Crecimiento Económico y Empleo: keynesianos y neoclásicos

Modelos con ahorro exógeno

El Modelo Neoclásico de Solow-Swan

Félix Jiménez

Profesor

ECO 339 Teoría del Crecimiento

Notas de Clase Nº 05

2016

Temario

1. El Modelo de Solow-Swan: propósito y solución del modelo
2. La estabilidad en el modelo de Solow-Swan
3. La tasa de ahorro y la paradoja de Solow
4. La Regla de Oro en el modelo de Solow-Swan
5. Convergencia en el modelo de Solow-Swan y el cálculo de su velocidad
6. El modelo de Solow Swan con Tecnología Exógena
7. Estática comparativa y políticas

El Modelo Neoclásico de Solow-Swan

Propósito

La economía capitalista puede crecer a la tasa que crece su fuerza laboral y que este crecimiento es estable o converge a su equilibrio de largo plazo entre oferta y demanda agregadas.

Se supone que los factores trabajo y capital, son sustitutos perfectos. Los dos problemas señalados por Harrod y Domar (inestabilidad e improbabilidad de crecimiento con pleno empleo) se deben a la ausencia de este tipo de sustitución.

Si es posible sustituir trabajo por capital, y viceversa, entonces las variaciones de la relación capital producto permitirán que la economía converja a su equilibrio de largo plazo (*steady state*). Entonces, no hay razón para un crecimiento con desempleo involuntario ni para la inestabilidad.

El Modelo Neoclásico de Solow-Swan

El producto (Y) crece a la tasa que crece la fuerza laboral

Crecimiento del PBI: De la contabilidad del crecimiento con una función Cobb-Douglas sin progreso técnico, se tiene:

$$\frac{dY}{Y} = \alpha \frac{dK}{K} + (1-\alpha)\frac{dL}{L}$$

Inversión Bruta: Inversión neta más depreciación

$$I = dK + \delta K$$

El *Ahorro Total* debe ser igual a la *Inversión Bruta*

$$sY = dK + \delta K$$

De aquí se obtiene la tasa de crecimiento del stock de capital:

$$\frac{dK}{K} = \frac{sY}{K} - \delta$$

dK>0 si el ahorro excede la inversión de reposición, y viceversa.

dK=0 si el ahorro alcanza sólo para la inversión de reposición.

Reemplazando en la ecuación de crecimiento del PBI, tenemos:

$$\frac{dY}{Y} = \alpha\left(\frac{sY}{K} - \delta\right) + (1-\alpha)\frac{dL}{L}$$

El Modelo Neoclásico de Solow-Swan

Si la tasa de crecimiento de la fuerza laboral es n, es decir:

$$\frac{dL}{L} = n$$

La tasa de crecimiento del producto será::

$$\frac{dY}{Y} = \alpha\left(\frac{sY}{K} - \delta - n\right) + n$$

El término entre paréntesis es la tasa de crecimiento de la intensidad de capital, es decir de la relación K/L. Si suponemos que a largo plazo, la intensidad de capital está constante, es decir, que su tasa de crecimiento es cero, entonces:

$$\frac{dY}{Y} = n$$

El PBI crece a la tasa que crece su fuerza laboral. De aquí se desprende que el producto per capita o la productividad media del trabajo, está constante.

Estabilidad del Modelo de Solow-Swan

El Crecimiento es Estable

$Y = F(K, L)$ Es una función de producción bien comportada: Tiene RCE, los factores tienen rendimientos marginales decreciente y satisface las *condiciones de Inada:*

$$\lim f'(k) = 0 \text{ cuando } k \to \infty \quad \text{y} \quad \lim f'(k) = \infty \text{ cuando } k \to 0$$

Dada su carácter de función bien comportada se puede escribir la tasa de crecimiento de la intensidad de capital como sigue:

$$\frac{dk}{k} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{dK}{K} - \frac{dL}{L} = \frac{sY}{K} - \delta - n \qquad \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sY/L}{K/L} - \delta - n \qquad \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - \delta - n$$

$$\boxed{\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k}$$

Nótese que el ahorro por trabajador (igual a la inversión por trabajador), es igual a la inversión que aumenta la relación (*K/L*) más la inversión que mantiene la relación (K/L) constante en un contexto de crecimiento de la fuerza laboral y de reposición del capital gastado

Cuando no hay variaciones en *(K/L)* la economía se encontrará en el estado estacionario creciendo a la tasa (*n*) que mantiene constante (*k**).

