CRECIMIENTO ECONÓMICO

SESIÓN: Oferta de trabajo y población

Profesor: Miguel Casares

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

ÍNDICE

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN

En esta sesión finalmente vamos a eliminar el supuesto sobre una población L constante en el tiempo o cuya tasa de crecimiento es constante y exógena, $\frac{\dot{L}}{L} = n$.

Se trata de supuestos que hemos incorporado en la construcción de los modelos de crecimiento para facilitar la obtención de resultados analíticos pero que obviamente no son corroborados por la evidencia que surge del mundo real.

Los cambios endógenos en la población pueden deberse, por ejemplo, a movimientos migratorios o a decisiones sobre la fertilidad de las familias. Ambas situaciones se estudiarán en los primeros dos apartados de la sesión.

En el tercer apartado de la sesión, vamos a incorporar una extensión al modelo de Ramsey que permita analizar la decisión entre trabajo y ocio de los hogares de manera que haya una variable que determine la fracción del tiempo total disponible que desea dedicarse a trabajar. Esta extensión permitirá medir la cantidad de trabajo como el producto entre la población activa y la fracción de tiempo que se desea trabajar.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA MIGRACIÓN EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO

El libro de texto de Robert Barro y Xavier Sala-i-Martin describe 3 modelos de crecimiento económico en los que se incorporan movimientos migratorios de las personas:

- Modelo de Solow-Swan con migración
- Modelo de Ramsey con migración
- Modelo de migración y crecimiento de Braun

Debido a las restricciones de tiempo vamos a explicar únicamente el papel de la inmigración en el modelo de Solow-Swan. Esto nos permitirá recordar los supuestos y las condiciones de equilibrio a largo plazo del modelo de Solow-Swan que presentamos al comienzo de este curso. Los detalles sobre los otros dos modelos se pueden encontrar en sus respectivos apartados del libro de texto.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA MIGRACIÓN EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO

Migración en el modelo de Solow-Swan

Estamos en una economía cerrada a bienes y activos pero no a la movilidad de personas.

$M(t)$ es el flujo de migrantes (positivo o negativo) que recibe una economía en el periodo t .

La tasa de crecimiento de la población nativa sigue siendo constante y exógena → n.

Por tanto la tasa de crecimiento de la población es (prescindiendo de los índices de tiempo)

$$\frac{\dot{L}}{L} = n + \frac{M}{L} = n + m$$

donde $m = M/L$ es la tasa neta de inmigración (que puede ser positiva o negativa).

Los inmigrantes contribuyen con su llegada al stock de capital (físico y humano) de la economía. En concreto, cada inmigrante aporta $\kappa > 0$ unidades de capital cuando se desplaza de una economía a otra. Por tanto, la inversión total es

$$I = \dot{K} + \delta K + \kappa M$$

En una economía cerrada al comercio de bienes y sin sector público el ahorro y la inversión coinciden, $S = I$.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA MIGRACIÓN EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO

Como supuesto simplificador del modelo de Solow-Swan la tasa de ahorro, $0 < s < 1$, representa una fracción constante y exógena de la renta, $S = sY$.

También mantendremos la función de producción neoclásica con progreso tecnológico potenciador del trabajo $Y = F(K, \hat{L})$, donde $\hat{L}$ representan unidades de trabajo efectivo, $\hat{L} = T \cdot L = e^{xt}T(0)L = e^{xt}L$, con un nivel tecnológico inicial normalizado en 1.0 y crecimiento tecnológico constante y exógeno a tasa x.

La igualdad entre ahorro e inversión la podemos reescribir así:

$$sF(K, \hat{L}) = \dot{K} + \delta K + \kappa M$$

Dividiendo ambos lados entre $\hat{L}$ y aprovechando los rendimientos constantes a escala de la función de producción tenemos la igualdad en términos de trabajo efectivo

$$sf(\hat{k}) = \frac{\dot{K}}{\hat{L}} + \delta\hat{k} + \kappa\frac{M}{\hat{L}}$$

teniendo en cuenta que $\hat{k} \equiv \frac{K}{\hat{L}} = \frac{K}{L \cdot T}$ es el capital por unidad de trabajo efectivo. La derivada en el tiempo de $\hat{k}$ es:

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA MIGRACIÓN EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO

$$\dot{\hat{k}} = \frac{\dot{K}(LT) - \left(\dot{L}T + \dot{T}L\right)K}{L^2T^2} = \frac{\dot{K}}{LT} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{LT} - \frac{\dot{T}}{T}\frac{K}{LT} = \frac{\dot{K}}{\hat{L}} - (n+m+x)\hat{k}$$

recordando que $\frac{\dot{L}}{L} = n + m$. Sustituyendo la expresión de $\frac{\dot{K}}{\hat{L}}$ proveniente de la igualdad entre ahorro e inversión, obtenemos

$$sf\left(\hat{k}\right) = \dot{\hat{k}} + (n+m+x)\hat{k} + \delta\hat{k} + \kappa\frac{M}{\hat{L}}$$

$$\dot{\hat{k}} = sf\left(\hat{k}\right) - (n+m+x+\delta)\hat{k} - \kappa\frac{M}{\hat{L}}$$

y definiendo $\hat{\kappa} \equiv \kappa e^{-xt}$ como la aportación de capital por cada inmigrante efectivo (ajustado con progreso tecnológico)

$$\dot{\hat{k}} = sf\left(\hat{k}\right) - (n+m+x+\delta)\hat{k} + \hat{\kappa}m = sf\left(\hat{k}\right) - (n+x+\delta)\hat{k} - m(\hat{k} - \hat{\kappa})$$

que establece la posibilidad de aumentar el stock de capital cuando el ahorro supera a la suma del coste de mantenimiento habitual y la aportación a este coste (positiva o negativa de la inmigración). Dividiendo ambos lados entre $\hat{k}$, la tasa de crecimiento del capital por unidad de trabajo efectivo, $\gamma_{\hat{k}} \equiv \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}$, resultante es:

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA MIGRACIÓN EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO

