Teoría del Crecimiento Endógeno: Segunda Generación

Félix Jiménez

Profesor

ECO 339 Teoría del Crecimiento

Notas de Clase Nº 13

2016

Temario

1. Introducción
2. Modelos seudo Harrod-Domar
3. Modelos neo-exógenos

Modelos de Crecimiento Endógeno

Modelo General

(1) $$Y = aK^{\beta}(HL)^{1-\beta}$$

Con progreso técnico a la Harrod «aumentador de trabajo»

(2) $$S = sY$$

(3) $$I = \frac{dK}{dt} = \dot{K}$$

(4) $$S = I$$

(5) $$L = L_0 e^{nt}$$

(6) $$H = H_0 e^{\rho t}$$

Modelos de Crecimiento Endógeno

Primera Generación de Modelos de Crecimiento Endógeno

a) M. Frankel (1962): «The production function in allocation and Growth: a synthesis», en *American Economic Review*, Vol. 52.

Frankel vuelve a traer a Harrod-Domar a nivel macro, aunque retiene la función de producción neoclásica a nivel micro.
El papel del trabajo en la función de producción agregada se cancela.

b) K. J. Arrow (1962): «The economic implications of learning by doing», en *Review of Economic Studies*, Vol. 29.

La contribución de Arrow es un importante avance con respecto al modelo Solow-Swan. *El crecimiento de la productividad es independiente del cambio técnico exógeno.*
Pero, el crecimiento de la productividad es dependiente del crecimiento exógeno de la fuerza de trabajo.

Modelos de Crecimiento Endógeno

Segunda Generación de Modelos de Crecimiento Endógeno

a) Modelos Seudo Harrod-Domar

Inspirado en modelo *AK* de Frankel y el «learning by doing» de Arrow. Se elimina de la función de producción, los factores no producidos para evitar cualquier fuente de rendimientos decrecientes del factor producido.

Romer (1986)

«Increasing Returns and the long run growth», en *Journal of Political Economy*, Vol. 94.

(1) $Y = AK^{\beta}(HL)^{1-\beta}$

(2) $S = sY$

(3) $I = \frac{dK}{dt} = \dot{K}$

(4) $S = I$

(5) $L = 1$

(6) $H = K$

Supuestos: α=1 (cambio técnico es proporcional a la tasa de crecimiento del stock de capital) y fuerza de trabajo constante normalizada a la unidad L=1.

Modelos de Crecimiento Endógeno

Con esos supuestos se obtiene:

$$Y = AK^{\beta}(K)^{1-\beta}$$

$$Y = AK$$

Esta es una nueva versión del modelo de Frankel.

K puede ser considerado con dos componentes uno físico y el otro humano, el cual es resultado de la difusión (externalidades) que origina la acumulación de capital y que es captado por la ecuación H=K.

La tasa de ahorro de la comunidad afecta directamente la acumulación del componente físico e indirectamente afecta el componente de capital humano a través de la ecuación (6).

Contiene el mensaje de EGT: el crecimiento endógeno proviene de un sector de la economía que produce sin utilizar un recurso no-reproducible, sino sólo un factor reproducible, la acumulación del cual es contingente a las preferencias de ahorro de la comunidad.

Modelos de Crecimiento Endógeno

El sector que produce, según Romer, sin utilizar recursos no reproducibles es un sector virtual representado por la ecuación (6), en el que el capital exhibe una externalidad que da lugar a la producción de capital humano.

Nota:
En Rebelo (1991) el trigo es producido usando solo trigo. Barro y Xala-i-Martin (1995) describen una economía con dos sectores (trigo y educación) en la cual el producto final (Y), utilizado tanto como bien de consumo o como bien de capital, y el bien intermedio (H), definido como capital humano, son ambos producidos a través de un tecnología de retornos constantes que hace uso de ambos recursos. El trabajo no aparece en la función de producción.

La paradoja de Solow:

El crecimiento con pleno empleo requiere que la tasa natural de crecimiento coincida con la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo y no puede depender de otros parámetros como la tasa de ahorro.

Modelos de Crecimiento Endógeno

Así, para hacer endógena la tasa de crecimiento en este modelo de Romer se sacrifica la restricción de pleno empleo al eliminar la fuerza de trabajo de la función de producción.

Al cancelar el papel del trabajo y de cualquier otro factor con una tasa de reproducción que no depende de la tasa de ahorro, se elimina los rendimientos marginales del capital. Ello también sacrifica la tendencia hacia el pleno empleo reclamado por la teoría neoclásica.

