CRECIMIENTO ECONÓMICO

SESIÓN: Ampliaciones al modelo de Ramsey

Profesor: Miguel Casares

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

ÍNDICE

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

Hasta ahora hemos ignorado el papel del Estado en la economía. La ausencia del sector público es un supuesto criticable por su relevancia como contribuidor a la producción agregada y por su influencia a través de las políticas fiscales.

Vamos a extender el modelo de Ramsey para incorporar el papel del Estado.

En el modelo ampliado el Estado lleva a cabo las siguientes actividades económicas:

- Compra la cantidad G de bienes y servicios a las empresas
- Transfiere a los hogares una cantidad de ingreso real (subvenciones) por valor de V
- Obtiene ingresos mediante impuestos a
    - Las rentas del trabajo → $\tau_w wL$
    - Las rentas de los activos privados → $\tau_a rA$
    - El gasto en consumo de los hogares → $\tau_c C$
    - Los beneficios de las empresas → $\tau_f \cdot BI$

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

De acuerdo a lo anterior, la restricción presupuestaria del Estado es

$$G + V = \tau_w wL + \tau_a rA + \tau_c C + \tau_f \cdot BI$$

Si los gastos totales (izquierda) superaran a los ingresos impositivos (derecha), se produciría un déficit público que debería de financiarse con emisión de deuda.

La incorporación del sector público puede tener los siguientes efectos sobre los hogares y las empresas de la economía que describe el modelo de Ramsey:

i) Cambia la restricción presupuestaria de las familias al añadirse las subvenciones públicas y el pago de impuestos

ii) Cambia la función de beneficios de las empresas al añadirse el pago de impuestos

iii) Modificación de la función de utilidad para tener en cuenta el bienestar que provoca el consumo de bienes públicos

iv) Modificación de la función de producción para recoger el efecto del gasto público

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

De momento, vamos a ver los efectos de los dos primeros cambios en el modelo:
i) Nueva restricción presupuestaria de las familias (en unidades per cápita):

$$\dot{a} = (1 - \tau_w)w + (1 - \tau_a)ra - (1 + \tau_c)c - na + v$$

y el problema de control óptimo a resolver por el hogar representativo con función de utilidad de elasticidad de sustitución intertemporal constante queda así

$$Max \int_0^{\infty} e^{-(\rho - n)t} \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} dt$$

sujeto a

$$\dot{a} = (1 - \tau_w)w + (1 - \tau_a)ra - (1 + \tau_c)c - na + v$$

Recordemos, paso a paso, la mecánica para hallar la ecuación dinámica óptima del consumo:

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

1. Variable de control → c ; Variable de estado → a
2. Hamiltoniano:

$$J = e^{-(\rho-n)t}\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + v[(1-\tau_w)w + (1-\tau_a)ra - (1+\tau_c)c - na + v]$$

3. Condición de primer orden de la variable de control:

$$\frac{\partial J}{\partial c} = 0 = e^{-(\rho-n)t}\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} - v(1+\tau_c)$$

4. Condición de primer orden de la variable de estado:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = -\dot{v} = v\big((1-\tau_a)r - n\big)$$

5. Condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} a(t)e^{-\int_0^{\infty}((1-\tau_a)r(v)-n)dv} = 0$$

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

Si calculamos $\dot{\nu}$ a partir de la condición de primer orden del consumo y lo sustituimos, junto con el valor de ν, en la condición de primer orden del stock de activos, obtenemos la ecuación que marca la senda intertemporal óptima del consumo:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[(1-\tau_a)r - \rho]$$

La decisión óptima del hogar sobre consumir o ahorrar depende de la diferencia entre la tasa de rendimiento **neta** de los activos (tras impuestos), $(1-\tau_a)r$, y la tasa de preferencia intertemporal, ρ.

Un aumento del tipo impositivo τ_a reduce el retorno de la inversión en activos financieros y desincentiva el ahorro favoreciendo el consumo presente.

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

ii) La segunda modificación al modelo de Ramsey extendido con sector público afecta al beneficio de las empresas. Las empresas pagan un impuesto cuya base imponible es

$$BI = F(K, \hat{L}) - wL - \delta K$$

con lo que los únicos gastos deducibles son los pagos salariales y la depreciación del capital físico. Recordando que en equilibrio el coste unitario del capital es $R = r + \delta$, el beneficio neto de la empresa queda así

$$\pi = (1 - \tau_f)\left(F(K, \hat{L}) - wL - \delta K\right) \ - rK$$

Las condiciones de primer orden para la demanda de capital y de trabajo son, respectivamente,

$$(1 - \tau_f)\frac{\partial Y}{\partial K} - (1 - \tau_f)\delta - r = 0$$

$$(1 - \tau_f)\frac{\partial Y}{\partial L} - (1 - \tau_f)w = 0$$

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

La función de producción es neoclásica e incorpora progreso tecnológico potenciador del trabajo. Por tanto, las productividades marginales del capital y del trabajo son

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(\hat{k})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = e^{xt}\left[f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})\right]$$

Sustituyendo estas productividades en las condiciones de primer orden obtenemos

$$\left(1 - \tau_f\right)(f'(k) - \delta\,) = r$$

$$e^{xt}\left[f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})\right] = w$$

Comentar los efectos de la imposición a las empresas sobre el comportamiento de demanda de capital y de trabajo.