Estabilidad del Modelo de Solow-Swan

$$En \quad efecto, \quad cuando \quad \dot{k} = 0, \quad entonces \quad sf(k) = (\delta + n)k$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento en el estado estacionario, será:

$$g = \frac{sf(k)}{k} = \frac{s}{v} - \delta = n \quad donde \quad v = \frac{k}{f(k)} \quad es \quad la \quad relación \quad capital - producto$$

El crecimiento es igual a la tasa que crece la fuerza laboral y es estable

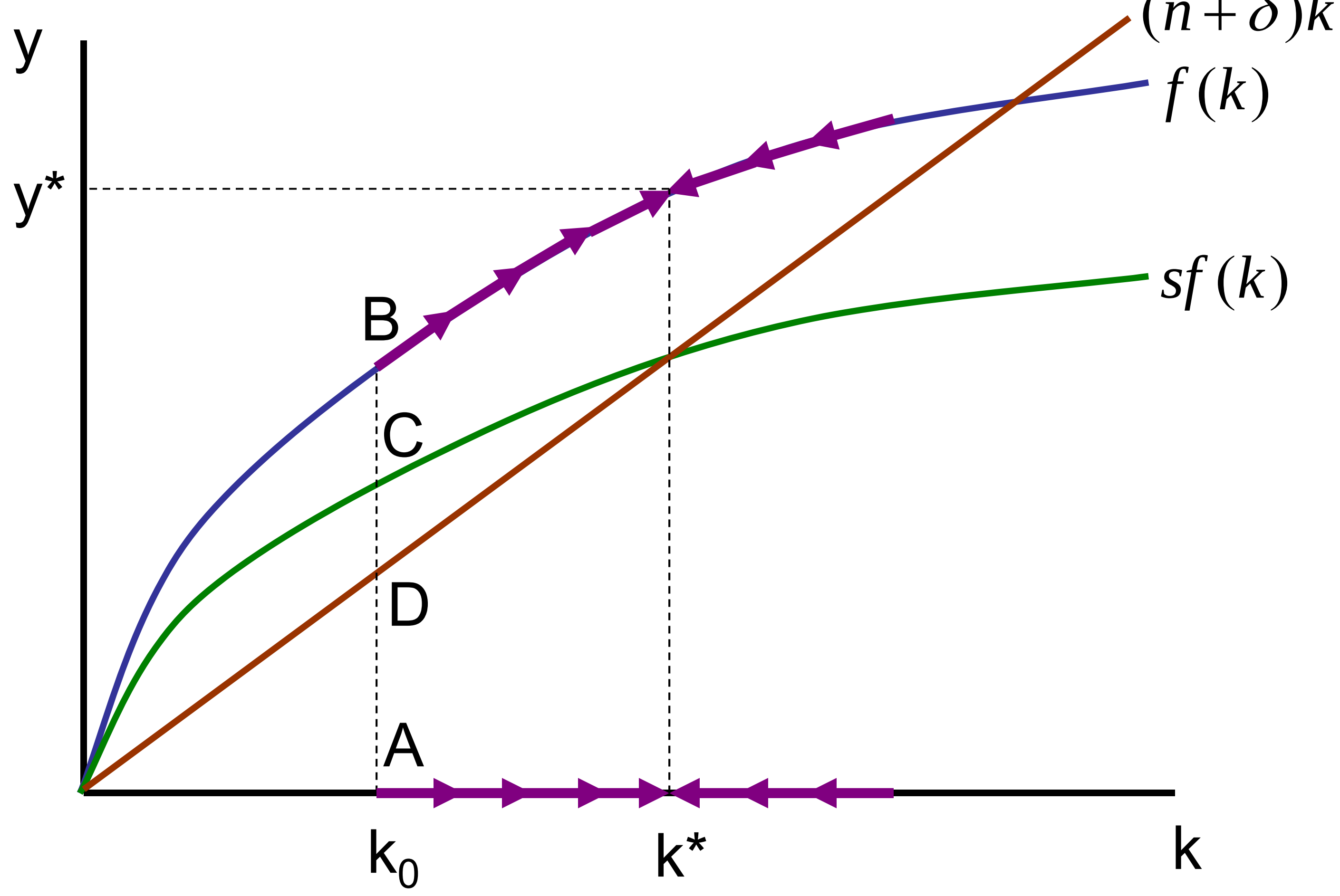
Cuando $k < k^*$, aumenta el stock de capital a una tasa superior a la tasa (n), lo que implica que k está creciendo.

Cuando k* < k, el stock de capital disminuye a una tasa inferior a la tasa (n), es decir, la relación capital por trabajador decrece.

Por tanto, cada vez que la economía se aleja del estado estacionario, ya sea por exceso o por deficiencia de capital por trabajador, hay fuerzas que la empujan hacia el equilibrio de largo plazo del estado estacionario.

