3.3. Modelo de Lucas

Tuesday, September 7, 2021 9:08 PM

Una economía crece cuando tiene el capital desarrollado,

MODELO DE LUCAS (1988): ACUMULACIÓN DEL CAPITAL HUMANO

Lucas en su trabajo “On the Mechanics of Development Planning”, muestra que el crecimiento en forma sostenida del capital humano es suficiente para tener un crecimiento económico sostenido.

El Modelo de crecimiento endógeno explica la contribución del capital humano al crecimiento económico. La capacidad productiva de los individuos aumenta con la educación, no solo por la incorporación de habilidades y capacidades para el trabajo, sino también por el impacto sobre la salud y alimentación, que incrementa la productividad laboral.

A diferencia del modelo AK, considera diferente el capital humano del capital físico porque son bienes disímiles y que son producidos con tecnología distinta.

Lucas sostiene que un individuo dedica muchos años de su vida a la escuela con el fin de obtener capacidades que le permitan mejorar su capacidad productiva. La decisión de invertir en la educación se basa sobre la comparación entre los costos de la enseñanza (ingresos, gastos de escolaridad, pasajes, etc.) y las ventajas futuras de una escolaridad más avanzada, por lo que, considera la escolaridad como una decisión de inversión para aumentar el capital humano de una persona. Esto hace que el capital humano se aparente al conocimiento técnico y las reglas

Apéndice: el modelo de acumulación de capital humano de Uzawa-Lucas

Uzawa (1965) y **Lucas** (1988) plantean un modelo de crecimiento endógeno que incluye el capital humano. En su modelo, el capital físico y el capital humano se producen con tecnologías diferentes. De este modo, se trata de un modelo de dos sectores: en el primero se produce ~~capital físico~~ bien final y en el segundo capital humano.

La función de producción viene dada por

$$Y(t) = A[K_Y(t)]^{\alpha}[H_Y(t)]^{1-\alpha}$$

donde $K_Y(t)$ e $H_Y(t)$ son las cantidades de capital físico y humano utilizadas en la producción de bien final.

Puesto que el capital físico que se acumula es aquel que no se consume ni se destina a hacer frente a la depreciación del capital físico la evolución del *stock* de capital físico viene dada por:

$$K(t) = A[K_Y(t)]^{\alpha}[H_Y(t)]^{1-\alpha} - C(t) - \delta K(t)$$

En el otro sector, la producción y la acumulación de capital humano se hace a partir de capital físico y humano. Se considera, además, que la tecnología para la obtención de capital humano es diferente de la que se emplea para la producción de bienes. En este caso, el capital humano se genera mediante la dedicación de capital físico y humano. Además, se produce depreciación del capital humano.

$$H(t) = B[K_H(t)]^{\phi}[H_H(t)]^{1-\phi} - \delta_H H(t) \qquad B > 0 \qquad \delta_H > 0$$

El capital humano total, H, se destina sólo a producir capital físico o humano. Por eso, se puede definir:

$$H_Y(t) = u(t)H(t) \text{ y } H_H(t) = [1 - u(t)]H(t)$$

La producción de educación requiere relativamente más capital humano que la de capital físico, por eso $(1-\phi) > (1-\alpha)$. De hecho, Uzawa y Lucas llevan esta condición al

La educación garantiza, la salud y buena alimentación.

de acumulación con rendimientos de escala dinámicas le pueden ser aplicadas, además de generar un proceso de crecimiento endógeno.

EL MODELO

Supuestos:

- Una economía de dos sectores con crecimiento endógeno
- Existe dos tipos de capital
- El stock de capital físico se deprecia a una tasa constante y exógena: δ_k
- El stock de capital humano se deprecia a una tasa constante y exógena: δ_H
- Toda la población trabaja en esta economía.
- La fuerza de trabajo crece a una tasa constante y exógena: n

1) SECTOR DEL BIEN FINAL

En este sector, la producción final se obtiene mediante la combinación de capital físico y humano.

Supongamos una función de producción Cobb-Douglas:

$$Y_t = AK_t^{\alpha}H_p^{1-\alpha}$$

Donde, Y_t es la producción del sector del bien final en el momento t; K_t, es el stock de capital físico utilizado en el sector del bien final en el momento t; H_p, es el stock de capital humano utilizado en el sector del bien final; H_t, es el stock de capital humano en la economía en el momento t; A, es la tecnología en el sector del bien final; α, es la elasticidad producto del capital físico; $1-\alpha$, es la elasticidad producto del capital humano.

