CRECIMIENTO ECONÓMICO

SESIÓN: El modelo neoclásico de Solow y Swan (I)

Profesor: Miguel Casares

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

ÍNDICE

1. Estructura básica (23-27)
2. La función de producción neoclásica (27-30)
3. La ecuación fundamental del modelo Solow-Swan y el comportamiento de los mercados (30-34)
4. El estado estacionario y la regla de oro de la acumulación de capital (34-37)

CAF BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

La importancia del crecimiento

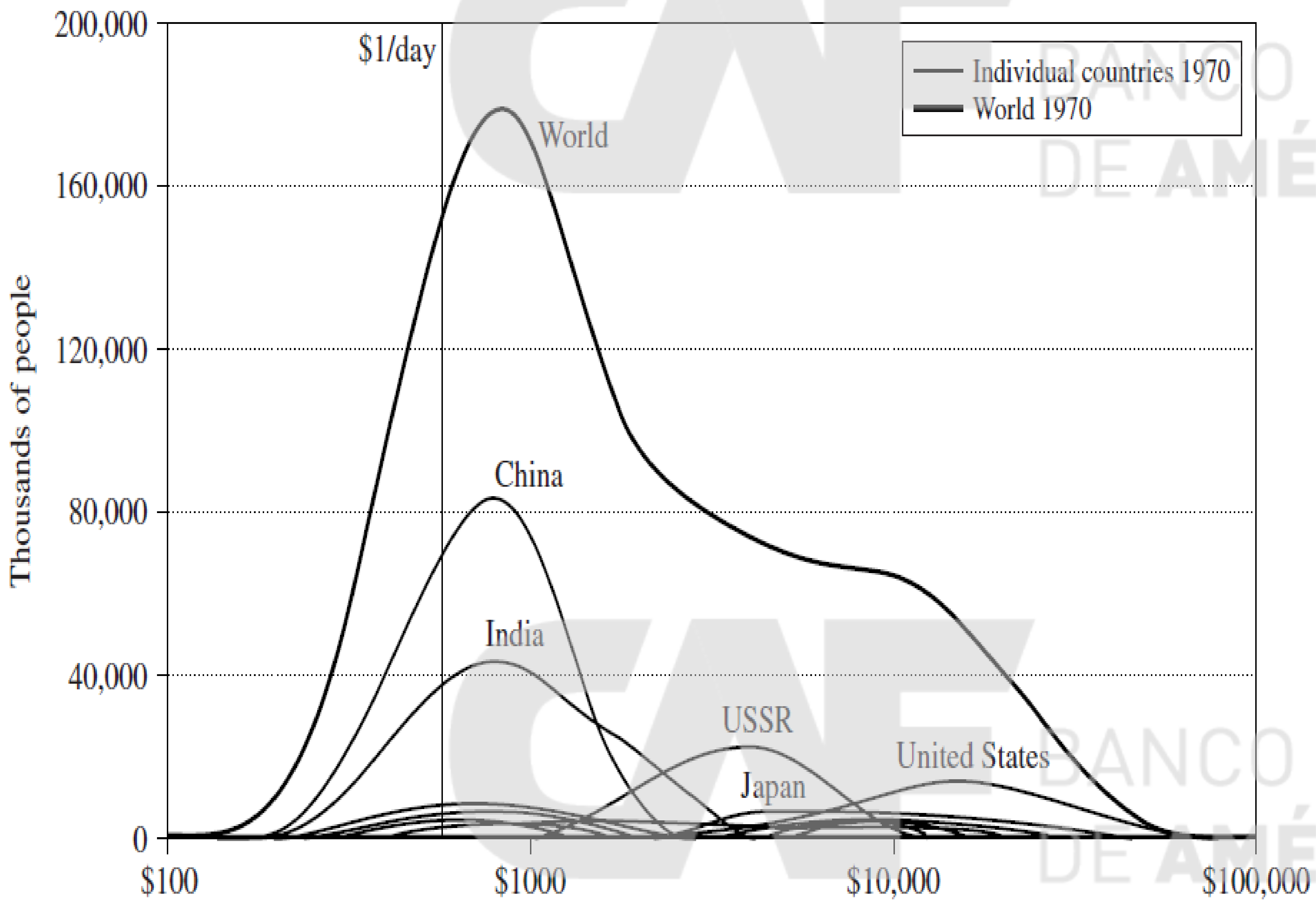
	PIB per cápita en 1960, $ de 2011	PIB per cápita en 2017, $ de 2011
Taiwán	25356,23/10,67	1017858/23,56
China	663363,75/654,14	18383838/1409,52
Estados Unidos	3224785,25/184,67	17778680/324,46
México	225150,38/38,03	2245201/129,16
Perú	26724,65/10,04	365733,5/32,17
Nigeria	168834,56/41,84	817960,13/190,89

