CRECIMIENTO ECONÓMICO

SESIÓN: Modelos de crecimiento endógeno con comportamiento optimizador (II)

Profesor: Miguel Casares

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

ÍNDICE

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II)

En esta sesión vamos a presentar modelos que distinguen entre capital físico y capital humano. El capital humano representa las cualificaciones y formación del trabajador, siendo un bien rival y excluible. El conocimiento (las ideas) que determinan el valor de la tecnología se consideran (generalmente) bienes no rivales.

Utilizaremos dos enfoques alternativos sobre la tecnología que incorpora capital humano:

- Modelo de capital humano con funciones de producción idénticas. Calcularemos las tasas de crecimiento del EE y veremos los efectos de incluir la restricción de inversión bruta no negativa.
- Modelo de Uzawa y Lucas con tecnologías específicas para el capital físico y humano.

La presencia de capital humano puede relajar la restricción de los rendimientos decrecientes convirtiéndose en otro argumento para el crecimiento económico endógeno a largo plazo.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO BÁSICO CON CAPITAL HUMANO

La economía produce un único bien (un sector productivo) mediante una tecnología de tipo Cobb-Douglas agregada que combina capital físico, K, con capital humano, H,

$$Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$ y un capital humano resultante de multiplicar el stock de capital humano del trabajador representativo, h, por el número (fijo) de trabajadores L,

$$H = hL$$

Por simplicidad asumimos una población activa fija, L, que hace que la variación en el capital humano agregado, H, solo se debe a cambios en el capital humano de cada trabajador, h.

La restricción de recursos de la economía, sin sector público ni resto del mundo, es

$$AK^{\alpha}H^{1-\alpha} = C + I_K + I_H$$

en la que los componentes de la demanda son el consumo, la inversión en capital físico y la inversión en capital humano. Definamos ambas inversiones como:

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO BÁSICO CON CAPITAL HUMANO

$$I_K = \dot{K} + \delta K$$

con una depreciación a tasa constante $\delta > 0$. La inversión en capital humano tiene (por simplicidad) la misma tasa de depreciación:

$$I_H = \dot{H} + \delta H$$

En este modelo los hogares tienen acceso a la tecnología de producción y no existen empresas que se dedican a la actividad productiva (en la sesión 5 vimos que era equivalente al caso del modelo de Ramsey con empresas que producen buscando maximizar el beneficio en competencia perfecta). La restricción presupuestaria de la familia coincide con la agregada (si asumimos, por simplicidad, que una familia agrupa al conjunto de la población). Las preferencias de los hogares las marca la función habitual con elasticidad de la utilidad marginal del consumo respecto del consumo constante, θ. El problema de control óptimo de los hogares queda así:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO BÁSICO CON CAPITAL HUMANO

$$Max \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta} dt$$

sujeto a

$$\dot{K} = I_K - \delta K$$
$$\dot{H} = I_H - \delta H$$
$$AK^\alpha H^{1-\alpha} = C + I_K + I_H$$

Nótese que el problema de control óptimo está escrito con variables agregadas. Para resolverlo, el ejercicio tiene tres restricciones que satisfacer y va a incorporar tres precios sombra en la construcción del Hamiltoniano. Los 5 pasos que hemos establecido en la mecánica de resolución son:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO BÁSICO CON CAPITAL HUMANO

1. Variables de control C, I_K, I_H; variables de estado K, H
2. Hamiltoniano

$$J = e^{-\rho t}\frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \nu[I_K - \delta K] + \mu[I_H - \delta H] + \omega[AK^{\alpha}H^{1-\alpha} - C - I_K - I_H]$$

3. Condiciones de primer orden de las variables de control

$$\frac{\partial J}{\partial C} = e^{-\rho t}C^{-\theta} - \omega = 0 \quad ; \quad \frac{\partial J}{\partial I_K} = \nu - \omega = 0 \quad ; \quad \frac{\partial J}{\partial I_H} = \mu - \omega = 0$$

4. Condiciones de primer orden de las variables de estado

$$\frac{\partial J}{\partial K} = -\,\delta\nu + \omega A\alpha\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha} = -\dot{\nu} \quad ; \quad \frac{\partial J}{\partial H} = -\,\delta\mu + \omega A(1-\alpha)\left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} = -\dot{\mu}$$

5. Condiciones de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} K(t)\,e^{-\rho t} = 0 \;;\; \lim_{t\to\infty} H(t)\,e^{-\rho t} = 0$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO BÁSICO CON CAPITAL HUMANO

En primer lugar, vamos a observar que las condiciones de primer orden de las variables de control implican el mismo precio sombra para las tres restricciones (todas ellas hacen referencia a una unidad de producto)

$$\nu = \omega = \mu$$

Utilizando este resultado la derivada en el tiempo que implica la condición de primer orden del consumo es

$$\dot{\nu} = -\rho e^{-\rho t} + (-\theta)C^{-\theta-1}\dot{C}e^{-\rho t}$$

que puede sustituirse (cambiando el signo) por $-\dot{\nu}$ en la ecuación de primer orden del capital físico, junto con $e^{-\rho t}C^{-\theta} = \omega = \nu$, y obtener

$$e^{-\rho t}C^{-\theta}\left(-\delta + A\alpha\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha}\right) = \rho e^{-\rho t} + \theta C^{-\theta-1}\dot{C}e^{-\rho t}$$

que se puede reducir a la ecuación dinámica del consumo:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO BÁSICO CON CAPITAL HUMANO

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left(A\alpha\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right)$$

La interpretación es la habitual: la familia ahorra más (aumenta el consumo futuro, $\frac{\dot{c}}{c} > 0$), si la productividad marginal neta que obtiene por su ahorro invertido en acumulación supera a la tasa de preferencia intertemporal que se auto exige para renunciar al consumo presente. L productividad marginal del capital físico aumenta con el stock de capital humano, H.

Combinando las dos condiciones de primer orden para las variables de estado (paso 4) con la igualdad de los precios sombra obtenemos

$$A\alpha\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha} - \delta = A(1-\alpha)\left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} - \delta$$

implicando que los productos marginales netos del capital físico y humano deben ser iguales (si no fuera así la familia haría una sustitución incrementando el que es más productivo a costa del que es menos productivo).

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO BÁSICO CON CAPITAL HUMANO

El resultado anterior conlleva un ratio entre capital físico y humano **constante**

$$\frac{K}{H} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

dependiendo del valor de $0 \leq \alpha \leq 1$. Por ejemplo, un valor de α próximo al límite superior (1.0) traería consigo un stock de capital físico muy superior al del capital humano.

