PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA
CICLO 2019-2

Curso: **Econometría 1**
Profesor: **Luis García (lgarcia@pucp.edu.pe)**
Jefa de práctica: **Yasmeen Destre (y.destre@pucp.pe)**

PRÁCTICA CALIFICADA 4

I. TEORÍA Y DEMOSTRACIONES [14 PUNTOS]

1. Defina formalmente convergencia en probabilidad y convergencia en media cuadrática. **(2 puntos)**

- Convergencia en probabilidad: se dice que una variable aleatoria X_n converge en probabilidad a una constante c si $\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n - c| > \varepsilon) = 0$ para cualquier $\varepsilon > 0$ y $Plim\, X_n = c$.
- Convergencia en media cuadrática: se dice que una variable aleatoria X_n converge en media cuadrática a una constante c si $\lim_{n\to\infty} E[(X_n - c)^2] = 0$. Equivalentemente, se cumple que si $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = c$ y $\lim_{n\to\infty} Var[X_n] = 0$. Entonces, X_n converge en media cuadrática a la constante c.

2. Muestre las consecuencias sobre la media y la varianza del estimador MCO cuando tenemos perturbaciones no esféricas. **(2 puntos)**

Se asume lo siguiente $Var\ (u|X) = V \neq \sigma^2 I$

La matriz V puede contener elementos distintos en su diagonal principal y elementos diferentes de cero fuera de esa diagonal.

Veamos que sucede con el esperado de $\hat{\beta}$:

$$E[\hat{\beta}_{mco}] = \beta + (X'X)^{-1}X'E[u] = \beta$$

Ahora bien, calculemos la matriz de varianzas y covarianzas:

$$\begin{aligned} Var\ (\hat{\beta}_{mco}) &= E[(\hat{\beta} - E[\hat{\beta}])(\hat{\beta} - E[\hat{\beta}])'] \\ &= E[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}] \\ &= (X'X)^{-1}X'E[uu']X(X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} \end{aligned}$$

3. Se sabe que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} X'X = Q$, donde Q es una matriz definida positiva y finita. Muestre que el vector de estimadores de MCO en el modelo de regresión lineal clásico multivariado es consistente. Intuitivamente, ¿qué implica que dicho estimador sea consistente? **(2 puntos)**

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1}X'(X\beta + u) = \beta + (X'X)^{-1}X'u$$

$$\hat{\beta} = \beta + \left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}X'u\right)$$

$$\text{Plim}\hat{\beta} = \beta + \left(\text{Plim}\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}\text{Plim}\left(\frac{1}{n}X'u\right)$$

Como X es fija, el Plim de $\frac{1}{n}X'X$ es lo mismo que su límite cuando n tiende a infinito: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}X'X = Q$. Entonces:

$$\text{Plim}\hat{\beta} = \beta + Q^{-1}\text{Plim}\left(\frac{1}{n}X'u\right)$$

Para mostrar que $\hat{\beta}$ es consistente ($\text{Plim}\hat{\beta} = \beta$), debemos probar que Plim $\left(\frac{1}{n}X'u\right) = 0$. Para esto, usaremos la convergencia medio-cuadrática:

$$E\left[\frac{1}{n}X'u\right] = \frac{1}{n}X'E[u] = 0$$

$$Var\left(\frac{1}{n}X'u\right) = E\left[\frac{1}{n}X'uu'X\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n}X'E[uu']X\frac{1}{n} = \frac{1}{n}X'\sigma^2IX\frac{1}{n} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{1}{n}X'X\right)$$

Tomamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty}Var\left(\frac{1}{n}X'u\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n}\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}X'X\right) = 0\times Q = 0$$

4.

Con esto, queda demostrado que $\frac{1}{n}X'u$ converge medio cuadráticamente a 0, lo que implica que Plim $\left(\frac{1}{n}X'u\right) = 0$. Con esto, queda demostrado que el estimador MCO es consistente:

$$\text{Plim}\hat{\beta} = \beta$$

Intuitivamente, esto quiere decir que la sucesión de estimadores generados al aumentar el número de observaciones converge en probabilidad al parámetro poblacional.