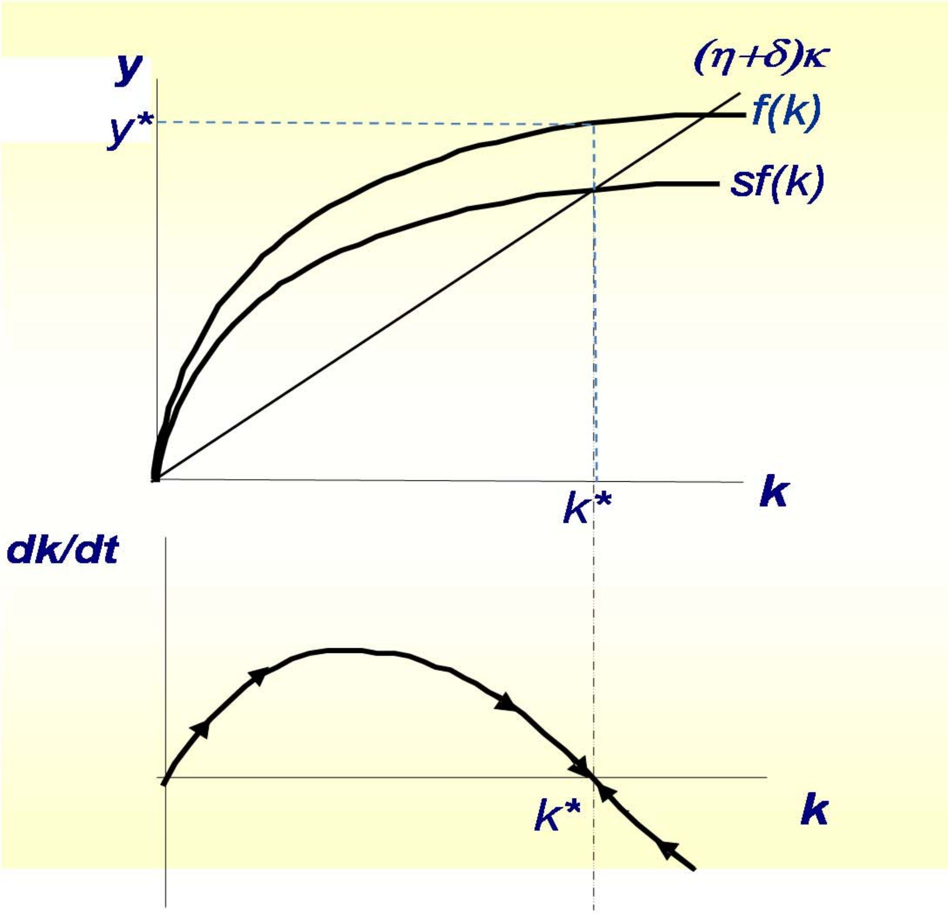
Estabilidad del Modelo de Solow-Swan

Dinámica del Producto y del Capital per cápita



Félix Jiménez
Departamento de Economía

Estabilidad del Modelo de Solow-Swan



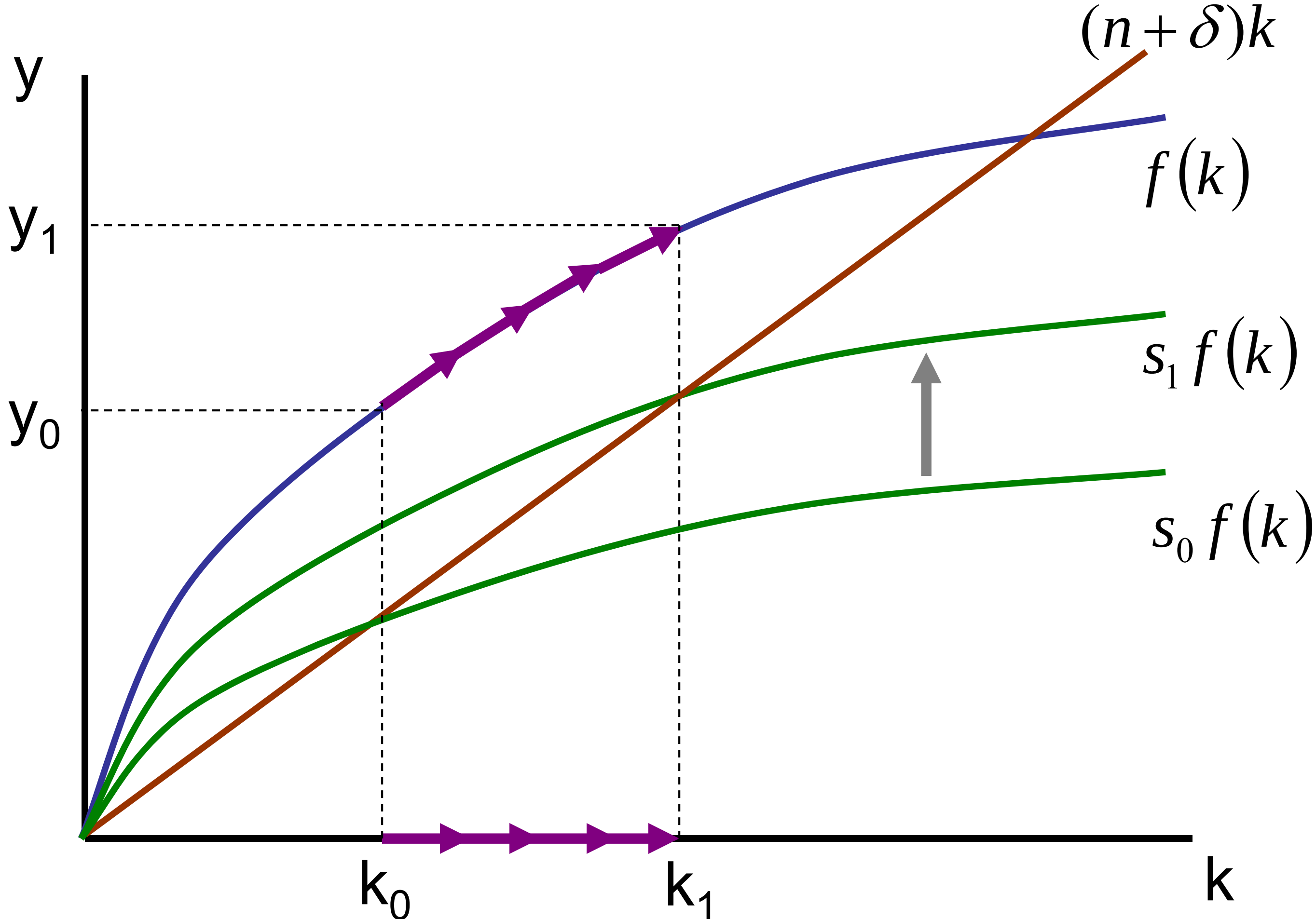
En k^* la tasa de crecimiento es (n), y es totalmente independiente de la tasa de ahorro. (Esta tasa n puede ser n+δ si se incorpora la depreciación).