Si sustituimos este ratio $\frac{K}{H}$ en la ecuación dinámica del consumo alcanzamos una tasa de crecimiento del consumo **constante** en el tiempo:

$$\gamma_C \equiv \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left(A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right)$$

con la siguiente condición de equilibrio entre el tipo de interés de los activos financieros y la tasa de rendimiento neto del capital (físico y humano)

$$r = A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO BÁSICO CON CAPITAL HUMANO

Si retomamos la función de producción Cobb-Douglas e insertamos $H = \frac{1-\alpha}{\alpha} K$ en el capital humano obtenemos

$$Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha} = AK^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}K\right)^{1-\alpha} = A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}K$$

que implica una relación lineal entre producción agregada y capital físico equivalente a la que ya introdujimos en el modelo AK → rendimientos medios y marginales constantes para el capital.

La linealidad implica que la producción agregada evolucione con la misma tasa de crecimiento que el capital agregado. Para que se cumplan las condiciones de EE, el consumo y el capital (tanto físico como humano) han de crecer a la misma tasa.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO BÁSICO CON CAPITAL HUMANO

En resumen, el modelo con capital humano y un único sector productivo genera las siguientes tasas de **crecimiento endógeno constante**

$$\gamma_C = \gamma_K = \gamma_H = \gamma_Y = \frac{1}{\theta}\left(A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right)$$

manteniendo valores constantes tanto para el ratio entre capital físico y capital humano como para el rendimiento neto del capital

$$\frac{K}{H} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$r = A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – LA RESTRICCIÓN DE LA INVERSIÓN BRUTA NO NEGATIVA

Vamos a pensar que ocurre en el modelo con capital humano descrito en la sesión anterior si en un momento dado el ratio de capital físico entre capital humano es diferente de aquel que permite igualar sus rendimientos

$$\frac{K(0)}{H(0)} \neq \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Esta situación implica que los hogares no están decidiendo las cantidades de capital de manera óptima y podrían elegir una combinación diferente de los dos tipos de capital que mejorara su bienestar (manteniendo el mismo gasto en inversión). La sustitución de un capital por otro se diseñaría aumentando el stock del más productivo y disminuyendo el del menos productivo. Pero…

¿Tiene sentido "destruir" capital instalado? Obviamente la respuesta es que no se va a reducir el stock de capital (físico o humano) existente, simplemente se dejará de reponer el capital depreciado. Esta discusión introduce la restricción de inversión bruta no negativa tanto en el capital físico como en el capital humano:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – LA RESTRICCIÓN DE LA INVERSIÓN BRUTA NO NEGATIVA

$$I_K = \dot{K} + \delta K \geq 0$$
$$I_H = \dot{H} + \delta H \geq 0$$

Si la restricción se activa, en cada caso obtenemos

$$I_K = 0 \;\rightarrow\; \dot{K} = -\delta K \;\rightarrow\; \frac{\dot{K}}{K} = -\delta$$
$$I_H = 0 \;\rightarrow\; \dot{H} = -\delta H \;\rightarrow\; \frac{\dot{H}}{H} = -\delta$$

Obviamente, la restricción no se aplicará simultáneamente a ambos tipos de capital puesto que surge de una sustitución de uno por otro. Supongamos que $\frac{K(0)}{H(0)} < \frac{\alpha}{1-\alpha}$ y las familias desean sustituir parte del capital humano por capital físico porque la productividad del capital físico es mayor a la del capital humano. Este caso podría darse en una situación de escasez de capital físico (por ejemplo, Alemania al acabar la II Guerra Mundial) o cuando hay una sobrecualificación de los trabajadores.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – LA RESTRICCIÓN DE LA INVERSIÓN BRUTA NO NEGATIVA

La restricción de no negatividad de la inversión en capital humano, $I_H = 0$, implica

$$\frac{\dot{H}}{H} = -\delta$$

es decir, una disminución constante del stock de capital humano a una tasa equivalente a su tasa de depreciación por periodo. Partiendo del momento inicial, la evolución sería

$$H(t) = e^{-\delta t} H(0) \qquad t = 0,1,2, \ldots$$

hasta que se alcanzase el ratio óptimo entre capital físico y capital humano cuando ambos tipos de capitales crecerían a tasas idénticas.

El problema de optimización de los hogares en este caso no incluye la elección de inversión en capital humano (especificada por la restricción $I_H = 0$) y se limita a las decisiones sobre el consumo y la acumulación de capital físico. Es un programa equivalente al que vimos para el caso de un único tipo de capital (físico), con crecimiento nulo de la población:

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – LA RESTRICCIÓN DE LA INVERSIÓN BRUTA NO NEGATIVA

$$Max \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

sujeto a

$$\dot{K} = I_K - \delta K$$
$$AK^\alpha H^{1-\alpha} = C + I_K$$

La ecuación dinámica del consumo resultante tras cumplimentar los 5 pasos establecidos (no los mostraremos en esta ocasión) es:

$$\gamma_C \equiv \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left(A\alpha\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right)$$

donde la productividad marginal del capital físico es $A\alpha\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha}$, decreciente tanto en K como en el ratio K/H. El ajuste óptimo hacia $\frac{K}{H} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ desde un K/H menor conlleva aumentar K y reducir H, con lo que la productividad marginal del capital físico y la tasa de crecimiento del consumo van a ir disminuyendo monótonamente.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – LA RESTRICCIÓN DE LA INVERSIÓN BRUTA NO NEGATIVA

La restricción presupuestaria del hogar puede escribirse así

$$\dot{K} = AK^{\alpha}H^{1-\alpha} - C + \delta K$$

y tenemos una tasa de crecimiento del capital físico que depende inversamente del ratio K/H

$$\gamma_K \equiv \frac{\dot{K}}{K} = A\left(\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha} - \frac{C}{K} + \delta$$

La producción agregada $Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$ tiene una tasa de crecimiento obtenida como la media ponderada de la tasa de crecimiento del capital físico y el capital humano (se puede comprobar tomando logaritmos naturales y sobre el resultado haciendo la derivada en el tiempo)

$$\gamma_Y = \alpha\gamma_K + (1-\alpha)\gamma_H$$

Si insertamos $\gamma_H \equiv \frac{\dot{H}}{H} = -\delta$ y recordamos que γ_K es decreciente en K/H, podemos concluir que γ_Y decrece monótonamente con el ratio K/H hasta alcanzar el EE.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – LA RESTRICCIÓN DE LA INVERSIÓN BRUTA NO NEGATIVA

Si inicialmente $\frac{K(0)}{H(0)} > \frac{\alpha}{1-\alpha}$, por ejemplo tras una pandemia que provoque la muerte de muchas personas (Peste negra en la época medieval en Europa) o por una infracualificación de la población activa, el hogar desearía sustituir capital físico por capital humano y la restricción de inversión bruta no negativa se aplicaría al capital físico:

$$I_K = 0 \;\rightarrow\; \dot{K} = -\delta K \;\rightarrow\; \frac{\dot{K}}{K} = -\delta$$