https://www.rug.nl/ggdc/productivity/pwt/

La importancia del crecimiento

	PIB per cápita en 1960, $ de 2011	PIB per cápita en 2017, $ de 2011	Ratio 2017/1960	Tasa de crecimiento anual, %
Taiwán	2376,40	43202,80	18,18	5,22
China	1014,10	13042,62	12,86	4,58
Estados Unidos	17462,42	54794,67	3,14	2,02
México	5920,33	17383,10	2,94	1,91
Perú	2661,82	11368,78	4,27	2,58
Nigeria	4035,24	4284,98	1,06	0,11

Distribución de la renta mundial en 1970



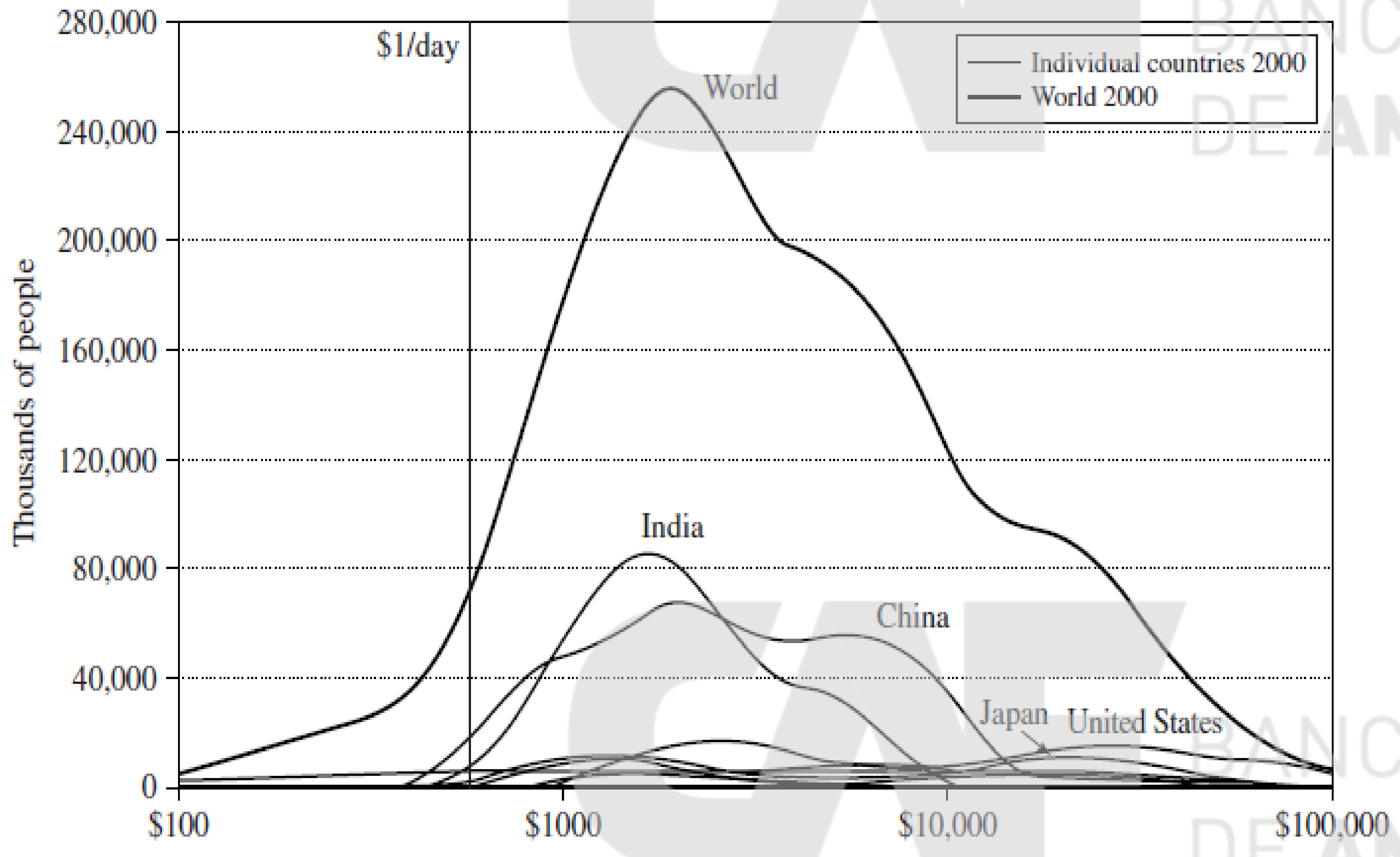
En 1970, existían fuertes desigualdades

- En el reparto de la renta mundial
- En el reparto interno de la renta de muchos países (ricos, emergentes y pobres)

¿Qué cambios se produjeron desde 1970 al año 2000?

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – ESTRUCTURA BÁSICA

Distribución de la renta mundial en 2000



Entre 1970 y 2000

- El PIB per cápita mundial aumentó de $4,200 a $7,500
- Disminuyó la tasa de pobreza del 20% al 8%
- Ligera caída de la desigualdad (coeficiente de Gini, índice de Theil, etc.)
- Fuerte crecimiento en China, India y otros países de Asia Oriental.
- En la mayoría de los países de Latinoamérica se redujo la pobreza significativamente en los 70 pero en los 80 no hubo crecimiento
- Crecimiento moderado en países dela OCDE.
- Estancamiento en muchos países africanos

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – ESTRUCTURA BÁSICA

Comenzamos el curso analizando la siguiente hipótesis con el modelo de Solow-Swan

Ahorro → Inversión en stock de capital → Crecimiento económico permanente

	Tasa de inversión anual, 1960-2000	Tasa de crecimiento anual, 1960-2000