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

A continuación, vamos a buscar la ecuación dinámica del capital por unidad de trabajo efectivo en el modelo de Ramsey ampliado con la participación del Estado.
Si expresamos la restricción presupuestaria del gobierno en términos per cápita

$$g + v = \tau_w w + \tau_a ra + \tau_c c + \tau_f \cdot bi$$

y la sustituimos en la restricción presupuestaria de los hogares (a través del elemento común de las transferencias públicas v), junto con las condiciones de equilibrio en los mercados de activos de una economía cerrada ($a = k$, $\dot{a} = \dot{k}$) y la función de base imponible per cápita, se obtiene la siguiente restricción de recursos disponibles para el conjunto de la economía

$$\dot{k} = w + (r - n)k + \tau_f(f(k) - w - \delta k) - c - g$$

El salario y el tipo de interés de los activos se pueden reemplazar por las expresiones que surgen de las demandas de trabajo y capital, respectivamente,

$$r = (1 - \tau_f)(f'(k) - \delta) \quad ; \quad w = f(k) - f'(k)k$$

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

$$\dot{k} = f(k) - f'(k)k + \left(\left(1 - \tau_f\right)\left(f'(k) - \delta\right) - n\right)k + \tau_f\left(f(k) - w - \delta k\right) - c - g$$

que puede simplificarse notablemente hasta alcanzar esta ecuación dinámica

$$\dot{k} = f(k) - c - g - (\delta + n)k$$

Recordando que $k = e^{xt}\hat{k}$, la equivalencia entre la variación del capital per cápita y la variación del capital por unidad de trabajo efectivo es $\dot{k} = xe^{xt}\hat{k} + \dot{\hat{k}}e^{xt} = e^{xt}\left(x\hat{k} + \dot{\hat{k}}\right)$

Insertando $\dot{k} = e^{xt}\left(x\hat{k} + \dot{\hat{k}}\right)$, $k = e^{xt}\hat{k}$, $f(k) = e^{xt}f\left(\hat{k}\right)$ y $c = e^{xt}\hat{c}$, la restricción global de recursos en unidades de trabajo efectivo queda así

$$\dot{\hat{k}} = f\left(\hat{k}\right) - \hat{c} - \hat{g} - (x + n + \delta)\hat{k}$$

con $\hat{g} = \frac{G}{\hat{L}} = \frac{G}{e^{xt}L} = \frac{g}{e^{xt}}$ para medir el gasto público también por unidades de trabajo efectivo.

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

A través de un procedimiento muy similar, la ecuación dinámica del consumo puede transformarse de los términos per cápita

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[(1-\tau_a)r - \rho]$$

a los términos por unidad de trabajo efectivo (comprobando que los términos e^{xt} se cancelan)

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left((1-\tau_a)r - \rho - \theta x\right)$$

y sustituyendo la condición de demanda de capital óptima

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\left((1-\tau_a)(1-\tau_f)\left(f'(\hat{k}) - \delta\right) - \rho - \theta x\right)$$

A modo de resumen reescribimos las 2 ecuaciones dinámicas del modelo de Ramsey extendido con sector público y discutimos (gráficamente) los efectos de la política fiscal:

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - \hat{g} - (x + n + \delta)\hat{k}$$

$$\dot{\hat{c}} = \hat{c}\frac{1}{\theta}\Big((1-\tau_a)(1-\tau_f)\big(f'(\hat{k}) - \delta\big) - \rho - \theta x\Big)$$

- Representar el diagrama de fase
- Discutir los efectos de pasar de una economía sin gasto público ($\hat{g} = 0$) a una economía con gasto público ($\hat{g} > 0$). Efecto sobre la curva $\dot{\hat{k}} = 0$.
- Discutir los efectos de pasar de una economía sin imposición fiscal ($\tau_a = \tau_f = 0$) a una economía con impuestos ($\tau_f > 0$, $\tau_a > 0$). Efecto sobre la recta vertical $\dot{\hat{c}} = 0$.
- Estado estacionario y dinámicas de transición

¿El papel del Estado como proveedor de gasto público financiado con impuestos tiene algún efecto positivo sobre el crecimiento económico o el bienestar social?
No. El Estado retrae recursos económicos de hogares y familias sin generar un retorno social.

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

La respuesta negativa a la anterior pregunta es insatisfactoria por las contradicciones con el mundo real. La evidencia empírica sugiere que el gasto público favorece el progreso económico y proporciona bienestar a los hogares. Además, supone una aportación significativa a la demanda agregada.

Para responder a esta crítica necesitamos incorporar al modelo de Ramsey al menos una de las dos modificaciones que planteábamos al comienzo de la sesión:

iii) Modificación de la función de utilidad para tener en cuenta el bienestar que provoca el consumo de bienes públicos
iv) Modificación de la función de producción para recoger el efecto del gasto público.

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

Gasto público en función de utilidad de los hogares

$$U(c,\tilde{g}) = \frac{h(c,\tilde{g})^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

con signo positivo para la derivada parcial $\frac{\partial h(c,\tilde{g})}{\partial \tilde{g}} > 0$

El gasto público puede ser de dos tipos:

- Bien no rival (bien público): $\tilde{g} = G$
- Bien rival (bien privado) de provisión pública: $\tilde{g} = \frac{G}{L} = g$

El gasto público permite una sustitución de consumo privado por el consumo de bienes públicos o privados de provisión pública → los hogares pueden tener una ganancia de bienestar recogida a través de un aumento del valor numérico de la función de utilidad.

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

Para que el modelo tenga EE ha de cumplirse que $\lambda = g/c$ sea constante en el tiempo. La ecuación dinámica del capital por unidad de trabajo efectivo quedaría así:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - (1+\lambda)\hat{c} - (x+n+\delta)\hat{k}$$

Un aumento de la participación del Estado (aumento de λ) desplaza la curva $\dot{\hat{k}} = 0$ hacia abajo. En el nuevo EE disminuye $\hat{c}^*$ para un valor dado de $\hat{k}^*$. No habrá efectos sobre el nivel de producción del EE, $\hat{y}^*$. Sustitución completa de gasto público por consumo.

El efecto sobre el bienestar dependerá del valor recogido en la función de utilidad. Un aumento de g con una disminución equivalente de c podría incrementar la utilidad y el bienestar de las familias. Así que una mayor preferencia de los hogares por el bien público frente al privado justificaría el incremento de la participación del Estado en la producción de bienes de consumo (aumento de λ).