Con respecto a las prescripciones de política, en el modelo de Harrod-Domar, altas tasas de crecimiento requieren altas tasas de ahorro. Pero, analíticamente, el modelo de Harrod-Domar no comparte las propiedades del modelo neoclásico en el sentido de que las curvas de demanda con pendiente negativa de trabajo y capital asegura, a largo plazo, que la economía tienda a una tasa de crecimiento igual a la tasa de crecimiento de la oferta de trabajo, y que los factores son remunerados con su producto marginal. Ya no hay curvas de demanda.

Modelos de Crecimiento Endógeno

Además, el modelo *AK* comparte con el modelo de Harrod-Domar los mismos problemas: improbabilidad del crecimiento con pleno empleo e inestabilidad.

Al desaparecer el trabajo de la función de producción, probablemente lo hace para facilitar la incorporación de la noción de capital humano.

Una vez abandonados las curvas de oferta y demanda de factores productivos, la idea de que la economía tiende a la utilización plena de su capacidad ya no tiene justificación. En otras palabras, la idea de que la oferta de ahorro correspondiente al ingreso de pleno empleo se convierte en inversión (con lo cual los neoclásicos rechazan cualquier consideración de la demanda efectiva), ya no tiene fundamento.

Conclusión:
Se rompe con el postulado neoclásico básico (el papel desempeñado por la escasez relativa de factores en la teoría del producto y la distribución).

Modelos de Crecimiento Endógeno

Ejercicio

Hallar la tasa de crecimiento del stock de capital y del producto per cápita.

Solución

Utilizamos la condición de equilibrio dinámico y las funciones de ahorro e inversión:

$$\dot{K} = sAK^{\beta}(HL)^{1-\beta}$$

Reemplazando en esta expresión los valores de H y L, tenemos:

$$\dot{K} = sAK^{\beta}(K)^{1-\beta}$$

$$\dot{K} = sAK$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = sA$$

Modelos de Crecimiento Endógeno

La tasa de crecimiento del Producto:

$$Y = AK^{\beta}(K)^{1-\beta}$$

$$Y = AK$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = sA$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = sA$$

Cómo se asume que no hay tasa de crecimiento de la fuerza laboral, estas tasas de crecimiento también corresponden al crecimiento del producto y del capital per cápita.

Al cancelar el papel del trabajo y de cualquier otro factor con una tasa de reproducción que no depende de la tasa de ahorro, se elimina los rendimientos marginales del capital. Sin embargo, ello también sacrifica la tendencia hacia el pleno empleo reclamado por la teoría neoclásica.

Modelos de Crecimiento Endógeno

b) *Modelos Neo exógenos*

Los modelos neo-exógenos se centran en la *inversión en educación, investigación y desarrollo (I&D),* etc. como la fuente principal del cambio técnico.

En estos modelos, se añade a la función de progreso técnico exógeno de Solow una variable relacionada con las decisiones endógenas de la comunidad entre consumo presente y futuro.

Trata de integrar la ecuación de cambio técnico de Solow ($H = H_0 e^{\mu t}$) con una *relación entre la tasa de cambio de la productividad del trabajo y las elecciones de la sociedad entre consumo presente y futuro*.

Estas elecciones afectan la productividad del trabajo vía los recursos dedicados a I y D, educación, infraestructura, etc.

Félix Jiménez
Departamento de Economía

Modelos de Crecimiento Endógeno

1) «Human Capital» de Lucas (1988)

«On the mechanics of economic development», en *Journal of Monetary Economics*, Vol. 22.

(1) $Y = AK^{\beta}(\mu HL)^{1-\beta}$

(2) $S = sY$

(3) $I = \frac{dK}{dt} = \dot{K}$

(4) $S = I$

(5) $L = L_0 e^{nt}$

(6) $\dot{H} = H^{\zeta}\delta(1-\mu)$

El término μ representa la participación del tiempo de trabajo empleado en la producción de trigo. Si no se dedicara tiempo a la acumulación de capital humano, es decir, μ=1 , entonces , la acumulación de capital humano sería cero. Por otro lado, si se dedicara todo el tiempo en la acumulación de habilidades (μ=0), entonces, el capital humano aumentaría a la tasa constante , su máxima tasa de crecimiento.

Para obtener una tasa constante Lucas (1988) supone que el exponente de H es igual a unidad. Por lo tanto, la ecuación (6) es igual a: $\dot{H} = H\delta(1-\mu)$

Modelos de Crecimiento Endógeno

(1-μ) *es la participación del tiempo de trabajo que se desvía de la producción de trigo* (sobre la base de las preferencias de la comunidad entre consumo presente y futuro), *a las actividades educacionales que incrementarán la eficiencia de las siguientes generaciones de trabajadores.*

Para obtener una tasa constante, Lucas supone que ξ=1.