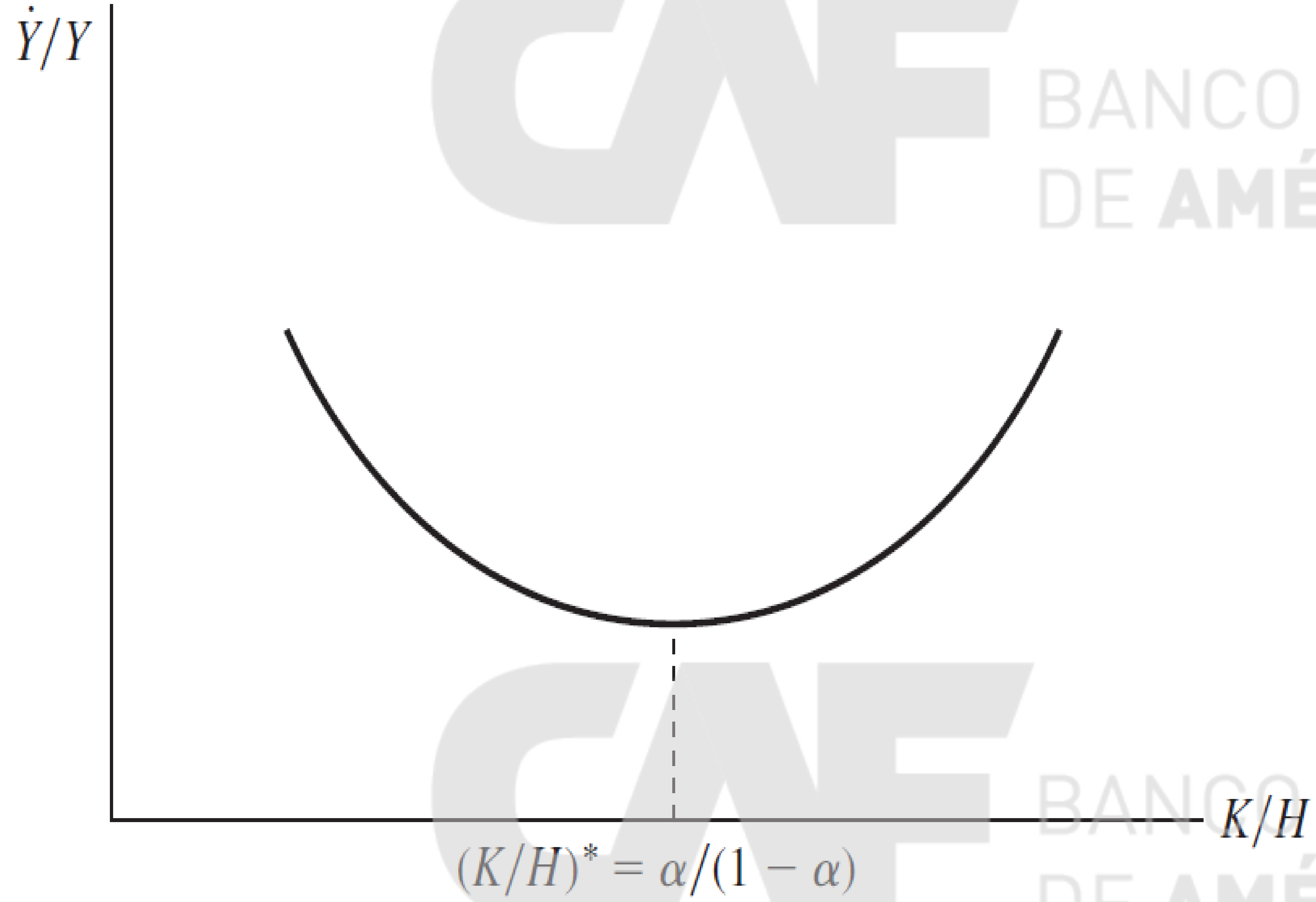
El consumo óptimo que se obtiene al resolver el programa de los hogares es

$$\gamma_C \equiv \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left(A(1-\alpha)\left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha} - \delta - \rho\right)$$

donde $A(1-\alpha)\left(\frac{K}{H}\right)^{\alpha}$ es la productividad marginal del capital humano decreciente en el ratio H/K. Al ir aumentando este ratio por el aumento de H y la disminución de K, la tasa de crecimiento del consumo disminuye monótonamente. Argumentos similares a los empleados para el caso de escasez de capital físico pueden emplearse para explicar decrecimientos monótonos de γ_K y γ_Y. Gráficamente obtendríamos la siguiente evolución:

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – LA RESTRICCIÓN DE LA INVERSIÓN BRUTA NO NEGATIVA



Si $\frac{K(0)}{H(0)} < \frac{\alpha}{1-\alpha}$ (escasez de capital físico)

$f'(K) > f'(H) \rightarrow \uparrow K, \downarrow H \rightarrow \uparrow K/H \rightarrow \downarrow f'(K) \rightarrow \downarrow \gamma_K, \downarrow \gamma_Y$

Si $\frac{K(0)}{H(0)} > \frac{\alpha}{1-\alpha}$ (escasez de capital humano)

$f'(H) > f'(K) \rightarrow \uparrow H, \downarrow K \rightarrow \downarrow K/H \rightarrow \downarrow f'(H) \rightarrow \downarrow \gamma_K, \downarrow \gamma_Y$

Una vez alcanzado el ratio $\frac{K}{H} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ la economía se encuentra en EE.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO CON DOS SECTORES DE PRODUCCIÓN

Parece lógico considerar que la producción de capital humano y la producción de bienes para el consumo no tengan las mismas características. Además la transformación de una unidad de un bien producido por una unidad de capital humano no resulta sencilla (tal y como suponíamos bajo el supuesto de bien homogéneo que pueda destinarse a consumo o a acumulación de capital físico). Habitualmente se asume que la producción de capital humano (educación, formación, habilidades para el desempeño del trabajo) es sensiblemente más intensiva en capital humano que en capital físico.

Con estas premisas, vamos a describir el modelo con dos funciones de producción diferentes del economista portugués Sergio Rebelo (1991, *Journal of Political Economy*).

La producción de bienes y la producción de nuevo capital humano se obtiene a partir de estas dos tecnologías diferenciadas de tipo Cobb-Douglas:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO CON DOS SECTORES DE PRODUCCIÓN

Producción de bienes:

$$Y = A(vK)^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1 \text{ y } 0 \leq u \leq 1$$

Producción de capital humano:

$$\dot{H} + \delta H = B[(1-v)K]^{\eta}[(1-u)H]^{1-\eta} \text{ con } 0 \leq \eta \leq 1$$

En ambos casos se emplean tecnologías con rendimientos constantes a escala para el capital físico y el capital humano.