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

Si existe un planificador social que busca la maximización del bienestar de los hogares respetando la restricción de recursos agregados, las condiciones de optimalidad a establecer son:

$$U_{\tilde{g}} = U_c \qquad si\ \tilde{g} = g \quad (bienes\ rivales)$$

$$U_{\tilde{g}} = e^{-nt} U_c \qquad si\ \tilde{g} = G \quad (bienes\ no\ rivales, públicos)$$

En el segundo caso el crecimiento de la población a tasa n abarata los bienes públicos con el paso del tiempo (recordemos que en el EE del modelo, G crece a tasa $x + n$ mientras que el consumo per cápita c crece a tasa x).

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

Modificación de la función de producción para recoger el efecto del gasto público. Se incorpora como un factor productivo adicional. En términos de capital por unidad de trabajo efectivo, la función de producción quedaría de la siguiente forma

$$\hat{y} = f(\hat{k}, \tilde{g})$$

La contribución del gasto público podría ser, por ejemplo, a través del uso de infraestructuras públicas, capital físico público, la concesión de licencias de uso de tecnologías innovadoras compradas por el Estado, etc.

Tal y como ocurría para el gasto público en la función de utilidad, la forma de incorporarlo a la función de producción puede ser de 2 tipos:

$si\ \tilde{g} = \hat{g} \quad (bienes\ rivales) \rightarrow \hat{y} = f(\hat{k}, \hat{g})$

$si\ \tilde{g} = G \quad (bienes\ no\ rivales, públicos) \rightarrow \hat{y} = f(\hat{k}, G)$

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

Si la función de producción es Cobb-Douglas y el gasto público genera un capital de uso privado suministrado públicamente, tenemos

$$\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha}\hat{g}^{\beta}$$

donde $0 < \beta < 1$ es el parámetro que da la medida de la productividad del gasto público.

El planificador social aumentará el nivel de gasto público en la función de producción si $\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{g}} > 1$, al utilizar recursos económicos con un retorno superior a la unidad. Los rendimientos marginales decrecientes harán que $\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{g}}$ disminuya hasta alcanzar la cuantía óptima con $\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{g}} = 1$. Esta condición de óptimo es equivalente a:

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{g}} = 1 \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{\hat{g}}{\hat{y}}$$

La demostración es sencilla a partir de la derivada parcial

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{g}} = \beta A \hat{k}^{\alpha} \hat{g}^{\beta-1} = \beta \frac{\hat{y}}{\hat{g}}$$

El planificador debe diseñar una intensidad en el uso de gasto público en la función de producción, $\frac{\hat{g}}{\hat{y}}$, acorde con la medida de productividad β.

En el caso de gasto público no rival en la función de producción Cobb-Douglas

$$\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha} G^{\beta}$$

la condición del planificador social es $\beta = \frac{G}{\hat{y}}$, resultando pues equivalente al caso de bienes rivales.

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – EL ESTADO

En general, la incorporación del gasto público en la función de producción permite expandir la frontera de posibilidades de producción en niveles:

$f(\hat{k}, \tilde{g})$ toma valores superiores a $f(\hat{k})$

Y también en términos de la productividad del capital:

$f'(\hat{k}, \tilde{g})$ toma valores superiores a $f'(\hat{k})$

Los efectos sobre el diagrama de fase y el EE son:

- La función $\dot{\hat{k}} = 0$ se desplaza hacia arriba
- La recta vertical $\dot{\hat{c}} = 0$ se desplaza hacia la derecha
- Aumentan el consumo, el capital y el producto en el EE. Los valores de $\hat{c}^*$, $\hat{k}^*$, $\hat{y}^*$ son mayores aunque sus tasas de crecimiento se mantienen en $x + n$.
- Aumenta el bienestar de los hogares en el EE por el mayor nivel de consumo per cápita.

En la tercera sección de la sesión 7 veremos un ejemplo desarrollado de un modelo de crecimiento endógeno con gasto público en la función de producción.

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – COSTES DE AJUSTES DE LA INVERSIÓN

Transformar una unidad de producción (renta) en capital físico tiene un coste. Nuestra economía genera bienes **no homogéneos** entre su destino para el consumo o la inversión en acumulación de capital físico.

Los costes de la instalación del capital físico pueden tener efectos sobre la decisión de inversión en activos financieros (sin coste) o activos físicos (con coste). Habrá efectos tanto sobre los niveles de las variables en el EE (largo plazo) como sobre la velocidad de convergencia en la transición hacia el EE (corto plazo).

El coste total de la inversión de I unidades es

$$I(1+\phi(I/K))$$

que incluye una función de costes de ajuste, $\phi(I/K)$, dependiendo del ratio de inversión sobre el stock de capital con las siguientes propiedades

$$\phi(0)=0 \quad ; \quad \phi'>0 \ ; \quad \phi''>0$$

por lo que es creciente y convexa en I/K.

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – COSTES DE AJUSTES DE LA INVERSIÓN

Para facilitar el análisis, en esta sección supondremos que las empresas son las propietarias del capital y no hay un mercado de alquiler de maquinaria. También asumimos que el tipo de interés de los activos financieros r es constante y exógeno.

