CRECIMIENTO ECONÓMICO

SESIÓN: Modelos con comportamiento optimizador. El modelo de Ramsey.

Profesor: Miguel Casares

BANCO DE DESARROLLO
DE AMÉRICA LATINA

ÍNDICE

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

Los modelos estudiados hasta ahora (Solow-Swan, Harrod-Domar, AK,...) asumen tasa de ahorro constante y exógena, $0 < s < 1$

Supuesto criticable por dos motivos:

• No se pueden analizar los efectos de variaciones en los tipos de interés o los tipos impositivos sobre las decisiones de consumo y ahorro de los hogares (comportamiento invariante)

• La evidencia empírica muestra que la tasa de ahorro tiende a aumentar cuando crece la renta per cápita.

Solución:

Introducir comportamiento optimizador de los hogares para incorporar una determinación endógena y variable del consumo y el ahorro → Modelo de Ramsey

CAF BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

Modelo de Ramsey

Frank Ramsey (1928, *Economic Journal*), David Cass (1965, *Review of Economic Studies*) y Tjalling Koopmans (1965, *Econometrica*).

No hay sector público ni resto del mundo. En el sector privado se incorpora el comportamiento optimizador como consumidores de los hogares (familias) y como productores de las empresas. Comenzamos por describir los hogares.

Los hogares:

- Ofrecen trabajo a cambio de salarios
- Reciben ingresos en forma de intereses por sus activos en propiedad
- Compran bienes de consumo que les proporcionan bienestar (utilidad)
- Ahorran acumulando activos

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

Todos los hogares son idénticos entre sí → Familia (agente) representativa

La familia se preocupa por el bienestar presente y futuro de sus miembros y de todos los descendientes (dinastía). Altruismo intergeneracional. Preferencia por el presente frente al futuro (tasa de descuento).

La familia crece a una tasa constante y exógena, $\frac{\dot{L}}{L} = n > 0$, de tal forma que la evolución del tamaño de la familia y el de la población coinciden

$$L(t) = e^{nt} L(0)$$

Normalizando el valor inicial con la unidad, $L(0) = 1$, tenemos

$$L(t) = e^{nt}$$

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

La felicidad del hogar depende del nivel de consumo de sus miembros

$C(t)$ consumo total de la familia en el periodo t

$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}$ consumo per cápita de la familia en el periodo t

La medida de bienestar (felicidad) de la familia se obtiene a través de una función de utilidad que depende del nivel de consumo per cápita, $U(c)$ con las siguientes propiedades

$$U'(c) > 0 \; utilidad\ marginal\ positiva$$

$$U''(c) < 0 \; utilidad\ marginal\ decreciente\ (concavidad)$$

$$\lim_{c \to \infty} U'(c) = 0$$

$$\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty$$

Condiciones de Inada

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

Tasa de preferencia intertemporal, $\rho > 0$. Es la tasa de descuento que aplica la familia para traer a valor presente la utilidad de consumos futuros.

Alto ρ → Preferencia por consumo presente (impaciencia) → Poco ahorro

Bajo ρ → Preferencia por consumo futuro (paciencia) → Mucho ahorro

ρ también se puede interpretar como un indicador de egoísmo (compensatorio) intergeneracional

Las decisiones de consumo y ahorro de los hogares se van a determinar resolviendo un problema de optimización (maximización de la utilidad intertemporal) en tiempo continuo. Teniendo en cuenta todo lo anterior la función objetivo a maximizar es

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

$$\int_{0}^{\infty} U\big(c(t)\big)e^{nt}e^{-\rho t}dt$$

Juntando los términos de la función exponencial, nos queda

$$\int_{0}^{\infty} U\big(c(t)\big)e^{-(\rho-n)t}dt$$

Asumimos $\rho > n$ para tener un valor finito de la función objetivo.

$e^{-(\rho-n)t}$ actúa como factor de descuento de valores del periodo t al periodo 0. En tiempo discreto, la equivalencia sería $\frac{1}{\left(1+(\rho-n)\right)^{t}}$

A modo de ejemplos, calcular $e^{-(\rho-n)t}$ con $\rho = 0.05, n = 0.02$ para los periodos (años) $t = 1, t = 5, t = 50, t = 100$. Resultado:

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

$$t = 1 \;\rightarrow\; e^{-(\rho-n)t} = e^{-(0.05-0.02)1} = e^{-0.03} = 0.9704$$
$$t = 5 \;\rightarrow\; e^{-(\rho-n)t} = e^{-(0.05-0.02)5} = e^{-0.15} = 0.8607$$
$$t = 50 \;\rightarrow\; e^{-(\rho-n)t} = e^{-(0.05-0.02)50} = e^{-1.5} = 0.2231$$
$$t = 100 \;\rightarrow\; e^{-(\rho-n)t} = e^{-(0.05-0.02)100} = e^{-3} = 0.0498$$

El valor numérico de $e^{-(\rho-n)t}$ es decreciente en el tiempo → ponderaciones de la utilidad de consumos futuros en la suma de la función objetivo cada vez más pequeñas.

