PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA
SEMESTRE 2013-II

PUCP

ECONOMETRÍA 1: PRÁCTICA DIRIGIDA 3

Curso:	Econometría 1	
Profesor:	Gabriel Rodríguez	(gabriel.rodriguez@pucp.edu.pe)
Jefe de práctica:	Patricia Lengua Lafosse	(patricia.lengua@pucp.pe)

1. TRANSFORMACIÓN LINEAL DE LOS DATOS:

   Considere la regresión de mínimos cuadrados ordinarios de Y en K variables (con una constante) X. Esto es:

$$Y = X\beta + \epsilon$$

   Considere ahora un conjunto de regresores alternativos $Z = XP$, donde P es una matriz no singular. Entonces, cada columna de Z es una combinación de algunas columnas de X. Probar que el vector de los residuos en la regresión de Y contra X y de Y contra Z son idénticos. Diga qué relevancia tiene esto para la interrogante de realizar un cambio de unidades de medida de las variables exógenas.

2. TEOREMA FRISCH-WAUGH

   grupos de   matriz particionada.

   En una regresión MCO de un vector Y contra dos variables X_1 y X_2, el vector $\widehat{\beta}_2$ es el conjunto de coeficientes estimados obtenidos cuando los residuos de la regresión de Y contra X_1 son regresionados contra el conjunto de residuos obtenidos de la regresión X_2 contra X_1. Con lo anterior, considere la siguiente regresión:

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \epsilon, \tag{1}$$

   donde ϵ es el término de perturbación. Además, se tienen las siguientes regresiones auxiliares:

$$\begin{aligned} Y &= X_1\widehat{\alpha} + \widehat{e}, & (2) \\ X_2 &= X_1\widehat{\eta} + \widehat{v}. & (3) \end{aligned}$$

   donde $\widehat{\alpha}$ es el estimador MCO de la regresión (2) y $\widehat{\eta}$ es el estimador de la regresión (3). $\widehat{e}$ y $\widehat{v}$ son los residuos MCO de las ecuaciones (2) y (3), respectivamente.

   (a) Encuentre los estimadores $\widehat{\beta}_1$ y $\widehat{\beta}_2$ de la regresión (1).[1]

   (b) Muestre que $\widehat{\beta}_2$ es el coeficiente de la regresión resultante entre los residuos $\widehat{e}$ de la ecuación (2) y los residuos $\widehat{v}$ de la ecuación (3).

3. Considere la regresión MCO de Y contra una constante, X_1 y X_2 la cual produce los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} Y &= 4 + 0.4X_1 + 0.9X_2, \quad R^2 = \frac{8}{60}, \quad \widehat{\epsilon}'\widehat{\epsilon} = 520 \text{ y } T = 29. \\ X'X &= \begin{bmatrix} 29 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 10 \\ 0 & 10 & 80 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   (a) Contrastar la hipótesis que la suma de las pendientes es igual a 1 con la prueba F.

   (b) Mostrar que en la pregunta anterior también se puede utilizar la prueba t.

[1] Ayúdese usando matrices particionadas y recuerde que $M_i = I - X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'$

Practica Dirigida 3

1. Transformación lineal de los datos:

$$Y = X\beta + \epsilon \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1T} & \cdots & X_{kT} \end{bmatrix}$$

* Modelo alternativo $Y = Z\delta + v$ si $Z = XP$

o) $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ o) $\hat{\delta} = (Z'Z)Z'Y$

o) $\hat{e} = Y - X\hat{\beta} = Y - X(X'X)^{-1}X'y$ o) $\hat{v} = Y - Z\hat{\delta} = Y - Z(Z'Z)^{-1}Zy$

$\hat{\epsilon} = [I - X(X'X)^{-1}X']y = M_X y$ ✓ o) $\hat{v} = [I - Z(Z'Z)^{-1}Z']y = M_Z y$ ✓

=) demostrar que $\hat{e}$ y $\hat{v}$ son identicos:

$$\hat{v} = [I - XP((XP)'(XP))^{-1}(XP)']Y = [I - XP[P'X'XP]^{-1}P'X']y$$

$$\hat{v} = [I - XP[P^{-1}(X'X)^{-1}(P')^{-1}P'X']y$$

$$\hat{v} = [I - X\cancel{PP^{-1}}(X'X)^{-1}\cancel{(P')^{-1}}P'X']y = [I - X(X'X)^{-1}X']y$$

$$\hat{v} = M_X . Y = \hat{\epsilon} \checkmark$$

Son iguales, entonces si por ejemplo cambio de soles a dolares la variable X_t no afectará en nada a las caracteristicas.