El problema de optimización que resuelven las empresas para decidir la cantidad de inversión consiste en maximizar la función intertemporal de beneficio sujeta a la restricción de acumulación de capital

$$Max \int_{0}^{\infty} e^{-rt}\left[F\left(K,\hat{L}\right) - wL - I(1+\phi(I/K))\right]dt$$

sujeto a

$$\dot{K} = I - \delta K$$

Los 5 pasos a seguir para la resolución del problema de control óptimo son:

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – COSTES DE AJUSTES DE LA INVERSIÓN

1. Variables de control → L, I ; Variable de estado → K

2. Hamiltoniano:

$$J = e^{-rt}\left[F\left(K,\hat{L}\right) - wL - I(1+\phi(I/K))\right] + \nu[I - \delta K]$$

3. Condiciones de primer orden de las variables de control:

$$\frac{\partial J}{\partial L} = 0 = e^{-rt}\left[\frac{\partial Y}{\partial L} - w\right]$$

$$\frac{\partial J}{\partial I} = 0 = -e^{-rt}\left[1 + \phi(I/K) + \phi'(I/K)\frac{I}{K}\right] + \nu$$

4. Condición de primer orden de la variable de estado:

$$\frac{\partial J}{\partial K} = -\dot{\nu} = e^{-rt}\left[\frac{\partial Y}{\partial K} + \phi'(I/K)\frac{I^2}{K^2}\right] - \delta\nu$$

5. Condición de transversalidad: $\lim_{t\to\infty} e^{-rt}\nu K = 0$

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – COSTES DE AJUSTES DE LA INVERSIÓN

Definamos q como el precio sombra del valor actual del capital instalado en unidades de producción presente, a partir de la definición

$$v = qe^{-rt}$$

con lo que podemos reescribir las condiciones de primer orden dependiendo de tanto de q como del capital y la inversión por unidad de trabajo efectivo, $\hat{k} = \frac{k}{e^{xt}}$ $\hat{\imath} = \frac{i}{e^{xt}}$, de la siguiente manera

$$e^{xt}\left[f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})\right] = w$$

$$q = 1 + \phi(\hat{\imath}/\hat{k}) + \phi'(\hat{\imath}/\hat{k})\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}$$

$$\dot{q} = (r+\delta)q - \left[f'(\hat{k}) + \left(\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}\right)^2 \phi'(\hat{\imath}/\hat{k})\right]$$

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – COSTES DE AJUSTES DE LA INVERSIÓN

La ecuación de la inversión óptima da un valor q del capital que presenta una relación monótona y creciente con el ratio $\hat{\imath}/\hat{k}$ (debido a las propiedades de la función $\phi(\cdot)$)

$$q = 1 + \phi\left(\hat{\imath}/\hat{k}\right) + \phi'\left(\hat{\imath}/\hat{k}\right)\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}$$

lo cual implica una relación de signo positivo entre el ratio de inversión sobre el capital y el valor de ese capital.

Brainard y Tobin (1968, *AER*) utilizan el ratio entre el valor de mercado de las empresas y el stock de capital como aproximación al valor del capital de las empresas (q promedio). El modelo de Ramsey con costes de ajuste de la inversión tiene una q promedio

$$q = \mathrm{V}/\mathrm{K}$$

donde el valor de la empresa V se obtiene como la suma del valor presente de los beneficios empresariales (función objetivo de la empresa en el problema de control óptimo). Se puede demostrar que la q promedio, $q = V/K$ coincide con la q marginal escrita más arriba.

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – COSTES DE AJUSTES DE LA INVERSIÓN

Para resolver el sistema dinámico de las tres variables $\hat{k}, q, \hat{\imath}$ necesitamos las ecuaciones de optimalidad de capital y de inversión más una ecuación adicional que establezca una relación entre estas variables. Retomamos la restricción de acumulación de capital

$$\dot{K} = I - \delta K$$

y la expresamos en términos de capital por unidad de trabajo efectivo

$$\frac{\dot{K}}{\hat{L}} = \hat{\imath} - \delta \hat{k}$$

para que, dada la definición de capital por unidad de trabajo efectivo, $\hat{k} = \frac{K}{\hat{L}}$, calculemos su derivada en el tiempo $\dot{\hat{k}} = \frac{\dot{K}\hat{L} - \dot{\hat{L}}K}{\hat{L}^2} = \frac{\dot{K}}{\hat{L}} - (n + x)\hat{k}$, teniendo en cuenta que $\frac{\dot{\hat{L}}}{\hat{L}} = n + x$, para sustituirla en la expresión anterior y obtener

$$\dot{\hat{k}} = \hat{\imath} - (n + x + \delta)\hat{k}$$

que junto con las ecuaciones de primer orden del capital y de la inversión conforman el sistema:

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – COSTES DE AJUSTES DE LA INVERSIÓN

$$q = 1 + \phi(\hat{\imath}/\hat{k}) + \phi'(\hat{\imath}/\hat{k})\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}$$

$$\dot{q} = (r+\delta)q - \left[f'(\hat{k}) + \left(\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}\right)^2 \phi'(\hat{\imath}/\hat{k})\right]$$

$$\dot{\hat{k}} = \hat{\imath} - (n + x + \delta)\hat{k}$$

que proporciona soluciones dinámicas para $\hat{k}, q, \hat{\imath}$. Busquemos este equilibrio a través de la especificación de la siguiente función (lineal) de costes de ajuste de la inversión:

$$\phi(\hat{\imath}/\hat{k}) = (b/2)(\hat{\imath}/\hat{k}) \quad con\ b > 0$$

que implica que $\phi'(\hat{\imath}/\hat{k}) = (b/2)$ con una solución para el valor del capital dependiendo del ratio entre inversión y capital

$$q = 1 + b\hat{\imath}/\hat{k}$$

o, dándole la vuelta, una relación positiva del ratio $\hat{\imath}/\hat{k}$ con q

$$\hat{\imath}/\hat{k} = (q-1)/b$$

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – COSTES DE AJUSTES DE LA INVERSIÓN

La representación gráfica del diagrama de fase del modelo de Ramsey con costes de ajuste de la inversión se hace a partir de las condiciones EE, $\dot{\hat{k}} = 0$ y $\dot{q} = 0$, en las ecuaciones dinámicas presentadas anteriormente. El supuesto $\dot{\hat{k}} = 0$ trae consigo un ratio constante entre inversión y capital, $\hat{\imath}/\hat{k} = n + x + \delta$. Dada la relación $q = 1 + b\hat{\imath}/\hat{k}$, tenemos el valor del capital en el EE

$$\dot{\hat{k}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad q^* = 1 + b(n + x + \delta)$$