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

Los hogares son propietarios de 2 tipos de activos: capital físico (maquinaria) y capital financiero (préstamos o bonos concedidos). Si el hogar se endeudara (préstamos o bonos recibidos por una cuantía superior a los concedidos), el capital financiero sería negativo (hogar en posición deudora en vez de acreedora). En una economía cerrada no hay posibilidad de intercambio de activos financieros con el resto del mundo. Si todas las familias son idénticas (homogéneas) los préstamos netos al hogar representativo son 0.

Respecto a la oferta de trabajo, cada miembro de la familia ofrece inelásticamente una unidad de trabajo por unidad de tiempo y recibe un salario real w por cada unidad de tiempo trabajado (este supuesto se modificará en la sesión 12). El mercado de trabajo es competitivo y el salario flexible para alcanzar equilibrio sin desempleo. La renta laboral del hogar en el periodo t es $w(t)L(t)$.

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

El ahorro se destina a la inversión en acumulación (compra) de activos de acuerdo a la siguiente ecuación dinámica (eliminando la notación que hace referencia al tiempo)

$$\dot{A} = rA + wL - C$$

Dividiendo ambos lados entre la población tenemos

$$\frac{\dot{A}}{L} = r\frac{A}{L} + w - \frac{C}{L} = ra + w - c$$

Como el stock de activos per cápita lo hemos definido $a = \frac{A}{L}$ su derivada en el tiempo es

$$\dot{a} = \frac{\dot{A}L - \dot{L}A}{L^2} = \frac{\dot{A}}{L}\frac{L}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{A}{L} = \frac{\dot{A}}{L} - na$$

recordando que la población crece a tasa constante y exógena n. Insertando la penúltima ecuación en la última nos lleva a

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

$$\dot{a} = (r - n)a + w - c$$

Si el hogar puede pedir prestada una cantidad ilimitada de fondos al tipo de interés r, se generan incentivos para un comportamiento piramidal → siempre pedir financiación para el consumo presente más los intereses de la deuda anterior. El volumen de deuda crecería indefinidamente. Para evitar este comportamiento, exigimos con la siguiente condición que en el momento terminal el valor de los activos del hogar no pueda ser negativo:

$$\lim_{t\to\infty} a(t) e^{\int_0^t (r(v)-n)dv} \geq 0$$

Esta condición impide que el nivel de deuda crezca más deprisa que $r - n$.
A continuación, presentamos ya el problema de control óptimo:

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

$$Max \int_0^\infty U(c(t))e^{-(\rho-n)t}dt$$

sujeto a

$$\dot{a} = (r-n)a + w - c$$

La resolución del problema de control óptimo se basa en la metodología de Pontryagin descrita en el apéndice del libro de texto de Barro y Sala-i-Martin (páginas 604-618), con un ejemplo concreto desarrollado en las páginas 612-613. El ejercicio de optimización planteado se resuelve a través de los siguientes 5 pasos:

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

1. Identificar las variables de control (a decidir, aparecen en la función objetivo) y las variables de estado (dadas, aparecen con un punto arriba en la restricción). En el modelo de Ramsey, la variable de control es el consumo per cápita c y la variable de estado es el stock de activos per cápita a.

2. Escribir el Hamiltoniano que consta de la función objetivo en un periodo más la restricción igualada a cero y premultiplicada por la variable de su precio sombra, ν

$$J = U(c)e^{-(\rho-n)t} + \nu[(r-n)a + w - c\,]$$

3. Tomar la derivada del Hamiltoniano con respecto a las variables de control e igualar el resultado a 0

$$\frac{\partial J}{\partial c} = U'(c)\, e^{-(\rho-n)t} - \nu = 0$$

4. Tomar la derivada del Hamiltoniano con respecto a las variables de estado e igualar el resultado al valor negativo de la derivada de ν en el tiempo

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \nu(r-n) = -\dot{\nu}$$

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

5. Los hogares no dejan activos sin consumir en el momento terminal. Condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} a(t)e^{\left[-\int_0^t (r(v)-n)dv\right]} = 0$$

Combinaremos el resultado de las condiciones de primer orden resultantes del paso 3 y el paso 4 para hallar la ecuación de Euler → **senda intertemporal óptima para el consumo**

La condición del paso 3 implica un precio sombra de una unidad de la restricción presupuestaria del hogar equivalente al valor presente de la utilidad marginal de su consumo

$$v = U'(c)\, e^{-(\rho-n)t}$$

La condición del paso 4 genera la siguiente derivada en el tiempo para el precio sombra

$$\dot{v} = -v(r-n)$$

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

Calculando $\dot{v} \equiv \frac{\partial v}{\partial t}$ en $v = U'(c)\, e^{-(\rho-n)t}$ tenemos (aplicando la regla de la derivada de un producto)

$$\dot{v} = \frac{\partial U'(c)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t} e^{-(\rho-n)t} + (-(\rho-n))e^{-(\rho-n)t}U'(c)$$

$$\dot{v} = e^{-(\rho-n)t}(U''(c)\dot{c} - (\rho-n)U'(c))$$

Recordando que $\dot{v} = -v(r-n)$ por la condición de primer orden delos activos, sustituimos los valores obtenidos tanto de $\dot{v}$ como de v para dar con el siguiente resultado