Además, sea:

u: es la fracción de capital humano de la economía que labora en la producción del bien final, y se define por:

$u = \frac{H_p}{H_t}$ entonces $H_p = uH_t$ (1)

Reemplazando la igualdad (1) en la función de producción del bien final:

$$Y_t = AK_t^{\alpha}(uH_t)^{1-\alpha}$$

Dividiendo entre L_t, número total de trabajadores en la economía, para expresar en términos per-cápita, y utilizando el artificio: $L_t = L_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$, tenemos:

$$y_t = Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha}$$

Es la función de producción intensiva (FPI).

ECUACIÓN DE ACUMULACIÓN DE CAPITAL FÍSICO

De la condición de equilibrio macroeconómico:

$Y_t = C_t + I^b$ con $I^b = I^{nt} + I^{rep}$; $I^{nt} = \dot{K}_t$; $I^{rep} = \delta_k K_t$, reemplazando resulta:

$$Y_t = C_t + \dot{K}_t + \delta_k K_t$$

Reemplazando la función de producción por su valor y despejando $\dot{K}_t$:

$$\dot{K}_t = Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - C_t - \delta_k K_t$$

Es la ecuación de acumulación de capital físico neto.

ECUACIÓN DIFERENCIAL

De la condición de equilibrio macroeconómico: $Y_t = C_t + I^b$

Dividiendo entre el total de trabajadores L_t, para expresar en términos pre-cápita:

$$y_t = c_t + \dot{k}_t + (n + \delta_k)k_t$$

Porque, $\frac{\dot{K}_t}{L_t} = \dot{k}_t + nk_t$

Reemplazando por la FPI y despejando $\dot{k}_t$:

tasa de

$$\dot{k}_t = Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - c_t - (n + \delta_k)k_t$$

Es la relación del proceso de acumulación del capital físico por persona. Muestra que el producto final puede ser consumido o transformado en capital físico (o inversión en reposición).

2) SECTOR CAPITAL HUMANO

Se considera, que la tecnología para la obtención de capital humano es diferente de la que se emplea para la obtención de la producción final.

Para simplificar este sector no utiliza capital físico, sino solo capital humano, y la función de producción se expresa por:

$$Y_E = BH_E$$

Donde: Y_E, es la producción en el sector educacional o capital humano; H_E, es el stock de capital humano utilizado en el sector educacional; B, el nivel de tecnología en el sector educacional; además:

$(1-u)$, es la fracción de capital humano de la economía que labora en el sector educacional, definido por:

$(1-u) = \frac{H_E}{H_t}$ entonces $H_E = (1-u)H_t$ (2)

El capital humano que opera en el sector es una fracción del capital humano de la economía.

Reemplazando en la función de producción del sector:

$$Y_E = B(1-u)H_t$$

Dividiendo entre la cantidad de trabajadores de la economía L_t, tenemos:

$$y_E = B(1-u)h_t$$

Es la función de producción intensiva (FPI) del sector educacional.

ECUACIÓN DE ACUMULACIÓN DEL CAPITAL HUMANO

Condición de equilibrio macroeconómico.

$Y_H = C_H + I_H{}^b$ haciendo $C_H = 0$, se tiene: $Y_H = I_H{}^b$. Reemplazando por sus valores:

$$BH_E = I_H{}^{nt} + I_H{}^{rep} = \dot{H}_t + \delta_H H_t$$

Reemplazando H_E por su valor:

$$B(1-u)H_t = \dot{H}_t + \delta_H H_t$$

Despejando $\dot{H}_t$:

$$\dot{H}_t = B(1-u)H_t - \delta_H H_t$$

Es la ecuación del proceso de acumulación del capital humano; indica, la tasa de cambio del capital humano es el remante del producto educacional después de la inversión en reposición de capital humano.

ECUACIÓN DIFERENCIAL

En: $B(1-u)H_t = \dot{H}_t + \delta_H H_t$

Dividiendo entre el número de trabajadores en la economía L_t:

$$B(1-u)h_t = \frac{\dot{H}_t}{L_t} + \delta_H h_t$$

Como: $\frac{\dot{H}_t}{L_t} = \dot{h}_t + nh_t$

$$B(1-u)h_t = \dot{h}_t + nh_t + \delta_H h_t$$

Despejando $\dot{h}_t$:

$$\dot{h}_t = B(1-u)h_t - (n + \delta_H)h_t$$

Es la relación del proceso de acumulación del capital humano por persona.

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

$$\dot{k}_t = Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - c_t - (n + \delta_K)k_t$$
$$\dot{h}_t = B(1-u)h_t - (n + \delta_H)h_t$$

Como es habitual, la tasa efectiva de depreciación de las variables en términos per cápita incluye el término n, que recoge el hecho de que los aumentos de la población reducen la cantidad de capital físico y humano disponible por persona.