El supuesto $\dot{q} = 0$ nos lleva a

$$(r + \delta)q = \left[f'(\hat{k}) + \left(\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}\right)^2 \phi'(\hat{\imath}/\hat{k})\right]$$

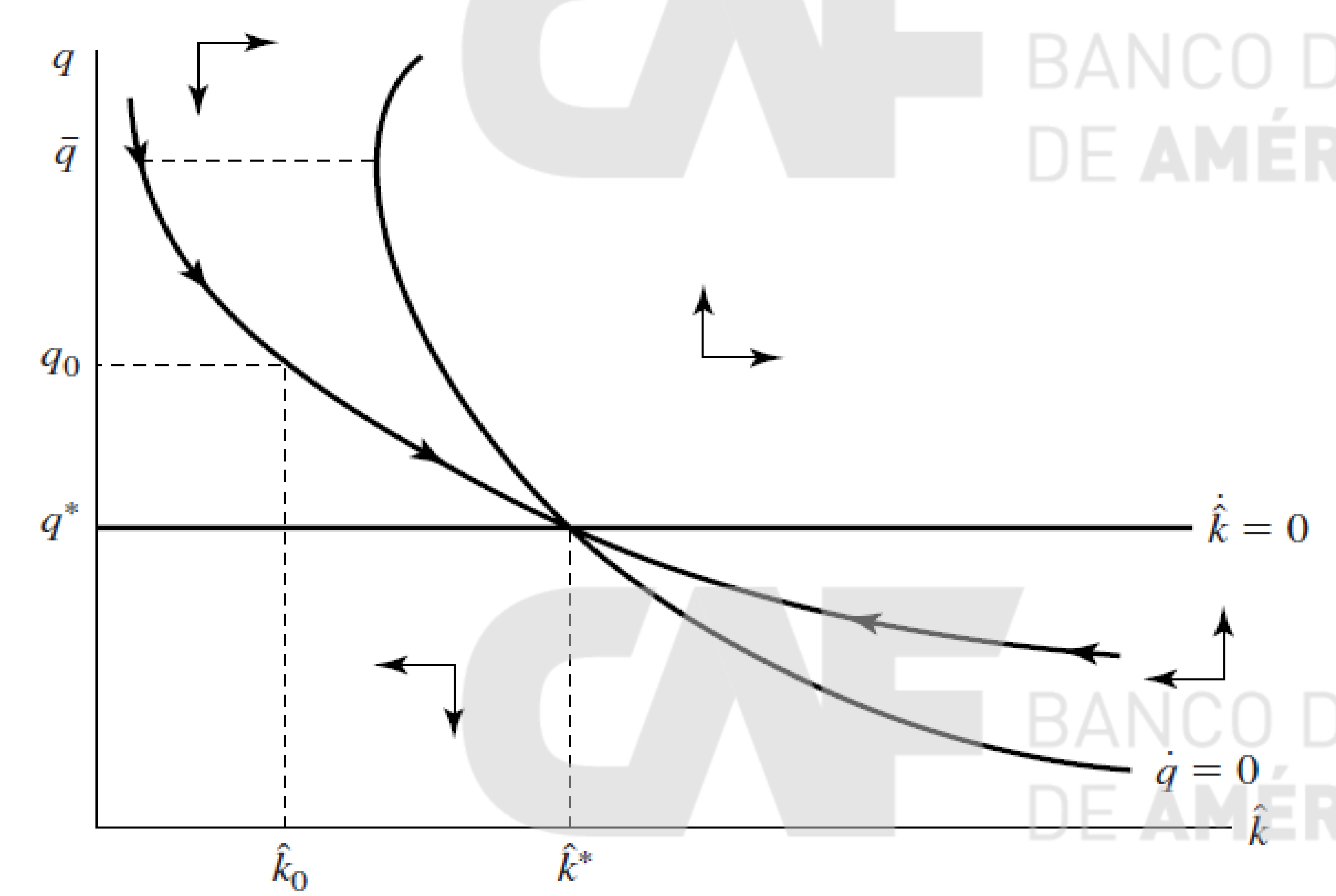
donde sustituyendo tanto $\phi'(\hat{\imath}/\hat{k}) = (b/2)$ como $\hat{\imath}/\hat{k} = (q - 1)/b$, obtenemos

$$(r + \delta)q = [f'(\hat{k}) + (q - 1)^2/(2b)]$$

es decir

$$\dot{q} = 0 \qquad \rightarrow (q - 1)^2 - 2b(r + \delta)q + 2bf'(\hat{k}) = 0$$

Representación gráfica: diagrama de fase y la transición hacia el EE



$$\dot{\hat{k}} = 0 \;\rightarrow\; q^* = 1 + b(n + x + \delta)$$

q constante (recta horizontal)

¿Qué signo tiene $\dot{\hat{k}}$ para un valor inicial alto $q > q^*$? Dada la ecuación $q = 1 + b\hat{\imath}/\hat{k}$, se establece una relación inversa entre q y $\hat{k}$. Por tanto un aumento de q implica una disminución de $\hat{k}$ y en la ecuación dinámica