$$e^{-(\rho-n)t}(U''(c)\dot{c} - (\rho-n)U'(c)) = -U'(c)\, e^{-(\rho-n)t}(r-n)$$

que puede simplificarse de manera sencilla para llegar a la siguiente relación entre el tipo de interés de los activos y la tasa de preferencia intertemporal

$$r = \rho - \frac{U''(c)\dot{c}}{U'(c)}$$

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

Una pequeña transformación en la expresión anterior nos permite incorporar la elasticidad de la utilidad marginal del consumo con respecto del consumo

$$r = \rho - \frac{U''(c)\dot{c}}{U'(c)}\frac{c}{c} = \rho - \frac{U''(c)c}{U'(c)}\frac{\dot{c}}{c} = \rho - Elas_{U'(c),c}\frac{\dot{c}}{c}$$

La interpretación microeconómica del resultado es la siguiente: la tasa de rendimiento del ahorro (consumo futuro) debe ser igual a la tasa de rendimiento del consumo presente. Los hogares reparten de manera óptima su ingreso entre consumo presente y consumo futuro cuando ambos rendimientos coinciden. Cuando $r = \rho$, no hay variación intertemporal del consumo, $\frac{\dot{c}}{c} = 0$.

El resultado de la expresión anterior hace conveniente el uso de la función de utilidad con Elasticidad de Sustitución Intertemporal Constante (ESIC):

$$U(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} \quad con \;\; \theta > 0$$

EL MODELO DE RAMSEY – LOS HOGARES

Si computamos la primera y segunda derivada de la función de utilidad,

$$U'(c) = c^{-\theta} \quad ; \qquad U''(c) = -\theta c^{-\theta-1}$$

podemos comprobar que

$$Elas_{U'(c),c} = \frac{U''(c)c}{U'(c)} = -\theta$$

y la ecuación que iguala los retornos del consumo presente y futuro queda así

$$r = \rho + \theta \frac{\dot{c}}{c}$$

La tasa de crecimiento del consumo per cápita tendrá un signo determinado por la diferencia entre el tipo de interés y la tasa de preferencia intertemporal

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

mientras que θ determina el tamaño del cambio. Discutir los 3 posibles escenarios.

EL MODELO DE RAMSEY – LAS EMPRESAS

Producen bienes, pagan salarios por el factor trabajo y rentas por el uso del factor capital. Tienen acceso a la tecnología de producción con progreso tecnológico potenciador del trabajo

$$Y(t) = F(K(t), L(t) \cdot T(t))$$

de donde extraemos y definimos el trabajo *efectivo* con su notación correspondiente a un "gorrito"

$$\hat{L}(t) = L(t) \cdot T(t)$$

La tecnología (como asumimos en el modelo Solow-Swan) crece a una tasa constante y exógena

$$\gamma_T \equiv \frac{\dot{T}}{T} = x$$

La producción y el capital por unidad de trabajo efectivo (eliminando la notación del tiempo) son:

$$\hat{y} = \frac{Y}{\hat{L}} \quad ; \quad \hat{k} = \frac{K}{\hat{L}}$$

La propiedad de rendimientos constantes a escala permite relacionarlos en la función de producción por unidad de trabajo efectivo:

EL MODELO DE RAMSEY – LAS EMPRESAS

$$\hat{y} = f(\hat{k})$$

Los productos marginales de los factores podemos expresarlos en función del capital por unidad de trabajo efectivo $\hat{k} = \frac{K}{\hat{L}}$. Usando $Y = \hat{L}\hat{y} = \hat{L}\, f(\hat{k})$, la productividad marginal del capital es

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \hat{L}\frac{\partial f(\hat{k})}{\partial \hat{k}}\frac{\partial \hat{k}}{\partial K} = f'(\hat{k})$$

Usando $Y = \hat{L}\hat{y} = LTf(\hat{k})$, la productividad marginal del trabajo es

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = T\left[\frac{\partial f(\hat{k})}{\partial \hat{k}}\frac{\partial \hat{k}}{\partial L}L + \frac{\partial L}{\partial L}f(\hat{k})\right] = T\left[f'(\hat{k})\left(\frac{-K}{L^2T}\right)L + f(\hat{k})\right] = T\left[-f'(\hat{k})\hat{k} + f(\hat{k})\right]$$

Normalizando el valor inicial de la tecnología a la unidad ($T(0) = 1$), el nivel de la tecnología en el periodo corriente es $T = e^{xt}$, que se sustituye en el resultado anterior para obtener:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = e^{xt}\left[f(\hat{k}) - f'(\hat{k})\hat{k}\right]$$

EL MODELO DE RAMSEY – LAS EMPRESAS

Las empresas arriendan el uso del capital físico de las familias pagando una renta R por unidad de capital.

El stock de capital se deprecia a una tasa constante δ por periodo.

La tasa neta de rendimiento del capital físico para la familia es $R - \delta$.

