

**COLECCIÓN DE EJERCICIOS PROPUESTOS con soluciones**

**CRECIMIENTO ECONÓMICO**

**MIGUEL CASARES**

Esta colección de ejercicios pretende mostrar las múltiples posibilidades de aplicación de los modelos teóricos de crecimiento económico a casos reales con resultados numéricos. El libro de texto incorpora, al final de cada capítulo, una serie de ejercicios de corte teórico que pueden también plantearse como trabajo a realizar durante el desarrollo del curso. Mi intención, no obstante, es la de proponer ejercicios numéricos que faciliten la comprensión de los modelos teóricos y permitan entender su aplicabilidad a partir del uso de datos reales. El estudiante podría comprobar fácilmente los efectos que tiene una modificación de alguno de los parámetros del modelo sobre el resultado de las variables endógenas en estado estacionario o en su dinámica de corto plazo. Las últimas dos sesiones se dedican al análisis de datos sobre contabilidad del crecimiento y convergencia económica y se proponen sendos ejercicios a partir de datos reales.

**EJERCICIOS - AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY**

1. Modelo de Ramsey con gasto público. Una economía con sector público se comporta de acuerdo a los supuestos establecidos en el modelo de Ramsey con función de utilidad de los hogares con elasticidad de la utilidad marginal del consumo  $\theta = 2$  y tasa de preferencia intertemporal del 3% anual,  $\rho = 0,03$ . Las empresas disponen de una tecnología de producción Cobb-Douglas con coeficiente que mide la productividad del capital es  $\alpha = 0,4$ , el parámetro tecnológico está fijo en  $A = 1$  (sin progreso tecnológico) y el capital se deprecia a tasa constante  $\delta = 0,1$  (10%) anual. El gobierno decide una cantidad de compra de bienes constante y equivalente al 20% del consumo en estado estacionario  $g = 0,2 \cdot c^*$ . Los tipos impositivos sobre las rentas laborales, los rendimientos de los activos, el consumo y los beneficios empresariales son, respectivamente,  $\tau_w = 0,2$ ,  $\tau_a = 0,25$  y  $\tau_c = 0,10$  con ausencia de tributación sobre los beneficios empresariales,  $\tau_f = 0,0$ . El gobierno mantiene su presupuesto equilibrado,  $g + v = \tau_c c + \tau_w w + \tau_a r k$ . La población total y la población activa coinciden y ambas variables crecen a tasa constante y exógena,  $n = 0,02$  (2%).

- i) En unidades medidas por unidad de trabajo efectivo, hallar el consumo, el capital, el producto, el gasto público, y el tipo de interés de los activos financieros en estado estacionario.

- ii) Si el capital por unidad de trabajo efectivo actual es  $\hat{k}(0) = 2$  unidades y el consumo por unidad de trabajo efectivo es  $\hat{c}(0) = 0,5$  unidades, hallar para el siguiente periodo 1 los valores del consumo por unidad de trabajo efectivo, el capital por unidad de trabajo efectivo, el producto por unidad de trabajo efectivo, el gasto público por unidad de trabajo efectivo y el tipo de interés de los activos financieros.
- iii) Supongamos que el tipo impositivo sobre los rendimientos de los activos baja al 18%,  $\tau_a = 0,18$ . Recalcular el estado estacionario y discutir los efectos sobre las variables referidas en el apartado i)
- iv) Representar el diagrama de fase con las trayectorias óptimas correspondientes a los estados estacionarios calculados en i) y iii).

**Soluciones:**

i)  $\hat{c}^* = 1,0585 \quad \hat{k}^* = 5,7529 \quad \hat{y}^* = 2,0135 \quad \hat{g}^* = 0,2646 \quad r^* = 0,04 \text{ (4\%)}$

ii)  $\hat{c}(1) = 0,5232 \quad \hat{k}(1) = 2,3149 \quad \hat{y}(1) = 1,3990 \quad \hat{g}(1) = 0,2646 \quad r(1) = 0,1417 \text{ (14,17\%)}$

iii)  $\hat{c}^* = 1,0621 \quad \hat{k}^* = 5,9946 \quad \hat{y}^* = 2,0469 \quad \hat{g}^* = 0,2655 \quad r^* = 0,0366 \text{ (3,66\%)}$ . Aumenta la acumulación de capital, la producción y el consumo en estado estacionario. La productividad marginal del capital se reduce (rendimientos decrecientes) y cae el tipo de interés de los activos financieros en equilibrio. El gasto público aumenta ligeramente porque el gobierno lo determina como una proporción fija sobre el consumo de estado estacionario.