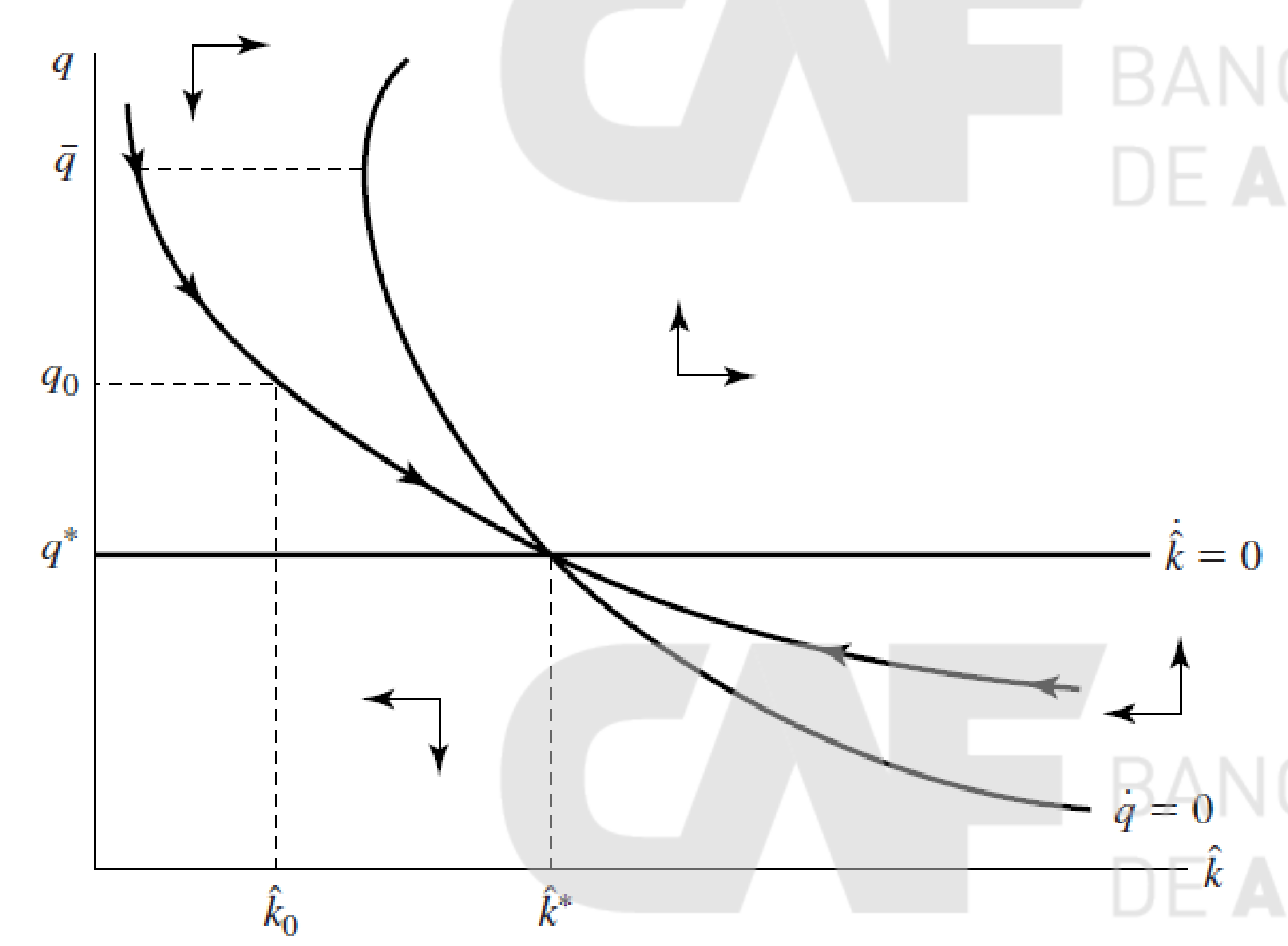
$$\dot{\hat{k}} = \hat{\imath} - (n + x + \delta)\hat{k}$$

sale $\dot{\hat{k}} > 0$. Gráficamente:

Si $q > q^* \rightarrow \dot{\hat{k}} > 0$ (flecha derecha)

Si $q < q^* \rightarrow \dot{\hat{k}} < 0$ (flecha izquierda)

Representación gráfica: diagrama de fase y la transición hacia el EE



$$\dot{q} = 0 \rightarrow (q-1)^2 - 2b(r+\delta)q + 2bf'(\hat{k}) = 0$$

La pendiente de la relación entre q y $\hat{k}$ es

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{k}} = \frac{-bf''(\hat{k})}{q - 1 - b(r+\delta)}$$

El signo es $\frac{+}{-} = -$ si

$$q - 1 < b(r+\delta) \quad ; \quad q < 1 + b(r+\delta)$$

En el EE, se cumple que $q^* - 1 = b(n + x + \delta)$ y por la condición de transversalidad que $r > x + n$.

Por tanto cerca del EE se cumple que $\frac{\partial q}{\partial \hat{k}} < 0$ y en la representación gráfica la pendiente de $\dot{q} = 0$ es de signo negativo.

¿Qué signo tiene $\dot{q}$ para un valor inicial bajo $\hat{k} < \hat{k}^*$?

Recordando la ecuación dinámica

$$\dot{q} = (r+\delta)q - \left[f'(\hat{k}) + \left(\frac{\hat{\imath}}{\hat{k}}\right)^2 (b/2)\right]$$

