CRECIMIENTO ECONÓMICO

SESIÓN: Modelos de crecimiento endógeno con tasa de ahorro constante

Profesor: Miguel Casares

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

ÍNDICE

1. La insatisfacción con la teoría neoclásica (61-63)

2. El modelo AK (63-65)

3. Crecimiento con dinámica de transición (65-67)

4. Funciones de producción con elasticidad de sustitución constante (67-71)

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – LA INSATISFACCIÓN CON LA TEORÍA NEOCLÁSICA

A mediados de los 80 surgen críticas al modelo de Solow-Swan:

- El modelo sin cambio tecnológico alcanza un EE con $\gamma_y = 0$. No hay crecimiento económico a largo plazo debido al freno que supone los rendimientos marginales decrecientes.
- En el modelo con cambio tecnológico el crecimiento económico a largo plazo es exógeno, al depender exclusivamente de un crecimiento tecnológico exógeno, $\gamma_y = \gamma_{T(t)} = x$.
- Contradicciones del modelo de crecimiento exógeno basado en la mejora tecnológica debido a la no rivalidad de las ideas.

Desarrollemos estas contradicciones en la siguiente transparencia:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – LA INSATISFACCIÓN CON LA TEORÍA NEOCLÁSICA

- La tecnología se incorpora a coste cero y es un factor NO RIVAL. Todas las empresas del modelo Solow-Swan pueden utilizar la función de producción neoclásica

$Y = F(K, L, T)$ con rendimientos constantes a escala

$$F(\lambda K, \lambda L, T) = \lambda F(K, L, T)$$

agotando el producto con la aportación de trabajo y capital

$$F(K, L, T) = F_K \cdot K + F_L \cdot L$$

y obteniendo un beneficio cero en competencia perfecta.

En el mundo real la incorporación de mejoras tecnológicas es costosa (no es un maná gratuito), existe protección a las patentes y derechos de propiedad que hacen de la tecnología un factor RIVAL y las empresas tienen beneficios positivos.

Contradicciones entre la función de producción y el mundo real

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – LA INSATISFACCIÓN CON LA TEORÍA NEOCLÁSICA

- Si la tecnología fuera excluible (factor rival) y tuviera un coste fijo $\kappa > 0$ para hacerla más realista:

- Las empresas tendrían un incentivo a invertir en mejorar la tecnología a $T' > T$ pagando el coste fijo κ . La primera empresa que lo hiciera aumentaría la producción y la demanda de factores hasta que los beneficios vuelva a ser nulos por el aumento del coste de los factores (w, R). El resto de empresas tendrían pérdidas y la industria acabaría siendo un monopolio.

- Si todas las empresas compraran a la vez la nueva tecnología y aumentaran la producción, el aumento de los costes provocaría pérdidas y renunciarían.

Contradicciones entre la competencia perfecta y el mundo real

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – LA INSATISFACCIÓN CON LA TEORÍA NEOCLÁSICA

Al comienzo de los años 90 los economistas desarrollan modelos de CRECIMIENTO ENDÓGENO, que determinan una tasa de crecimiento a largo plazo de la economía a partir del comportamiento de los agentes y sus decisiones de inversión en capital humano (sesión 8, capítulo 5 del libro) y en mejora tecnológica (sesiones 9 y 10, capítulos 6 y 7 del libro).

De momento, vamos a introducir como un ejemplo sencillo de crecimiento endógeno con tecnología fija, el modelo AK.