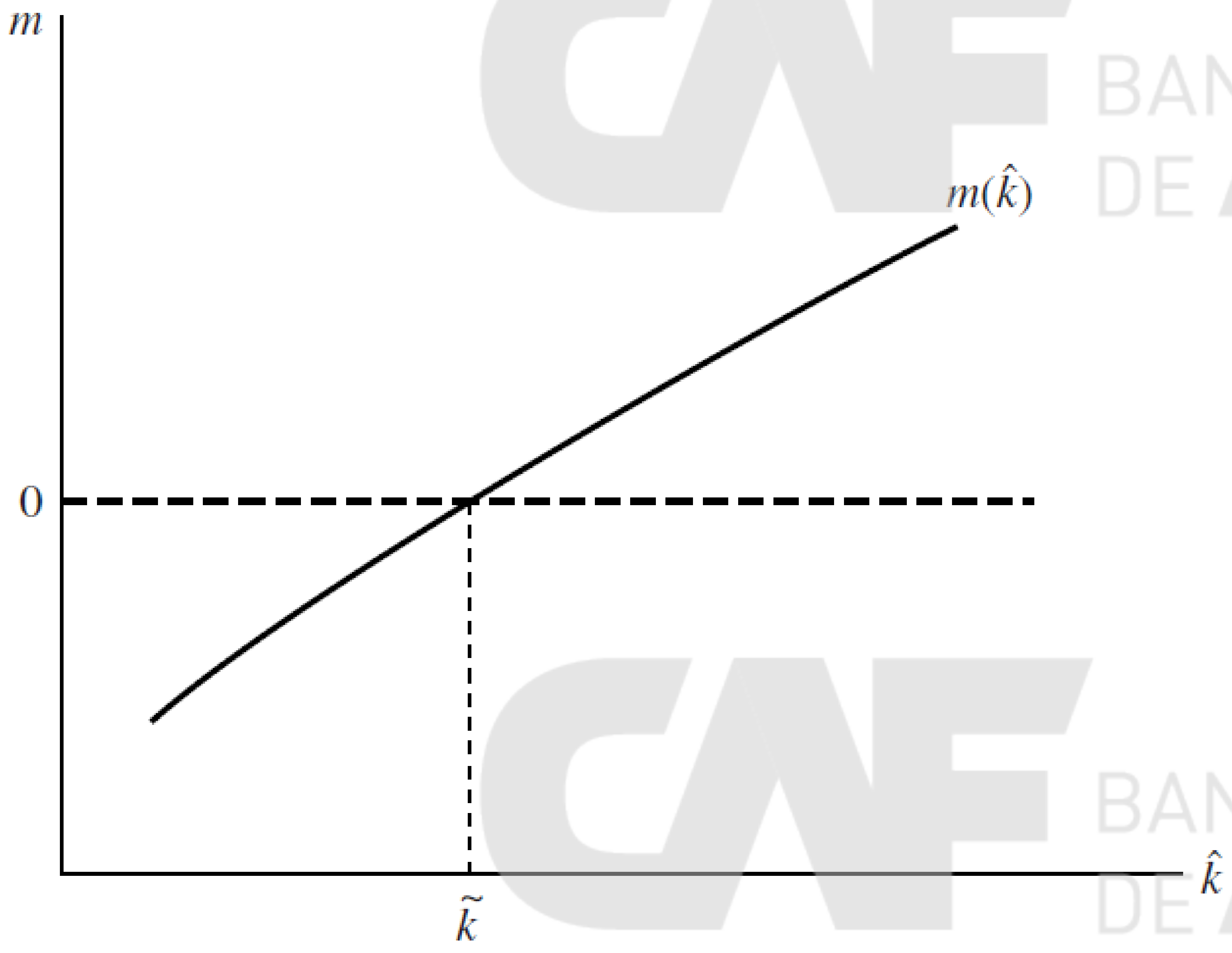
$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{sf(\hat{k})}{\hat{k}} - (n + x + \delta) - m(1 - \hat{\kappa}/\hat{k})$$

Obviamente, si la inmigración neta fuera nula, $m = 0$, o la aportación de capital de los inmigrantes sirviera exactamente para mantener el capital por unidad de trabajo efectivo actual, $\hat{\kappa} = \hat{k}$, tendríamos un comportamiento indistinguible del que proporciona la ecuación fundamental del modelo Solow-Swan sin movimientos migratorios. Si los inmigrantes no pudieran transferir nada de capital $\hat{\kappa} = 0$, el modelo sería equivalente al de Solow-Swan original con tasas de crecimiento de la población $n + m$.

Si $m > 0$ (receptores netos de inmigrantes) y $\hat{\kappa} < \hat{k}$ (contribución de capital de los inmigrantes inferior al stock actual) las necesidades de mantenimiento del capital aumentan y en el EE el valor de $\hat{k}^*$ va a disminuir. Por lo tanto, también tanto $\hat{y}^*$ como $\hat{c}^*$van a reducirse, iniciándose una senda de contracción económica (decrecimiento).

Vamos a suponer que los inmigrantes no tiene porque mantener un ratio $m = M/L$ constante, sino que su deseo de movilidad depende de la coyuntura económica. Así vamos a presentar una función de migración que establece una relación de signo positivo entre m y $\hat{k}$ del siguiente modo:

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA MIGRACIÓN EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO



$m(\hat{k})$

Función monótonamente creciente en $\hat{k}$ → $m'(\hat{k}) > 0$

Un aumento de $\hat{k}$ va a mejorar la productividad marginal del trabajo y el salario recibido por los trabajadores. Un mayor salario puede ser un incentivo para la movilidad geográfica.
Existe un stock de capital por unidad de trabajo efectivo, $\tilde{k}$, de "equilibrio" en saldos migratorios por que $m = 0$ para este nivel. Si $\hat{k} > \tilde{k}$ → $m > 0$ Inmigración neta
Si $\hat{k} < \tilde{k}$ → $m < 0$ Emigración neta

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA MIGRACIÓN EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO

El equilibrio a largo plazo (EE)

Como bien sabemos, en EE las tasas de crecimiento de todas las variables son constantes. Tal y como ocurre en el modelo de Solow-Swan sin migraciones, las variables per cápita van a crecer a la misma tasa $x > 0$ a la que crece (exógenamente) la tecnología.

