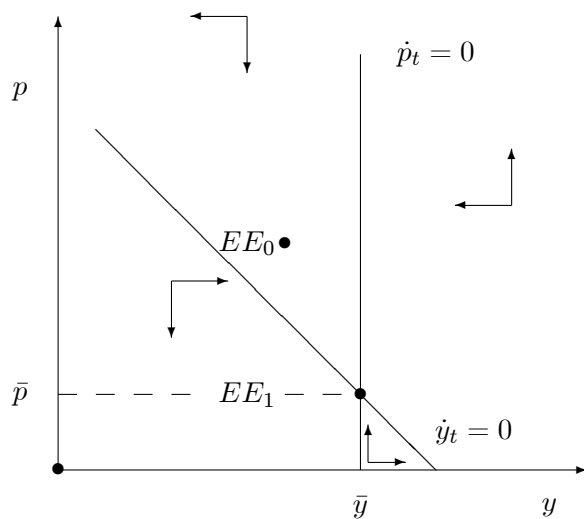


Figura 2.4: Efecto a largo plazo de un aumento del nivel de producción potencial

Otra forma de calcular el nuevo estado estacionario consiste en analizar cómo cambian el valor de las variables en estado estacionario

ante la perturbación que se ha producido. Los valores de estado estacionario del nivel de precios y del nivel de producción son:

$$\bar{p}_t = \frac{\theta\beta_0}{\beta_1} + m_t - \psi\bar{y}_t$$

$$\bar{y}_t = \bar{y}_t$$

Derivando respecto al nivel de producción potencial obtenemos:

$$\frac{d\bar{p}_t}{d\bar{y}_t} = -\psi < 0$$

$$\frac{d\bar{y}_t}{d\bar{y}_t} = 1$$

esto es, el nivel de producción de estado estacionario aumenta en la misma proporción que el nivel de producción potencial, mientras que el nivel de precios disminuye. Por tanto, el nuevo estado estacionario debería estar a la derecha y abajo respecto al estado estacionario inicial. Una vez representado el nuevo estado estacionario, describimos la dinámica de la economía, es decir, cómo pasa la economía del punto EE_0 al nuevo estado estacionario EE_1 . Como podemos observar, en primer lugar se produce una disminución tanto de los precios como del nivel de producción, por lo que iríamos desplazándonos hacia abajo y hacia la izquierda, hasta alcanzar la condición de equilibrio dinámica parcial del nivel de producción. La explicación de que disminuyan los precios es que en esta situación el nivel de producción es inferior al potencial. La explicación de que disminuya el nivel de producción es que se ha producido un exceso de oferta, dado que con la nueva tecnología los precios son excesivamente altos. A partir del momento en que alcancemos la condición de equilibrio parcial para el nivel de producción, los precios continuarían disminuyendo (infraproducción), pero el nivel de producción aumentaría, ya que pasaríamos a una situación de exceso de demanda. Este aumento en el nivel de producción nos llevaría a alcanzar el nivel de producción potencial, momento en el cual los precios serían constantes, pero el nivel de producción continuaría aumentando, por lo que pasaríamos a una situación en la cual el nivel de producción sería superior al potencial (sobrepromoción), lo que a su vez provocaría aumentos en el nivel de precios, mientras se mantiene el exceso de demanda.

Esta situación nos llevaría a alcanzar de nuevo la condición de equilibrio dinámica para el nivel de producción (equilibrio en el mercado de bienes). Sin embargo, en esta situación existiría sobreproducción, por lo que los precios aumentarían, pasando de nuevo a una situación de desequilibrio en la cual continuaría existiendo sobreproducción al tiempo que un exceso de oferta. Esto provocaría que mientras los precios están aumentando la producción esté disminuyendo hasta que de nuevo alcanzamos la condición de equilibrio dinámica para los precios. En este momento, el nivel de producción vuelve a ser el potencial, pero como seguimos en una situación de exceso de oferta, la producción disminuye, por lo que volveríamos a una situación similar a la inicial (mismo tipo de desequilibrio: infraproducción con exceso de oferta), pero en la cual estamos más cerca del nuevo estado estacionario. De nuevo volvería a comenzar todo el proceso descrito anteriormente.

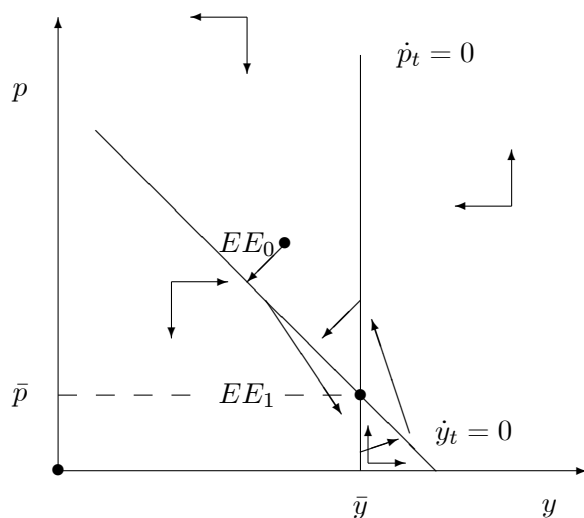


Figura 2.5: Efectos dinámicos de un aumento en el nivel de producción potencial

Tal y como podemos comprobar, estaríamos moviéndonos alrededor del nuevo estado estacionario, dado que las trayectorias del modelo son estables, es decir, nos conducen al estado estacionario. La economía continuaría pasando de un desequilibrio a otro, pero con desequilibrios cada vez más pequeños.

EJERCICIO 2.2: Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$m_t - p_t = \psi \bar{y}_t - \theta i_t \quad (2.7)$$

$$y_t^d = \beta_0 - \beta_1(i_t - \dot{p}_t^e) \quad (2.8)$$

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) + \dot{m}_t \quad (2.9)$$

$$\dot{y}_t = v(y_t^d - y_t) \quad (2.10)$$

donde m es el logaritmo de la cantidad de dinero, p el logaritmo del nivel de precios, y el logaritmo del nivel de producción, y^d el logaritmo del nivel de demanda, \bar{y} el logaritmo del nivel de producción potencial e i el tipo de interés nominal. Suponga que existe previsión perfecta. Resuelva el modelo, calculando las condiciones de equilibrio dinámicas para las variables endógenas de referencia (salarios reales y nivel de producción), estabilidad del sistema, representación gráfica y análisis de cuáles son los efectos de un aumento en el nivel de producción potencial de la economía.

SOLUCIÓN:

Como podemos observar, el sistema de ecuaciones que definen nuestra economía es muy similar al correspondiente al ejercicio 2.3. del manual AMA. Tal y como hemos visto en AMA, este es el modelo más simple que podemos utilizar para describir una economía. En este caso, hemos introducido un cambio respecto a la versión anterior. En la ecuación de equilibrio del mercado de dinero, los saldos reales dependen positivamente del nivel de producción potencial de la economía (cuando antes dependían del nivel de producción). Por

tanto, vamos a resolver este modelo para ver las diferencias que supone la introducción de este supuesto.

Para solucionar este ejercicio hay que tener en cuenta que el enunciado nos pide que se tomen como variables endógenas de referencia el nivel de producción y los saldos reales. Para llegar a los saldos reales debemos de partir de la siguiente expresión:

$$l_t = m_t - p_t$$

Antes de comenzar vamos a enumerar de nuevo los 10 pasos que debemos aplicar para trabajar con este tipo de modelos y poder responder a la pregunta planteada, esto es, cuáles son los efectos de un aumento en el nivel de producción potencial. De forma esquemática estos pasos son los siguientes:

1. Variables endógenas y exógenas.
2. Definir variables endógenas de referencia.
3. Obtención de las ecuaciones diferenciales.
4. Modelo en notación matricial.
5. Valor de las variables en estado estacionario.
6. Análisis de estabilidad.
7. Representación gráfica de las condiciones de equilibrio dinámicas.
8. Diagrama de fases.
9. Senda estable.
10. Análisis de perturbaciones.

Paso 1: Variables endógenas y exógenas: En primer lugar tenemos que clasificar a las variables en función de si se trata de variables endógenas o bien son exógenas. Este procedimiento es bastante sencillo. Únicamente tenemos que pensar si en nuestra economía dicha variable se determina "**dentro**" de la economía o bien se determina "**fuera**" de la economía.

Las variables que aparecen en el modelo son las siguientes seis:

1. Cantidad de dinero (exógena)
2. Precios (endógenos)
3. Nivel de producción potencial (exógeno)
4. Tipo de interés nominal (endógeno)
5. Nivel de demanda (endógeno)
6. Nivel de producción (endógeno)

Tal y como podemos observar, tenemos cuatro variables endógenas y dos variables exógenas (al margen del componente autónomo de la demanda agregada que representa el gasto público), por lo que podemos resolver el sistema.

Paso 2: Variables endógenas de referencia: En segundo lugar, definimos nuestras variables endógenas de referencia, que son las únicas variables en términos de las cuales vamos a representar nuestra economía. Podemos elegir como variable endógena cualquiera de las variables endógenas de nuestra economía, u otras variables endógenas que sean función de alguna de las endógenas de nuestra economía. En este caso, el enunciado del problema no nos especifica que variables endógenas vamos a usar para describir nuestra economía, por lo que escogemos directamente las dos variables endógenas para las cuales tenemos una ecuación dinámica. Esto es:

1. Nivel de precios
2. Nivel de producción

Paso 3: Ecuaciones diferenciales: Para obtener las dos ecuaciones dinámicas que van a representar nuestra economía, necesitamos comprimir la información de las cuatro ecuaciones de nuestro sistema en sólo dos. Para ello hemos de resolver para las variables endógenas que no van a ser de referencia, esto es, el tipo de interés nominal y el nivel de demanda agregada. Así, tenemos que calcular el valor de estas variables en función de las variables

endógenas de referencia y de las exógenas. Una vez que tenemos sus valores, sustituimos dichos valores en las ecuaciones (2.9) y (2.10).

Despejamos el tipo de interés nominal de la ecuación (2.7):

$$i_t = -\frac{1}{\theta}(l_t - \psi \bar{y}_t) \quad (2.11)$$

Sustituimos (2.11) en (2.8):

$$y_t^d = \beta_0 - \beta_1 \left(\frac{\psi}{\theta} \bar{y}_t - \frac{1}{\theta} l_t - \dot{p}_t^e \right)$$

Aplicamos previsión perfecta ($\dot{p}_t = \dot{p}_t^e$):

$$y_t^d = \beta_0 - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} \bar{y}_t + \frac{\beta_1}{\theta} l_t + \beta_1 \dot{p}_t$$

Sustituyendo en la ecuación dinámica del nivel de producción (expresión 2.10):

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} \bar{y}_t + \frac{\beta_1}{\theta} l_t + \beta_1 \dot{p}_t - y_t \right]$$

Sustituyendo en la expresión anterior la dinámica del nivel de precios resulta:

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} \bar{y}_t + \frac{\beta_1}{\theta} l_t + \beta_1 [\mu(y_t - \bar{y}_t) + \dot{m}_t] - y_t \right]$$

y reordenando términos obtenemos que las dos ecuaciones diferenciales del modelo son:

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 - (\beta_1 \mu + \frac{\beta_1 \psi}{\theta}) \bar{y}_t + \frac{\beta_1}{\theta} l_t + (\beta_1 \mu - 1) y_t + \beta_1 \dot{m}_t \right]$$

$$\dot{l}_t = -\mu(y_t - \bar{y}_t)$$

Por tanto, ya tenemos nuestras dos ecuaciones diferenciales, ya que la correspondiente al nivel de precios, no necesita ninguna transformación al ser una función de las variables endógenas de referencia y de variable exógenas.

Paso 4: Modelo en notación matricial: Una vez que tenemos nuestra dos ecuaciones diferenciales, escribimos el modelo

en notación matricial con el objetivo de identificar la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas, ya que vamos a tener que trabajar con esta matriz. Las dos ecuaciones diferenciales de nuestro modelo son:

$$\dot{l}_t = -\mu(y_t - \bar{y}_t)$$

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 - (\beta_1\mu + \frac{\beta_1\psi}{\theta})\bar{y}_t + \frac{\beta_1}{\theta}l_t + (\beta_1\mu - 1)y_t + \beta_1\dot{m}_t \right]$$

Puestas en notación matricial resultaría:

$$\begin{bmatrix} \dot{l}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \frac{v\beta_1}{\theta} & v(\beta_1\mu - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu \\ v & v\beta_1 & -v(\beta_1\mu + \frac{\beta_1\psi}{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dot{m}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

Paso 5: Cálculo de los valores de estado estacionario: Para calcular el valor de las variables en Estado Estacionario, invertimos la matriz A , la multiplicamos por -1, multiplicamos por la matriz B y multiplicamos por el vector de variables exógenas, es decir:

$$\begin{bmatrix} \bar{l}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t = - \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \frac{v\beta_1}{\theta} & v(\beta_1\mu - 1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu \\ v & v\beta_1 & -v(\beta_1\mu + \frac{\beta_1\psi}{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dot{m}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \frac{-v\beta_1}{\theta} & v(\beta_1\mu - 1) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu \\ v & v\beta_1 & -v(\beta_1\mu + \frac{\beta_1\psi}{\theta}) \end{bmatrix}$$

$$z_t = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dot{m}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

Comenzamos invirtiendo la matriz A . Para ello, en primer lugar calculamos la adjunta de la matriz A , siendo:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} v(\beta_1\mu - 1) & \frac{-v\beta_1}{\theta} \\ -\mu & 0 \end{bmatrix}$$

Su traspuesta es:

$$adj(A)' = \begin{bmatrix} v(\beta_1\mu - 1) & -\mu \\ \frac{v\beta_1}{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

siendo su determinante:

$$|A| = -\frac{v\beta_1\mu}{\theta}$$

por lo que el negativo de la inversa de A es:

$$-A^{-1} = -\frac{\theta}{v\beta_1\mu} \begin{bmatrix} v(\beta_1\mu - 1) & -\mu \\ -\frac{v\beta_1}{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

o bien:

$$-A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(\beta_1\mu - 1)\theta}{\beta_1\mu} & -\frac{\theta}{v\beta_1} \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} \bar{l}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t = \begin{bmatrix} \frac{(\beta_1\mu - 1)\theta}{\beta_1\mu} & -\frac{\theta}{v\beta_1} \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu \\ v & v\beta_1 & -v(\beta_1\mu + \frac{\beta_1\psi}{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dot{m}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

y multiplicando las matrices $-A^{-1}B$ se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{l}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t = \begin{bmatrix} \frac{\theta}{\beta_1} & \theta & -(\frac{\theta}{\beta_1} + \psi) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dot{m}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

Finalmente obtenemos los valores de las variables en estado estacionario:

$$\bar{l}_t = \frac{\theta\beta_0}{\beta_1} + \theta\bar{m}_t - \left(\frac{\theta}{\beta_1} + \psi\right)\bar{y}_t$$

$$\bar{y}_t = \bar{y}_t$$

Paso 6: Análisis de estabilidad: A continuación analizamos la estabilidad del sistema, calculando el signo de los valores propios asociados a la matriz de coeficientes de las variables endógenas. Para ello tenemos que calcular el siguiente determinante:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 0 - \lambda & -\mu \\ -\frac{v\beta_1}{\theta} & v(\beta_1\mu - 1) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

cuyo resultado es la siguiente ecuación:

$$\lambda^2 - \lambda[v(\beta_1\mu - 1)] + \frac{v\beta_1\mu}{\theta} = 0$$

Resolviendo obtenemos que los valores propios son los siguientes:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{v(\beta_1\mu - 1) \pm \sqrt{[v(\beta_1\mu - 1)]^2 - \frac{4v\beta_1\mu}{\theta}}}{2}$$

Tal y como podemos observar el signo dentro de la raíz cuadrada es negativo, por lo que al resolver esta raíz cuadrada lo que queda es menor que el primer término. Si $(\beta_1\mu - 1) > 0$ entonces tenemos que el primer término es positivo. Positivo más algo más pequeño, positivo. Positivo menos algo más pequeño, positivo. Por tanto en este caso ambas raíces serían positivas. Si $(\beta_1\mu - 1) < 0$ entonces tenemos que el primer término es negativo. Negativo más algo más pequeño, negativo. Negativo menos algo más pequeño, negativo. Por tanto en este caso ambas raíces serían negativas.

Por tanto, únicamente sería posible el segundo caso, lo que implicaría que $\beta_1\mu < 1$, por lo que existiría estabilidad global, es decir, todas las trayectorias nos conducirían al estado estacionario

Paso 7: Representación gráfica: A continuación, representamos gráficamente las dos condiciones de equilibrio dinámicas, o más exactamente, aquella solución para la cual las

ecuaciones valen cero. Esto también nos va a permitir describir el comportamiento de las variables endógenas fuera de su equilibrio respectivo. Dado que las ecuaciones diferenciales son lineales lo único que tenemos que hacer es calcular su pendiente. Para ello lo que hacemos es igualar a cero cada ecuación (equilibrio dinámico parcial) y despejar la variable que colocamos en el eje vertical en función de la variable que colocamos en el eje horizontal. Vamos a representar al nivel de saldos reales en el eje vertical, mientras que en el eje horizontal vamos a representar al nivel de producción. Por tanto, despejaríamos el nivel de saldos reales en términos del nivel de producción en cada ecuación. Así por ejemplo, respecto a la primera ecuación tenemos:

$$l_t = -\mu(y_t - \bar{y}_t) = 0$$

Despejando el nivel de saldos reales obtenemos:

$$0l_t = -\mu y_t + \mu \bar{y}_t$$

o equivalentemente:

$$l_t = -\frac{\mu}{0}y_t + \frac{\mu}{0}\bar{y}_t$$

Con respecto a la segunda ecuación tendríamos:

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 + (\beta_1\mu - 1)y_t + \frac{\beta_1}{\theta}l_t - (\beta_1\mu + \frac{\beta_1\psi}{\theta})\bar{y}_t + \beta_1\dot{m}_t \right] = 0$$

De nuevo, despejando el nivel de saldos reales obtenemos:

$$-\frac{v\beta_1}{\theta}l_t = v\beta_0 + v(\beta_1\mu - 1)y_t - v(\beta_1\mu + \frac{\beta_1\psi}{\theta})\bar{y}_t + v\beta_1\dot{m}_t$$

o equivalentemente:

$$l_t = -\frac{\theta\beta_0}{\beta_1} - \frac{\theta(\beta_1\mu - 1)}{\beta_1}y_t + \frac{\theta(\beta_1 + \frac{\beta_1\psi}{\theta})}{\beta_1}\bar{y}_t - \theta\dot{m}_t$$

Por tanto, únicamente tendríamos que derivar el nivel de precios respecto al nivel de producción en cada ecuación, por lo que la pendiente en este caso sería igual al coeficiente que multiplica al nivel de producción.

La pendiente de la ecuación diferencial de la primera variable endógena (nivel de saldos reales), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, es infinito:

$$\frac{dl_t}{dy_t} \big|_{\dot{l}_t=0} = \frac{\mu}{0} = \infty$$

La pendiente de la ecuación diferencial de la segunda variable endógena (nivel de producción), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, sería:

$$\frac{dl_t}{dy_t} \big|_{\dot{y}_t=0} = -\frac{\theta(\beta_1\mu - 1)}{\beta_1} > 0$$

y dado que por el análisis de estabilidad sabemos que el numerador de esta expresión es negativo, la pendiente sería positiva.

Por tanto, la presentación gráfica de la condición de equilibrio parcial para los saldos reales es una línea vertical. Esto significa que para que exista equilibrio parcial de los saldos reales, es decir, para que éstos sean constantes, lo único que se requiere es que el nivel de producción sea igual a su nivel potencial, sin importar el nivel de saldos reales de la economía.

A continuación, representamos gráficamente el comportamiento de los saldos reales en situación de desequilibrio (figura 2.6). Tal y como podemos observar a la derecha de esta condición de equilibrio dinámica, el nivel de producción es superior al potencial, por lo que esta ecuación sería positiva, indicando que los precios aumentan y, por tanto, los saldos reales disminuyen. Por el contrario, a la izquierda el nivel de producción es inferior al potencial, por lo que los precios disminuirían y los saldos reales aumentarían.

En efecto, a la derecha de esta condición de equilibrio dinámica el nivel de producción de la economía es superior a su nivel potencial, por lo que las empresas estarían produciendo por encima de su capacidad productiva, lo que se traduciría en tensiones inflacionistas que reducirían la liquidez. Por el contrario, a la izquierda de esta condición de equilibrio dinámica, el nivel de producción es inferior al potencial, es decir, las empresas están produciendo por debajo de su capacidad productiva, lo que se traduciría en disminuciones en los precios y, por tanto, aumentos en la liquidez.

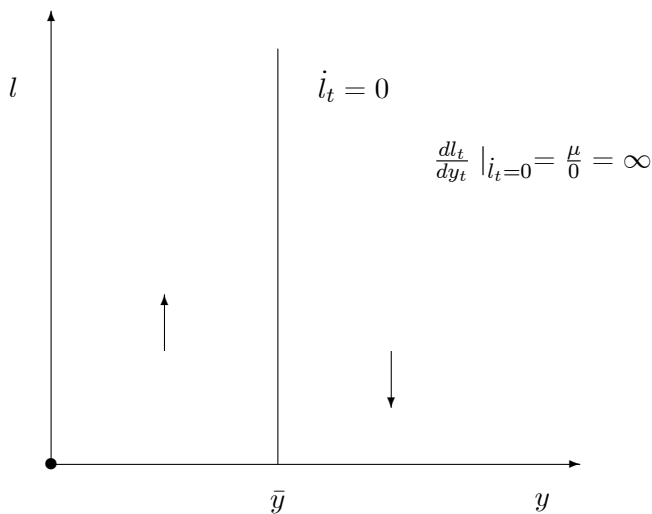


Figura 2.6: Condición de equilibrio dinámica parcial para los saldos reales

La representación gráfica de la condición de equilibrio parcial para el nivel de producción tiene pendiente positiva, indicando que para que el nivel de producción permanezca constante se requiere que si los saldos reales son muy bajos el nivel de producción también tiene que ser muy bajo, mientras que si el nivel de saldos reales es alto, el nivel de producción debería ser también alto (figura 2.7).

De nuevo, calculamos el comportamiento de esta variable en situación de desequilibrio. Así, a la derecha de esta condición de equilibrio dinámica, dado un nivel de producción, los saldos reales son muy bajos. Dado que los saldos reales aparecen en esta ecuación con signo positivo, esto quiere decir que dicha ecuación sería negativa, por lo que disminuiría el nivel de producción. Por el contrario, a la izquierda, dado un nivel de producción los saldos reales serían muy altos, por lo que aumentaría el nivel de producción. En términos de desequilibrio entre la oferta y la demanda agregada, los puntos situados a la derecha de esta condición de equilibrio dinámico se corresponden con situaciones de exceso de oferta, mientras que los puntos situados a la izquierda reflejan situaciones de exceso de demanda.

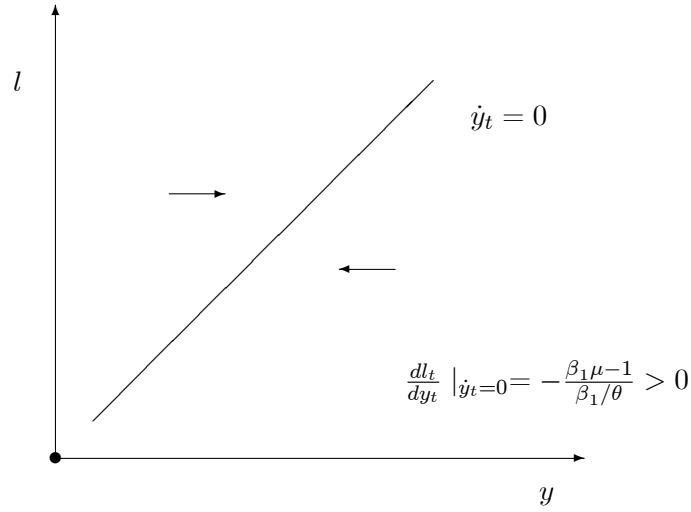


Figura 2.7: Condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de producción

Paso 8: Diagrama de fases: El diagrama de fases hace referencia a la representación gráfica de nuestra economía, tal y como viene descrita por nuestro sistema de ecuaciones diferenciales. Para ello lo que hacemos es representar ambas condiciones de equilibrio dinámicas de forma conjunta, junto con el comportamiento de cada variable en situación de desequilibrio. De este modo tenemos recogida en un mismo gráfico toda la información relevante de nuestra economía. A partir de esta representación gráfica podemos determinar el Estado Estacionario, es sería el punto de equilibrio de nuestra economía en términos de los saldos reales y de nivel de producción, así como los diferentes tipos de desequilibrios que pueden existir en términos de estas dos variables así como el comportamiento de estas dos variables en desequilibrio.

Tal y como podemos observar en la representación gráfica de nuestra economía (según el modelo planteado) nos encontramos con la existencia de cuatro diferentes situaciones de desequilibrio posibles:

- Exceso de demanda con sobreproducción (los saldos reales disminuyen y el nivel de producción aumenta).

- Exceso de oferta con sobreproducción (los saldos reales disminuyen y el nivel de producción disminuye).
- Exceso de oferta e infraproducción (los saldos reales aumentan y el nivel de producción disminuye).
- Exceso de demanda e infraproducción (los saldos reales aumentan y el nivel de producción aumenta).

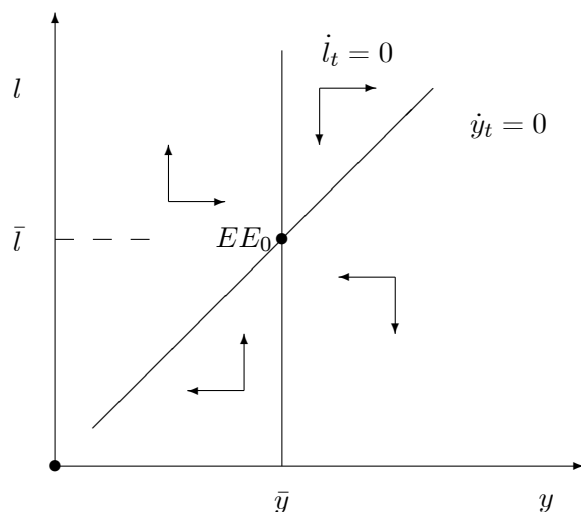


Figura 2.8: Diagrama de fases del modelo

Paso 9: Senda Estable: La senda estable hace referencia a aquellas trayectorias que nos llevan al estado estacionario. En este caso obtenemos que existe estabilidad global, por lo que todas las trayectorias conducen al estado estacionario. Por tanto en este caso no existiría la senda estable, ya que como podemos comprobar, todas las trayectorias del modelo nos llevan al estado estacionario.

Paso 10: Análisis de perturbaciones: Finalmente, procedemos a utilizar nuestro modelo para el análisis de perturbaciones. En particular, vamos a analizar cuáles son los efectos a lo largo del tiempo de un aumento en el nivel de producción potencial. Esto equivale a preguntarnos por las implicaciones económicas de un aumento en la tecnología, que es el elemento

determinante del nivel de producción potencial de una economía (al margen de la disposición de recursos productivos)

Tal y como podemos comprobar, el nivel de producción potencial aparece en ambas ecuaciones diferenciales, por lo que su representación gráfica va a cambiar, dado que se altera la constante de las mismas, indicando que ambas variables van a verse afectadas a largo plazo por esta perturbación, por lo que la situación actual ya no la podemos considerar de equilibrio.

Vamos a suponer que el punto de partida de nuestra economía es el reflejado en la siguiente figura, representado por el punto EE_0 . Al producirse la perturbación, la economía sigue estando situada en este punto ya que ambas variables son rígidas a corto plazo, si bien dicho punto ya no es el estado estacionario de la economía.

El nuevo estado estacionario lo podemos calcular en términos gráficos o bien también podemos calcularlo analíticamente, en términos de la variación que experimentan las variables en estado estacionario. No obstante, en este caso tenemos que calcularlo de las dos formas, ya que como veremos ambas condiciones de equilibrio dinámicas cambian en la misma dirección.

En primer lugar, la condición de equilibrio dinámica para el nivel de saldos reales tenemos que dibujarla más a la derecha, justo en aquel punto que corresponda al nuevo nivel de producción potencial de la economía. En efecto, al aumentar el nivel de producción potencial esta ecuación se hace positiva, por lo que para que vuelva a ser cero tiene que aumentar el nivel de producción.

Por otra parte, el nivel de producción potencial también tiene signo negativo en la condición de equilibrio dinámica para el nivel de producción, por lo que también se hace negativa esta ecuación. Dado que el signo asociado al nivel de precios en esta ecuación es negativo, esto quiere decir que el nivel de precios tiene que disminuir para que esta ecuación vuelva a ser cero. Es decir, para cada nivel de producción el nivel de precios tiene que ser inferior, por lo que ahora tendríamos que representarla hacia la izquierda.

Otra forma de calcular el nuevo estado estacionario consiste en analizar cómo cambian el valor de las variables en estado estacionario ante la perturbación que se ha producido. Los valores de estado estacionario del nivel de precios y del nivel de producción son:

$$\bar{l}_t = \frac{\theta\beta_0}{\beta_1} + \theta\bar{m}_t + \left(\frac{\theta}{\beta_1} + \psi\right)\bar{y}_t$$

$$\bar{y}_t = \bar{y}_t$$

Derivando respecto al nivel de producción potencial obtenemos:

$$\frac{d\bar{l}_t}{d\bar{y}_t} = \left(\frac{\theta}{\beta_1} + \psi \right) > 0$$

$$\frac{d\bar{y}_t}{d\bar{y}_t} = 1$$

esto es, el nivel de producción de estado estacionario aumenta en la misma proporción que el nivel de producción potencial. Por su parte, el nivel de saldos reales también aumenta ya que depende positivamente del nivel de producción potencial. Por tanto, el nuevo estado estacionario debería estar a la derecha y arriba respecto al estado estacionario inicial.

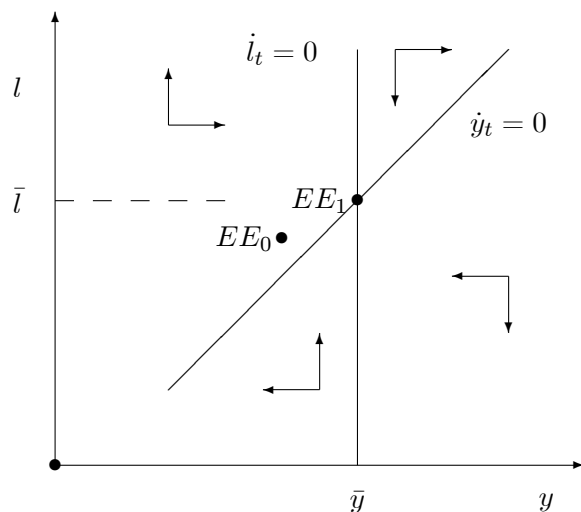


Figura 2.9: Efectos a largo plazo de un aumento en el nivel de producción potencial

La figura 2.9 representa los efectos de largo plazo del aumento en el nivel de producción potencial. Una vez representado el nuevo estado estacionario, describimos la dinámica de la economía, es decir, cómo pasa la economía del punto EE_0 al nuevo estado estacionario EE_1 .

Como podemos observar, la economía se encuentra en una situación que está a la izquierda y hacia abajo del nuevo estado estacionario. En esta zona el diagrama de fases nos indica que tanto el nivel de producción como los saldos reales tienen que aumentar, como consecuencia del aumento en el nivel de producción potencial de la economía.

En primer lugar se produce un aumento tanto de los saldos reales como del nivel de producción, por lo que iríamos desplazándonos hacia arriba y hacia la derecha, justo en la dirección hacia el nuevo estado estacionario. Por tanto, en ese caso podríamos alcanzar el nuevo estado estacionario de forma directa, o bien, si los saldos reales aumentan mucho más rápidamente de lo que hace el nivel de producción entonces la convergencia sería asintótica.

En el caso de que la trayectorias fuesen asintóticas, tendríamos que nos desplazaríamos hacia la derecha y hacia arriba, hasta alcanzar la condición de equilibrio dinámica parcial de los saldos reales. En esta situación continuaría existiendo exceso de demanda, por lo que el nivel de producción continuaría aumentando. La explicación de que aumenten los saldos reales (disminuyan los precios) es que en esta situación el nivel de producción es inferior al potencial. La explicación de que aumente el nivel de producción es que se ha producido un exceso de demanda, dado que con la nueva tecnología la liquidez de la economía ha aumentado. Seguidamente pasamos a una situación en la cual la producción sigue aumentando pero comienza a disminuir el nivel de saldos reales, ya que pasamos a una situación de sobreproducción. Así, nos movemos hacia abajo y a la derecha, hasta alcanzar la condición de equilibrio dinámica para el nivel de producción. A partir del momento en que alcancemos la condición de equilibrio parcial para el nivel de producción, los precios continuarían aumentando (sobreproducción), pero el nivel de producción comenzaría a disminuir, ya que pasaríamos a una situación de exceso de oferta. Esta disminución en el nivel de producción nos llevaría a alcanzar el nivel de producción potencial, momento en el cual los saldos reales serían constantes, pero el nivel de producción continuaría disminuyendo, por lo que pasaríamos a una situación en la cual el nivel de producción sería inferior al potencial (infraproducción), lo que a su vez provocaría disminución en el nivel de precios y aumento en los saldos reales.

Esta situación nos llevaría a alcanzar de nuevo la condición de equilibrio dinámica para el nivel de producción (equilibrio en el mercado de bienes). Sin embargo, en esta situación existiría infraproducción, por lo que los saldos reales aumentarían, pasando de nuevo a una situación de desequilibrio en la cual existiría infraproducción al tiempo que un exceso de demanda. Esto provocaría que mientras los precios están disminuyendo (saldos reales aumentando) la producción esté aumentando hasta que de nuevo alcanzamos la condición de equilibrio dinámica para los saldos reales. En este momento, el nivel de producción vuelve a ser el potencial, pero como seguimos en una situación de exceso de demanda, la producción aumenta y de nuevo volvería a comenzar todo el proceso descrito anteriormente.

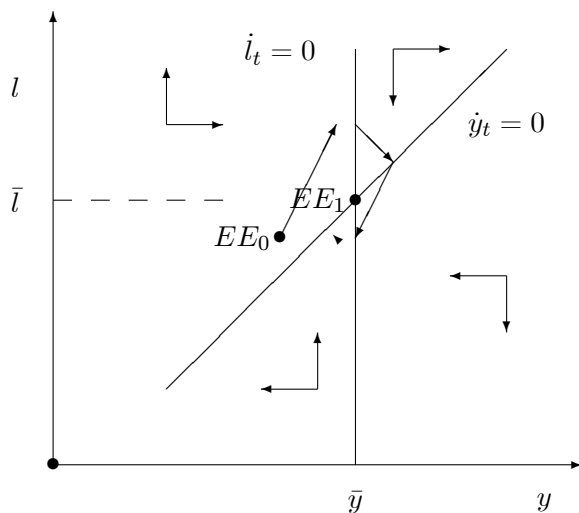


Figura 2.10: Efectos dinámicos de un aumento en el nivel de producción potencial

Tal y como podemos comprobar, estaríamos moviéndonos alrededor del nuevo estado estacionario, dado que las trayectorias del modelo son estables, es decir, nos conducen al estado estacionario. La economía continuaría pasando de un desequilibrio a otro, pero con desequilibrios cada vez más pequeños.

EJERCICIO 2.3: Considere una economía determinada por las siguientes ecuaciones:

$$m_t - p_t = \psi y_t - \theta i_t \quad (2.12)$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1(s_t - p_t + p_t^*) + \beta_2 \bar{y}_t - \beta_3 i_t \quad (2.13)$$

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) \quad (2.14)$$

$$\dot{s}^e = i_t - i_t^* \quad (2.15)$$

donde m es el logaritmo de la cantidad de dinero, p el logaritmo del nivel de precios, y el logaritmo del nivel de producción, \bar{y} el logaritmo del nivel de producción potencial, s el tipo de cambio nominal, i el tipo de interés nominal nacional e i^* el tipo de interés nominal del exterior.

Resuelva el modelo y analice cuáles son los efectos de un aumento en la cantidad de dinero. En qué se diferencian los resultados de la versión resuelta en el ejercicio 2.4 de AMA (en dicho modelo el nivel de producción relevante en la demanda de dinero era el potencial, mientras que en este caso es el nivel de producción efectivo en cada momento del tiempo y es el nivel de demanda el que es siempre igual al nivel de producción).