Comenzamos en la siguiente transparencia.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – EL MODELO AK

La forma más sencilla e inmediata de eliminar los rendimientos decrecientes del capital → Función de producción AK

$$Y = AK$$

Es una función lineal. La productividad media y la productividad marginal del capital vienen dadas por la constante A

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{Y}{K} = A$$

Surge al considerar el capital en un sentido amplio a partir de la tecnología Cobb-Douglas. Si tanto el capital físico, como el capital humano, son una forma de capital tenemos:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = AK^{\alpha}K^{1-\alpha} = AK$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – EL MODELO AK

Vamos a escribir la ecuación fundamental del modelo AK manteniendo el resto de los supuestos del modelo Solow-Swan. Comenzamos por la ecuación de inversión neta:

$$\dot{K} = sAK - \delta K$$

que podemos expresarla en términos per cápita dividendo ambos lados entre L

$$\frac{\dot{K}}{L} = sAk - \delta k$$

recordando que $k = \frac{K}{L}$.

La variación del capital per cápita en el tiempo se obtiene a través de la regla de la derivada de un cociente y el supuesto de crecimiento de la población a tasa constante

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$$

Donde sustituyendo el valor de $\frac{\dot{K}}{L}$ que resulta de la ecuación anterior llegamos a la ecuación fundamental:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – EL MODELO AK

$$\dot{k} = sAk - (n + \delta)k$$

Una vez más el incremento del capital per cápita resulta de la diferencia entre el ahorro per cápita y las necesidades de mantenimiento del capital per cápita actual.

Sin embargo en este caso el ahorro per cápita es lineal en k debido a los rendimientos marginales constantes. Tal y como se observa en la representación gráfica de la ecuación fundamental, surgen dos rectas que van separando su distancia con el aumento del capital per cápita → $\dot{k}$ aumenta a mayor k

Con este crecimiento creciente, ¿hay EE?

Calculemos la tasa de crecimiento del capital per cápita en el modelo AK a partir de su ecuación fundamental:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – EL MODELO AK

$$\gamma_k \equiv \frac{\dot{k}}{k} = sA - (n + \delta)$$

Tanto la curva (¡recta mejor dicho!) de ahorro como las necesidades marginales de mantenimiento del capital son constantes → γ_k es constante

La producción per cápita se obtiene de una tecnología lineal

$$y = Ak$$

Por lo que la tasa de crecimiento de la producción y el capital per cápita coinciden

$$\gamma_y = \gamma_k = sA - (n + \delta)$$

El consumo per cápita es una proporción constante de la renta (producción) per cápita

$$c = (1 - s)y$$

y la tasa de crecimiento del consumo y la producción per cápita también coinciden

$$\gamma_c = \gamma_y = sA - (n + \delta)$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – EL MODELO AK

Las variables agregadas se pueden obtener multiplicando las variables per cápita por la población. Por ejemplo, $K = kL$. Aplicando la regla de la derivación de un producto tenemos

$$\dot{K} = \dot{k}L + \dot{L}k$$

y dividiendo ambos lados entre el capital agregado K

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{k}L}{K} + \frac{\dot{L}k}{K} = \frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{L}}{L} = \gamma_k + \gamma_L = sA - (n + \delta) + n = sA - \delta$$

Los mismos argumentos pueden utilizarse para las tasas de crecimiento del producto y el consumo agregado. Con ello obtenemos

$$\gamma_K = \gamma_Y = \gamma_C = sA - \delta$$

En el modelo AK todas las tasas de crecimiento son siempre constantes. El corto plazo es ya una situación de equilibrio a largo plazo, al cumplirse la condición de EE (tasas de crecimiento constantes).

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – EL MODELO AK

Tasas de crecimiento en el modelo AK con tasa de ahorro constante (resumen)

$$\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = sA - (n + \delta)$$
$$\gamma_K = \gamma_Y = \gamma_C = sA - \delta$$
$$\gamma_L = n$$

En la sesión 7 (capítulo 4 del libro) estudiaremos dos extensiones a esta versión básica del modelo AK:

- Modelo AK con comportamiento optimizador de los hogares (decisiones de consumo y ahorro)
- Modelo AK con aprendizaje mediante la experiencia en las empresas

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – CRECIMIENTO CON DINÁMICA DE TRANSICIÓN

En el modelo AK:

- Se alcanza un crecimiento económico endógeno, $\gamma_y > 0$, al evitar los rendimientos decrecientes del capital per cápita, $f'(k) = A$.
- En la dinámica de transición a corto plazo ya se observan tasas de crecimiento para las variables per cápita y las variables agregadas CONSTANTES → EE

Por tanto:

No hay convergencia económica. Dos economías con distintos niveles de capital o producto per cápita inicial (e idénticas características) crecerán a la misma tasa y no se observará convergencia entre sus niveles de renta per cápita. Problema.