Las fracciones del capital físico existente utilizadas en la producción de bienes, v, y en la producción de capital humano $1-v$ se deciden racionalmente (criterio de optimización).

Las fracciones del capital humano existente utilizadas en la producción de bienes, u, y en la producción de capital humano $1-u$ se deciden racionalmente (criterio de optimización).

Supondremos que el capital humano es menos productivo para producir bienes que para producir capital humano añadido, o su equivalencia, el capital físico es más productivo para obtener bienes que para generar capital humano

$$1-\eta > 1-\alpha \qquad ; \alpha > \eta$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO CON DOS SECTORES DE PRODUCCIÓN

Manteniendo los supuestos del modelo con un único sector (población activa sin crecimiento, función de utilidad con elasticidad de la utilidad marginal del consumo constante, los hogares disponen de la tecnología de producción, etc.), el problema de control óptimo que resuelven los hogares es el siguiente:

$$Max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta} dt$$

sujeto a

$$\dot{K} = A(vK)^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} - C - \delta K$$
$$\dot{H} = B[(1-v)K]^{\eta}[(1-u)H]^{1-\eta} - \delta H$$

La primera restricción presenta el reparto de la producción agregada de bienes entre consumo e inversión en capital físico, mientras que la segunda restricción muestra como la producción de capital humano se absorbe reponiendo el stock depreciado de capital humano y con el incremento neto. Sean $f(\cdot) = (vK)^{\alpha}(uH)^{1-\alpha}$ y $g(\cdot) = B[(1-v)K]^{\eta}[(1-u)H]^{1-\eta}$. Los 5 pasos para resolver el problema son:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO CON DOS SECTORES DE PRODUCCIÓN

1. Variables de control: C, v, u
   Variables de estado: K, H

2. Hamiltoniano

$$J = e^{-\rho t}\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \nu[A(vK)^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} - C - \delta K] + \mu[B[(1-v)K]^{\eta}[(1-u)H]^{1-\eta} - \delta H]$$

3. Condiciones de primer orden de las variables de control

$$\frac{\partial J}{\partial C} = e^{-\rho t}C^{-\theta} - \nu = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial v} = \nu\overbrace{[A\alpha v^{\alpha-1}K^{\alpha}(uH)^{1-\alpha}]}^{f'(v)} - \mu\overbrace{[B\eta(1-v)^{\eta-1}(-1)K^{\eta}[(1-u)H]^{1-\eta}]}^{g'(v)} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \nu\overbrace{[A(1-\alpha)u^{-\alpha}(vK)^{\alpha}H^{1-\alpha}]}^{f'(u)} - \mu\overbrace{[B(1-\eta)(1-u)^{-\eta}(-1)H^{1-\eta}[(1-v)K]^{\eta}]}^{g'(u)} = 0$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO CON DOS SECTORES DE PRODUCCIÓN

4. Condiciones de primer orden de las variables de estado

$$\frac{\partial J}{\partial K} = \nu\left[\overbrace{A\alpha v\left(\frac{uH}{vK}\right)^{1-\alpha}}^{f\prime(K)} - \delta\right] + \mu\left[\overbrace{B\eta(1-v)\left[\frac{(1-u)H}{(1-v)K}\right]^{1-\eta}}^{g\prime(K)}\right] = -\dot{\nu}$$

$$\frac{\partial J}{\partial H} = \nu\left[\overbrace{A(1-\alpha)u\left(\frac{vK}{uH}\right)^{\alpha}}^{f\prime(H)}\right] + \mu\left[\overbrace{B(1-\eta)(1-u)\left[\frac{(1-v)K}{(1-u)H}\right]^{\eta}}^{g\prime(H)} - \delta\right] = -\dot{\mu}$$

5. Condiciones de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}K(t) = 0 \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}H(t) = 0$$

En las condiciones de primer orden se han incluido las referencias a las productividades marginales respecto de los inputs (K, H) y de la intensidad de su uso (v, u) .

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO CON DOS SECTORES DE PRODUCCIÓN

Las condiciones de primer orden para el uso de capital físico v y capital humano u implican las siguientes relaciones entre los valores sombra de las dos restricciones

$$\mu = \nu \frac{f'(v)}{g'(v)} = \nu \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

cuya primera igualdad puede insertarse en la ecuación de primer orden del capital físico para eliminar μ obteniendo

$$\nu \left[f'(K) - \delta + \frac{f'(v)}{g'(v)} g'(K) \right] = -\dot{\nu}$$

Nótese que $\frac{f\prime(v)}{g\prime(v)} < 0$ recogiendo el efecto negativo de un aumento del uso de capital físico sobre la producción de capital humano. Combinando este resultado con los valores tanto de ν como de $\dot{\nu}$ resultantes de la condición de primer orden del consumo nos permiten alcanzar (después de notables simplificaciones) la siguiente ecuación dinámica del consumo:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta} \left[A\alpha \left(\frac{vK}{uH} \right)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho \right]$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO CON DOS SECTORES DE PRODUCCIÓN

donde $A\alpha v \left(\frac{uH}{vK}\right)^{1-\alpha} = f'(K) + \frac{f\prime(v)}{g\prime(v)} g'(K)$ es el producto marginal del capital físico en la producción de bienes (incluyendo la rivalidad con su uso en la producción de capital humano).

La tasa de crecimiento del consumo depende positivamente del ratio $\frac{uH}{vK}$. Por tanto, un aumento del uso de capital humano relativo a capital físico en la producción de bienes aumentaría la productividad marginal del capital, fomentaría el ahorro y la economía tendría una tasa de crecimiento del consumo mayor.

Las posibilidades de sustitución entre capital físico y capital humano permiten a los hogares elegir las cantidades óptimas como aquellas que igualan sus productividades marginales en cualquiera de las dos actividades. De las condiciones de primer orden deducimos que

$$\frac{f'(v)}{g'(v)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

que implica el mismo rendimiento relativo para el capital físico en ambos sectores que para el capital humano. Sustituyendo las cuatro derivadas parciales y simplificando obtenemos:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO CON DOS SECTORES DE PRODUCCIÓN

$$\frac{\eta}{1-\eta}\frac{v}{1-v}=\frac{u}{1-u}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

con la siguiente demanda óptima de uso de capital físico en la producción de bienes

$$v=\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1-\eta}{\eta}\frac{u}{1-u}(1-v)\quad\rightarrow\quad v=\frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1-\eta}{\eta}\frac{u}{1-u}}{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1-\eta}{\eta}\frac{u}{1-u}}$$

creciente en el coeficiente de productividad del capital físico en la producción de bienes, α, y decreciente en el coeficiente de productividad del capital físico en la producción de capital humano, η.