SOLUCIÓN:

Tal y como podemos observar se trata de un modelo de economía abierta muy similar al ya resuelto en el ejercicio 2.4 de AMA. En este caso el supuesto que hemos introducido es que el nivel de demanda agregada es siempre igual al nivel de producción de la economía. Vamos a resolver este ejercicio para ver las implicaciones que tiene dicho supuesto.

Paso 1: Variables endógenas y exógenas: En primer lugar determinamos el número de variables endógenas y exógenas del modelo. Las variables que componen el modelo son:

1. Cantidad de dinero (exógena)
2. Nivel de precios nacionales (endógeno)
3. Nivel de producción (endógeno)
4. Tipo de interés nominal (endógeno)
5. Tipo de cambio nominal (endógeno)
6. Nivel de precios del exterior (exógeno)
7. Nivel de producción potencial (exógeno)
8. Tipo de interés del exterior (exógeno)

Tal y como podemos observar tenemos 4 variables endógenas y 4 ecuaciones, por lo que podemos resolver el anterior sistema y reducirlo a un sistema de dos ecuaciones diferenciales. Este sistema de dos ecuaciones diferenciales contiene la misma información que las cuatro ecuaciones iniciales y tiene la ventaja de que podemos representarlo gráficamente. En este caso, estamos representando a una economía en la cual el nivel de producción es siempre igual al nivel de demanda agregada. Esto supone que en este caso no pueden producirse desequilibrios en el mercado de bienes y servicios en términos de demanda y oferta agregada.

Paso 2: Variables endógenas de referencia: A continuación procedemos a identificar nuestras dos variables endógenas de referencias, en términos de las cuales vamos a representar a nuestra economía. Dado que el enunciado no nos indica las variables de referencia, seleccionamos aquellas para las cuales disponemos de su dinámica, esto es, el nivel de precios y el tipo de cambio nominal.

Paso 3: Ecuaciones diferenciales: Para obtener las dos ecuaciones diferenciales procedemos como sigue. En primer lugar, despejamos el tipo de interés nominal de la ecuación (2.12):

$$i_t = -\frac{1}{\theta}(m_t - p_t - \psi y_t) \quad (2.16)$$

Sustituimos (2.16) en (2.13):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1(s_t - p_t + p_t^*) + \beta_2\bar{y}_t + \frac{\beta_3}{\theta}(m_t - p_t - \psi y_t)$$

$$y_t + \frac{\beta_3\psi}{\theta}y_t = \beta_0 + \beta_1(s_t - p_t + p_t^*) + \beta_2\bar{y}_t + \frac{\beta_3}{\theta}(m_t - p_t)$$

por lo que el nivel de producción de la economía es:

$$y_t = \frac{\theta}{\theta + \beta_3\psi} \left[\beta_0 + \beta_1(s_t - p_t + p_t^*) + \beta_2\bar{y}_t + \frac{\beta_3}{\theta}(m_t - p_t) \right]$$

Podemos simplificar las variables exógenas: Por ejemplo podemos normalizar a 1 el nivel de precios del exterior. Por tanto $p_t^* = 0$. En este caso tendríamos:

$$y_t = \frac{\theta}{\theta + \beta_3\psi} \left[\beta_0 + \beta_1(s_t - p_t) + \beta_2\bar{y}_t + \frac{\beta_3}{\theta}(m_t - p_t) \right]$$

$$y_t = \frac{\theta}{\theta + \beta_3\psi} \left[\beta_0 + \beta_1 s_t + \beta_2\bar{y}_t + \frac{\beta_3}{\theta}m_t - (\beta_1 + \frac{\beta_3}{\theta})p_t \right] \quad (2.17)$$

También podemos hacer lo mismo con el gasto público (β_0), y con el nivel de producción potencial (\bar{y}_t), pero ya no podríamos utilizarlas para hacer análisis sobre los efectos de una alternación en estas variables. La única exógena que no podemos simplificar es la cantidad de dinero, ya que lo que pretendemos es analizar los efectos dinámicos de una perturbación monetaria. Por tanto, para que las expresiones no queden tan grandes vamos a realizar una simplificación adicional, por ejemplo, eliminamos el nivel de producción potencial ($\bar{y}_t = 0$).

Una vez que hemos obtenido el nivel de producción (expresión 2.17) sustituimos éste en la ecuación (2.14):

$$\dot{p}_t = \mu \left[\frac{\theta}{\theta + \beta_3\psi} \left[\beta_0 + \beta_1 s_t + \frac{\beta_3}{\theta}m_t - (\beta_1 + \frac{\beta_3}{\theta})p_t \right] \right]$$

$$\dot{p}_t = \mu \left[\frac{\theta}{\theta + \beta_3\psi} \left[\beta_0 + \beta_1 s_t + \frac{\beta_3}{\theta}m_t - (\beta_1 + \frac{\beta_3}{\theta})p_t \right] \right]$$

por lo que ya tenemos nuestra primera ecuación dinámica que nos indica el comportamiento del nivel de precios. Ahora procedemos de la misma forma con objeto de obtener la ecuación dinámica para el tipo de cambio. Para ello, sustituimos el tipo de interés nominal en la ecuación (2.15), obteniendo:

$$\dot{s}_t = -\frac{1}{\theta}(m_t - p_t - \psi y_t) - i_t^* \quad (2.18)$$

Ahora tenemos que sustituir el nivel de producción (expresión 2.17) en la expresión (2.18), por lo que tendríamos:

$$\dot{s}_t = -\frac{1}{\theta} \left[(m_t - p_t - \psi \left[\frac{\theta}{\theta + \beta_3 \psi} \left[\beta_0 + \beta_1 s_t + \frac{\beta_3}{\theta} m_t - (\beta_1 + \frac{\beta_3}{\theta}) p_t \right] \right] \right] - i_t^*$$

Operando obtenemos la ecuación dinámica correspondiente al tipo de cambio nominal:

$$\dot{s}_t = \frac{\psi}{\theta + \beta_3 \psi} \beta_0 - \frac{1}{\theta + \beta_3 \psi} m_t + \frac{\psi \beta_1}{\theta + \beta_3 \psi} s_t + \frac{1 - \psi \beta_1}{\theta + \beta_3 \psi} p_t - i_t^* \quad (2.19)$$

Otra forma alternativa es, una vez que hemos calculado el nivel de producción (2.17), podemos sustituir dicho valor en la (2.16) y obtenemos el tipo de interés:

$$i_t = -\frac{1}{\theta} \left(m_t - p_t - \psi \left[\frac{\theta}{\theta + \beta_3 \psi} \left[\beta_0 + \beta_1 s_t + \frac{\beta_3}{\theta} m_t - (\beta_1 + \frac{\beta_3}{\theta}) p_t \right] \right] y_t \right) \quad (2.20)$$

Sustituyendo la expresión (2.20) directamente en la ecuación (2.15), obtenemos:

$$\dot{s}_t = -\frac{1}{\theta} \left[(m_t - p_t - \psi \left[\frac{\theta}{\theta + \beta_3 \psi} \left[\beta_0 + \beta_1 s_t + \frac{\beta_3}{\theta} m_t - (\beta_1 + \frac{\beta_3}{\theta}) p_t \right] \right] \right] - i_t^*$$

y operando resulta:

$$\dot{s}_t = \frac{\psi}{\theta + \beta_3 \psi} \beta_0 - \frac{1}{\theta + \beta_3 \psi} m_t + \frac{\psi \beta_1}{\theta + \beta_3 \psi} s_t + \frac{1 - \psi \beta_1}{\theta + \beta_3 \psi} p_t - i_t^*$$

que es exactamente igual que la expresión (2.19).

Paso 4: Modelo en notación matricial: Una vez hemos obtenido nuestras dos ecuaciones diferenciales a continuación representamos nuestro modelo en notación matricial, quedado como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_t \\ \dot{s}_t \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta + \beta_3 \psi} \begin{bmatrix} -\mu(\theta\beta_1 + \beta_3) & \theta\mu\beta_1 \\ 1 - \psi\beta_1 & \psi\beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ s_t \end{bmatrix} + \frac{1}{\theta + \beta_3 \psi} \begin{bmatrix} \theta\mu & \mu\beta_3 & 0 \\ \psi & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ i_t^* \end{bmatrix}$$

Tal y como podemos comprobar, no conocemos todos los signos de la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas, A , por lo que en ese caso necesitamos la información que obtengamos del análisis de estabilidad para representar gráficamente nuestro modelo.

Paso 5: Valor de las variables en estado estacionario: La inversa de la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-\psi}{\frac{\mu}{1-\psi\beta_1}} & \frac{\theta}{\frac{\theta\beta_1+\beta_3}{\beta_1}} \end{bmatrix}$$

Por tanto tenemos que:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_t \\ \bar{s}_t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{-\psi}{\frac{\mu}{1-\psi\beta_1}} & \frac{\theta}{\frac{\theta\beta_1+\beta_3}{\beta_1}} \end{bmatrix} \frac{1}{\theta + \beta_3 \psi} \begin{bmatrix} \theta\mu & \mu\beta_3 & 0 \\ \psi & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ i_t^* \end{bmatrix}$$

Operando resulta que:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_t \\ \bar{s}_t \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta + \beta_3 \psi} \begin{bmatrix} 0 & \theta + \psi\beta_3 & \theta \\ -\frac{\theta+\psi\beta_3}{\beta_1} & \theta + \psi\beta_3 & \frac{\theta\beta_1+\beta_3}{\beta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ i_t^* \end{bmatrix}$$

Tal y como podemos comprobar, el coeficiente asociado a la cantidad de dinero en la definición del valor estacionario de los precios y del tipo de cambio nominal es 1, por lo que se cumple el principio de neutralidad monetaria, es decir, una alteración en

la cantidad de dinero provoca una variación (en la misma cuantía) tanto en el nivel de precios como en el tipo de cambio nominal en el largo plazo.

Paso 6: Análisis de estabilidad. A continuación realizamos el análisis de estabilidad con el objetivo de conocer el tipo de solución de nuestro sistema de ecuaciones y de determinar el signo de los coeficientes indeterminados en la matriz de coeficientes de las variables endógenas.

Como el coeficiente que multiplica a la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas tiene signo definido (es positivo) podemos prescindir de él. Para analizar la estabilidad del sistema, calculamos el determinante de la matriz de coeficientes de las variables endógenas menos la matriz identidad y lo igualamos a cero. Resolviendo obtenemos una ecuación de segundo grado, por lo que al resolverla obtenemos los signos de los valores propios asociados a la matriz de coeficientes de las variables endógenas. Por tanto,

$$\text{Det} \begin{bmatrix} -\mu(\theta\beta_1 + \beta_3) - \lambda & \theta\mu\beta_1 \\ 1 - \psi\beta_1 & \psi\beta_1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda[\mu(\theta\beta_1 + \beta_3) - \psi\beta_1] - \mu\beta_1(\theta + \psi\beta_3) = 0$$

$$\frac{-(\mu(\theta\beta_1 + \beta_3) - \psi\beta_1) \pm \sqrt{[(\mu(\theta\beta_1 + \beta_3) - \psi\beta_1)]^2 + 4\mu\beta_1(\theta + \psi\beta_3)}}{2}$$

Tal y como podemos observar, el signo dentro de la raíz cuadrada es positivo, por lo que al resolver nos va a quedar un número mayor (algo más grande) que el coeficiente asociado a λ . El coeficiente asociado a λ puede ser positivo o negativo. Si $\mu(\theta\beta_1 + \beta_3) > \psi\beta_1$, entonces este término es negativo (dado que va multiplicado por un signo menos). En este caso tenemos que negativo más algo más grande es positivo. Negativo menos algo más grande, negativo. Por tanto obtenemos que $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Es decir, la solución de este sistema es un punto de silla. Por el contrario si $\mu(\theta\beta_1 + \beta_3) < \psi\beta_1$ entonces el primer término es positivo. Positivo más algo más grande positivo. Positivo menos algo más grande negativo. Por tanto, de nuevo obtenemos que $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, esto es, una raíz es positiva y la otra negativa, por lo que de nuevo tenemos punto de silla.

En este caso obtenemos que la solución del modelo es independiente del signo del coeficiente asociado a λ . Es decir, pueden existir situaciones en las cuales dicho coeficiente sea positivo o situaciones en las cuales sea negativo y ambas tienen significado económico. Sin embargo, el signo de este coeficiente no nos aporta información acerca de como es el signo del coeficiente asociado a los precios en la ecuación diferencial para el tipo de cambio. Esto nos indica que dicho coeficiente puede ser tanto positivo como negativo, por lo que tendríamos que elegir dicho valor para la economía que estamos analizando. Este resultado está provocado por el supuesto que hemos realizado de que el nivel de demanda agregada es siempre igual al nivel de producción de la economía y, por tanto, no pueden existir desequilibrios en el mercado de bienes y servicios.

Paso 7: Representación gráfica: A continuación procedemos a la representación gráfica de nuestro modelo. Para ello en primer lugar, tenemos que calcular las pendientes de las condiciones de equilibrio parcial para nuestras variables endógenas.

La pendiente de la ecuación diferencial de la primera variable endógena (nivel de precios), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, sería:

$$\frac{ds_t}{dp_t} \big|_{\dot{p}_t=0} = \frac{\mu(\theta\beta_1 + \beta_3)}{\theta\mu\beta_1} = 1 + \frac{\beta_3}{\theta\mu\beta_1} > 1$$

es decir, la pendiente sería positiva y muy vertical, ya que el valor de la pendiente es superior a 1, que es el que corresponde a una recta de 45 grados.

La pendiente de la ecuación diferencial de la segunda variable endógena (tipo de cambio nominal), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, sería:

$$\frac{ds_t}{dp_t} \big|_{\dot{s}_t=0} = -\frac{1 - \psi\beta_1}{\psi\beta_1} = 1 - \frac{1}{\psi\beta_1}$$

Vemos que en este caso la pendiente es indeterminada, ya que puede ser tanto positiva como negativa. Si suponemos que $1 - \psi\beta_1 > 0$ entonces la pendiente anterior es positiva. Por el contrario, si suponemos que $1 - \psi\beta_1 < 0$, entonces la pendiente sería negativa. Dado que el análisis de estabilidad no nos ha resuelto cual es el signo de este coeficiente, esto significa que puede ser tanto positivo como negativo. Como en este caso podemos elegir, y dado que la

pendiente de la condición de equilibrio dinámica para el nivel de precios es positiva, vamos a suponer que la correspondiente al tipo de cambio nominal es negativa.

La representación gráfica de la condición de equilibrio dinámica para el nivel de precios es una línea con pendiente positiva y muy vertical. Como podemos comprobar a la derecha de esta condición de equilibrio parcial el nivel de precios disminuye (esta ecuación se hace negativa si el tipo de cambio es muy bajo o si el nivel de precios es muy elevado), mientras que en los puntos situados a la izquierda, el nivel de precios aumenta.

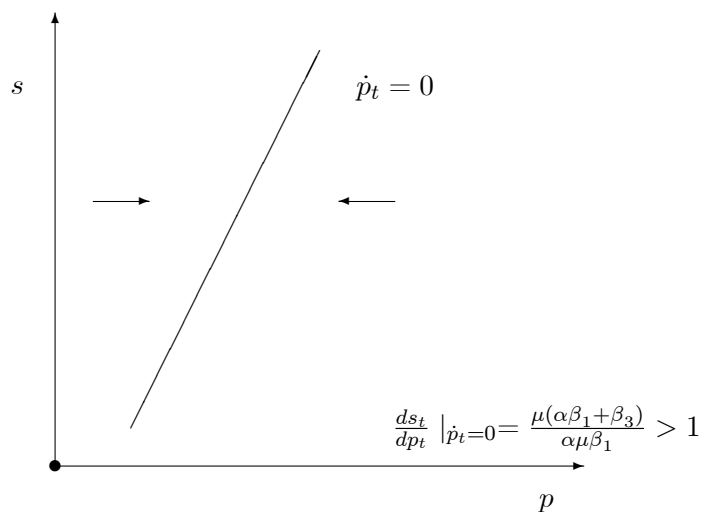


Figura 2.11: Condición de equilibrio dinámica para el nivel de precios

La representación gráfica de la condición de equilibrio dinámica para el tipo de cambio nominal sería una línea con pendiente negativa y muy horizontal. En este caso hemos supuesto que la pendiente es negativa, pero también es posible que la pendiente sea positiva. Como podemos comprobar, a la derecha de esta condición de equilibrio dinámica el tipo de cambio nominal aumenta (la ecuación es positiva si el nivel de precios o el tipo de cambio nominal es muy elevado), mientras que disminuye en aquellos puntos situados a la izquierda de esta condición de equilibrio dinámica.

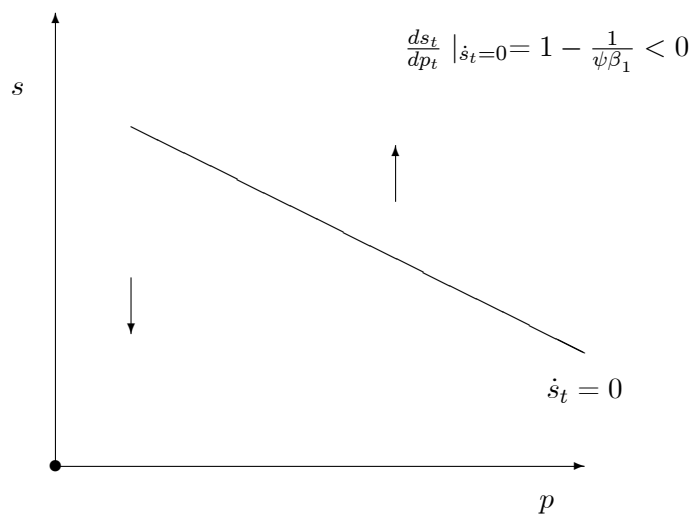


Figura 2.12: Condición de equilibrio dinámica para el tipo de cambio nominal

Paso 8: Diagrama de fases: La representación gráfica de nuestra economía es la que aparece en la figura 2.13. Como ya hemos calculado anteriormente, la pendiente de la condición de equilibrio dinámica para los precios es positiva, mientras que la pendiente de la condición de equilibrio dinámica del tipo de cambio nominal la hemos supuesto negativa. Por otra parte, tenemos que la solución del sistema es de punto de silla, es decir, tenemos tanto trayectorias estables como trayectorias inestables, por lo que se hace necesario disponer de otro elemento adicional, la senda estable, para que la representación de nuestra economía sea completa y podamos utilizarlo para la realización de análisis de perturbaciones. Como podemos comprobar, la senda estable tiene en este caso pendiente negativa, siendo más horizontal que la pendiente de la condición de equilibrio dinámica para el tipo de cambio nominal.

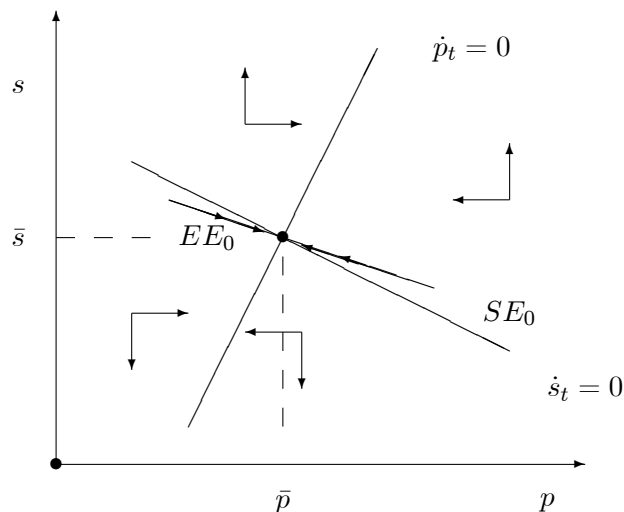


Figura 2.13: Diagrama de fases

Paso 9: Senda Estable: La senda estable hace referencia a aquellas trayectorias que nos llevan al estado estacionario. En este caso obtenemos una solución de tipo punto de silla, por lo que existen trayectorias tanto estables como inestables. Para poder trabajar con este tipo de modelo necesitamos considerar un elemento adicional, que es precisamente lo que denominamos la senda estable. La senda estable nos va a indicar la trayectoria estable más rápida hacia el estado estacionario que es la senda que va a seguir la economía cuando esté en desequilibrio.

Este nuevo instrumento lo vamos a estudiar únicamente en términos gráficos. Para representar la senda estable analizamos el diagrama de fases y estudiamos por qué zonas pasan trayectorias convergentes hacia el estado estacionario. Observando la figura 2.13 vemos que las trayectorias estables sólo existen en las áreas situadas a la derecha y a la izquierda, mientras que en las áreas situadas arriba y abajo todas las trayectorias son divergentes respecto al estado estacionario. Por otra parte, en la zona de la izquierda, sólo si estamos lo suficiente arriba podemos alcanzar el estado estacionario ya que el diagrama de fases nos indica que los precios aumentan y el tipo de cambio disminuye. Por el contrario, en la zona de la derecha, sólo si estamos lo suficientemente abajo podemos alcanzar el estado

estacionario ya que en este caso el diagrama de fases nos indica que el nivel de precios tiene que disminuir y el tipo de cambio nominal aumentar. Por tanto, vamos a señalar en el diagrama de fases estas áreas por la que pasa la trayectoria estable. Esta senda la vamos a dibujar como una línea recta con flechas que indican la dirección en la que se mueven las variables endógenas de referencia, tal y como aparece en la figura 2.13.

Paso 10: Análisis de perturbaciones: Vamos a analizar los efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en la cantidad de dinero. Esta perturbación van a provocar un fenómeno conocido como la sobre-reacción del tipo de cambio (overshooting), que consiste en que el tipo de cambio va a aumentar en el corto plazo por encima de su valor de largo plazo. Es decir, a corto plazo el tipo de cambio se va a depreciar más que proporcionalmente respecto a su depreciación en el largo plazo como consecuencia del aumento en la cantidad de dinero. Como vamos a comprobar, los efectos que vamos a obtener son similares a los que obtendríamos en el caso de que la demanda agregada pudiese ser diferente de la oferta agregada.

En primer lugar, vamos a calcular los efectos a largo plazo, usando para ello el valor de las variables en estado estacionario calculado anteriormente:

$$\bar{p}_t = m_t + \frac{\theta}{\theta + \psi\beta_3} i_t^*$$

$$\bar{s}_t = m_t - \frac{\beta_0}{\beta_1} + \frac{\theta\beta_1 + \beta_3}{\beta_1(\theta + \psi\beta_3)} i_t^*$$

Calculando la derivada respecto a la cantidad de dinero obtenemos:

$$\frac{d\bar{p}_t}{dm_t} = 1; \quad \frac{d\bar{s}_t}{dm_t} = 1$$

es decir, se cumple el principio de neutralidad monetaria y a largo plazo el aumento en la cantidad de dinero se traslada, en la misma proporción, tanto al nivel de precios como al tipo de cambio nominal. Por tanto, ambas variables van a ser mayores en el nuevo estado estacionario, exactamente en la misma cantidad en la que aumente la cantidad de dinero.

Por otra parte, también podemos calcular los efectos a corto plazo (la sobre-reacción del tipo de cambio nominal) del aumento en la

cantidad de dinero. Para ello partimos de la ecuación dinámica del tipo de cambio.

$$\dot{s}_t = \frac{\psi}{\theta + \beta_3\psi}\beta_0 - \frac{1}{\theta + \beta_3\psi}m_t + \frac{\psi\beta_1}{\theta + \beta_3\psi}s_t + \frac{1 - \psi\beta_1}{\theta + \beta_3\psi}p_t + -i_t^*$$

Definimos las trayectorias estables:

$$\dot{s}_t = \lambda_1(s_t - \bar{s}_t)$$

Iguualamos ambas ecuaciones:

$$\lambda_1(s_t - \bar{s}_t) = \frac{\psi}{\theta + \beta_3\psi}\beta_0 - \frac{1}{\theta + \beta_3\psi}m_t + \frac{\psi\beta_1}{\theta + \beta_3\psi}s_t + \frac{1 - \psi\beta_1}{\theta + \beta_3\psi}p_t - i_t^*$$

A partir de la expresión anterior vamos a obtener una expresión para el tipo de cambio nominal. Operando obtenemos que:

$$\begin{aligned} s_t - \frac{\psi\beta_1}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi)}s_t &= \frac{\psi}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi)}\beta_0 - \frac{1}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi)}m_t \\ &+ \frac{1 - \psi\beta_1}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi)}p_t - \frac{i_t^*}{\lambda_1} + \bar{s}_t \end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi) - \psi\beta_1}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi)} \right] s_t &= \frac{\psi}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi)}\beta_0 - \frac{1}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi)}m_t \\ &+ \frac{1 - \psi\beta_1}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi)}p_t - \frac{i_t^*}{\lambda_1} + \bar{s}_t \end{aligned}$$

Finalmente, despejando el tipo de cambio nominal resulta:

$$\begin{aligned} s_t &= \frac{\psi}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi) - \psi\beta_1}\beta_0 - \frac{1}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi) - \psi\beta_1}m_t \\ &+ \frac{1 - \psi\beta_1}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi) - \psi\beta_1}p_t - \frac{(\theta + \beta_3\psi)}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi) - \psi\beta_1}i_t^* \\ &+ \frac{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi)}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi) - \psi\beta_1}\bar{s}_t \end{aligned}$$

Finalmente, derivamos el valor del tipo de cambio respecto a la perturbación (esto permite conocer el ajuste en las expectativas):

$$\begin{aligned} \frac{ds_t}{dm_t} &= \frac{-1}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi) - \psi\beta_1} + \frac{d\bar{s}_t}{dm_t} = \\ &= \frac{-1}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi) - \psi\beta_1} + \frac{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi)}{\lambda_1(\theta + \beta_3\psi) - \psi\beta_1} \quad (2.21) \end{aligned}$$

Como podemos comprobar, el efecto a corto plazo es similar al que obtenemos en la versión en la cual el nivel de producción es siempre igual al nivel de producción potencial. En este caso, vemos que la clave está en ver si 1 es mayor o menor que $\psi\beta_1$, esto es, el signo clave en nuestro análisis.

Si suponemos que $1 - \psi\beta_1 > 0$ entonces resulta que el numerador es mayor (en valor absoluto) que el denominador, por lo que se produciría el fenómeno de la sobre-reacción del tipo de cambio. Por el contrario, si suponemos que $1 - \psi\beta_1 < 0$, entonces el numerador sería menor (en valor absoluto) que el denominador, por lo que a corto plazo el aumento que se produciría en el tipo de cambio sería menor que el correspondiente a la variación de la cantidad de dinero. Por tanto, ya hemos descubierto la importancia de este signo que continua siendo indeterminado y del cual depende el que se produzca o no el fenómeno de la sobre-reacción del tipo de cambio.

A continuación vamos a ver gráficamente cuáles son los efectos a corto, medio y largo plazo del aumento en la cantidad de dinero. En primer lugar, partimos de la situación inicial que es el estado estacionario 0, (EE_0) , que viene representada en la figura 2.14.

Suponemos que se produce el aumento en la cantidad de dinero. En este caso las constantes de ambas condiciones de equilibrio dinámicas cambian, por lo que tenemos que representarlas hacia la derecha respecto a la situación inicial. El signo del coeficiente asociado a la cantidad de dinero en ambas ecuaciones dinámicas es positivo, por lo que ambas ecuaciones dinámicas se hacen positivas en el momento en que se produce el aumento en la cantidad de dinero. Esto implica que en la ecuación dinámica del tipo de cambio nominal, el nivel de precios tenga que ser mayor para que esta ecuación vuelva a ser cero, por lo que estaría desplazada hacia la derecha respecto a su posición inicial. En la ecuación dinámica de los precios, el tipo de cambio tendría que ser menor para que esta ecuación vuelva a ser cero, por lo que también se habría desplazado a la derecha de

su posición original. En términos gráficos la nueva situación de la economía viene representada en la figura 2.15, donde se muestra el nuevo estado estacionario y, por tanto, los efectos a largoplazo de la perturbación.

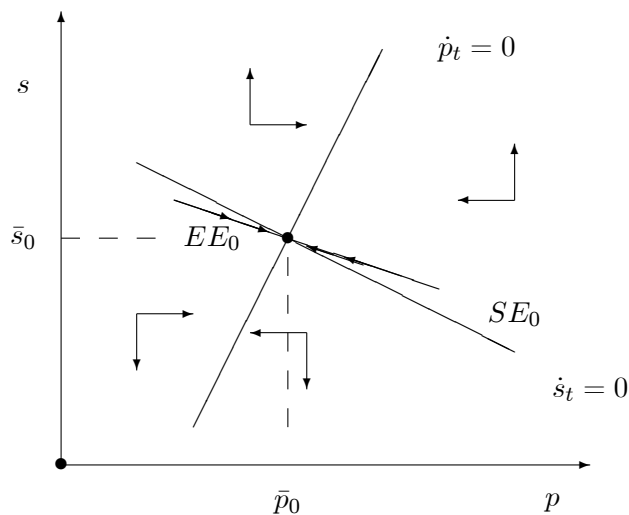


Figura 2.14: Diagrama de fases

Ahora la situación de la economía (el estado estacionario antes de que se produjese la perturbación) se encuentra a la izquierda y hacia abajo del nuevo estado estacionario. Como una de las variables (el tipo de cambio nominal) es flexible, esta variable sufriría un reajuste instantáneo, como consecuencia del reajuste de expectativas. En efecto, en el momento en que se produce el aumento en la cantidad de dinero, los agentes que operan en los mercados de divisas saben que el tipo de cambio va a aumentar en el futuro (saben el valor del tipo de cambio nominal en estado estacionario y que dicho valor se ve influido positivamente por la cantidad de dinero). Esta información provoca que se reajusten al alza las expectativas de depreciación del tipo de cambio, que se van a trasladar al valor actual del mismo, produciendo un aumento del tipo de cambio nominal.

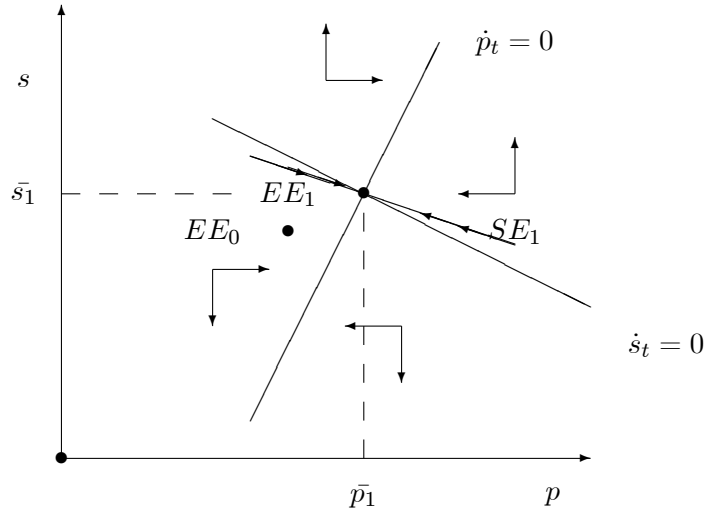


Figura 2.15: Efectos a largo plazo de un aumento en la cantidad de dinero

El efecto de corto plazo viene dado por un ajuste inmediato del tipo de cambio nominal, que aumenta en la cuantía calculada en la ecuación (2.19). De forma instantánea, el tipo de cambio aumenta hasta alcanzar la senda estable. Este aumento del tipo de cambio es superior al que va a registrar en el largo plazo, por lo que se dice que el tipo de cambio ha sobrerreaccionado ante dicha perturbación monetaria. De hecho, este aumento es necesario, por cuanto que el aumento en la cantidad de dinero provoca una disminución en el tipo de interés nacional. Como el tipo de interés nacional pasa a ser inferior al del exterior, según la paridad no cubierta de intereses, el tipo de cambio nominal tendría que disminuir (expectativas de apreciación). Pero para que el tipo de cambio disminuya tal y como indica la paridad no cubierta de intereses pero a largo plazo aumente, tal y como se deriva de la paridad del poder adquisitivo, en el corto plazo el tipo de cambio nominal ha tenido que aumentar más que proporcionalmente respecto a la perturbación, que es exactamente el fenómeno que se produce.

El medio plazo viene determinado por el comportamiento que se deriva de las dos ecuaciones diferenciales que indican que el tipo de cambio tiene que disminuir mientras que el nivel de precios tiene que aumentar. Gráficamente, este movimiento es el que indica la senda

estable, en la cual a medida que el nivel de producción aumenta el tipo de cambio va disminuyendo, hasta alcanzar, en el largo plazo, el nuevo estado estacionario. Así, nos iríamos desplazando a lo largo de la senda estable, en la cual los precios irían aumentando y el tipo de cambio nominal disminuyendo hasta que el ajuste sea completo en el momento en que alcancemos el nuevo estado estacionario.

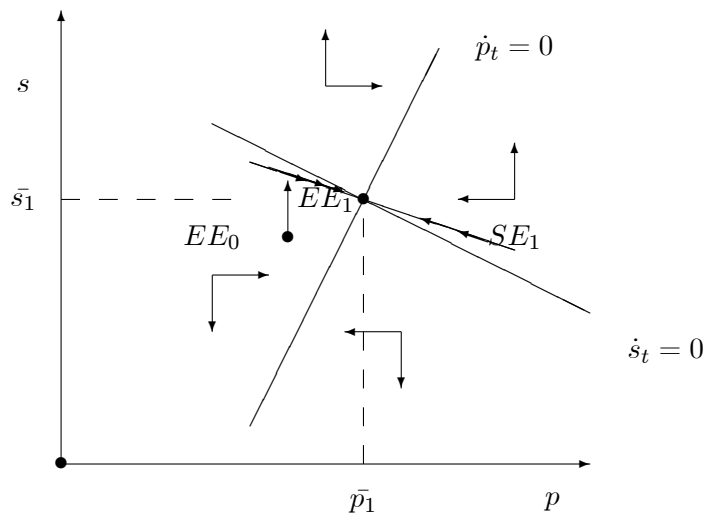


Figura 2.16: Efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en la cantidad de dinero

Como podemos apreciar, la dinámica obtenida para el tipo de cambio nominal y el nivel de precios como consecuencia de un aumento de la cantidad de dinero es similar a la que se deriva de la versión del modelo en la cual el nivel de producción es igual al potencial. Esto significa que estos supuestos no alteran los resultados que se obtienen de cuáles son los efectos de una perturbación monetaria y sobre el resultado consistente en la sobre-reacción del tipo de cambio nominal. A corto plazo el tipo de cambio aumenta, más que proporcionalmente respecto a su valor de largo plazo, mientras que a medio plazo el tipo de cambio nominal disminuye conforme el nivel de precios aumenta. A largo plazo, tanto el nivel de precios como el tipo de cambio nominal han aumentado en la misma proporción que el aumento en la cantidad de dinero.

EJERCICIO 2.4: Considere que nuestra economía está representada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$m_t - p_t = \psi y_t - i_t \quad (2.22)$$

$$y_t^d = y_t = \beta_0 + \beta_1(s_t - p_t) - \beta_2(i_t - \dot{p}_t^e) \quad (2.23)$$

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) + \dot{m}_t \quad (2.24)$$

$$\dot{s}_t^e = i_t - i_t^* \quad (2.25)$$

donde m es el logaritmo de la cantidad de dinero, p el logaritmo del nivel de precios nacional, y^d , el logaritmo del nivel de demanda, y el logaritmo del nivel de producción, y el logaritmo del nivel de producción potencia, s el logaritmo del tipo de cambio nominal, i el tipo de interés nominal nacional e i^* el tipo de interés del exterior. Todos los parámetros se definen en términos positivos. Un punto sobre una variable indica variación con respecto al tiempo.

Resuelva el modelo en términos de los saldos reales y del tipo de cambio real (ecuaciones dinámicas, forma matricial, pendiente de las condiciones de equilibrio dinámicas, análisis de estabilidad, diagrama de fases, senda estable, etc.)

Estudie los efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en el nivel de producción potencial, como consecuencia del mayor nivel tecnológico del encuentro con los extraterrestres.

SOLUCIÓN:

En primer lugar determinamos el número de variables endógenas y exógenas del modelo. Las variables del modelo son:

1. Cantidad de dinero (exógena)
2. Nivel de precios nacionales (endógeno)
3. Nivel de producción (endógeno)
4. Tipo de interés nominal (endógeno)
5. Tipo de cambio nominal (endógeno)
6. Nivel de precios del exterior (exógeno)
7. Nivel de producción potencial (exógeno)
8. Tipo de interés del exterior (exógeno)

Tal y como podemos observar tenemos 4 variables endógenas y 4 ecuaciones, por lo que podemos resolver este modelo sin necesidad de imponer ningún supuesto adicional.

