PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA
SEMESTRE 2013-II

PRÁCTICA DIRIGIDA 0: REPASO

Curso:	Econometría 1	
Profesor:	Gabriel Rodríguez	(gabriel.rodriguez@pucp.edu.pe)
Jefes de práctica:	Patricia Lengua Lafosse	(patricia.lengua@pucp.pe)

1 Algebra Matricial

1. Matrices particulares:

   Sea una matriz A de dimensión $n \times m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Definir qué es una matriz cuadrada, simétrica, diagonal, escalar, identidad, triangular, nula, singular, ortogonal e idempotente.

2. Sumatorias utilizando notación matricial:

   Sean:

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{T\times 1}, \ X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_T \end{bmatrix}_{T\times 1} \quad y \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix}_{T\times 1} \tag{2}$$

   Encontrar en forma matricial:

   - $\sum_{j=1}^{T} X_j$
   - $\overline{X}$
   - $\sum_{j=1}^{T} X_j^2$
   - $\sum_{j=1}^{T} X_j Y_j$

3. Transpuesta de una matriz y propiedades

4. Determinante de una matriz 2x2 y 3x3

5. Inversa de una matriz y propiedades

   - Inversa de una matriz 2x2
   - Inversa de una matriz 3x3

6. Traza de una matriz y sus propiedades.

7. Rango de una matriz y propiedades: relación con independencia lineal de vectores.

8. Matriz particionada
    - Suma y multiplicación de matrices particionadas
    - Determinante de matriz particionada
    - Inversa de matriz particionada

2 Distribuciones

1. Distribución Normal (Univariada y Multivariada)
2. Distribución Chi-cuadrado (χ^2)
3. Distribución t-student
4. Distribución F de Fisher

Econometrica 1
Patricia Lengua Lafosse
2013 - II
pro
Gabriel
Rodriguez

1. ALGEBRA MATRICIAL — PDO: REPASO — ECONOMETRÍA 1.

(i) MATRIZ CUADRADA : $n = m$

(ii) " SIMÉTRICA : MATRIZ CUADRADA DONDE $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j$
$\rightarrow A' = A$

(iii) " DIAGONAL : MATRIZ CUADRADA EN QUE TODAS LAS ENTRADAS SON NULAS SALVO LA DIAGONAL PRINCIPAL $\rightarrow a_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{12} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(iv) " escalar : MATRIZ de DIMENSIÓN $n \times m$ DONDE $n=1$ y $m=1$
$A = [a_{11}]$

(v) " IDENTIDAD : MATRIZ CUADRADA DONDE $a_{ij} = 1$ $\forall i=j$ y $a_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$

(vi) " TRIANGULAR : MATRIZ CUADRADA CUYOS ELEMENTOS POR DEBAJO O POR ENCIMA DE LA DIAGONAL PRINCIPAL SON CERO

(vii) " NULA : MATRIZ DONDE $a_{ij} = 0$ $\forall i,j$

(viii) " singular : MATRIZ CUADRADA CUYO $|A| = 0$
$\rightarrow \nexists A^{-1}$

(IX) " ortogonal : MATRIZ CUADRADA DONDE $A^{-1} = A^T$
$\rightarrow A.A^T = I$

(x) " idempotente : MATRIZ QUE CUMPLE :
$M^2 = MM = M$

MATRICES QUE MULTIPLICADAS POR SÍ MISMAS SON ELLAS MISMAS $\Rightarrow$ $M^z = M$ $\forall z \in \mathbb{N}$

$\rightarrow$ Si M es MATRIZ SIMÉTRICA E IDEMPOTENTE $\Rightarrow M^TM = M$

2) SUMATORIAS

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{T\times 1} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_T \end{bmatrix}_{T\times 1} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix}_{T\times 1}$$

(i) $\sum_{i=1}^{T} x_j = x_1 + x_2 + \dots + x_T = i'x$ ó $x'i$

(ii) $\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{T} x_j = \frac{1}{T} i'x$ ó $\frac{1}{T} x'i$

(iii) $\sum_{i=1}^{T} x_j^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_j^2 = x'x$

(iv) $\sum_{i=1}^{T} x_j y_j = x'y$ o $y'x$

3) TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ Y PROPIEDADES

→ LA TRASPUESTA DE UNA MATRIZ A de DIMENSIÓN $n \times m$ se obtiene intercambiando sus FILAS por sus COLUMNAS.