Para la demanda de uso del capital humano tenemos el resultado simétrico

$$u=\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\eta}{1-\eta}\frac{v}{1-v}(1-u)\quad\rightarrow u=\frac{\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\eta}{1-\eta}\frac{v}{1-v}}{1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\eta}{1-\eta}\frac{v}{1-v}}$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO CON DOS SECTORES DE PRODUCCIÓN

El EE se alcanzará para un ratio fijo de $\frac{vK}{uH}$ que determine un valor constante en el tiempo para la tasa de crecimiento del consumo

$$\gamma_C \equiv \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha\left(\frac{vK}{uH}\right)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right]$$

El producto marginal neto del capital físico (rendimiento de los activos) será constante en EE.
Los rendimientos constantes a escala y la tasa de crecimiento idéntica para K y H obligan a que las tasas de crecimiento de C, K, H, Y sean las mismas en EE

$$\gamma^* = \gamma_C = \gamma_K = \gamma_H = \gamma_Y = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha\left(\frac{v^*}{u^*}\left(\frac{K}{H}\right)^*\right)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right]$$

Resulta difícil analizar para el caso general los efectos de una mayor productividad del capital humano que del capital físico para la producción de capital humano, $1-\eta > 1-\alpha$.
Lo haremos, en una versión más sencilla, asumiendo que $\alpha > \eta = 0$ tal y como se establece en modelo Uzawa-Lucas.

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS

Hirofumi Uzawa (1965, *International Economic Review*)
Robert Lucas (1998, *Journal of Monetary Economics*)
↓
Modelo de Uzawa-Lucas

Dos sectores productivos (bienes de consumo y capital humano). La tecnología de producción de bienes es de tipo Cobb-Douglas con capital físico y capital humano. La tecnología de producción de capital humano es lineal en el uso de capital humano como factor productivo (no requiere capital físico).

EL MODELO UZAWA-LUCAS ES UN CASO PARTICULAR DEL MODELO DE CAPITAL HUMANO CON DOS SECTORES DESCRITO EN EL APARTADO ANTERIOR. En concreto: Asumiendo $\eta = 0$ en la función de producción de capital humano y una demanda de uso de capital físico en la producción de capital humano nula, $1 - v = 0 \ (v = 1)$, parametrizamos el modelo general para obtener el modelo Uzawa-Lucas.

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS

Las funciones de producción quedan de la siguiente manera:

Producción de bienes (con $v = 1$)

$$Y = AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 1,\ 0 \leq u \leq 1$$

Producción de capital humano (con $\eta = 0$ y $1 - v = 0$):

$$\dot{H} + \delta H = B(1-u)H \quad \text{con } 0 \leq u \leq 1$$

La producción de bienes sigue caracterizada por la combinación tipo Cobb-Douglas de capital físico y capital humano con rendimientos constantes a escala. La producción de capital humano (educación, competencias laborales) es lineal en el capital humano y no requiere de capital físico.

Vamos a introducir dos ratios muy relevantes para el modelo Uzawa-Lucas

Ratio entre capital físico y capital humano → $\omega = \frac{K}{H}$

Ratio entre consumo y capital físico → $\chi = \frac{C}{K}$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS

Aplicaremos los ratios $\omega = \frac{K}{H}$ y $\chi = \frac{C}{K}$ en las restricciones del uso de la producción agregada de bienes y del capital humano. Buscaremos las tasas de crecimiento para ver su comportamiento en EE. Al diferenciar los dos sectores, la producción de bienes puede destinarse a consumo e inversión en capital físico (inversión neta más inversión en reponer capital depreciado)

$$AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha} = \mathrm{C} + \left(\dot{K} + \delta K\right)$$

Dividiendo ambos lados entre K

$$A\left(\frac{K}{K}\right)^{\alpha}\left(u\frac{H}{K}\right)^{1-\alpha} = \frac{\mathrm{C}}{K} + \left(\frac{\dot{K}}{K} + \delta\frac{K}{K}\right)$$

e insertando los ratios $\omega = \frac{K}{H}$, $\chi = \frac{C}{K}$, alcanzamos esta tasa de crecimiento del capital físico

$$\frac{\dot{K}}{K} = Au^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} - \chi - \delta$$

La restricción de acumulación de capital humano es la propia función de producción de educación:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS

$$\dot{H} + \delta H = B(1-u)H$$

Dividiendo ambos lados entre H, obtenemos una tasa de crecimiento del capital humano

$$\frac{\dot{H}}{H} = B(1-u) - \delta$$

La tasa de crecimiento del consumo puede obtenerse sustituyendo el supuesto específico del modelo Uzawa-Lucas, $v = 1$, junto con la definición del ratio entre capital físico y capital humano, $\omega = \frac{K}{H}$, en la solución general del modelo con dos sectores. Obtenemos

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha u^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right]$$

que explica un mayor crecimiento del consumo (más ahorro) con un aumento de la intensidad en el uso de capital humano para la producción de bienes, u, y un menor crecimiento del consumo (menos ahorro) con un ratio entre capital físico y capital humano, $\omega = K/H$, más alto (rendimientos marginales del capital físico decrecientes).

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS

La producción agregada de bienes que determina la tecnología Cobb-Douglas, $Y = AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha}$, implica una tasa de crecimiento agregada (tomando logaritmos naturales, haciendo la derivada en el tiempo y recordando que $\frac{\partial logX(t)}{\partial t} = \frac{1}{X(t)}\frac{\partial X(t)}{\partial t} = \frac{\dot{X(t)}}{X(t)} \equiv \gamma_{X(t)}$)

$$\gamma_Y = \alpha\gamma_K + (1-\alpha)\gamma_H + (1-\alpha)\gamma_u$$

la cual recoge las tres fuentes del crecimiento económico en el modelo Uzawa-Lucas: el capital físico, el capital humano y la intensidad del uso de capital humano para producir bienes.

En EE tanto el ratio entre capital físico y capital humano, $\omega = \frac{K}{H}$, como la intensidad de uso de capital físico en la producción de bienes, u, han de ser constantes (si no fuera así convergeríamos asintóticamente a un modelo sin capital físico o capital humano). Por ello

$\omega = \frac{K}{H} = \omega^*$ es constante en EE → $\gamma_K^* = \gamma_H^*$

$u = u^*$ es constante en EE → $\gamma_u^* = 0$

con lo que la tasa de crecimiento de la producción agregada en EE coincide con la de los dos tipos de capital:

$$\gamma_Y^* = \alpha\gamma_K^* + (1-\alpha)\gamma_H^* + (1-\alpha)\gamma_u^* = \gamma_H^* = \gamma_K^*$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS

Por último, el ratio $\chi = \frac{C}{K}$ también ha de ser constante en EE para cumplir con la condición de transversalidad (si no fuera así el consumo convergería asintóticamente a 0 o ∞). Así que

$$\chi = \frac{C}{K} = \chi^* \text{ es constante en EE } \rightarrow \gamma_C^* = \gamma_K^*$$

De todo lo anterior, podemos concluir afirmando que la tasa de crecimiento **endógeno** del modelo Uzawa-Lucas en EE es

$$\gamma^* = \gamma_Y^* = \gamma_C^* = \gamma_K^* = \gamma_H^* = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha(u^*)^{1-\alpha}(\omega^*)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right]$$

para los valores fijos de u^*, ω^*.