Variables endógenas de referencia: Tal y como nos indica el enunciado del modelo, las variables en términos de las cuales vamos a resolver nuestra economía son los saldos reales y el tipo de cambio real, que representa el nivel de competitividad exterior vía precios de nuestra economía. El uso de estas variables endógenas de referencia viene determinado por el hecho de que la ecuación de ajuste de precios incluye tanto el componente cíclico como el componente tendencia, dado por la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero. Si la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero es positiva, esto implicaría que aunque el componente cíclico de la inflación fuese nulo (el nivel de producción agregado fuese igual al potencial) la inflación sería positiva e igual a la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero. Por este motivo la economía tendríamos que representarla en términos reales, que es precisamente lo que hacemos cuando tomamos como variables endógenas de referencia el nivel de saldos reales y el tipo de cambio real.

Ecuaciones diferenciales: A continuación vamos a calcular las dos ecuaciones diferenciales para los saldos reales y el tipo de cambio real que van a describir nuestra economía. Despejamos el tipo de interés nominal de la ecuación (2.22):

$$\dot{i}_t = -(m_t - p_t - \psi y_t) \quad (2.26)$$

Sustituimos (2.26) en (2.23):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1(s_t - p_t) + \beta_2(m_t - p_t - \psi y_t) + \beta_2 \dot{p}_t^e$$

Aplicando previsión perfecta y sustituyendo la ecuación de la inflación resulta:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1(s_t - p_t) + \beta_2(m_t - p_t - \psi y_t) + \beta_2 \mu(y_t - \bar{y}_t) + \beta_2 \dot{m}_t$$

Definimos los saldos reales y el tipo de cambio real como:

$$l_t = m_t - p_t$$

$$q_t = s_t - p_t$$

El logaritmo de los saldos reales lo definimos como el logaritmo de la cantidad de dinero menos el logaritmo del nivel de precios. Por su parte, el tipo de cambio real (su logaritmo) lo definimos como el logaritmo del tipo de cambio nominal menos el logaritmo del nivel de precios, ya que como podemos comprobar así aparece en la ecuación de demanda agregada, indicando que el nivel de precios del exterior lo hemos normalizado a 1 y por tanto su logaritmo es cero, por lo que no aparece. Si apareciese el nivel de precios del exterior, el logaritmo del tipo de cambio real vendría definido como el logaritmo del tipo de cambio nominal menos el logaritmo del nivel de precios nacional más el logaritmo del nivel de precios del exterior. Introduciendo la definición de nuestras variables en la demanda agregada (o nivel de producción ya que es lo mismo en este caso) obtenemos:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 q_t + \beta_2 l_t - \psi \beta_2 y_t + \beta_2 \mu y_t - \beta_2 \mu \bar{y}_t + \beta_2 \dot{m}_t$$

agrupando los términos del nivel de producción,

$$y_t + \beta_2 \psi y_t - \beta_2 \mu y_t = \beta_0 + \beta_1 q_t + \beta_2 l_t - \beta_2 \mu \bar{y}_t + \beta_2 \dot{m}_t$$

por lo que el nivel de producción de la economía es:

$$y_t = \frac{1}{1 + \beta_2\psi - \beta_2\mu} [\beta_0 + \beta_1q_t + \beta_2l_t - \beta_2\mu\bar{y}_t + \beta_2\dot{m}_t] \quad (2.27)$$

Una vez que hemos obtenido el nivel de producción (expresión 2.27) lo sustituimos en la ecuación diferencial de los saldos reales, que sería la siguiente:

$$\dot{l}_t = \dot{m}_t - \dot{p}_t = \dot{m}_t - \mu(y_t - \bar{y}_t) - \dot{m}_t = -\mu(y_t - \bar{y}_t)$$

Sustituyendo el nivel de producción por el resultado obtenido en (2.27) resulta que:

$$\dot{l}_t = -\mu \left[\frac{1}{1 + \beta_2\psi - \beta_2\mu} [\beta_0 + \beta_1q_t + \beta_2l_t - \beta_2\mu\bar{y}_t + \beta_2\dot{m}_t] - \bar{y}_t \right]$$

$$\dot{l}_t = \frac{-\mu}{1 + \beta_2\psi - \beta_2\mu} [\beta_0 + \beta_1q_t + \beta_2l_t + \beta_2\dot{m}_t] + \frac{\mu + \beta_2\psi\mu}{1 + \beta_2\psi - \beta_2\mu} \bar{y}_t$$

por lo que ya tenemos nuestra primera ecuación dinámica que nos indica el comportamiento de los saldos reales de la economía. Ahora procedemos de la misma forma con objeto de obtener la ecuación dinámica para el tipo de cambio real. Para eso, en primer lugar definimos la ecuación dinámica para el tipo de cambio real como:

$$\dot{q}_t = \dot{s}_t - \dot{p}_t = \dot{i}_t - \dot{i}_t^* - \mu(y_t - \bar{y}_t) - \dot{m}_t \quad (2.28)$$

Ahora tenemos que sustituir el nivel de producción (expresión 2.27) en la expresión (2.28), por lo que tendríamos:

$$\dot{q}_t = \dot{i}_t - \dot{i}_t^* + \mu\bar{y}_t - \dot{m}_t - \frac{\mu}{1 + \beta_2\psi - \beta_2\mu} [\beta_0 + \beta_1q_t + \beta_2l_t - \beta_2\mu\bar{y}_t + \beta_2\dot{m}_t] \quad (2.29)$$

Por su parte, el tipo de interés nominal es:

$$\dot{i}_t = -(m_t - p_t - \psi y_t)$$

y sustituyendo el nivel de producción (expresión 2.27) en la misma obtenemos que el tipo de interés nominal es:

$$i_t = -\left(l_t - \frac{\psi}{1 + \beta_2\psi - \beta_2\mu} [\beta_0 + \beta_1 q_t + \beta_2 l_t - \beta_2\mu \bar{y}_t + \beta_2 \dot{m}_t]\right)$$

Finalmente, sustituyendo el tipo de interés nominal en la expresión (2.29) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{q}_t &= \frac{\psi - \mu}{1 + \beta_2(\psi - \mu)} \beta_0 + \frac{\beta_1(\psi - \mu)}{1 + \beta_2(\psi - \mu)} q_t - \frac{1}{1 + \beta_2(\psi - \mu)} l_t \\ &\quad - \frac{1}{1 + \beta_2(\psi - \mu)} \dot{m}_t + \frac{\mu}{1 + \beta_2(\psi - \mu)} \bar{y}_t - i_t^* \end{aligned}$$

Modelo en notación matricial: Una vez hemos obtenido nuestras dos ecuaciones diferenciales a continuación representamos nuestro modelo en notación matricial, quedado como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{l}_t \\ \dot{q}_t \end{bmatrix} &= \frac{1}{1 + \beta_2(\psi - \mu)} \begin{bmatrix} -\mu\beta_2 & -\mu\beta_1 \\ -1 & \beta_1(\psi - \mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_t \\ q_t \end{bmatrix} + \\ &\quad \frac{1}{1 + \beta_2(\psi - \mu)} \begin{bmatrix} -\mu & -\mu\beta_2 & \mu + \mu\psi\beta_2 & 0 \\ \psi - \mu & -1 & \mu & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dot{m}_t \\ \bar{y}_t \\ i_t^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tal y como podemos comprobar, no conocemos todos los signos de la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas por lo que en ese caso necesitamos la información que obtengamos del análisis de estabilidad para representar gráficamente nuestro modelo. Como podemos observar el elemento clave para poder trabajar con este modelo consiste en conocer si el parámetro ψ es mayor o menor que el parámetro μ , y si en el caso en que $\psi < \mu$, $|\beta_2(\psi - \mu)|$ es mayor o menor que 1.

Valor de las variables en estado estacionario: El negativo de la inversa de la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas es:

$$-A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\psi - \mu}{\mu} & 1 \\ \frac{1}{\mu\beta_1} & \frac{-\beta_2}{\beta_1} \end{bmatrix}$$

Por tanto tenemos que:

$$\begin{bmatrix} \bar{l}_t \\ \bar{q}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\psi-\mu}{\mu} & 1 \\ \frac{1}{\mu\beta_1} & \frac{-\beta_2}{\beta_1} \end{bmatrix} \frac{1}{1+\beta_2(\psi-\mu)} \begin{bmatrix} -\mu & \mu\beta_2 & \mu(1+\psi\beta_2) & 0 \\ \psi-\mu & -1 & \mu & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dot{m}_t \\ \bar{y}_t \\ i_t^* \end{bmatrix}$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} \bar{l}_t \\ \bar{q}_t \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\beta_2(\psi-\mu)} \begin{bmatrix} 0 & -1-\beta_2(\psi-\mu) & \mu+(1+\psi\beta_2)(\psi-\mu) & -1 \\ -\frac{\psi-\mu+\beta_2}{\beta_1(\psi-\mu)} & 0 & \frac{1+\beta_2(\psi-\mu)}{\beta_1} & \frac{\beta_2}{\beta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dot{m}_t \\ \bar{y}_t \\ i_t^* \end{bmatrix}$$

Análisis de estabilidad: A continuación, vamos a realizar el análisis de estabilidad para determinar el signo de los coeficientes de la matriz asociada a las variables endógenas. Para ello calculamos el siguiente determinante y lo igualamos a cero:

$$Det \begin{bmatrix} \frac{-\mu\beta_2}{1+\beta_2(\psi-\mu)} - \lambda & \frac{-\mu\beta_1}{1+\beta_2(\psi-\mu)} \theta \mu \beta_1 \\ \frac{-1}{1+\beta_2(\psi-\mu)} & \frac{\beta_1(\psi-\mu)}{1+\beta_2(\psi-\mu)} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

de la cual obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\lambda^2 + \lambda \frac{\mu\beta_2 - \beta_1(\psi-\mu)}{1+\beta_2(\psi-\mu)} - \frac{\mu\beta_1 [1+\beta_2(\psi-\mu)]}{[1+\beta_2(\psi-\mu)]^2} = 0$$

$$\frac{-\frac{\mu\beta_2 - \beta_1(\psi-\mu)}{1+\beta_2(\psi-\mu)} \pm \sqrt{\left[\frac{\mu\beta_2 - \beta_1(\psi-\mu)}{1+\beta_2(\psi-\mu)} \right]^2 + \frac{4\mu\beta_1 [1+\beta_2(\psi-\mu)]}{[1+\beta_2(\psi-\mu)]^2}}{2}$$

Tal y como podemos observar, el signo dentro de la raíz cuadrada es positivo si $\psi - \mu > 0$, por lo que al resolver nos va a quedar un número mayor que el coeficiente asociado a λ . En este caso tenemos que $\mu\beta_2 + \beta_1(\psi - \mu) > 0$, por lo que este término es

negativo. En este caso tenemos que negativo más algo más grande es positivo. Negativo menos algo más grande, negativo. Por tanto $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Es decir, la solución de este sistema es un punto de silla. En el caso en que $\psi - \mu < 0$, tenemos varios casos. Si $1 + \beta_2(\psi - \mu) > 0$, el signo dentro de la raíz cuadrada sigue siendo positivo. Si $\mu\beta_2 + \beta_1(\psi - \mu) > 0$, entonces tendríamos negativo más algo más grande es positivo y negativo menos algo más grande, negativo. De nuevo $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, y la solución sería punto de silla. Por el contrario si $\mu\beta_2 + \beta_1(\psi - \mu) < 0$ entonces el primer término es positivo. Positivo más algo más grande positivo. Positivo menos algo más grande positivo. Es decir, en este caso resultaría que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, esto es, las dos raíces serían positivas y existiría inestabilidad global. Por tanto resulta que el término $\mu\beta_2 + \beta_1(\psi - \mu)$ no puede ser negativo.

En el caso en el que $\psi - \mu < 0$ y $1 + \beta_2(\psi - \mu) < 0$, resulta que el signo dentro de la raíz cuadrada es negativo, es decir, al resolver la raíz cuadrada tendríamos un valor más pequeño que el negativo (en valor absoluto) del coeficiente asociado a λ . Pero resulta que en este caso el coeficiente asociado a λ sería positivo si $\mu\beta_2 + \beta_1(\psi - \mu) > 0$. Positivo más algo más pequeño, positivo. Positivo más algo más grande, positivo. De nuevo tendríamos inestabilidad global al ser las dos raíces positivas. Si $\mu\beta_2 + \beta_1(\psi - \mu) < 0$, tendríamos de nuevo punto de silla. Por tanto obtenemos que el parámetro que tienen signo indeterminado, $\psi - \mu$, que puede ser tanto positivo como negativo dado que en ambos casos la solución puede ser del tipo punto de silla. Este resultado es consecuencia de que, al igual que en el ejercicio anterior, estamos introduciendo el supuesto simplificador de que el nivel de producción siempre es igual al nivel de demanda agregada.

Representación gráfica: La pendiente de la ecuación diferencial de la primera variable endógena (saldos reales), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, tiene signo negativo:

$$\frac{dq_t}{dl_t} \mid \dot{l}_t = -\frac{\beta_2}{\beta_1} < 0$$

La pendiente de la ecuación diferencial de la segunda variable endógena (nivel de producción), bajo la restricción de que la

derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, tiene signo indeterminado, por lo que puede ser tanto positiva como negativa:

$$\frac{dq_t}{dl_t} \big|_{\dot{q}_t=0} = \frac{1}{\beta_2(\psi - \mu)}$$

Si suponemos que $\psi > \mu$ entonces la pendiente anterior es positiva. Por el contrario, si suponemos que $\psi < \mu$, entonces la pendiente sería negativa. Como en este caso podemos elegir, y dado que la pendiente anterior ha sido negativa, vamos a suponer que esta es positiva, es decir, vamos a suponer que $\psi - \mu > 0$.

La representación gráfica de la condición de equilibrio dinámica para el tipo de cambio real y su correspondiente comportamiento en desequilibrio viene dada en la figura 2.17.

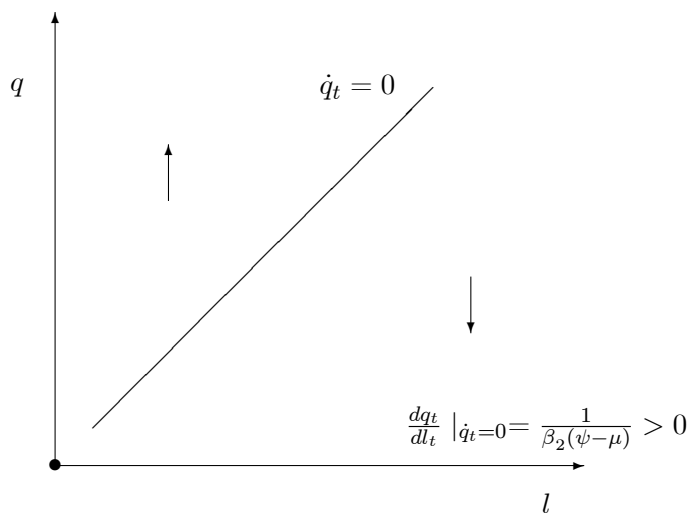


Figura 2.17: Condición de equilibrio dinámica para el tipo de cambio real

La representación gráfica de la condición de equilibrio dinámica para los saldos reales y su correspondiente comportamiento en desequilibrio viene dada en la figura 2.18.

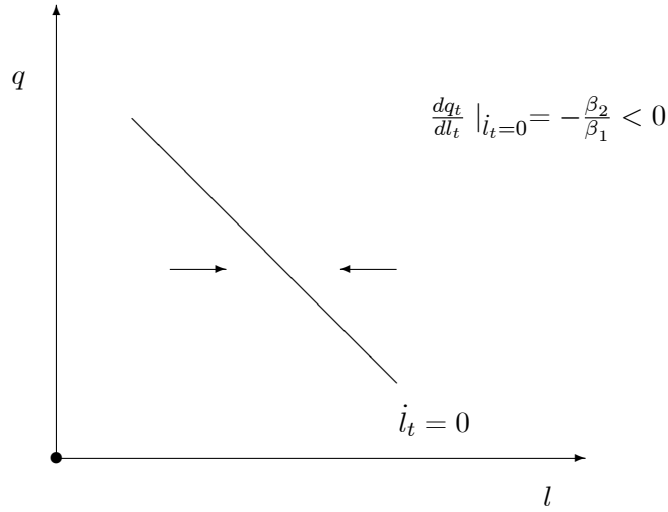


Figura 2.18: Condición de equilibrio dinámica para los saldos reales

Diagrama de fases: La representación gráfica de nuestra economía viene dada en la figura 2.19. Como ya hemos calculado anteriormente, la pendiente de la condición de equilibrio dinámica para los precios es positiva, mientras que la pendiente de la condición de equilibrio dinámica del tipo de cambio nominal es negativa. Por otra parte, tenemos que la solución del sistema es de punto de silla, es decir, tenemos tanto trayectorias estables como trayectorias inestables.

Senda Estable: Dado que la solución del modelo es del tipo punto de silla necesitamos definir la senda estable. En este caso la senda estable tiene pendiente negativa, indicando las zonas por las que pasan las trayectorias convergentes al estado estacionario. Tal y como podemos observar en la figura 2.19 las únicas situaciones de desequilibrio asociadas a trayectorias estables son aquellas en las cuales el valor de las dos variables es bajo o bien es alto en las zonas de desequilibrio que están a la izquierda y a la derecha.

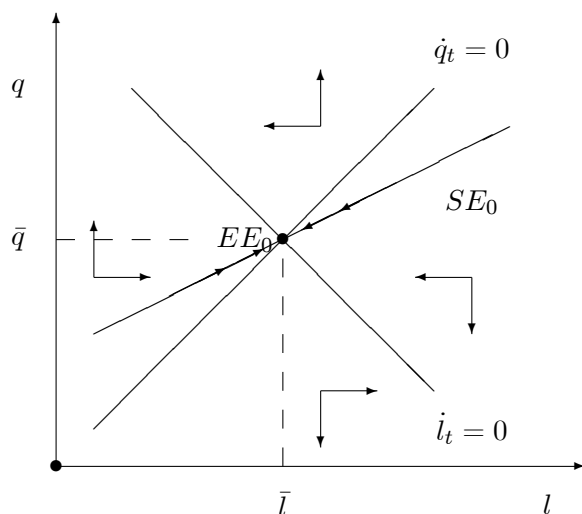


Figura 2.19: Diagrama de fases

Análisis de perturbaciones: Una vez determinado el estado estacionario de nuestra economía en términos de los saldos reales y del tipo de cambio real, a continuación vamos a estudiar cuáles son los efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en el nivel de producción potencial de la economía. En primer lugar, vamos a determinar los efectos en el largo plazo. Tal y como podemos observar, el nivel de producción potencial aparece en ambas ecuaciones diferenciales, por lo que cambia la constante de estas ecuaciones. Esto significa que las ecuaciones diferenciales para los saldos reales y para el tipo de cambio real tenemos que representarlas a la izquierda o a la derecha de la posición inicial. Si observamos el coeficiente del nivel de producción potencial en la ecuación dinámica para los saldos reales, observamos que su valor es positivo. Esto significa que esta ecuación se hace positiva. Para que vuelva a ser cero, algo positivo tiene que disminuir o bien algo negativo tiene que aumentar. Tal y como podemos observar los coeficientes asociados a los saldos reales y al tipo de cambio real son negativos, por lo que una de estas variables tiene que aumentar. Por ejemplo, para el mismo nivel del tipo de cambio real, los saldos reales tienen que ser mayores para que la ecuación vuelva a ser cero. Por tanto, esta ecuación diferencial tenemos que dibujarla a la derecha de la situación inicial.

En la ecuación diferencial para el tipo de cambio real vemos que el coeficiente del nivel de producción potencial también es positivo, es decir, esta ecuación se haría positiva como consecuencia de la perturbación. Como podemos observar el coeficiente de los saldos reales es negativo. Por tanto, para que esta ecuación vuelva a ser cero, los saldos reales tienen que aumentar, es decir, también tenemos que dibujarla a la derecha de la posición inicial.

Sin embargo, el hecho de que ambas condiciones de equilibrio parcial estén desplazadas hacia la derecha, hace que sepamos que el nivel de saldos reales a largo plazo va a ser superior, pero no tenemos información sobre qué va a ocurrir con el tipo de cambio real (puede aumentar, disminuir o quedarse igual). Para ello tenemos que recurrir al valor de las variables en estado estacionario y ver como cambian ante esta perturbación. El valor de las variables en estado estacionario calculado anteriormente es:

$$\bar{l}_t = \frac{1}{1 + \beta_2(\psi - \mu)} [-(1 + \beta_2(\psi - \mu))\dot{m}_t + (\mu + (1 + \psi\beta_2)(\psi - \mu))\bar{y}_t - i_t^*]$$

$$\bar{q}_t = \frac{1}{1 + \beta_2(\psi - \mu)} \left[-\frac{\psi - \mu + \beta_2}{\beta_1(\psi - \mu)}\beta_0 + \frac{1 + \beta_2(\psi - \mu)}{\beta_1}\bar{y}_t + \frac{\beta_2}{\beta_1}i_t^* \right]$$

Calculando la derivada respecto al nivel de producción potencial obtenemos:

$$\frac{d\bar{l}_t}{d\bar{y}_t} = \mu + (1 + \psi\beta_2)(\psi - \mu) > 0; \quad \frac{d\bar{q}_t}{d\bar{y}_t} = \frac{1 + \beta_2(\psi - \mu)}{\beta_1} > 0$$

esto es, ambas derivadas son positivas, indicando que en el largo plazo el aumento en el nivel de producción potencial provoca tanto un aumento en los saldos reales como un aumento en el tipo de cambio real. El mayor nivel de tipo de cambio real a largo plazo viene justificado porque el aumento en el nivel de producción potencial supone un aumento del nivel de competitividad de la economía. Por su parte, los saldos reales aumentan en el largo plazo porque el mayor nivel de producción potencial supone una disminución en el nivel de precios. Por tanto, en nuevo estado estacionario estará a la derecha y hacia arriba respecto al estado estacionario inicial. En concreto

podríamos hacer la representación gráfica que aparece en la figura 2.20.

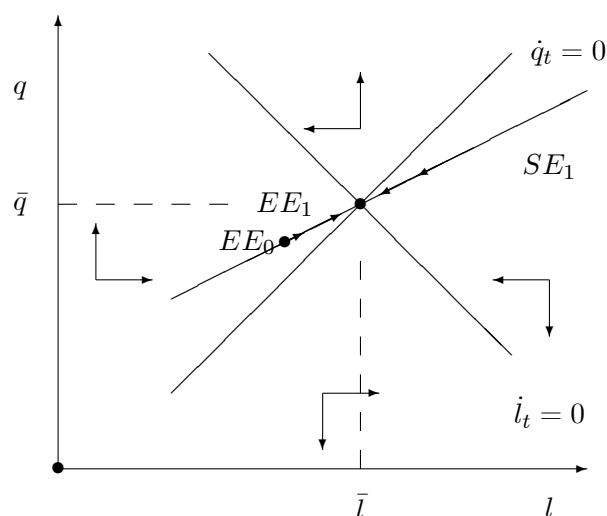


Figura 2.20: Efectos a corto plazo de un aumento en el nivel de producción potencial

Como podemos comprobar, en este caso particular, el estado estacionario inicial se encuentra justo en la nueva senda estable, por lo que no se produciría ningún efecto en el corto plazo. Si la pendiente de la senda estable fuera diferente a la que hemos representado gráficamente, entonces sí que existiría corto plazo, que vendría dado por una alteración en el tipo de cambio real. El tipo de cambio real disminuiría si la pendiente de la senda estable fuese menor o aumentaría si la pendiente de la senda estable fuese mayor.

El medio plazo vendría dado por un desplazamiento a lo largo de la senda estable, hasta alcanzar el nuevo estado estacionario, periodo de tiempo durante el cual iría aumentando tanto los saldos reales como el tipo de cambio real.

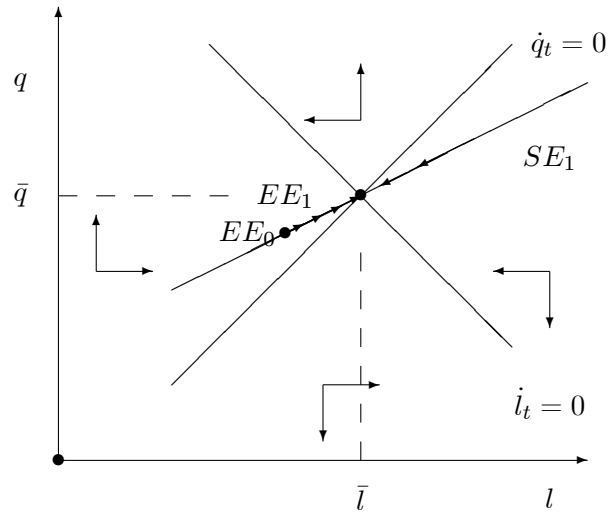


Figura 2.21: Efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en el nivel de producción potencial

Parte II

Introducción al Equilibrio General

3

La elección intertemporal de los consumidores

En este tema vamos a resolver algunos problemas relacionados con la elección intertemporal del consumidor en términos de su decisión consumo-ahorro. Dada una determinada renta los individuos pueden hacer dos cosas con la misma: o bien la gastan comprando bienes y servicios o bien la guardan transformándolas en ahorro. Esta decisión se realiza en un entorno intertemporal ya que los individuos pueden mover su renta a lo largo del tiempo, bien ahorrando o bien endeudándose, lo que implica que el patrón temporal de la renta no tiene porqué coincidir con el patrón temporal del consumo. Esta elección va a tener importantes consecuencias para el funcionamiento de una economía, ya que el consumo es el componente más importante (cuantitativamente) de la demanda agregada, mientras que el ahorro va a determinar la inversión y, por tanto, la producción futura. En este contexto resulta importante entender cuáles son los factores que afectan a esta decisión.

En primer lugar, vamos a realizar unos ejercicios suponiendo que el ciclo vital del individuo se reduce a dos periodos, con el objeto de comprender los mecanismos básicos que subyacen a la elección de consumo en cada periodo por parte del individuo. El mecanismo es el mismo para un ciclo vital de más de dos periodos. A continuación realizamos varios ejercicios suponiendo la existencia de un número

infinito de periodos y resolviendo el problema del consumidor tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo.

EJERCICIO 3.1: Suponga un individuo que vive dos periodos. En cada periodo el individuo recibe una renta de 100.000 euros. Sus preferencias vienen dadas por la siguiente expresión:

$$U = \ln C_1 + \beta \ln C_2$$

donde $\beta=0,96$ y el tipo de interés real es del 1,25%. Se pide:

- Determine el nivel de consumo del individuo en cada periodo. Represente gráficamente la solución.
 - Suponga que el tipo de interés real aumenta hasta el 2,5%. Calcule de nuevo los consumos óptimos en cada periodo y la nueva representación gráfica.
 - Suponga que el parámetro β disminuye hasta 0,90. Repita el análisis para este nuevo valor.
-

SOLUCIÓN:

- El problema a maximizar por parte del individuo es el siguiente:

$$\max U = \ln C_1 + 0,96 \ln C_2$$

sujeto a las restricciones presupuestarias en ambos periodos:

$$C_1 = W_1 - B_1$$

$$C_2 = W_2 + (1 + R)B_1$$

Sustituyendo el ahorro de la restricción presupuestaria del primer periodo en la restricción presupuestaria del segundo periodo obtenemos la restricción presupuestaria intertemporal:

$$C_1 + \frac{C_2}{1 + R} = W_1 + \frac{W_2}{1 + R}$$

Dado que el tipo de interés es del 1,25% y la renta que percibe el individuo es de 100.000 euros en cada periodo, la restricción presupuestaria quedaría:

$$C_1 + \frac{C_2}{1,0125} = 100.000 + \frac{100.000}{1,0125} = 198.522,16$$

Por tanto, el problema a maximizar (el lagrangiano) sería:

$$\max U = \ln C_1 + \beta \ln C_2 - \lambda(C_1 + \frac{C_2}{1+R} - W_1 - \frac{W_2}{1+R})$$

o lo que es lo mismo:

$$\max U = \ln C_1 + 0,96 \ln C_2 - \lambda(C_1 + \frac{C_2}{1,0125} - 100.000 - \frac{100.000}{1,0125})$$

Las condiciones de primer orden serían las siguientes:

$$\frac{1}{C_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{0,96}{C_2} - \frac{\lambda}{1,0125} = 0$$

Sustituyendo la primera condición de primer orden en la segunda condición de primer orden, obtenemos la senda óptima del consumo a lo largo de la vida del agente:

$$\frac{0,96}{C_2} - \frac{1}{1,0125C_1} = 0$$

$$0,96 \times 1,0125C_1 = C_2$$

$$0,972C_1 = C_2$$

A continuación, sustituimos la expresión anterior en la tercera condición de primer orden, resultando:

$$C_1 + \frac{0,972C_1}{1,0125} = 198.522,16$$

Por tanto el consumo óptimo en el primer periodo sería:

$$1,96C_1 = 198.522,16$$

$$C_1 = 101.286,82$$

mientras que el consumo óptimo en el periodo 2, sería:

$$C_2 = 198.522,16 - 101.286,82 = 97.235,34$$

Como podemos comprobar el nivel de consumo en el primer periodo es superior al consumo óptimo del segundo periodo. Esto es consecuencia de la tasa de descuento intertemporal, que supone que el individuo valora más la utilidad en el momento actual que la utilidad futura. Además obtenemos que el individuo va a tener un nivel de consumo en el periodo 1 superior a su renta, es decir, el ahorro de este individuo va a ser negativo dado que para maximizar su bienestar va a desplazar renta del futuro hacia el momento actual.

$$(1 - \tau)W_2 + (1 - \tau)W_1(1 + R_t)$$

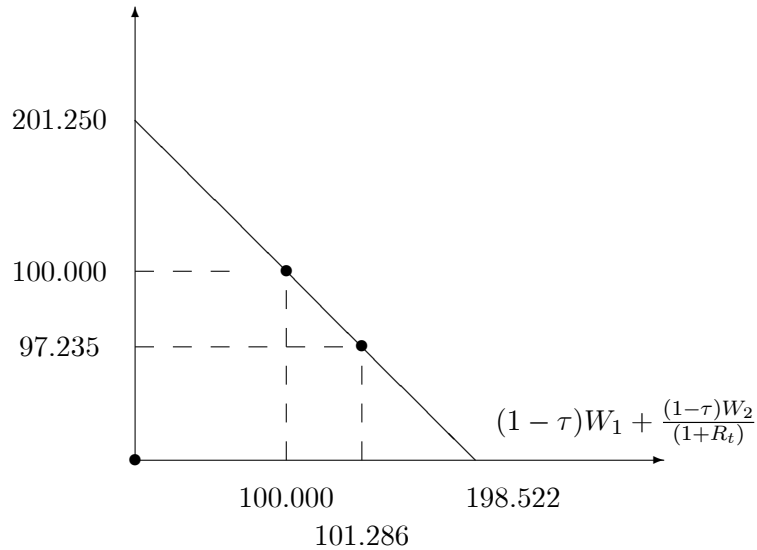


Figura 3.1: Elección óptima del consumidor

Por tanto, el nivel de utilidad que obtendría este individuo sería:

$$U = \ln 101.286,82 + 0,96 \ln 97.235,34 = 22,55$$

La representación gráfica de esta solución aparece en la figura 3.1. Como podemos comprobar, la senda óptima de consumo implica que el individuo va a pedir prestado en el periodo 1 (va a desear tener un nivel de consumo superior a su nivel de renta en dicho periodo) mientras que el individuo va a ahorrar en el segundo periodo, teniendo un nivel de consumo inferior a su renta en dicho periodo.

b) Vamos a repetir los cálculos anteriores pero ahora con un tipo de interés mayor, del 2,5%, con el objetivo de analizar cuáles son los efectos de un aumento del tipo de interés sobre la decisión de consumo del individuo. En este caso el problema a maximizar quedaría como:

$$\max U = \ln C_1 + 0,96 \ln C_2 - \lambda \left(C_1 + \frac{C_2}{1,025} - 100.000 - \frac{100.000}{1,025} \right)$$

es decir, la renta total del individuo (calculada en el periodo 1) pasa ahora a ser de 197.560,98, inferior a la que teníamos anteriormente. Esto es debido a que el coste de mover renta del periodo 2 al periodo 1 ha aumentado, ya que el tipo de interés es precisamente este coste. Calculando las condiciones de primer orden obtenemos:

$$\frac{1}{C_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{0,96}{C_2} - \frac{\lambda}{1,025} = 0$$

$$C_1 + \frac{C_2}{1,025} = 197.560,98$$

Sustituyendo la primera condición de primer orden en la segunda condición de primer orden, obtenemos la senda óptima del consumo a lo largo de la vida del agente:

$$\frac{0,96}{C_2} - \frac{1}{1,025 C_1} = 0$$

$$0,96 \times 1,025 C_1 = C_2$$

$$0,984 C_1 = C_2$$

A continuación, sustituimos la expresión anterior en la tercera condición de primer orden, resultando:

$$C_1 + \frac{0,984C_1}{1,025} = 197.560,98$$

Por tanto el consumo óptimo en el primer periodo sería:

$$1,96C_1 = 197.560,98$$

$$C_1 = 100.796,42$$

mientras que el consumo óptimo en el periodo 2, sería:

$$C_2 = 197.550,98 - 100.796,42 = 96.764,56$$

Como podemos comprobar en la figura 3.2, el aumento en el tipo de interés provoca que aumente la pendiente de la restricción presupuestaria intertemporal, indicando que es más costoso mover dinero del futuro al presente y más beneficioso mover dinero del presente al futuro.

$$(1 - \tau)W_2 + (1 - \tau)W_1(1 + R_t)$$

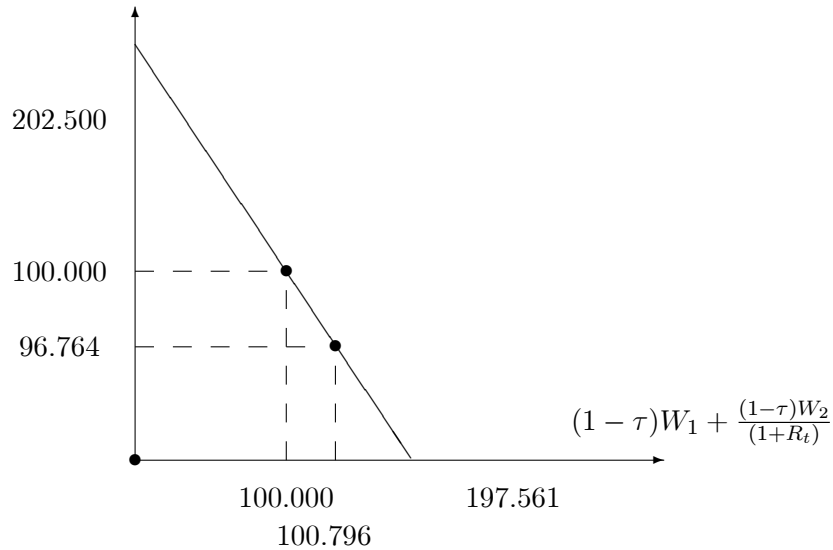


Figura 3.2: Elección óptima del consumidor ante un aumento en el tipo de interés

Como podemos comprobar el nivel de consumo en el primer periodo sigue siendo superior al consumo óptimo del segundo periodo, aunque cambia la proporción. En este caso el consumo del periodo 2 es un 98,4% del consumo del periodo 1, mientras que anteriormente dicha proporción era del 97,4%. Es decir, el individuo a disminuido su preferencia a endeudarse en el primer periodo ya que el coste de dicho endeudamiento ha aumentado.

El nivel de utilidad que obtendría este individuo ahora sería:

$$U = \ln 100.796,42 + 0,96 \ln 96.764,56 = 22,54$$

que es inferior al valor obtenido anteriormente. Esta pérdida de bienestar es consecuencia del aumento en el tipo de interés. En efecto, el individuo está endeudándose en el primer periodo, por lo que un aumento del tipo de interés le supone un aumento del endeudamiento.