La solución de la ecuación (6) es, por lo tanto:

$$H = e^{\delta(1-\mu)t}$$

De esta manera, contrariamente a lo que ocurre con los modelos AK, el modelo de Lucas no rompe con los principios neoclásicos.

Lucas dice: «aparte de los cambios en la tecnología para incorporar el capital humano y su acumulación, el modelo es idéntico al modelo de Solow».

La diferencia está en el término que permite considerar la tasa de crecimiento de la eficiencia del trabajo, como dependiente de las decisiones de ahorro de la comunidad.

Modelos de Crecimiento Endógeno

Ejercicio

Calcular la tasa de crecimiento del capital y del producto per cápitas y agregados:

Solución

$$S = I \quad \rightarrow \quad sY = \dot{K} \quad \rightarrow \quad sAK^{\beta}(\mu HL)^{1-\beta} = \dot{K}$$

En términos per cápita, tenemos:

$$\frac{(\dot{K})}{L} = \frac{sAK^{\beta}(\mu HL)^{1-\beta}}{L} \quad \rightarrow \quad \frac{(\dot{K})}{L} = sA\left(\frac{K}{L}\right)^{\beta}\left(\frac{\mu HL}{L}\right)^{1-\beta}$$

$$\frac{(\dot{K})}{L} = sA(k)^{\beta}(\mu H)^{1-\beta}$$

Sabemos que:

$$\dot{k} = \frac{(\dot{K})}{L} - \frac{\dot{L}}{L}k \quad \rightarrow \quad \frac{(\dot{K})}{L} = \dot{k} + nk$$

Modelos de Crecimiento Endógeno

Reemplazando este valor en la ecuación anterior, hallamos la tasa de crecimiento del capital per cápita:

$$\dot{k} + nk = sA(k)^{\beta}(\mu H)^{1-\beta}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA(k)^{\beta-1}(\mu H)^{1-\beta} - n$$

Por otro lado, podemos hallar la tasa de crecimiento del producto per cápita, el cual es igual a

$$y = \frac{Y}{L} = Ak^{\beta}(\mu H)^{1-\beta}$$

Tomando logaritmos y diferenciando (considerando que A es una constante):

$$\frac{\dot{y}}{y} = \beta\frac{\dot{k}}{k} + (1-\beta)\left[\frac{\dot{H}}{H}\right]$$

Modelos de Crecimiento Endógeno

Como: $\frac{\dot{H}}{H} = \delta(1-\mu)$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \beta\frac{\dot{k}}{k} + (1-\beta)[\delta(1-\mu)] \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{y}}{y} = \beta\left[sAk^{\beta-1}(\mu H)^{1-\beta} - n\right] + (1-\beta)[\delta(1-\mu)]$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \beta\left[s\frac{f(k)}{k} - n\right] + (1-\beta)[\delta(1-\mu)]$$

Hallamos la tasa de crecimiento de K y de Y:

$$\frac{\dot{K}}{K} = sAk^{\beta-1}(\mu H)^{1-\beta}$$

Tómese en cuenta que: $H = e^{\delta(1-\mu)t}$

Para hallar la tasa de crecimiento del producto, tomamos logaritmos a la función de producción y derivamos con respecto al tiempo:

$$Y = AK^{\beta}(\mu HL)^{1-\beta}$$

Félix Jiménez
Departamento de Economía

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Modelos de Crecimiento Endógeno

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \beta\frac{\dot{K}}{K} + (1-\beta)\left[\frac{\dot{H}}{H} + \frac{\dot{L}}{L}\right]$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \beta\frac{\dot{K}}{K} + (1-\beta)\left[\delta(1-\mu) + n\right]$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \beta\frac{\dot{K}}{K} + (1-\beta)\left[\delta(1-\mu) + n\right]$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \beta\left[sAk^{\beta-1}(\mu H)^{1-\beta}\right] + (1-\beta)\left[\delta(1-\mu) + n\right]$$

Las tasas de crecimiento de las variables agregadas y per cápita dependen de la tasa de crecimiento de H.

Modelos de Crecimiento Endógeno

2) «Neo vintage models» de P. Romer (1990)

«Endogenous technical change», en *Journal of Political Economy*, Vol. 98.

$$(1) \quad Y = H_Y^{\alpha} L^{\beta} \sum_{i=1}^{A} x_i^{1-\alpha-\beta}$$

El capital aparece en la suma de A diferentes tipos de bienes de capital x_i.

L es el stock de trabajo ordinario;

H_Y es el monto de capital humano dedicado a la producción de Y.