El ahorro per cápita alcanza para proporcionar capital a la población en aumento y para reponer el capital depreciado, es decir, para mantener sin cambios la relación k o intensidad de capital.

Es la «edad de oro» donde todas las variables del modelo crecen a la tasa (n).

La tasa de ahorro y la paradoja de Solow

La tasa de ahorro no influye en la magnitud de la tasa de crecimiento. Esta tasa es independiente de la tasa de ahorro.



Regla de Oro en el Modelo de Solow-Swan

¿Cuándo se maximiza el consumo en el estado estacionario?

El estado estacionario no es óptimo en todo sentido, pues no toda k del estado estacionario maximiza el consumo *per cápita*.

Como el ingreso *per cápita* ya no aumenta en el estado estacionario, es importante saber en qué condiciones se maximiza el nivel de bienestar, es decir el consumo *per cápita*.

Hay un k conocido como la intensidad de capital de la Regla de Oro (Golden Rule) que maximiza el consumo *per cápita del estado estacionario*.

Para encontrarlo, partimos de la ecuación neoclásica fundamental, cuando la economía alcanza su estado estacionario, para obtener el consumo *per cápita*:

$$\frac{C}{L} = f(k^*) - (n + \delta)k^*$$

Regla de Oro en el Modelo de Solow-Swan

Para encontrar el máximo consumo *per cápita,* igualamos a cero la derivada del consumo per cápita con respecto a k, de la ecuación anterior:

$$\frac{\partial \frac{C}{L}}{\partial k^*} = f'(k^*) - (n+\delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(k^{*RO}) = n + \delta$$

El consumo *per cápita* alcanza su máximo valor cuando la productividad marginal del capital neto de depreciación es igual a la tasa real de retorno del capital adicional (r), y esta es igual a la tasa de crecimiento natural; es decir: r = n.

$$f'(k^{*RO}) - \delta = n \qquad \rightarrow \quad r = n$$

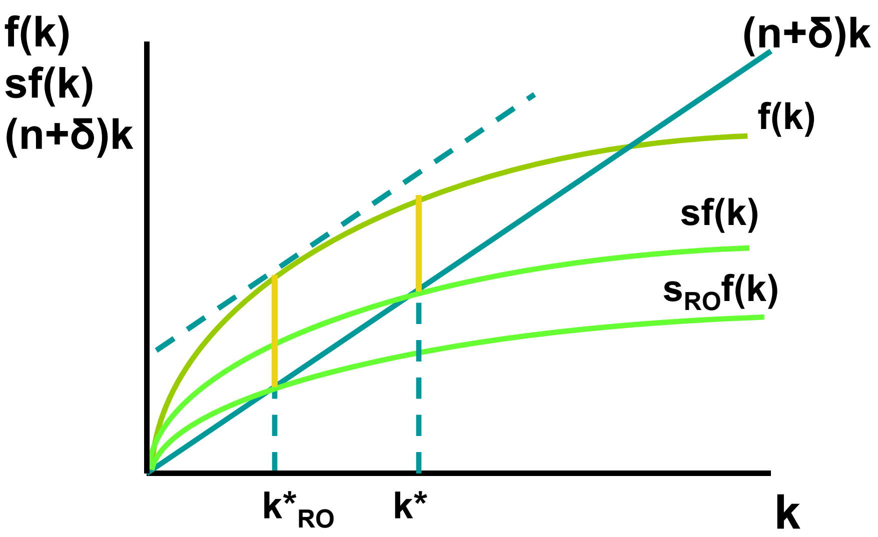
Por lo tanto, el capital del estado estacionario (k^{*RO}) cuyo producto marginal neto de depreciación, es igual a la tasa de crecimiento de la fuerza laboral, es el óptimo en el sentido que maximiza el consumo *per cápita*.

