

PRESENTACION

La econometría como disciplina que forma parte de las matemáticas aplicadas, al utilizar conceptos matemáticos y estadísticos en la economía, ha resultado de gran utilidad para estos profesionistas en el estudio que suelen hacer sobre el comportamiento actual y futuro de los fenómenos económicos, así como para identificar y cuantificar las relaciones estructurales que éstos mantienen entre sí, al igual que para expresar matemáticamente sus teorías y para verificarlas con el instrumental que les proporciona la estadística.

Así, este trabajo integra en forma sistematizada los conocimientos básicos sobre esta disciplina; de manera didáctica describe los conceptos teóricos y la aplicación de las **técnicas** mediante las cuales es posible:

1. Realizar el análisis estructural de las relaciones entre variables independientes y dependientes;
2. Estimar a partir de información histórica la evolución futura de ciertas variables;
3. Hacer planeación micro y macroeconómica; y
4. Evaluar la aplicación de políticas fiscales, de ingreso, monetarias, etc.

Como se indicó, dichas técnicas se aplican en la presentación matemática y en la verificación de cierta teoría económica, ya que mediante el análisis funcional se establecen las relaciones entre un fenómeno y las causas que hipotéticamente lo determinan, relaciones que posteriormente se comprueban, preferentemente, mediante el uso de los métodos de la estadística inferencial. Una vez que se comprueba que existen estas relaciones, se puede decir que se está en condiciones de estimar el comportamiento futuro del fenómeno.

Este acervo de conocimientos es de gran utilidad para el ejercicio profesional de los economistas, que pueden constatar la veracidad y comportamiento futuro de las variables micro y macro económicas. Debido a ello he puesto gran cuidado en la elaboración de este libro, en su presentación y exposición didáctica, en la descripción de su alcance, de sus limitaciones y, por consiguiente, en el uso concreto que tiene en determinadas situaciones.

Con este enfoque estimo que esta obra debe ser parte de la bibliografía básica que deben consultar los estudiantes y profesionales de la economía. Pienso que su consulta le permitiría a los primeros aprender los conceptos fundamentales de la econometría y, a los segundos, ratificar, refrescar y enriquecer los conocimientos suficientes para hacerlos competitivos en el mundo globalizado que nos ha tocado vivir, donde la constante es el cambio y la competencia entre las personas.

Idealmente está escrito para autodidactas, sería una gran satisfacción alcanzar este objetivo; si no lo logro, pido disculpas y prometo perseverar en el mismo en un futuro próximo.

Finalmente, aprovecho para agradecer a los profesores Alberto Reyes de la Rosa y Ekatherina Peregrina, que participaron activamente en la captura, presentación y revisión meticulosa de los ejemplos numéricos, en particular al profesor Alberto Reyes de la Rosa por la incorporación de materiales interesantes de otros autores y por su participación en la interpretación de los resultados y en el análisis de congruencia que deben guardar entre si los conceptos, así como en el diseño de casos en los que se ilustra la aplicación de los conocimientos econométricos básicos. La anterior ha permitido que el libro cuente con un mejor formato, que su lectura garantice la transmisión correcta del conocimiento, que se exponga con sencillez y sin perder el rigor técnico, es decir, que sea útil para el ejercicio docente, profesional y de investigación.

Doctor Genaro Sánchez Barajas

I. INTRODUCCIÓN A LA ECONOMETRÍA

I.1 Definición

Econometría es la disciplina que en el ámbito económico mide las relaciones que existen entre un fenómeno bajo estudio y las variables que lo explican. La medición se hace con el instrumental matemático y las relaciones se verifican, generalmente, con las técnicas de la estadística inferencial.

El fenómeno económico se estudia a través de la observación y su comportamiento, se registra preferentemente con datos cuantitativos (en ocasiones con cualitativos, expresados a través de variables llamadas categóricas, dicotómicas, ficticios o dummy). La matemática permite expresar su comportamiento a través de ecuaciones que pretenden describir determinada teoría económica, misma que en turno permite a la estadística indicar si es o no verídica. Así, una vez que se expresa la teoría económica en forma *uniecuacional* o *multiecuacional*, la estadística proporciona los métodos para corroborar si se prueba o no con rigor técnico.