LA MATRIZ TRANSPUESTA A' o A^T está DENOTADA POR:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \qquad \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \end{matrix}$$

PROPIEDADES

→ $(A+B)^T = A^T + B^T$

→ $(AB)' = B'A'$

→ $(A')' = A$

→ $(cA)' = cA'$ con c un escalar

→ solo para matrices cuadradas

4) DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

- Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

determinante de $A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

- Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ → $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{12}$

5) INVERSA DE UNA MATRIZ Y PROPIEDADES

MENORES Y COFACTORES: SEA A UNA MATRIZ DE ORDEN $N \times N$ (CUADRADA) CUYO DETERMINANTE EXISTE. ENTONCES EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ QUE SE OBTIENE al ELIMINAR LA FILA i y LA COLUMNA j de A ES, denotado $|M_{ij}|$ y es llamado <u>el MENOR</u> <u>de</u> <u>a_{ij}</u>.

EL COFACTOR de a_{ij} → a_{ij} está DEFINIDO COMO $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ y se denota α_{ij}.

ADJUNTA DE UNA MATRIZ CUADRADA $A_{N \times N}$: Si α_{ij} es el COFACTOR de a_{ij}, ent

LA MATRIZ ADJUNTA ESTÁ DEFINIDA COMO:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2N} \\ & & & \vdots \end{bmatrix}$$

INVERSA DE LA MATRIZ:

$$A^{-1} = \frac{(\text{adj } A)'}{|A|} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}/|A| & \alpha_{12}/|A| & \dots & \alpha_{1n}/|A| \\ \alpha_{21}/|A| & \alpha_{22}/|A| & \dots & \alpha_{2n}/|A| \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1}/|A| & \alpha_{n2}/|A| & \dots & \alpha_{nn}/|A| \end{bmatrix}'$$

INVERSA 2x2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$i)\ A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22}/a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{12}/|A| \\ -a_{21}/|A| & a_{11}/|A| \end{bmatrix}$$

INVERSA 3x3:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{(\text{adj } A)^T}{|A|}$$

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & & \\ & & \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

sigue ..

6) TRAZA DE UNA MATRIZ y PROPIEDADES

~~TRAZA~~ Sea A una matriz cuadrada nxn $\rightarrow tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

→ Suma de elementos de la diagonal principal.

→ PROPIEDADES

- $tr(cA) = c \cdot tr(A)$ con c un escalar
- $tr(A^T) = tr(A)$
- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(I_{k\times k}) = k$
- $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$

Patricia Lengua Lafosse

7) RANGO DE UNA MATRIZ Y PROPIEDADES: RELACIÓN CON INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

→ EL RANGO DE UNA MATRIZ ES EL ORDEN DE LA SUBMATRIZ CUADRADA DE MAYOR ORDEN CON DETERMINANTE NO NULO.

Ejm:

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

submatrices cuadradas de A son:

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$

$[2], [1], [-1], [0], [3], [-2]$

↳ $\text{RANGO}(A) = 2$ (todas las SUBMATRICES CUADRADAS DE ORDEN 2 TIENEN DETERMINANTE NO NULO)

↳ SON NO SINGULARES

→ MAYOR # de FILAS O COLUMNAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

↳ (NO HAY COMBINACIÓN LINEAL)

→ RANGO COMPLETO x col (o fil): si el RANGO DE LA MATRIZ es igual al # de col (o fil) de LA MATRIZ.

PROPIEDADES:

- $\text{RANGO}(AB) \leq \min(\text{RANGO}(A), \text{RANGO}(B))$
- Si $A_{m \times n}$ y $B_{n \times n}$ con rango n ⇒ $\text{Rango}(AB) = \text{rango}(A)$
- $\text{rango}(A) = \text{rango}(A'A) = \text{rango}(AA')$

8) MATRICES PARTICIONADAS: ES UNA MATRIZ DE MATRICES.