Países emergentes, Asia oriental	25%	4,9%
Países ricos, OCDE	24%	2,7%
Países pobres, África subsahariana	10%	0,6%

Buen punto de partida

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – ESTRUCTURA BÁSICA

La estructura básica de equilibrio general tiene las siguientes características:

- Hogares propietarios de los factores productivos y los activos
- Empresas contratan factores productivitos y lo utilizan con una tecnología dada para producir y vender a los hogares
- Existen mercados de bienes y de factores productivos

Comenzamos con un modelo simplificado sin mercados (Robinson Crusoe)

- Las unidades económicas son a la vez hogar (consumidor) y productor
- La producción se obtiene a través del empleo de tres factores productivos: capital físico, trabajo y conocimiento

Notación: $Y(t) = F(K(t), L(t), T(t))$

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – ESTRUCTURA BÁSICA

$$Y(t) = F(K(t), L(t), T(t))$$

- $Y(t)$: producción obtenida en el momento t. Bien homogéneo que puede consumirse, $C(t)$, o ser invertido, $I(t)$, en acumular nuevas unidades de capital físico. Ejemplos: animales de una granja, trigo, etc.
- $K(t)$: Capital físico (maquinaria, edificios, ordenadores, etc.). Bienes de capital duraderos y *rivales* (no pueden ser utilizados por varios productores a la vez).
- $L(t)$: Trabajo. Número de trabajadores con sus horas trabajadas, fuerza física, formación y salud (efectivo). Factor *rival* (no se puede trabajar en dos empresas a la vez).
- $T(t)$: Conocimiento o tecnología. Su característica esencial es la *no rivalidad*. Clave para el progreso económico.