I.2 Propósito¹

Con base en la definición, puede decirse que la econometría tiene tres propósitos fundamentales:

1. Hacer el análisis estructural de las relaciones económicas.
2. Predecir a partir de valores observados o históricos de ciertas variables económicas, su evolución futura.
3. Evaluar la aplicación de políticas microeconómicas (a nivel de empresa) y/o macroeconómicas (a nivel de los grandes agregados de un país).

I.3. Evolución y perspectivas de la econometría

Algunos estudiosos como G.S. Maddala (1996:2) comentan que en opinión de Stigler en 1699 se identifica a Charles Devenant como pionero en el área, puesto que hizo y publicó ese año *el primer programa de demanda empírica*; otros consideran que su origen está en los trabajos realizados en dicho siglo XVII por Sir William Petty, quien escribió en 1676 y luego publicó en 1690 su obra la *aritmética política* o más recientemente, en 1758, con la *Tableau Économique* elaborada por el célebre médico francés Francois Quesney. En opinión de Julián Pérez (1998) han existido las siguientes etapas evolutivas:

- i). Etapa I: Antecedentes, que comprende desde las primeras expresiones económicas a través de las matemáticas, hasta 1914.
- ii). Etapa II. Desarrollos iniciales; abarca desde la publicación de H. Moore de *Economic Cycles: Their law and causes*, obra que muchos especialistas catalogan como el primer trabajo econométrico formal, digamos hasta 1930.
- iii). Etapa III. Formalización. Se le llama así porque el 29 de diciembre de 1930 se fundó la *Econometric Society* en la ciudad norteamericana de Cleveland, a iniciativa de Charles Roos Ragnar Frisc y Irving Fisher; esta etapa llega hasta 1950.

iv). Etapa IV. Extensión, va desde la publicación de la monografía número diez de la Cowles Comisión, en la cual se presentan las normas básicas de la investigación econométrica, etapa que se prolongó hasta 1979.

v. Etapa V. Diversidad de enfoques, la cual se inicia con la publicación del Time Series Análisis de Box & Jenkins, que brinda un nuevo enfoque (modelos univariantes de series temporales, conocidos como modelos ARIMA) para explicar mejor (ya que los distintos modelos clásicos empezaron a fallar sistemáticamente en sus predicciones) el comportamiento y relación de las variables económicas en un sistema económico internacional agobiado por la crisis petrolera, el abandono del patrón oro y el cambio del flujo financiero que ocasionaron altos niveles de inflación y desempleo en economías completamente desestabilizadas.

Señala Julián Pérez que “en este contexto surgieron múltiples críticas a la modelización tradicional, representada por los grandes modelos macroeconómicos de ecuaciones simultáneas, que sirvieron como incentivo para el desarrollo de contrastes nuevos, especificaciones alternativas, y técnicas nuevas para abordar el análisis económico aplicado. Esta diversidad de planteamientos constituye el segundo de los factores diferenciadores que delimitan esta última etapa de la historia econométrica.

En los umbrales del siglo XXI, el instrumental teórico sobre análisis econométrico ha sido fortalecido por un desarrollo exponencial de las tecnologías informáticas, las cuales han aportado poderosas herramientas computacionales que han permitido el uso de sistemas de resolución muy complejos en periodos muy cortos. Asimismo, los lenguajes de programación “amigables” han facilitado a los investigadores la posibilidad de generar sus propias herramientas de computo, lo que ha diversificado enormemente las posibilidades de aplicación teórica.”

Finalmente es interesante indicar que dentro de la econometría moderna, en opinión de los profesores Luis Miguel Galindo y Horacio Catalán (2003) en la actualidad se analizan profusamente las propiedades estadísticas de las series utilizadas en el análisis económico, mediante el estudio de los temas de cointegración y de raíces unitarias, cuyo origen se localiza en los modelos ARIMA y en el concepto de regresión espúrea (Granger & Newbold, 1974), así como también la relación entre la estructura temporal de las series de tiempo (dinámica de corto plazo) y la presencia de un mecanismo de corrección de errores que captura las relaciones de largo plazo (Davidson, Hendry, Srba y Yeo, 1978).

