Apuntes N 4 - EAE 321D

Rodrigo A. Cerda

Mayo 2003

1 Equilibrios competitivos con mercados completos

Analizaremos decisiones de consumo en el contexto de equilibrio competitivos, con horizonte de tiempo infinito e incertidumbre. Para introducir incertidumbre utilizaremos la estructura de matrices de transicion markovianas.

La forma de analizar el problema sera el utilizar la estructura de mercados completos del tipo Arrow-Debreu. A continuacion, explicaremos la estructura de nuestro problema.

1.1 Preferencias y evolucion de dotaciones

1.1.1 Shocks y evolucion de dotaciones

Supondremos que un hogar elige su patron de consumo de acuerdo a su estructura de preferncias y la evolucion de sus dotaciones. Estas dotaciones varian de acuerdo a shocks. El shock que ocurre en el periodo t, se anotaran como s_t, por lo tanto la historia de shocks hasta el periodo t se indexara de la siguiente forma:

$$S^t = [s_t, s_{t-1}, ..., s_0] \tag{1}$$

Asumiremos que los shocks evolucionan de acuerdo a una matriz de transicion markoviana(El shock en el period $t = 0$ es conocido, por lo tanto su probabilidad es uno). Por lo tanto, la probabilidadd entre estados de la naturtaleza a traves del tiempo pueden escribirse como:

$$\pi(S^t|s_0) = \pi(s_t|s_{t-1})\pi(s_{t-1}|s_{t-2})...\pi(s_1|s_0) \quad (2)$$
$$\pi(S^t|S^\tau) = \pi(s_t|s_{t-1})...\pi(s_{\tau+1}|s_\tau) \quad (3)$$

La ecuacion (3) indica que debido a la propiedad markoviana, la probabilidad de ir del estado S^τ al estado S^t no depende de historia ocurrida antes de τ.

Los shocks determinan las dotaciones, por lo tanto estas ultimas tienen la siguiente notacion:

$$y_t^i = y^i(s_t) \quad (4)$$

Donde i indica el hogar i, en un contexto en que existe muchos hogares, e.g. $i \in I$ donde I es el set de hogares. Esta funcion de dotaciones es una funcion invariante de s_t.

1.1.2 Preferencias

Los hogares tienen una funcion de utilidad separable a traves del tiempo y que depende solamente de consumo corriente. Esta funcion de utilidad es creciente y concava en consumo. Los hogares descuentan el futuro a la tasa $\beta < 1$. Esto nos permite escribir la funcion de utilidad esperada en $t = 0$ como:

$$U(C^i) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{S^\tau} u[c_t^i(S^\tau)]\pi(S^t|s_0) \quad (5)$$

El problema del hogar sera elegir $C^i = \{c_t^i(S^\tau)\}_{\tau=0}^{\infty}$. Para esto necesitamos especificar la restriccion presupuestaria.

1.2 Precios de Arrow-Debreu, la restriccion presupuestaria y la solucion del problema

Asumiremos que al inicio del horizonte de tiempo, $t = 0$, se pueden transar bienes para cada historia del estado de la naturaleza, S^t. De esta forma, los hogares pueden vender o comprar bienes para cada estado S^t que pueda ocurrir. El precio del bien es $q_t^0(S^t)$. Este precio se conoce como un precio del tipo Arrow-Debreu y es la idea basica de mercados completos, se pueden transar bienes en todos los estados de la naturaleza. De esta forma todas las transacciones ocurren al iniciarse el horizonte de tiempo, y por lo tanto existe una unica restriccion presupuestaria para cada hogar. Esta restriccion presupuestaria es:

$$\sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{S^\tau} q_\tau^0(S^\tau)c_t^i(S^\tau) \leq \sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{S^\tau} q_\tau^0(S^\tau)y_t^i(S^\tau) \tag{6}$$

En esta restriccion presupuestaria se observan dos sumatorias, tal como en el caso de la funcion de utilidad. La primera suma a traves del tiempo mientras que la segunda suma a traves de estados de la naturaleza para cada momento del tiempo.