Si se toma la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m \times 1} & \dots & & a_{m \times n} \end{bmatrix}_{m \times n}$

y se particiona tomando s grupos de filas $(m_1, m_2, \dots m_s)$ y t grupos de columnas $(n_1, n_2, \dots, n_t)$, ent. A se puede escribir:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{st} \end{bmatrix}$$

donde cada elemento A_{ij} de A es una submatriz de orden o dimensión $m_i \times n_j$

SUMA DE MATRICES PARTICIONADAS:

Sean A y B 2 matrices de la misma dimensión y PARTICIONADAS DE LA MISMA FORMA ⇒

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & \dots & A_{1t} + B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \dots & A_{st} + B_{st} \end{bmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES PARTICIONADAS

Sabemos que si:

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

Si cada elemento de la matriz A y B son SUBMATRICES. ESTAS SE TIENEN QUE VOLVER A MULTIPLICAR MATRICIALMENTE

↳ CADA SUBMATRIZ de COLUMNA i de MATRIZ A TIENE que SER CONFORMABLE PARA LA MULTIPLICACIÓN CON CADA UNA DE LAS SUBMATRICES DE LA FILA i de MATRIZ B.

DETERMINANTE DE MATRIZ PARTICIONADA

: se calcula igual al de una matriz común y corriente.

→ como la submatrices son de MENOR ORDEN QUE LA MATRIZ ORIGINAL → + FÁCIL CALCULAR EL determinante EN FC. DE LAS SUBMATRICES.

Ejm:

SEA $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ → matriz particionada diagonal

↳ $|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{12}|$

Sea $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$

$= |A_{22}| \cdot |A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$

INVERSA DE MATRICES PARTICIONADAS.

Ejm: SEA $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$

↳ $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

SEA $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}(I + A_{12}F^{-1}A_{21}A_{11})^{-1} & -F^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ -A_{11}^{-1}A_{12}F^{-1} & F^{-1} \end{bmatrix}$$

con $F = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12})$

PATRICIA LENGUA LAFOSSE
ECONOMETRÍA 1.

DISTRIBUCIÓN NORMAL

UNIVARIADA : $x \sim N(\mu, \theta^2)$ CON FC. DE DENSIDAD :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\theta^2}(x-\mu)^2 \right\}$$

→ $E(x) = \mu$
$V(x) = \theta^2$

→ Es simétrica respecto a su media, μ.

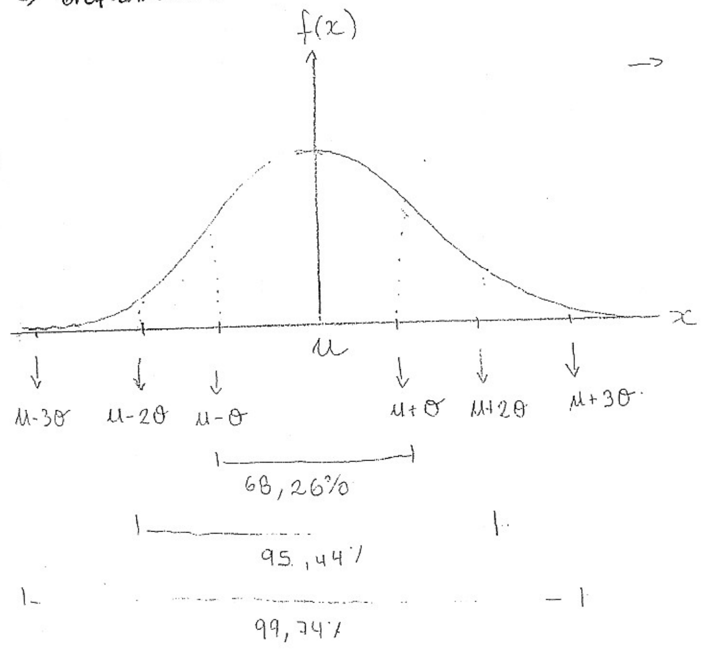
→ Si $x \sim N(\mu, \theta^2)$ e $y = ax + b$, donde a y b son #'s reales CONSTANTES ⟹

$$E(y) = aE(x) + b = a\mu + b$$
$$V(y) = a^2 V(x) = a^2\theta^2$$
→ $\boxed{y \sim N(a\mu + b, a^2\theta^2)}$

→ **DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR** : ES LA DISTRIBUCIÓN NORMAL CON LOS PARÁMETROS $\mu = 0$ y $\theta^2 = 1$. $x \sim N(0,1)$ con FC. de DENSIDAD :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}$$

→ GRÁFICAMENTE



→ fc. de densidad de $x \sim N(\mu, \theta^2)$

← APROXIMACIONES.