Estos son los conocimientos frontera en el nuevo estado del arte econométrico, mismas bases que norman el contenido del curso sobre introducción a la econometría.

1.4 Los modelos macroeconómicos más conocidos

1.4.1. Norteamericanos,

Se dice que en 1998 apareció publicado al mismo tiempo que se inauguró un sitio en Internet gratuito con la versión electrónica, el MME para la economía de EEUU con el nombre de US Model, de Ray Fair, profesor de la universidad de Yale. Entre otras aplicaciones, es útil como simulador al contener información para crear escenarios en sectores claves como: los hogares, las empresas, el sector financiero, el sector gobierno federal, el sector gobierno local, y el sector externo.

1.4.2. Los españoles

Destacan el modelo Wharton –Universidad Autónoma de Madrid, (WUAM), que existe desde 1981. También, el Modelo de investigación y simulación de la economía española (MOISSES) y, el que se publicó en 1994, intitulado: “Modelo de Aproximación Trimestral, MAT.

1.4.3. Los de México

Cronológicamente el que primero se conoció fue el Modelo UNAM de Ibarra (Ibarra, 1970), le siguieron el modelo de Clavijo (1976), el modelo de planeación hacendaria (1979), el modelo de Ruffat, versión modificada del modelo de Beltrán (1981), el modelo Galileo (1983), el modelo MODEM del CIDE (1984), el modelo Aspe-Jarques (1985), el modelo Amiela-Huerta (1985), el modelo Ricardo Lago (1991) y el modelo Eudoxio (1995).

1.5. Conceptos básicos

Al ser la econometría la disciplina que expresa una teoría económica a través de las matemáticas y de verificarse con métodos estadísticos, es conveniente señalar que la expresión matemática adopta la forma de modelos.

Al respecto, un modelo es una representación simplificada de la realidad expresada a través de símbolos matemáticos (José Hernández, 1992:17). Cuando el modelo se relaciona con la economía, se habla de modelos económicos, que son representaciones simplificadas de cierto conjunto de relaciones económicas. Dentro de estos destacan los modelos econométricos, que se definen como modelos económicos que contienen las especificaciones necesarias para su aplicación empírica, es decir los modelos econométricos constituyen el marco dentro del cual se desenvuelven las investigaciones econométricas. Para su formulación se requiere metodológicamente de las siguientes etapas de trabajo:

- 1.- Evolución de la teoría o hipótesis.
- 2.- Especificaciones: es la exposición de la teoría económica con símbolos matemáticos, es decir, la definición del modelo econométrico dirigido a probar la teoría económica.
- 3.– Estimación: la determinación del valor numérico de los parámetros del modelo.
- 4.- Verificación: Es la aceptación o el rechazo de la teoría económica mediante el método de pruebas de hipótesis estadísticas.
- 5.- Predicción: Se evalúan relaciones estructurales y futuros resultados con base en el modelo establecido.
- 6.- Utilización del modelo para fines de control, formulación o evaluación de políticas.

1.- ESPECIFICACION

Ursicino Carrascal (2001) señala que el proceso de construcción de un modelo econométrico se inicia con la especificación de la relación a estimar y la formulación de un conjunto de hipótesis. Este procedimiento inicial que requiere selecciones entre distintas alternativas puede incurrir, sin embargo en errores. Por ello es conveniente someter al modelo elaborado y estimado a diversas pruebas estadísticas que permitan comprobar su validez y calidad antes de utilizarlo en el trabajo empírico. De ahí que se diga que un modelo se especifica cuando se definen las siguientes:

a) Variables:

Endógenas: son las que explican el modelo y cuyo valor se determina dentro del mismo.

Exógenas: son aquellas cuyos valores no los determina el modelo, son independientes, por consiguiente, influyen en el mismo pero no son influenciadas por el resto de las variables del modelo.

Retardadas: son aquellas cuyos valores corresponden a momentos, años o periodos de tiempo pasado que influyen en las variables endógenas del presente; pueden ser endógenas o exógenas.

Predeterminadas: son variables exógenas mas endógenas retardadas.

Ficticias: Se usan para hacer análisis con variables cualitativas.