Por lo tanto, cada hogar resuelve:

$$L = \sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{S^\tau} u[c_t^i(S^\tau)]\pi(S^t|s_0) + \mu_i[\sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{S^\tau} q_\tau^0(S^\tau)y_t^i(S^\tau) - \sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{S^\tau} q_\tau^0(S^\tau)c_t^i(S^\tau)]$$

Donde μ_i es el multiplicador de lagrange del hogar i. Lo que implica para el hogar i:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t^i(S^\tau)} \Rightarrow \beta^t u_c(c_t^i(S^\tau))\pi(S^t|s_0) = \mu_i q_\tau^0(S^t)$$

Similarmente para el hogar j (distinto de i):

$$\frac{\partial L}{\partial c_t^j(S^\tau)} \Rightarrow \beta^t u_c(c_t^j(S^\tau))\pi(S^t|s_0) = \mu_j q_\tau^0(S^t)$$

Por lo tanto:

$$\frac{u_c(c_t^i(S^t))}{u_c(c_t^j(S^t))} = \frac{\mu_i}{\mu_j}, \qquad \forall t, \forall S^t, \forall i \neq j \tag{7}$$

Esta condicion es el resultado clave de este tipo de modelos de mercados completos. Dado que el ratioo de precios sombras no dependen del tiempo y o del estado de la naturaleza, los individuos se aseguran entre ellos de tal forma en que no varie el ratio de utilidades marginales entre ellos a traves del timepo y de estados de la naturaleza.

2 El equilibrio competitivo

A continuacion cerraremos el modelo por medio de establecer las condiciones que nos entrega el equilibrio competitivo. Para esto las siguientes definiciones seran utilizadas mas tarde:

Definicion 1: Un sistema de precios es una secuencia de funciones $\{q_t^0(S^t)\}$.

Definicion 2: Una asignacion es una lista de secuencias de funciones $\{c_t^i(S^t)\}_{t=0}^{\infty}$.

Definicion 3: Una asignacion factible satisface:

$$\sum_i c_i^i(S^t) \leq \sum_i y_i^i(S^t) \tag{8}$$

Esta ultima definicion cuando se satisface con igualdad indica que los mercados se vacian.

Estas definiciones nos permiten definir el equilibrio competitivo de esta economia:

Definicion de equilibrio competitivo: Un equilibrio competitivo es una asignacion factible y un sistema de precios tal que cada hogar resuelve su problema.

Supongamos que:

$$u(c) \quad = \quad \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

En este caso, de acuerdo a la maximizacion de los hogares, tenemos:

$$c_t^i(S^t) \quad = \quad c_t^j(S^t)(\frac{\mu_i}{\mu_j})^{\frac{-1}{\gamma}}$$

Vacio de mercados impone:

$$\sum_i c_i^i(S^t) = \sum_i y_i^i(S^t)$$

Supongamos que hay N hogares en la economia. Entonces, ocupando estas dos condiciones, tenemos:

$$\begin{aligned} c_t^1(S^t) + c_t^2(S^t) + c_t^3(S^t) + ... + c_t^N(S^t) &= \sum_i y_i^i(S^t) \\ c_t^N(S^t)[(\frac{\mu_1}{\mu_N})^{\frac{-1}{\gamma}} + (\frac{\mu_2}{\mu_N})^{\frac{-1}{\gamma}} + ... + (\frac{\mu_1}{\mu_{N-1}})^{\frac{-1}{\gamma}} + 1] &= \sum_i y_i^i(S^t) \\ c_t^N(S^t) &= \frac{(\mu_N)^{\frac{-1}{\gamma}}}{\sum_i (\mu_i)^{\frac{-1}{\gamma}}} \sum_i y_i^i(S^t) \end{aligned}$$

Lo que puede resumirse como:

$$c_t^j(S^t) \quad = \quad \frac{(\mu_j)^{\frac{-1}{\gamma}}}{\sum_i (\mu_i)^{\frac{-1}{\gamma}}} \sum_i y_i^i(S^t), \quad \forall j \tag{9}$$

Esta condicion nos entrega nuevamente la solucion de aseguramiento perfecto porque $\sum_i y_i^i(S^t)$ es simplemente la dotacion agregada de la economia en el estado S^t. De esta forma la razon $\frac{(\mu_j)^{\frac{-1}{\gamma}}}{\sum_i (\mu_i)^{\frac{-1}{\gamma}}}$ nos indica como se reparte la dotacion total de recursos de la economia entre los hogares. Esto depende simplemente de los multiplicadores de Lagrange!!! En este caso, la variacion en el consumo depende solamente de shocks agragados a la economia, porque son estos shocks los que mueven la dotacion total de recursos. A continuacion resolveremos un ejemplo que permitira dejar mas claro el concepto de equilibrio competitivo.