2. Teorema Frisch - Waugh

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \epsilon_1 \quad (1)$$

Regresiones auxiliares:

$$Y = X_1\hat{\alpha} + \hat{e} \quad (2)$$
$$X_2 = X_1\hat{n} + \hat{v} \quad (3)$$

a) encontrar $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$

$$Y = \underbrace{[X_1 \vdots X_2]}_{X} . \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_2 \end{bmatrix}}_{\beta} + \epsilon \quad ; \quad X' = [X_1 \vdots X_2]' = \begin{bmatrix} X_1' \\ \cdots \\ X_2' \end{bmatrix}$$

o) $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) \Rightarrow (X'X)\hat{\beta} = X'Y$

$$\boxed{\Rightarrow (X'X) = \begin{bmatrix} X_1' \\ \cdots \\ X_2' \end{bmatrix} [X_1 \vdots X_2] = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & \vdots & X_1'X_2 \\ \cdots & & \cdots \\ X_2'X_1 & \vdots & X_2'X_2 \end{bmatrix}}$$

o) $$\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} Y$$

o) $X_1'X_1\hat{\beta}_1 + X_1'X_2\hat{\beta}_2 = X_1'Y$ (a)

o) $X_2'X_1\hat{\beta}_1 + X_2'X_2\hat{\beta}_2 = X_2'Y$ (b)

De (b): $X_2'Y = X_2'X_1\hat{\beta}_1 + X_2'X_2\hat{\beta}_2$

$$X_2'Y - X_2'X_1\hat{\beta}_1 = X_2'X_2\hat{\beta}_2$$

despejo $\hat{\beta}_2$: $\hat{\beta}_2 = (X_2'X_2)^{-1}X_2'Y - (X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1\hat{\beta}_1$

reemplazo $\hat{\beta}_2$ en (a):

$$X_1'X_1\hat{\beta}_1 + X_1'X_2\underline{\hat{\beta}_2} = X_1'Y$$

$$X_1'X_1\hat{\beta}_1 + X_1'X_2\left[(X_2'X_2)^{-1}X_2'Y - (X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1\hat{\beta}_1\right] = X_1'Y$$

$$X_1'X_1\hat{\beta}_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1\hat{\beta}_1 = X_1'Y - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'Y$$

$$X_1'\left[I - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'\right]X_1\hat{\beta}_1 = X_1'\left[I - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'\right]Y$$

$$X_1'[M_2]X_1\hat{\beta}_1 = X_1'[M_2]Y$$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = (X_1'M_2X_1)^{-1}\cdot X_1'M_2Y}$$

* de igual forma se procede para encontrar $\hat{\beta}_2$:

$$\boxed{\hat{\beta}_2 = (X_2'M_1X_2)^{-1}\cdot X_2M_1Y} \; *$$

b) de (2) $Y = X_1\hat{\alpha} + \hat{e}$

$\hat{\alpha} = (X_1'X_1)^{-1}X_1'Y$

$\hat{e} = Y - X_1\hat{\alpha}$

$\hat{e} = Y - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1Y$

$\hat{e} = M_1Y$

de (3) $X_2 = X_1\hat{n} + \hat{v}$

$\hat{n} = (X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2$

$\hat{v} = X_2 - X_1\hat{n}$

$\hat{v} = X_2 - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1X_2$

$\hat{v} = M_1X_2$

$\Rightarrow$ planteamos: $\hat{e} = \hat{v}\,\gamma + e_3$ ~ terminos de perturbación