Tal y como se muestra en el apéndice 5B del libro (paginas 274-276), introduciendo la combinación de parámetros del modelo

$$\varphi = \frac{\rho + \delta(1-\theta)}{B\theta}$$

los valores fijos del EE para ω^*, χ^*, u^*son:

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS

$$\omega^* = \left(\frac{\alpha A}{B}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\varphi + \frac{\theta-1}{\theta}\right]$$

$$\chi^* = B\left(\varphi + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\theta}\right)$$

$$u^* = \varphi + \frac{\theta-1}{\theta}$$

Tomando la solución de u^* y la de ω^* e insertándolas en la tasa de crecimiento endógeno del EE tenemos

$$\gamma^* = \gamma_Y^* = \gamma_C^* = \gamma_K^* = \gamma_H^* = \frac{1}{\theta}\left[A\alpha\left(\varphi + \frac{\theta-1}{\theta}\right)^{1-\alpha}\left(\left(\frac{\alpha A}{B}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\varphi + \frac{\theta-1}{\theta}\right]\right)^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right]$$

que se simplifica maravillosamente hasta:

$$\gamma^* = \frac{1}{\theta}[B - \delta - \rho]$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS

porque la productividad marginal del capital físico en el EE del modelo Uzawa-Lucas es igual a la constante B de la función de producción de capital humano, con una tasa de rentabilidad neta del capital en EE

$$r^* = B - \delta$$

Para acabar la sesión, vamos a analizar la dinámica de transición a corto plazo del modelo Uzawa-Lucas a través de su representación en un diagrama de fase. Para ello, es conveniente introducir el producto **medio** del capital

$$z \equiv \frac{AK^{\alpha}(uH)^{1-\alpha}}{K} = A\frac{K^{\alpha}}{K^{\alpha}}\frac{(uH)^{1-\alpha}}{K^{1-\alpha}} = Au^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)}$$

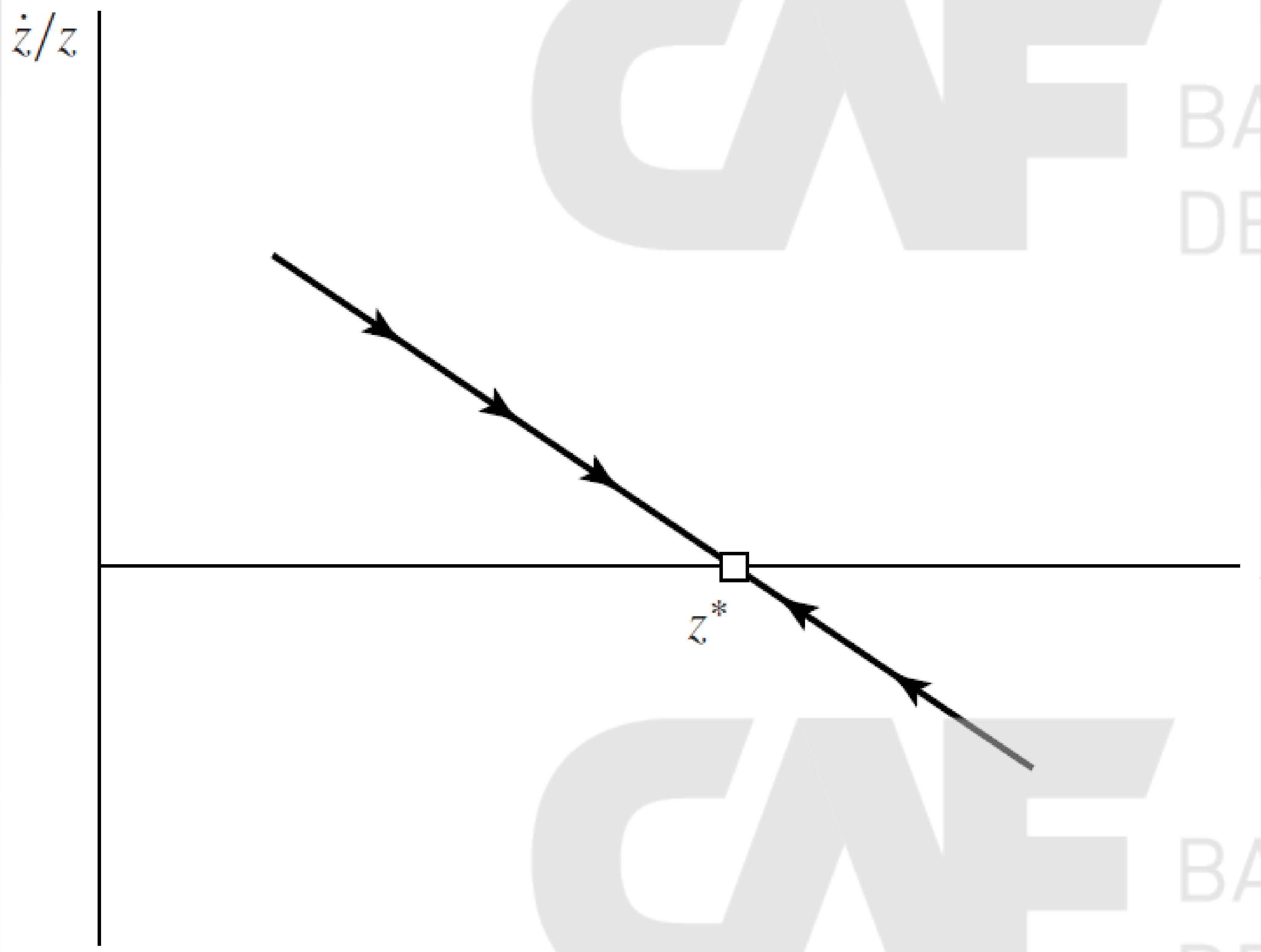
que, comparándolo con la productividad marginal del capital en EE, $A\alpha u^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} = B$, es

$$z^* = \frac{B}{\alpha}$$

Combinando las ecuaciones dinámicas de $\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{H}}{H}$, $\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{K}}{K}$ y $\frac{\dot{u}}{u}$ (ver páginas 252 253), la productividad media, el ratio consumo sobre capital y la fracción de capital físico empleado en la producción de bienes evolucionan de acuerdo a las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$\frac{\dot{z}}{z} = -(1-\alpha)(z-z^*) \quad ; \quad \frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{(\alpha-\theta)}{\theta}(z-z^*) + (\chi-\chi^*) \quad ; \quad \frac{\dot{u}}{u} = B(u-u^*) - (\chi-\chi^*)$$

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS



$$\frac{\dot{z}}{z} = -(1-\alpha)(z-z^*)$$

La productividad media del capital es estable y siempre converge hacia su valor fijo de EE, $z^* = \frac{B}{\alpha}$, desde cualquier valor inicial.