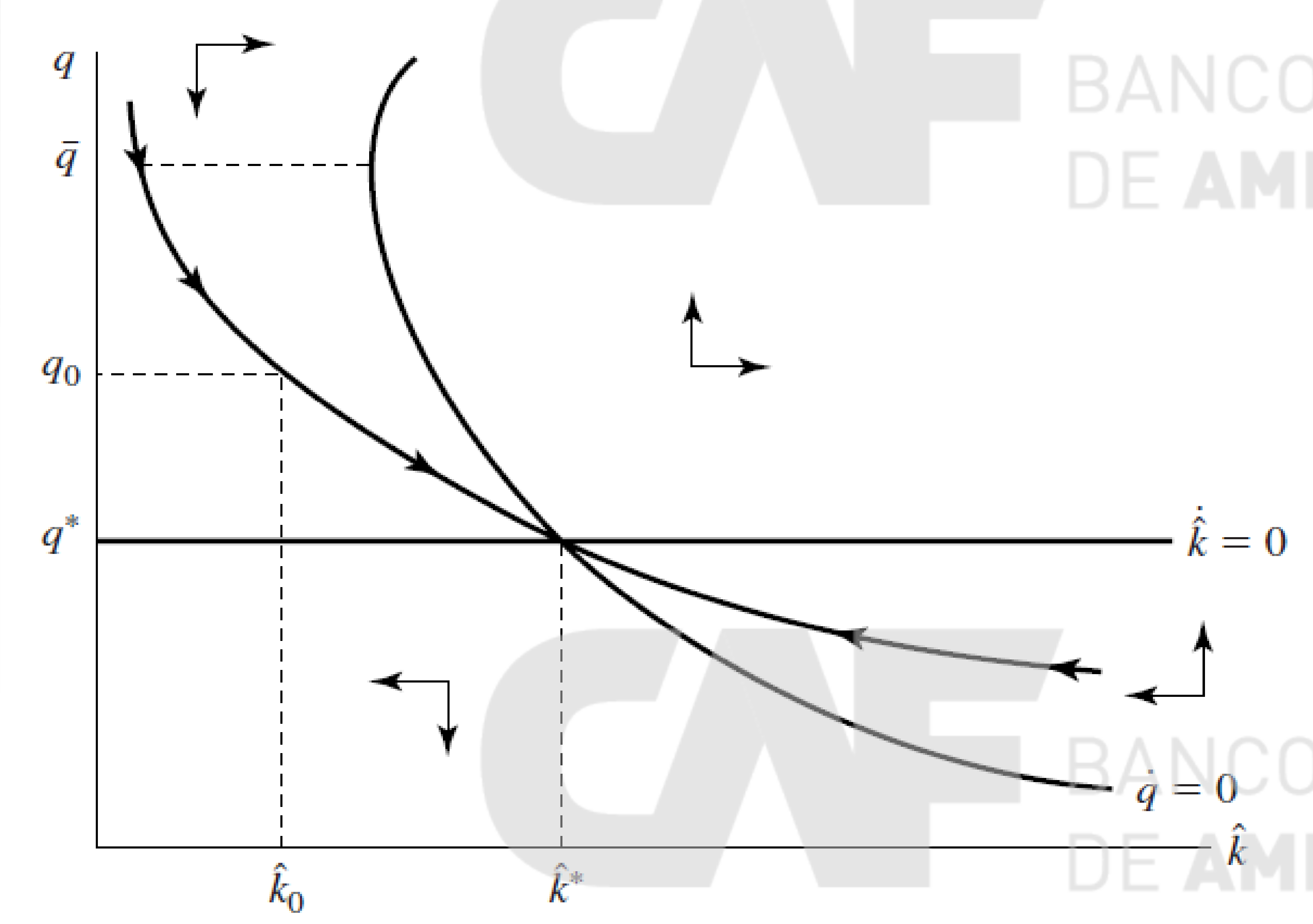
observamos que un $\hat{k}$ pequeño incrementa el valor del rendimiento del capital (sobre los 2 términos del corchete) y provoca un $\dot{q} < 0$. Gráficamente:

Si $\hat{k} < \hat{k}^* \rightarrow \dot{q} < 0$ (flecha abajo)

Si $\hat{k} > \hat{k}^* \rightarrow \dot{q} > 0$ (flecha arriba)

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – COSTES DE AJUSTES DE LA INVERSIÓN

Representación gráfica: diagrama de fase y la transición hacia el EE



Estabilidad con trayectoria de punto de silla. Para que el diagrama de fase determine una transición hacia el EE es necesario que

$\hat{k}(0) < \hat{k}^*$; $q(0) > q^*$

En el EE :

$$q^* = 1 + b(n + x + \delta)$$

$$f'(\hat{k}^*) = r + \delta + b(n + x + \delta)[r + \delta - 0.5(n + x + \delta)]$$

Reflexionad sobre los efectos de un aumento en el parámetro que mide el tamaño de los costes de ajuste de la inversión b

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – ECONOMÍA ABIERTA

Vamos a ampliar el modelo de Ramsey hacia una economía abierta caracterizada por:

- Movilidad internacional de bienes y activos financieros
- No hay especialización de la producción ni preferencias de demanda heterogéneas entre los distintos países (indiferencia entre consumo de bienes doméstico e importaciones) → irrelevancia del comercio internacional.
- Vamos a concentrar el análisis en los aspectos intertemporales de la elección de activos financieros en los mercados internacionales y en la posición acreedora o deudora que se genera.
- Los hogares y las empresas de todas las empresas comparten los mismos objetivos, la misma tecnología y las mismas preferencia

• RESULTADO: Conclusiones paradójicas e irreales, que son contradichas por la evidencia empírica → Introducir nuevas modificaciones

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – ECONOMÍA ABIERTA

La existencia de un "resto del mundo" permite que cualquier economía tenga una posición financiera acreedora o deudora con otras economías.

Puede haber diferencias entre el stock total de activos y el stock de capital físico. Para la economía (país) representativa i, medidos en términos per cápita tenemos dos posibilidades:

$k_i - a_i > 0$: derechos de propiedad netos de los residentes extranjeros en la economía nacional (posición deudora de la economía nacional i)

$k_i - a_i < 0$: derechos de propiedad netos de los residentes nacionales en las economías extranjeras (posición acreedora de la economía nacional i)

Por tanto la deuda neta per cápita de la economía nacional i es:

$$d_i = k_i - a_i$$

Y su deuda externa total es

$$D_i = L_i d_i$$

El saldo de la balanza por cuenta corriente es la variación en la deuda externa (agregada) con signo contrario:

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – ECONOMÍA ABIERTA

$$-\dot{D}_i = -\dot{\overline{L_i d_i}} = -\left(\dot{L}_i d_i + \dot{d}_i L_i\right)$$

El saldo de la balanza por cuenta corriente per cápita es

$$\frac{-\dot{D}_i}{L_i} = -\left(n_i d_i + \dot{d}_i\right)$$

donde $n_i > 0$ es la constante que define la tasa de crecimiento de la población de la economía i. Los activos financieros son sustitutos perfectos (riesgo idéntico, misma liquidez, etc.). Todos los préstamos y bonos se remuneran a la misma tasa de rendimiento

$$r \; \rightarrow \textit{tipo de interés mundial}$$

Este tipo de interés mundial es único y aceptado (exógenamente) por todas las economías porque ninguna es lo suficientemente grande como para influir en su valor.