En equilibrio, las tasas de rentabilidad de los activos físicos y los activos financieros han de coincidir:

$$R - \delta = r \quad \rightarrow R = r + \delta$$

La función de beneficio de la empresa es

$$\pi = F(K, \hat{L}) - (r + \delta)K \; - wL$$

donde tomamos las derivadas con respecto al capital y trabajo obtenemos:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = \frac{\partial F(K,\, \hat{L})}{\partial K} - (r + \delta)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{\partial F(K,\, \hat{L})}{\partial L} - w$$

EL MODELO DE RAMSEY – LAS EMPRESAS

Si utilizamos las funciones de productividad marginal del capital y del trabajo e igualamos las derivadas parciales de la función de beneficios a cero, obtenemos la condiciones de primer orden:

$$f'(\hat{k}) = (r + \delta)$$

$$e^{xt}\left[f(\hat{k}) - f'(\hat{k})\hat{k}\right] = w$$

que determinan el comportamiento óptimo de la empresa a la hora de decidir las cantidades demandadas de capital y trabajo.

EL MODELO DE RAMSEY – EL EQUILIBRIO

Las restricción de recursos del conjunto de la economía se va a obtener utilizando la restricción presupuestaria de los hogares, las condiciones de equilibrio en los mercados de activos y el comportamiento optimizador de la empresa.

Comenzando por la restricción presupuestaria de la familia representativa:

$$\dot{a} = (r - n)a + w - c$$

Los activos financieros intercambiados en una economía cerrada son nulos y el equilibrio del mercado de activos implica que

$$a = k \quad ; \quad \dot{a} = \dot{k}$$

y la restricción presupuestaria queda así

$$\dot{k} = (r - n)k + w - c$$

El salario de equilibrio dado el comportamiento optimizador de las empresas en su demanda de trabajo es $w = e^{xt}\left[f(\hat{k}) - f'(\hat{k})\hat{k}\right]$, mientras que la demanda óptima de capital de la empresa implica que en equilibrio $f'\left(\hat{k}\right) = (r + \delta)$. Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación anterior obtenemos:

EL MODELO DE RAMSEY – EL EQUILIBRIO

$$\dot{k} = \left(f'(\hat{k}) - \delta - n\right)k + e^{xt}\left[f(\hat{k}) - f'(\hat{k})\hat{k}\right] - c$$

Necesitamos expresar $\dot{k}$ como función de $\hat{k}$ para relacionarlo con la parte derecha de la ecuación.

Recordemos que el capital por unidad de trabajo efectivo es

$$\hat{k} = \frac{K}{\hat{L}} = \frac{K}{LT} = \frac{K}{Le^{xt}T(0)} = \frac{k}{e^{xt}T(0)}$$

Tal y como hemos asumido antes, el nivel inicial de la tecnología se normaliza en $T(0) = 1.0$, de tal forma que nos queda

$$\hat{k} = \frac{k}{e^{xt}} \quad \rightarrow \; k = e^{xt}\hat{k}$$

Aplicando la derivada de un producto para hallar $\dot{k}$ tenemos que

$$\dot{k} = xe^{xt}\hat{k} + \dot{\hat{k}}e^{xt}$$

Si sustituimos este resultado en la parte izquierda de la restricción presupuestaria transformada del hogar y las relaciones $k = e^{xt}\hat{k}$ y $c = e^{xt}\hat{c}$ en la parte derecha obtenemos

EL MODELO DE RAMSEY – EL EQUILIBRIO

$$xe^{xt}\hat{k} + \dot{\hat{k}}e^{xt} = \left(f'(\hat{k}) - \delta - n\right)e^{xt}\hat{k} + e^{xt}\left[f(\hat{k}) - f'(\hat{k})\hat{k}\right] - e^{xt}\hat{c}$$

Observando que e^{xt} aparece con carácter multiplicativo en todos los términos, mientras que $f'(\hat{k})\hat{k}$ se cancela en la parte derecha, podemos alcanzar la siguiente simplificación

$$x\hat{k} + \dot{\hat{k}} = (-\delta - n)\hat{k} + f(\hat{k}) - \hat{c}$$

Finalmente, despejando $\dot{\hat{k}}$ conseguimos escribir la ecuación que determina la evolución del capital por unidad de trabajo efectivo a lo largo del tiempo

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + \delta + n)\hat{k}$$

Esta ecuación recuerda a la del modelo Solow-Swan al establecer la comparación entre el ahorro (inversión) por unidad de trabajo efectivo y los costes de mantenimiento del capital por unidad de trabajo efectivo. El ahorro se determina de manera endógena y una ecuación de comportamiento adicional es necesaria para determinar $\hat{c}$.