Perturbación aleatoria: Es una variable aleatoria cuya inclusión se debe al hecho de que las relaciones económicas no se cumplen exactamente. Dicha inclusión, que confiere a los modelos el carácter estocástico, se justifica por las siguientes razones no excluyentes:

1.- Resumen de la influencia conjunta de las variables exógenas, que, por tener poca importancia, no son incluidas en el modelo de forma independiente.

2.- Recogen los errores de medida en la observación de las variables.

3.- Recogen la aleatoriedad inherente al comportamiento humano.

Dicotómicas (ficticias, dummy y categóricas) son las variables cualitativas del modelo, expresan atributos, genero, raza, idioma etc.

b).- Parámetros:

Son coeficientes que acompañan a las variables en el modelo. Son magnitudes que permanecen constantes dentro de un fenómeno concreto y que, por esta razón, reciben el nombre de **parámetros estructurales**. En la teoría económica suelen tener **ciertas restricciones para que ésta** se cumpla, por ejemplo el signo para indicar que se cumple o no cierta relación entre las variables dependiente e independiente.

c) Ecuaciones.

Son relaciones matemáticas con las que se trata de expresar la forma en que aparecen relacionadas las variables y los parámetros que componen el modelo. Matemáticamente se clasifican así:

Lineales: Cuando la forma funcional es lineal.

No lineales: Cuando la ecuación es de cualquier otro tipo.

Desde el punto de vista económico, las ecuaciones se clasifican en :

De comportamiento: Recogen las acciones de los sujetos económicos.

Institucionales: Describen los efectos de orden jurídico, social y de la política económica sobre el fenómeno en estudio.

Estructurales: Describen la composición del fenómeno bajo estudio.

Identidad: Son las ecuaciones que expresan relaciones contables o identidades entre magnitudes económicas.

d).- Datos:

Los datos de las variables pueden corresponder a valores de una variable en el tiempo: series de tiempo, o a valores para diferentes individuos, grupos u objetos en un momento dado, llamados de corte transversal y que generalmente provienen de las encuestas.

e).- Clasificación o tipo de modelos:

Pueden clasificarse de diversas maneras, las más comunes son:

i). Por el número de ecuaciones, es decir, pueden ser uniecuacionales o multiecuacionales, todo depende del número de ecuaciones con que se constituyan.

ii). Por la forma de sus ecuaciones, pueden ser lineales cuando sus ecuaciones lo son, no lineales si alguna no lo es.

iii). Por la relación entre el número de ecuaciones y el número de variables endógenas, se dice que es completo cuando coincide el número de ambas; es incompleto, cuando difiere dicho número.

iv). Por el momento del tiempo a que se refieren sus valores: son estáticos o dinámicos. En el primer caso todas las variables están referidas al mismo instante de tiempo; en el segundo, cuando dentro del modelo se incorpora alguna variable retardada.

2.- ESTIMACIÓN

CONDICIONES TÉCNICAS PARA LA CONSTRUCCIÓN Y OPERACIÓN DE MODELOS

Modelo lineal simple: uniecuacional

1.- Presentación:

Como señala el profesor José Hernández Alonso (op. cit., 33), la relación económica más sencilla es la que se establece entre dos variables X e Y mediante una ecuación lineal ESTRUCTURAL como la siguiente:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$$

Donde:

Y_i : variable endógena, explicada o dependiente;

X_i : variable exógena, explicativa o independiente;

μ_i : perturbación aleatoria o explicación de los efectos que no explica X_i sobre \hat{Y}_i ;

α y β : parámetros desconocidos cuyo valor es necesario determinar (estimar).

El *propósito* de la econometría es estimar valores estructurales (de α y β) a partir de una serie de observaciones o datos muestrales de las variables Y_i , X_i con $i=1,2,3,\dots,n$, mediante la solución de un “sistema de ecuaciones normales”, que permite calcular las incógnitas del sistema, es decir, conocer los valores de los parámetros propuestos por la relación $Y=f(X)$.