EN EL INTERVALO :	SE ENCUENTRA COMPRENDIDA APROXIMADAMENTE EL ___ % DE LA DISTRIBUCIÓN.
$[\mu - \theta, \mu + \theta]$	68,26%
$[\mu - 2\theta, \mu + 2\theta]$	95.44%
$[\mu - 3\theta, \mu + 3\theta]$	99.74%

MULTIVARIADA

Sea $X = (x_1, x_2, x_3, \dots x_T)'$ un vector aleatorio, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T)'$ un vector real y Σ una matriz simétrica definida positiva de orden $T \times T$.

$X \sim N(\mu, \Sigma)$ con fc. de densidad:

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{T/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (X-\mu)' \Sigma^{-1} (X-\mu)\right\}$$

donde $|\Sigma|$ es el determinante de Σ con $\Sigma = [\operatorname{cov}[x_i, x_j]]$ con $i, j = 1, 2, \dots, T$

matriz de varianza - covarianza

$\rightarrow E[X] = \mu \quad VAR[X] = \Sigma$

Distribución Chi-cuadrado (χ^2)

- Si z_i son variables aleatoria normales estándar e independientes, la variable aleatoria $x = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_k^2$ tiene distribución χ^2 con k grados de libertad.

$\rightarrow$ Si $z_i \sim N(0,1)$ para $i = 1, 2, \dots, k \Rightarrow x = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_k^2 \sim \chi^2_{(k)}$

- $E[x] = k \qquad Var[x] = 2k$

- La distribución χ^2 es un caso especial de la distribución Gamma.
- Fc. de densidad:

$$f(x,k) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} \cdot e^{-x/2} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

con $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$
fc. gamma $\quad$ α es entero

- Cuando k es suficientemente grande, como consecuencia del "teorema del límite central" puede aproximarse por una distribución normal.

Distribución t-student

- Si $Z \sim N(0,1)$
  $V \sim \chi^2(K)$
  y Z y V son independientes $\Rightarrow$ LA VARIABLE ALEATORIA $x = \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{V}{K}}}$ tiene distribución t-student con K GRADOS DE LIBERTAD

$\therefore x \sim t(K)$.

$\rightarrow E(x) = 0$ para $K > 1$ e INDEFINIDA PARA OTROS VALORES

$\rightarrow VAR(x) = \dfrac{K}{K-2}$ para $K > 2$ e INDEFINIDA PARA OTROS VALORES

$\rightarrow$ Fc. de DENSIDAD: $\dfrac{\Gamma((K+1)/2)}{\sqrt{K.\pi}\;\Gamma(K/2)} \cdot \left(1 + \dfrac{x^2}{K}\right)^{-(K+1)/2}$

Distribución F

- Si $Z_1 \sim \chi^2(K_1)$ de K_1 grados de libertad
  $Z_2 \sim \chi^2(K_2)$ de K_2 grados DE LIBERTAD.
  y Z_1 y Z_2 SON INDEPENDIENTES $\Rightarrow$ LA VARIABLE ALEATORIA $x = \dfrac{Z_1 / K_1}{Z_2 / K_2}$ tiene distribución F

$\therefore x \sim F(K_1, K_2)$ grados de libertad

$\rightarrow E(x) = \dfrac{K_2}{K_2 - 2}$ para $K_2 > 2$

$\rightarrow VAR(x) = \dfrac{2 K_2^2 (K_1 + K_2 - 2)}{K_1 (K_2 - 2)^2 \cdot (K_2 - 4)}$ para $K_2 > 4$