Jones y Manuelli (1990, *Journal of Political Economy*) tratan de recuperar la convergencia a través de una mezcla entre la tecnología AK (rendimientos marginales constantes) y la tecnología Cobb-Douglas (rendimientos marginales decrecientes):

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – CRECIMIENTO CON DINÁMICA DE TRANSICIÓN

$$Y = F(K, L) = AK + BK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

asumiendo que $A, B > 0$ y $0 < \alpha < 1$

Esta función de producción tiene las siguientes propiedades:

- Rendimientos constantes a escala
- Producto marginal decreciente para el capital y el trabajo
- Cumple tres condiciones de Inada...

... pero incumple una de las condiciones de Inada

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = A > 0$$

Teniendo en cuenta que la productividad marginal del capital es

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = A + B\alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – CRECIMIENTO CON DINÁMICA DE TRANSICIÓN

Vamos a estudiar la dinámica de transición para este caso con crecimiento endógeno y producto marginal decreciente. La función de producción per cápita es

$$f(k) = Ak + Bk^{\alpha}$$

La ecuación fundamental que determina la variación del capital per cápita queda así

$$\dot{k} = s(Ak + Bk^{\alpha}) - (n+\delta)k$$

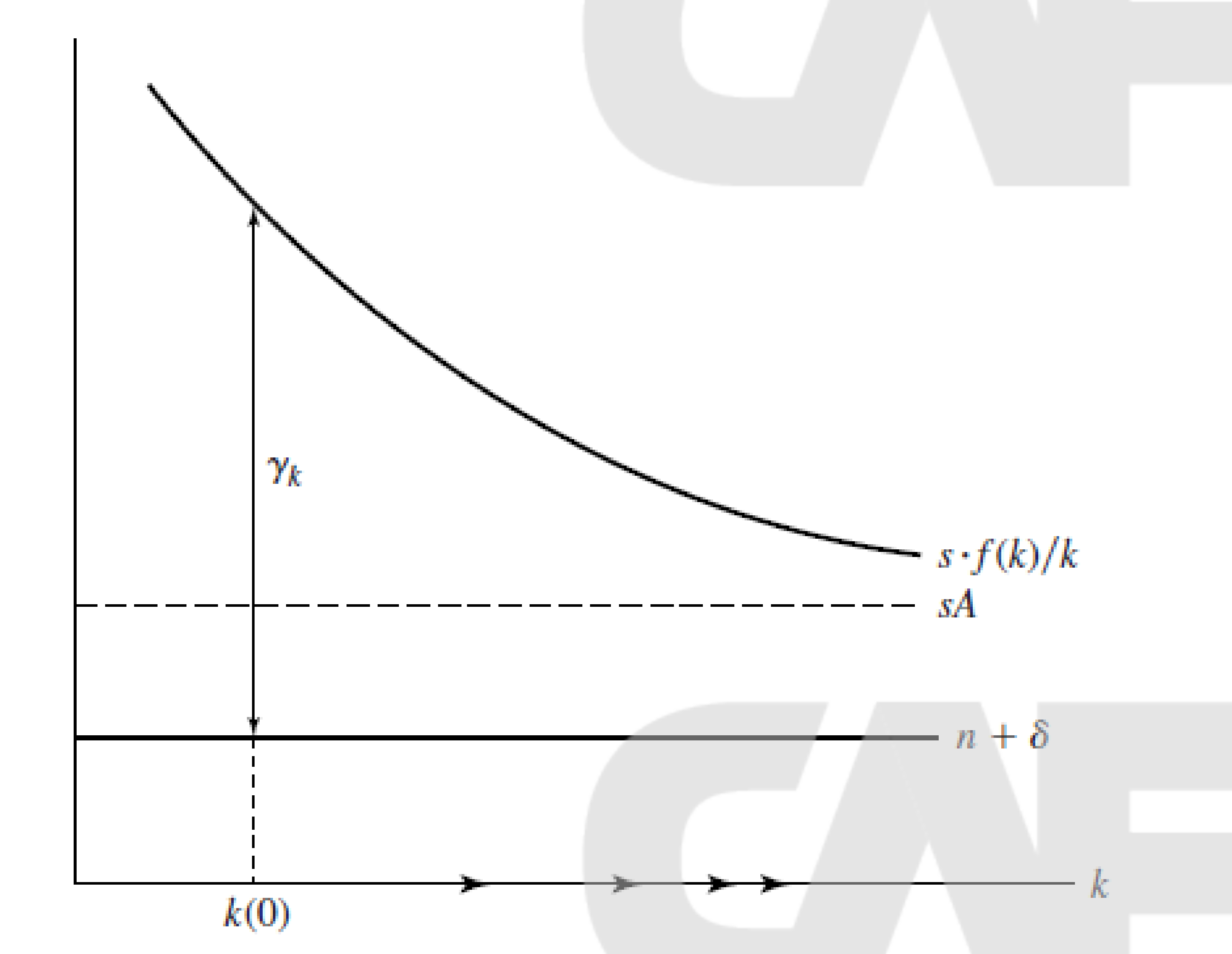
y dividiendo ambos lados por k se alcanza la siguiente tasa de crecimiento del capital per cápita