Dicho modelo (Ursicino, 2001) se fundamenta en ***el cumplimiento de las siguientes hipótesis o supuestos clásicos***:

1. Implícitas en la especificación de la ecuación del modelo está la linealidad de la relación y la constancia de los parámetros.
2. No existen relaciones lineales exactas entre las variables explicativas o regresoras, además de que estas no son variables aleatorias.
3. Existe linealidad exacta entre las variables solo cuando la variable independiente esta elevada a la potencia 1 (Gujarati, 1990:32) y se excluyen términos como x^2 , $\sqrt{x^2}$ entre otros. De las dos interpretaciones de linealidad la de los parámetros es la más importante en la teoría de la regresión y significa que los parámetros están elevados a la primera potencia.
4. Las perturbaciones aleatorias son variables (aleatorias o estocásticas) independientes e igualmente distribuidas normales de media cero y cierta varianza.
5. No existe autocorrelación (son independientes) entre si las perturbaciones aleatorias. μ_i
6. Todas las perturbaciones aleatorias tienen igual varianza, i.e., hay homocedasticidad, de las μ_i .
7. Existe cero covarianza (cov) entre la variable explicativa (X_i) y la variable o perturbación aleatoria (μ_i), es decir, no están correlacionadas, de manera que su significancia en la variable dependiente (Y_i) es separada y aditiva. Cuando X e μ_i están correlacionadas (positiva o negativamente) es difícil aislar la influencia individual de X_i y de μ_i sobre Y_i (Gujarati, 1990:59). Esta hipótesis 7 se cumple cuando Y_i no es una variable aleatoria (ver hipótesis 2), en cuyo caso $Cov(X_i, \mu_i)=0$.

Al respecto, conviene recordar que una perturbación aleatoria o variable estocástica es aquella que toma cualquier valor en un conjunto de números positivos o negativos, con una probabilidad dada.

U proceso estocástico es aquel que genera resultados en un experimento, cada uno de ellos con una probabilidad de ocurrencia. En economía puede ser la producción diaria de tornillos, de ladrillos; el ingreso de las personas en un mes, etc. donde cada uno de ellos toma una probabilidad de ocurrencia.

Esperanza matemática o valor esperado es el valor medio o promedio de una población (que pueden ser los resultados estocásticos que genera el experimento).

Así, en el lanzamiento de un dado que tiene 6 caras: 1,2,3,4,5, y 6, si hacemos el experimento de lanzar el dado una vez, genera un proceso estocástico, cuya variable aleatoria será aquella que tome los valores de las caras: 1,2,3,4,5, y 6 y cuya probabilidad de ocurrencia de c/u será $P=1/6$, luego si X =cara o resultado posible; E =(Esperanza matemática); P (Probabilidad)

$$E(x_i) = \frac{1}{6}(1) + \frac{1}{6}(2) + \frac{1}{6}(3) + \frac{1}{6}(4) + \frac{1}{6}(5) + \frac{1}{6}(6)$$

$$E(x_i) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

$E(x_i)=3.5$ que aunque no existe, aun así es el valor esperado en el experimento.

8. El modelo está bien especificado.

En econometría la relación lineal simple entre dos variables se denomina *modelo lineal simple*, MLS.

La estimación puntual de los parámetros poblacionales α y β se hace por el *método de mínimos cuadrados* que minimiza la suma de los cuadrados de los residuos, $\sum e_i^2$ y que garantiza ciertas *propiedades* estadísticas de los estimadores a y b , de los parámetros α y β , que aseguran la confiabilidad del proceso de inferencia (a partir de una muestra se estiman o infieren los valores de los estimadores de los parámetros). Se supone que las **propiedades de los estimadores** así obtenidos son: que son lineales, insesgados, óptimos, suficientes, consistentes y eficientes.