Las x_i son producidos en un sector intermedio utilizando «trigo ahorrado (foregone output)», y los diseños son producidos en un tercer sector llamado sector de investigación.

Cada bien de capital tiene el mismo costo de producción consistente en unidades de producto (trigo) y como tienen la misma productividad marginal, se produce el mismo monto ($\bar{x}$) de cada uno.

Modelos de Crecimiento Endógeno

El sector de investigación produce diseños del nuevo capital utilizando un monto constante de capital humano (H_R) que es sustraído de la producción directa de trigo, el cual usa el resto, es decir, H_Y, más el stock existente de conocimiento A, medido por el número de diseños ya disponibles.

La ecuación (6) toma la forma siguiente: (6) $\dot{A} = \delta H_R A$

Puesto que A tipos de bienes de capital existen en cualquier momento, se sigue que: $\sum_{i=1}^{A} x_i = A\bar{x}$, y la ecuación (1) se puede rescribir como sigue:

(1) $Y = AH_Y^{\alpha} L^{\beta} (\bar{x})^{1-\alpha-\beta}$

El stock de capital total es aproximadamente igual a: $K = A\bar{x}$

El modelo se completa con: (2) $S = sY$

(3) $I = \frac{dK}{dt} = \dot{K}$

(4) $S = I$

(5) $L = L_0 e^{nt}$

(6) $\dot{A} = \delta H_R A$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Modelos de Crecimiento Endógeno

Dados H_Y , L , $\bar{x}$, y A bienes distintos de capital, se puede obtener una tasa de crecimiento constante mediante la ecuación (1). Romer supone que las tres variables están constantes (n=0; $H=H_Y+H_R$; $\bar{x}$ y H_Y no crecen. Puede resolverse también con n>0

Hay similitudes con el modelo de generaciones de Solow (1960):

a) La función de producción es una Cobb-Douglas que incorpora una forma de cambio técnico asociado superficialmente al diseño de bienes de capital en la forma de «aumento de trabajo»

b) El stock de capital se construye con máquinas que a pesar de su diferente diseño, son homogéneos en el producto final (trigo). Su argumento de que esto es metafórico, no es aceptable.

c) El cambio técnico es endógeno (ecuación 6) cuya solución es: $A = e^{\delta H_R t}$
En Solow el cambio técnico es exógeno.

Modelos de Crecimiento Endógeno

Consistente con el enfoque de que trata a la frugalidad como el causante del crecimiento económico, la teoría neoclásica del crecimiento endógeno trata de asociar la tasa de crecimiento con las decisiones de ahorro de la comunidad.

Esta asociación es directa en los modelos AK. En los modelos que hemos llamado neo-exógenos la asociación se da a través de la influencia de la tasa de ahorro sobre el ritmo del cambio técnico, a través de la IyD, la educación, etc.

Ejercicio

Encontrar la tasa de crecimiento del producto, del capital per cápita y del producto per cápita.

Modelos de Crecimiento Endógeno

Solución

$$\frac{d(\ln Y)}{dt}=\frac{d(\ln A)}{dt}+\alpha\frac{d(\ln H_y)}{dt}+\beta\frac{d(\ln L)}{dt}+(1-\alpha-\beta)\frac{d(\ln \overline{X})}{dt}$$

$$\frac{\dot Y}{Y}=\frac{\dot A}{A}+\alpha\frac{\dot H_y}{H_y}+\beta\frac{\dot L}{L}+(1-\alpha-\beta)\frac{\dot{\overline{X}}}{\overline{X}}$$

En el modelo de Romer (1990) se asume que la población y la oferta de trabajo se mantiene constante y el stock total de capital humano en la población es fijo y es igual a $H=H_Y+H_A$. El monto de bienes de capital producidos también se supone que está constante ($\overline{X}$).

Es decir, la tasa de crecimiento de la fuerza laboral y del stock de capital humano dedicado a la producción de trigo son iguales a cero.

$$\frac{\dot Y}{Y}=\frac{\dot A}{A}+\alpha(0)+\beta(0)+(1-\alpha-\beta)(0)\rightarrow \quad \frac{\dot Y}{Y}=\frac{\dot A}{A}\quad \rightarrow\frac{\dot y}{y}=\delta H_R$$

$$K=A\overline{X}\rightarrow \quad \frac{\dot K}{K}=\frac{\dot A}{A}+\frac{\dot{\overline{x}}}{\overline{x}}\rightarrow \quad \frac{\dot K}{K}=\frac{\dot A}{A}=\delta H_R \quad \rightarrow\frac{\dot k}{k}=\delta H_R$$