Si $z = Au^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} < z^* = \frac{B}{\alpha}$ → disminuye el ahorro y la acumulación de capital físico → $\downarrow K/H$ → $\downarrow \omega$ → $\uparrow z$ → $\downarrow (z - z^*)$ → $\frac{\dot{z}}{z}$ converge a 0

Si $z = Au^{1-\alpha}\omega^{-(1-\alpha)} > z^* = \frac{B}{\alpha}$ → aumenta el ahorro y la acumulación de capital físico →$\uparrow K/H$ →$\uparrow \omega$ →$\downarrow z$ → $\uparrow (z - z^*)$ → $\frac{\dot{z}}{z}$ converge a 0

El segundo caso es la situación previsibles para etapas iniciales de crecimiento económico (con poco capital físico instalado y alta productividad).

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS

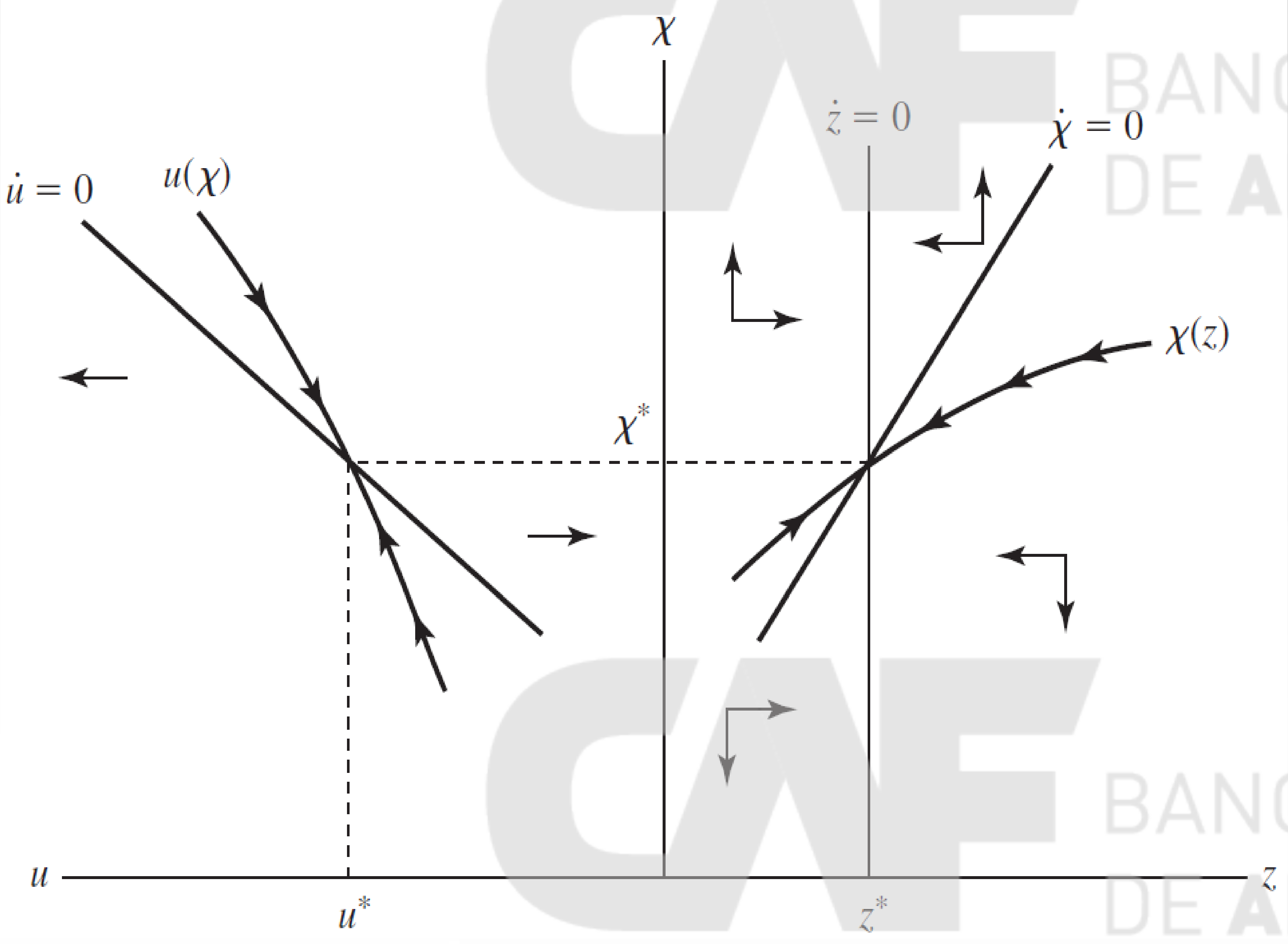


Diagrama de fase del modelo Uzawa-Lucas (I)
Parte derecha del gráfico

$$\frac{\dot{z}}{z} = -(1-\alpha)(z - z^*)$$

$$\dot{z} = 0 \rightarrow z = z^* = \frac{B}{\alpha} \text{ (línea vertical)}$$

Si $z > z^*$ $\rightarrow$ $\dot{z} < 0$, z hacia la izquierda
Si $z < z^*$ $\rightarrow$ $\dot{z} > 0$, z hacia la derecha

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{(\alpha-\theta)}{\theta}(z - z^*) + (\chi - \chi^*) \text{ con } \alpha < \theta$$

$$\dot{\chi} = 0 \rightarrow \chi = \chi^* - \frac{(\alpha-\theta)}{\theta}(z - z^*)$$

Pendiente positiva $\frac{\theta-\alpha}{\theta} > 0$

Si $\chi > \chi^*$ $\rightarrow$ $\dot{\chi} > 0$, χ hacia arriba
Si $\chi < \chi^*$ $\rightarrow$ $\dot{\chi} < 0$, χ hacia abajo

Trayectoria óptima: cuadrante suroeste por encima de $\dot{\chi} = 0$ y cuadrante noreste por debajo de $\dot{\chi} = 0$. El segundo caso es la situación previsibles para etapas iniciales de crecimiento económico, caracterizado por un elevado consumo relativo al poco capital físico instalado (alto χ) y una alta productividad (alto z).