Así, la ecuación de regresión, que toma valores de una muestra de valores de Y_i e X_i es :

$$\hat{Y} = a + bX + e_i \quad \text{donde:}$$

a es estimador de α

b es estimador de β

\hat{Y} es estimador de Y

e_i es el estimador de μ_i

El método de mínimos cuadrados, basado en los mínimos cuadrados ordinarios, MCO, minimiza $\sum e_i^2$ puesto que $e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - a - bX_i$. Aplicando las condiciones de minimización, se deduce el “sistema de ecuaciones normales”:

$$\sum y = na + b\sum x \quad (1)$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 \quad (2)$$

cuya resolución permite obtener los valores de las incógnitas a y b

2. Representatividad del modelo descriptivo

En estadística descriptiva se utilizan dos medidas de dispersión para conocer el grado de aproximación (capacidad descriptiva) de la ecuación de regresión

$\hat{Y} = a + bX + e_i$, (que proviene de una muestra) de los valores de los parámetros α y β . Una es la varianza de los residuos, medida de dispersión *absoluta*, y otra es el coeficiente de determinación, medida de dispersión *relativa*.

2.2 Confiabilidad de los estimadores de los parámetros

La estimación puntual de los parámetros *estructurales* del modelo: α y β , dada por a y b , respectivamente, que provienen de una muestra, se supone que son dos valores numéricos que pueden provenir de muestras distintas disponibles dentro del marco muestral y cuyo *número*, de éstas últimas, depende de su selección de acuerdo con la aplicación del método con o sin reemplazo. Así según la muestra utilizada, es el valor que se obtiene para a y b . Para tener una idea de las oscilaciones que pueden producirse en sus valores al pasarse de una muestra u otra, se calculan las varianzas de estos dos estimadores: a y b .

3.- Verificación de la teoría económica

Para ello se realiza la prueba de hipótesis sobre la significación estadística de los parámetros, en cuyo cálculo intervienen su varianzas y otras medidas estadísticas que se presentarán y usarán en la medida que se vaya avanzando en el curso de econometría.

4.- Predicción

Una vez obtenida la ecuación de regresión, que se ha verificado la calidad de sus estimadores y comprobado que describe apropiadamente la teoría económica, el investigador está en condiciones de visualizar el futuro (hacer planeación) aplicando el modelo uniecuacional (o multiecuacional) en la proyección de los valores, digamos necesarios para construir escenarios económicos futuros de su interés. He aquí el uso y alcance de los conocimientos básicos de la econometría.

II. CONCEPTOS Y EJERCICIOS PARA REFRESCAR O ACTUALIZAR LOS CONOCIMIENTOS NECESARIOS PARA CONSTRUIR MODELOS^{2 y 3}

II.1 Conjuntos y números reales

Definición de conjunto: de manera sencilla diremos que un conjunto es un grupo de objetos; digamos, podemos decir que los números pares entre 3 y 15 es un conjunto, los cuales son 4,6,8,10,12,14, donde a cada uno de estos números se le llama miembro o elemento del conjunto.

Un conjunto se especifica listando sus miembros, en cualquier orden, dentro de llaves. El conjunto anterior se pone así: $\{4,6,8,10,12,14\}$, mismo que podemos identificar con la letra A. Así, decimos por ejemplo que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B \Leftrightarrow todos los elementos de A también son elementos de B. Si $A = \{6,8,10\}$ y $B = \{4,6,8,10,12,14\}$, entonces A es un subconjunto de B.

Ahora bien, ciertos conjuntos de números tienen nombres especiales. Los números 1,2,3,4,5, ...,etc. forman el **conjunto de los enteros positivos o números naturales** $= \{1,2,3,\dots\}$.

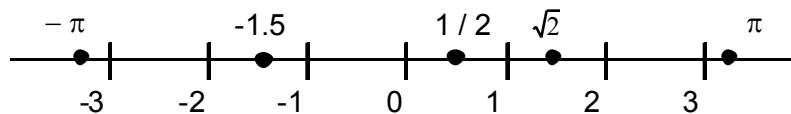
Los puntos suspensivos indican que la lista de elementos no tienen fin, aun cuando sabemos cuales son los elementos del conjunto. Por otra parte, los enteros positivos junto con el cero y los enteros negativos $-1,-2,-3,-4,\dots$ forman el conjunto de los enteros $= \{\dots,-4,-3,-2,1,0,1,2,3,4,\dots\}$.

Igualmente, el conjunto de los *números racionales*, consiste en números como $1/2$ y $1/8$, que se pueden escribir como una razón (cociente) de dos enteros, es decir, un número racional es aquel que puede escribirse como p/q , donde p y q son enteros y $q \neq 0$ ya que no se puede dividir entre cero. Los números $17/19$, $-3/8$ y $-5/-3$ son racionales; el entero 3 es racional ya que $3 = 3/1$. Todos los enteros son racionales.