Sin embargo, los niveles de estas variables en EE sí se van a ver afectados por las características de los movimientos migratorios. La condición de equilibrio a largo plazo ($\gamma_{\hat{k}} = 0$) implica

$$\frac{sf(\hat{k})}{\hat{k}} = (n + x + \delta) + m(\hat{k})(1 - \hat{\kappa}/\hat{k})$$

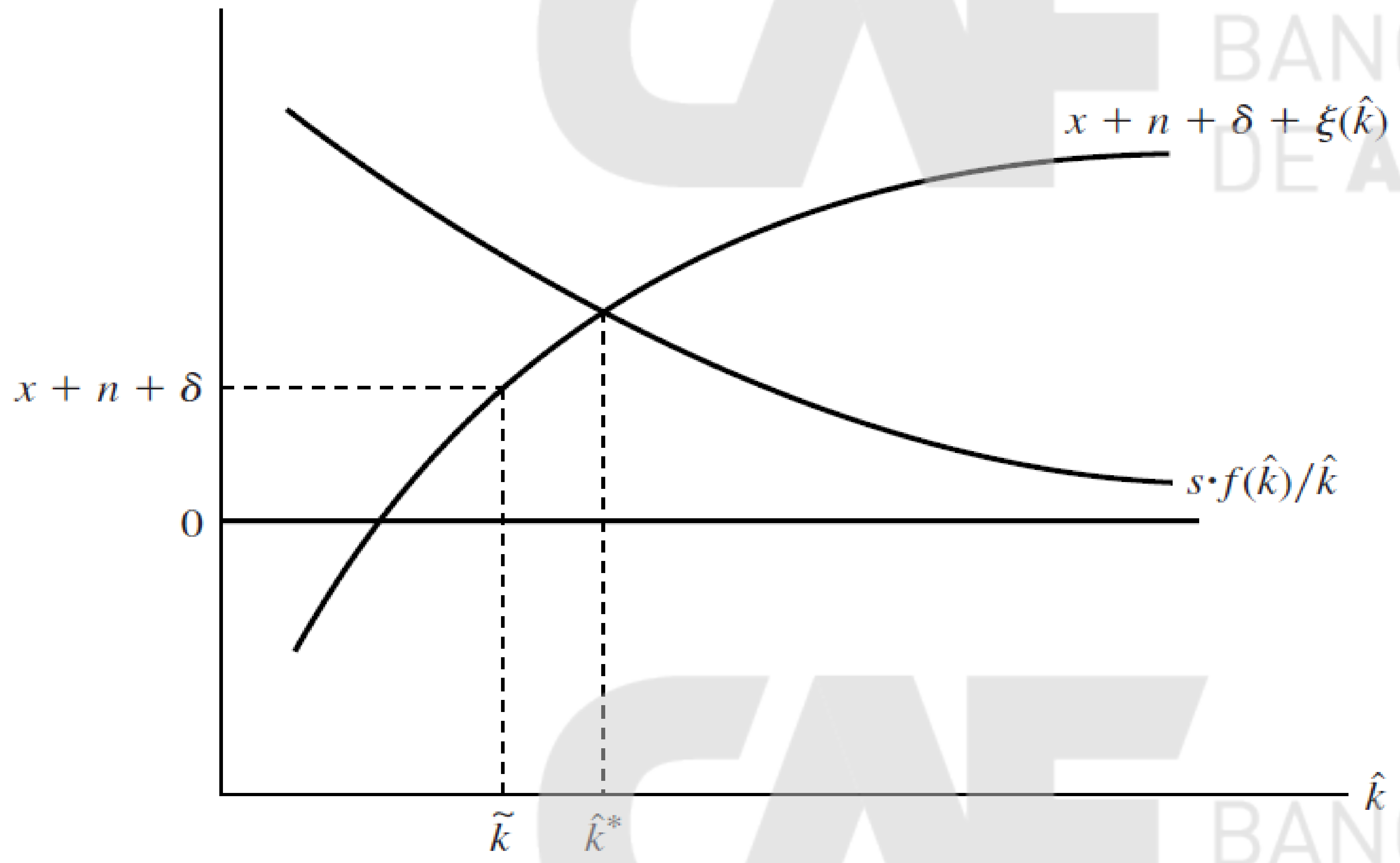
$$\downarrow$$

$$\hat{k}^*$$

Si la parte derecha crece por el efecto de los movimientos migratorios, $m(\hat{k})\left(1 - \frac{\hat{\kappa}}{\hat{k}}\right) > 0$, la economía va a iniciar una senda de caídas en las cantidades de capital, producción y consumo hasta alcanzar los nuevos niveles más bajos de equilibrio en EE. Estas caídas podrían deberse a un aumento de $m(\hat{k})$ o bien a una disminución de $\hat{\kappa}$. Movimientos simétricos de expansión económica si aumenta $\hat{\kappa}$ o cae $m(\hat{k})$.

Veámoslo gráficamente:

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA MIGRACIÓN EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO



El equilibrio a largo plazo (EE) en el modelo de Solow-Swan con movimientos migratorios

$\gamma_{\hat{k}} \equiv \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}$ es la distancia vertical entre curva de ahorro y curva de costes de mantenimiento (depreciación) del capital

En EE $\gamma_{\hat{k}} = 0 \rightarrow \hat{k}^*$ constante

Si aumenta $\xi(\hat{k}) = m(\hat{k})(1 - \hat{\kappa}/\hat{k}) \rightarrow \hat{k}^*$ disminuye

Si disminuye $\xi(\hat{k}) = m(\hat{k})(1 - \hat{\kappa}/\hat{k}) \rightarrow \hat{k}^*$ aumenta

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

A raíz de los escritos de Thomas Malthus de finales del siglo XVIII, los efectos de los factores económicos sobre la fertilidad y la mortalidad han sido un elemento central de la teoría del desarrollo económico. También las consecuencias del crecimiento de la población para el progreso económico y el bienestar social. Las dudas sobre la capacidad de producir una cantidad de alimentos suficiente para poder mantener un crecimiento continuado de la población mundial y la necesidad de una autorregulación de la población a través de la natalidad han sido cuestiones relevantes desde el punto de vista económico y sociológico.
En este curso vamos a estudiar el comportamiento de las familias a la hora de decidir el número de hijos que desean tener siguiendo un enfoque optimizador *a la* Ramsey. Adaptaremos el modelo de generaciones solapadas de Gary Becker y Robert Barro (*Econometrica*, 1989).

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

Modelo de generaciones solapadas:

- Los individuos viven durante dos periodos: la niñez y la edad adulta.
- Cada adulto tiene n hijos.
- El bienestar de los individuos depende del nivel de consumo y el número de hijos. Ambas variables aparecen en la función de utilidad con efectos marginales positivos, $u(c,n)$.
- La utilidad de la generación representativa en el periodo de edad adulta en el que toma decisiones económicas es:

$$U = u(c,n) + \Upsilon(n) \cdot n \cdot U_{+1}$$

donde la función $\Upsilon(n)$ representa el grado de altruismo que los progenitores asocian a la utilidad de cada uno de sus hijos con propiedades $\Upsilon(n) > 0$, $\Upsilon(1) < 1$ y $\Upsilon'(n) < 0$. Un ejemplo de esta función podría ser $\Upsilon(n) = \Upsilon n^{-\epsilon}$ con $\epsilon > 0$.