Regla de Oro en el Modelo de Solow-Swan

¿Tiene sentido para la sociedad tener una k mayor que k^{*RO}. En correspondencia con la k^{*RO} de la Regla de Oro, hay una tasa de ahorro que maximiza el consumo *per cápita*. A la derecha de esta k^{*RO} la economía se encuentra en una zona de ineficiencia dinámica.

Hay una tasa de ahorro que corresponde a Regla de Oro.

Por lo tanto, en la zona ineficiente se cumple que $f'(k^*) - \delta < f'(k_{RO}) - \delta$



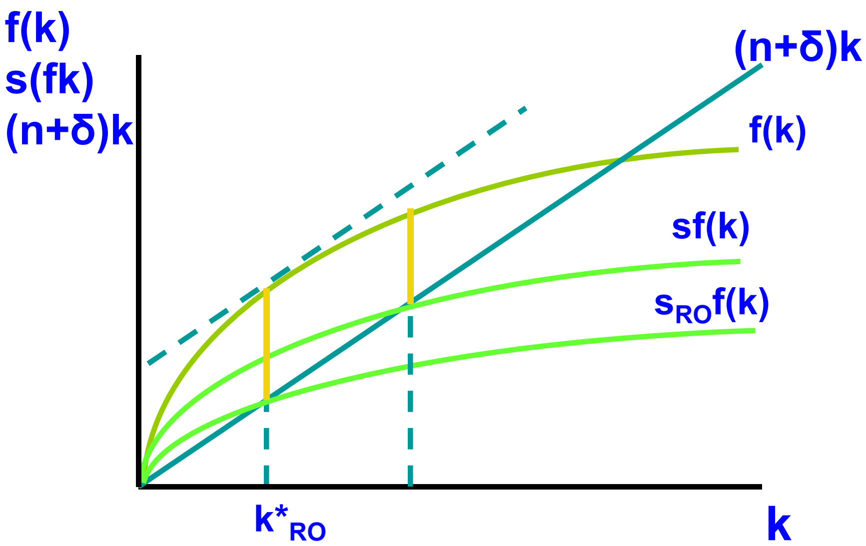
En la zona dinámicamente ineficiente el PMgK neto de depreciación, es inferior a la tasa de crecimiento agregado.

Cuando $s > s_{RO}$ la economía está sobre-ahorrando en el sentido que el consumo per cápita podría aumentar mediante la disminución de la tasa de ahorro.

Regla de Oro en el Modelo de Solow-Swan

Suponga una función de Cob-Douglas ($Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$) y encuentre la condición para que se cumpla la Regla de Oro en términos de la tasa de ahorro.

Se encuentra k de la regla de oro y luego se reemplaza en la ecuación del estado estacionario para hallar la tasa de ahorro, s.



Una economía que sobre-ahorra, ($s > s_{RO}$) es una economía dinámicamente ineficiente, porque la trayectoria del consumo per cápita se encuentra debajo de una trayectoria alternativa factible.

Convergencia en el Modelo de Solow-Swan

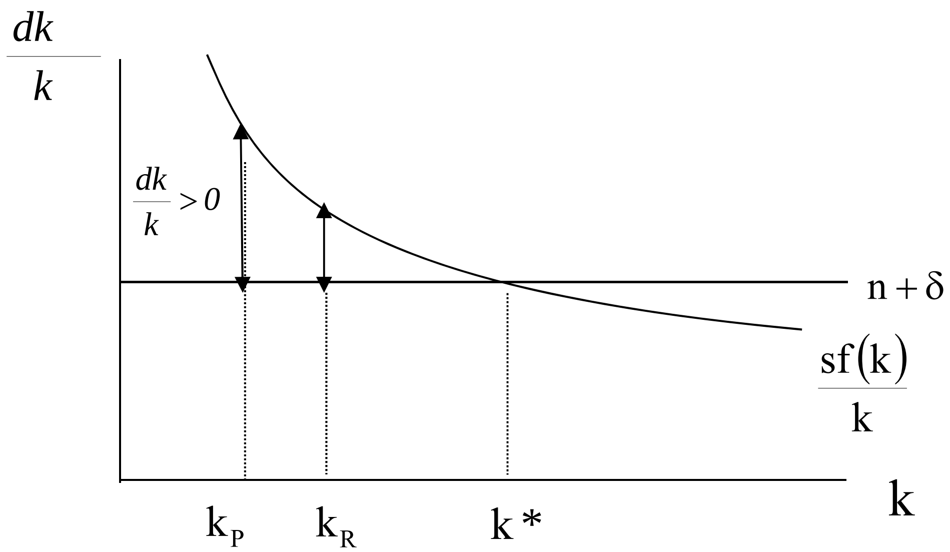
La ecuación de crecimiento de la intensidad de capital en el modelo de Solow, puede escribirse como:

$$\frac{dk}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n + \delta)$$

La tasa de crecimiento de las dotaciones de capital por trabajador depende positivamente de la tasa de ahorro y de la productividad media del capital, y negativamente de la tasa de crecimiento de la población y de la tasa de depreciación.