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS

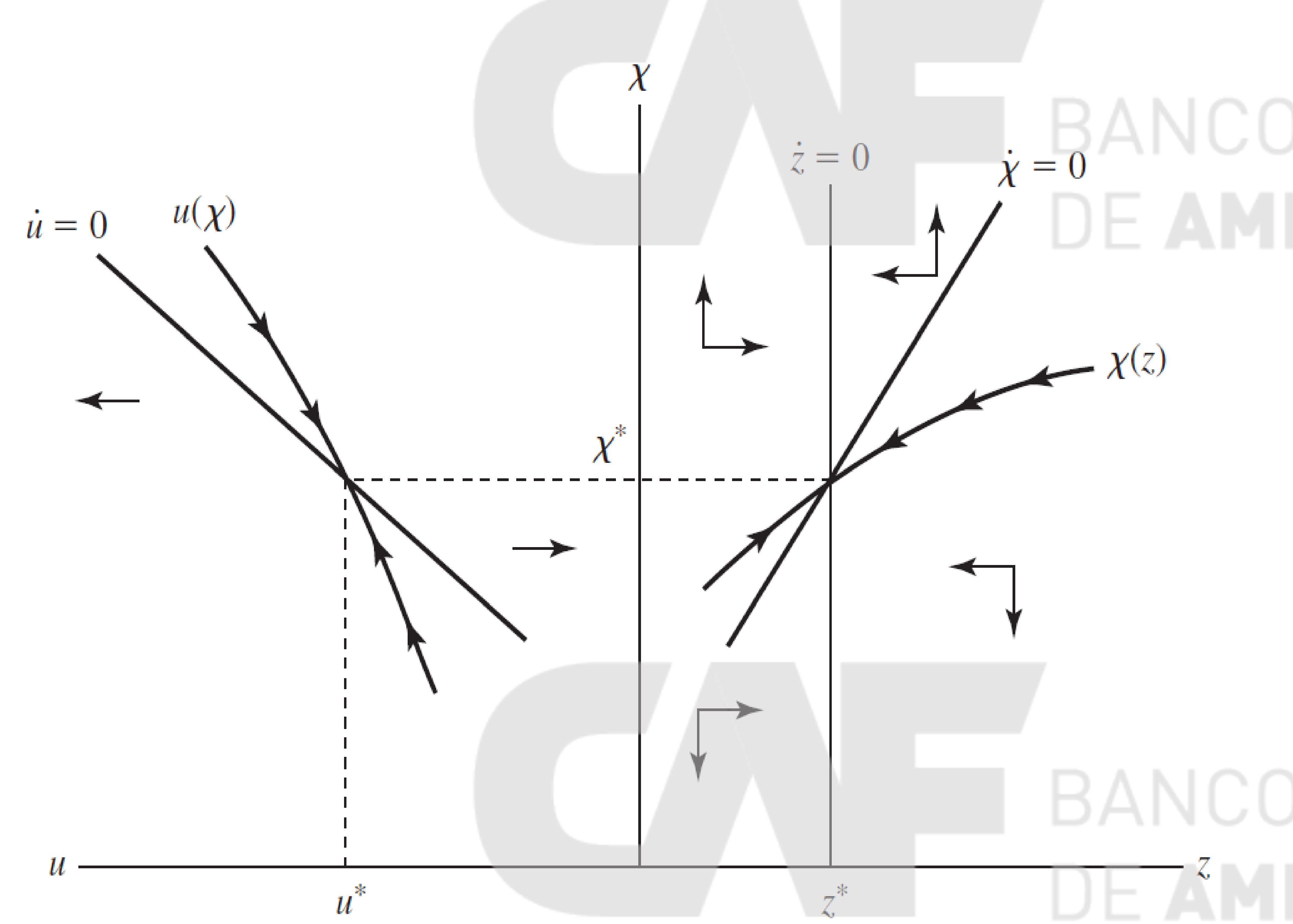


Diagrama de fase del modelo Uzawa-Lucas (II)
Parte izquierda del gráfico (¡atención¡)

$$\frac{\dot{u}}{u} = B(u - u^*) - (\chi - \chi^*)$$

$$\dot{u} = 0 \rightarrow u = u^* + \frac{1}{B}(\chi - \chi^*)$$

Pendiente positiva: $\frac{1}{B} < 0$

Si $\chi > \chi^*$ o $u < u^* \rightarrow \dot{u} < 0$, flecha hacia derecha
Si $\chi < \chi^*$ o $u > u^* \rightarrow \dot{u} > 0$, flecha hacia izquierda

Trayectoria óptima: cuadrante noroeste por encima de $\dot{u} = 0$ y cuadrante suroeste por debajo de $\dot{\chi} = 0$. El primer caso es la situación previsibles para etapas iniciales de crecimiento económico, caracterizado por una fracción excesivamente alta del capital humano destinado a la producción de bienes (alto u), un elevado consumo relativo al poco capital físico instalado (alto χ) y una alta productividad (alto z) debido al bajo nivel de capital inicial.

BANCO DE DESARROLLO DE AMÉRICA LATINA

MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO CON COMPORTAMIENTO OPTIMIZADOR (II) – EL MODELO DE UZAWA-LUCAS

Finalmente, vamos a explicar la dinámica a corto plazo de la tasa de crecimiento de la producción agregada

$$\gamma_Y \equiv \frac{\dot{Y}}{Y} = \gamma^* + \alpha(z - z^*) - (\chi - \chi^*)$$

que puede descomponerse en estos tres factores de crecimiento económico a corto plazo:

- La tasa de crecimiento del EE → $\gamma^* = \frac{1}{\theta}[B - \delta - \rho]$
- La productividad media del capital físico. Si $\text{z} - z^* > 0$, los hogares van a aumentar el stock de capital físico empleado en la producción de bienes y su tasa de crecimiento se va a incrementar.
- El ratio entre consumo y capital, $\chi = \text{C/K}$, que informa sobre la cantidad de consumo que ha generado cada unidad de capital físico instalado en la producción de bienes. Si $\chi - \chi^* > 0$, los hogares van a preferir mover una fracción del capital humano empleado en producir bienes de consumo al sector de producción de capital humano (disminuye u). La productividad del capital físico disminuye y con ello la tasa de crecimiento de la producción agregada de bienes.

En etapas iniciales de crecimiento económico, caracterizadas por una fracción excesivamente alta del capital humano destinado a la producción de bienes (alto u), un elevado consumo relativo al poco capital físico instalado (alto χ) y una alta productividad (alto z) con poco capital físico inicial, la trayectoria óptima implicaría una γ_Y decreciendo hacia γ^*, con $z - z^* > 0$ decreciendo hasta $z = z^*$, mientras que $\chi - \chi^* > 0$ va decreciendo hasta $\chi = \chi^*$.