- Asumiendo $\Upsilon(n) = \Upsilon n^{-\epsilon}$ e introduciendo N_j como el número de descendientes adultos de la generación j (con $N = 1$ en el periodo inicial), la utilidad de la generación actual y todas las generaciones futuras, a partir de la generación del periodo inicial 0 es:

BANCO DE DESARROLLO
DE AMÉRICA LATINA

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Upsilon^{j} N_j^{1-\epsilon} u(c_j, n_j)$$

que implica ganancias de bienestar por el consumo, el tamaño de la familia con sus descendientes y el número de hijos de cada periodo.

Para continuar, tengamos en cuenta las siguientes cinco consideraciones:

i) Vamos a adaptar el modelo de generaciones solapadas a un enfoque en tiempo continuo porque permite obtener la solución para las variables agregadas de la economía a través del comportamiento optimizador del hogar representativo.

ii) La tasa de preferencia intertemporal, $\rho > 0$, del modelo de Ramsey se asocia con el altruismo intergeneracional, $\Upsilon < 1$, asumido en el modelo de las generaciones solapadas.

iii) Suponemos una tasa de mortalidad constante y exógena $d > 0$ con lo que el tamaño de la familia varía de forma continua de acuerdo a la expresión $\dot{N} = (n - d)N$.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

iv) La especificación habitual de las preferencias de los hogares con una función de utilidad isoelástica se tomará en el caso particular de la función logarítmica (que se identifica cuando el valor del parámetro θ tiende a 1.0) con la siguiente expresión

$$\Psi \log(N) + \log(c) + \phi \log(n - d)$$

siendo $\Psi > 0$ y $\phi > 0$ los pesos relativos otorgados, respectivamente, al tamaño de la familia y a la diferencia entre el número de niños que nacen y el número de fallecidos. El consumo tiene un peso unitario en su contribución a la utilidad total.

v) Los niños proporcionan felicidad pero criarlos tiene un coste. Este coste puede asociarse tanto a los recursos que hay que dedicar para la alimentación y cuidado de los niños, junto con el tiempo (coste de oportunidad) que el hogar ha de destinarlo a la actividad doméstica en lugar de la laboral. Por simplicidad, suponemos una función lineal del coste de crianza de los hijos que reparte ambos costes

$$\eta = b_0 + bk$$

con $b > 0$ midiendo el coste de oportunidad por unidad de capital y $b_0 \geq 0$ es el coste en bienes.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

El problema de control óptimo del hogar representativo es el siguiente:

$$Max \quad \int_0^\infty e^{-\rho t}[\Psi \log(N) + \log(c) + \phi \log(n-d)\,]dt$$

sujeto a:

$$\dot{k} = w + (r - n + d)k - bnk - c$$
$$\dot{N} = (n - d)N$$

en el que puede observarse la presencia del coste de crianza de los n hijos,$n\eta = nbk$ en la restricción presupuestaria, asumiendo $b_0 = 0$ para facilitar los cálculos .

Los 5 pasos para resolver el problema son:

1. Variables de control: c, n ; Variables de estado: k, N
2. Hamiltoniano:

$$J = e^{-\rho t}[\Psi \log(N) + \log(c) + \phi \log(n-d)\,] + \nu[w + (r - n + d)k - bnk - c\,] + \mu[(n-d)N\,]$$

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

3. Condiciones de primer orden de las variables de control

$$\frac{\partial J}{\partial c} = e^{-\rho t}\left(\frac{1}{c}\right) - \nu = 0 \quad ; \quad \frac{\partial J}{\partial n} = e^{-\rho t}\left(\frac{\phi}{n-d}\right) - \nu(k + bk) + \mu N = 0$$

4. Condiciones de primer orden de las variables de estado

$$\frac{\partial J}{\partial k} = \nu(r - n + d - bn) = -\dot{\nu} \quad ; \quad \frac{\partial J}{\partial N} = e^{-\rho t}\left(\frac{\Psi}{N}\right) + \mu(n - d) = -\dot{\mu}$$

5. Condiciones de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} \nu k = 0 \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} \mu N = 0$$

Tomando la condición de optimalidad del consumo, calculando la expresión de $\dot{\nu}$ que implica y combinando ambas en la condición de optimalidad del capital obtenemos:

$$\frac{\dot{c}}{c} = r - \rho - (n - d) - bn$$

que incluye la tasa de crecimiento de la población, $n - d$, como un factor que desfavorece el consumo futuro (ahorro) porque reduce el rendimiento neto del capital. También hay un efecto negativo del coste de criar niños, bn, sobre el ahorro debido a que se mide en términos del capital asignado a cada miembro de la familia.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

Para la ecuación que determina la elección de fertilidad vamos a hallar el valor sombra de cada miembro de la familia a partir de la condición de primer orden respecto del número de hijos por adulto

$$\mu = \left(\frac{1}{N}\right)\left[\nu(k + bk) - e^{-\rho t}\left(\frac{\phi}{n-d}\right)\right]$$

Insertando $\nu = e^{-\rho t}\left(\frac{1}{c}\right)$ y tomando factor común

$$\mu = \left(\frac{e^{-\rho t}}{N}\right)\left[(1+b)\left(\frac{k}{c}\right) - \left(\frac{\phi}{n-d}\right)\right]$$

donde nos va a resultar útil definir una nueva variable

$$\Omega \equiv (1+b)\left(\frac{k}{c}\right) - \left(\frac{\phi}{n-d}\right)$$

para tener $\mu = \left(\frac{e^{-\rho t}}{N}\right)\Omega$ y su correspondiente derivada en el tiempo:

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

$$\mu = \left(\frac{e^{-\rho t}}{N}\right)\Omega \rightarrow \dot{\mu} = \left(\frac{-\rho e^{-\rho t}N - \dot{N}e^{-\rho t}}{N^2}\right)\Omega + \dot{\Omega}\left(\frac{e^{-\rho t}}{N}\right) = \left(\frac{-\rho e^{-\rho t}}{N} - \frac{\dot{N}}{N}\frac{e^{-\rho t}}{N}\right)\Omega + \dot{\Omega}\left(\frac{e^{-\rho t}}{N}\right)$$

$$\rightarrow \dot{\mu} = \left(\frac{e^{-\rho t}}{N}\right)\Omega\left(-\rho - \frac{\dot{N}}{N}\right) + \left(\frac{e^{-\rho t}}{N}\right)\dot{\Omega}$$