El primer término es decreciente porque la productividad media del capital lo es a medida que aumenta el stock de capital (véase gráfico siguiente).

Convergencia en el Modelo de Solow-Swan



La relación capital-trabajo de un país pobre es menor que la de un país rico.

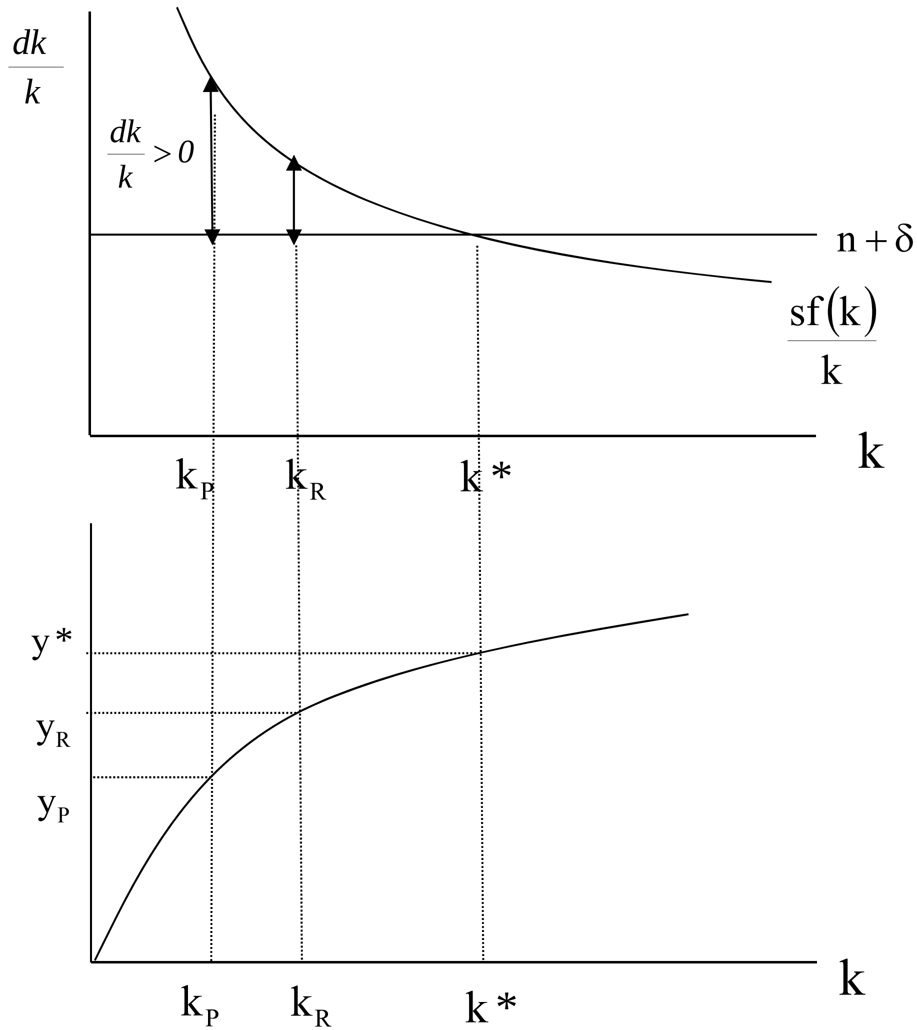
Por lo tanto, el país pobre crecerá más rápido que el rico, hasta que ambos convergerán al mismo nivel de equilibrio de largo plazo, si comparten los mismos parámetros (s, n, δ y F[.]).

A esta convergencia se le denomina Convergencia Absoluta.

Pero, los países no tienen los mismos parámetros fundamentales (s, n, δ, F[.]). Por lo tanto, cada uno convergerá a su propio estado estacionario.

Esta es la Convergencia Condicional, pues esta condicionada por los parámetros).

Convergencia en el Modelo de Solow-Swan



Los niveles de k e y en el *steady state* dependen de los parámetros. Si s es mayor, o la tasa n es menor, la relación k en el *steady state* sería mayor. Pero la tasa de crecimiento volvería a ser cero una vez alcanzado el nuevo *steady state*.

$\frac{sf(k)}{k}$ = Inversión bruta por unidad de capital.