EL MODELO DE RAMSEY – EL EQUILIBRIO

En la sección en la que describimos el comportamiento de los hogares en el modelo de Ramsey (y asumimos función de utilidad de elasticidad constante), se alcanzó la siguiente ecuación dinámica del consumo

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

Dado que $c = e^{xt}\hat{c}$,

$$\dot{c} = xe^{xt}\hat{c} + \dot{\hat{c}}e^{xt}$$

y la ecuación dinámica del consumo en términos de $\hat{c}$ queda así

$$\frac{xe^{xt}\hat{c} + \dot{\hat{c}}e^{xt}}{e^{xt}\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

o de manera más simplificada

$$x + \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$$

EL MODELO DE RAMSEY – EL EQUILIBRIO

Alternativamente, tal y como plantea el libro de texto, podemos resolver la ecuación dinámica para la tasa de crecimiento del consumo por unidad de trabajo efectivo de la siguiente manera:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(r - \rho - \theta x)$$

El comportamiento de los hogares y las empresas, junto a las condiciones de equilibrio, se resume en las siguientes dos ecuaciones que determinan endógenamente la evolución de dos variables endógenas $(\hat{k}, \hat{c})$

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + \delta + n)\hat{k}$$

$$\dot{\hat{c}} = \hat{c}\frac{1}{\theta}(r - \rho - \theta x)$$

Ambas ecuaciones, conjuntamente van a determinar la dinámica de transición a corto plazo (diagrama de fase) y los posibles estados estacionarios hacia los que evoluciona la economía a largo plazo. (Nótese que $\hat{y} = f(\hat{k})$ para determinar la producción por unidad de trabajo efectivo).

Resultado teórico interesante

El modelo de Ramsey tiene un comportamiento equivalente para la producción, el capital y el consumo en los siguientes 3 entornos alternativos:

1. Existen mercados competitivos de bienes, factores productivos y activos (economía de mercado, descentralizada).
2. Las familias (hogares) tienen acceso a la tecnología de producción neoclásica con progreso tecnológico y no existen ni empresas ni mercados (economía de Robinson Crusoe).
3. Las decisiones económicas se diseñan centralizadamente. La economía está dirigida por un planificador social que toma como objetivos suyos la maximización del bienestar de las familias y del beneficio de las empresas (economía de planificación central).

EL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO ESTACIONARIO

Una vez descrito el comportamiento de los hogares y las empresas en el modelo de Ramsey vamos a estudiar su equilibrio a largo plazo a través del análisis del Estado Estacionario (EE). Recordamos que el EE se define como la situación de equilibrio en la que todas las variables del modelo están creciendo a una tasa constante a lo largo del tiempo.

La ecuación dinámica del consumo (obtenida resolviendo el problema de optimización de los hogares) determina la tasa de crecimiento del consumo por unidad de trabajo efectivo en cada periodo

$$\gamma_{\hat{c}} \equiv \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(r - \rho - \theta x)$$

donde vamos a introducir la productividad marginal del capital por unidad de trabajo efectivo utilizando la condición de equilibrio $f'(\hat{k}) = (r + \delta)$

EL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO ESTACIONARIO

$$\gamma_{\hat{c}} \equiv \frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left(f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right)$$

La condición de EE ($\gamma_{\hat{c}}$ constante) implica que la productividad marginal del capital por unidad de trabajo efectivo sea un valor fijo. Al cumplirse la propiedad de rendimientos marginal decrecientes:

- Si $\hat{k}$ fuera creciente en EE la productividad marginal $f'(\hat{k})$ sería decreciente
- Si $\hat{k}$ fuera decreciente en EE la productividad marginal $f'(\hat{k})$ sería creciente

La única forma de garantizar que $f'(\hat{k})$ sea constante es con un $\hat{k}$ constante. Esto implica

$$\dot{\hat{k}} = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma_{\hat{k}} = 0$$

EL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO ESTACIONARIO

Si $\hat{k}$ es constante en EE, la producción por unidad de trabajo efectivo tiene que ser también constante en EE

$$\hat{y} = f\left(\hat{k}\right)$$

porque depende exclusivamente de $\hat{k}$. Así que en EE:

$$\dot{\hat{y}} = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma_{\hat{y}} = 0$$

Respecto al consumo por unidad de trabajo efectivo en EE, podemos insertar la condición $\dot{\hat{k}} = 0$ en la ecuación dinámica de acumulación del capital y obtener

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (x + \delta + n)\hat{k}$$

Como $\hat{k}$ es constante en EE, $\hat{c}$ ha de ser constante también al depender exclusivamente de $\hat{k}$:

$$\dot{\hat{c}} = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma_{\hat{c}} = 0$$

EL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO ESTACIONARIO

Cualquier variable per cápita se puede expresar como el producto de la variable tecnológica multiplicada por la correspondiente variable por unidad de trabajo efectivo. Por ejemplo, el producto per cápita

$$y = T\hat{y} = e^{xt}\hat{y}$$

asumiendo un valor inicial de la tecnología nulo.

La tasa de crecimiento de la variable per cápita es la suma de la tasa de crecimiento de la tecnología y de la variable por unidad de trabajo efectivo:

$$\gamma_y = x + \gamma_{\hat{y}}$$

En EE ya hemos demostrado que $\gamma_{\hat{y}} = 0$. Por tanto, en EE la tasa de crecimiento de la variable per cápita coincide con la tasa de crecimiento de la tecnología

$$\gamma_y = x$$

La argumentación puede repetirse para γ_k, γ_c .

