Teoría del Crecimiento Endógeno: Primera Generación

Félix Jiménez

Profesor

ECO 339 Teoría del Crecimiento

Notas de Clase Nº 12

2016

Temario

1. Introducción: el Modelo General
2. Modelo de Frenkel
3. Modelo de Arrow
4. Dos direcciones de investigación

Modelos de Crecimiento Endógeno

Modelo General

(1)	$Y = AK^{\beta}(HL)^{1-\beta}$	Función de producción con progreso técnico a la Harrod «aumentador de trabajo»
(2)	$S = sY$	Función de ahorro
(3)	$I = \frac{dK}{dt} = \dot{K}$	Inversión, sin depreciación
(4)	$S = I$	Condición de equilibrio
(5)	$L = L_0 e^{nt}$	Crecimiento de la fuerza de trabajo
(6)	$H = H_0 e^{\rho t}$	Progreso técnico

Félix Jiménez
Departamento de Economía

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Modelos de Crecimiento Endógeno

R. Harrod (1939), «An essay in dynamic theory», *Economic Journal*, Vol. 49, y E. Domar (1946), «Capital expansion, rate of growth, and employment», en *Econometrica*, Vol 14

(1) $Y = AK$

(2) $S = sY$

(3) $I = \frac{dK}{dt} = \dot{K}$

(4) $S = I$

$$sY = \frac{1}{A}\dot{Y}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v}$$

donde: $v = \frac{1}{A}$

Dado s y una relación deseada v, la *demanda efectiva crecerá a una tasa consistente con la utilización normal de la capacidad si y solo si, la tasa actual coincide con la tasa garantizada.* En este resumen se supone que la depreciación es cero.

Hace énfasis en las dificultades alrededor de la formación de expectativas correctas, sugiriendo estar más interesado en las propiedades de inestabilidad que en un camino hacia el estado estacionario.

Modelos de Crecimiento Endógeno

La ecuación del crecimiento no implica que un incremento de la tasa de ahorro o de la propensión a ahorrar, s, eleve la tasa de crecimiento económico (debido a la inestabilidad).

Lo que la ecuación implica es que si el país desea elevar la tasa de crecimiento, debe primero elevar s. Esta es una variable exógena. *Pero desde la perspectiva keynesiana esto ocurre aumentando la inversión*.

Hay una fuerte similitud entre la tasa garantizada (s/v) y el punto de vista convencional acerca del ahorro como desencadenante del crecimiento.

¿Por qué? Una posible interpretación es la siguiente: «*La ecuación de la tasa garantizada representa la versión dinámica de la ley de Say*. *Hay equilibrio entre la demanda y la oferta agregadas bajo el supuesto de que todos los ahorros correspondientes al grado de utilización normal de la capacidad productiva son invertidos*».

Modelos de Crecimiento Endógeno

Pero esta interpretación deja sin explicar el mecanismo de ajuste entre ahorro e inversión. *La tasa s puede ser vista como I/Y.*

El monto de inversión, al menos parcialmente, es dependiente de las perspectivas de la economía y de las expectativas de los inversionistas. Por lo tanto, la inversión agregada es bastante volátil. Cuando los inversionistas son optimistas acerca del futuro de la economía y detectan retornos altos sobre su capital, la inversión aumenta, y cuando el pesimismo está a la orden del día los inversionistas evitan arriesgar.

Es importante recordar que para los neoclásicos las fuerzas del mercado llevan a la economía al equilibrio, el mismo que está caracterizado por el pleno empleo de los factores productivos.

Modelos de Crecimiento Endógeno

R. Solow (1956), «A Contribution to the theory of economic growth», *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70

(1) $\quad Y = K^{\beta} L^{1-\beta}$

(2) $\quad S = sY$

(3) $\quad I = \frac{dK}{dt} = \dot{K}$

(4) $\quad S = I$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk \quad \Rightarrow \quad sy = \dot{k} + nk$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{s}{v} = n$$

donde: $\begin{cases} L = L_0 e^{nt} \\ v = \frac{K}{Y} \end{cases}$

Si hay progreso técnico, entonces: $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{s}{v} = n + \rho$

Modelos de Crecimiento Endógeno

La paradoja de Solow:

La tasa de crecimiento es independiente de la propensión a ahorrar. Es exógena.