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – ESTRUCTURA BÁSICA

Supuestos simplificadores para nuestra estructura básica:
- Economía cerrada. Los hogares no pueden comprar ni vender bienes o activos con el resto del mundo. Sin sector exterior.
- Economía sin sector público. No hay gasto público ni impuestos

Consecuencias:

Toda la producción se dedica a consumo e inversión:

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

El ahorro $S(t) \equiv Y(t) - C(t)$ coincide con la inversión:

$$S(t) = I(t)$$

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – ESTRUCTURA BÁSICA

Robert Solow (1956, *Quarterly Journal of Economics*), Nobel de Economía en 1987; Trevor Swan (1956, *Economic Record*)

Supuesto simplificador sobre el comportamiento de los hogares (modelo de Solow y Swan):

- Tasa de ahorro constante y exógena: $s = \frac{S(t)}{Y(t)} = \frac{S(t+1)}{Y(t+1)} = \frac{S(t+2)}{Y(t+2)} = \cdots$

La tasa de consumo también es constante: $1 - s$.

En el modelo de Ramsey estudiaremos el comportamiento optimizador de los hogares en la decisiones de consumo y ahorro

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – ESTRUCTURA BÁSICA

Supuesto simplificador sobre el capital físico:

- Es un bien homogéneo que se deprecia a una tasa constante δ. En cada fracción de tiempo una proporción δ del stock de capital se deprecia

Notación importante. El punto encima de una variable indica su derivada en el tiempo, es decir su variación instantánea

$$x\dot{(t)} = \frac{\partial x(t)}{\partial t}$$

Introducimos ya la ecuación de la inversión:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$$

Inversión neta = Inversión bruta - Capital depreciado

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – ESTRUCTURA BÁSICA

El factor trabajo $L(t)$ varía a lo largo del tiempo debido al crecimiento de la población, cambios en la tasa de actividad, regulación de las horas por trabajador o por mejoras de las cualificaciones de los trabajadores.

En el modelo de Solow-Swan establecemos supuestos simplificadores:

- Horas y cualificaciones idénticas para todos los trabajadores normalizadas a 1.0
- El factor trabajo (población activa) es igual a la población total.
- Crecimiento de la población a tasa constante y exógena, $n \geq 0$,

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{\frac{\partial L(t)}{\partial t}}{L(t)} = n$$

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – ESTRUCTURA BÁSICA

La evolución del factor trabajo en tiempo continuo

Normalizando el tamaño de la población en el momento inicial a

$$L(0) = 1$$

En cualquier momento t el factor trabajo (o la población) vendrá dada por la siguiente función:

$$L(t) = e^{nt}L(0) = e^{nt}$$

Ejemplo numérico:

Si en el año actual la población es de 1 millón de personas y crece un 2% cada año, ¿qué valor tendrá dentro de 80 años?

Respuesta: 4,953 millones de personas

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – ESTRUCTURA BÁSICA

Supuesto simplificador sobre la tecnología (conocimiento) en el modelo básico de Solow y Swan:

$$T(t)\ constante\ en\ 1.0$$

Se "elimina" del análisis de momento.