Si k es bajo, la inversión bruta y tasa de crecimiento de k serán altas. Como y sigue la misma trayectoria de k, también crecerá más cuanto más lejos esté la economía del *steady state*.

Convergencia en el Modelo de Solow-Swan

Cálculo de la Velocidad de la Convergencia

A partir de una función de producción Cobb-Douglas en su forma intensiva se puede encontrar una medida cuantitativa de la duración de la transición hacia el estado estacionario.

Es decir se puede hallar la velocidad de convergencia como el cambio en la tasa de crecimiento del capital per cápita cuando aumenta en uno por ciento.

Velocidad: $\beta = -\frac{\partial(\gamma_k)}{\partial \ln k}$ donde: $\gamma_k = \frac{dk}{k}$

La ecuación del crecimiento del capital per cápita (ecuación fundamental neoclásica) es:

$$\gamma_k = sAk^{-(1-\alpha)} - (n+\delta) \Rightarrow \gamma_k = sAe^{-(1-\alpha)\ln k} - (n+\delta)$$

$$\beta = \frac{\partial(\gamma_k)}{\partial \ln k} = -\left[-(1-\alpha)sAe^{-(1-\alpha)\ln k}\right] \Rightarrow \beta = \frac{\partial(\gamma_k)}{\partial \ln k} = \left[(1-\alpha)sAk^{-(1-\alpha)}\right]$$

Convergencia en el Modelo de Solow-Swan

La velocidad es una función decreciente de k; esto indica que la velocidad disminuye a medida que aumenta k y se aproxima a su estado estacionario.

Cuando k ya no crece estamos en el estado estacionario:

$$sAk^{-(1-\alpha)} = n + \delta$$

En consecuencia la velocidad disminuye hasta igualarse a:

$$\beta^{ee} = (1-\alpha)(n+\delta)$$

Otra manera de hallar la velocidad de convergencia es mediante la expansión de Taylor de primer grado

La expansión de Taylor de la ecuación:

$$\gamma_k = sAk^{-(1-\alpha)} - (n+\delta) = sAe^{-(1-\alpha)\ln k^{ee}} - (n+\delta)$$

se realiza alrededor de: $\ln k^{ee}$

$$\gamma_k = 0 - (1-\alpha)sAe^{-(1-\alpha)\ln k^{ee}}(\ln k - \ln k^{ee}) \quad \Rightarrow \quad \gamma_k = -(1-\alpha)sAe^{-(1-\alpha)\ln k^{ee}}(\ln k - \ln k^{ee})$$

Convergencia en el Modelo de Solow-Swan

En el estado estacionario: $sAk^{-(1-\alpha)} = n + \delta$; en consecuencia:

$$\gamma_k = -(1-\alpha)(n+\delta)(\ln k - \ln k^{ee})$$

Por lo tanto, la velocidad será igual a: $\beta^{ee} = -\frac{\partial \gamma_k}{\partial \ln k^{ee}} = (1-\alpha)(n+\delta)$

La ecuación de la tasa de crecimiento del capital per cápita en el estado estacionario hallada con la expansión de Taylor:

$$\gamma_k = -(1-\alpha)(n+\delta)(\ln k - \ln k^{ee})$$

es un una ecuación diferencia, cuya forma explícita es:

$$d\ln k = -(1-\alpha)(n+\delta)\ln k + (1-\alpha)(n+\delta)\ln k^{ee}$$

Reemplazando $\beta = (1-\alpha)(n+\delta)$ en la ecuación anterior se obtiene

$$d\ln k = -\beta \ln k + \beta \ln k^{ee}$$

Convergencia en el Modelo de Solow-Swan

Podemos expresar esta ecuación anterior en forma resumida como sigue:

$$dy = -\beta\, y + \beta\, y^{ee}$$

La solución de tránsito de esta ecuación es:

$$\frac{dy}{y} = -\beta \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\beta \int dt \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\beta t + C \quad \Rightarrow \quad y_t = e^{-\beta t} e^{C}$$

La solución de estado estacionario es:

$$\beta\, y = \beta\, y^{ee} \quad \Rightarrow \quad y = y^{ee}$$

La solución general:

$$y_t = e^{-\beta t} e^{C} + y^{ee} \quad \Rightarrow \quad y_t = (y_0 - y^{ee}) e^{-\beta t} + y^{ee} \quad \Rightarrow \quad y_t = y_0 e^{-\beta t} + (1 - e^{-\beta t}) y^{ee}$$

Haciendo reemplazos:

$$\ln k_t = \ln k_0 e^{-\beta t} + (1 - e^{-\beta t}) \ln k^{ee}$$

Modelo de Solow-Swan con Tecnología Exógena

Función de Producción

$$Y = K^{\alpha}(EL)^{1-\alpha}$$

Tecnología es aumentadora de trabajo.
E hace más eficiente a la fuerza de trabajo

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\left[\frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{E}}{E}\right]$$

Se supone que la tasa (ρ) de crecimiento de la tecnología (E), es exógena.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\left[n + \rho\right]$$

Nuevamente, para comprender crecimiento de Y, debemos comprender el crecimiento de K.