La propensión a ahorrar (s) afecta el stock de capital, pero no a la tasa de acumulación de capital, en el estado estacionario.

La propensión a ahorrar (s) afecta el nivel de producto per cápita, así como el nivel del capital per cápita, pero no afecta la tasa de crecimiento de largo plazo.

La conclusión es distinta en Harrod-Domar: el ahorro es el principal determinante del crecimiento económico: una elevada tasa de ahorro es necesaria para tener altas tasas de crecimiento. ¡O un elevado coeficiente de inversión!

Modelos de Crecimiento Endógeno

El modelo de M. Frankel (1962), «The production function in allocation and Growth: a synthesis», en *American Economic Review*, Vol. 52.

(1’) $Y_i = AK_i^{\beta}(HL_i)^{1-\beta}$ (n firmas pequeñas e idénticas tienen esta función de producción). Por agregación se obtiene (1)

(1) $Y = AK^{\beta}(HL)^{1-\beta}$

(2) $S = sY$

(3) $I = \frac{dK}{dt} = \dot{K}$

(4) $S = I$

(5) $L = L_0 e^{nt}$

(6) $H = \left(\frac{K}{L}\right)^{\gamma}$ (es denominado “Modifier” que indica el grado de desarrollo de la economía. Externalidad que incrementa la productividad del trabajo)

Frankel supone que *γ* =1. Las decisiones de aumentar la dotación de capital per cápita generan en el agregado externalidades positivas que *inducen a un crecimiento proporcional en la eficiencia de trabajo, lo que impide la caída de la productividad marginal del capital*, que de otro modo hubiera ocurrido

Modelos de Crecimiento Endógeno

La *externalidad no puede ser apropiada por una firma individual* puesto que es un resultado social independiente de las decisiones de las firmas. Por este resultado social cada firma aumenta su dotación de capital per cápita. Así, el cambio técnico es exógeno a la firma, pero endógeno a la economía.

Sustituyendo en (1), se obtiene el modelo AK:

$$Y = AK^{\beta}(K)^{1-\beta}$$

$$Y = AK$$

Esto nos regresa a Harrod-Domar a nivel macro, aunque a nivel microeconómico retiene la función de producción neoclásica.

El papel del trabajo en la función de producción agregada se cancela, debido al «modifier». El trabajo representa el «factor no reproducible». Por la razón anterior, el crecimiento del producto es proporcional a la tasa de crecimiento del stock de capital.

Modelos de Crecimiento Endógeno

Ejercicio

Suponga que las ecuaciones de la función de producción tienen la siguiente forma:

$$Y_i = AHK_i^{\alpha} L_i^{1-\alpha}$$

$$Y = AHK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

No haga supuesto alguno acerca del comportamiento del *modifier. ¿Cómo debe ser* $\alpha + \gamma$ *para que haya crecimiento endógeno?.*

Halle las tasas de crecimiento de *Y* y de *K* cuando hay estado estacionario y cuando no hay.

Diga, además, cuándo en este modelo la función de producción agregada adquiere la forma *AK.*

Modelos de Crecimiento Endógeno

Solución

1) Hallamos la tasa de crecimiento del capital per cápita. Reemplazando el *modifier* en la función de producción:

$$Y = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\gamma}(K)^{\alpha}(L)^{1-\alpha} \quad \rightarrow Y = A(K)^{\alpha+\gamma}(L)^{1-\alpha-\gamma}$$

De la condición de equilibrio S=I (no olvidar que la depreciación es cero):

$$\dot{K} = sA(K)^{\alpha+\gamma}(L)^{1-\alpha-\gamma}$$

En términos per cápita:

$$\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + nk = sA(k)^{\alpha+\gamma} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{k}}{k} = sA(k)^{\alpha+\gamma-1} - n$$

2) Inferimos la condición para que haya rendimientos decrecientes del capital. Se obtiene la segunda derivada del producto marginal del capital o se deriva la tasa de crecimiento del capital per cápita con respectivo al capital per cápita, y se deduce la condición para que sean menores que cero. Esta condición es: $\alpha + \gamma < 1$