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s(Ak+Bk^{\alpha})}{k} - (n+\delta) = sA - (n+\delta) + \frac{sB}{k^{1-\alpha}}$$

La tasa de crecimiento del capital per cápita es decreciente en k y se aproxima a un valor fijo $sA - (n+\delta)$ cuando k aumenta.

Representar gráficamente la curva de ahorro y la recta de mantenimiento (depreciación) del capital. Discutir convergencia y resultados de EE.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – CRECIMIENTO CON DINÁMICA DE TRANSICIÓN



Trayectoria con tasa de crecimiento del capital per cápita decreciente hasta alcanzar asintóticamente el EE con

$$\gamma_k = sA - (n + \delta)$$

¿qué ocurriría si $sA < (n + \delta)$?

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – FUNCIONES DE PRODUCCIÓN CON ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN CONSTANTE

La función de producción de elasticidad de sustitución constante (ESC) entre trabajo y capital es

$$Y = F(K, L) = A\left[a(bK)^{\psi} + (1-a)\big((1-b)L\big)^{\psi}\right]^{\frac{1}{\psi}}$$

donde los parámetros cumplen estas restricciones: $0 < a < 1, 0 < b < 1, \psi < 1$

La elasticidad de sustitución entre capital y trabajo (es decir, la elasticidad del ratio K/L elegido por la empresa respecto a la tasa marginal de sustitución técnica entre K y L, F_L/F_K a lo largo de la isocuanta de producción) es siempre $\frac{1}{1-\psi}$. Formalmente,

$$Elas = \frac{\frac{\partial(K/L)}{K/L}}{\frac{\partial(F_L/F_K)}{F_L/F_K}} = \frac{\partial(K/L)}{\partial(F_L/F_K)}\frac{F_L/F_K}{K/L} = \frac{1}{1-\psi}$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – FUNCIONES DE PRODUCCIÓN CON ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN CONSTANTE