La representación gráfica de esta solución aparece en la figura 3.2. Como podemos comprobar, la senda óptima de consumo implica que el individuo va a pedir prestado en el periodo 1 (va a desear tener un nivel de consumo superior a su nivel de renta en dicho periodo) mientras que el individuo va a ahorrar en el segundo periodo, teniendo un nivel de consumo inferior a su renta en dicho periodo.

c) A continuación vamos a repetir el ejercicio del apartado (a) pero para una tasa de descuento intertemporal de 0,9 con el objeto de estudiar cómo se ve alterada la decisión del consumidor ante una disminución en dicha tasa. En este caso el problema vendría dado por:

$$\max U = \ln C_1 + 0,9 \ln C_2 - \lambda \left(C_1 + \frac{C_2}{1,0125} - 100.000 - \frac{100.000}{1,0125} \right)$$

Las condiciones de primer orden serían las siguientes:

$$\frac{1}{C_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{0,9}{C_2} - \frac{\lambda}{1,0125} = 0$$

Sustituyendo la primera condición de primer orden en la segunda condición de primer orden, obtenemos la senda óptima del consumo a lo largo de la vida del agente:

$$\frac{0,9}{C_2} - \frac{1}{1,0125C_1} = 0$$

$$0,9 \times 1,0125C_1 = C_2$$

$$0,9225C_1 = C_2$$

A continuación, sustituimos la expresión anterior en la tercera condición de primer orden, resultando:

$$C_1 + \frac{0,9225C_1}{1,0125} = 198.522,16$$

Por tanto el consumo óptimo en el primer periodo sería:

$$1,9C_1 = 198.522,16$$

$$C_1 = 103.979,46$$

mientras que el consumo óptimo en el periodo 2, sería:

$$C_2 = 198.522,16 - 103.979,46 = 93.581,51$$

Como podemos comprobar el nivel de consumo en el primer periodo es superior al consumo óptimo del segundo periodo. Esto es consecuencia de la tasa de descuento intertemporal, que supone que el individuo valora más la utilidad en el momento actual que la utilidad futura. Además obtenemos que el individuo va a tener un nivel de consumo en el periodo 1 superior a su renta, es decir, el ahorro de este individuo va a ser negativo dado que para maximizar su bienestar va a desplazar renta del futuro hacia el momento actual.

Por tanto, el nivel de utilidad que obtendría este individuo sería:

$$U = \ln 103.979,46 + 0,9 \ln 93.581,51 = 21,85$$

La representación gráfica de esta solución aparece en la figura 3.3. Como podemos comprobar, la senda óptima de consumo implica que el individuo va a pedir prestado en el periodo 1 (va a desear

tener un nivel de consumo superior a su nivel de renta en dicho periodo) mientras que el individuo va a ahorrar en el segundo periodo, teniendo un nivel de consumo inferior a su renta en dicho periodo.

$$(1 - \tau)W_2 + (1 - \tau)W_1(1 + R_t)$$

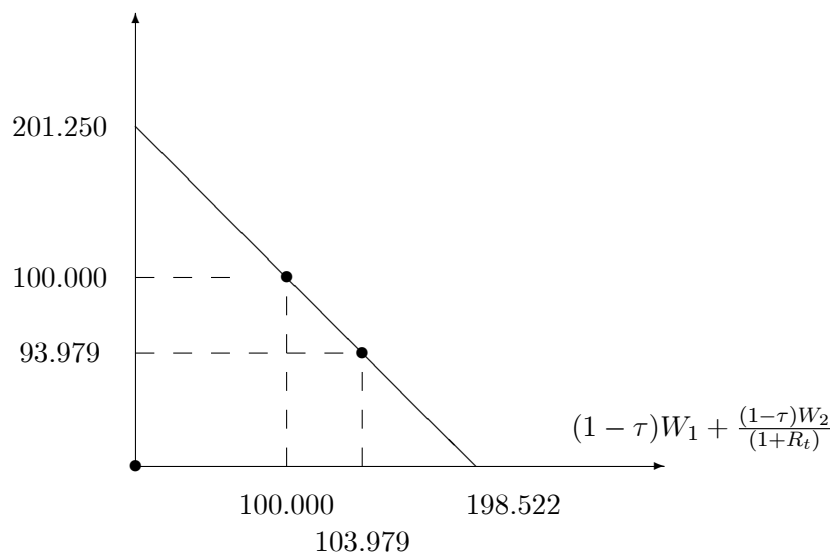


Figura 3.3: Elección óptima del consumidor ante un aumento en β

EJERCICIO 3.2: Suponga un individuo que vive dos periodos. En cada periodo el individuo recibe una renta de 100.000 euros. Sus preferencias vienen dadas por la siguiente expresión:

$$U = \ln C_1 + \beta \ln C_2$$

donde $\beta=0,6$. Para simplificar suponemos que el tipo de interés es cero. Se pide:

- Cuál es el significado del parámetro β .
- Cuál es el consumo en cada periodo del individuo si no existen restricciones a la liquidez (construya el lagrangiano del problema). Represente gráficamente la solución.

c) Cuál sería el consumo del individuo en cada periodo si existiesen restricciones a la liquidez, tal que el individuo no puede pedir prestado. Represente gráficamente esta situación y compárela con la anterior. ¿En qué caso está mejor el individuo? (cálculé cual sería el valor de U en cada caso).

d) Repita de nuevo el análisis suponiendo que el tipo de interés es del 5%.

e) Repita de nuevo el análisis del apartado (d), pero con $\beta=0,99$.

SOLUCIÓN:

a) El parámetro β nos indica la ponderación de la utilidad futura, en este caso en el periodo 2, en relación a la utilidad del individuo en el momento actual (periodo 1). El valor de este parámetro se sitúa entre 0 y 1, indicando que el individuo valora en menor proporción la utilidad futura en relación a la actualidad actual. Un valor de 0 indicaría que el individuo únicamente tiene en cuenta el consumo actual a la hora de tomar sus decisiones, no importándole en absoluto lo que pueda ocurrir en el futuro. Por el contrario, un valor de este parámetro igual a la unidad indicaría que el individuo valora el consumo en el futuro como si fuese consumo en el momento actual. En este caso, el valor del parámetro es 0,6, lo que podemos considerar muy bajo (en realidad ninguna economía tendría un valor tan bajo), indicando que el individuo valora muy poco el consumo futuro. Habitualmente el valor de este parámetro para una economía como la española se sitúa en torno a 0,95.

b) El problema a maximizar por parte del individuo es el siguiente:

$$\max U = \ln C_1 + \beta \ln C_2$$

sujeta a las restricciones presupuestarias:

$$C_1 = W_1 - B_1$$

$$C_2 = W_2 + (1 + R)B_1$$

Sustituyendo el ahorro de la restricción presupuestaria del primer periodo en la restricción presupuestaria del segundo periodo obtenemos la restricción presupuestaria intertemporal:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+R} = W_1 + \frac{W_2}{1+R}$$

Como en este caso el tipo de interés real es cero, la restricción presupuestaria quedaría:

$$C_1 + C_2 = W_1 + W_2$$

Como la renta que percibe el individuo es de 100.000 euros en cada periodo, la restricción presupuestaria sería:

$$C_1 + C_2 = W_1 + W_2 = 100.000 + 100.000 = 200.000$$

Por tanto, el problema a maximizar (el lagrangiano) sería:

$$\max U = \ln C_1 + \beta \ln C_2 - \lambda(C_1 + C_2 - W_1 - W_2)$$

Las condiciones de primer orden serían:

$$\frac{1}{C_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{0,6}{C_2} - \lambda = 0$$

$$C_1 + C_2 = 200.000$$

Sustituyendo la primera condición de primer orden en la segunda condición de primer orden, obtenemos la senda óptima del consumo a lo largo de la vida del agente:

$$\frac{1}{C_1} - \frac{0,6}{C_2} = 0$$

$$0,6C_1 = C_2$$

Sustituyendo en la tercera condición de primer orden, obtenemos que los consumos óptimos en ambos periodos son:

$$C_1 + 0,6C_1 = 200.000$$

$$C_1 = \frac{200.000}{1,6} = 125.000$$

mientras que el consumo óptimo en el periodo 2, sería:

$$C_2 = 200.000 - 125.000 = 75.000$$

Por tanto, el nivel de utilidad que obtendría este individuo sería:

$$U = \ln 125.000 + 0,6 \ln 75.000 = 18,47$$

La representación gráfica de esta solución aparece en la figura 3.4. Como podemos comprobar, la senda óptima de consumo implica que el individuo va a pedir prestado en el periodo 1 (va a desear tener un nivel de consumo superior a su nivel de renta en dicho periodo) mientras que el individuo va a ahorrar en el segundo periodo, teniendo un nivel de consumo inferior a su renta en dicho periodo.

$$(1 - \tau)W_2 + (1 - \tau)W_1(1 + R_t)$$

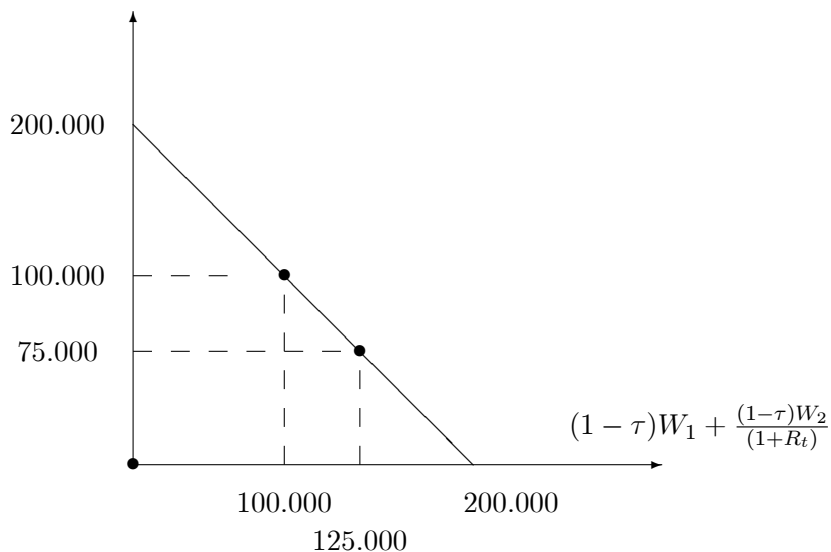


Figura 3.4: Elección óptima del consumidor

c) Si existen restricciones a la liquidez, esto significa que el individuo no puede tener un ahorro negativo en el primer periodo,

ya que no puede pedir dinero prestado y por tanto no puede traerse dinero del futuro al presente. Esto significa que el nivel de consumo del primer periodo viene restringido por la renta del individuo en dicho periodo. En este caso el consumo si que sería una función de la renta, siempre y cuando el nivel de consumo que desearía tener el individuo en el primer periodo fuese superior a la renta disponible en dicho periodo. En el caso en que el individuo deseara consumir en el primer periodo una cantidad menor que su renta en dicho periodo, es decir, su ahorro fuese positivo, la restricción a la liquidez no tendría ningún efecto.

En nuestro caso, el individuo desea consumir en el primer periodo una cantidad superior a la renta disponible, por lo que si se ve afectado por la existencia de la restricción a la liquidez. Por tanto, en ese caso ya tenemos que el consumo que va a realizar el individuo en el primer periodo:

$$C_1 = 100.000$$

Esto significa que el consumo que va a realizar el individuo en el segundo periodo es también el valor de su renta en dicho periodo, esto es:

$$C_2 = 100.000$$

ya que el individuo no movería renta del primer periodo al segundo, al querer consumir lo máximo posible en el periodo 1.

En este caso, el individuo se vería obligado a consumir menos de lo deseado en el periodo 1, mientras que consumiría más de lo deseado en el periodo 2. El resultado es que su nivel de felicidad sería inferior al alcanzado anteriormente. En efecto, si calculamos el nivel de bienestar del individuo en este caso obtenemos que:

$$U = \ln 100.000 + 0,6 \ln 100.000 = 18,42$$

que es inferior al valor obtenido anteriormente. En este caso la restricción presupuestaria intertemporal del individuo tendría la siguiente forma que aparece en la figura 3.5, siendo vertical en la dotación de renta correspondiente al periodo 1, es decir, el consumo en el periodo 1 puede ser inferior o igual a la renta de dicho periodo pero no superior. Por este motivo desaparece el tramo de la restricción presupuestaria que permitiría que el consumo en el

periodo 1 fuese superior a la renta de dicho periodo. La restricción presupuestaria intertemporal sigue mostrando el tramo creciente a partir de la dotación inicial ya que la restricción a la liquidez no impide mover renta del periodo actual al futuro.

$$(1 - \tau)W_2 + (1 - \tau)W_1(1 + R_t)$$

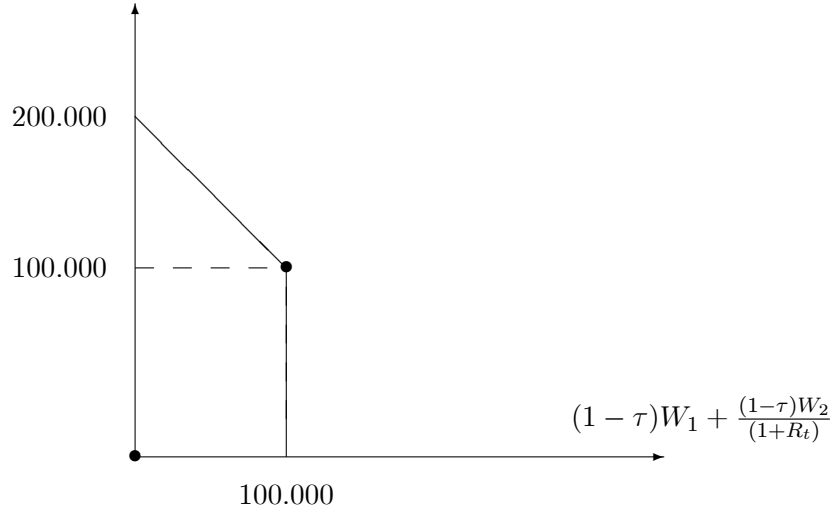


Figura 3.5: Elección con restricciones a la liquidez

d) Vamos a repetir el análisis anterior, pero ahora suponiendo que el tipo de interés es positivo e igual al 5%. El problema a maximizar por parte del individuo es:

$$\max U = \ln C_1 + \beta \ln C_2 - \lambda \left[C_1 + \frac{C_2}{1 + R} - W_1 - \frac{W_2}{1 + R} \right]$$

que da como resultado los siguientes niveles de consumo en cada periodo:

$$C_1 = \frac{1}{1 + \beta} \left[W_1 + \frac{W_2}{1 + R} \right] = \frac{1}{1,6} \left[100.000 + \frac{100.000}{1,05} \right] = 122.023,81$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\beta(1 + R)}{1 + \beta} \left[W_1 + \frac{W_2}{1 + R} \right] = \\ &= \frac{0,6 \times 1,05}{1,6} \left[100.000 + \frac{100.000}{1,05} \right] = 76.875 \end{aligned}$$

Como podemos observar, ahora el consumo total que realiza el individuo a lo largo de su vida es diferente a la renta total, dado que al querer consumir más en el primer periodo de lo que gana, sufre un coste, que es el tipo de interés. La utilidad del individuo en ese caso sería:

$$U = \ln 122.023,81 + 0,6 \ln 76.875 = 18,46$$

inferior a la obtenida en el caso inicial. Nótese también que ahora el consumo en el primer periodo es inferior al que había seleccionado el individuo en el caso en que el tipo de interés era cero, debido a que ahora endeudarse tiene un coste y, por tanto, el consumo total a lo largo de su vida también es inferior, debido al aumento en el tipo de interés y a que el individuo tiene una posición deudora durante el primer periodo de su vida.

En el caso en que existiese restricción a la liquidez el resultado sería exactamente igual que en el caso anterior, esto es, los consumos que realizaría el individuo serían:

$$C_1 = 100.000$$

$$C_2 = 100.000$$

siendo el nivel de bienestar del individuo:

$$U = \ln 100.000 + 0,6 \ln 100.000 = 18,42$$

En el caso de restricciones a la liquidez el individuo el consumo del individuo no se vería afectado por variaciones en el tipo de interés.

e) Vamos a repedir todos los análisis realizados en el apartado anterior pero ahora con una tasa de preferencia subjetiva intertemporal significativamente inferior a la empleada anteriormente, Ahora el parámetro de descuento sería de 0,99. El problema a maximizar por parte del individuo es:

$$\max U = \ln C_1 + \beta \ln C_2 - \lambda \left[C_1 + \frac{C_2}{1+R} - W_1 - \frac{W_2}{1+R} \right]$$

que da como resultado los siguientes niveles de consumo en cada periodo:

$$C_1 = \frac{1}{1+\beta} \left[W_1 + \frac{W_2}{1+R} \right] = \frac{1}{1,99} \left[100.000 + \frac{100.000}{1,05} \right] = 98.103,59$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\beta(1+R)}{1+\beta} \left[W_1 + \frac{W_2}{1+R} \right] = \\ &= \frac{0,99 \times 1,05}{1,99} \left[100.000 + \frac{100.000}{1,05} \right] = 101.984,9 \end{aligned}$$

Como podemos observar, ahora el consumo del individuo en el primer periodo es inferior a la renta de dicho periodo, mientras que el consumo del segundo periodo es superior a la renta del segundo periodo. El individuo ahora actúa de modo totalmente diferente ahorrando en lugar de pedir prestado. La utilidad del individuo en ese caso sería:

$$U = \ln 98.103,59 + 0,99 \ln 101.984,9 = 22,91$$

superior a la obtenida en el caso inicial.

En el caso en que existiese restricción a la liquidez, éstas no le afectarían al individuo, ya que no necesita pedir dinero prestado durante el primer periodo. Por tanto, bajo la existencia de restricciones a la liquidez los consumos seguirían siendo los mismos:

$$C_1 = 98.103,59$$

$$C_2 = 101.984,9$$

siendo el nivel de bienestar del individuo el mismo que en el caso anterior.

EJERCICIO 3.3: Suponga un consumidor representativo que vive dos periodos y que tiene la siguiente función de utilidad:

$$U(C) = \ln C_1 + \beta \ln C_2$$

siendo la restricción presupuestaria:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+R} = W_1 + \frac{W_2}{1+R}$$

Resuelva el problema de maximización al que se enfrenta el consumidor, obteniendo los niveles óptimos de consumo en cada periodo.

SOLUCIÓN:

Para resolver este problema construimos el langragiano del mismo:

$$\max_{C_1, C_2} \mathcal{L} = \ln C_1 + \beta \ln C_2 - \lambda \left(C_1 + \frac{C_2}{1+R} - W_1 - \frac{W_2}{1+R} \right)$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = \frac{1}{C_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = \frac{\beta}{C_2} - \frac{\lambda}{1+R} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_1 + \frac{C_2}{1+R} - W_1 - \frac{W_2}{1+R} = 0$$

Despejando de la primera condición de primer orden y sustituyendo en la segunda condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{\beta}{C_2} = \frac{\frac{1}{C_1}}{1+R}$$

Por lo que la relación entre el consumo de un periodo y del otro es:

$$C_1 = \frac{1}{\beta(1+R)} C_2$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria intertemporal obtenemos que el nivel de consumo del primer periodo es:

$$C_1 + \beta C_1 = W_1 + \frac{W_2}{1+R}$$

$$C_1 = \frac{W_1}{1+\beta} + \frac{W_2}{(1+\beta)(1+R)}$$

El nivel de consumo del segundo periodo es:

$$\frac{1}{\beta(1+R)}C_2 + \frac{C_2}{1+R} = W_1 + \frac{W_2}{1+R}$$

$$C_2 = \frac{\beta(1+R)}{1+\beta} \left[W_1 + \frac{W_2}{1+R} \right]$$

El nivel de ahorro del individuo lo obtenemos como la diferencia entre la renta del primer periodo y el consumo de dicho periodo:

$$B = C_1 - W_1 = \frac{1}{1+\beta} \left[\frac{W_2}{(1+R)} - \beta W_1 \right]$$

Por tanto, el ahorro del individuo es positivo o negativo dependiendo de si

$$\frac{W_2}{(1+R)} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \beta W_1$$

Nótese que lo que hace el individuo es comparar el valor actualizado de la renta futura con el valor de la renta presente descontado por la tasa de descuento. En términos generales estaría comparando la tasa a la que valora la utilidad actual en función de la futura y el coste de endeudamiento.

EJERCICIO 3.4: Suponga un individuo con vida infinita que tiene la siguiente función de utilidad:

$$U(C_t) = \ln C_t$$

sujeta a la siguiente restricción presupuestaria:

$$\dot{B}_t = W_t + R_t B_{t-1} - C_t$$

siendo C_t el consumo, R_t es tipo de interés real, W_t la renta del individuo y B_t , la cantidad de activos financieros que suponemos es cero en el momento en que nace el individuo.

a) Obtenga la senda óptima de consumo de este individuo.

b) Indique cuáles son los efectos de un aumento en el tipo de interés real.

SOLUCIÓN:

Dado que la restricción presupuestaria viene definida como una ecuación diferencial del comportamiento de la cantidad de activos financieros a lo largo del tiempo, el problema del consumidor tenemos que especificarlo en tiempo continuo. Así, el problema del consumidor quedaría definido como:

$$\max_{C_t} \int_0^T \ln C_t e^{-\theta t} dt \quad (3.1)$$

sujeito a la restricción presupuestaria:

$$\dot{B}_t = R_t B_t + W_t - C_t \quad (3.2)$$

$$B_0 = 0 \quad (3.3)$$

donde θ es la tasa subjetiva de preferencia intertemporal. Para resolver el problema anterior construimos el denominado hamiltoniano (estamos maximizando en tiempo continuo):

$$H(C, B, \lambda) = U(C_t) e^{-\theta t} + \lambda_t (R_t B_t + W_t - C_t) \quad (3.4)$$

en el cual C es la variable de control, B es la variable de estado y λ es la variable de coestado.

Caculando las anteriores condiciones de primer orden del problema del consumidor obtenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial C_t} = \frac{e^{-\theta t}}{C_t} - \lambda_t = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial B_t} = R_t \lambda_t = -\dot{\lambda}_t \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = R_t B_t + W_t - C_t = \dot{B}_t \quad (3.7)$$

Para resolver operamos de la siguiente forma. En primer lugar, tenemos de despejar el parámetro de Lagrange de la condición de primer orden (3.5) y sustituirlo en la segunda condición de primer orden (3.6). Sin embargo, observamos que también necesitamos la derivada respecto al tiempo del parámetro de Lagrange. De la cpo (3.5) obtenemos que:

$$\lambda_t = \frac{e^{-\theta t}}{C_t} \quad (3.8)$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{\lambda}_t = \frac{e^{-\theta t}}{C_t} \dot{C}_t - \frac{e^{-\theta t}}{C_t} \theta \quad (3.9)$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores en la cpo (3.6):

$$R_t \lambda_t = -\dot{\lambda}_t \quad (3.10)$$

resulta:

$$R_t \frac{e^{-\theta t}}{C_t} = \frac{e^{-\theta t}}{C_t^2} \dot{C}_t + \theta \frac{e^{-\theta t}}{C_t} \quad (3.11)$$

$$(R_t - \theta) \frac{e^{-\theta t}}{C_t} = \frac{e^{-\theta t}}{C_t^2} \dot{C}_t \quad (3.12)$$

Reordenando términos obtenemos:

$$\frac{1}{C_t} \dot{C}_t = (R_t - \theta) \quad (3.13)$$

La senda temporal óptima del consumo sería:

$$\dot{C}_t = (R_t - \theta) C_t \quad (3.14)$$

b) Tal y como podemos observar en la expresión anterior, la senda óptima de consumo depende positivamente del tipo de interés real y negativamente de la tasa de preferencia intertemporal del individuo. Por tanto, la expresión anterior nos indica que si el tipo de interés real es igual a la tasa de preferencia intertemporal, entonces el consumo es constante periodo a periodo. Si por el contrario el tipo de interés

real es superior a la tasa de preferencia intertemporal, entonces la senda del consumo es creciente. Por tanto, un aumento en el tipo de interés real provoca un aumento de la pendiente de la senda óptima de consumo. La figura 3.6 muestra las posibles formas de la senda óptima del consumo en función de los valores del tipo de interés real y la tasa de preferencia intertemporal.

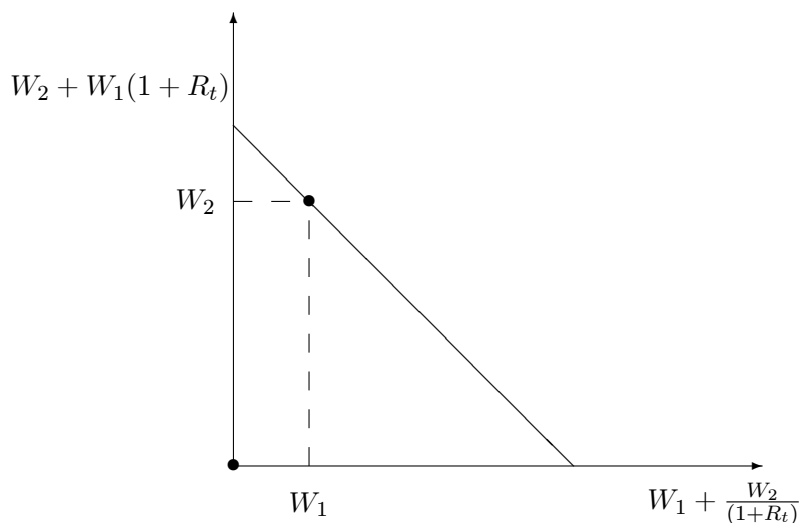


Figura 3.6. Sendas óptimas de consumo

EJERCICIO 3.5: Suponga un individuo con vida infinita que tiene la siguiente función de utilidad:

$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

siendo C_t el consumo, R_t es tipo de interés real, W_t la renta del individuo y B_t , la cantidad de activos financieros que suponemos es cero en el momento en que nace el individuo.

a) Obtenga la senda óptima de consumo de este individuo, tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo, especificando las correspondientes restricciones presupuestarias y problemas a maximizar.

b) Indique cuáles son los efectos de un aumento en el parámetro σ .

c) Cómo sería la función de utilidad y los resultados en el caso de $\sigma = 1$.

SOLUCIÓN:

a) En primer lugar vamos a resolver el problema en tiempo continuo. En este caso el problema del consumidor es:

$$\max_{C_t} \int_0^T \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-\theta t} dt \quad (3.15)$$

sujeito a la restricción presupuestaria:

$$\dot{B}_t = R_t B_t + W_t - C_t \quad (3.16)$$

$$B_0 = 0 \quad (3.17)$$

donde θ es la tasa subjetiva de preferencia intertemporal. Para resolver el problema anterior construimos el denominado hamiltoniano (estamos maximizando en tiempo continuo):

$$H(C, B, \lambda) = \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-\theta t} + \lambda_t (R_t B_t + W_t - C_t) \quad (3.18)$$

en el cual C es la variable de control, B es la variable de estado y λ es la variable de coestado.

Caculando las anteriores condiciones de primer orden del problema del obtenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma} e^{-\theta t} - \lambda_t = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial B_t} = R_t \lambda_t = -\dot{\lambda}_t \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = R_t B_t + W_t - C_t = \dot{B}_t \quad (3.21)$$

Para resolver operamos de la siguiente forma. En primer lugar, tenemos de despejar el parámetro de Lagrange de la condición

de primer ordeno (3.40) y sustituirlo en la condición de primer orden (3.41). Sin embargo, observamos que también necesitamos la derivada respecto al tiempo del parámetro de Lagrange. De la condición de primer orden (3.40) obtenemos que:

$$\lambda_t = C_t^{-\sigma} e^{-\theta t}$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{\lambda}_t = -\sigma C_t^{-\sigma-1} e^{-\theta t} \dot{C}_t - C_t^{-\sigma} e^{-\theta t} \theta$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores en la condición de primer orden (3.41):

$$R_t \lambda_t = -\dot{\lambda}_t$$

resulta:

$$R_t C_t^{-\sigma} e^{-\theta t} = \sigma C_t^{-\sigma-1} e^{-\theta t} \dot{C}_t + \theta C_t^{-\sigma} e^{-\theta t}$$

$$(R_t - \theta) C_t^{-\sigma} e^{-\theta t} = \sigma C_t^{-\sigma-1} e^{-\theta t} \dot{C}_t$$

Reordenando términos obtenemos:

$$\frac{\sigma}{C_t} \dot{C}_t = (R_t - \theta)$$

La senda temporal óptima del consumo sería:

$$\dot{C}_t = \frac{(R_t - \theta)}{\sigma} C_t \quad (3.22)$$

A continuación vamos a resolver el mismo ejercicio pero en tiempo discreto. En este caso el problema del consumidor vendría dado por:

$$\max_{C_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \quad (3.23)$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$C_t + B_t = (1 + R_t) B_{t-1} + W_t \quad (3.24)$$

$$B_0 = 0 \quad (3.25)$$

El langrangiano del anterior problema sería:

$$\mathcal{L} = \max_{(C_t)} \beta^t \left\{ \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \lambda_t (C_t + B_t - W_t - (1+R_t)B_{t-1}) \right\} \quad (3.26)$$

Calculando las condiciones de primer orden resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma} - \lambda_t = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} (1 + R_{t+1}) = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = C_t + B_t - W_t - (1 + R_t)B_{t-1} = 0 \quad (3.29)$$

Despejando de la primera condición de primer orden y sustituyendo en la segunda condición de primer orden resulta:

$$\beta^t C_t^{-\sigma} = \beta^{t+1} (1 + R_{t+1}) C_{t+1}^{-\sigma}$$

o equivalentemente:

$$C_{t+1}^\sigma = \beta (1 + R_{t+1}) C_t^\sigma \quad (3.30)$$

expresión que es similar a la solución dada por (3.22).

b) Los efectos de una alteración en el parámetro σ se pueden observar muy claramente en la solución del problema en tiempo continuo. Así, este parámetro representa el grado de aversión al riesgo del individuo. Tal y como podemos observar, la aversión al riesgo aparece en la expresión (3.22) en el denominador. Por tanto un aumento en el grado de aversión al riesgo provoca que la senda óptima de consumo se haga más horizontal, independientemente de si tiene pendiente positiva o negativa.

c) En el caso en el que el parámetro de aversión al riesgo sea igual a 1, entonces la función de utilidad CRRA se transforma en la función logarítmica. En este caso el problema sería:

$$\mathcal{L} = \max_{(C_t)} \beta^t \{ \ln C_t - \lambda_t (C_t + B_t - W_t - (1 + R_t)B_{t-1}) \} \quad (3.31)$$

Calculando las condiciones de primer orden resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1}(1 + R_{t+1}) = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = C_t + B_t - W_t - (1 + R_t)B_{t-1} = 0 \quad (3.34)$$

Despejando de la primera condición de primer orden y sustituyendo en la segunda condición de primer orden resulta:

$$\beta^t \frac{1}{C_t} = \beta^{t+1}(1 + R_{t+1}) \frac{1}{C_{t+1}}$$

o equivalentemente:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1 + R_{t+1}) \quad (3.35)$$

EJERCICIO 3.6: Suponga un individuo con vida infinita que tiene la siguiente función de utilidad:

$$U(C_t) = -\frac{1}{\eta} \exp(-\eta C_t)$$

siendo C_t el consumo, R_t es tipo de interés real, W_t la renta del individuo y B_t , la cantidad de activos financieros que suponemos es cero en el momento en que nace el individuo.

a) Obtenga la senda óptima de consumo de este individuo, tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo, especificando las correspondientes restricciones presupuestarias y problemas a maximizar.

b) Indique cuáles son los efectos del parámetro η sobre la senda óptima de consumo.

SOLUCIÓN:

a) En primer lugar vamos a resolver el problema en tiempo continuo. En este caso el problema del consumidor es:

$$\max_{C_t} \int_0^T -\frac{1}{\eta} \exp(-\eta C_t) e^{-\theta t} dt \quad (3.36)$$

sujeito a la restricción presupuestaria:

$$\dot{B}_t = R_t B_t + W_t - C_t \quad (3.37)$$

$$B_0 = 0 \quad (3.38)$$

donde θ es la tasa subjetiva de preferencia intertemporal. Para resolver el problema anterior construimos el denominado hamiltoniano (estamos maximizando en tiempo continuo):

$$H(C, B, \lambda) = -\frac{1}{\eta} \exp(-\eta C_t) e^{-\theta t} + \lambda_t (R_t B_t + W_t - C_t) \quad (3.39)$$

en el cual C es la variable de control, B es la variable de estado y λ es la variable de coestado.

Caculando las anteriores condiciones de primer orden del problema del obtenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial C_t} = \exp(-\eta C_t) e^{-\theta t} - \lambda_t = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial H}{\partial B_t} = R_t \lambda_t = -\dot{\lambda}_t \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = R_t B_t + W_t - C_t = \dot{B}_t \quad (3.42)$$

Para resolver operamos de la siguiente forma. En primer lugar, tenemos de despejar el parámetro de Lagrange de la condición de primer ordeno (3.40) y sustituirlo en la condición de primer orden (3.41). Sin embargo, observamos que también necesitamos la derivada respecto al tiempo del parámetro de Lagrange. De la condición de primer orden (3.40) obtenemos que:

$$\lambda_t = \exp(-\eta C_t) e^{-\theta t}$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{\lambda}_t = -\eta \exp(-\eta C_t) e^{-\theta t} \dot{C}_t - \exp(-\eta C_t) e^{-\theta t} \theta$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores en la condición de primer orden (3.41):

$$R_t \lambda_t = -\dot{\lambda}_t$$

resulta:

$$R_t \exp(-\eta C_t) e^{-\theta t} = \eta \exp(-\eta C_t) e^{-\theta t} \dot{C}_t + \theta \exp(-\eta C_t) e^{-\theta t}$$

$$(R_t - \theta) \exp(-\eta C_t) e^{-\theta t} = \eta \exp(-\eta C_t) e^{-\theta t} \dot{C}_t$$

Reordenando términos obtenemos:

$$\eta \dot{C}_t = (R_t - \theta)$$

La senda temporal óptima del consumo sería:

$$\dot{C}_t = \frac{(R_t - \theta)}{\eta} \quad (3.43)$$

A continuación vamos a resolver el mismo ejercicio pero en tiempo discreto. En este caso el problema del consumidor vendría dado por:

$$\max_{C_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t - \frac{1}{\eta} \exp(-\eta C_t) \quad (3.44)$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$C_t + B_t = (1 + R_t) B_{t-1} + W_t \quad (3.45)$$

$$B_0 = 0 \quad (3.46)$$

El langrangiano del anterior problema sería:

$$\mathcal{L} = \max_{(C_t)} \beta^t \left\{ -\frac{1}{\eta} \exp(-\eta C_t) - \lambda_t (C_t + B_t - W_t - (1 + R_t) B_{t-1}) \right\} \quad (3.47)$$

Calculando las condiciones de primer orden resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \exp(-\eta C_t) - \lambda_t = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1}(1 + R_{t+1}) = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = C_t + B_t - W_t - (1 + R_t)B_{t-1} = 0 \quad (3.50)$$

Despejando de la primera condición de primer orden y sustituyendo en la segunda condición de primer orden resulta:

$$\beta^t \exp(-\eta C_t) = \beta^{t+1}(1 + R_{t+1}) \exp(-\eta C_{t+1})$$

o equivalentemente:

$$\frac{\exp(-\eta C_t)}{\exp(-\eta C_{t+1})} = \beta(1 + R_{t+1}) \quad (3.51)$$

b) Los efectos de una alteración en el parámetro η se pueden observar muy claramente en la solución del problema en tiempo continuo. Así, este parámetro representa el grado de aversión al riesgo del individuo. Tal y como podemos observar, la aversión al riesgo aparece en la expresión (3.22) en el denominador. Por tanto un aumento en el grado de aversión al riesgo provoca que la senda óptima de consumo se haga más horizontal, independientemente de si tiene pendiente positiva o negativa.

EJERCICIO 3.7: Suponga un individuo con vida infinita que tiene la siguiente función de utilidad:

$$U(C_t) = \ln(C_t - \phi C_{t-1})$$

sujeta a la siguiente restricción presupuestaria:

$$C_t + B_t = (1 + R_t)B_{t-1} + W_t \quad (3.52)$$

siendo C_t el consumo, R_t es tipo de interés real, W_t la renta del individuo y B_t , la cantidad de activos financieros que suponemos es cero en el momento en que nace el individuo. Como podemos observar ahora la función de utilidad no sólo depende del consumo en un determinado periodo de tiempo sino también del consumo en el periodo anterior. Los hábitos de consumo vienen representados por el parámetro ϕ .

a) Obtenga la senda óptima de consumo de este individuo, especificando el problema a maximizar.

b) Indique cuáles son los efectos del parámetro ϕ sobre la senda óptima de consumo.

