COLECCIÓN DE EJERCICIOS PROPUESTOS con soluciones

CRECIMIENTO ECONÓMICO

MIGUEL CASARES

Esta colección de ejercicios pretende mostrar las múltiples posibilidades de aplicación de los modelos teóricos de crecimiento económico a casos reales con resultados numéricos. El libro de texto incorpora, al final de cada capítulo, una serie de ejercicios de corte teórico que pueden también plantearse como trabajo a realizar durante el desarrollo del curso. Mi intención, no obstante, es la de proponer ejercicios numéricos que faciliten la comprensión de los modelos teóricos y permitan entender su aplicabilidad a partir del uso de datos reales. El estudiante podría comprobar fácilmente los efectos que tiene una modificación de alguno de los parámetros del modelo sobre el resultado de las variables endógenas en estado estacionario o en su dinámica de corto plazo. Las últimas dos sesiones se dedican al análisis de datos sobre contabilidad del crecimiento y convergencia económica y se proponen sendos ejercicios a partir de datos reales.

EJERCICIOS - OFERTA DE TRABAJO Y POBLACIÓN

1. Modelo de Solow-Swan con movimientos migratorios. Una economía se comporta de acuerdo a los supuestos establecidos en el modelo de Solow-Swan sin progreso tecnoógico externo ($x = 0{,}0$) y con movimientos migratorios. La tasa de inmigración neta depende positivamente de la cantidad de capital per cápita de acuerdo a la siguiente relación lineal

$$m(k) = a \cdot k \quad \text{con} \quad a > 0$$

La calibración de los parámetros del modelo resulta en los siguientes valores numéricos:

$$s = 0{,}25\,,\ n = 0{,}02\,, \delta = 0{,}08\,,\ \alpha = 0{,}5\,,\ \kappa = 0{,}35\,,\ a = 0{,}03$$

i) Hallar los valores del capital, el producto y el consumo per cápita en el estado estacionario. ¿Cuál es la tasa de inmigración neta?

ii) Supongamos que se produce una mejora en la dotación del capital con la que los migrantes se desplazan de una economía a otra. En concreto, hay un aumento de κ hasta , $\kappa = 0{,}45$. Hallar el nuevo estado estacionario y explicar la dinámica de transición hasta alcanzar el equilibrio a largo plazo.

iii) Representar gráficamente el estado estacionario obtenido en i) y el obtenido en ii) así como la trayectoria que sigue el capital per cápita entre ambos estados estacionarios.

Soluciones:

i) El estado estacionario se obtiene aplicando la condición de capital per cápita constante a la ecuación fundamental del modelo

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n+\delta) - m(k)\left(1 - \frac{\kappa}{k}\right) = sk^{\alpha-1} - (n+\delta) - ak\left(1 - \frac{\kappa}{k}\right)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{0{,}25}{\sqrt{k}} - 0{,}10 - 0{,}03k\left(1 - \frac{0{,}35}{k}\right)$$

Haciendo $\dot{k} = 0$, obtenemos

$$0 = \frac{0{,}25}{\sqrt{k}} - 0{,}10 - 0{,}03k\left(1 - \frac{0{,}35}{k}\right)$$

que tiene como una de sus soluciones $k^* = 2{,}3980$ que determina una producción per cápita en estado estacionario $y^* = 1{,}5485$ con un consumo per cápita constante $c^* = 1{,}1614$.

ii) Equilibrio con $\kappa = 0{,}45 \rightarrow k^* = 2{,}4460 \quad y^* = 1{,}5640 \quad c^* = 1{,}1730$

iii) De acuerdo a la ilustración 9.2 de la página 388 del libro de texto de Barro y Sala-i-Martin, la curva de ahorro se va a desplazar hacia abajo cuando aumenta κ. Inicialmente el ahorro per cápita supera a las necesidades de mantenimiento del capital per cápita, $\dot{k} > 0$ y el aumento de la inversión genera crecimiento económico con más producción y consumo. Los rendimientos marginales decrecientes van provocando una reducción de las tasas de crecimiento hasta que se hacen 0 en el nuevo estacionario con mayor capital, producción y consumo per cápita.