2.1 Ejemplo de equilibrio competitivo bajo mercados de capitales perfectos

Para caracterizar el equilibrio competitivo resolveremos la asignacion de recursos asi como el sistema de precios (tal como lo indica la definicion de equilibrio competitivo).

Supondremos que hay solo dos agentes en la economia, cuya dotacion puede ser igual a 0 o 1, es decir $s_t \in \{0, 1\}$. Ademas, esta dotacion es periodica en el sentido que si el agente 1 tiene dotacion 0 en el periodo actual, este mismo agente debe tener dotacion 1 el proximo periodo y asi sucesivamente. Asimismo, supondremos que no existe incertidumbre agregada, por lo tanto las dotaciones de los agentes 1 y 2 evolucionan de la siguinete forma:

$$\begin{array}{llll} Dotacion & agente & 1 & (1, 0, 1, ...) \\ Dotacion & agente & 2 & (0, 1, 0, ...) \end{array}$$

Cual es el sistema de precios? De la condicion de primer orden de los agentes sabemos que:

$$q_t^0(S^t) = \beta^t \pi(S^t|s_0) \frac{u_c(c_t^i(S^t))}{\mu_i}$$

Normalizando el precio del bien en el momento cero igual a uno, tenemos:

$$q_0^0(s_0) = 1 = \frac{u_c(c_0^i(s_0))}{\mu_i} \tag{10}$$

Ademas, sabemos que no hay incertidumbre agregada, por lo tanto dado que los agentes se aseguran perfectamente, el patron de consumo es constante a traves del tiempo para cada agente, e.g. $c_0^i(s_0) = c_t^i(S^t), \quad \forall i$.

Adicionalmente, sabempos que se debe cumplir:

$$\pi(1|0) = \pi(0|1) = 1 \tag{11}$$
$$\pi(0|0) = \pi(1|1) = 0 \tag{12}$$

Esto ultimo se debe a que con certidumbre se conoce el movimiento de las dotaciones a nivel individual. Esto quiere decir que:

$$\pi(S^t|s_0) \;=\; 1 \qquad si \quad S^t = \widetilde{S^t} \tag{13}$$

Donde $\widetilde{S^t}$ es un historia con probabilidad de ocurrencia positiva.
Toda esta informacion nos indica que:

$$q_t^0(S^t) \;=\; \beta^t \quad si \quad S^t = \widetilde{S^t} \tag{14}$$

Si $S^t \neq \widetilde{S^t}$, entonces $q_t^0(S^t) = 0$.
Para resolver las cantidades, ocupamos la restriccion presupuestaria:

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{S^t} q_t^0(s^t)[c_t^i(S^t) - y_t^i(S^t)] &= \frac{u_c(c_0^i(s_0))}{\mu_i}\sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{S^t}\beta^t\pi(S^t|s_0)[c_t^i(S^t) - y_t^i(S^t)] \\
&= \sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{S^t}\beta^t[c_t^i(S^t) - y_t^i(S^t)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

De esto se desprende que:

$$c_t^1 \;=\; (1-\beta)\sum_{j=0}^{\infty}\beta^{2j} = \frac{1}{1+\beta} \tag{15}$$

$$c_t^2 \;=\; (1-\beta)\beta\sum_{j=0}^{\infty}\beta^{2j} = \frac{\beta}{1+\beta} \tag{16}$$

Por lo tanto $c_t^1 > c_t^2$. La intuicion de este resultado, es que el agente 1 parte con dotacion en el momento t=0, y por lo tanto es mas rico que el agente 2.