SOLUCIÓN:

a) El problema del consumidor consiste en:

$$\max_{C_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(C_t - \phi C_{t-1}) \quad (3.53)$$

sujeta a la restricción presupuestaria:

$$C_t + B_t = (1 + R_t)B_{t-1} + W_t \quad (3.54)$$

El langrangiano del anterior problema lo escribimos como:

$$\mathcal{L} = \max_{(C_t)} \beta^t \{ \ln(C_t - \phi C_{t-1}) - \lambda_t (C_t + B_t - W_t - (1 + R_t)B_{t-1}) \}$$

Las condiciones de primer orden del vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t \left[\frac{1}{C_t - \phi C_{t-1}} - \lambda_t (1 + \tau_t^c) \right] - \beta^{t+1} \left[\phi \frac{1}{C_{t+1} - \phi C_t} \right] = 0 \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = \beta^t \lambda_{t+1} (1 + R_{t+1}) - \lambda_t \beta^{t-1} = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = C_t + B_t - W_t - (1 + R_t)B_{t-1} = 0 \quad (3.57)$$

donde λ_t es el multiplicador de Lagrange asignado a la restricción presupuestaria en el momento t . Despejando el parámetro de Lagrange de la primera condición de primer orden obtenemos, obtenemos:

$$\lambda_t = \frac{1}{C_t - \phi C_{t-1}} - \beta \phi \frac{1}{C_{t+1} - \phi C_t} \quad (3.58)$$

Combinando la ecuación (3.55) con la ecuación (3.56) obtenemos la condición de primer orden intertemporal,

$$\frac{\frac{1}{C_t - \phi C_{t-1}} - \beta \phi \frac{1}{C_{t+1} - \phi C_t}}{\frac{1}{C_{t+1} - \phi C_t} - \beta \phi \frac{1}{C_{t+2} - \phi C_{t+1}}} = \beta(1 + R_{t+1}) \quad (3.59)$$

que nos indica cual es la senda óptima de consumo a lo largo del tiempo. Si $\phi = 0$ estaríamos en el caso básico sin la consideración de los hábitos de consumo. En efecto si $\phi = 0$ la expresión anterior queda reducida a:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1 + R_{t+1}) \quad (3.60)$$

b) El parámetro ϕ representa en qué medida puede cambiar el consumo de un periodo a otro. Cuanto mayor sea este parámetro, menor es el cambio que puede producirse en el consumo periodo a periodo. Este parámetro representa los hábitos de consumo. Por tanto, cuanto mayores sean los hábitos de consumo más estable es la senda óptima de consumo del individuo.

4

Las empresas y la decisión de inversión

El segundo componente de la demanda agregada es la inversión. Aunque en términos cuantitativos la inversión represente una fracción pequeña de la demanda agregada de una economía, en términos cualitativos tiene una gran importancia, dado que determina las posibilidades de producción futuras. Así, suponemos que el ahorro es equivalente a la inversión de la economía y esta inversión se transforma en capital productivo.

En este tema realizamos algunos ejercicios en relación al comportamiento de las empresas y a la decisión de inversión. El objetivo de las empresas es la maximización de beneficios. Obviamente, dicho comportamiento se realiza en un entorno intertemporal donde suponemos que el ciclo vital de este agente es infinito. No obstante, si suponemos que los factores productivos son propiedad de los consumidores y las empresas lo alquilan al precio de mercado, nos encontramos que el problema de maximización de beneficios de las empresas dinámico es equivalente al problema estático.

Un elemento fundamental a la hora de determinar las decisiones de inversión, es considerar la existencia de costes de ajuste, tanto en el capital como en la inversión. La consideración de costes de ajuste en la inversión nos lleva a estudiar el modelo de la Q de Tobin, que

permite explicar cómo las diferentes variables afectan a las decisiones de inversión.

EJERCICIO 4.1. Suponga que la función de producción tiene la siguiente forma:

$$Y_t = F(K_t, L_t) = [\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}} \quad (4.1)$$

donde ρ es un parámetro que determina la elasticidad de sustitución entre ambos factores productivos. Resuelva el problema de la empresa y determine el precio de cada factor productivo.

SOLUCIÓN:

El objetivo de la empresa es la maximización de los beneficios, que los definimos como los ingresos totales menos los costes totales y donde los costes totales vienen dados por las retribuciones a los factores productivos trabajo y capital. Vamos a resolver el problema en términos estáticos. Para ello definimos la función de beneficios, dada la tecnología como:

$$\Pi_t = [\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}} - W_t L_t - R_t K_t$$

es decir, los ingresos totales que vienen representados por la función de producción dado que suponemos que el precio del bien es 1, menos los costes asociados a cada uno de los factores productivos.

Calculando las condiciones de primer orden obtenemos:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = \frac{1}{\rho} [\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}-1} \alpha \rho K_t^{\rho-1} - R_t = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = \frac{1}{\rho} [\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}-1} (1 - \alpha) \rho L_t^{\rho-1} - W_t = 0$$

Reordenando términos resulta:

$$\alpha [\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}-1} K_t^{\rho-1} = R_t$$

$$(1 - \alpha) [\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}-1} L_t^{\rho-1} = W_t$$

Las expresiones anteriores indican que la productividad marginal de cada factor productivo es igual al precio del factor. Dada la definición del nivel de producción podemos obtener las siguientes expresiones:

$$Y_t \frac{\alpha K_t^{\rho-1}}{\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho} = R_t$$

$$Y_t \frac{(1 - \alpha)L_t^{\rho-1}}{\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho} = W_t$$

Vemos que ahora la retribución a cada factor productivo depende no sólo del parámetro α , sino también del parámetro ρ que determina la elasticidad de sustitución entre el capital y el trabajo. Así, el coste de cada factor productivo es una determinada proporción del nivel de producción de la economía, donde dicha proporción viene dada por el peso de cada factor productivo dentro de la función de producción. Si ρ fuese igual a 1, la anterior función de producción sería del tipo Cobb-Douglas y, por tanto, el coste de cada factor productivo sería una proporción, dada por α , del nivel de producción respecto a la cantidad de cada factor productivo.

También podemos comprobar que la suma de retribuciones a los factores productivos es igual a la producción, es decir, los beneficios son cero. Para ello podemos ver que:

$$W_t L_t + R_t K_t = Y_t \frac{(1 - \alpha)L_t^\rho}{\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho} + Y_t \frac{\alpha K_t^\rho}{\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho} = Y_t$$

EJERCICIO 4.2. Suponga un consumidor que también es empresario, es decir, es propietario del capital de la empresa y que existen costes de ajuste. El problema que maximizaría este individuo sería:

$$\max_{C_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(C_t) \quad (4.2)$$

sujeta a la restricción presupuestaria:

$$C_t + I_t = R_t K_t \quad (4.3)$$

y a la siguiente función de acumulación de capital que incluye costes de ajuste:

$$K_t = I_t - \delta K_{t-1} - I_t^2$$

SOLUCIÓN:

La restricción presupuestaria intertemporal de este agente vendría dada por:

$$C_t + I_t = R_t(I_t - \delta K_{t-1} - I_t^2) \quad (4.4)$$

El problema que maximizaría el empresario sería el siguiente:

$$\mathcal{L} = \max_{(C_t)} \beta^t \{ \ln(C_t) - \lambda_t(C_t + I_t - R_t K_t) - Q_t(K_t - I_t + \delta K_{t-1} + I_t^2) \}$$

Calculando las condiciones de primer orden obtenemos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} = -\lambda_t + Q_t(1 - 2I_t) = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} = \beta^t \lambda_t R_t - \beta^t Q_t - \beta^{t+1} Q_{t+1} \delta = 0 \quad (4.7)$$

Despejando el precio sombra del consumo de la primera condición de primer orden resulta que:

$$\frac{1}{C_t} = \lambda_t$$

Por su parte, de la segunda condición de primer orden obtenemos que:

$$\lambda_t = Q_t(1 - 2I_t)$$

que es la ecuación que va a determinar la decisión de inversión, o lo que es lo mismo:

$$\frac{1}{C_t} = Q_t(1 - 2I_t)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la tercera condición de primer orden resulta que:

$$\lambda_t R_t - Q_t - \beta Q_{t+1} \delta = 0$$

A su vez, sustituyendo el precio sombra del capital tendríamos que la condición dinámica de las decisiones de inversión de este individuo viene dada por:

$$\frac{1}{C_t} R_t - \frac{1}{(1 - 2I_t)C_t} = \beta \delta \frac{1}{(1 - 2I_{t+1})C_{t+1}}$$

EJERCICIO 4.3. Suponga el siguiente problema a maximizar por parte de la empresa representativa:

$$\max V = \int_0^\infty e^{-R_t t} [PF(K_t, L_t) - W_t L_t - P_k I_t] dt$$

sujeto a:

$$F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

$$\Psi(I_t, K_t) = I_t - C(I_t, K_t)$$

$$C(I_t, K_t) = I_t^2 + \omega K_t$$

$$\dot{K}_t = \Psi(I_t, K_t) - \delta K_t$$

Resuelva el problema y obtenga las ecuaciones dinámicas para el stock de capital y la ratio q . Represente gráficamente el estado estacionario. Estudie los efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en el precio del bien que produce la empresa.

SOLUCIÓN:

El problema a maximizar por parte de la empresa representativa es el siguiente:

$$\max V = \int_{t=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} e^{-R_t t} [PF(K_t, L_t) - W_t L_t - P_t^K I_t] \\ -\lambda_t [\dot{K}_t - \Psi(I_t, K_t) + \delta K_t] \end{array} \right) dt$$

es decir, la corriente actualizada de beneficios sujeta a las restricciones dadas por la tecnología y por los costes de ajuste. Para resolver este tipo de problemas en primer lugar, hacemos la siguiente transformación:

$$\int_0^{\infty} \lambda_t \dot{K}_t dt = - \int_0^{\infty} \dot{\lambda}_t K_t dt + \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t K_t - \lambda_0 K_0$$

Dado que $\lambda_0 K_0$ son los valores iniciales y son una constante y aplicando la condición de transversalidad que nos dice que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t K_t = 0$$

el problema quedaría:

$$\max V = \int_{t=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} e^{-R_t t} [PF(K_t, L_t) - W_t L_t - P_t^K I_t] \\ + \lambda_t K_t + \lambda_t [\Psi(I_t, K_t) - \delta K_t] \end{array} \right) dt$$

A continuación definimos el valor de la ratio q , que es el valor marginal de Q , la ratio entre el valor de mercado de la empresa y el coste de reposición del capital instalado. la ratio q se define como el precio actualizado del precio sombra del capital. Sería equivalente a cuanto cuesta hoy una unidad de capital en cualquier momento del tiempo futuro:

$$q_t = \lambda_t e^{R_t t}$$

Por tanto, tenemos que el precio sombra del capital sería:

$$\lambda_t = \frac{q_t}{e^{R_t t}}$$

por lo que su derivada respecto al tiempo quedaría:

$$\dot{\lambda}_t = \frac{-R_t q_t + \dot{q}_t}{e^{R_t t}}$$

Sustituyendo en nuestro problema el precio sombra del capital y su derivada respecto al tiempo por los valores obtenidos anteriormente, así como la parametrización de la función de producción y de la función de costes, obtendríamos:

$$\max V = \int_{t=0}^{\infty} \left(e^{-R_t t} [PK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - W_t L_t - P_t^K I_t] + K_t e^{-R_t t} (-R_t q_t + \dot{q}_t) + e^{-R_t t} q_t [I_t - I_t^2] - (\delta + \omega) K_t \right) dt$$

Ahora calcularíamos las condiciones de primer orden, teniendo en cuenta que la decisión de la empresa es triple: empleo, stock de capital e inversión. Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\partial V}{\partial L_t} \Rightarrow (1 - \alpha) PK_t^\alpha L_t^{-\alpha} = W_t$$

$$\frac{\partial V}{\partial I_t} \Rightarrow q_t [1 - 2I_t] = P_t^K$$

$$\frac{\partial V}{\partial K_t} \Rightarrow \dot{q}_t = q_t [R_t + \delta + \omega] - \alpha PK_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}$$

Prescindiendo de la condición de equilibrio para el empleo, las otras dos condiciones de primer orden (respecto a la inversión y al capital) son dos ecuaciones diferenciales que constituyen el sistema de ecuaciones de nuestra economía. Así, nuestro sistema de ecuaciones diferenciales (para el stock de capital y para la ratio q) sería el siguiente:

$$\dot{K}_t = q_t [1 - 2I_t] - P_t^K = 0$$

$$\dot{q}_t = q_t [R_t + \delta + \omega] - \alpha PK_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}$$

A continuación, representamos gráficamente estas dos condiciones de equilibrio dinámicas. La pendiente de la condición de equilibrio

dinámica parcial para el stock de capital es 0, es decir, para que el stock de capital sea constante únicamente se requiere que el valor de la ratio q sea $P_t^K/(1 - 2I_t)$.

$$\frac{\partial q_t}{\partial K_t} \Big|_{\dot{K}_t=0} = \frac{0}{1 - 2I_t} = 0$$

La pendiente de la condición de equilibrio dinámica parcial para la ratio q tiene pendiente negativa, dado que la productividad marginal del capital es decreciente (la función de producción presenta rendimientos constantes a escala, y por tanto $0 < \alpha < 1$, por lo que $\alpha - 1 < 0$):

$$\frac{\partial q_t}{\partial K_t} \Big|_{\dot{q}_t=0} = \frac{\alpha(\alpha - 1)PK_t^{\alpha-2}L_t^{1-\alpha}}{R_t + \delta + \omega} < 0$$

En los siguientes gráficos tenemos representados ambas condiciones de equilibrio parcial junto con el movimiento de cada variable en desequilibrio.

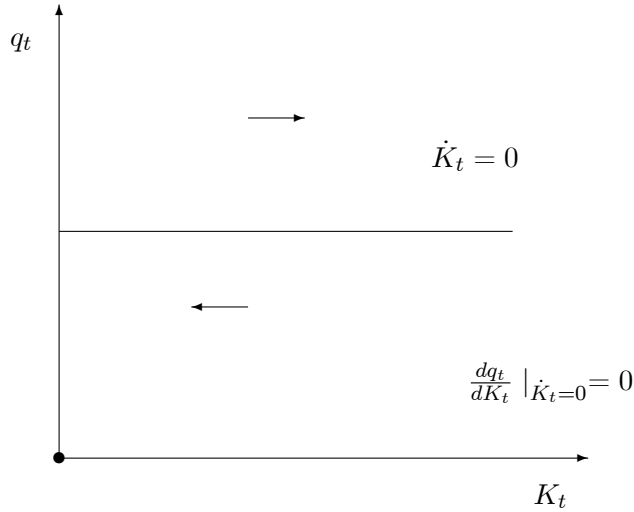


Figura 4.1: Condición de equilibrio dinámica del stock de capital

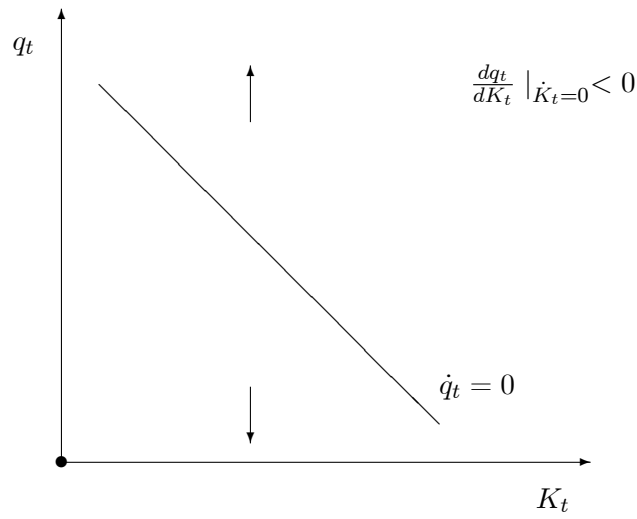


Figura 4.2: Condición de equilibrio dinámica de la ratio q

La representación gráfica de nuestra economía refleja una situación de punto de silla, donde la senda estable tiene pendiente negativa.

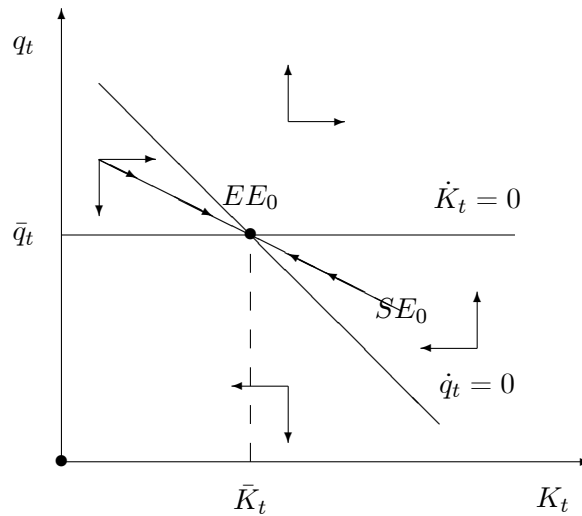


Figura 4.3: Diagrama de fases

Una vez tenemos la representación gráfica de nuestra economía, a continuación vamos a estudiar los efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en el precio del bien que produce la empresa.

Obviamente, un aumento en el precio del bien que produce la empresa va a provocar que aumente la corriente futura de beneficios de la misma. En primer lugar, definimos la situación inicial, que viene determinada por el estado estacionario 0 (EE_0). Al aumentar el precio del bien (P) dicha variable aparece únicamente en la condición de equilibrio dinámica dla ratio q . Un aumento en el precio del bien provoca un aumento en el valor de la productividad marginal del capital, que tiene signo negativo en la ecuación dinámica. Para la esta ecuación vuelva a tomar un valor igual a cero, es necesario que disminuya la productividad marginal del capital, y por tanto, que aumente el stock de capital. Esto significa que la condición de equilibrio dinámica para la ratio q tenemos que dibujarla a la derecha de la posición inicial.

Por tanto, vemos como a largo plazo, el aumento del precio del bien provoca un aumento en el stock de capital de la empresa. Esto es debido a que ahora el stock de capital es más rentable, por lo que la empresa llevaría a cabo un proceso inversor para aumentar su stock de capital y aumentar su nivel de producción, con el objeto de maximizar su corriente intertemporal de beneficios.

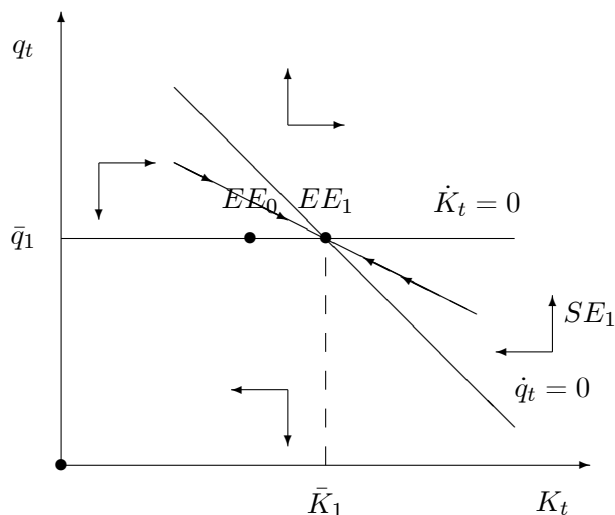


Figura 4.4: Efectos a largo plazo de un aumento del precio del bien

Los efectos a corto plazo vienen dados por un reajuste instantáneo en la ratio q , es es una variable totalmente flexible. En efecto, el

aumento en el nivel de precios del bien provoca que aumente de forma instantánea dicho ratio, debido a que al aumentar la corriente futura de beneficios de la empresa, también lo hace su valor de mercado en el momento actual. Por tanto, el corto plazo viene representado por un aumento instantáneo en la ratio q hasta alcanzar la senda estable.

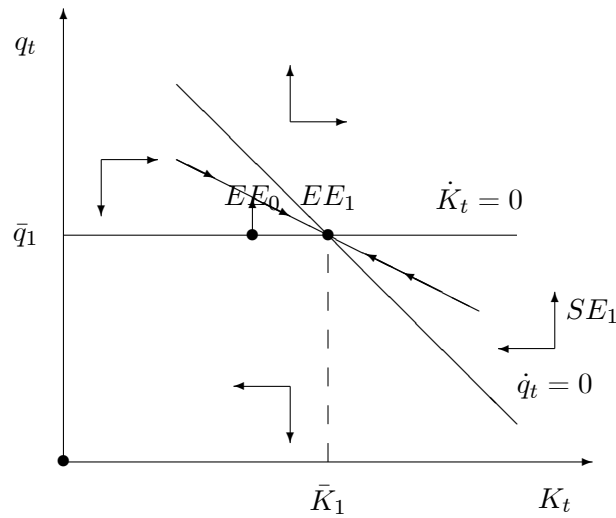


Figura 4.5: Efectos a corto plazo de un aumento del precio del bien

Una vez se ha reajustado la ratio q y su valor a alcanzado la senda estable, comienza el medio plazo, que en términos gráficos es un desplazamiento a lo largo de la senda estable hasta alcanzar el nuevo estado estacionario. Al aumentar la ratio q a la empresa le es rentable invertir y aumentar su stock de capital, por lo que el stock de capital va a ir aumentando, al mismo tiempo que va a ir disminuyendo la ratio q . Este proceso va a continuar hasta alcanzar el nuevo estado estacionario.

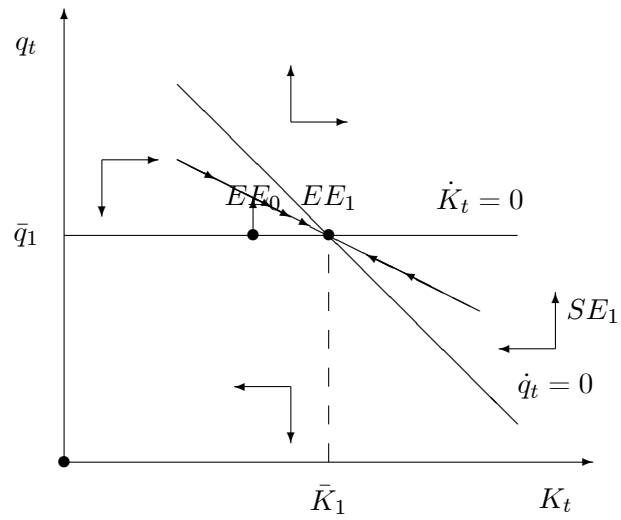


Figura 4.6: Efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento del precio del bien

5

El gobierno y la política fiscal

En este tema vamos a realizar algunos ejercicios sobre las decisiones de los consumidores pero considerando la existencia del gobierno. Ahora el comportamiento de los individuos se ve afectado por la intervención del gobierno, el cual determina la existencia de impuestos y de transferencias. De forma adicional, consideraremos la posibilidad de que el agente tenga descendencia, lo que implica que aunque el agente tenga vida finita, exista una relación dinástica que provoque que el lapso temporal que usa el individuo en la toma de decisiones sea infinito.

En primer lugar, vamos a realizar diferentes ejercicios en relación a la política fiscal en el contexto de un individuo cuyo ciclo vital es de dos periodos, analizando los efectos de los impuestos sobre las decisiones de consumo-ahorro de los individuos, lo que nos permite evaluar la eficacia de la política fiscal como política de demanda y estudiar la validez de la equivalencia ricardiana.

En segundo lugar, realizamos varios ejercicios utilizando el modelo de generaciones solapadas, a partir del cual podemos estudiar diferentes cuestiones en relación a las transferencias de renta intergeneracionales, y cómo éstas se ven afectadas por alteraciones en los impuestos.

EJERCICIO 5.1: Suponga un individuo que vive dos periodos. En cada periodo el individuo recibe una renta de 100.000 euros, de las cuales tiene que pagar como impuestos sobre su renta el 10 por ciento. Sus preferencias vienen dadas por la siguiente expresión:

$$U = \ln C_1 + \beta \ln C_2$$

donde $\beta=0,6$. Para simplificar suponemos que el tipo de interés es cero. Se pide:

a) Cuál es el consumo en cada periodo del individuo si no existen restricciones a la liquidez (construya el lagrangiano del problema). Represente gráficamente la solución.

b) Cuál sería el consumo del individuo en cada periodo si existiesen restricciones a la liquidez, tal que el individuo no puede pedir prestado. Represente gráficamente esta situación y compárela con la anterior. ¿En qué caso está mejor el individuo? (calcule cual sería el valor de U en cada caso).

c) Determine el nivel de ingresos del gobierno en cada periodo, que es equivalente al gasto público total en los dos periodos. Suponga que el gobierno elimina el impuesto en el primer periodo pero mantiene el gasto público en los dos periodos. ¿Cuál es el nivel impositivo que debería poner en el segundo periodo? Dada esta nueva situación, determine los nuevos niveles de consumo del individuo en ambos periodos, tanto en el supuesto de mercados financieros perfectos, como en el supuesto de la existencia de restricciones al endeudamiento. ¿Estaría mejor o peor el individuo en estas nuevas situaciones en comparación con la obtenidas inicialmente?

SOLUCIÓN:

a) El problema a maximizar por parte del individuo es el siguiente:

$$\max U = \ln C_1 + \beta \ln C_2$$

sujeta a las restricciones presupuestarias del periodo 1 y del periodo 2, dadas por:

$$C_1 = (1 - \tau)W_1 - B_1$$

$$C_2 = (1 - \tau)W_2 + (1 + R)B_1$$

donde C es el nivel de consumo, W es el salario, B es el ahorro y τ es el tipo impositivo sobre la renta salarial. Despejando el ahorro de la restricción presupuestaria del primer periodo en la restricción presupuestaria del segundo periodo obtenemos la restricción presupuestaria intertemporal (definida en el primer periodo):

$$C_1 + \frac{C_2}{1 + R} = (1 - \tau)W_1 + \frac{(1 - \tau)W_2}{1 + R}$$

Como en este caso el tipo de interés real es cero, la restricción presupuestaria quedaría:

$$C_1 + C_2 = (1 - \tau)W_1 + (1 - \tau)W_2$$

siendo exactamente la misma si la definimos en el primer periodo como si la definimos respecto al segundo periodo. Como el tipo impositivo es del 10% y la renta que percibe el individuo es de 100.000 euros en cada periodo, la restricción presupuestaria sería:

$$C_1 + C_2 = 0,9W_1 + 0,9W_2 = 90.000 + 90.000 = 180.000$$

Por tanto, el problema a maximizar (el lagrangiano) sería:

$$\max U = \ln C_1 + \beta \ln C_2 - \lambda(C_1 + C_2 - (1 - \tau)W_1 - (1 - \tau)W_2)$$

Las condiciones de primer orden vendría dadas por:

$$\frac{1}{C_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{0,6}{C_2} - \lambda = 0$$

$$C_1 + C_2 = 180.000$$

Sustituyendo la primera condición de primer orden en la segunda condición de primer orden, obtenemos la senda óptima del consumo a lo largo de la vida del agente:

$$\frac{1}{C_1} - \frac{0,6}{C_2} = 0$$

$$0,6C_1 = C_2$$

Sustituyendo en la tercera condición de primer orden, obtenemos que los consumos óptimos en ambos periodos son:

$$C_1 + 0,6C_1 = 180.000$$

$$C_1 = \frac{180.000}{1,6} = 112.500$$

mientras que el consumo óptimo en el periodo 2, sería:

$$C_2 = 0,6 \times 112.500 = 67.500$$

Por tanto, el nivel de utilidad que obtendría este individuo sería:

$$U = \ln 112.500 + 0,6 \ln 67.500 = 18,3026$$

La representación gráfica de esta solución vendría dada por la figura 5.1. Como podemos comprobar, la senda óptima de consumo implica que el individuo va a pedir prestado en el periodo 1 (va a desear tener un nivel de consumo superior a su nivel de renta en dicho periodo) mientras que el individuo va a ahorrar en el segundo periodo, teniendo un nivel de consumo inferior a su renta en dicho periodo.

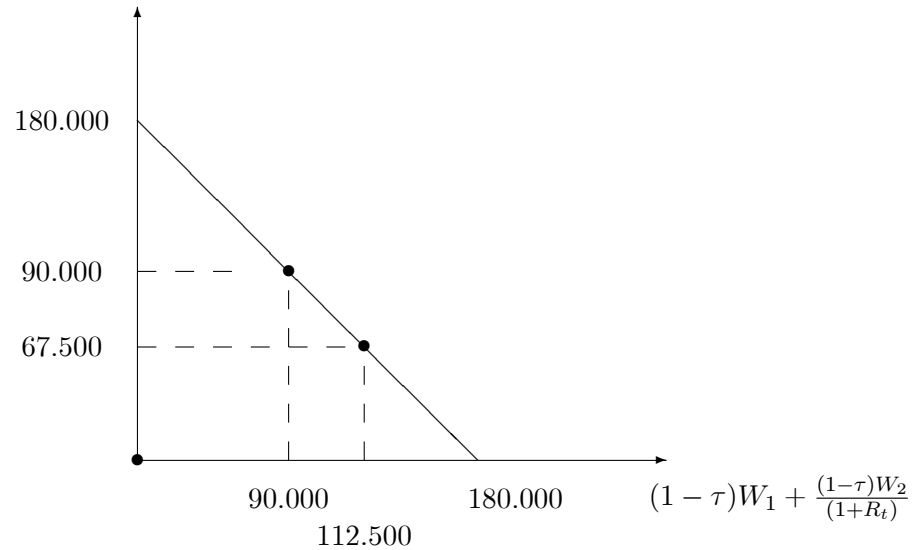


Figura 5.1. Equilibrio del consumidor

b) Si existen restricciones a la liquidez, esto significa que el individuo no puede tener un ahorro negativo en el primer periodo, ya que no puede pedir dinero prestado y por tanto no puede traerse dinero del futuro al presente. Esto significa que el nivel de consumo del primer periodo viene restringido por la renta del individuo en dicho periodo. En este caso el consumo si que sería una función de la renta, siempre y cuando el nivel de consumo que desearía tener el individuo en el primer periodo fuese superior a la renta disponible en dicho periodo. Por el contrario, la restricción a la liquidez no tendría ningún efecto en el caso en que el individuo deseara consumir en el primer periodo una cantidad menor que su renta en dicho periodo, es decir, su ahorro fuese positivo.

En nuestro caso, el individuo desea consumir en el primer periodo una cantidad superior a la renta disponible, por lo que si se ve afectado por la existencia de la restricción a la liquidez. Por tanto, en ese caso ya tenemos que el consumo que va a realizar el individuo en el primer periodo:

$$C_1 = 90.000$$

Esto significa que el consumo que va a realizar el individuo en el segundo periodo es también el valor de su renta en dicho periodo, esto es:

$$C_2 = 90.000$$

En este caso, el individuo se vería obligado a consumir menos de lo deseado en el periodo 1, mientras que consumiría más de lo deseado en el periodo 2. El resultado es que su nivel de felicidad sería inferior al alcanzado anteriormente. En efecto, si calculamos el nivel de bienestar del individuo en este caso obtenemos que:

$$U = \ln 90.000 + 0,6 \ln 90.000 = 18,2521$$

que es inferior al valor obtenido anteriormente. En este caso la restricción presupuestaria intertemporal del individuo tendría la forma que aparece en la figura 5.2, es decir, sólo existiría el tramo que corresponde a movimientos de renta hacia el futuro, mientras que ha desaparecido el tramo correspondiente a movimientos de renta desde el futuro, ya que esto no es posible al existir restricciones a la liquidez que impiden el endeudamiento.

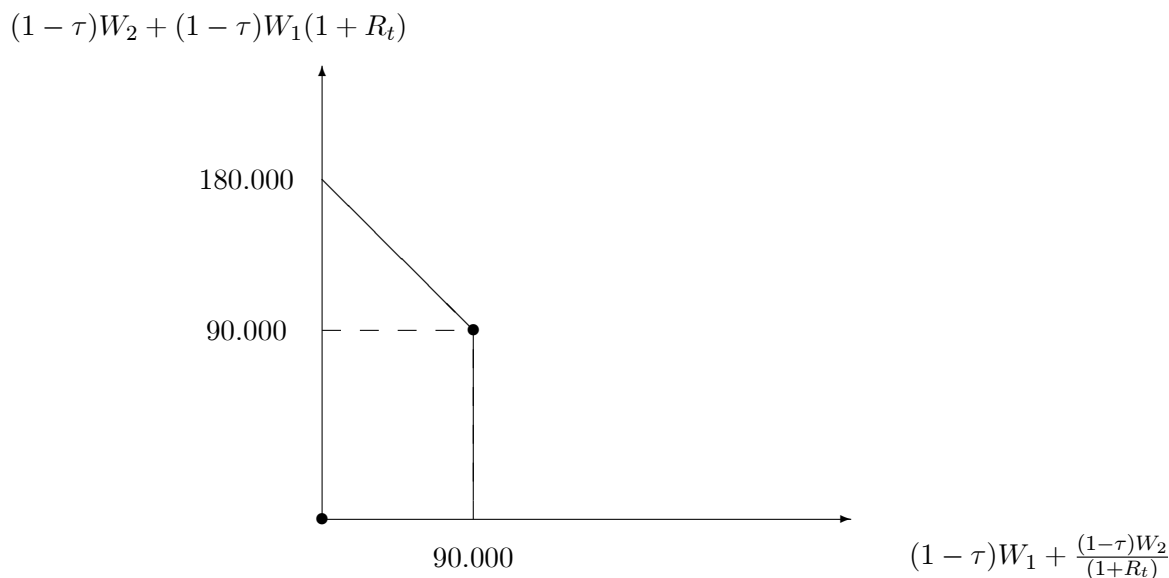


Figura 5.2. Equilibrio con restricciones a la liquidez

c) El nivel de ingresos del gobierno en cada periodo se calcula multiplicando el tipo impositivo por el nivel de renta. Por tanto los ingresos del gobierno son:

$$T_1 = T_2 = 0,1 \times 100.000 = 10.000$$

es decir, el gobierno realizaría un gasto público de 20.000 durante los dos periodos (10.000 en cada uno de ellos). Si el gobierno elimina el impuesto en el primer periodo (política fiscal expansiva), tiene que aumentar el tipo impositivo en el segundo periodo al 20% para que el gasto público permanezca constante:

$$T_2 = 0,2 \times 100.000 = 20.000$$

Dado este nuevo sistema impositivo, en el caso en que no existan restricciones a la liquidez, la elección del individuo sería la misma. El problema a maximizar sería:

$$\max U = \ln C_1 + \beta \ln C_2 - \lambda(C_1 + C_2 - W_1 - (1 - \tau)W_2)$$

que da como resultado los siguientes niveles de consumo en cada periodo:

$$C_1 = \frac{1}{1 + \beta} [W_1 + (1 - \tau)W_2] = \frac{1}{1,6} [100.000 + 80.000] = 112.500$$

$$C_2 = \frac{\beta}{1 + \beta} [W_1 + (1 - \tau)W_2] = \frac{0,6}{1,6} [100.000 + 80.000] = 67.500$$

Por tanto, el nivel de bienestar del individuo sigue siendo el mismo, ya que la política fiscal es inefectiva, no alterando las decisiones de consumo del individuo. En otras palabras, al individuo le da igual cuando tiene que pagar los impuestos. En términos gráficos la solución sería la misma que anteriormente (figura 5.3), ya que no ha cambiado la restricción presupuestaria intertemporal del individuo.