La condición de optimalidad para N es

$$e^{-\rho t}\left(\frac{\Psi}{N}\right) + \mu(n-d) = -\dot{\mu}$$

donde sustituyendo las expresiones que hemos obtenido tanto para μ como para $\dot{\mu}$ obtenemos

$$e^{-\rho t}\left(\frac{\Psi}{N}\right) + \left(\frac{e^{-\rho t}}{N}\right)\Omega(n-d) = \left(\frac{e^{-\rho t}}{N}\right)\Omega\left(\rho + \frac{\dot{N}}{N}\right) - \left(\frac{e^{-\rho t}}{N}\right)\dot{\Omega}$$

$$\Psi + \Omega(n-d) = \Omega\left(\rho + \frac{\dot{N}}{N}\right) - \dot{\Omega}$$

Recordamos la tasa de crecimiento de la población $\frac{\dot{N}}{N} = (n-d)$ para alcanzar esta sencilla ecuación diferencial:

$$\dot{\Omega} = -\Psi + \Omega\rho$$

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

$$\dot{\Omega} = -\Psi + \Omega\rho$$

La única solución estable para el valor de Ω esta ecuación es $\Omega = \Psi/\rho$ que se obtiene si $\dot{\Omega} = 0$. Esto se debe a que de no ser así el valor de $\dot{\Omega}$ sería siempre positivo (o negativo) y la variable Ω se dirigiría inexorablemente a $+\infty$ $(-\infty)$. Recordando que $\Omega \equiv (1+b)\left(\frac{k}{c}\right) - \left(\frac{\phi}{n-d}\right)$, la solución $\Omega = \Psi/\rho$ implica la siguiente tasa de fertilidad óptima

$$n = d + \frac{\phi\rho\left(\frac{c}{k}\right)}{\rho(1+b) - \Psi\left(\frac{c}{k}\right)}$$

La tasa de fertilidad n aumenta con:

- La tasa de mortalidad (proporcionalmente)
- La satisfacción que recibe la familia por tener hijos, ϕ, o aumentar su tamaño, Ψ.
- Una reducción del coste de crianza de los hijos, b.
- Un incremento del ratio c/k por el efecto renta que genera la dependencia lineal del coste de los hijos con k.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

Ecuaciones del modelo de elección de la fertilidad:

$$\dot{k} = w + (r - n + d)k - bnk - c$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = r - \rho - (n - d) - bn$$

$$n = d + \frac{\phi\rho\left(\frac{c}{k}\right)}{\rho(1+b) - \Psi\left(\frac{c}{k}\right)}$$

En conclusión: menor crecimiento económico a largo plazo y menor rentabilidad de activos pero mayor bienestar de los hogares que disfrutan de los hijos y el crecimiento familiar. El sector productivo lo forman empresas competitivas que tienen acceso a una función de producción neoclásica (con progreso tecnológico exógeno) tipo Cobb-Douglas que expresa la producción en unidades por trabajador efectivo

$$\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha} \quad con\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

El criterio de maximización del beneficio de las empresas hacen que el tipo de interés y el salario coincidan, respectivamente, con las productividades marginales del capital neto de depreciación y del trabajo:

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

$$r = \alpha A \hat{k}^{\alpha} - \delta$$
$$w = (1-\alpha) A \hat{k}^{\alpha} e^{xt}$$

Aceptamos que el factor trabajo y la población son idénticos para expresar las unidades por unidad de trabajo como unidades per cápita.

Definimos las siguientes dos variables adicionales para estudiar el EE y el diagrama de fase:

$$\chi \equiv c/k \qquad ; \qquad z \equiv f(\hat{k})/\hat{k}$$

con lo que χ es el ratio entre consumo y capital mientras que z es el producto medio bruto del capital. Las dos ecuaciones dinámicas que determinan $\dot{k}$ y $\dot{c}$ (ver diapositiva anterior) se pueden combinar junto con las ecuaciones del salario y del tipo de interés para obtener

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = -\rho - (1-\alpha) z + \chi$$

Si sustituimos la tasa de fertilidad óptima en la restricción de acumulación de capital que explica $\dot{k}$ e insertamos también las ecuaciones de w y r podemos hallar la siguiente ecuación dinámica para el producto medio del capital:

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD

$$\frac{\dot{z}}{z} = -(1-\alpha)\left[z - \delta - bd - x - \chi - \frac{\phi\rho\chi(1+b)}{\rho(1+b) - \Psi\chi}\right]$$