↳ coeficientes a estimar

$$\hat{\gamma} = (\hat{v}'\hat{v})^{-1}\cdot\hat{v}'\hat{e}$$

$$\hat{\gamma} = ((M_1X_2)'(M_1X_2))^{-1}(M_1X_2)'(M_1Y) = (X_2'M_1'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1'M_1Y$$

$$\boxed{\hat{\gamma} = (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1Y} = \hat{\beta}_2 \; *$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \epsilon_t \approx Y = \overset{\hat\beta_0}{4} + \overset{\hat\beta_1}{0{,}4} X_1 + \overset{\hat\beta_2}{0{,}9} X_2 + \hat{\epsilon}_i$$

$R^2 = \frac{8}{60}$; $\hat{e}'\hat{e} = 520$, $T = 29$; $X'X = \begin{bmatrix} 29 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 10 \\ 0 & 10 & 80 \end{bmatrix}$

sumatoria de cuadrados residuales

a) contrastar $H_0: \beta_1 + \beta_2 = 1$ *

Prueba F:

$$F = \frac{(R\hat\beta - q)'(R(X'X)^{-1}R')^{-1}(R\hat\beta - q)/J}{\underbrace{\hat{e}'\hat{e}/T-k}_{S^2}} \sim F_{(\overset{1}{J},\ \overset{26}{T-k})}$$

* R de las restricciones en forma matricial

o) $J \rightarrow$ # de restricciones

i) Forma $R \cdot \beta = q \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{1\times3}}_{R} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_{1\times1}$

ii) $(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/29 & 0 & 0 \\ 0 & 8/390 & -1/390 \\ 0 & -1/390 & 5/390 \end{bmatrix}$

iii) $S^2 = \frac{\hat{e}'\hat{e}}{T-k} = \frac{520}{29-3} = 20$

$$F = \frac{(\hat\beta_1 + \hat\beta_2 - 1)' \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/29 & 0 & 0 \\ 0 & 8/390 & -1/390 \\ 0 & -1/390 & 5/390 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}' \right]^{-1} (\hat\beta_1 + \hat\beta_2 - 1)/1}{20}$$

$$F = \frac{(0{,}3) \cdot \left[\begin{bmatrix} 0 & 7/390 & 4/390 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot (0{,}3)}{20} = \frac{(0{,}3)\,(11/390)^{-1}\,(0{,}3)}{20}$$

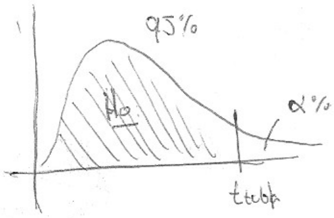
$F = 0{,}1595$

o) prueba al 95% de confianza ($\alpha = 0{,}05$)

$\Rightarrow$ Se rechaza Ho si $F_{estadístico} > F_{tabla}(J, T-k)$

$F_{tabla}(J=1;\ T-k=26) = 4{,}225$

$\Rightarrow$ $F_{est.} < F_{tabla}$ $\Rightarrow$ No se rechaza la Ho que $\beta_2 + \beta_3 = 1$



b) utilizar t-student:

$$t_{estadístico} = \frac{\hat\beta - \beta_{H_0}}{se(\hat\beta)} \sim t_{(T-k)} \Rightarrow t^2 \sim (1, T-k)$$

grados de libertad

∴ El cuadrado del t-estadístico es equivalente al F-estadístico con $J = 1$

i) $\hat{var}(\hat{\beta}) = s^2 (X'X)^{-1}$

$$= 20 \cdot \begin{bmatrix} 1/29 & 0 & 0 \\ 0 & 8/390 & -1/390 \\ 0 & -1/390 & 5/390 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}69 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}410 & -0{,}051 \\ 0 & -0{,}051 & 0{,}256 \end{bmatrix}$$ matriz de varianzas y covarianzas

ii) t- estadístico $= \dfrac{(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) - 1}{\sqrt{\hat{var}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)}} = \dfrac{1{,}3 - 1}{\sqrt{\hat{var}(\hat{\beta}_1) + \hat{var}(\hat{\beta}_2) + 2\,\hat{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}}$

$$= \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}410 + 0{,}256 - 2(0{,}051)}} = 0{,}399 \sim t_{(26)}$$

↳ grados de libertad

* Si tengo un modelo con una sola restricción puedo usar una t-student en lugar de una F para facilitar trabajo.