Modelos de Crecimiento Endógeno

3) Las tasas de crecimiento de K y de Y son:

$$\frac{\dot{K}}{K} = sA(k)^{\alpha+\gamma-1} \qquad \frac{\dot{Y}}{Y} = (\alpha+\gamma)\left[sA(k)^{\alpha+\gamma-1} - n\right] + n$$

4) Estas tasas son iguales a *n*, cuando hay rendimientos marginales decrecientes. Esto es así porque en el estado estacionario el capital per cápita no crece. La condición es que: $\alpha + \gamma < 1$

5) Las tasas de crecimiento ya no son iguales a *n*, si: $\alpha + \gamma \geq 1$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sA(k)^{\alpha+\gamma}}{k} - n > 0$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = sA(k)^{\alpha+\gamma-1} > n$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = (\alpha+\gamma)\frac{\dot{k}}{k} + n$$

6) El caso especial (Y=AK) es cuando: $\gamma = 1 - \alpha$

Modelos de Crecimiento Endógeno

K. J. Arrow (1962), «The economic implications of learning by doing», en *Review of Economic Studies*, Vol. 29.

Su trabajo es la principal inspiración de la Nueva Teoría del Crecimiento o de la Teoría del Crecimiento Endógeno (EGT).

La inversión no sólo es portadora de cambio técnico, sino su fuente. *Para Frankel la acumulación de capital a nivel agregado es la fuente de los rendimientos crecientes*, para Arrow los rendimientos crecientes están relacionados con el proceso de aprendizaje.

(1) $Y = AK^{\beta}(HL)^{1-\beta}$

(2) $S = sY$

(3) $I = \frac{dK}{dt} = \dot{K}$

(4) $S = I$

(5) $L = L_0 e^{nt}$

(6) $H = K^{\alpha}$ (donde $0 < \alpha < 1$).

Félix Jiménez
Departamento de Economía

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Modelos de Crecimiento Endógeno

El progreso técnico aumentador de trabajo es una externalidad social del proceso de acumulación que ocurre a nivel de las firmas. Esta externalidad consiste de un proceso de aprendizaje derivado de la acumulación de experiencia adquirida con el uso de «preceding vintages» y que conduce al mejoramiento del diseño de las generaciones de equipos más recientes. Reemplazando en (1) se obtiene:

$$Y = AK^{\beta}(K)^{\alpha(1-\beta)}L^{1-\beta} \quad \Rightarrow \quad Y = AK^{\beta+\alpha(1-\beta)}L^{(1-\beta)}$$

Esta ecuación exhibe rendimientos crecientes a escala. La suma de los exponentes es mayor que la unidad.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = (\beta + \alpha(1-\beta))\frac{\dot{K}}{K} + (1-\beta)n$$

En el estado estacionario: $\dot{\tilde{k}} = \dot{\tilde{y}} = 0$, entonces: $\frac{\dot{Y}}{Y} - (\beta + \alpha(1-\beta))\frac{\dot{Y}}{Y} = (1-\beta)n$

$$\frac{\dot{Y}}{Y}(1-\beta)(1-\alpha) = (1-\beta)n \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{n}{1-\alpha}$$

Nota: El capital y producto per cápita está en unidades de eficiencia: (K/HL; Y/HL)

Y, en términos per cápita: $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{n\alpha}{1-\alpha}$

Modelos de Crecimiento Endógeno

Ejercicio:

Encontrar las tasas anteriores de crecimiento del producto y del producto per cápita.

Solución

1) Se calcula el ingreso per cápita en unidades de eficiencia (Y/HL)

$$\tilde{y} = \frac{Y}{HL} = \frac{AK^{\beta}(HL)^{1-\beta}}{HL} = A\left(\frac{K}{HL}\right)^{\beta}\left(\frac{HL}{HL}\right)^{1-\beta} \rightarrow \quad \tilde{y} = A\tilde{k}^{\beta}$$

2) Tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo, hallamos la tasa de crecimiento del producto per cápita en unidades de eficiencia

$$\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \frac{\dot{A}}{A} + \beta\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}}$$

Si suponemos que A es constante, la tasa de crecimiento del producto per cápita será:

$$\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \beta\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}}$$