Dados los productos marginales

$$F_K = A\left[a(bK)^{\psi} + (1-a)\big((1-b)L\big)^{\psi}\right]^{\frac{1}{\psi}-1} ab^{\psi}\psi(K)^{\psi-1}$$

$$F_L = A\left[a(bK)^{\psi} + (1-a)\big((1-b)L\big)^{\psi}\right]^{\frac{1}{\psi}-1} (1-a)(1-b)^{\psi}\psi(L)^{\psi-1}$$

la tasa marginal de sustitución técnica es

$$\frac{F_L}{F_K} = \frac{(1-a)(1-b)^{\psi}(L)^{\psi-1}}{ab^{\psi}(K)^{\psi-1}} = \frac{1-a}{a}\left(\frac{1-b}{b}\right)^{\psi}\left(\frac{L}{K}\right)^{\psi-1}$$

Si le damos la vuelta a la expresión anterior para obtener K/L dependiendo de F_L/F_K

$$\frac{K}{L} = \left[\frac{F_L}{F_K}\frac{a}{1-a}\left(\frac{b}{1-b}\right)^{\psi}\right]^{\frac{1}{1-\psi}}$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – FUNCIONES DE PRODUCCIÓN CON ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN CONSTANTE

Podemos calcular la derivada del ratio K/L con respecto de la tasa marginal de sustitución, F_L/F_K, obteniendo

$$\frac{\partial(K/L)}{\partial(F_L/F_K)} = \frac{1}{1-\psi}\left[\frac{F_L}{F_K}\frac{a}{1-a}\left(\frac{b}{1-b}\right)^{\psi}\right]^{\frac{1}{1-\psi}-1}\frac{a}{1-a}\left(\frac{b}{1-b}\right)^{\psi}$$

y sustituir términos en la fórmula del cálculo de la elasticidad para obtener el resultado esperado:

$$Elas = \frac{\partial(K/L)}{\partial(F_L/F_K)}\frac{F_L/F_K}{K/L} = \frac{1}{1-\psi}\left[\frac{F_L}{F_K}\frac{a}{1-a}\left(\frac{b}{1-b}\right)^{\psi}\right]^{\frac{1}{1-\psi}-1}\frac{a}{1-a}\left(\frac{b}{1-b}\right)^{\psi}\frac{F_L/F_K}{\left[\frac{F_L}{F_K}\frac{a}{1-a}\left(\frac{b}{1-b}\right)^{\psi}\right]^{\frac{1}{1-\psi}}} = \frac{1}{1-\psi}$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – FUNCIONES DE PRODUCCIÓN CON ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN CONSTANTE

Tres casos particulares notables ($Elas = \frac{1}{1-\psi}$):

Límite inferior de ψ ($\psi \to -\infty$) tecnología de proporciones fijas con elasticidad de sustitución cero. Modelo Harrod-Domar que estudiaremos en la siguiente sesión.

Límite superior de ψ ($\psi \to 1$) tecnología lineal con elasticidad de sustitución infinita, K y L son sustitutos perfectos.

Cuando el parámetro ψ se aproxima a cero ($\psi \to 0$), la elasticidad de sustitución es igual a 1 y la función de producción coincide con una tecnología Cobb-Douglas con el parámetro a ocupando el lugar de α.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – FUNCIONES DE PRODUCCIÓN CON ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN CONSTANTE

El producto per cápita con tecnología ESC se obtiene dividiendo la función de producción agregada entre L

$$y = f(k) = A\left[a(bk)^{\psi} + (1-a)(1-b)^{\psi}\right]^{\frac{1}{\psi}}$$

Los productos marginal y medio del capital per cápita son

$$f'(k) = Aab^{\psi}\psi\left[ab^{\psi} + (1-a)(1-b)^{\psi}k^{-\psi}\right]^{\frac{1-\psi}{\psi}}$$

$$\frac{f(k)}{k} = A\left[ab^{\psi} + (1-a)(1-b)^{\psi}k^{-\psi}\right]^{\frac{1}{\psi}}$$