4. Se tiene una muestra aleatoria con la siguiente distribución: $f(x) = \left(\frac{1}{\theta}\right)e^{-x/\theta}$, donde $x \geq 0\,, \theta > 0$.[1]

   a. Plantee la función de verosimilitud y su logaritmo. **(2 puntos)**

$$L = \Pi[\left(\frac{1}{\theta}\right)e^{-\frac{x}{\theta}}]$$

$Log - likelihood = lnL$:

$$lnL = -nln\theta - \left(\frac{1}{\theta}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i$$

[1] Greene, W. H. (2003). *Econometric analysis*. Pearson Education India.

b. Encuentra el estimador $\hat{\theta}$ de máxima verosimilitud. **(2 puntos)**

$$\frac{\partial lnL}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \left(\frac{1}{\theta^2}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\hat{\theta}_{MV} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

c. Obtenga la distribución asintótica del estimador. **(2 puntos)**

$$\{-E[\frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta^2}]\}^{-1} = \{-E[\frac{n}{\theta^2} - (\frac{2}{\theta^3})\sum_{i=1}^{n} x_i]\}^{-1}$$

$$Si\ E[x_i] = \theta$$

$$La\ varianza\ asintótica\ es\ \frac{\theta^2}{n}$$

$$\hat{\theta}_{MV} \sim N(\theta, \frac{\theta^2}{n})$$

d. Plantee la hipótesis y los estadísticos de Razón de Verosimilitud y Wald para la hipótesis $\theta = 1$. **(2 puntos)**

i. Test de Razón de Verosimilitud

Sea θ un vector de K parámetros. Deseamos comprobar la hipótesis $H_0: C(\theta) = 1$, donde $C(.)$ Es una función continua $R^k \to R^q$. Sea $\hat{\theta}$ el estimador MV y sea $\tilde{\theta}$ el estimador MV maximiza $lnL(\theta)$, pero sujeta a la restricción $C(\theta) = 1$ $(estimadores\ restringidos)$.

$$RV = -2[lnL(\tilde{\theta}) \text{-} lnL(\hat{\theta})]$$

Conocemos lnL lo evaluamos en $\theta = 1$ para obtener $lnL(\tilde{\theta})$ y $\hat{\theta}_{MV}$ para obtener $lnL(\hat{\theta})$, luego comparamos con $X^2_{1-\alpha}$ (1), donde α% de significancia.

En este caso, $\tilde{\theta} = 1$ por lo tanto $lnL(\tilde{\theta}) = -nln(1) - \left(\frac{1}{1}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i = -\sum_{i=1}^{n} x_i = -n\bar{x}$

También, $lnL(\hat{\theta}) = -nln\hat{\theta} - \left(\frac{1}{\hat{\theta}}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i = -nln\bar{x} - n$

Luego,

$$RV = -2[-n\bar{x} + nln\bar{x} + n] = -2n[-\bar{x} + ln\bar{x} + 1] = 2n[\bar{x} - ln\bar{x} - 1]$$

ii. Test de Wald

Tenemos $H_0: \theta = 1$ basándose en estimadores de MV.

El estadístico W de Wald sería:

$$W = (\hat{\theta} - 1)'[Var\,(\hat{\theta} - 1)]^{-1}\,(\hat{\theta} - 1)$$

El cual se distribuye asintóticamente como un $X^2(q)$ bajo la hipótesis nula. Luego comparamos $W > X^2_{1-\alpha}\,(q)$, para ver si se rechaza la hipótesis nula con $\alpha\%$ de significancia.
Reemplazando según lo calculado, y notando que $Var\left(\hat{\theta}-1\right) = Var\left(\hat{\theta}\right)$,

$$W = (\bar{x}-1)' \left[\frac{\bar{x}^2}{n}\right]^{-1} (\bar{x}-1) = \frac{n(\bar{x}-1)^2}{\bar{x}^2}$$