Para simplificar, las tasas de depreciación (capital físico y capital humano) son iguales: $\delta_K = \delta_H = \delta$.

PLANTEANDO EL PROBLEMA:

Los individuos eligen la trayectoria temporal de consumo y la fracción de su tiempo que dedican a cada uno de los sectores con el objeto de maximizar el bienestar de las familias, que matemáticamente se representa en la siguiente forma:

$$Máx\ U = \int_0^{\infty} \left(\frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta}\right) e^{-(\rho - n)t} dt$$

s a:

$$\dot{k}_t = Ak_t^{\alpha}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - c_t - (n + \delta)k_t$$
$$\dot{h}_t = B(1-u)h_t - (n + \delta)h_t$$

$$k(0) = k_0 y\ h(0) = h_0 \text{ (estado inicial del capital físico y humano)}$$
$$k_0 \geq 0\ y\ h_0 \geq 0$$
$$0 \leq u \leq 1$$

La función hamiltoniana es:

$$H \equiv H(c_t, u_t, k_t, h_t, \lambda_t, v_t, t)$$

Solucionando el problema de optimización, se tiene la solución en estado estacionario, determinamos la tasa de crecimiento del consumo.

La tasa de crecimiento del consumo γ_c^*:

$$\gamma_c^* = \frac{1}{\theta}[\alpha Ak_t^{\alpha-1}u^{1-\alpha}h_t^{1-\alpha} - (\rho + \delta)]$$

Es decir, la tasa de crecimiento del consumo depende del producto marginal del capital físico menos la tasa de depreciación y la tasa de descuento intertemporal entre la utilidad marginal del consumo.

Según Lucas, en estado estacionario todas las variables crecen a la misma tasa constante, y la tasa de crecimiento de u debe ser cero porque es una fracción.

Si tenemos la tasa de crecimiento del consumo, a partir de esta, obtendremos las tasas de crecimiento de capital físico per-cápita y capital humano per-cápita. Operando, se tiene:

$$\gamma_h^* = \gamma_k^*$$

Es decir, en el estado estacionario la tasa de crecimiento del capital físico es igual a la tasa de crecimiento del capital humano, o, los dos stocks de capital crecen a la misma tasa, y la proporción $(h/k)^*$ es constante.

Continuando con los cálculos matemáticos, obtenemos:

$$\gamma_c^* = \gamma_k^* = \gamma_h^*$$

Vemos, que en el estado estacionario la proporción c/k debe ser constante, por lo que la tasa de crecimiento de c y k deben ser iguales; y ambas deben ser iguales a la tasa de crecimiento del capital humano.

Operando en la función de producción intensiva (FPI) de bienes finales:

$$\gamma_y^* = \gamma_h^*$$

En el estado estacionario la tasa de crecimiento del producto es igual a la tasa de crecimiento del capital humano.

Por tanto, en estado estacionario todas las tasas de crecimiento son iguales y constantes:

$$\gamma_k^* = \gamma_h^* = \gamma_c^* = \gamma_y^*$$

En resumen, en adelante nos bastará con hallar una sola tasa de crecimiento (la del consumo, la del capital físico o humano, o la del producto final) para solucionar el modelo, dado que dicha tasa de crecimiento será la misma para todos los factores de la economía.

Operando, también obtenemos los precios de la inversión en capital físico y capital humano en estado estacionario:

$$\gamma_\lambda^* = \gamma_v^*$$

Es decir, los dos precios crecen al mismo ritmo.

Adicionalmente, como los dos precios implícitos crecen al mismo ritmo, obtenemos que la tasa de crecimiento estacionario del consumo (y la de k, h e y) viene dada por:

$$\gamma_c^* = \gamma_k^* = \gamma_h^* = \gamma_y^* = \frac{1}{\theta}(B - \delta - \rho)$$

Es decir, la tasa de crecimiento a largo plazo es parecida a la obtenida por los modelos lineales AK, pero, en lugar de ser el nivel de productividad en el sector del output final, el parámetro de productividad que afecta al crecimiento económico a largo plazo es el del sector educativo, B. La razón es que, al suponer que el sector educativo no utiliza capital físico, hemos hecho, automáticamente el supuesto de que la función de producción de educación es lineal al capital humano. Es decir, hemos introducido el supuesto AK (aunque, para ser más precisos, hemos introducido el supuesto BH y no AK) en la función de producción de h, por lo que no nos debería sorprender que el resultado final sea el que hemos encontrado.