Objetivo: función de producción que conecte la evolución del capital (inversión) directamente con la evolución de la producción

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN NEOCLÁSICA

$$Y(t) = F(K(t), L(t), T(t))$$

Eliminamos subíndices temporales para simplificar la notación

$$Y = F(K, L, T)$$

Una función de producción es neoclásica si cumple las siguientes 3 propiedades:

1. Rendimientos constantes a escala
2. Rendimientos positivos y decrecientes de los factores trabajo y capital
3. Condiciones de Inada

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN NEOCLÁSICA

1. Rendimientos constantes a escala

$$F(\lambda K, \lambda L, T) = \lambda F(K, L, T) \quad para\ todo \quad \lambda > 0$$

Homogeneidad de grado 1 en capital físico (K) y trabajo (L)

La escala atañe sólo a los dos bienes rivales

Eliminar los efectos del tamaño de las empresas con los rendimientos constantes

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN NEOCLÁSICA

2. Rendimientos positivos y decrecientes de los factores trabajo y capital

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$$

Producto (productividad) marginal decreciente manteniendo constante la intensidad del resto de factores empleados en la producción

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN NEOCLÁSICA

3. Condiciones de Inada

$$\lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0 \qquad \lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty$$

$$\lim_{L \to \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0 \qquad \lim_{L \to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty$$

Las tres propiedades de la función neoclásica implican “esencialidad”

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0$$

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN NEOCLÁSICA

Variables per cápita. ¿El progreso económico se mide con el PIB o el PIB per cápita?

India versus Países Bajos

China versus Luxemburgo

Utilicemos la propiedad de rendimientos constantes a escala, el supuesto simplificador de que la población coincide con el número de trabajadores y el supuesto simplificador de que el conocimiento es constante y está normalizado en $T=1$.

Si el parámetro de escala es $\lambda = \frac{1}{L}$,

$$F(K, L, 1) = Y$$

$$F\left(\frac{1}{L}K, \frac{1}{L}L, 1\right) = \frac{1}{L}Y$$

$$F\left(\frac{K}{L}, 1{,}1\right) = \frac{1}{L}Y$$

Por tanto:

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN NEOCLÁSICA

$$f(k) = y$$

La producción per cápita, $y = \frac{Y}{L}$, es función exclusivamente del capital per cápita, $k = \frac{K}{L}$

Mayúsculas (variables agregadas) *versus* minúsculas (variables per cápita)

Productos marginales del capital y del trabajo en términos per cápita (recordemos que $Y = Lf(k)$ y que $k = \frac{K}{L}$)

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = L\frac{\partial f(k)}{\partial K} = L\frac{\partial f(k)}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial K} = Lf'(k)\frac{1}{L} = f'(k)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial L}{\partial L}f(k) + \frac{\partial f(k)}{\partial L}L = 1f(k) + \frac{\partial f(k)}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial L}L = f(k) + f'(k)\left(\frac{-K}{L^2}\right)L = f(k) - kf'(k)$$

Representar gráficamente $y = f(k)$ y visualizar $f'(k) > 0$ decreciente.

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN NEOCLÁSICA

La función de producción Cobb-Douglas es un ejemplo muy utilizado de una función de producción neoclásica

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad con \quad 0 < \alpha < 1$$

Comprobar que

$$y = Ak^{\alpha}$$
$$f'(k) = A\alpha k^{\alpha-1} > 0$$
$$f''(k) = A\alpha(\alpha - 1)k^{\alpha-2} < 0$$

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN NEOCLÁSICA

Si existen mercados competitivos de capital físico y trabajo, en la que la retribución a los factores productivos coincide con su productividad

$$R = f'(k) \qquad w = f(k) - kf'(k)$$

Con la función de producción Cobb-Douglas tenemos

$$R = A\alpha k^{\alpha-1} \qquad w = Ak^{\alpha} - kA\alpha k^{\alpha-1}$$

Y las fracciones de renta que se destinan al pago a los propietarios del capital y los trabajadores son respectivamente α y $1-\alpha$

$$\frac{Rk}{y} = \frac{A\alpha k^{\alpha-1}k}{Ak^{\alpha}} = \alpha \qquad \frac{w}{y} = \frac{Ak^{\alpha} - kA\alpha k^{\alpha-1}}{Ak^{\alpha}} = 1-\alpha$$

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DEL MODELO SOLOW-SWAN Y EL COMPORTAMIENTO DE LOS MERCADOS

Estudiemos el comportamiento dinámico de la economía. Nuestro objetivo es conocer de qué depende la variación en el stock de capital per cápita a lo largo del tiempo, $\dot{k} \equiv \frac{\partial k}{\partial t}$.