2. Modelo con elección de la fertilidad. Tomando como punto de partida el equilibrio obtenido con la calibración de parámetros que se recoge en la página 417 del libro de Barro y Sala-i-Martin:

$b = 1, d = 0{,}01\,, x = 0{,}02\,, \delta = 0{,}05\,, \alpha = 0{,}75\,, \phi = 0{,}2\,, \psi = 0{,}1$

i) Escribir las ecuaciones dinámicas del modelo y las condiciones de estado estacionario para hallar los valores numéricos del estado estacionario del producto medio bruto del capital, el ratio consumo sobre capital, la tasa de rentabilidad de los activos financieros y de la tasa de fertilidad.

ii) Supongamos que se abarata el coste de crianza de los hijos y el parámetro correspondiente se reduce a $b = 0{,}8$. Recalcular todos los valores en el nuevo estacionario obtenidos para las variables recogidas en el apartado i).

Soluciones:

i) Definiendo el ratio entre consumo sobre capital per cápita como $\chi = c/k$ y el producto promedio del capital en unidades de trabajo efectivo, $z = \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} = \hat{k}^{\alpha-1}$, las ecuaciones dinámicas del modelo son

$$\frac{\dot{z}}{z} = -(1-\alpha)\left[z - \delta - bd - x - \chi - \frac{\phi\rho\chi(1+b)}{\rho(1+b) - \Psi\chi}\right]$$
$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = -\rho - (1-\alpha)z + \chi$$

Insertando las condiciones de equilibrio $\dot{z}=0$ y $\dot{\chi}=0$, podemos combinar ambas ecuaciones dinámicas sustituyendo $\chi=\rho+(1-\alpha)z$ en el corchete de la primera ecuación y obtener

$$z=\delta+bd+x+\chi-\frac{\phi\rho\chi(1+b)}{\rho(1+b)-\Psi\chi}$$

$$z=\delta+bd+x+\rho+(1-\alpha)z\ -\frac{\phi\rho(\rho+(1-\alpha)z\,)(1+b)}{\rho(1+b)-\Psi(\rho+(1-\alpha)z\,)}$$

$$z=\frac{1}{\alpha}\left(\delta+bd+x+\rho-\frac{\phi\rho(\rho+(1-\alpha)z\,)(1+b)}{\rho(1+b)-\Psi(\rho+(1-\alpha)z\,)}\right)$$

Dados los valores de $\delta, b, d, x, \rho, \phi, \Psi$ la solución numérica a la expresión anterior es:

$$z^*=0{,}1479\ (14{,}79\%)$$

con lo cual obtenemos el siguiente ratio consumo capital en estado estacionario

$$\chi^*=\ \rho+(1-\alpha)z^*=0{,}0870$$

y la tasa óptima de fertilidad en estado estacionario

$$n^*=d+\frac{\phi\rho\chi^*}{\rho(1+b)-\psi\chi^*}=0{,}0195\ (1{,}95\%)$$

La tasa de rentabilidad de los activos es

$$r^*=\ \alpha z^*-\delta=0{,}0609\ (6{,}09\%)$$

ii) Recortando el parámetro del coste de crianza de los hijos a $b=0{,}8$, recalculamos el estado estacionario con el procedimiento seguido en el apartado i) para obtener los siguientes valores numéricos

$$z^*=0{,}1452\ (14{,}52\%)$$

$$\chi^*=\ \rho+(1-\alpha)z^*=0{,}0863$$

$$n^*=d+\frac{\phi\rho\chi^*}{\rho(1+b)-\psi\chi^*}=0{,}0206\ (2{,}06\%)$$

$$r^*=\ \alpha z^*-\delta=0{,}0589\ (5{,}89\%)$$

El abaratamiento de la crianza de los hijos provoca aumento en la tasa óptima de fertilidad del 1,95% al 2,06%. Además, el excedente de ingreso que se genera por el menor coste de criar a los descendientes permite que los hogares puedan aumentar el ahorro y acumular más capital físico. Por lo tanto disminuye el ratio entre consumo y capital y también el producto medio del capital (debido a los rendimientos medios decrecientes de la función de producción Cobb-Douglas).