Acumulación de Capital

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

Inversión neta

Y y K se expresan en términos de por trabajo efectivo medido en unidades de eficiencia

$$\tilde{y} = \frac{Y}{EL} = \frac{Y/L}{E} = \frac{y}{E} \qquad \tilde{k} = \frac{K}{EL} = \frac{K/L}{E} = \frac{k}{E}$$

Modelo de Solow-Swan con Tecnología Exógena

La función de producción también se puede expresar en términos de EL

$$\tilde{y} = \frac{K^{\alpha}(EL)^{1-\alpha}}{EL} \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}$$

Variación proporcional de la relación capital trabajo efectivo

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{E}}{E} \Rightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{sY - \delta K}{K} - n - \rho \Rightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{s\tilde{y}}{\tilde{k}} - (\delta + n + \rho)$$

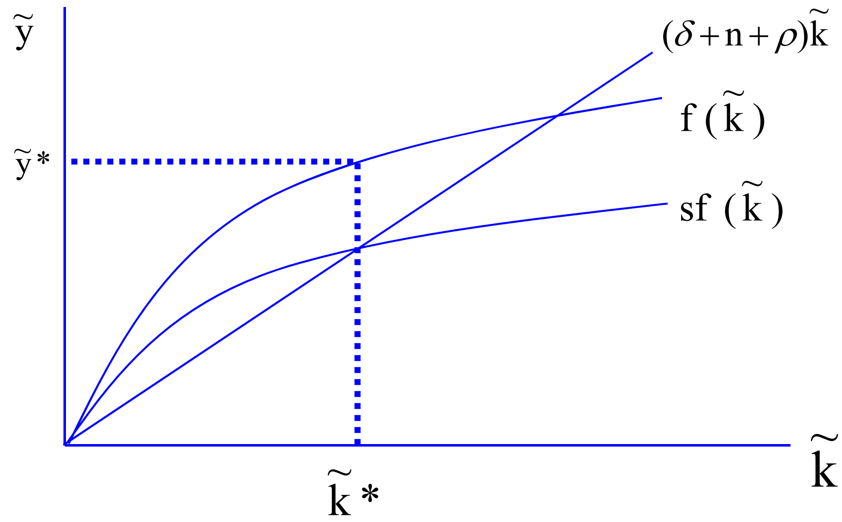
Por lo tanto:

$$\dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (\delta + n + \rho)\tilde{k}$$

En el Estado Estacionario:

$$\dot{\tilde{k}} = 0 \Rightarrow s\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} = (\delta + n + \rho)$$

Modelo de Solow-Swan con Tecnología Exógena



En el Estado Estacionario, el producto por unidad de trabajo efectivo está constante, pero el producto per capita crece a la tasa que crece el progreso técnico.

$$\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{E}}{E} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{E}}{E} = \rho$$

Por lo tanto, el producto (Y) está creciendo a la tasa n+ρ. También K está creciendo a la misma tasa.

Modelo de Solow-Swan con Tecnología Exógena

El producto per capita crecerá únicamente si hay progreso técnico. En este caso la contabilidad del producto, podría tomar la forma siguiente, donde el progreso técnico crece a la tasa ρ:

$$\frac{dY}{Y} = \alpha \frac{dK}{K} + (1-\alpha)\frac{dL}{L} + (1-\alpha)\frac{dE}{E}$$

Haciendo los reemplazos, se obtiene:

$$\frac{dY}{Y} = \alpha(\frac{sY}{K} - \delta) + (1-\alpha)(n+\rho) \Rightarrow \frac{dY}{Y} = \alpha(\frac{sY}{K} - \delta - n - \rho) + (n+\rho)$$

Si suponemos nuevamente que la intensidad de capital (en términos de trabajo efectivo) está constante, es decir, que su tasa de crecimiento es cero, entonces, el PBI crecerá a la tasa n+ρ.

$$\frac{dY}{Y} = n + \rho$$

De aquí se deduce que la productividad media del trabajo crece a la tasa del progreso técnico.

Estática comparativa en el Modelo de Solow-Swan

Estática Comparativa y Políticas

Aumento del ahorro: aumenta la intensidad de capital y el nivel del producto per cápita, pero no aumenta la tasa de crecimiento de largo plazo del PBI.

Progreso Técnico: un mayor progreso técnico aumenta la tasa de crecimiento del producto y hace crecer el producto per cápita. La I&D es una importante fuente de progreso técnico. Se pueden traducir en nuevas ideas, nuevos procesos y nuevos productos.

Crecimiento de la fuerza laboral: cuanto menor es la tasa de crecimiento de la fuerza laboral, mayor es el nivel producto per cápita.

Es claro que las políticas para favorecer el crecimiento deben orientarse a aumentar la tasa de ahorro, al cambio técnico (educativas, tecnológicas) y ……