La restricción presupuestaria de los hogares de la economía i, en términos per cápita, es

$$\dot{a}_i = w_i - (r - n_i)a_i - c_i$$

donde sustituyendo las demandas óptimas de factores de las empresas,

$$w_i = e^{x_i t}\left[f\left(\hat{k}_i\right) - \hat{k}_i f'\left(\hat{k}_i\right)\right] \quad ; \quad r + \delta_i = f'\left(\hat{k}_i\right)$$

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – ECONOMÍA ABIERTA

y pasando la restricción a unidades por trabajo efectivo, obtenemos:

$$\dot{\hat{a}}_i = f(\hat{k}_i) - (r + \delta_i)(\hat{k}_i - \hat{a}_i) - \hat{c}_i - (x_i + n_i + \delta_i)\hat{a}_i$$

La economía i podrá acumular más activos si genera una renta (producción) que le permite financiar su consumo, cubrir los costes de depreciación y mantenimiento de los activos y pagar los intereses de su deuda.

El comportamiento racional de los hogares de la economía i se recoge en el problema de control óptimo del modelo de Ramsey, resultando en la siguiente ecuación dinámica para establecer la senda intertemporal óptima del consumo por unidad de trabajo efectivo:

$$\frac{\dot{\hat{c}}_i}{\hat{c}_i} = \frac{1}{\theta_i}(r - \rho_i - \theta_i x_i)$$

es idéntica a la que obteníamos en el modelo de Ramsey para una economía cerrada pero ahora el tipo de interés r es fijo y la tasa de crecimiento $\gamma_{\hat{c}_i}$ es constante.

Tenemos dos posibles escenarios:

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – ECONOMÍA ABIERTA

Si $r > \rho_i + \theta_i x_i$ → $\dot{\hat{c}}_i > 0$ aumenta el consumo futuro, compra de activos (ahorro)
Si $r < \rho_i + \theta_i x_i$ → $\dot{\hat{c}}_i < 0$ disminuye el consumo futuro, venta de activos (desahorro)

La condición de transversalidad exige $\hat{a}_i$ crezca asintóticamente a una tasa inferior a $r - n_i$.

De acuerdo a las sendas de elección óptima de hogares y empresas , el comportamiento del consumo y los activos en una economía pequeña a partir de un valor inicial, $\hat{a}_i(0)$, viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$\hat{c}_i(t) = \left(\frac{1}{\theta_i}\right)[\rho_i - r(1-\theta_i) - n_i\theta_i]\left[\hat{a}_i(0) + \frac{\widehat{w_i}^*}{r - x_i - n_i}\right]e^{[(r-\rho_i-\theta_i x_i)/\theta_i]\cdot t}$$

$$\hat{a}_i(t) = \left[\hat{a}_i(0) + \frac{\widehat{w_i}^*}{r - x_i - n_i}\right]e^{[(r-\rho_i-\theta_i x_i)/\theta_i]\cdot t} - \frac{\widehat{w_i}^*}{r - x_i - n_i}$$

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – ECONOMÍA ABIERTA

Nuevamente, el signo de $(r - \rho_i - \theta_i x_i)$ es clave para conocer la evolución a largo plazo del consumo y del stock de activos.

Cada economía tiene un valor específico para ρ_i, θ_i, x_i y todas las economías comparten el mismo tipo de interés. La posibilidad de $r > \rho_i + \theta_i x_i$ ha de eliminarse porque la economía nacional acumularía tal cantidad creciente de activos del resto del mundo que no podría mantenerse el supuesto de tipo de interés de los préstamos dado para todas las economías. Por lo tanto, todos los países han de cumplir $r \leq \rho_i + \theta_i x_i$ y en el caso del país más paciente de todos, su tasa de preferencia intertemporal ρ_i baja le lleva a la igualdad $r = \rho_i + \theta_i x_i$ lo cual en las ecuaciones dinámicas de $\hat{c}_i(t)$, $\hat{a}_i(t)$ obtenemos los valores constantes en el tiempo:

$$\hat{c}_i(t) = \left(\frac{1}{\theta_i}\right)[\rho_i - r(1-\theta_i) - n_i\theta_i]\left[\hat{a}_i(0) + \frac{\widehat{w_i}^*}{r - x_i - n_i}\right]$$

$$\hat{a}_i(t) = \hat{a}_i(0)$$

AMPLIACIONES AL MODELO DE RAMSEY – ECONOMÍA ABIERTA

Consumo nulo a largo plazo para el resto de países con $r < \rho_i + \theta_i x_i$ → Resultado paradójico y sin evidencia empírica que lo sustente. Las familias maximizando el bienestar no deberían de desear este equilibrio a largo plazo. Los hogares renunciarían a pagar las deudas. Si los acreedores anticipan esta quiebra no prestarían fondos. Debilidad del modelo.

Extensiones al modelo de Ramsey con economía abierta que permite consumo a largo plazo positivo:

- Restricciones de financiación en los mercados crediticios internacionales. Modelo con capital humano que no puede utilizarse como garantía. Los costes de ajuste sobre la acumulación de capital humano reducen la velocidad de acumulación de activo| s (deuda).
- Variaciones en los parámetros de preferencia:
  - La tasa de preferencia intertemporal aumenta cuando disminuye el consumo y en un momento dado se alcanza la igualdad $r > \rho_i + \theta_i x_i$ finalizando el desahorro
  - Función de utilidad con consumo de subsistencia: $U(c_i) = \frac{(c_i - \bar{c}_i)^{1-\theta_i} - 1}{1-\theta_i}$

- Horizonte temporal finito.