Comprobar el error tipográfico en la página 68 del libro: falta el término ψ antes del corchete en la expresión de $f'(k)$. Para estudiar el comportamiento dinámico del modelo con función de producción ESC vamos a sustituir $f(k)/k$ en la ecuación que determina la tasa de crecimiento del capital per cápita, $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n+\delta)$. El resultado es:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – FUNCIONES DE PRODUCCIÓN CON ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN CONSTANTE

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA\left[ab^{\psi} + (1-a)(1-b)^{\psi}k^{-\psi}\right]^{\frac{1}{\psi}} - (n+\delta)$$

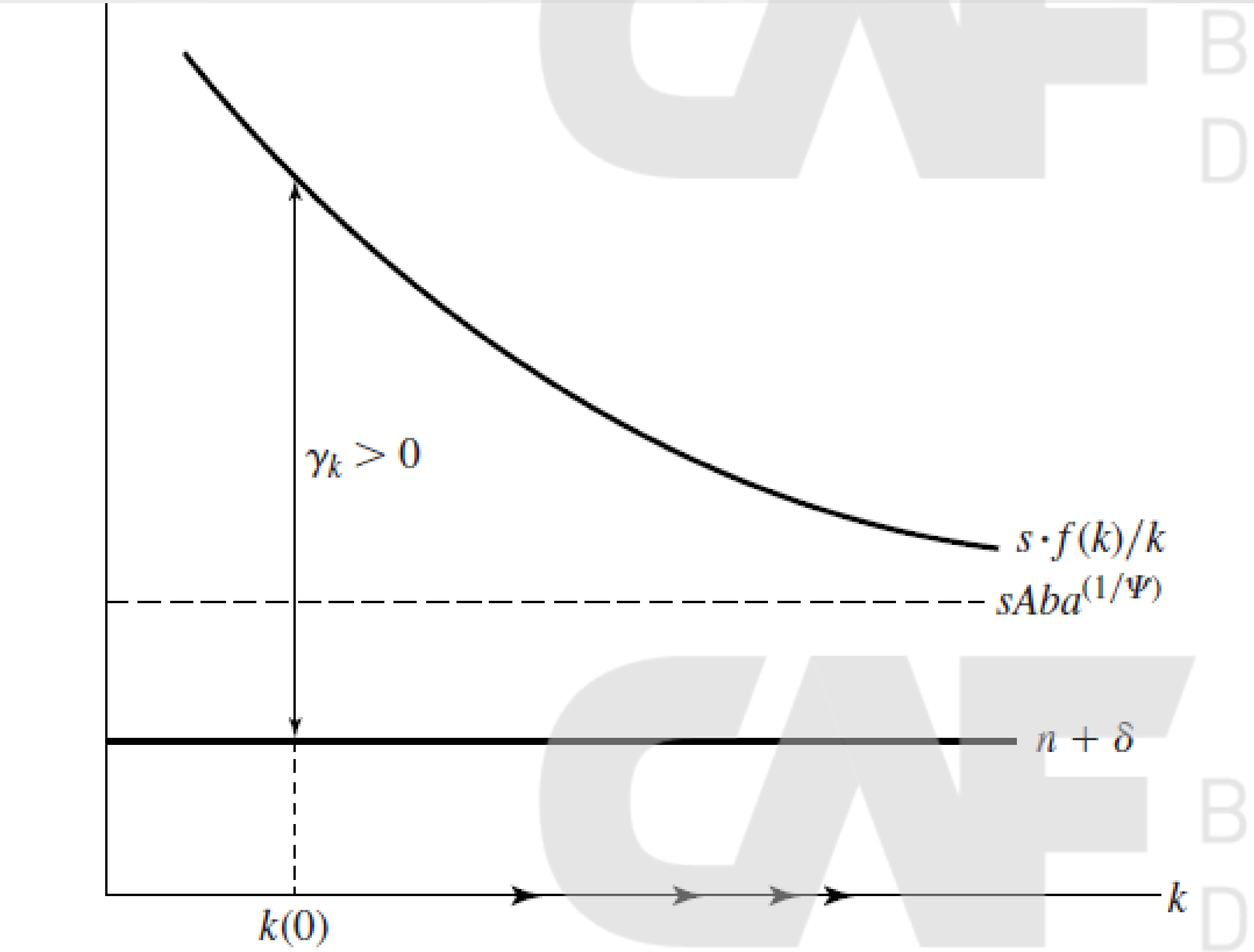
La dinámica del capital per cápita depende del grado de sustitución entre K y L (medido a través del parámetro ψ).