Recordamos la otra ecuación dinámica

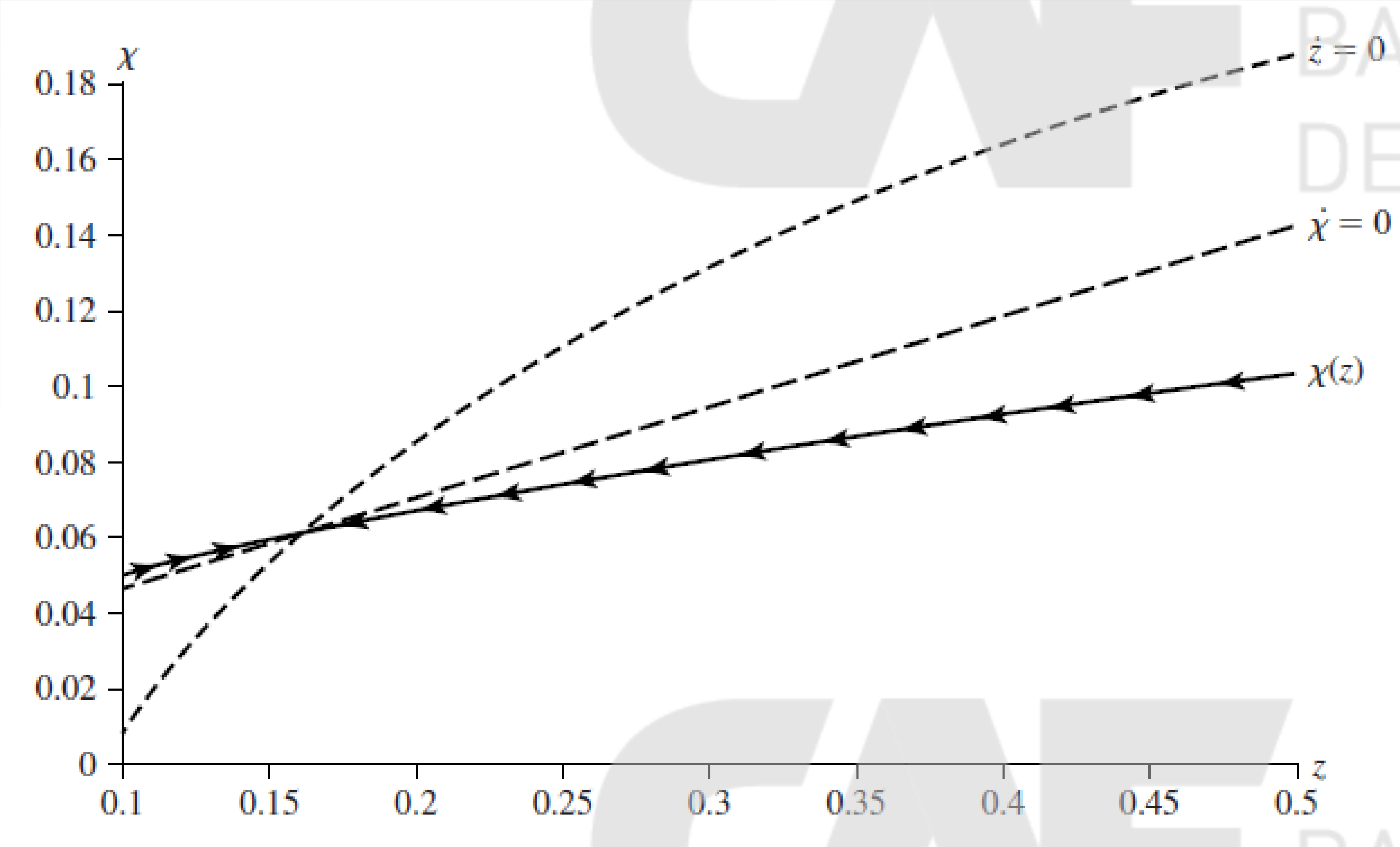
$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = -\rho - (1-\alpha)z + \chi$$

Dinámica de transición y el estado estacionario (EE).

La solución analítica del EE para z y χ no es posible de obtener. Se puede resolver numéricamente. Vamos a seguir la calibración de los parámetros propuesta en la página 417 del libro de texto.

Analizamos en primer lugar la dinámica de transición al EE con valores constantes para las variables auxiliares $\chi^*,\ z^*$. Como es habitual el diagrama de fases se representa a partir de los casos de variación nula $\dot{\chi} = 0$, $\dot{z} = 0$.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD



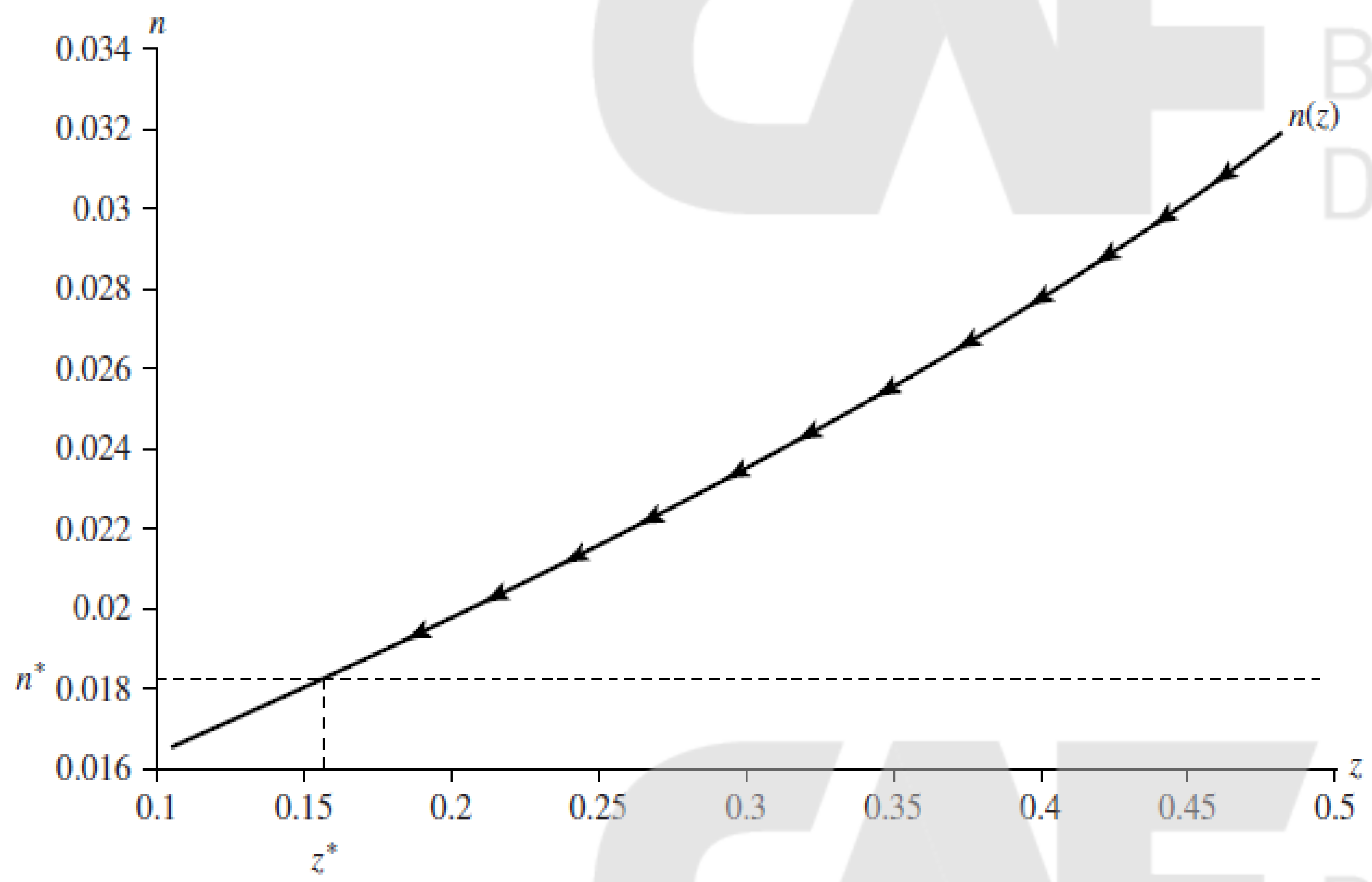
$$\dot{\chi} = 0 \rightarrow \chi = \rho + (1-\alpha)z$$

$$\dot{z} = 0 \rightarrow \chi + \frac{\phi\rho\chi(1+b)}{\rho(1+b)-\Psi\chi} = z - \delta - bd - x$$

Trayectoria estable en punto de silla desde posiciones con $z > z^*$ y con $\chi > \chi^*$. La dinámica de transición al EE se caracteriza por:

- Disminución de la productividad media del capital.
- Tasa de crecimiento del capital y del producto disminuyendo hasta alcanzar la del EE.
- Caída del ratio de consumo entre capital.
- Disminución continuada de la tasa de fertilidad hasta alcanzar la del EE.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD



El diagrama de fase para la dinámica de aproximación al EE del número de hijos por adulto siga una tendencia decreciente como la del producto por unidad de capital y el consumo por unidad de capital.