Comencemos con la ecuación de inversión neta en términos agregados

$$\dot{K} = I - \delta K$$

Dividimos entre la población, sustituimos la igualdad ahorro inversión y asumimos que el ahorro es una proporción constante de la renta para obtener

$$\frac{\dot{K}}{L} = \frac{sY}{L} - \delta \frac{K}{L}$$

La parte derecha la escribimos en términos del capital per cápita

$$\frac{\dot{K}}{L} = sf(k) - \delta k$$

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DEL MODELO SOLOW-SWAN Y EL COMPORTAMIENTO DE LOS MERCADOS

A continuación, vamos a transformar $\frac{\dot{K}}{L}$ en una expresión que incluya la variación en el tiempo del capital per cápita, $\dot{k}$.

Dada la definición $k = \frac{K}{L}$, el cálculo de la derivada de un cociente implica que

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2}$$

Recordando que la población crece a tasa constante n

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$$

Combinando este resultado con la ecuación que determina $\frac{\dot{K}}{L}$ alcanzamos la **ecuación fundamental**:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k$$

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DEL MODELO SOLOW-SWAN Y EL COMPORTAMIENTO DE LOS MERCADOS

Ecuación fundamental del modelo Solow-Swan:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k$$

El aumento del capital per cápita, $\dot{k}$, es la diferencia entre el ahorro (inversión bruta) por persona, $sf(k)$, y los costes de mantenimiento del capital per cápita, $(n + \delta)k$.

Efectuar una representación gráfica con el capital per cápita k medido en el eje de abscisas.

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DEL MODELO SOLOW-SWAN Y EL COMPORTAMIENTO DE LOS MERCADOS

Economía de mercado

¿Qué ocurriría si existieran mercados competitivos de activos y trabajo?

Los hogares serían los propietarios de los activos y ofrecerían servicios de trabajo, obteniendo una renta de $rA + wL$, su ahorro sería $rA + wL - C$, que se destinaría íntegramente a incrementar los activos

$$\dot{A} = rA + wL - C$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la población y definiendo los activos per cápita como $a = \frac{A}{L}$, obtenemos

$$\frac{\dot{A}}{L} = ra + w - c$$

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DEL MODELO SOLOW-SWAN Y EL COMPORTAMIENTO DE LOS MERCADOS

Calculemos $\dot{a}$ a partir de su definición, $a = \frac{A}{L}$,

$$\dot{a} = \frac{\dot{A}L - \dot{L}A}{L^2} = \frac{\dot{A}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{A}{L} = \frac{\dot{A}}{L} - na$$

Combinando el resultado con la ecuación anterior, obtenemos

$$\dot{a} = ra + w - c - na$$

Hay dos tipos de activos: financieros y no financieros. Los activos financieros (préstamos, bonos) asumimos que no tienen incertidumbre sobre su cobro y dan una rentabilidad r sin riesgo de impago. El activo no financiero es el capital físico que tiene un rendimiento neto $R - \delta$. La perfecta sustituibilidad entre activos garantiza la igualdad de sus rentabilidades

$$r = R - \delta$$

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DEL MODELO SOLOW-SWAN Y EL COMPORTAMIENTO DE LOS MERCADOS

Las empresas contratan trabajadores y alquilan capital físico con el objetivo de maximizar la función de beneficios:

$$\pi = F(K, L, T) - (r + \delta)K - wL$$

lo cual implica las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial F}{\partial K} - (r + \delta) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial L} - w = 0$$