- Grado de sustitución entre factores alto ($0 < \psi < 1, Elas = \frac{1}{1-\psi} > 1$):

Cuando k aumenta la curva de ahorro va decreciendo hacia $sAa^{\frac{1}{\psi}}b$ porque el límite de $f(k)/k$ cuando k tiende a infinito es $Aa^{\frac{1}{\psi}}b$.

Ver representación gráfica.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – FUNCIONES DE PRODUCCIÓN CON ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN CONSTANTE



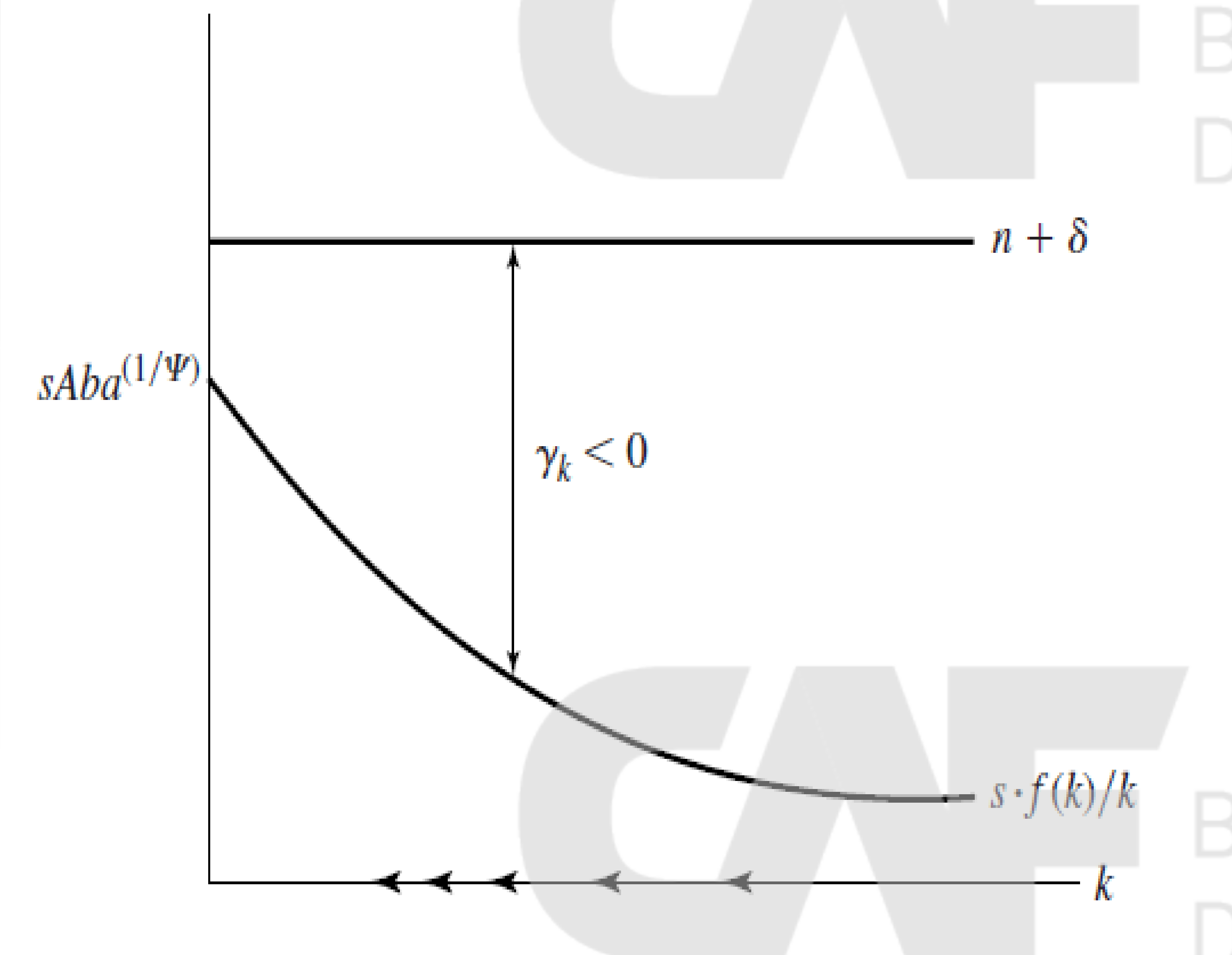
$$\gamma_k = \frac{sf(k)}{k} - (n+\delta) > 0$$