Los números racionales se pueden representar mediante números **decimales conmensurables** (con un número definido de cifras), tales como $3/4 = 0.75$ y $3/2 = 1.5$ o mediante **decimales inconmensurables periódicos** (con un grupo de dígitos que se repiten indefinidamente), tales como $2/3 = 0.6666\dots$, $-4/11 = 0.3636\dots$, y digamos $2/15 = 0.13333\dots$,

También, los números que se representan mediante **decimales inconmensurables no periódicos se llaman números irracionales**. Un número irracional no se puede escribir como un entero dividido entre otro entero. Los números $\pi = 3.1416$ y $\sqrt{2}$ son irracionales.

Los dos, tanto los números racionales como los números irracionales forman el **conjunto de los números reales**. Estos números pueden representarse mediante puntos en una recta y se les llaman **coordenadas**. Ejemplo:



II.2 Ecuaciones

Significado: una ecuación es un planteamiento que señala que *dos expresiones son iguales*: Cada una de las *expresiones se llama lado o miembro* y están separadas por el signo de igualdad (=).

Ejemplos de ecuaciones:

a).- $x+2=3$; b).- $y/y-5=7$; c).- $w=7-z$; d).- $x^2 + 3x+2=0$

Vemos que cada ecuación contiene cuando menos una **variable**, donde ésta se representa generalmente (pero no necesariamente) por las letras finales del alfabeto latino y se **define** como aquella literal que puede tomar cualquier valor dentro de un dominio o rango que se especifica previamente.

Decimos que las ecuaciones a) y b) son ecuaciones en las variables x y y , respectivamente. La ecuación c) se da en las variables w y z : En la ecuación a) $x+2=3$, se les llama **constantes** a los números 2y 3 por que su valor es fijo.

Es importante decir que una ecuación *siempre debe estar definida*; es decir, nunca se permite que una variable tenga un valor para el cual cualquier *expresión* de la ecuación resulta indefinida. Así, en el caso de la ecuación $y/(y-5)=7$, la y no puede ser 5 por que provocaría que el denominador fuera 0.

Por otra parte, se *entiende por resolver una ecuación*, el encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación se verifica; a estos valores los llamamos **soluciones de la ecuación** y decimos que la satisfacen.

Cuando una letra representa un número o cantidad *desconocida* en una ecuación se le denomina **incógnita**. Así, en la ecuación a).- $x+2=3$, la variable x es la incógnita; sólo el valor 1 para x satisface la ecuación. A esta solución se le llama **raíz** y cómo es una sola solución escribimos [1]. En c) $w=7-z$ es una ecuación con dos incógnitas: w y z . Una solución es el par de valores: $w=4$ y $z=3$; no obstante, existe una cantidad infinita de soluciones; igualmente, en d). $x^2 + 3x+2=0$, la raíz o solución es -2 por que al sustituir x por -2 se verifica la ecuación: $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$

Derivado de lo anterior (con base en las soluciones encontradas) también podemos decir que una ecuación es un conjunto de restricciones impuestas a cualquiera de las variables que la integran.

Finalmente, es conveniente decir que una ecuación debe resolverse para las incógnitas; dichas soluciones son los valores encontrados para las variables que, al sustituirlos en lugar de la incógnita, satisfacen la ecuación.

Ecuación lineal

Una ecuación lineal en la variable x puede escribirse así:

$$Ax+b=0$$

Donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

También se le denomina de *primer grado* por que el exponente o mayor potencia de la variable x es uno.

Ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática en la variable x podemos escribirla de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

es de segundo grado dado que el exponente máximo de la variable x es dos.

En general podemos decir que, por ejemplo:

$3x + 4 = 0$, es una ecuación lineal de primer grado;

$X^2 + X + 12 = 0$, es una ecuación cuadrática de segundo grado cuya curva se llama parábola.

$X^3 - X = 0$, es una ecuación cúbica de tercer grado; y

$X^n = 0$, es una ecuación de grado n -ésimo.