Trayectoria estable en punto de silla desde posiciones con $n > n^*$ hasta alcanzar la del EE.

Disminución de la fertilidad al aumentar el capital y el producto per cápita.

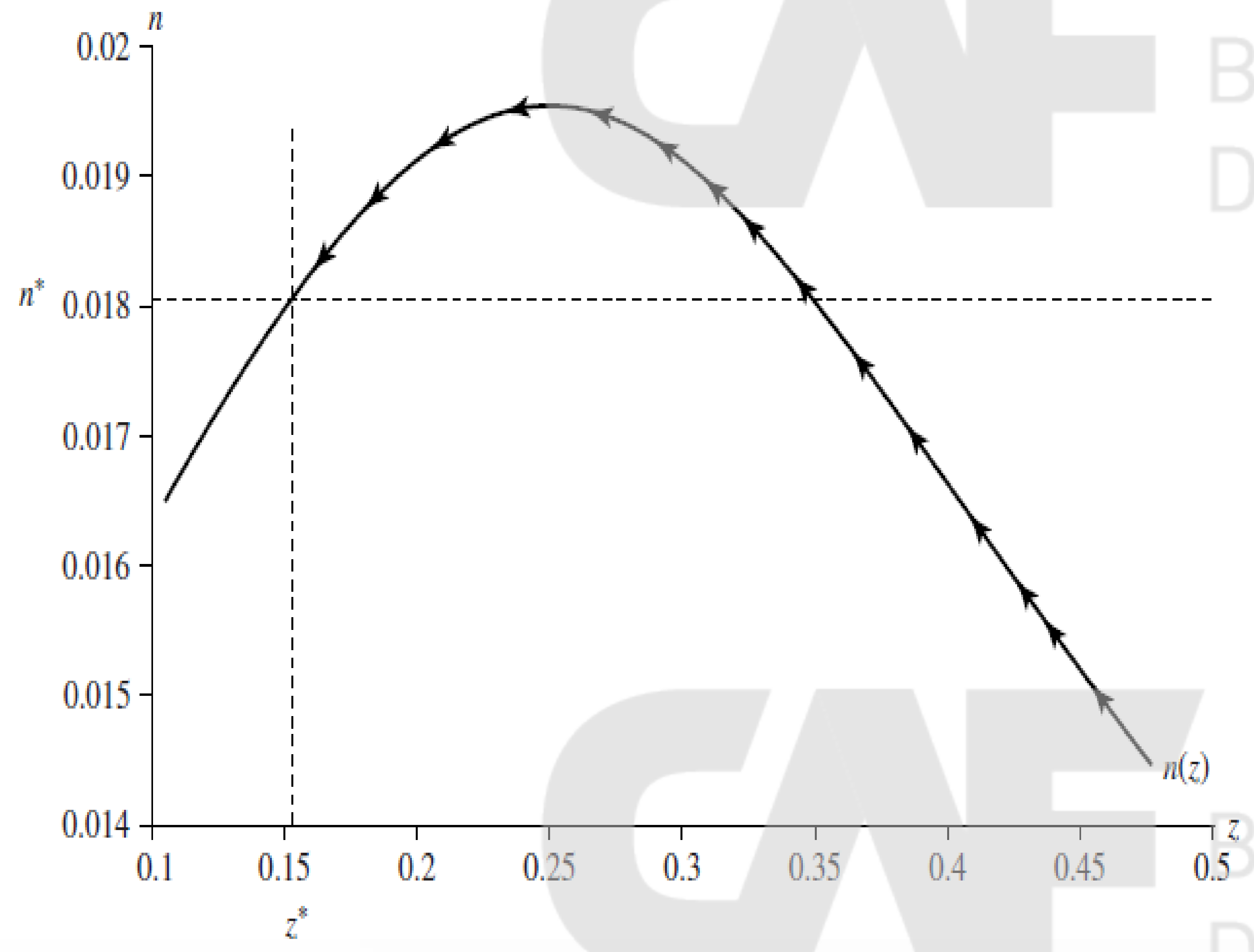
Corroborado por los datos empíricos de los países.

↓

¡Excepción! Los países pobres o en vías de desarrollo suelen presentar altas tasas de natalidad.

BANCO DE DESARROLLO
DE **AMÉRICA LATINA**

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - LA ELECCIÓN DE LA FERTILIDAD



Tal y como se demuestra numéricamente en el libro, la introducción de un coste fijo de cuidar a los hijos, medido en unidades de renta, $b_0 = 50$, provoca una dinámica de la tasa de natalidad primero creciente (economías con poco capital y un valor alto de z) y a partir de un punto de cierto progreso económico se hace decreciente hasta alcanzar el EE.

Esta versión del modelo explicaría la dinámica de las series temporales de las tasas de natalidad observadas ante distintos estadios de desarrollo económico.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - ELECCIÓN TRABAJO-OCIO

En este apartado se van a analizar los factores que pueden explicar por qué los hogares cambian la cantidad de horas que desean trabajar o su intensidad en el esfuerzo laboral. Hasta ahora hemos supuesto una oferta de trabajo totalmente inelástica: la población activa no se modificaba por cambios en el salario o en los niveles de consumo. Ante cualquier condición la intensidad en el trabajo era la misma y la que empleaba al conjunto de la población activa.

Supondremos que los hogares están formados por trabajadores que tienen una preferencia por el ocio frente al trabajo. En la función de utilidad el tiempo dedicado al trabajo tendrá un efecto perjudicial para el bienestar.