Cuando k aumenta la curva de ahorro va decreciendo hacia $sAa^{\frac{1}{\Psi}}b$ porque el límite de $f(k)/k$ cuando k tiende a infinito es $Aa^{\frac{1}{\Psi}}b$.

Transición a EE con $\gamma_k = sAa^{\frac{1}{\Psi}}b - (n+\delta)$.

¿Qué ocurrirá en esta economía si la tasa de ahorro fuera tan baja que $sAa^{\frac{1}{\Psi}}b < (n+\delta)$?

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – FUNCIONES DE PRODUCCIÓN CON ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN CONSTANTE



$$\frac{\dot{k}}{k} = sA\left[ab^{\psi} + (1-a)(1-b)^{\psi}k^{-\psi}\right]^{\frac{1}{\psi}} - (n+\delta)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n+\delta)$$

con $sAa^{\frac{1}{\psi}}b < (n+\delta)$ y grado de sustitución entre factores bajo ($\psi < 0$, $Elas = \frac{1}{1-\psi} < 1$):

Cuando k aumenta la curva de ahorro va disminuyendo hacia cero, mientras que las reducciones de k provocan aumentos de $\frac{sf(k)}{k}$ con un límite superior en $sAa^{\frac{1}{\psi}}b$ cuando tiende a cero.

Transición hacia $k^* = 0$ a no ser que $sAa^{\frac{1}{\psi}}b > (n+\delta)$ que permite un $k^* > 0$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON TASA DE AHORRO CONSTANTE – FUNCIONES DE PRODUCCIÓN CON ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN CONSTANTE

A modo de resumen, los posibles casos son:

Si el grado de sustitución entre factores es elevado ($0 < \psi < 1, Elas = \frac{1}{1-\psi} > 1$)

- con alto ahorro $sAa^{\frac{1}{\psi}}b > (n + \delta)$: EE con $\gamma_k = sAa^{\frac{1}{\psi}}b - (n + \delta) > 0$
- con bajo ahorro $sAa^{\frac{1}{\psi}}b < (n + \delta)$: EE con $\gamma_k = 0$.

Si el grado de sustitución entre factores es reducido ($\psi < 0, Elas = \frac{1}{1-\psi} < 1$)

- con alto ahorro $sAa^{\frac{1}{\psi}}b > (n + \delta)$: EE con $\gamma_k = 0$.
- con bajo ahorro $sAa^{\frac{1}{\psi}}b < (n + \delta)$: tasa de crecimiento negativa del capital per cápita, $\gamma_k < 0$, que va menguando hasta que la economía se destruye.