Modelos de Crecimiento Endógeno

3) La tasa de crecimiento del producto per cápita medido de unidades de eficiencia es igual a cero en el estado estacionario. Hay estado estacionario porque este capital (medido en unidades de eficiencia) tiene rendimientos marginales decrecientes. Veamos:

$$\frac{\partial \beta A\tilde{k}^{\beta-1}}{\partial \tilde{k}} = (\beta-1)\beta A\tilde{k}^{\beta-2} < 0$$

4) Entonces en el estado estacionario: $\dot{\tilde{k}} = \dot{\tilde{y}} = 0$

5) Hallamos primero la tasa de crecimiento de K:

$$\tilde{k} = \frac{K}{HL} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{H}}{H} - \frac{\dot{L}}{L} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \alpha\frac{\dot{K}}{K} - n = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{K}}{K} = \frac{n}{1-\alpha}$$

6) Finalmente hallamos la tasa de crecimiento del producto per cápita y del producto agregado:

$$\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{H}}{H} - \frac{\dot{L}}{L} = 0 \rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\frac{\dot{K}}{K} - n \rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{n}{1-\alpha} \quad \rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = \frac{n}{1-\alpha} - n = \frac{\alpha n}{1-\alpha}$$

Modelos de Crecimiento Endógeno

Ninguna de esas tasas está relacionada con las decisiones endógenas de acumular capital; y, a pesar del supuesto de rendimientos crecientes a escala, la tasa de crecimiento *está todavía determinada por las variables exógenas n* y α.

Arrow fracasó en relacionar la tasa de crecimiento del producto, g, con la tasa de ahorro, s.

El problema del crecimiento endógeno es mostrar que puede haber una tasa constante de crecimiento sin un crecimiento exógeno de la fuerza de trabajo o un cambio técnico exógeno.

De $\mathrm{H} = \mathrm{K}^{\alpha}$ se obtiene que: $\frac{\dot{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}} = \alpha \frac{\dot{\mathrm{K}}}{\mathrm{K}}$

Como el coeficiente es menor que uno, el crecimiento de la eficiencia del trabajo es menos que proporcional al crecimiento del stock de capital. Por lo mismo, la acumulación endógena de capital no es capaz de originar un incremento proporcional en la fuerza de trabajo en unidades de eficiencia.

La función H anterior cumple la función de expandir los efectos crecimiento de la tasa de crecimiento exógena de la fuerza de trabajo.

Modelos de Crecimiento Endógeno

El modelo de Arrow es un importante avance con respecto al modelo Solow-Swan. El crecimiento de la productividad es independiente del cambio técnico exógeno. Pero, el crecimiento de la productividad sigue siendo dependiente del crecimiento exógeno de la fuerza de trabajo.

Si la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo en unidades de eficiencia es proporcional a la tasa de crecimiento del stock de capital (es decir, $\alpha=1$), la economía crecería impulsada por la acumulación de capital, libre tanto del crecimiento exógeno de la fuerza de trabajo o de cambio técnico exógeno.

¿Por qué Arrow no supuso que $\alpha=1$? Son posibles dos razones:

a) Podría ser que la evidencia empírica le sugería a Arrow que el progreso técnico no era un proceso acumulativo sin fin, y que algún motor externo, como la tasa de crecimiento de la población, era necesario.

b) La inconsistencia entre el supuesto referido al progreso técnico y el papel del trabajo en la teoría de la distribución marginalista o neoclásica.

Modelos de Crecimiento Endógeno

Dos principales direcciones de investigación: La segunda generación de modelos de crecimiento endógeno.

Hay dos direcciones de investigación (véase F. Jiménez, 2011) :

a) Modelos Seudo Harrod-Domar, inspirado y el «learning by doing» de Arrow y que reviven el modelo AK de Frankel . La idea dominante es eliminar de la función de producción el «factor no producido», para evitar cualquier fuente de rendimientos decrecientes del factor producido.

b) Modelos Neo exógenos. La idea dominante es integrar la ecuación de cambio técnico de Solow ($H = H_0 e^{\rho t}$) con una relación entre la tasa de cambio de la productividad del trabajo y la elección de la sociedad entre consumo presente y futuro. Esta elección afecta la productividad del trabajo vía los recursos dedicados a I&D, educación, infraestructura, etc.