Esta extensión nos permite distinguir el factor trabajo de la población total. Concretamente, la cantidad de trabajo empleado en un periodo t se compone de

$$L(t) = \ell(t) \cdot N(t)$$

donde $\ell(t)$ es la intensidad del trabajo de la persona media en el momento t, es decir la fracción de su tiempo que dedica al trabajo y $N(t)$ es la población activa que crece a tasa constante y exógena $n > 0$. El tiempo de ocio sería $1 - \ell(t)$. Una calibración razonable de EE podría llevar a un valor $\ell(t) \approx 0.33$.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - ELECCIÓN TRABAJO-OCIO

Si incorporamos al modelo de Ramsey original la variabilidad en la intensidad del trabajo ofertado por las familias, la función a maximizar por los hogares sería

$$\int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u(c,\ell)dt$$

con la primera derivada parcial respecto al tiempo de trabajo de signo negativo, $u_\ell < 0$, y la segunda derivada nula o negativa para recoger la idea de un incremento marginal en la pérdida de utilidad cuando aumenta el tiempo de trabajo, $u_{\ell\ell} \leq 0$.

La restricción presupuestaria del hogar también se ve modificada para quedar así:

$$\dot{a} = w\ell + (r-n)a - c$$

donde la renta laboral se obtiene a partir de la decisión de oferta de trabajo.

La función de Hamilton que resulta del control óptimo es:

$$J = e^{-(\rho-n)t} u(c,\ell) + \nu[w\ell + (r-n)a - c\,]$$

La resolución va a incorporar una nueva variable de estado, ℓ, que aparece tanto en la función de utilidad como en la restricción presupuestaria.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - ELECCIÓN TRABAJO-OCIO

Las condiciones de primer orden llevan a

$$r = \rho - \left[\frac{U_{cc} \cdot c}{U_c}\right]\frac{\dot{c}}{c} - \left[\frac{U_{c\ell} \cdot l}{U_\ell}\right]\frac{\dot{\ell}}{\ell}$$

que incluyen la aportación del aumento del trabajo a la rentabilidad exigida para el ahorro asumiendo un signo negativo de la derivada cruzada, $U_{c\ell} < 0$, al anticipar que un menor tiempo de ocio provoca un recorte en la satisfacción proporcionada por el consumo.

Recordamos que en el modelo de Ramsey original el consumo óptimo ha de cumplir

$$r = \rho - \left[\frac{U_{cc} \cdot c}{U_c}\right]\frac{\dot{c}}{c}$$

La nueva condición de primer orden (sobre ℓ) nos lleva a la tradicional expresión para la curva de oferta que iguala el salario a la relación marginal de sustitución entre ocio y consumo:

$$\frac{-U_\ell}{U_c} = w$$

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - ELECCIÓN TRABAJO-OCIO

El estado estacionario a largo plazo y la dinámica de transición a corto plazo

En el EE del modelo de Ramsey el salario y el consumo per cápita crecen a la tasa de crecimiento de la tecnología. La fracción de tiempo dedicado al trabajo también debería ser constante en EE, para evitar que a largo plazo se observe una convergencia de dicha variable hacia 0 o hacia 1 . King, Plosser y Rebelo (1988, *Journal of Monetary Economics*) proponen la siguiente especificación de la función de utilidad para garantizar ℓ constante en EE

$$u(c,\ell)=\frac{c^{1-\theta}e^{(1-\theta)\omega(\ell)}-1}{1-\theta}$$

donde $\omega'(\ell)$ y $\omega''(\ell)\leq 0$ mide la desutilidad del trabajo. La oferta de trabajo, $\frac{-U_\ell}{U_c}=w$, queda así

$$\frac{-\frac{c^{1-\theta}e^{(1-\theta)\omega(\ell)}(1-\theta)\omega'(\ell)}{1-\theta}}{\frac{(1-\theta)c^{-\theta}e^{(1-\theta)\omega(\ell)}}{1-\theta}}=w\quad\rightarrow\quad-\omega'(\ell)=w/c$$

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - ELECCIÓN TRABAJO-OCIO

Por simplicidad, vamos a restringir el análisis al caso $\theta = 1$, que aproxima el límite de la función a la expresión logarítmica

$$u(c, \ell) = \log(c) + \omega(\ell)$$

Si definimos las variables por unidad de trabajo efectivo de manera que incluyan el efecto del esfuerzo laboral variable, ℓ, tenemos

$$\hat{k} = \frac{K}{\ell N e^{xt}} \quad ; \quad \hat{c} = \frac{C}{\ell N e^{xt}}$$

que nos permiten escribir, junto con las condiciones $r = f'(\hat{k}) - \delta$ (demanda de capital óptima) y $a = k$ (economía cerrada), las tasas de crecimiento de ecuaciones $\hat{c}$ y $\hat{k}$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = f'(\hat{k}) - (\delta + \rho + x) - \frac{\dot{\ell}}{\ell}$$

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} - (x + n + \delta) - \frac{\hat{c}}{\hat{k}} - \frac{\dot{\ell}}{\ell}$$

Puesto que $\frac{\dot{\ell}}{\ell} = 0$ en EE, las expresiones para $\hat{k}^*$ y para $\hat{c}^*$ son las mismas que en el modelo de Ramsey sin elección de horas de trabajo.

OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN - ELECCIÓN TRABAJO-OCIO

Para hallar ℓ^* en EE, necesitamos especificar la función de desutilidad de trabajo, que asumiendo una elasticidad constante, $\sigma > 0$, es:

$$\omega(\ell) = -\xi \cdot \ell^{1+\sigma}$$

que una vez sustituido en la ecuación de la oferta de trabajo obtenemos

$$(1+\sigma)\xi \cdot \ell^{\sigma} = \frac{w}{c} \quad \rightarrow \ell = \left(\frac{1}{(1+\sigma)\xi}\frac{w}{c}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Si la tecnología de producción es Cobb-Douglas, $\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha}\ con\ 0 \leq \alpha \leq 1$, tenemos los siguientes resultados en el EE

$$r^* = \rho + x$$

$$\frac{\hat{c}^*}{\hat{k}^*} = \frac{(\delta+\rho+x)}{\alpha} - (x+n+\delta)$$

$$\ell^* = \left\{\left[\frac{1-\alpha}{(1+\sigma)\xi}\right]\left[\frac{(\delta+\rho+x)}{(\delta+\rho+x)-\alpha(x+n+\delta)}\right]\right\}^{1/(1+\sigma)}$$

Los dos primeros son idénticos a los del modelo de Ramsey original y el tercero recogiendo los factores explicativos del tiempo de trabajo a largo plazo.