EL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO ESTACIONARIO

Las variables agregadas son el producto de la población por la variable per cápita. Por ejemplo, el producto agregado es

$$Y = yL$$

con lo que su tasa de crecimiento es la suma de las tasas de crecimiento del producto per cápita y la población

$$\gamma_Y = \gamma_y + \gamma_L = \gamma_y + n$$

La argumentación puede repetirse para $\gamma_K,\ \gamma_C$.

Conclusión. Tasas de crecimiento en el EE del modelo de Ramsey:

$$\gamma_{\hat{k}} = \gamma_{\hat{y}} = \gamma_{\hat{c}} = 0$$
$$\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = \gamma_T = x$$
$$\gamma_K = \gamma_Y = \gamma_C = x + n$$
$$\gamma_L = n$$

EL MODELO DE RAMSEY – EL DIAGRAMA DE FASES Y LA DINÁMICA DE TRANSICIÓN HACIA EL ESTADO ESTACIONARIO

El diagrama de fase surge al representar gráficamente las ecuaciones dinámicas del modelo de Ramsey que recogen la evolución del capital y del consumo.

Más concretamente igualamos a cero tanto $\dot{\hat{k}}$ como $\dot{\hat{c}}$ en ambas ecuaciones dinámicas y obtenemos funciones en $\hat{k}$

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (x + \delta + n)\hat{k}$$

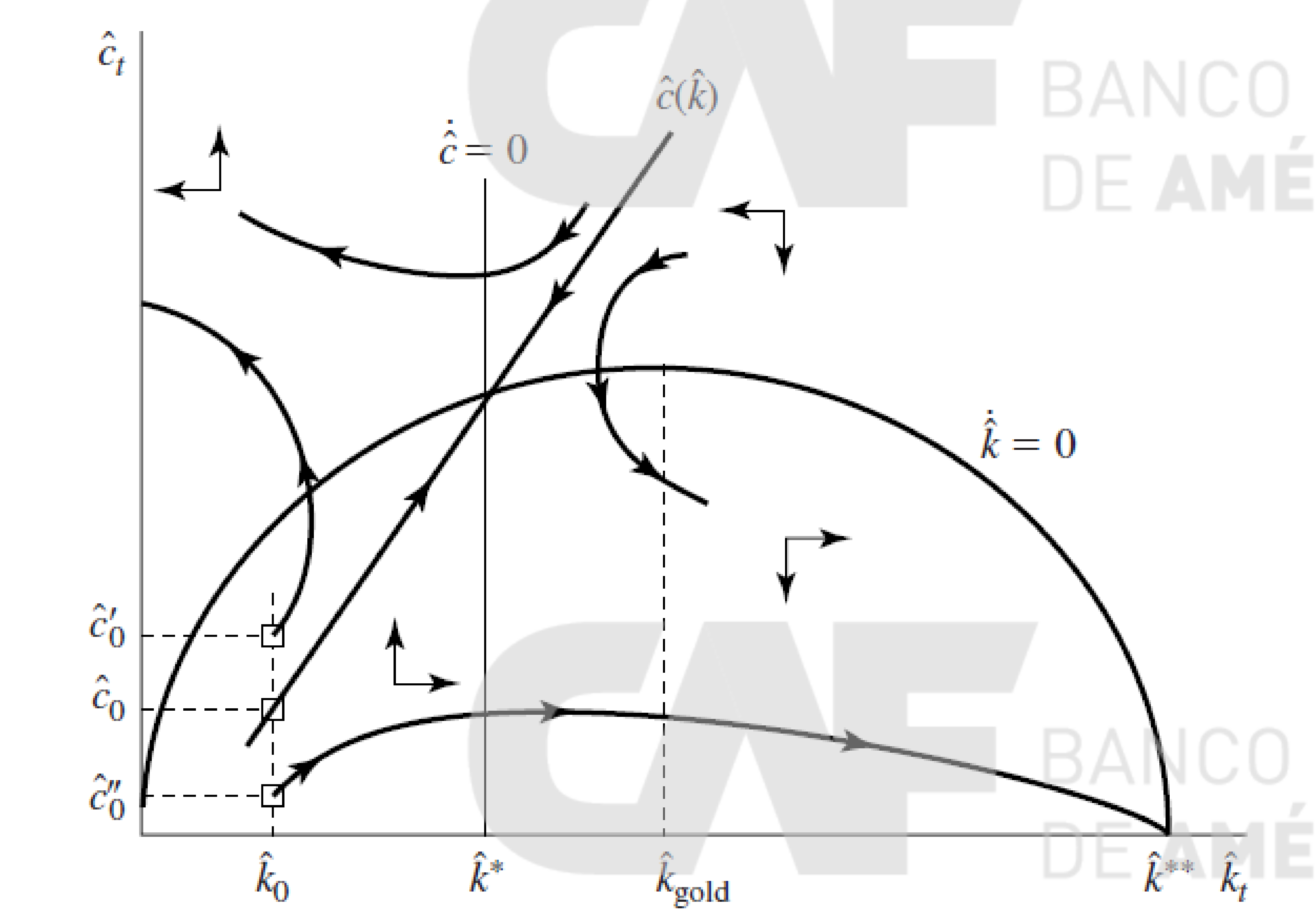
$$0 = f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x$$

además de $0 = \hat{c}$.