(1 - τ) $W_2 + (1 + R_t)W_1$ política fiscal

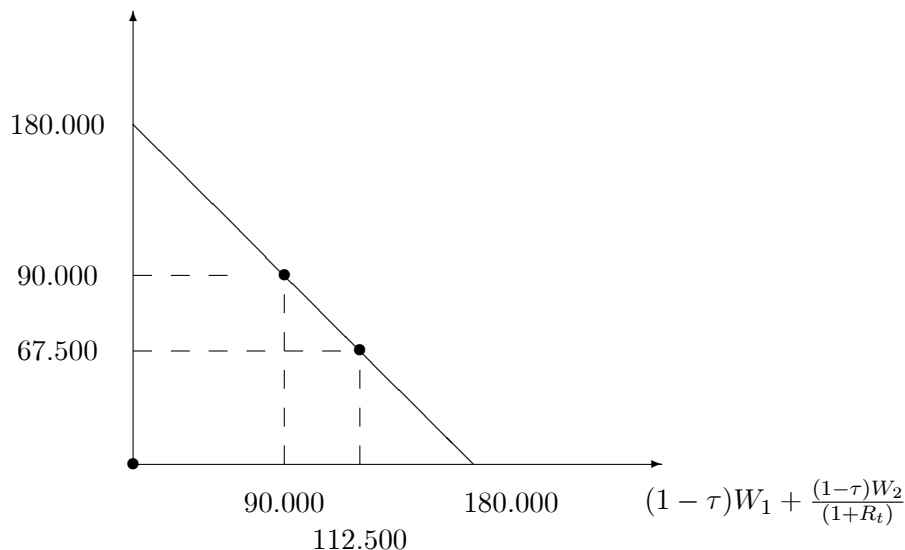


Figura 5.3. Efectos de la política fiscal

Sin embargo, los resultados van a cambiar si consideramos la existencia de restricciones a la liquidez. En efecto, ahora la nueva política impositiva hace que el nivel de renta disponible del individuo en el primer periodo aumente. Esto no tendría ninguna consecuencia si el individuo quiere tener un consumo inferior a su nivel de renta o si puede pedir dinero prestado. Pero si que tiene importancia en el caso de que el individuo no pueda pedir dinero prestado y quiera consumir en el primer periodo más de lo que gana. En este caso, los consumos del individuo en ambos periodos van a ser:

$$C_1 = 100.000$$

$$C_2 = 80.000$$

Por tanto en este caso, el nivel de utilidad del individuo sería:

$$U = \ln 100.000 + 0,6 \ln 80.000 = 18,2867$$

que es superior al obtenido en el caso anterior. Por tanto esta política impositiva si que tiene efectos sobre las decisiones del individuo y sobre su nivel de bienestar, pero sólo debido a que existen restricciones a la liquidez. En este caso la política fiscal analizada aumentaría el nivel de bienestar del individuo, ya que

prefiere pagar los impuestos en el segundo periodo que en el primero como consecuencia de la imposibilidad de endeudarse.

EJERCICIO 5.2: Suponga un consumidor representativo que vive dos periodos y que tiene la siguiente función de utilidad:

$$U(C) = \ln C_1 + \beta \ln C_2$$

siendo la restricción presupuestaria:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+R} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+R}$$

Resuelva el problema de maximización al que se enfrenta el consumidor, obteniendo los niveles óptimos de consumo en cada periodo.

Suponga ahora que el gobierno introduce un impuesto sobre los ingresos por el tipo de interés, τ . En este caso la restricción presupuestaria es:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+(1-\tau)R} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+(1-\tau)R}$$

Resuelva de nuevo el problema y determine los consumos óptimos. Compare ambas situaciones, es decir, como varían los niveles de consumo óptimo por la introducción de este impuesto. En qué caso el individuo obtiene un mayor nivel de bienestar (Tenga en cuenta que este tipo de impuestos perjudica a unos individuos pero beneficia a otros, así que la respuesta a la anterior pregunta no es trivial).

Obtenga los valores numéricos en el caso de que la renta del individuo sea de 100.000 euros cada periodo, un tipo de interés del 5%, un tipo impositivo del 25% y $\beta = 0,8$.

SOLUCIÓN:

Para resolver este problema construimos el langragiano del mismo:

$$\max_{C_1, C_2} F = \ln C_1 + \beta \ln C_2 - \lambda \left(C_1 + \frac{C_2}{1+R} - Y_1 - \frac{Y_2}{1+R} \right)$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial C_1} &= \frac{1}{C_1} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial C_2} &= \frac{\beta}{C_2} - \frac{\lambda}{1+R} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= C_1 + \frac{C_2}{1+R} - Y_1 - \frac{Y_2}{1+R} = 0 \end{aligned}$$

Despejando de la primera condición de primer orden y sustituyendo en la segunda condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{\beta}{C_2} = \frac{\frac{1}{C_1}}{1+R}$$

Por lo que la relación entre el consumo de un periodo y del otro es:

$$C_1 = \frac{1}{\beta(1+R)} C_2$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria intertemporal obtenemos que el nivel de consumo del primer periodo es:

$$\begin{aligned} C_1 + \beta C_1 &= Y_1 + \frac{Y_2}{1+R} \\ C_1 &= \frac{Y_1}{1+\beta} + \frac{Y_2}{(1+\beta)(1+R)} \end{aligned}$$

El nivel de consumo del segundo periodo es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta(1+R)} C_2 + \frac{C_2}{1+R} &= Y_1 + \frac{Y_2}{1+R} \\ C_2 &= \frac{\beta(1+R)}{1+\beta} \left[Y_1 + \frac{Y_2}{1+R} \right] \end{aligned}$$

El nivel de ahorro del individuo lo obtenemos como la diferencia entre la renta del primer periodo y el consumo de dicho periodo:

$$S = C_1 - Y_1 = \frac{1}{1 + \beta} \left[\frac{Y_2}{(1 + R)} - \beta Y_1 \right]$$

Por tanto, el ahorro del individuo es positivo o negativo dependiendo de si

$$[Y_2 \gtrless \beta(1 + R)Y_1]$$

En este caso es importante conocer la posición del individuo (acreedora o deudora) ya que el impuesto que hemos introducido tiene efectos distintos dependiendo de la posición del mismo. Si el individuo tiene una posición acreedora, el impuesto va a tener efectos negativos, ya que disminuye la rentabilidad de su ahorro. Por el contrario, si el individuo tiene una posición deudora, el impuesto se transforma en una subvención, disminuyendo el coste del endeudamiento. Vamos a introducir ahora el impuesto sobre el tipo de interés. Resolviendo de nuevo obtenemos:

$$\max_{C_1, C_2} F = \ln C_1 + \beta \ln C_2 - \lambda \left(C_1 + \frac{C_2}{1 + (1 - \tau)R} - Y_1 - \frac{Y_2}{1 + (1 - \tau)R} \right)$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\partial F}{\partial C_1} = \frac{1}{C_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial C_2} = \frac{\beta}{C_2} - \frac{\lambda}{1 + (1 - \tau)R} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = C_1 + \frac{C_2}{1 + (1 - \tau)R} - Y_1 - \frac{Y_2}{1 + (1 - \tau)R} = 0$$

Despejando de la primera condición de primer orden y sustituyendo en la segunda condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{\beta}{C_2} = \frac{\frac{1}{C_1}}{1 + (1 - \tau)R}$$

Por lo que la relación entre el consumo de un periodo y del otro es:

$$C_1 = \frac{1}{\beta(1 + (1 - \tau)R)} C_2$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria intertemporal obtenemos que el nivel de consumo del primer periodo es:

$$C_1 + \beta C_1 = Y_1 + \frac{Y_2}{1 + (1 - \tau)R}$$

$$C_1 = \frac{Y_1}{1 + \beta} + \frac{Y_2}{(1 + \beta)(1 + (1 - \tau)R)}$$

El nivel de consumo del segundo periodo es:

$$\frac{1}{\beta(1 + (1 - \tau)R)} C_2 + \frac{C_2}{1 + (1 - \tau)R} = Y_1 + \frac{Y_2}{1 + (1 - \tau)R}$$

$$C_2 = \frac{\beta(1 + (1 - \tau)R)}{1 + \beta} \left[Y_1 + \frac{Y_2}{1 + (1 - \tau)R} \right]$$

El nivel de ahorro del individuo lo obtenemos como la diferencia entre la renta del primer periodo y el consumo de dicho periodo:

$$S = C_1 - Y_1 = \frac{1}{1 + \beta} \left[\frac{Y_2}{(1 + (1 - \tau)R)} - \beta Y_1 \right]$$

Por tanto, el ahorro del individuo es positivo o negativo en este caso dependiendo de si

$$[Y_2 \gtrless \beta(1 + (1 - \tau)R)Y_1]$$

Usando los valores numéricos que nos proporciona el enunciado del problema obtenemos que:

$$C_1 = \frac{1}{1,8} \left[100.000 + \frac{100.000}{1,05} \right] = 108.465,60$$

$$C_2 = \frac{0,8 \times 1,05}{1,8} \left[100.000 + \frac{100.000}{1,05} \right] = 91.111,11$$

Por tanto, el nivel de utilidad del individuo sería:

$$U(C) = \ln 108.465 + 0,8 \ln 91.111,11 = 20,730$$

En el caso del impuesto sobre el tipo de interés tendríamos:

$$C_1 = \frac{1}{1,8} \left[100.000 + \frac{100.000}{1 + 0,05 \times (1 - 0,25)} \right] = 109.103,08$$

$$C_2 = \frac{0,8 \times (1 + 0,05 \times (1 - 0,25))}{1,8} \left[100.000 + \frac{100.000}{1 + 0,05 \times (1 - 0,25)} \right] = 90.555,55$$

Como podemos comprobar, en este caso el establecimiento de este impuesto provoca que el individuo aumente su nivel de consumo en el periodo 1, es decir, se endeuda en una mayor proporción, debido a que este impuesto hace que el coste de pedir prestado sea menor. El nivel de utilidad del individuo sería:

$$U(C) = \ln 109.103,08 + 0,8 \ln 90.555,55 = 20,731$$

superior al que obtenía sin el impuesto. Por tanto, en este caso el individuo se ve beneficiado por la presencia de este impuesto (que sería para el una subvención).

EJERCICIO 5.3: Suponga un individuo que vive dos periodos. Su renta en el periodo 1 es de 50.000 euros, siendo cero en el periodo 2. La función que maximiza este individuo es la siguiente:

$$V = \ln C_{1,1} + \beta \ln C_{2,2} + \gamma \ln C_{1,2}$$

donde $C_{1,1}$ es el consumo de este individuo en el periodo 1, $C_{2,2}$ es el consumo del individuo en el periodo 2 y $C_{1,2}$ es el consumo de su hijo en el primer periodo de vida de éste. Suponga que $\beta = 0,95$, $\gamma = 0,9$, $R = 5\%$ y que la herencia que ha recibido nuestro agente de su padre ha sido de 100.000 euros.

a) Determine cuál es el consumo óptimo en cada periodo del individuo y la cantidad de dinero que le dejaría de

herencia a su hijo, sabiendo que dicha herencia va a ser igual al consumo de su hijo durante el primer periodo de su vida.

b) Suponga ahora que la herencia que recibe nuestro agente de su padre es de 20.000 euros. Como se ven afectados su plan óptimo de consumo y su decisión sobre la herencia que le va a dejar a su hijo.

c) Repita el apartado (a) pero suponiendo que ahora $R = 10\%$. De los resultados obtenidos cuáles son los efectos de un aumento en el tipo de interés sobre el plan óptimo de consumo del individuo y de la herencia que le deja a su hijo.

d) Repita el apartado (a) pero suponiendo que ahora $\beta = 0,8$. De los resultados obtenidos cuáles son los efectos de un aumento en la tasa de preferencia intertemporal sobre el plan óptimo de consumo del individuo y de la herencia que le deja a su hijo.

e) Repita el apartado (a) pero suponiendo que ahora $\gamma = 0,6$. De los resultados obtenidos cuáles son los efectos de un aumento en la ponderación de la utilidad del hijo sobre el plan óptimo de consumo del individuo y de la herencia que le deja a su hijo.

SOLUCIÓN:

a) El problema al que se enfrenta el agente ahora consiste en maximizar la siguiente función de utilidad:

$$\max V_t = \ln C_{1,1} + \beta \ln C_{2,2} + \gamma \ln C_{1,2}$$

sujeito a:

$$C_{1,1} + S_1 = Y_1 + H_1$$

$$C_{2,2} + H_2 = S_1(1 + R)$$

donde H_1 es la herencia que ha recibido nuestro agente de su padre, que por definición suponemos positiva, H_2 es la herencia que va

a dejar nuestro agente a su hijo, y que también por definición tiene que ser no negativa. Es decir, ahora la felicidad del individuo no sólo depende de los consumos que realiza a lo largo de su vida (2 periodos) sino que también depende del consumo que realiza su hijo cuando éste es joven. Dado que el problema nos indica que el consumo que va a realizar el hijo de nuestro agente cuando es joven depende exclusivamente de la herencia que deje nuestro agente, a la hora de maximizar su nivel de felicidad también va a tener en cuenta este nuevo componente. Por tanto, ahora la elección de nuestro agente es triple: tiene que decidir cuanto consume en cada periodo y cuanta herencia deja a su hijo.

El lagrangiano del problema a resolver sería:

$$\begin{aligned} \max V_t = & \ln C_{1,1} + \beta \ln C_{2,2} + \gamma \ln C_{1,2} \\ & - \lambda_t (C_{1,1} + S_1 - Y_{1,1} - H_1) - \eta_t (C_{2,2} + H_2 - S_1(1 + R)) \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden respecto a los niveles de consumo en el periodo 1 y el periodo 2 y respecto al nivel de ahorro son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial C_{1,1}} &= \frac{1}{C_{1,1}} - \lambda_t = 0 \\ \frac{\partial V_t}{\partial C_{2,2}} &= \frac{\beta}{C_{2,2}} - \eta_t = 0 \\ \frac{\partial V_t}{\partial S_1} &= -\lambda_t + (1 + R)\eta_t = 0 \end{aligned}$$

A partir de la condición de primer orden respecto al ahorro obtenemos que la relación entre los parámetros de Lagrange es:

$$\lambda_t = (1 + R)\eta_t$$

Sustituyendo en las otras condiciones de primer orden resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial C_{2,t+1}} &= \frac{\beta}{C_{2,2}} - \frac{\lambda_t}{(1 + R)} = 0 \\ \lambda_t &= \frac{(1 + R)\beta}{C_{2,2}} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera condición de primer orden:

$$\frac{1}{C_{1,1}} = \frac{(1+R)\beta}{C_{2,2}}$$

por lo que la senda óptima de consumo del individuo sería:

$$(1+R)\beta C_{1,1} = C_{2,2} \quad (1)$$

Una vez obtenida la senda óptima del consumo, a continuación calculamos la decisión óptima del individuo en relación a la herencia que le va a dejar a su hijo. Para ello sustituimos las restricciones presupuestarias dentro de la función de utilidad a maximizar:

$$\begin{aligned} \max \dots &+ \ln(-S_1 + Y_{1,1} + H_1) + \beta \ln(-H_2 + S_1(1+R)) \\ &+ \gamma \ln(-S_2 + Y_{1,2} + H_2) + \dots \end{aligned}$$

Derivando obtenemos:

$$-\frac{\beta}{C_{2,2}} + \frac{\gamma}{C_{1,2}} = 0$$

Por tanto la herencia viene determinada por la siguiente condición de optimalidad:

$$C_{2,2} = \frac{\beta}{\gamma} C_{1,2}$$

Como resulta que el nivel de consumo del hijo de nuestro agente cuando es joven es igual a la herencia, entonces resulta que:

$$H_2 = \frac{\gamma}{\beta} C_{2,2} \quad (2)$$

Para obtener los niveles de consumo de nuestro agente únicamente tenemos que sustituir las anteriores condiciones de optimalidad en la restricción presupuestaria intertemporal. La restricción presupuestaria intertemporal es:

$$C_{2,2} + H_2 = (Y_{1,1} + H_1 - C_{1,1})(1+R)$$

Sustituyendo la expresión (1) obtenemos:

$$C_{2,2} + H_2 = (Y_{1,1} + H_1)(1+R) - \frac{C_{2,2}}{\beta}$$

Sustituyendo la expresión (2) resulta:

$$C_{2,2} + \frac{\gamma}{\beta}C_{2,2} = (Y_{1,1} + H_1)(1 + R) - \frac{C_{2,2}}{\beta}$$

Operando resulta que:

$$C_{2,2} + \frac{\gamma}{\beta}C_{2,2} + \frac{C_{2,2}}{\beta} = (Y_{1,1} + H_1)(1 + R)$$

$$C_{2,2} = \frac{\beta(1 + R)}{1 + \beta + \gamma}(Y_{1,1} + H_1)$$

Sustituyendo en la expresión (1), obtenemos:

$$C_{1,1} = \frac{1}{1 + \beta + \gamma}(Y_{1,1} + H_1)$$

mientras que sustituyendo en la expresión (2) resulta que:

$$H_2 = \frac{\gamma(1 + R)}{1 + \beta + \gamma}(Y_{1,1} + H_1)$$

Una vez hemos calculado los valores para los consumos y la herencia, a continuación vamos a calcular los valores numéricos con la información que proporciona el enunciado. Estos valores serían:

$$C_{1,1} = \frac{1}{1 + 0,95 + 0,9}(50.000 + 100.000) = 52.631,60$$

$$C_{2,2} = \frac{0,95(1 + 0,05)}{1 + 0,95 + 0,9}(50.000 + 100.000) = 52.500$$

$$H_2 = \frac{0,9(1 + 0,05)}{1 + 0,95 + 0,9}(50.000 + 100.000) = 49.736,84$$

Nótese que el total es de 154.868,4, cantidad que es superior a 150.000 debido a que el ahorro del individuo es positivo y le permite obtener una rentabilidad de 4.868,4. Tal y como podemos comprobar, el individuo destina al consumo en cada periodo aproximadamente el 34% de su riqueza global, mientras que el 32% restante lo destina a herencia.

b) Vamos a recalcular los valores anteriores pero suponiendo ahora que la herencia que ha recibido nuestro agente de su padre es inferior,

de 20.000. Cómo se ven afectadas las decisiones del individuo en este caso. Como podemos observar las expresiones de optimalidad siguen siendo las mismas, por lo que las decisiones del agente no se van a ver afectadas. Calculando los valores numéricos obtenemos:

$$C_{1,1} = \frac{1}{1 + 0,95 + 0,9}(50.000 + 20.000) = 24.561,40$$

$$C_{2,2} = \frac{0,95(1 + 0,05)}{1 + 0,95 + 0,9}(50.000 + 20.000) = 24.500$$

$$H_2 = \frac{0,9(1 + 0,05)}{1 + 0,95 + 0,9}(50.000 + 20.000) = 23.210,52$$

Como podemos observar, los valores tanto de los consumos como de la herencia son inferiores a los obtenidos anteriormente, debido a que la riqueza total del individuo ha disminuido. Sin embargo, la distribución de dicha riqueza sigue siendo la misma. Aproximadamente el 34% de la misma se destina a consumir en cada periodo mientras que el 32% restante lo destina el individuo a herencia. Por tanto, la herencia que recibe un individuo no afecta a sus decisiones, tanto de consumo como de la herencia que a su vez va a dejar a sus hijos.

c) Vamos a repetir los cálculos del apartado (a) pero suponiendo que el tipo de interés aumenta hasta el 10%. Los valores óptimos serían:

$$C_{1,1} = \frac{1}{1 + 0,95 + 0,9}(50.000 + 100.000) = 52.631,60$$

$$C_{2,2} = \frac{0,95(1 + 0,1)}{1 + 0,95 + 0,9}(50.000 + 100.000) = 55.000$$

$$H_2 = \frac{0,9(1 + 0,1)}{1 + 0,95 + 0,9}(50.000 + 100.000) = 52.105,36$$

Como podemos comprobar, el consumo del individuo en el periodo 1 sigue siendo igual al obtenido anteriormente, mientras que aumenta el consumo del periodo 2 y la herencia. Esto es debido a que ahora el ahorro que realiza el individuo en el periodo 1 es más rentable, permitiendo un mayor gasto en el segundo periodo de su vida. Ahora destina un 32,94% de su riqueza global al consumo en el primer

periodo, un 34,43% de su riqueza global a consumo en el segundo periodo y un 32,62% a herencia. En este caso vemos que, dado que el individuo mantiene una posición acreedora durante el primer periodo de su vida, el tipo de interés influye positivamente en la herencia que deja el individuo a su hijo.

d) Vamos a estudiar ahora cuáles son los efectos de una disminución en la tasa de descuento. Si $\beta = 0,8$, los valores óptimos para el individuo son:

$$C_{1,1} = \frac{1}{1 + 0,8 + 0,9}(50.000 + 100.000) = 55.555,55$$

$$C_{2,2} = \frac{0,8(1 + 0,05)}{1 + 0,8 + 0,9}(50.000 + 100.000) = 46.666,66$$

$$H_2 = \frac{0,9(1 + 0,05)}{1 + 0,8 + 0,9}(50.000 + 100.000) = 52.500$$

El consumo del individuo en el primer periodo aumenta, mientras que disminuye su consumo en el segundo periodo. Al disminuir la tasa de descuento, el individuo valora más la utilidad en el momento actual que la utilidad futura de lo que lo hacía anteriormente, por lo que reasigna los niveles de consumo a lo largo de su vida, consumiendo más en el primer periodo y disminuyendo el consumo en el segundo periodo. Por lo que respecta a la herencia esta aumenta, debido a que comparando la felicidad que le reporta el consumo de hijo respecto a su nivel de consumo en el segundo periodo de su vida, el primero es superior. En términos porcentuales, el individuo dedicaría el 35,9% de su riqueza global a consumo en el primer periodo, un 30,16% a consumo en el segundo periodo y el restante 33,93% a herencia. Por tanto, obtenemos que cuanto menor sea la tasa de descuento, mayor el la herencia que dejaría un individuo.

e) Finalmente, repetimos de nuevo los cálculos pero suponiendo que la tasa de descuento respecto a la felicidad del hijo en su función de felicidad disminuye. Si suponemos que ahora $\gamma = 0,6$, los valores óptimos del individuo serían:

$$C_{1,1} = \frac{1}{1 + 0,95 + 0,6}(50.000 + 100.000) = 58.823,53$$

$$C_{2,2} = \frac{0,95(1 + 0,05)}{1 + 0,95 + 0,6}(50.000 + 100.000) = 58.676,47$$

$$H_2 = \frac{0,6(1 + 0,05)}{1 + 0,95 + 0,6}(50.000 + 100.000) = 37.058,82$$

Como era de esperar, la disminución de esta tasa de descuento provoca una disminución de la herencia que va a dejar el individuo a su hijo. En este caso el individuo prefiere aumentar sus niveles de consumo, tanto en el primer periodo como en el segundo, disminuyendo la cantidad de herencia que le deja a su hijo debido a que su felicidad le importa menos, esto es, descuenta en mayor medida la utilidad de su hijo a la hora de valorar su propia utilidad.

EJERCICIO 5.4: Suponga un individuo que vive dos periodos. Su renta en el periodo 1 es de 100.000 euros, siendo cero en el periodo 2. La función que maximiza este individuo es la siguiente:

$$V = \ln C_{1,1} + \beta \ln C_{2,2} + \gamma \ln C_{1,2}$$

donde $C_{1,1}$ es el consumo de este individuo en el periodo 1, $C_{2,2}$ es el consumo del individuo en el periodo 2 y $C_{1,2}$ es el consumo de su hijo en el primer periodo de vida de este. Suponga que $\beta = 0,95$, $\gamma = 0,9$, $R = 2\%$ y que la herencia que ha recibido nuestro agente de su padre ha sido de 100.000 euros.

a) Determine cuál es el consumo óptimo en cada periodo del individuo y la cantidad de dinero que le dejaría de herencia a su hijo, sabiendo que dicha herencia va a ser igual al consumo de su hijo durante el primer periodo de su vida.

b) Suponga que el gobierno fija un impuesto sobre la renta del 20%, que devuelve al individuo en forma de transferencias en el segundo periodo. Qué efectos tiene esta política fiscal sobre la herencia.

c) Suponga ahora que el gobierno fija un impuesto sobre la renta del 20%, pero en lugar de devolverla al individuo

vía transferencias, dichas transferencias van a su hijo. Qué efectos tiene esta política fiscal sobre la herencia.

SOLUCIÓN:

a) El problema a resolver por parte del consumidor es:

$$\max V = \ln C_{1,1} + \beta \ln C_{2,2} + \gamma \ln C_{1,2}$$

sujeito a las siguientes restricciones:

$$C_{1,1} + S_1 = Y_1 + H_1$$

$$C_{2,2} + H_2 = S_1(1 + R)$$

$$C_{1,2} = H_2$$

El lagrangiano correspondiente al anterior problema es:

$$\begin{aligned} \max V = & \ln C_{1,1} + \beta \ln C_{2,2} + \gamma \ln C_{1,2} - \lambda_t(C_{1,1} + S_1 - Y_{1,1} - H_1) \\ & - \eta_t(C_{2,2} + H_2 - S_1(1 + R)) - \xi_t(C_{1,2} - H_2) \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden del problema serían:

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{1,1}} = \frac{1}{C_{1,1}} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{2,2}} = \frac{\beta}{C_{2,2}} - \eta_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial S_1} = -\lambda_t + (1 + R)\eta_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{1,2}} = \frac{\gamma}{C_{1,2}} - \xi_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial H_2} = -\eta_t + \xi_t = 0$$

A partir de la condición de primer orden respecto al ahorro obtenemos que la relación entre los parámetros de Lagrange λ_t e η_t es:

$$\lambda_t = (1 + R)\eta_t$$

Sustituyendo en las otras condiciones de primer orden resulta:

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{2,t+1}} = \frac{\beta}{C_{2,2}} - \frac{\lambda_t}{(1 + R)} = 0$$

$$\lambda_t = \frac{(1 + R)\beta}{C_{2,2}}$$

Sustituyendo en la primera condición de primer orden:

$$\frac{1}{C_{1,1}} = \frac{(1 + R)\beta}{C_{2,2}}$$

por lo que la senda óptima de consumo del individuo sería:

$$(1 + R)\beta C_{1,1} = C_{2,2} \quad (1)$$

Por su parte, de la última condición de primer orden obtenemos que:

$$\eta_t = \xi_t$$

Sabiendo que de la condición de primer orden respecto al consumo del hijo resulta:

$$\xi_t = \frac{\gamma}{C_{1,2}}$$

y sustituyendo obtenemos que:

$$\eta_t = \frac{\lambda_t}{(1 + R)} = \frac{\gamma}{C_{1,2}}$$

$$\frac{\beta}{C_{2,2}} = \frac{\gamma}{C_{1,2}} = \frac{\gamma}{H_2}$$

por lo que resulta que la herencia que determinaría el individuo sería:

$$\gamma C_{2,2} = \beta H_2$$

Otra forma de calcular la decisión óptima del individuo consistiría en una vez obtenida la senda óptima del consumo, calcular la herencia que le va a dejar a su hijo sustituyendo las restricciones presupuestarias dentro de la función de utilidad a maximizar:

$$\begin{aligned} \max \dots + \ln(-S_1 + Y_{1,1} + H_1) + \beta \ln(-H_2 + S_1(1 + R)) \\ + \gamma \ln(H_2) + \dots \end{aligned}$$

Derivando obtenemos:

$$-\frac{\beta}{C_{2,2}} + \frac{\gamma}{C_{1,2}} = 0$$

Por tanto la herencia viene determinada por la siguiente condición de optimalidad:

$$C_{2,2} = \frac{\beta}{\gamma} C_{1,2}$$

Como resulta que el nivel de consumo del hijo de nuestro agente cuando es joven es igual a la herencia, entonces resulta que:

$$H_2 = \frac{\gamma}{\beta} C_{2,2} \quad (2)$$

que es el mismo resultado que el obtenido anteriormente.

Para obtener los niveles de consumo de nuestro agente únicamente tenemos que sustituir las anteriores condiciones de optimalidad en la restricción presupuestaria intertemporal. La restricción presupuestaria intertemporal es:

$$C_{2,2} + H_2 = (Y_{1,1} + H_1 - C_{1,1})(1 + R)$$

Sustituyendo la expresión (1) obtenemos:

$$C_{2,2} + H_2 = (Y_{1,1} + H_1)(1 + R) - \frac{C_{2,2}}{\beta}$$

Sustituyendo la expresión (2) resulta:

$$C_{2,2} + \frac{\gamma}{\beta} C_{2,2} = (Y_{1,1} + H_1)(1 + R) - \frac{C_{2,2}}{\beta}$$

Operando resulta que:

$$C_{2,2} + \frac{\gamma}{\beta}C_{2,2} + \frac{C_{2,2}}{\beta} = (Y_{1,1} + H_1)(1 + R)$$

$$C_{2,2} = \frac{\beta(1 + R)}{1 + \beta + \gamma}(Y_{1,1} + H_1)$$

Sustituyendo en la expresión (1), obtenemos:

$$C_{1,1} = \frac{1}{1 + \beta + \gamma}(Y_{1,1} + H_1)$$

mientras que sustituyendo en la expresión (2) resulta que:

$$H_2 = \frac{\gamma(1 + R)}{1 + \beta + \gamma}(Y_{1,1} + H_1)$$

Una vez hemos calculado los valores para los consumos y la herencia, a continuación vamos a calcular los valores numéricos con la información que proporciona el enunciado. Estos valores serían:

$$C_{1,1} = \frac{1}{1 + 0,95 + 0,9}(100.000 + 100.000) = 70.175,44$$

$$C_{2,2} = \frac{0,95(1 + 0,05)}{1 + 0,95 + 0,9}(100.000 + 100.000) = 68.000$$

$$H_2 = \frac{0,9(1 + 0,05)}{1 + 0,95 + 0,9}(100.000 + 100.000) = 64.421,05$$

b) Vamos a resolver de nuevo el problema del consumidor pero ahora introduciendo un impuesto del 20% sobre la renta. Vamos a analizar esta nueva situación suponiendo que el gobierno devuelve en el segundo periodo la misma cantidad recaudada en el primer periodo pero sin actualizar. El problema a resolver por parte del consumidor sería ahora:

$$\max V = \ln C_{1,1} + \beta \ln C_{2,2} + \gamma \ln C_{1,2}$$

sujeito a las siguientes restricciones:

$$C_{1,1} + S_1 = (1 - \tau)Y_1 + H_1$$

$$C_{2,2} + H_2 = S_1(1 + R) + T$$

$$C_{1,2} = H_2$$

El lagrangiano correspondiente al anterior problema es:

$$\begin{aligned} \max V = & \ln C_{1,1} + \beta \ln C_{2,2} + \gamma \ln C_{1,2} - \lambda_t(C_{1,1} + S_1 - (1 - \tau)Y_{1,1} - H_1) \\ & - \eta_t(C_{2,2} + H_2 - S_1(1 + R) - T) - \xi_t(C_{1,2} - H_2) \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden del problema serían:

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{1,1}} = \frac{1}{C_{1,1}} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{2,2}} = \frac{\beta}{C_{2,2}} - \eta_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial S_1} = -\lambda_t + (1 + R)\eta_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{1,2}} = \frac{\gamma}{C_{1,2}} - \xi_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial H_2} = -\eta_t + \xi_t = 0$$

A partir de la condición de primer orden respecto al ahorro obtenemos que la relación entre los parámetros de Lagrange λ_t e η_t es:

$$\lambda_t = (1 + R)\eta_t$$

Sustituyendo en las otras condiciones de primer orden resulta:

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{2,t+1}} = \frac{\beta}{C_{2,2}} - \frac{\lambda_t}{(1 + R)} = 0$$

$$\lambda_t = \frac{(1 + R)\beta}{C_{2,2}}$$

Sustituyendo en la primera condición de primer orden:

$$\frac{1}{C_{1,1}} = \frac{(1+R)\beta}{C_{2,2}}$$

por lo que la senda óptima de consumo del individuo sería:

$$(1+R)\beta C_{1,1} = C_{2,2} \quad (3)$$

Por su parte, de la última condición de primer orden obtenemos que:

$$\eta_t = \xi_t$$

Sabiendo que de la condición de primer orden respecto al consumo del hijo resulta:

$$\xi_t = \frac{\gamma}{C_{1,2}}$$

y sustituyendo obtenemos que:

$$\eta_t = \frac{\lambda_t}{(1+R)} = \frac{\gamma}{C_{1,2}}$$

$$\frac{\beta}{C_{2,2}} = \frac{\gamma}{C_{1,2}} = \frac{\gamma}{H_2}$$

por lo que resulta que la herencia que determinaría el individuo sería.:

$$H_2 = \frac{\gamma}{\beta} C_{2,2} \quad (4)$$

Para obtener los niveles de consumo de nuestro agente únicamente tenemos que sustituir las anteriores condiciones de optimalidad en la restricción presupuestaria intertemporal. La restricción presupuestaria intertemporal es:

$$C_{2,2} + H_2 = ((1-\tau)Y_{1,1} + H_1 - C_{1,1})(1+R) + T$$

Sustituyendo la expresión (3) obtenemos:

$$C_{2,2} + H_2 = ((1-\tau)Y_{1,1} + H_1)(1+R) - \frac{C_{2,2}}{\beta} + T$$

Sustituyendo la expresión (4) resulta:

$$C_{2,2} + \frac{\gamma}{\beta} C_{2,2} = ((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1)(1 + R) - \frac{C_{2,2}}{\beta} + T$$

Operando resulta que:

$$C_{2,2} + \frac{\gamma}{\beta} C_{2,2} + \frac{C_{2,2}}{\beta} = ((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1)(1 + R) + T$$

$$C_{2,2} = \frac{\beta}{1 + \beta + \gamma} [(1 + R)((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1) + T]$$

Sustituyendo en la expresión (3), obtenemos:

$$C_{1,1} = \frac{1}{1 + \beta + \gamma} ((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1) + \frac{T}{(1 + R)(1 + \beta + \gamma)}$$

mientras que sustituyendo en la expresión (4) resulta que:

$$H_2 = \frac{\gamma}{1 + \beta + \gamma} [(1 + R)((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1) + T]$$

Una vez hemos calculado los valores para los consumos y la herencia, a continuación vamos a calcular los valores numéricos con la información que proporciona el enunciado. Estos valores serían:

$$C_{1,1} = \frac{0,8}{1 + 0,95 + 0,9} (100.000 + 100.000) + \frac{20.000}{2,85 \times 1,02} = 70.037,84$$

$$\begin{aligned} C_{2,2} &= \frac{0,95}{1 + 0,95 + 0,9} [(1 + 0,02)(0,8 \times 100.000 + 100.000) + 20.000] \\ &= 67.886,67 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{0,9}{1 + 0,95 + 0,9} [(1 + 0,02)(100.000 + 100.000) + 20.000] \\ &= 64.294,74 \end{aligned}$$

c) Vamos a resolver de nuevo el problema del consumidor pero ahora introduciendo un impuesto del 20% sobre la renta. Vamos a analizar esta nueva situación suponiendo que el gobierno devuelve la misma cantidad recaudada en el primer periodo sin actualizar pero

ahora se la da directamente al hijo. El problema a resolver por parte del consumidor sería ahora:

$$\max V = \ln C_{1,1} + \beta \ln C_{2,2} + \gamma \ln C_{1,2}$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$C_{1,1} + S_1 = (1 - \tau)Y_1 + H_1$$

$$C_{2,2} + H_2 = S_1(1 + R)$$

$$C_{1,2} = H_2 + T$$

El lagrangiano correspondiente al anterior problema es:

$$\begin{aligned} \max V = & \ln C_{1,1} + \beta \ln C_{2,2} + \gamma \ln C_{1,2} \\ & - \lambda_t(C_{1,1} + S_1 - (1 - \tau)Y_{1,1} - H_1) \\ & - \eta_t(C_{2,2} + H_2 - S_1(1 + R)) - \xi_t(C_{1,2} - H_2 - T) \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden del problema serían:

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{1,1}} = \frac{1}{C_{1,1}} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{2,2}} = \frac{\beta}{C_{2,2}} - \eta_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial S_1} = -\lambda_t + (1 + R)\eta_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{1,2}} = \frac{\gamma}{C_{1,2}} - \xi_t = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial H_2} = -\eta_t + \xi_t = 0$$

A partir de la condición de primer orden respecto al ahorro obtenemos que la relación entre los parámetros de Lagrange λ_t e η_t es:

$$\lambda_t = (1 + R)\eta_t$$

Sustituyendo en las otras condiciones de primer orden resulta:

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{2,t+1}} = \frac{\beta}{C_{2,2}} - \frac{\lambda_t}{(1+R)} = 0$$

$$\lambda_t = \frac{(1+R)\beta}{C_{2,2}}$$

Sustituyendo en la primera condición de primer orden:

$$\frac{1}{C_{1,1}} = \frac{(1+R)\beta}{C_{2,2}}$$

por lo que la senda óptima de consumo del individuo sería:

$$(1+R)\beta C_{1,1} = C_{2,2} \quad (5)$$

Por su parte, de la última condición de primer orden obtenemos que:

$$\eta_t = \xi_t$$

Sabiendo que de la condición de primer orden respecto al consumo del hijo resulta:

$$\xi_t = \frac{\gamma}{C_{1,2}}$$

y sustituyendo obtenemos que:

$$\eta_t = \frac{\lambda_t}{(1+R)} = \frac{\gamma}{C_{1,2}}$$

$$\frac{\beta}{C_{2,2}} = \frac{\gamma}{C_{1,2}} = \frac{\gamma}{H_2 + T}$$

por lo que resulta que la herencia que determinaría el individuo sería.:

$$H_2 = \frac{\gamma}{\beta} C_{2,2} - T \quad (6)$$

Para obtener los niveles de consumo de nuestro agente únicamente tenemos que sustituir las anteriores condiciones de optimalidad en la restricción presupuestaria intertemporal. La restricción presupuestaria intertemporal es:

$$C_{2,2} + H_2 = ((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1 - C_{1,1})(1 + R) + T$$

Sustituyendo la expresión (5) obtenemos:

$$C_{2,2} + H_2 = ((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1)(1 + R) - \frac{C_{2,2}}{\beta} + T$$

Sustituyendo la expresión (6) resulta:

$$C_{2,2} + \frac{\gamma}{\beta}C_{2,2} = ((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1)(1 + R) - \frac{C_{2,2}}{\beta} + T$$

Operando resulta que:

$$C_{2,2} + \frac{\gamma}{\beta}C_{2,2} + \frac{C_{2,2}}{\beta} = ((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1)(1 + R) + T$$

$$C_{2,2} = \frac{\beta}{1 + \beta + \gamma} [(1 + R)((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1) + T]$$

Sustituyendo en la expresión (5), obtenemos:

$$C_{1,1} = \frac{1}{1 + \beta + \gamma} ((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1) + \frac{T}{(1 + R)(1 + \beta + \gamma)}$$

mientras que sustituyendo en la expresión (6) resulta que:

$$H_2 = \frac{\gamma}{1 + \beta + \gamma} [(1 + R)((1 - \tau)Y_{1,1} + H_1) + T] - T$$

Sustituyendo los valores numéricos en la nueva definición de herencia, obtenemosque

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{0,9}{1 + 0,95 + 0,9} [(1 + 0,02)(100.000 + 100.000) + 20.000] - 20.000 \\ &= 44.294,74 \end{aligned}$$

es decir, la herencia que el agente destina a su hijo disminuye exactamente en la misma cuantía que las transferencias que éste recibe vía impuestos. Dado que el agente ahora no recibe la cuantía del impuesto y la recibe en su lugar su hijo, descuenta esta cuantía de la herencia que le va a dejar.