Recordando los productos marginales que obtuvimos en la transparencia 21, tenemos

$$f'(k) = (r + \delta) \quad ; \quad f(k) - kf'(k) = w$$

que una vez sustituidos en la ecuación que determina $\dot{a}$, el resultado es

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DEL MODELO SOLOW-SWAN Y EL COMPORTAMIENTO DE LOS MERCADOS

$$\dot{a} = ra + f(k) - k(r + \delta) - c - na$$

En una economía cerrada, con hogares idénticos en cuanto a sus preferencias y a sus dotaciones iniciales, el saldo agregado de activos financieros ha de ser cero, ya que todos los préstamos deben cancelarse en el conjunto de economía. De esta forma el stock agregado de activos coincide con el de capital físico $a = k$, así como su variación, $\dot{a} = \dot{k}$. La ecuación del ahorro que así:

$$\dot{k} = rk + f(k) - k(r + \delta) - c - nk$$

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + \delta)k$$

Teniendo en cuenta que el ahorro per cápita, $f(k) - c$, es una proporción s de la renta per cápita

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k$$

Que resulta ser la ecuación fundamental del modelo Solow-Swan

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LA REGLA DE ORO DE LA ACUMULACIÓN DE CAPITAL

Estado estacionario (EE): Situación en la que TODAS las variables del modelo crecen a tasas CONSTANTES (sean 0 ó cualquier otro valor)

¿Cómo es el EE en el modelo de Solow-Swan?

Condición de EE → $\dot{k} = 0$

$sf(k) = (n + \delta)k$ → k^* constante

(prueba en el pie de página 12, página 34 del libro)

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LA REGLA DE ORO DE LA ACUMULACIÓN DE CAPITAL

El capital del EE, k^*, depende de la tasa de ahorro, s , la tasa de crecimiento de la producción, n , la tasa de depreciación del capital, δ , y las características de la función de producción, $f(.)$.

Producción y consumo per cápita depende del capital per cápita en EE:

$$y^* = f(k^*) \quad ; c^* = (1-s)f(k^*)$$

Las variables per cápita (k, y, c) se mantienen constantes en el EE.
Las variables agregadas (K, Y, C) crecen siempre en el EE a la tasa de crecimiento de la población, n.
Representar gráficamente el k^*a partir de la ecuación fundamental.

Hallar k^* para el caso de función de producción Cobb-Douglas.

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LA REGLA DE ORO DE LA ACUMULACIÓN DE CAPITAL

¿Cuál es el mejor EE posible?

Criterio: maximizar el consumo per cápita (*proxy* de la felicidad de los hogares)

Consumo per cápita en EE

$$sf(k^*) = (n+\delta)k^* \quad ; \quad c^* = (1-s)f(k^*)$$

Resolver el problema de optimización

$$Max \quad c^* = f(k^*) - (n+\delta)k^*$$

Al depender c^* de dos funciones en k^*, tomamos la condición de primer orden respecto a k^*

$$\frac{\partial c^*}{\partial k^*} = f'(k^*) - (n+\delta) = 0$$

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LA REGLA DE ORO DE LA ACUMULACIÓN DE CAPITAL

Capital de la regla de oro:

$$f'(k^*) = (n+\delta) \quad \rightarrow k^* = k_{oro}$$

Regla de oro de la acumulación de capital (Edmund Phelps, 1966): "trata a los demás como quisieras ser tratado"

$$f'(k^*) > (n+\delta) \;\; excesivo\ consumo\ presente, aumentar\ ahorro, \uparrow k$$
$$f'(k^*) < (n+\delta) \;\; escaso\ consumo\ presente, reducir\ ahorro, \downarrow k$$

Hay un nivel óptimo de ahorro que llevaría a la acumulación óptima de capital en el estado estacionario $s_{oro} \rightarrow k^* = k_{oro}$

EL MODELO NEOCLÁSICO DE SOLOW Y SWAN (I) – EL ESTADO ESTACIONARIO Y LA REGLA DE ORO DE LA ACUMULACIÓN DE CAPITAL

Representar gráficamente k_{oro} a partir de la condición de primer orden $f'(k) = (n + \delta)$

Hallar la solución de k_{oro} para el caso de función de producción Cobb-Douglas