Estas funciones nos permiten identificar analíticamente los valores de $\hat{k}$ y de $\hat{c}$ en el EE. Se recomienda a los estudiantes hallar estas soluciones para el caso de una tecnología Cobb-Douglas con progreso tecnológico potenciador del trabajo.

Efectuemos, con cuidado y con detalle, el diagrama de fase del modelo de Ramsey:

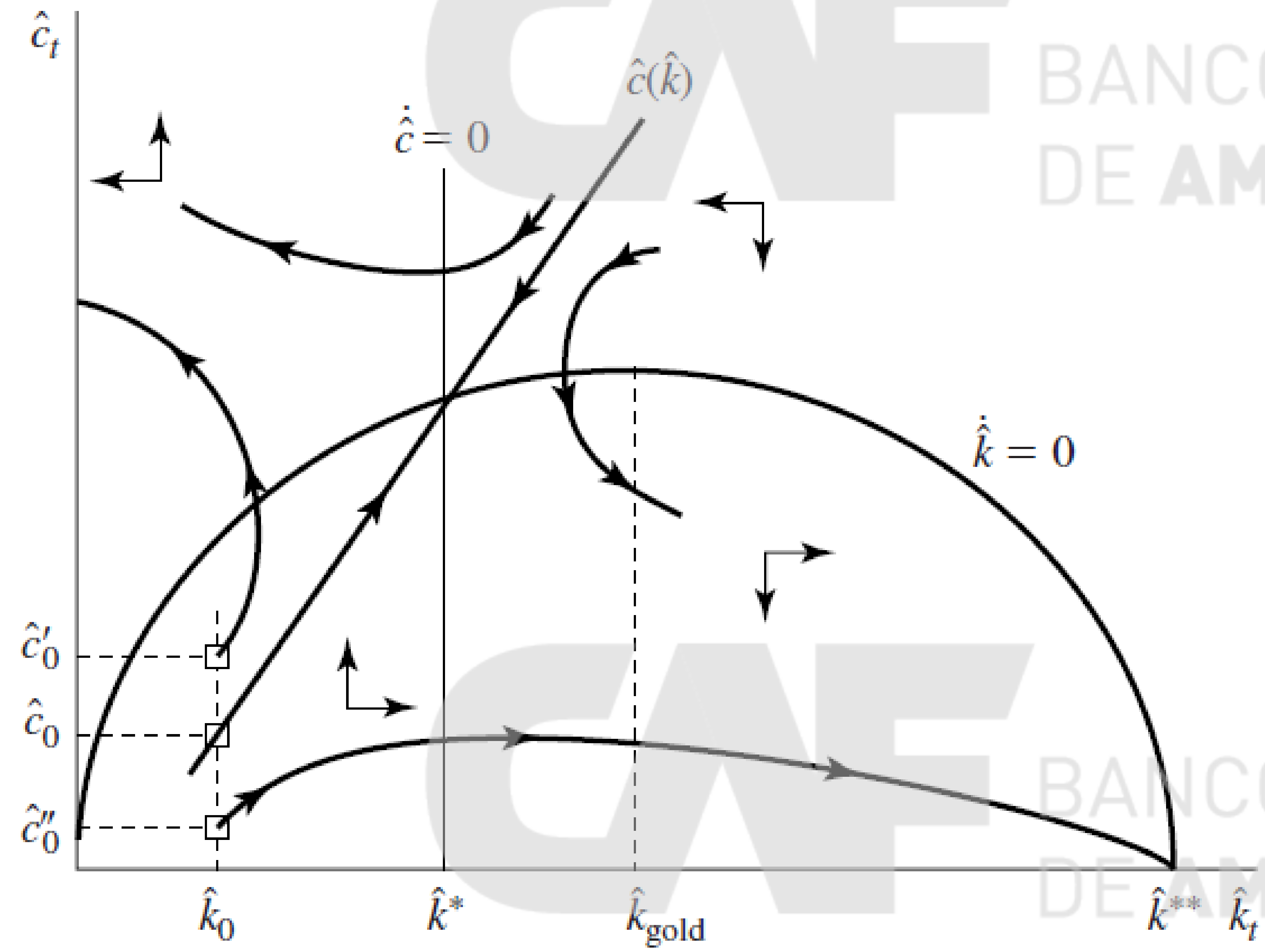
EL MODELO DE RAMSEY – EL DIAGRAMA DE FASES Y LA DINÁMICA DE TRANSICIÓN HACIA EL ESTADO ESTACIONARIO



Comprobar:

- Representación ecuaciones dinámicas con $\dot{\hat{k}} = \dot{\hat{c}} = 0$
- Dirección de las variables en los cuatro cuadrantes
- Candidatos a EE
- Senda única de aproximación al EE
- Capital de la regla de oro

EL MODELO DE RAMSEY – EL DIAGRAMA DE FASES Y LA DINÁMICA DE TRANSICIÓN HACIA EL ESTADO ESTACIONARIO



Por debajo de $\dot{\hat{k}} = 0$, el consumo $\hat{c}$ es bajo para un mismo $\hat{k}$. La ecuación dinámica

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + \delta + n)\hat{k}$$

da un crecimiento del capital por unidad de trabajo efectivo $\dot{\hat{k}} > 0$ (flechas hacia la derecha). Por encima de $\dot{\hat{k}} = 0$, $\hat{c}$ es alto para un mismo $\hat{k}$, obtenemos un $\dot{\hat{k}} < 0$ (flechas hacia izquierda).