iv) La reducción de  $\tau_a$  desplaza hacia la derecha la recta vertical que establece la cantidad de capital por unidad de trabajo efectivo que hace que la variación del consumo sea nula ( $\dot{\hat{c}} = 0$ ). Por tanto la rentabilidad neta del alquiler del capital aumenta, los hogares deciden incrementar su ahorro (inversión) y se produce un aumento en el capital por unidad de trabajo del estado estacionario,  $\hat{k}^*$ . La posición de la curva  $\dot{\hat{k}} = 0$  no cambia al modificarse la fiscalidad sobre las rentas del capital. No obstante, la intersección entre  $\dot{\hat{c}} = 0$  y  $\dot{\hat{k}} = 0$  determina un valor más alto en el diagrama de fase para el consumo por unidad de trabajo efectivo,  $\hat{c}^*$ , consistente con la acumulación de capital, renta y consumo decida óptimamente por los hogares cuando aumenta el rendimiento neto de los activos.

2. Modelo de Ramsey con costes de ajuste del capital. Supongamos que existe un coste de ajuste del stock de capital que depende linealmente del ratio entre inversión y capital instalado (en unidades de trabajo efectivo) de acuerdo a la siguiente expresión

$$\phi\left(\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}\right)$$

En este ejercicio, vamos a reflexionar sobre los efectos de un aumento en el parámetro que mide el tamaño de los costes de ajuste de la inversión  $b$ . Para ello seguimos los supuestos establecidos en la sección 2 de la sesión 6 y asumimos una tecnología de producción Cobb-Douglas con progreso tecnológico potenciador del trabajo y la la siguiente calibración de los parámetros:  $\alpha = 0,5$ ,  $x = 0,02$ ,  $\delta = 0,08$ ,  $n = 0,015$  e, inicialmente  $b = 2,8$ . El tipo de interés de los activos financieros es constante y exógeno en el valor  $r = 0,03 \text{ (3\%)}$ .

- i) Resolver la solución de estado estacionario y obtener los valores numéricos de las variables endógenas  $q, \hat{k}, \hat{i}, \hat{y}, \phi\left(\frac{\hat{i}}{\hat{k}}\right)$  en el estado estacionario.
- ii) Si el coste de ajuste del capital se reduce (por ejemplo, por una mejora en la tecnología que transforma unidades de producto en unidades de capital físico) y el parámetro que mide dicho coste pasa ser  $b = 2,4$ , recalculamos los valores de las variables endógenas  $q, \hat{k}, \hat{i}, \hat{y}$  en el nuevo estado estacionario al que se dirige esta economía. Comentar los efectos observados.
- iii) Representar el diagrama de fase con las trayectorias óptimas a los estados estacionarios obtenidos en i) y ii).

**Soluciones:**

- i)  $q^* = 1,3220, \hat{k}^* = 15,5232, \hat{i}^* = 1,7852, \hat{y}^* = 3,94, \phi\left(\frac{\hat{i}^*}{\hat{k}^*}\right) = 0,1610$
- ii)  $q^* = 1,2760, \hat{k}^* = 16,1314, \hat{i}^* = 1,8551, \hat{y}^* = 4,0164, \phi\left(\frac{\hat{i}^*}{\hat{k}^*}\right) = 0,1380$
- iii) En el diagrama de fase, la disminución del parámetro que mide el tamaño de los costes de ajuste  $b$  provoca que la recta horizontal  $\dot{\hat{k}} = 0$  se desplace hacia abajo y el valor numérico de  $q^*$  disminuya. La curva  $\dot{q} = 0$  se va a desplazar hacia la derecha porque para un mismo valor de  $q$  y una disminución del parámetro, la relación  $\dot{q} = 0 \rightarrow (q - 1)^2 - 2b(r + \delta)q + 2bf'(\hat{k}) = 0$  implica una disminución de la productividad marginal del capital,  $f'(\hat{k})$ , y por tanto, un aumento de  $\hat{k}$  que se recoge en el eje horizontal.