6

El modelo simple de equilibrio general

En este tema vamos a realizar varios ejercicios en relación a la versión más simple del modelo de equilibrio general dinámico que se usa habitualmente en macroeconomía para estudiar una multitud de cuestiones.

En primer lugar, vamos a estudiar la versión más simple posible, considerando únicamente la existencia de consumidores y empresas. Dada esta estructura, podemos calcular el equilibrio resultante considerando un entorno de economía de mercado (solución competitiva) o bien como una economía centralizada (solución de planificación). A partir de esta estructura simple podemos ir introduciendo una pléyade de nuevos elementos que aumenten progresivamente la complejidad de este marco teórico y permitan estudiar una multitud de cuestiones macroeconómicas.

En segundo lugar, vamos a realizar un ejercicio en el cual junto a los consumidores y empresas, también consideramos el papel del gobierno, el cual fija un impuesto cuyo importe devuelve a la economía vía transferencias. Este ejercicio nos permite, de nuevo, analizar la efectividad de la política fiscal, así como los efectos distorsionadores, que sobre las decisiones de los individuos, tienen los impuestos.

EJERCICIO 6.1: Obtenga la solución de equilibrio general en el caso de una economía descentralizada (economía de mercado) y en el caso de una economía de planificación centralizada, dadas las siguientes especificaciones, siendo $L_t = 1$:

Preferencias:

$$U(C_t) = \ln C_t$$

Tecnología:

$$Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

Ecuación de acumulación del capital:

$$K_{t+1} = K_t + I_t$$

SOLUCIÓN:

Tal y como podemos observar, la función de utilidad del consumidor únicamente depende del consumo, no dependiendo del ocio, ya que suponemos que la oferta de trabajo es fija y, por tanto, el individuo no toma decisiones de trabajo-ocio. Esto significa que la función de producción agregada de la economía la podemos reescribir como:

$$Y_t = K_t^\alpha$$

Por otra parte la ecuación de acumulación de capital nos dice que la tasa de depreciación física del capital es cero, por lo que el capital mañana será igual al de hoy más la inversión que realicemos hoy, esto es, la inversión bruta coincide con la inversión neta.

La restricción presupuestaria de nuestra economía depende del contexto en el cual se determinen las relaciones entre los diferentes agentes. Podemos considerar dos contextos alternativos: economía de mercado o economía centralizada. En el caso de una economía de mercado, la restricción presupuestaria la escribimos como:

$$C_t + I_t = R_t K_t + W_t L_t$$

donde los recursos disponibles vienen dados por la retribución a los factores productivos. En el caso de una economía planificada no existen precios ya que no son necesarios, por lo que la restricción presupuestaria sería:

$$C_t + I_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

Por tanto, el problema de los consumidores a resolver en el caso de una economía de mercado sería:

$$\max_{(C_t, K_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log C_t - \lambda_t (C_t + K_{t+1} - K_t - W_t - R_t K_t)$$

Las condiciones de primer orden de este problema serían:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = \frac{\gamma}{C_t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \beta^t \lambda_t (1 + R_t) - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_t + K_{t+1} - K_t - W_t - R_t K_t = 0$$

Combinando la primera condición de primer orden con la segunda obtenemos la condición que iguala la ratio marginal del consumo con el de la inversión, y que podemos escribirla como una ecuación en diferencias que nos indica la senda temporal del consumo:

$$C_t = \beta [1 + R_t] C_{t-1}$$

A partir de la restricción presupuestaria obtenemos otra ecuación en diferencias que nos indica la senda temporal del stock de capital, tal que:

$$K_{t+1} = W_t + (1 + R_t) K_t - C_t$$

A continuación, resolvemos el problema de la empresa, a partir del cual vamos a determinar el precio de los factores productivos. El problema de maximización de beneficios sería:

$$\max \Pi_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - R_t K_t - W_t L_t$$

Calculando las condiciones de primer orden obtenemos el precio de equilibrio de los factores productivos:

$$R_t = \alpha K_t^{\alpha-1}$$

$$W_t = (1 - \alpha) K_t^\alpha$$

Sustituyendo en las ecuaciones diferenciales del consumo y del stock de capital obtenidas anteriormente, llegamos a las dos ecuaciones que determinan el equilibrio de la economía:

$$C_t = \beta [1 + \alpha K_t^{\alpha-1}] C_{t-1}$$

$$K_{t+1} = (1 - \alpha) K_t^\alpha + (1 + \alpha K_t^{\alpha-1}) K_t - C_t = K_t^\alpha + K_t - C_t$$

Por su parte, el problema a resolver en el caso de una economía planificada sería:

$$\max_{(C_t, K_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log C_t - \lambda_t (C_t + K_{t+1} - K_t - K_t^\alpha)$$

Las condiciones de primer orden de este problema serían:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = \frac{\gamma}{C_t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \beta^t \lambda_t (1 + \alpha K_t^{\alpha-1}) - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_t + K_{t+1} - K_t - K_t^\alpha = 0$$

Combinando la primera condición de primer orden con la segunda obtenemos la condición que iguala la ratio marginal del consumo con el de la inversión, y que podemos escribirla como una ecuación en diferencias que nos indica la senda temporal del consumo:

$$C_t = \beta [1 + \alpha K_t^{\alpha-1}] C_{t-1}$$

A partir de la restricción presupuestaria obtenemos otra ecuación en diferencias que nos indica la senda temporal del stock de capital, tal que:

$$K_{t+1} = K_t + K_t^\alpha - C_t$$

Tal y como podemos comprobar, las dos ecuaciones en diferencias que determinan el equilibrio de la economía son exactamente las mismas en un entorno competitivo y en un entorno de planificación centralizada.

EJERCICIO 6.2: Obtenga la solución de equilibrio general en el caso de una economía descentralizada (economía de mercado) dadas las siguientes especificaciones:

Preferencias:

$$U(C_t, O_t) = C_t^\gamma (1 - L_t)^{1-\gamma} \quad (1)$$

Restricción presupuestaria:

$$C_t + K_{t+1} - K_t = (1 - \tau^l)W_t L_t + (R_t - \delta)K_t + T_t \quad (2)$$

Tecnología:

$$Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (3)$$

Gobierno:

$$\tau^l W_t L_t = G_t \quad (4)$$

SOLUCIÓN:

En este caso introducimos la existencia de un impuesto sobre las rentas del trabajo, lo que va a provocar efectos distorsionadores sobre la economía. Por tanto vamos a comprobar como el resultado en el caso de una economía de mercado (economía descentralizada) es diferente al que se obtendría en una economía

de planificación centralizada. En primer lugar, vamos a calcular el equilibrio competitivo de esta economía, suponiendo que cada agente toma sus propias decisiones. Dicho equilibrio vendrá dado por aquella situación en que son compatibles las decisiones de los consumidores con las decisiones de las empresas. El problema para los consumidores sería el siguiente:

$$\max_{(C_t, I_t, O_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [C_t^\gamma (1 - L_t)^{1-\gamma}]$$

sujeito a la restricción presupuestaria:

$$C_t + K_{t+1} - K_t = (1 - \tau^l)W_t L_t + (R_t - \delta)K_t + T_t$$

Si construimos el lagrangiano de este problema tendríamos:

$$\max_{(C_t, K_t, O_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(-\lambda_t \begin{bmatrix} C_t^\gamma (1 - L_t)^{1-\gamma} \\ C_t + K_{t+1} - K_t - (1 - \tau^l)W_t L_t \\ -(R_t - \delta)K_t - T_t \end{bmatrix} \right)$$

Las condiciones de primer orden de este problema serían:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = \gamma C_t^{\gamma-1} (1 - L_t)^{1-\gamma} - \lambda_t = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = (1 - \gamma) C_t^\gamma (1 - L_t)^{-\gamma} + \lambda_t (1 - \tau^l) W_t = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \beta^t \lambda_t (R_t + 1 - \delta) - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_t + K_{t+1} - K_t - (R_t - \delta)K_t - (1 - \tau^l)W_t L_t + T_t = 0 \quad (8)$$

Sustituyendo la condición de primer orden (5) en la condición de primer orden (2), obtenemos la condición que iguala la ratio de sustitución marginal entre consumo y ocio al coste de oportunidad de una unidad adicional de ocio:

$$\frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{C_t}{N_t \bar{H} - L_t} = (1 - \tau^l) W_t$$

Sustituyendo la condición de primer orden (5) en la condición de primer orden (7), obtenemos la condición que iguala la ratio marginal del consumo con el de la inversión:

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [R_t + 1 - \delta]$$

A continuación, resolvemos el problema para las empresas. Las empresas maximizan su función de beneficios, definida como el ingreso total (que es igual a la producción dado que el nivel de precios de los bienes lo normalizamos a 1) menos el coste total, compuesto por los costes laborales y los costes del capital. Del problema de maximización de la empresa sabemos que R y W son iguales a sus productos marginales (porque estamos en un entorno competitivo):

$$R_t = \alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}$$

$$W_t = (1 - \alpha) K_t^\alpha L_t^{-\alpha}$$

Sustituyendo el precio de los factores productivos en las soluciones anteriores obtenemos:

$$\frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{C_t}{N_t \bar{H} - L_t} = (1 - \tau^l)(1 - \alpha) K_t^\alpha L_t^{-\alpha}$$

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [\alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta]$$

Por otra parte, sustituyendo el precio relativo de los factores productivos en la restricción presupuestaria del individuo obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = C_t + K_{t+1} - K_t - (R_t - \delta)K_t - (1 - \tau^l)W_t L_t + T_t = 0$$

$$C_t + K_{t+1} - K_t - (\alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - \delta)K_t - (1 - \tau^l)(1 - \alpha) K_t^\alpha L_t^{-\alpha} L_t + T_t = 0$$

$$C_t + K_{t+1} - K_t - \alpha K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} + \delta K_t - K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} + (1 - \tau^l) \alpha K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} + T_t = 0$$

$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t - (1 - \tau^l) K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} + T_t = 0$$

La solución a nuestro modelo nos indica que el equilibrio competitivo de la economía, vendría determinado por las siguientes expresiones:

$$C_t = \beta [\alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta] C_{t-1}$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + (1 - \tau^l)K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - C_t + T_t$$

más una ecuación estática que nos relaciona la oferta de trabajo con el salario real:

$$\frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{C_t}{N_t \bar{H} - L_t} = (1 - \tau^l)(1 - \alpha)K_t^\alpha L_t^{-\alpha}$$

Parte III

Crecimiento Económico

7

Introducción al crecimiento económico

En este tema vamos a realizar algunos ejercicios en relación al fenómeno del crecimiento económico utilizando un marco teórico muy simplificado antes de volver al modelo de equilibrio general para analizar este tipo de cuestiones. En concreto, vamos a analizar diferentes cuestiones utilizando el modelo de Solow-Swan, en el cual la tasa de ahorro es exógena.

Aunque se trata de un modelo muy simple, donde únicamente especificamos la función de producción agregada de la economía y la ecuación de acumulación de capital, constituye un instrumento teórico muy utilizado para analizar una gran variedad de cuestiones referentes al crecimiento económico. Su popularidad se debe a su simplicidad teórica y a la posibilidad de estudiar los efectos sobre el crecimiento económico de una gran variedad de factores, así como las respuestas que arroja sobre las diferencias que se observan tanto en términos del nivel de renta per cápita entre países, como en términos de las diferencias en sus tasas de crecimiento. En este contexto, el supuesto de exogeneidad en la tasa de ahorro (y, por tanto, en el consumo), no afecta en exceso a la capacidad explicativa del modelo, sino más bien al contrario, ya que permite apreciar de un modo claro y sencillo los efectos de distintas perturbaciones sobre el crecimiento económico.

EJERCICIO 7.1: Suponga que la función de producción de una economía es del tipo Cobb-Douglas:

$$Y_t = AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

y donde la ecuación de acumulación de capital viene dada por:

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t$$

donde δ es la tasa de depreciación física del capital y suponiendo que la tasa de ahorro, s , es exógena.

a) Determine la ecuación de acumulación de capital per cápita, suponiendo que la tasa de crecimiento de la población, n , es positiva.

b) Determine cuál es el stock de capital per cápita de estado estacionario, la producción per cápita en estado estacionario y el consumo per cápita en estado estacionario.

SOLUCIÓN:

a) En primer lugar, vamos a reescribir la función de producción en términos per cápita (o por trabajador):

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} = \frac{AK_t^\alpha L_t^1 L_t^{-\alpha}}{L_t} = AK_t^\alpha L_t^{-\alpha} = A \frac{K_t^\alpha}{L_t^\alpha} = A \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^\alpha$$

por lo que la función de producción intensiva (en términos per cápita) quedaría:

$$y_t = Ak_t^\alpha$$

donde definimos:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t}$$

$$k_t = \frac{K_t}{L_t}$$

Para construir la ecuación de acumulación de capital, partimos de la definición de tasa de crecimiento del stock de capital per cápita, que sería igual a la tasa de crecimiento del stock de capital menos la tasa de crecimiento de la población:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \quad (1)$$

Dado que la derivada respecto al tiempo del stock de capital es igual a lo que se ahorra menos lo que se pierde por depreciación, resulta que:

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t \quad (2)$$

Sustituyendo la expresión (2) en la (1) obtenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{sY_t - \delta K_t}{K_t} - n$$

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{sY_t}{K_t} - \delta - n$$

Definiendo todas las variables en términos per cápita (multiplicando y dividiendo por la población), obtenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{sY_t/L_t}{K_t/L_t} - \delta - n$$

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{sy_t}{k_t} - \delta - n$$

Y operando llegamos a la ecuación de acumulación de stock de capital per cápita:

$$\dot{k}_t = sy_t - (\delta + n)k_t$$

b) El stock de capital per cápita en estado estacionario lo definimos como aquella situación en la cual el stock de capital per cápita permanece constante:

$$\dot{k}_t = s_t y_t - (\delta + n)k_t = 0$$

lo que implica que

$$s_t f(\bar{k}_t) = (\delta + n)\bar{k}_t$$

Sustituyendo nuestra función de producción obtenemos que el stock de capital de estado estacionario es:

$$s_t A \bar{k}_t^\alpha = (\delta + n) \bar{k}_t$$

$$\bar{k}_t^{\alpha-1} = \frac{\delta + n}{As}$$

$$\bar{k}_t = \left(\frac{\delta + n}{As} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

El nivel de producción per cápita viene dado por:

$$\bar{y}_t = A \bar{k}_t^\alpha = A \left(\frac{\delta + n}{As} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Finalmente, dado que el consumo per cápita lo definimos como la diferencia entre lo que se produce y lo que se consume,

$$\bar{c}_t = (1 - s) \bar{y}_t = \bar{y}_t - (\delta + n) \bar{k}_t$$

y sustituyendo las expresiones anteriores resulta que el consumo per cápita de estado estacionario sería:

$$\bar{c}_t = A \bar{k}_t^\alpha - (\delta + n) \bar{k}_t = A \left(\frac{\delta + n}{As} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - (\delta + n) \left(\frac{\delta + n}{As} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

EJERCICIO 7.2: Suponga dos países, A y B, que son idénticos en todos los aspectos, salvo en el hecho de que el país A tiene una tasa de ahorro y una tasa de depreciación superior a las del país B. Dada esta información, ¿es posible decir qué país tiene un mayor nivel de renta per cápita en estado estacionario? ¿Y en la regla de oro?

SOLUCIÓN:

Suponiendo la existencia de rendimientos constantes a escala, la ecuación de acumulación de stock de capital per cápita viene dada por:

$$\dot{k}_t = sk_t^\alpha - (\delta + n)k_t$$

Por tanto, el stock de capital per cápita en estado estacionario sería:

$$\bar{k}_t = \left(\frac{\delta + n}{s} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Como podemos observar, el stock de capital en estado estacionario depende positivamente de la tasa de ahorro pero negativamente de la tasa de depreciación. Esto significa que en función de la tasa de ahorro tendríamos que el nivel de renta per cápita del país A sería superior al del país B en estado estacionario. Sin embargo, en función de la tasa de depreciación, en estado estacionario, la renta per cápita del país B sería superior a la del país A. Por tanto, con la información disponible no podemos decir qué país tiene un mayor nivel de renta per cápita debido a que las dos variables ejercen efectos contrapuestos sobre el stock de capital per cápita y, por tanto, sobre el nivel de renta per cápita. Para poder contestar a la pregunta necesitaríamos conocer los valores de los parámetros del modelo (α, δ, s, n) .

Si ambos países están situados en la regla de oro, si que podemos conocer qué país presenta una mayor renta per cápita. En este caso cada país seleccionará una tasa de ahorro tal que su consumo per cápita sea el máximo. La regla de oro viene dada por aquella situación (de estado estacionario) en la cual la pendiente de la función de producción es igual a la pendiente de la función de depreciación, tal que:

$$\alpha k_{oro}^{\alpha-1} = n + \delta$$

En este caso, el valor del stock de capital en la regla de oro viene determinado por la tasa de depreciación. Dada la existencia de rendimientos decrecientes respecto al capital esto supone un menor nivel de capital per cápita. Por tanto, cuanto mayor sea la tasa de

depreciación física del capital de una economía menor será su nivel de capital per cápita. Dado que suponemos que los dos países son iguales en todo excepto en sus tasas de ahorro y depreciación del capital, resulta que:

$$f'(k_{oro}^A) = n + \delta^A > f'(k_{oro}^B) = n + \delta^B$$

Dado que suponemos la existencia de rendimientos decrecientes del capital resulta que $k_{oro}^A < k_{oro}^B$. Por tanto, el nivel de renta per capita del país B es mayor en la regla de oro dado que:

$$y_{oro}^A = f(k_{oro}^A) < y_{oro}^B = f(k_{oro}^B)$$

Por tanto, el país B tendrá un mayor nivel de renta per cápita que el país A .

EJERCICIO 7.3: Suponga dos países, A y B , con la misma función de producción. El país A tiene un nivel de producción per capita inferior al B , pero al mismo tiempo presenta una menor tasa de ahorro con respecto al país B , siendo el consumo per capita el mismo en ambos países. En qué posición se encuentra cada país en relación con la regla de oro (aquel nivel de stock de capita per capita que maximiza el consumo). Qué país se encuentra en una mejor posición en relación con la evolución del nivel de consumo hasta alcanzar la regla de oro. (Recomendación: represente primero la situación para ambos países en función del consumo y del stock de capital per capita).

SOLUCIÓN:

Si ambos países tienen la misma función de producción, y el mismo nivel de consumo per capita, al tiempo que presentan tasas de ahorro y niveles de producción diferentes, la única situación posible es que ambos países se encuentren uno de ellos por debajo del stock de

capital oro y el otro por encima del stock de capital oro. En concreto, el país con menor tasa de ahorro se encontrará en un punto por debajo del stock de capital oro, es decir el país *A*, mientras que el país *B* presenta una situación con un stock de capital superior al stock de capital oro. Esta es la única situación posible si ambos presentan el mismo nivel de consumo per capita. En términos gráficos, la situación de ambos países en relación al stock de capital oro es la siguiente:

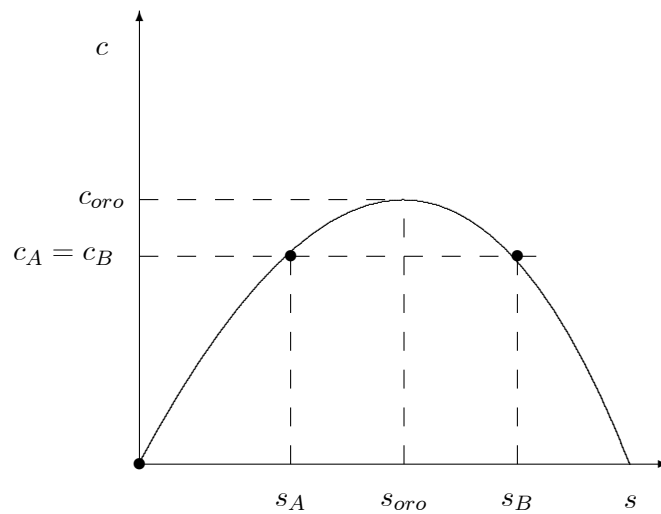


Figura 7.1: La regla de oro

En cuanto a la segunda cuestión, el país *B* se encuentra en una menor posición para alcanzar el capital oro, puesto que únicamente tiene que disminuir su tasa de ahorro y disminuir su stock de capital, por lo que aumentaría su nivel de consumo per capita. Por el contrario el país *A* tendría que aumentar su tasa de ahorro, lo que provocaría en el corto plazo una disminución de su nivel de consumo per capita. Por tanto, el país *B* podría alcanzar el stock de capital oro rápidamente sin sacrificios en términos de su nivel de consumo, mientras que el país *A* estaría en peor situación, ya que tendría que sacrificar su nivel de consumo per capital para poder alcanzar el estado estacionario oro.

EJERCICIO 7.4: Suponga que la función de producción de una economía es del tipo Cobb-Douglas:

$$Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

y donde la tasa de crecimiento de la población (n) es del 2%, la tasa de depreciación física del capital (δ) es del 6%, la participación de las rentas de capital en las rentas totales (α) es de 0,3, y la tasa de ahorro (s) es del 20%.

a) Determine cuál es el stock de capital per cápita de estado estacionario, la producción per cápita en estado estacionario y el consumo per cápita en estado estacionario.

b) Determine cuál debería ser el stock de capital per cápita oro de esta economía. Cuál es la tasa de ahorro oro y el consumo per cápita oro.

c) Suponga que la tasa de crecimiento de la población aumenta hasta el 5%. Qué efectos tiene sobre los valores calculados en los apartados (a) y (b).

d) Suponga que la tasa de ahorro de la economía aumenta hasta el 30%. Qué efectos tiene sobre los valores calculados en los apartados (a) y (b).

e) Suponga que la participación de las rentas de capital en las rentas totales aumenta hasta 0,4. Qué efectos tiene sobre los valores calculados en los apartados (a) y (b). Qué relación tiene la participación de las rentas del capital en las rentas totales y la tasa de ahorro oro.

SOLUCIÓN:

a) La ecuación de acumulación de stock de capital per cápita, calculada anteriormente, es la siguiente:

$$\dot{k}_t = sy_t - (\delta + n)k_t$$

El stock de capital per cápita en estado estacionario lo definimos como aquella situación en la cual el stock de capital per cápita

permanece constante:

$$\dot{k}_t = s_t y_t - (\delta + n)k_t = 0$$

$$s_t f(\bar{k}_t) = (\delta + n)\bar{k}_t$$

Sustituyendo nuestra función de producción obtenemos que:

$$s_t \bar{k}_t^\alpha = (\delta + n)\bar{k}_t$$

$$\bar{k}_t^{\alpha-1} = \frac{\delta + n}{s}$$

$$\bar{k}_t = \left(\frac{\delta + n}{s} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Dado los valores de los parámetros para esta economía tendríamos:

$$\bar{k}_t = \left(\frac{0,06 + 0,02}{0,2} \right)^{\frac{1}{0,3-1}} = 3,7024$$

Por tanto el nivel de producción per cápita sería:

$$\bar{y}_t = \bar{k}_t^\alpha = 2,7024^{0,3} = 1,48$$

mientras que el consumo per cápita sería:

$$\bar{c}_t = \bar{y}_t - s\bar{y}_t = (1 - s)\bar{y}_t = (1 - 0,2) \times 1,48 = 1,185$$

b) Vamos a determinar el stock de capital de la regla de oro. La regla de oro nos dice que para que la economía alcance el nivel de consumo máximo entonces el stock de capital tiene que ser tal que la pendiente de la función de producción coincida con la pendiente de la función de depreciación:

$$f_k(k_{oro}) = n + \delta$$

Dada la función de producción que estamos utilizando esta regla sería:

$$\alpha k_{oro}^{\alpha-1} = n + \delta$$

Sustituyendo los valores tendríamos:

$$0,3k_{oro}^{-0,7} = 0,08$$

$$k_{oro} = 6,6076$$

Para alcanzar este nivel de stock de capital per cápita la tasa de ahorro que debería tener la economía (tasa de ahorro oro) debería ser la siguiente:

$$k_{oro} = \left(\frac{\delta + n}{s_{oro}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Por tanto, la tasa de ahorro oro sería del 30%:

$$s_{oro} = \frac{\bar{k}_{oro}^{\alpha-1}}{\delta + n} = \frac{6,6076^{-0,7}}{0,08} = 0,3$$

El nivel de consumo en la regla de oro sería por tanto:

$$c_{oro} = (1 - s_{oro})y_{oro} = 0,7 \times 6,6076^{0,3} = 1,2334$$

Por tanto, la economía estaría situada a la izquierda de la regla de oro, con una tasa de ahorro inferior, lo que significa que su nivel de consumo no es el máximo que podría alcanzar.

c) Vamos a estudiar ahora los efectos de una alteración en la tasa de crecimiento de la economía y cómo esta variación afecta a los resultados anteriores. En concreto, vamos a suponer que la tasa de crecimiento de la población aumenta hasta el 5%: En este caso, el estado estacionario vendría definido por los siguientes valores:

$$\bar{k}_t = \left(\frac{0,06 + 0,05}{0,2} \right)^{\frac{1}{0,3-1}} = 2,3491$$

$$\bar{y}_t = \bar{k}_t^\alpha = 2,3491^{0,3} = 1,2920$$

$$\bar{c}_t = \bar{y}_t - s\bar{y}_t = (1 - s)\bar{y}_t = (1 - 0,2) \times 1,2920 = 1,0336$$

Obtenemos que el aumento de la tasa de crecimiento de la población provoca una disminución en el stock de capital per cápita de equilibrio, en el nivel de producción per cápita y en el nivel de consumo per cápita. En efecto, la tasa de crecimiento de la población

es un factor de depreciación, por lo que cuanto mayor sea su valor menores serán las variables de la economía definidas en términos per cápita.

Por lo que respecta a la regla de oro, tendríamos que el stock de capital oro sería ahora:

$$k_{oro} = \left(\frac{0,11}{0,3} \right)^{1/-0,7} = 4,1925$$

Sin embargo, vemos que la tasa de ahorro oro sigue siendo la misma:

$$s_{oro} = \frac{\bar{k}_{oro}^{\alpha-1}}{\delta + n} = \frac{4,1925^{-0,7}}{0,11} = 0,3$$

Esto significa que la tasa de ahorro oro (la variable clave que determina la regla de oro) es independiente de la tasa de crecimiento de la población. Cuanto mayor sea la tasa de crecimiento de la población, menor va a ser el stock de capital per cápita en la regla de oro (al igual que el nivel de producción per cápita y el consumo per cápita), pero la tasa de ahorro no se ve alterada por variaciones en la tasa de crecimiento de la población.

d) Por último vamos a ver cuál es el elemento que determina la tasa de ahorro oro de una economía. Para ello vamos a recalcular los valores anteriores pero suponiendo que la participación de las rentas del capital en la renta total aumenta hasta el 40% (y por tanto las rentas del trabajo disminuyen hasta representar el 60% de la renta total). En este caso tendríamos:

$$\bar{k}_t = \left(\frac{0,06 + 0,05}{0,2} \right)^{\frac{1}{0,4-1}} = 2,7085$$

$$\bar{y}_t = \bar{k}_t^\alpha = 2,7085^{0,4} = 1,4897$$

$$\bar{c}_t = \bar{y}_t - s\bar{y}_t = (1 - s)\bar{y}_t = (1 - 0,2) \times 1,4897 = 1,1917$$

El aumento en la participación de las rentas del capital en la renta total tiene un efecto positivo sobre la producción per cápita y sobre el consumo per cápita. Tal y como podemos comprobar, el aumento en el parámetro α provoca un aumento en el stock de capital per cápita de la economía, lo que a su vez provoca un aumento en el

nivel de producción per cápita y, dado una tasa de ahorro exógena, aumenta también el consumo per cápita.

En términos de la regla de oro tendríamos:

$$k_{oro} = \left(\frac{0,08}{0,2} \right)^{1/-0,6} = 8,5990$$

es decir, se produciría un aumento en el stock de capital oro. Por otra parte, en este caso la tasa de ahorro oro sería:

$$s_{oro} = \frac{\bar{k}_{oro}^{\alpha-1}}{\delta + n} = \frac{8,5990^{-0,6}}{0,08} = 0,4$$

es decir, la tasa de ahorro oro pasaría del 30% al 40%. Si observamos detenidamente los resultados comprobamos que la tasa de ahorro oro coincide con la participación de las rentas del capital en las rentas totales. En efecto, en el caso anterior el parámetro α era de 0,3, valor que coincidía con la tasa de ahorro óptima. En este nuevo caso el valor del parámetro es 0,4, valor que también coincide con la tasa de ahorro oro en este nuevo caso. Si repetimos este análisis para cualquier valor, nos vamos a dar cuenta que siempre la tasa de ahorro oro coincide con el valor del parámetro α . Y es que este parámetro, es la productividad marginal del capital que es el elemento clave a la hora de determinar el ahorro óptimo. Por tanto, simplemente conciendo la participación de las rentas del capital en las rentas totales ya sabemos cual es la tasa de ahorro oro de una economía.

EJERCICIO 7.5: Suponga una economía en la que existen $i = 1, 2, \dots, M$ empresas idénticas, cada una de ellas con la siguiente función de producción:

$$Y_i = AK_i^\alpha L_i^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Notese que A es la misma para todas las empresas y viene dada para toda la economía en su conjunto como una función del ratio agregado capital/trabajo:

$$A = B \left(\frac{K}{L} \right)^\gamma, \quad \gamma > 0$$

donde $B > 0$ es una constante.

La producción agregada es la suma de las producciones de cada una de las empresas de forma que:

$$Y = \sum_{i=1}^M Y_i$$

en términos del capital por trabajador (k_i) y A .

a) Obtenga la función de producción per cápita para cada empresa.

b) Argumente porqué todas las empresas elegirán el mismo ratio capital/trabajo (k). Muestre que este resultado implica que la función de producción del output per capita de la economía en su conjunto es:

$$y = Bk^{\alpha+\gamma}$$

SOLUCIÓN:

a) Dividiendo la función de producción por el factor productivo trabajo obtenemos:

$$\frac{Y_i}{L_i} = A \frac{K_i^\alpha L_i^{1-\alpha}}{L_i}$$

Operando obtenemos:

$$\frac{Y_i}{L_i} = AK_i^\alpha \frac{1}{L_i^\alpha}$$

por lo que el nivel de producción per capita de cada una de las M empresas de la economía quedaría:

$$y_i = Ak_i^\alpha$$

donde $k_i = K_i/L_i$.

b) El objetivo de las empresas es la maximización de beneficios, por lo que si todas tienen la misma función de producción, elegirán el mismo nivel de de ratio capital/trabajo. De hecho las empresas elegirán una cantidad de cada uno de los factores productivos en el que su productividad marginal sea igual al precio de dicho factor productivo. Dado que el precio de los factores productivos es el mismo para todas las empresas y dado que la tecnología es la misma, la productividad marginal evoluciona de la misma forma, por lo que todas las empresas elegirán la misma cantidad de factores productivos.

Para obtener la función de producción del output per capital de la economía en su conjunto, partimos de la función de producción obtenida anteriormente para cada empresa, por lo que agregando para las M empresas que existen en la economía obtenemos:

$$\sum_{i=1}^M y_i = \sum_{i=1}^M A k_i^\alpha = A \sum_{i=1}^M k_i^\alpha = A k^\alpha$$

dado que la tecnología es la misma para todas las empresas. Por otra parte, tenemos que:

$$A = B k^\gamma$$

por lo que la función de producción de la economía en su conjunto sería:

$$y = A k^\alpha = B k^\gamma k^\alpha = B k^{\alpha+\gamma}$$

tal y como se dice en el enunciado del problema.

EJERCICIO 7.6: Vamos a considerar la tierra como un factor productivo más. Suponga que la función de producción es:

$$Y = X^\alpha L^{1-\alpha}$$

donde $0 < \alpha < 1$, y X es un factor compuesto por los factores tierra, D , y capital, K , tal que:

$$X = D^\beta K^{1-\beta}$$

donde $0 < \beta < 1$. Lógicamente el capital se puede producir mientras que el factor tierra no se puede aumentar, es decir, permanece fijo en el tiempo. El proceso de acumulación del trabajo y del capital es el estándar, es decir:

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

donde s , n y δ , son como en el ejercicio anterior, constantes positivas.

a) Exprese la función de producción del output por trabajador (y) en términos de la tierra por trabajador (d) y el capital por trabajador (k).

b) Escriba la ecuación para la variación en el capital por trabajador (\dot{k}).

c) Muestre que este modelo implica que el nivel de producción por trabajador tiende a cero en el tiempo. Porqué se obtiene este resultado.

d) Sugiera alguna modificación en la función de producción que mantenga el factor productivo tierra pero que impida que se obtenga el resultado anterior, mostrando dicho resultado.