A la izquierda de $\dot{\hat{c}} = 0$, el capital $\hat{k}$ es bajo para un mismo $\hat{c}$. La ecuación dinámica

$$\dot{\hat{c}} = \hat{c}\frac{1}{\theta}\left(f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right)$$

da un crecimiento del consumo por unidad de trabajo efectivo $\dot{\hat{c}} > 0$ (flechas hacia arriba). A la derecha de $\dot{\hat{c}} = 0$, $\hat{k}$ es alto para un mismo $\hat{c}$, obtenemos un $\dot{\hat{c}} < 0$ (flechas hacia abajo).

EL MODELO DE RAMSEY – EL DIAGRAMA DE FASES Y LA DINÁMICA DE TRANSICIÓN HACIA EL ESTADO ESTACIONARIO

El capital de la regla de oro siempre es superior al capital del EE en el modelo de Ramsey. ¿Por qué?

El capital por unidad de trabajo efectivo de la regla de oro es el que maximiza el consumo por unidad de trabajo efectivo en EE. Aplicando la condición de EE, $\dot{\hat{k}} = 0$, en la ecuación dinámica de acumulación del capital nos queda una función que relaciona $\hat{c}$ con $\hat{k}$

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (x + \delta + n)\hat{k}$$

Para hallar el valor de $\hat{k}$ que maximiza $\hat{c}$ tomamos la derivada de $\hat{c}$ con respecto de $\hat{k}$ igualamos a cero y obtenemos

$$f'(\hat{k}_{oro}) = x + \delta + n \quad \rightarrow \quad \hat{k}_{oro}$$

EL MODELO DE RAMSEY – EL DIAGRAMA DE FASES Y LA DINÁMICA DE TRANSICIÓN HACIA EL ESTADO ESTACIONARIO

$$f'\left(\hat{k}_{oro}\right) = x + \delta + n$$

En el EE al que se dirige la senda óptima de consumo y capital del modelo de Ramsey se cumple que

$$f'\left(\hat{k}^*\right) = \delta + \rho + \theta x$$

La condición de transversalidad, $\lim_{t\to\infty} k(t)e^{\left[-\int_0^t (r(v)-n)dv\right]} = 0$, exige que el capital per cápita crezca a una inferior a $r - n$, es decir

$$x < r - n$$

En el equilibrio del EE se cumple que $f'\left(\hat{k}^*\right) = r + \delta$ por la demanda de capital de las empresas y el libre arbitraje en los mercados de activos. Utilizando la ecuación anterior sobre $f'\left(\hat{k}^*\right)$ tenemos $r + \delta = \delta + \rho + \theta x$, o bien

$$r = \rho + \theta x$$

EL MODELO DE RAMSEY – EL DIAGRAMA DE FASES Y LA DINÁMICA DE TRANSICIÓN HACIA EL ESTADO ESTACIONARIO

Insertando $r = \rho + \theta x$ en la condición de transversalidad $x < r - n$, obtenemos

$$x < \rho + \theta x - n$$

Recordemos nuestros dos valores de referencia del capital por unidad de trabajo efectivo

$$f'(\hat{k}_{oro}) = \delta + x + n$$

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \theta x$$

Si $x < \rho + \theta x - n$, tenemos que $x + n < \rho + \theta x$ así que

$$\delta + x + n < \delta + \rho + \theta x$$

La productividad marginal con $\hat{k}_{oro}$ es por tanto menor que la que se alcanza con $\hat{k}^*$ en el EE. La propiedad de rendimientos marginales decrecientes implica que

$$\hat{k}^* < \hat{k}_{oro}$$

EL MODELO DE RAMSEY – EL DIAGRAMA DE FASES Y LA DINÁMICA DE TRANSICIÓN HACIA EL ESTADO ESTACIONARIO

El modelo de Ramsey es ineficiente a largo plazo.

El EE al que nos lleva nuestro comportamiento de corto plazo tiene un $\hat{k}^*$ demasiado bajo, inferior a $\hat{k}_{oro}$, que muestra un comportamiento de los hogares excesivamente preocupado por el consumo presente y con poco ahorro e inversión en acumulación de capital.

Solución: La tasa de preferencia intertemporal (subjetiva) de los hogares tendría que "ajustarse" para ir moviendo el capital del EE hacia el de la regla de oro

$$x + n = \rho + \theta x$$

Es decir, reducir ρ hasta situarlo en este valor:

$$\rho = x(1 - \theta) + n$$

A largo plazo, los hogares han de ser todavía más *racionales* que lo que recomienda el ejercicio de maximización de su bienestar para las decisiones a corto plazo.