II. PROGRAMACIÓN [6 PUNTOS]

5. Utilizando la base de datos “salarios.dta” y el modelo:

$$w\_earnings_i = \beta_1 + \beta_2 y\_\exp erience_i + \beta_3 y\_schooling_i + \beta_4 sex_i + u_i, \quad \textbf{(*)}$$

a. Enuncia cada paso del test de White. **(2 puntos)**
Se parte de la idea que la heterocedasticidad está relacionada con las variables explicativas del modelo, mediante una relación funcional:

$$\sigma_i^2 = f(X_2, X_3, \dots, X_k)$$

Donde $f(.)$ es una función polinómica. Los pasos del test son:

i. Estimar por MCO el modelo $y = X\beta + u$, calcular los residuos e_i y e_i^2.
ii. Estimar un modelo tomando a e_i^2 como endógena contra las explicativas, sus cuadrados y productos cruzados. Por ejemplo, si es un modelo donde las explicativas son X_{2i}, X_{3i} y la constante, la regresión auxiliar es :

$$e_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{2i} + \alpha_2 X_{3i} + \alpha_3\, X_{2i}^2 + \alpha_4 X_{3i}^2 + \alpha_5 X_{2i} X_{3i} + \varepsilon_i$$

iii. La hipótesis nula de homocedasticidad es H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$. Bajo esta hipótesis, es estadístico $n\ x\ R^2_{aux} \sim X^2(q)$ donde q es igual a 5 en este ejemplo y R^2_{aux} es el R-cuadrado de la regresión del paso 2. Si $n\ x\ R^2_{aux}$ es mayor que el valor critico definido por el percentil $X^2_{1-\alpha}\,(q)$, se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad con $\alpha\%$ de significancia.

b. Implemente el test de White (PASO A PASO). Comente los resultados encontramos detalladamente de cada etapa. **(2.5 puntos)**

i. Regresión del modelo original:

$$w\_earnings_i = \beta_1 + \beta_2 y\_\exp erience_i + \beta_3 y\_schooling_i + \beta_4 sex_i + u_i,$$

```
. reg W_EARNINGS Y_EXPERIENCE Y_SCHOOLING SEX

      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =       540
-------------+----------------------------------   F(  3,    536)  =     69.11
       Model |  59389313.1         3  19796437.7   Prob > F        =    0.0000
    Residual |   153541348       536  286457.739   R-squared       =    0.2789
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.2749
       Total |   212930661       539  395047.609   Root MSE        =    535.22

------------------------------------------------------------------------------
  W_EARNINGS |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
Y_EXPERIENCE |   26.46887   5.713637     4.63   0.000       15.245    37.69273
 Y_SCHOOLING |   109.9794   9.505529    11.57   0.000     91.30677    128.6521
         SEX |   348.7483   46.68446     7.47   0.000     257.0413    440.4552
       _cons |   -1305.93   184.9257    -7.06   0.000    -1669.198   -942.6615
------------------------------------------------------------------------------
```

Capturar los residuos: $predict\ e, residuals$
Generar los residuos al cuadrado: $gen\ e2 = e^2$

ii. Regresión auxiliar

$$\begin{aligned} e_i^2 \quad = \quad & \alpha_1 + \alpha_2 y\_\exp erience_i + \alpha_3 y\_schooling_i + \alpha_4 sex_i \\ & + \alpha_5 y\_\exp erience_i^2 + \alpha_6 y\_schooling_i^2 + \alpha_7 sex_i^2 + \\ & + \alpha_8 y\_\exp erience_i . y\_schooling_i + \alpha_9 y\_\exp erience_i . sex_i \\ & + \alpha_{10} y\_schooling_i . sex_i . + u_i . \end{aligned}$$

```
. reg e2 Y_EXPERIENCE Y_SCHOOLING SEX c.( Y_EXPERIENCE Y_SCHOOLING SEX )#c.( Y_EXPERIENCE Y_SCHOOLING SEX )
note: c.SEX#c.SEX omitted because of collinearity

      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =       540
-------------+----------------------------------   F(  8,    531)  =      6.08
       Model |  4.8068e+13         8  6.0085e+12   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  5.2468e+14       531  9.8810e+11   R-squared       =    0.0839
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.0701
       Total |  5.7275e+14       539  1.0626e+12   Root MSE        =   9.9e+05

------------------------------------------------------------------------------------------------
                            e2 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------------------------+----------------------------------------------------------------
                  Y_EXPERIENCE |  -87813.66   98936.05    -0.89   0.375    -282167.7    106540.4
                   Y_SCHOOLING |  -305834.3   191099.5    -1.60   0.110    -681238.1    69569.55
                           SEX |   -1460263   733431.3    -1.99   0.047     -2901046    -19479.9
                               |
c.Y_EXPERIENCE#c.Y_EXPERIENCE |   1797.655    1974.92     0.91   0.363    -2081.961    5677.271
                               |
 c.Y_EXPERIENCE#c.Y_SCHOOLING |   3528.886   4554.693     0.77   0.439    -5418.542    12476.31
                               |
         c.Y_EXPERIENCE#c.SEX |   18755.39   22016.19     0.85   0.395    -24494.14    62004.91
                               |
  c.Y_SCHOOLING#c.Y_SCHOOLING |   10020.29   5538.131     1.81   0.071     -859.047    20899.62
                               |
          c.Y_SCHOOLING#c.SEX |   101643.7   37070.77     2.74   0.006     28820.35    174467.1
                               |
                   c.SEX#c.SEX |          0  (omitted)
                               |
                         _cons |    2527417    1732009     1.46   0.145    -875013.4     5929847
------------------------------------------------------------------------------------------------
```