SOLUCIÓN:

a) Para obtener la función de producción por trabajador, introducimos el factor compuesto de tierra y capital en la función de producción general:

$$Y = (D^\beta K^{1-\beta})^\alpha L^{1-\alpha}$$

Dividiendo la anterior expresión por el factor productivo trabajo obtenemos:

$$\frac{Y}{L} = \frac{(D^\beta K^{1-\beta})^\alpha L^{1-\alpha}}{L}$$

por lo que:

$$y = \frac{D^{\beta\alpha} K^{(1-\beta)\alpha}}{L^\alpha}$$

$$y = \frac{D^{\beta\alpha} K^{(1-\beta)\alpha}}{(L^\beta L^{1-\beta})^\alpha}$$

Expresando $d = D/L$ y $k = K/L$, obtenemos:

$$y = d^{\alpha\beta} k^{\alpha(1-\beta)}$$

b) Partiendo de la ecuación de acumulación de capital:

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

Transformando la expresión anterior en términos per capita y sustituyendo por la expresión de la producción per capita obtenida anteriormente, resulta:

$$\dot{k} = sd^{\alpha\beta} k^{\alpha(1-\beta)} - (n + \delta)k$$

c) Dado que $sf(k)$ es una función de d (dado que $f(k)$ es una función de d) y que d esta disminuyendo a lo largo del tiempo debido al crecimiento de la producción, la función $sf(k)$ y por tanto $f(k)$ está continuamente desplazándose hacia abajo, o más exactamente, rotando sobre el eje, tal y como se muestra en la figura. El punto de corte con la función $(n + \delta)k$ se está moviendo con el paso del tiempo hasta cero. Por tanto, partiendo de un determinado estado estacionario, éste se está moviendo continuamente hacia $k = 0$ y por tanto hacia un punto en el que el nivel de producción tiende a cero. En efecto, si tomamos la derivada de la tierra con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{\partial d}{\partial t} = \frac{\dot{D}}{D} - n = -n < 0$$

y dado que D es una constante el primer término de la derecha es cero, por lo que sufre una depreciación equivalente al crecimiento de

la población, por lo que tiende a cero. La clave de este resultado está en que la tierra por trabajador disminuye conforme se incrementa la población. Dado que la tierra por trabajador es un factor multiplicativo en la función de producción, conforme se aproxima a cero, también el nivel de producción por trabajador tiende a cero. La representación gráfica del modelo sería:

En efecto, si calculamos el stock de capital en estado estacionario a partir de la ecuación de acumulación de capital:

$$sd^{\alpha\beta}k^{\alpha(1-\beta)} = (n + \delta)k$$

Despejando obtenemos:

$$k^* = \left[\frac{sd^{\alpha\beta}}{n + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha(1-\beta)}}$$

y dado que d disminuye con el crecimiento de la población, también disminuye el stock de capital per capita de estado estacionario, es decir, en realidad no existe estado estacionario porque el stock de capital per capita va disminuyendo conforme aumenta la población hasta que la economía desaparezca.

d) El resultado que hemos obtenido anteriormente, que la economía desaparece, es consecuencia de la forma en que hemos introducido el factor productivo tierra en la función de producción. Por tanto, si no queremos obtener el anterior resultado (que por el momento y observando lo que sucede en el mundo parece que no es muy realista). Una posible reespecificación del modelo sería definir el factor compuesto X como:

$$X = D + K$$

En este caso la función de producción en términos per capita sería:

$$y = (d + k)^{\alpha}$$

Es fácil comprobar que en este caso aunque la cantidad de tierra per capita tiende a cero con el crecimiento de la población, el nivel de producción per capita no tiende a cero.

8

El modelo de Ramsey

EJERCICIO 8.1: Resuelva en modelo de Ramsey pero introduciendo el progreso tecnológico. En este caso la economía vendría determinada por las siguientes ecuaciones:

- Problema de los consumidores:

$$V = \int_0^{\infty} \frac{c_t^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon} e^{nt} e^{-\theta t} dt \quad (1)$$

- Restricción presupuestaria:

$$\dot{b}_t = w_t + R_t b_t - c_t - n b_t \quad (2)$$

- Función de producción:

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t) \quad (3)$$

• Progreso tecnológico:

$$g_A > 0$$

Determine el equilibrio del modelo en términos de las variables por unidad eficiente de trabajo. Analice los efectos a corto, medio y largo plazo de una aceleración en la tasa de progreso tecnológico, tanto sobre las variables por unidad eficiente de trabajo como en términos per cápita.

SOLUCIÓN:

En primer lugar, resolvemos el problema del consumidor, con las variables definidas en términos per cápita. Para ello, construimos el hamiltoniano de nuestro problema:

$$H = \frac{c_t^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon} e^{(n-\theta)t} + \lambda_t [w_t + R_t b_t - c_t - n b_t]$$

Las condiciones de primer orden, aplicando el Principio del Máximo de Pontryagin son:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = c_t^{-\varepsilon} e^{(n-\theta)t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial b} = -\dot{\lambda}_t = (R_t - n)\lambda_t$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{b}_t = w_t + R_t b_t - c_t - n b_t$$

De la primera condición de primer orden obtenemos:

$$c_t^{-\varepsilon} e^{(n-\theta)t} = \lambda_t$$

De la segunda condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -(R_t - n)$$

Sólo nos resta calcular la derivada respecto al tiempo del parámetro de Lagrange. Tomando logaritmos tenemos:

$$-\varepsilon \ln c_t + (n - \theta)t = \ln \lambda_t$$

Derivando respecto al tiempo:

$$-\varepsilon \frac{\dot{c}_t}{c_t} + (n - \theta) = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

Sustituyendo en la segunda condición de primer orden, resulta:

$$-\varepsilon \frac{\dot{c}_t}{c_t} + (n - \theta) = -(R_t - n)$$

Despejando la derivada respecto al tiempo del consumo per cápita

$$-\varepsilon \frac{\dot{c}_t}{c_t} + (n - \theta) = -(R_t - n)$$

$$-\varepsilon \frac{\dot{c}_t}{c_t} - \theta = -R_t$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{R_t - \theta}{\varepsilon}$$

$$\dot{c}_t = \frac{R_t - \theta}{\varepsilon} c_t$$

Una vez hemos obtenido la senda óptima del consumo en términos per cápita, a continuación redefinimos esta senda óptima en términos de unidades efectivas de trabajo, esto es, multiplicaríamos y dividiríamos por el nivel de tecnología asociado al factor productivo trabajo. Para ello definimos la tasa de crecimiento del consumo por unidad eficiente de trabajo como:

$$\frac{\dot{\hat{c}}_t}{\hat{c}_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} - \frac{\dot{A}_t}{A_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} - g_A$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}_t}{\hat{c}_t} = \frac{R_t - \theta - \varepsilon g_A}{\varepsilon}$$

donde \hat{c} es el nivel de consumo por unidad eficiente de trabajo:

$$\hat{c}_t = \frac{c_t}{A_t} = \frac{C_t}{A_t L_t}$$

En segundo lugar, resolvemos el problema para las empresas. Las empresas maximizan beneficios:

$$\max \Pi_t = Y_t - W_t L_t - (R_t + \delta) K_t$$

donde la función de producción viene dada por la siguiente expresión:

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t)$$

Considerando las variables en términos de unidades eficientes de trabajo, tendríamos:

$$\max \hat{\pi}_t = \hat{y}_t - w_t - (R_t + \delta) \hat{k}_t$$

siendo la función de producción intensiva en capital:

$$\hat{y}_t = f(\hat{k}_t)$$

donde el símbolo $\hat{}$ sobre una variable indica que viene dada en unidades efectivas de trabajo.

Ahora las empresas maximizarían respecto al stock de capital per cápita:

$$\frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \hat{k}} = f_{\hat{k}}(\hat{k}_t) - (R_t + \delta) = 0$$

Por tanto obtenemos:

$$f_{\hat{k}}(\hat{k}_t) = R_t + \delta$$

El salario de equilibrio lo obtendríamos como:

$$w_t = A_t \left[f(\hat{k}_t) - \hat{k}_t f_{\hat{k}}(\hat{k}_t) \right]$$

El equilibrio viene dado por aquella situación en la cual los planes de los consumidores y de las empresas coinciden:

$$b_t = k_t$$

La ecuación dinámica para el consumo por unidad efectiva de trabajo, la obtenemos sustituyendo el tipo de interés en la senda óptima del consumo por unidad efectiva de trabajo:

$$\dot{\hat{c}}_t = \frac{f_{\hat{k}}(\hat{k}_t) - \delta - \theta - \varepsilon g_A}{\varepsilon} \hat{c}_t$$

Por su parte, la ecuación dinámica para el stock de activos financieros per cápita es:

$$\dot{b}_t = w_t + R_t b_t - c_t - n b_t$$

Dado que en equilibrio $b_t = k_t$, tendríamos:

$$\dot{k}_t = w_t + R_t k_t - c_t - n k_t$$

La ecuación dinámica para el stock de capital por unidad efectiva de trabajo sería:

$$\dot{\hat{k}}_t = \hat{w}_t + R_t \hat{k}_t - \hat{c}_t - n \hat{k}_t - g_A \hat{k}_t$$

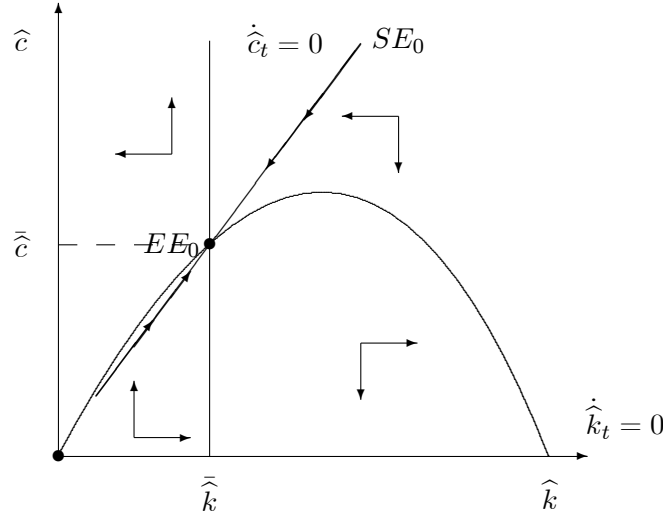
Sustituyendo los valores de equilibrio para el tipo de interés y el salario:

$$\dot{\hat{k}}_t = f(\hat{k}_t) - \hat{k}_t f_{\hat{k}}(\hat{k}_t) + (f_{\hat{k}}(\hat{k}_t) - \delta) \hat{k}_t - \hat{c}_t - n \hat{k}_t - g_A \hat{k}_t$$

$$\dot{\hat{k}}_t = f(\hat{k}_t) - \hat{k}_t f_{\hat{k}}(\hat{k}_t) + f_{\hat{k}}(\hat{k}_t) \hat{k}_t - \hat{c}_t - (n + \delta + g_A) \hat{k}_t$$

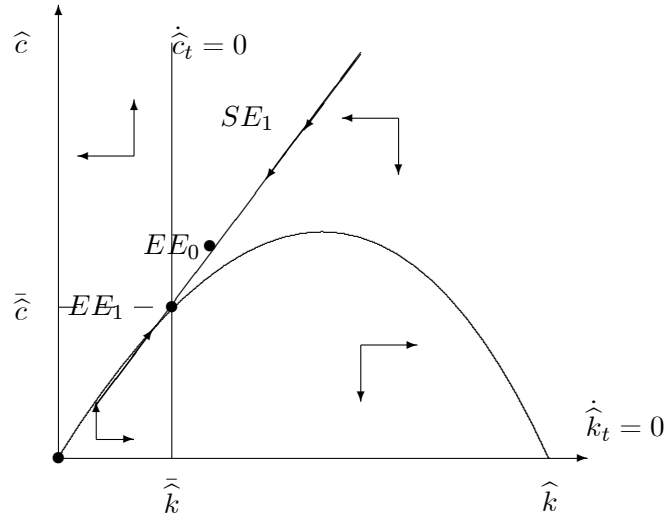
$$\dot{\hat{k}}_t = f(\hat{k}_t) - \hat{c}_t - (n + \delta + g_A) \hat{k}_t$$

La representación gráfica de nuestra economía viene dada por la siguiente figura, siendo similar a la que obtenemos si utilizamos las variables en términos per cápita, sólo que ahora el equilibrio de la economía viene definido en términos de unidades efectivas de trabajo.



Una vez resuelto nuestro modelo en términos de unidades efectivas de trabajo, a continuación vamos a analizar cuáles son los efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en la tasa de crecimiento de la tecnología ahorradora de mano de obra. Para calcular el nuevo estado estacionario y, por tanto, los efectos a largo plazo, tenemos que comprobar si las condiciones de equilibrio dinámicas sufren alguna alteración como consecuencia de esta perturbación. Tal y como podemos comprobar g_A , aparece en la ecuación diferencial del consumo por unidad efectiva de trabajo, por lo que tenemos que calcular donde estaría situada la nueva condición de equilibrio dinámica parcial para el consumo por unidad efectiva de trabajo. Como podemos observar, la perturbación tiene signo negativo, por lo que esta ecuación se haría negativa. Para que vuelva a ser cero, el término positivo (la productividad marginal del stock de capital por unidad efectiva de trabajo) tiene que aumentar. Dado que la función de producción presenta rendimientos constantes a escala, para que aumente la productividad marginal del stock de capital por unidad efectiva de trabajo, el stock de capital por unidad efectiva de trabajo tiene que disminuir. Por tanto, esta condición de equilibrio dinámica se ha desplazado hacia la izquierda.

Respecto a la condición de equilibrio dinámica para el stock de capital por unidad efectiva de trabajo, vemos que también aparece la perturbación con signo negativo. Por tanto, un aumento en la tasa de crecimiento de la tecnología hace que esta ecuación se vuelva negativa. Para que vuelva a ser cero, observamos que el consumo tiene signo negativo, por lo que tendría que disminuir. Por tanto, esta ecuación estaría desplazada hacia abajo respecto a la situación inicial.



A corto plazo, se va a producir una disminución instantánea del consumo por unidad efectiva de trabajo, hasta alcanzar la nueva senda estable. A medio plazo, tanto el consumo por unidad efectiva de trabajo como el stock por unidad efectiva de trabajo van disminuyendo, hasta alcanzar el nuevo estado estacionario. Tal y como hemos podido comprobar, los efectos a largo plazo de una aceleración en la tasa de crecimiento de la tecnología asociada al factor productivo trabajo, provocan una disminución tanto de del nivel de consumo por unidad efectiva de trabajo como del stock de capital por unidad efectiva de trabajo. Este resultado es del todo lógico, ya que la tasa de crecimiento de la tecnología actúa como un factor adicional de descuento a la tasa de depreciación física del capital y de la tasa de crecimiento de la población.

Sin embargo, el efecto sobre el nivel de consumo per cápita y sobre el stock de capital per cápita es el opuesto. En efecto, en estado estacionario, mientras que el consumo por unidad efectiva de trabajo permanece constante, el consumo per cápita aumenta a la misma tasa a lo que lo hace la tecnología. Esto es debido a que:

$$\hat{c}_t = \frac{c_t}{A_t} = \frac{C_t}{A_t L_t}$$

Para que \hat{c}_t sea constante, esto supone que el denominador (el consumo per cápita) tiene que moverse a la misma tasa que el

denominador (la tecnología). Por tanto, un aumento en la tasa de crecimiento de la tecnología, provoca un aumento en la tasa de crecimiento del nivel de consumo per cápita. Lo mismo le sucede al stock de capital per cápita.

EJERCICIO 8.2: Suponga una economía descrita por el modelo de Ramsey, donde existen tres agentes: consumidores, empresas y sector público. La función objetivo de la población de dicha economía es:

$$V = \int_0^{\infty} \ln c_t e^{(n-\theta)t} dt$$

sujeta a:

$$\dot{k}_t = w_t + R_t k_t - (1 + \tau)c_t - n k_t$$

donde c_t es el consumo per cápita, n es la tasa de crecimiento de la población, R el tipo de interés, k_t es el nivel de activos financieros que coincide con el stock de capital de las empresas en equilibrio, θ es la tasa subjetiva de preferencia intertemporal y τ es el tipo impositivo sobre el consumo. Por su parte, las empresas alquilan tanto el capital, que se deprecia a una tasa δ , como el trabajo a los individuos. Todas las empresas tienen la misma tecnología, con una función de producción que presenta rendimientos constantes a escala y con productividad marginal decreciente de cada uno de los factores productivos:

$$Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

donde Y es el nivel de producción total, K es el stock de capital total equivalente al total de activos financieros de la población y L es la población total. Determine las ecuaciones de ajuste del stock de capital per capita y del consumo per capita, y analice cuáles son los efectos a corto,

medio y largo plazo de un aumento en el tipo impositivo sobre el consumo.

SOLUCIÓN:

En primer lugar, resolvemos el problema del consumidor, con las variables definidas en términos per cápita. Para ello, construimos el hamiltoniano:

$$H = \ln c_t e^{(n-\theta)t} + \lambda_t [w_t + R_t k_t - (1 + \tau)c_t - nk_t]$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{1}{c_t} e^{(n-\theta)t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = -\dot{\lambda}_t = (R_t - n)\lambda_t$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{k}_t = w_t + R_t k_t - c_t - nk_t$$

De la primera condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{1}{c_t} e^{(n-\theta)t} = \lambda_t$$

Sólo nos resta calcular la derivada respecto al tiempo del parámetro de Lagrange. Derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$-c_t^{-2} \dot{c}_t e^{(n-\theta)t} + (n - \theta) \frac{1}{c_t} e^{(n-\theta)t} = \dot{\lambda}_t$$

Sustituyendo en la segunda condición de primer orden, resulta:

$$c_t^{-2} \dot{c}_t e^{(n-\theta)t} - (n - \theta) \frac{1}{c_t} e^{(n-\theta)t} = (R_t - n) \frac{1}{c_t} e^{(n-\theta)t}$$

$$\frac{1}{c_t^2} \dot{c}_t - (n - \theta) \frac{1}{c_t} = (R_t - n) \frac{1}{c_t}$$

$$\frac{1}{c_t} \dot{c}_t - (n - \theta) = (R_t - n)$$

$$\frac{1}{c_t} \dot{c}_t + \theta = R_t$$

Despejando la derivada respecto al tiempo del consumo per cápita

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = R_t - \theta$$

$$\dot{c}_t = (R_t - \theta)c_t$$

Por su parte, del problema de maximización de beneficios de las empresas obtenemos:

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = f_k(k_t) - (R_t + \delta) = 0$$

Por tanto, resulta que:

$$f_k(k_t) = \alpha k_t^{\alpha-1} = R_t + \delta$$

El salario de equilibrio lo obtendríamos como:

$$w_t = f(k_t) - k_t f_k(k_t) = k_t^\alpha - k_t \alpha k_t^{\alpha-1} = (1 - \alpha)k_t^\alpha$$

Sustituyendo el precio de los activos financieros en la restricción presupuestaria de los consumidores obtenemos la ecuación dinámica para el stock de capital per cápita:

$$\dot{k}_t = w_t + R_t k_t - (1 + \tau)c_t - n k_t$$

$$\dot{k}_t = (1 - \alpha)k_t^\alpha + (\alpha k_t^{\alpha-1} - \delta)k_t - (1 + \tau)c_t - n k_t$$

$$\dot{k}_t = k_t^\alpha - (1 + \tau)c_t - (n + \delta)k_t$$

Para obtener la ecuación dinámica para el consumo per cápita únicamente tenemos que sustituir el tipo de interés en la senda óptima del consumo:

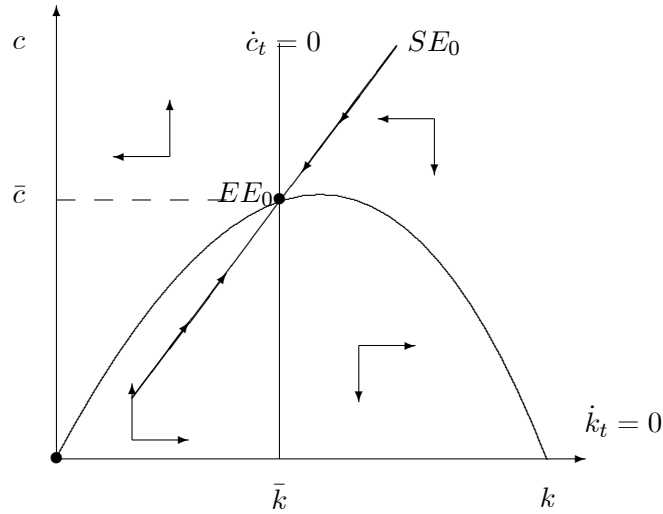
$$\dot{c}_t = (\alpha k_t^{\alpha-1} - \delta - \theta)c_t$$

Por tanto, ya tenemos el sistema de dos ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de nuestra economía, en términos del stock de capital per cápita y del consumo per cápita:

$$\dot{k}_t = k_t^\alpha - (1 + \tau)c_t - (n + \delta)k_t$$

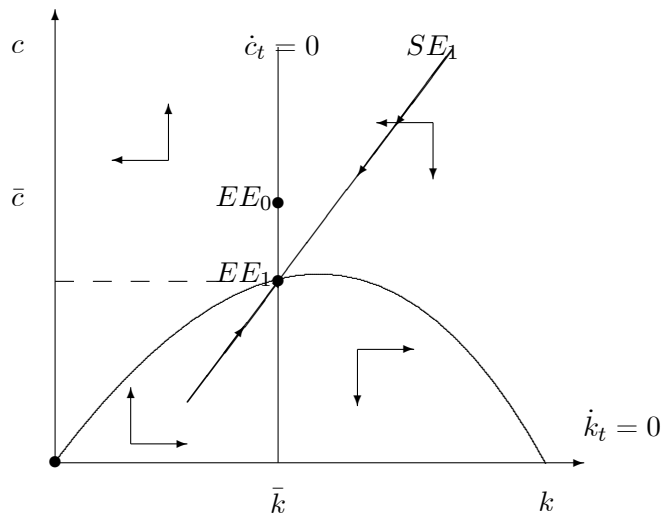
$$\dot{c}_t = (\alpha k_t^{\alpha-1} - \delta - \theta)c_t$$

La representación gráfica de nuestra economía sería la siguiente:

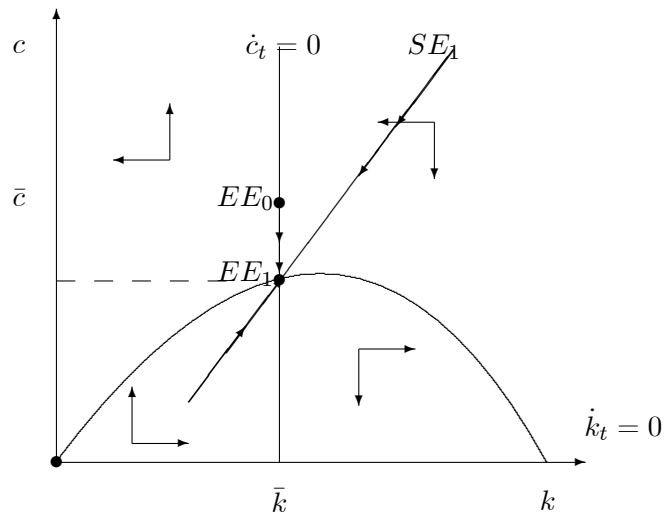


Una vez obtenidas las dos ecuaciones diferenciales, para el consumo y para el stock de capital per cápita, a continuación vamos a analizar cuáles son los efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en el tipo impositivo sobre el consumo. Como podemos comprobar, el impuesto aparece en sólo una de las ecuaciones diferenciales, la correspondiente al stock de capital per cápita. Por tanto, para representar gráficamente el nuevo estado estacionario tenemos que ver cómo se ve afectada la condición de equilibrio dinámica parcial del stock de capital per cápita como consecuencia del aumento en el impuesto sobre el valor añadido. Como podemos observar, el impuesto tiene signo negativo, por lo que un aumento del mismo provoca que la ecuación dinámica para el stock de capital per cápita se vuelva negativa. Para que vuelva a ser cero, algo positivo tiene que aumentar o algo negativo tiene que disminuir. Dado que

el consumo va multiplicando a este tipo impositivo, si el impuesto aumenta el consumo per cápita debería disminuir. Por tanto, la ecuación dinámica para el stock de capital deberíamos representarla hacia abajo de la inicial.



En este caso concreto no existe dinámica, ya que los efectos de corto, medio y largo plazo son exactamente los mismos. Esto está provocado por el hecho de que el estado estacionario viene definido en términos de una variable rígida (el stock de capital per cápita) y una variable flexible (el nivel de consumo per cápita). Sin embargo, la perturbación provoca que cambie el estado estacionario, pero únicamente respecto a la variable flexible. Por tanto, para alcanzar el nuevo estado estacionario únicamente hace falta que se ajuste la variable flexible, lo cual puede hacerse de forma inmediata. Por este motivo, ante el aumento en el impuesto el nivel de consumo per cápita se ajusta de forma instantánea a la baja, hasta que alcanza el nuevo estado estacionario. Esto significa, que el paso del estado estacionario inicial al final es inmediato y, por tanto, no existe dinámica de la economía en este caso.



9

La tecnología AK

EJERCICIO 9.1: El objetivo de esta pregunta es ilustrar el papel fundamental que juega el supuesto sobre el tipo de rendimientos en los modelos de crecimiento. Para ello partimos de un modelo simple, donde suponemos que el ahorro es exógeno. La función de producción para la empresa i es:

$$y_i = A^\alpha k_i^\eta$$

donde $0 < \eta < 1$ y $A = \sum_{i=1}^N k_i / M$, donde y y k son el nivel de producción y de capital per capita y M es el número de empresas. Suponemos que s es la tasa de ahorro (exógena y constante), n es el crecimiento de la población y δ la tasa de depreciación del capital físico. Se pide:

- a) Determine la ecuación diferencial para k cuando todas las empresas son idénticas.
- b) Indique cómo es la tasa de crecimiento de la economía para los siguientes casos:
 - i) Rendimientos decrecientes a escala, $\alpha + \eta < 1$.

ii) Rendimientos constantes: $\alpha + \eta = 1$.

iii) Rendimientos crecientes: $\alpha + \eta > 1$.

c) Indique cuáles son los efectos sobre el crecimiento en el largo plazo de un aumento en la tasa de ahorro en cada caso.

d) Suponga que aviones bombardean el país, destruyendo la mitad del capital productivo instalado. Examine que ocurre en cada uno de los tres casos anteriores sobre: la tasa de crecimiento inmediatamente después del bombardeo, la tasa de crecimiento en el largo plazo y sobre el nivel de renta agregado y per capita, una vez que la economía alcanza el nuevo estado estacionario (digamos en el año 2050) en comparación con el nivel de renta (agregada y per capita) que hubiera alcanzado si no se hubiese producido el ataque. Como son los efectos de dicho ataque en cada caso ¿permanentes o temporales?

e) Suponga que se produce una guerra civil y en lugar de destruir el stock de capital éste permanece intacto y en su lugar muere el 50 por ciento de la población (trabajadores). Cuáles son los efectos a corto y a largo plazo sobre la tasa de crecimiento en cada caso. Cuando la economía alcance de nuevo su estado estacionario (digamos en el 2050), cuál sería el nivel de producción agregado y per capita comparado con la situación que hubiese alcanzado de no haberse producido la guerra civil. Cambiarían los resultados si consideramos un modelo de crecimiento endógeno con capital humano o aprendizaje en la práctica.

SOLUCIÓN:

a) Si suponemos que todas las empresas son idénticas, el parámetro A de la función de producción de cada empresa es igual que su stock de capital per capita, por lo que la función de producción para cada una de ellas la podemos escribir como:

$$y_i = k_i^{\alpha+\eta}$$

Agregando para las M empresas obtenemos que la función de producción per capita de la economía es:

$$y = k^{\alpha+\eta}$$

Por tanto, la ecuación diferencial para el stock de capital de la economía es:

$$\dot{k} = sk^{\alpha+\eta} - (n + \delta)k$$

b) En términos de la tasa de crecimiento del capital per capita, la ecuación anterior quedaría:

$$g_k = sk^{\alpha+\eta-1} - (n + \delta)$$

La representación gráfica de las diferentes soluciones del modelo serían las siguientes:

Caso *i*: En este primer caso, los rendimientos del capital son decrecientes, por lo que la tasa de crecimiento es nula en estado estacionario. En efecto, el exponente de la función de producción es negativo, por lo que a medida que aumenta el stock de capital per capita, la producción aumenta en menor cuantía (es una función cóncava). Por otra parte, la función de ahorro en términos del stock de capital per capita tendrá pendiente negativa y convexa, por lo que cortará en un punto a la tasa de depreciación de la economía, existiendo por tanto estado estacionario. En este caso si existe dinámica de transición hacia el estado estacionario: la economía mostrará tasas de crecimiento positivas si el stock de capital per capita es inferior al de estado estacionario mientras que por el contrario, la tasa de crecimiento será negativa si el stock de capital per capita es superior a la de estado estacionario.

Caso *ii*): En este caso, los rendimientos del capital son constantes. La función de producción es lineal, lo que va a dar lugar a una función de ahorro en términos del stock del capital constante, por lo que la tasa de crecimiento de la economía siempre es positiva y constante, independientemente del stock de capital (suponiendo que $s > n + \delta$). O bien no existe el estado estacionario o existen infinitos estados estacionarios.

Caso *iii*): Por último, en este caso el exponente de la función de producción es mayor que 1. Suponiendo que dicho exponente es

menor que 2, la función de ahorro en términos del stock de capital per capita es una función cóncava con pendiente positiva. Por tanto, en este caso la tasa de crecimiento de la economía aumentará a medida que aumente el stock de capital per capita.

c) Un aumento en la tasa de ahorro provoca que las tres funciones de ahorro se desplacen hacia arriba, lo que provoca que la tasa de crecimiento en el largo plazo no se vea afectada para el caso de rendimientos decrecientes y crecientes, mientras que provoca un aumento permanente en la tasa de crecimiento para el caso de rendimientos constantes.

d) En el caso de rendimientos decrecientes, obtenemos el resultado estándar del modelo neoclásico. La disminución que se produce en el stock de capital per capita provoca que aumente la tasa de crecimiento de la economía, aunque de forma temporal hasta que la economía converge de nuevo hacia su estado estacionario. Por tanto, a largo plazo el nivel de renta per capita vuelve a su nivel original y por tanto todos los efectos de la destrucción del stock de capital son transitorios.

En el caso de rendimientos constantes, estamos en un modelo tipo AK. Dado que en este caso la tasa de crecimiento de la economía es constante en el estado estacionario que en este caso es cualquier nivel de capital per capita, la destrucción en el stock de capital no afecta a la tasa de crecimiento de la economía. Sin embargo, y debido a que la tasa de crecimiento no se ve afectada, esto implica que como resultado del bombardeo, el stock de capital y el nivel de renta per capita serán permanentemente inferiores a los que tendría la economía en el caso en que no se hubiese producido dicho bombardeo.

Por último, en el caso de rendimientos crecientes, la tasa de crecimiento de la economía disminuye inmediatamente después del bombardeo. No obstante, en este caso los efectos son transitorios, ya que la tasa de crecimiento aumentará a continuación. Una salvedad. Si la economía estaba en una senda hacia un crecimiento infinito el bombardeo podría hacerla situarse en una senda hacia un crecimiento cero que implicase a largo plazo un stock de capital per capita nulo.

e) En el primer caso, con rendimientos decrecientes, a corto plazo se produce un aumento del stock de capital per capita, por lo que la tasa de crecimiento de la economía sería negativa, reduciéndose el stock

de capital per capita hasta alcanzar de nuevo el estado estacionario. Los efectos en este caso serían transitorios.

En el caso de rendimientos constantes a escala, los efectos son permanentes, dado que la tasa de crecimiento no se altera, por lo que aumentaría el stock de capital per capita y el nivel de producción per capita. Por tanto, la población no afecta a la tasa de crecimiento de la economía a largo plazo.

Por último, en el caso de rendimientos crecientes del capital, la disminución en la población (trabajadores) provoca que aumente tanto el stock de capital per capita como la tasa de crecimiento de la economía. A largo plazo la economía mostrará mayores niveles de crecimiento.

Los resultados obtenidos anteriormente cambiarían significativamente si consideramos un modelo de crecimiento endógeno con capital humano o aprendizaje en la práctica. Tal y como hemos visto, en estos modelos el aspecto fundamental del crecimiento económico es la acumulación de capital humano, que tiene características particulares sobre los individuos, es decir, podemos considerarlo como una tecnología rival, e incluso puede provocar externalidades positivas. En este caso, los efectos de la pérdida de población serían muy negativos, provocando una disminución del nivel de producción de la economía y generando menores tasas de crecimiento en el largo plazo. Estos efectos serían negativos, por lo que la economía nunca alcanzaría la situación anterior a la de la pérdida de la población.

EJERCICIO 9.2: Suponga una economía en la que existen rendimientos crecientes respecto al capital. Esta economía vendría determinada por las siguientes ecuaciones:

- Problema de los consumidores:

$$V = \int_0^{\infty} \frac{c_t^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon} e^{nt} e^{-\theta t} dt \quad (1)$$

- Restricción presupuestaria:

$$\dot{b}_t = w_t + R_t b_t - c_t - n b_t \quad (2)$$

• **Función de producción:**

$$Y_t = AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (3)$$

siendo $\alpha > 1$.

a) Determine las ecuaciones de ajuste del stock de capital per capita y del consumo per capita.

b) Cómo serían los efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento de los deseos de ahorrar.

SOLUCIÓN:

a) Antes de resolver este problema debemos tener en cuenta que la función de producción en este caso presenta rendimientos crecientes respecto al stock de capital, es decir, existen rendimientos crecientes a escala y además la productividad marginal del capital es creciente.

En primer lugar, resolvemos el problema del consumidor, que consistiría en aplicar el Máximo de Pontryagin a la siguiente función:

$$H = \frac{c_t^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon} e^{(n-\theta)t} dt + \lambda_t [w_t + R_t b_t - c_t - n b_t]$$

Las condiciones de primer orden serían:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = c_t^{-\varepsilon} e^{(n-\theta)t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial b} = -\dot{\lambda}_t = (R_t - n)\lambda_t$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{b}_t = w_t + R_t b_t - c_t - n b_t$$

De la primera condición de primer orden obtenemos:

$$c_t^{-\varepsilon} e^{(n-\theta)t} = \lambda_t$$

De la segunda condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -(R_t - n)$$

Sólo nos resta calcular la derivada respecto al tiempo del parámetro de Lagrange. Tomando logaritmos tenemos:

$$-\varepsilon \ln c_t + (n - \theta)t = \ln \lambda_t$$

Derivando respecto al tiempo:

$$-\varepsilon \frac{\dot{c}_t}{c_t} + (n - \theta) = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

Sustituyendo en la segunda condición de primer orden, resulta:

$$-\varepsilon \frac{\dot{c}_t}{c_t} + (n - \theta) = -(R_t - n)$$

Despejando la derivada respecto al tiempo del consumo per cápita

$$-\varepsilon \frac{\dot{c}_t}{c_t} + (n - \theta) = -(R_t - n)$$

$$-\varepsilon \frac{\dot{c}_t}{c_t} - \theta = -R_t$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{R_t - \theta}{\varepsilon}$$

$$\dot{c}_t = \frac{R_t - \theta}{\varepsilon} c_t$$

A continuación, resolvemos el problema para las empresas. Las empresas maximizan beneficios:

$$\max \Pi_t = AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - W_t L_t - (R_t + \delta)K_t$$

donde $\theta > 1$. Derivando la función de beneficios per cápita respecto al stock de capital per cápita resulta:

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = \alpha A k_t^{\alpha-1} - (R_t + \delta) = 0$$

Por tanto obtenemos:

$$\alpha A k_t^{\alpha-1} = R_t + \delta$$

El salario de equilibrio lo obtendríamos como:

$$w_t = (1 - \alpha)Ak_t^\alpha$$

El equilibrio viene dado por aquella situación en la cual los planes de los consumidores y de las empresas coinciden:

$$b_t = k_t$$

La ecuación dinámica para el consumo per cápita, la obtenemos sustituyendo el tipo de interés en la senda óptima del consumo per cápita:

$$\dot{c}_t = \frac{\alpha Ak_t^{\alpha-1} - \delta - \theta}{\varepsilon} c_t$$

Por su parte, la ecuación dinámica para el stock de activos financieros per cápita es:

$$\dot{b}_t = w_t + R_t b_t - c_t - n b_t$$

Dado que en equilibrio $b_t = k_t$, tendríamos:

$$\dot{k}_t = w_t + R_t k_t - c_t - n k_t$$

$$\dot{k}_t = (1 - \alpha)Ak_t^\alpha + (\alpha Ak_t^{\alpha-1} - \delta)k_t - c_t - n k_t$$

$$\dot{k}_t = Ak_t^\alpha - c_t - (n + \delta)k_t$$

La economía que está representada por estas dos ecuaciones dinámica no tiene estado estacionario, ya que tanto el consumo per cápita como el stock de capital per cápita presentan tasas de crecimiento positivas. Es decir, las ecuaciones dinámicas anteriores nunca serían cero.

b) Si aumentan los deseos de ahorrar, esto equivale a una disminución del parámetro θ . Tal como podemos observar, este parámetro aparece con signo negativo en la ecuación dinámica para el consumo per cápita. Por tanto, una disminución en la tasa de preferencia intertemporal provoca que la ecuación dinámica del consumo se haga más positiva. Es decir, la senda óptima de consumo aumentaría su pendiente. Por tanto, el efecto es que aumenta la tasa de crecimiento del consumo per cápita. Adicionalmente, también

aumenta la tasa de crecimiento del capital per cápita, al ser el ahorro superior.

Por tanto, a corto plazo el aumento en la tasa de ahorro provocará de forma instantánea una disminución en el consumo per cápita, pero la tasa a la que crece aumentará. A largo plazo tanto el consumo como el capital per cápita crecerán a tasas superiores.