El test de White es $n.R_{aux} = (540).(0.0839) = 45.306$. Se conoce que $X^2_{0.95}(9) = 16.919$. Por lo tanto, el Test de White es mayor que 16.919. Se rechaza la H_o *de homocedasticidad al* 5% *de significancia.*

c. Ahora, emplee el test de Breush-Pagan. Utilice las mismas variables explicativas del modelo (*) ¿Obtiene los mismos resultados que en (a), comente? **(1.5 puntos)**

i. Regresión del modelo original:

$$w\_earnings_i = \beta_1 + \beta_2 y\_\exp erience_i + \beta_3 y\_schooling_i + \beta_4 sex_i + u_i,$$

```
. reg W_EARNINGS Y_EXPERIENCE Y_SCHOOLING SEX

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  3,   536) =   69.11
       Model |  59389313.1     3  19796437.7           Prob > F      =  0.0000
    Residual |   153541348   536  286457.739           R-squared     =  0.2789
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.2749
       Total |   212930661   539  395047.609           Root MSE      =  535.22

------------------------------------------------------------------------------
  W_EARNINGS |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
Y_EXPERIENCE |   26.46887   5.713637     4.63   0.000       15.245    37.69273
 Y_SCHOOLING |   109.9794   9.505529    11.57   0.000     91.30677    128.6521
         SEX |   348.7483   46.68446     7.47   0.000     257.0413    440.4552
       _cons |   -1305.93   184.9257    -7.06   0.000    -1669.198   -942.6615
------------------------------------------------------------------------------
```

Capturar los residuos: $predict\ e, residuals$

Generar los residuos al cuadrado: $gen\ e2 = e^2$

Generar los residuos al cuadrado entre $\frac{SCR}{N}$: $gen\ \ w_i = e2 * e(N)/e(rss)$

ii. Regresión auxiliar:

$$w_i = \beta_1 + \beta_2 y\_\exp erience_i + \beta_3 y\_schooling_i + \beta_4 sex_i + u_i$$

```
. reg w Y_EXPERIENCE Y_SCHOOLING SEX

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     540
-------------+------------------------------           F(  3,   536) =   11.39
       Model |  424.630189     3  141.543396           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  6659.71738   536  12.4248459           R-squared     =  0.0599
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.0547
       Total |  7084.34757   539    13.143502          Root MSE      =  3.5249

------------------------------------------------------------------------------
           w |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
Y_EXPERIENCE |   .0504852   .0376295     1.34   0.180    -.0234341    .1244044
 Y_SCHOOLING |     .29283   .0626025     4.68   0.000     .1698537    .4158063
         SEX |   .9735865   .3074592     3.17   0.002     .3696137    1.577559
       _cons |  -4.347931   1.217903    -3.57   0.000    -6.740379   -1.955484
------------------------------------------------------------------------------
```

El test de Breusch –Pagan es $\frac{SCE}{2} = \frac{424.630189}{2} = 212.3150945$. Contamos con el $X^2_{0.95}(3) = 7.815$. Por lo tanto, el test Breush-Pagan es mayor que 7.815. Se rechaza la $H_o\ de\ homocedasticidad\ al\ 5\%\ de\ significancia.$

Con el test de Breusch –Pagan se obtienen los mismos resultados que con el Test de White, en ambos se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad al 5% de significancia.

NOTA: Considere $X^2_{0.95}(3) = 7.815, X^2_{0.95}(9) = 16.919$