II.2. 1. Solución de ecuaciones

Dado que por definición todas las ecuaciones expresan una *igualdad* del lado izquierdo con el lado derecho, todas las operaciones en uno de los lados, también deben realizarse del otro lado para que se mantenga la *igualdad*. Cualquier número puede sumarse o sustraerse de un lado de la ecuación, siempre y cuando el mismo número sea agregado o restado del otro lado.

Simultáneamente ambos lados pueden multiplicarse o dividirse por el mismo número, ser elevados a la misma potencia o sacarles la raíz cuadrada a ambos lados. Cuando se resuelven las ecuaciones se debe tener cuidado con la remoción de los paréntesis y de las fracciones.

Solución de ecuaciones lineales

a).- si tenemos $3-5(2X-1)(X-3) = 43-10X^2$

$$\begin{aligned}\text{resolvemos } 3-5(2X^2-5X-3) &= 43-10X^2 \\ 3-10X^2+25X+15 &= 43-10X^2 \\ 25X &= 25 \\ X &= 1\end{aligned}$$

b).- Sea $5X-6=3X$, si sumamos $-3X$ en los dos lados

$$\begin{aligned}5X-6+(-3X) &= 3X+(-3X) \\ 2X-6 &= 0 \\ X &= 3\end{aligned}$$

c).- Digamos que $2(p+4) = 7p+2$

$$\begin{aligned}2p+8 &= 7p+2 \\ 2p &= 7p+2-8 \\ -7p+2p &= -6 \\ -5p &= -6 \\ p &= -6/-5 \\ p &= 6/5\end{aligned}$$

d).- Si decimos que la ecuación $S = P + Prt$ es la fórmula para el valor S de una inversión de un capital P a una tasa de interés ^{anual} simple (r) durante un periodo de (t) años, entonces, si queremos conocer el capital, despejamos P así:

$$S = P + Prt$$

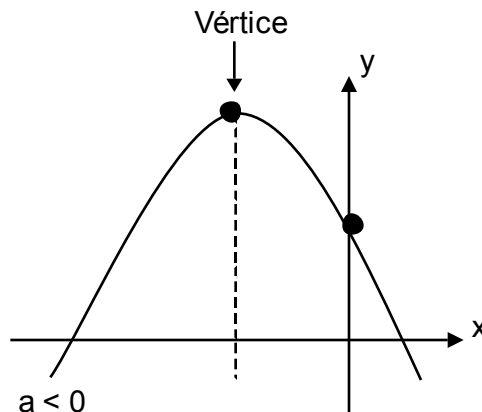
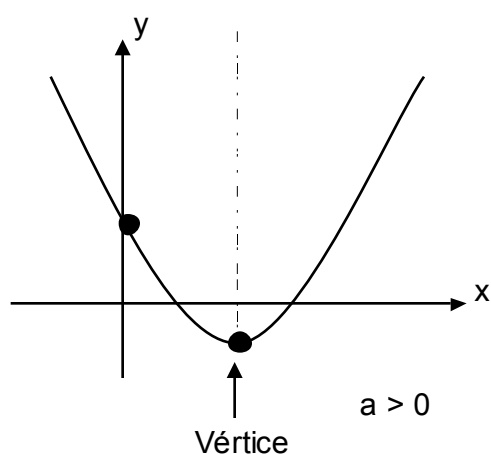
$$S = P(1 + rt)$$

$$P = S / 1 + rt$$

Solución de una ecuación cuadrática⁽³⁾

La gráfica o curva de la función cuadrática $Y = f(X) = ax^2 + bx + c = 0$ se denomina parábola, misma que tiene las siguientes características.

- 1.- Cuando a es mayor que 0, la curva abre hacia arriba;
- 2.- Cuando a es menor que 0, la curva abre hacia abajo;
- 3.- El vértice es $(-b/2a, f(-b/2a))$
- 4.- La ordenada en el origen (intercepción) Y^0 es c .



El punto en que la parábola $Y = ax^2 + bx + c$ intercepta el eje Y , es el de la ordenada en el origen y se obtiene cuando damos a x el valor de 0. O sea que las coordenadas de la intercepción con el eje Y , son $(0, c)$.

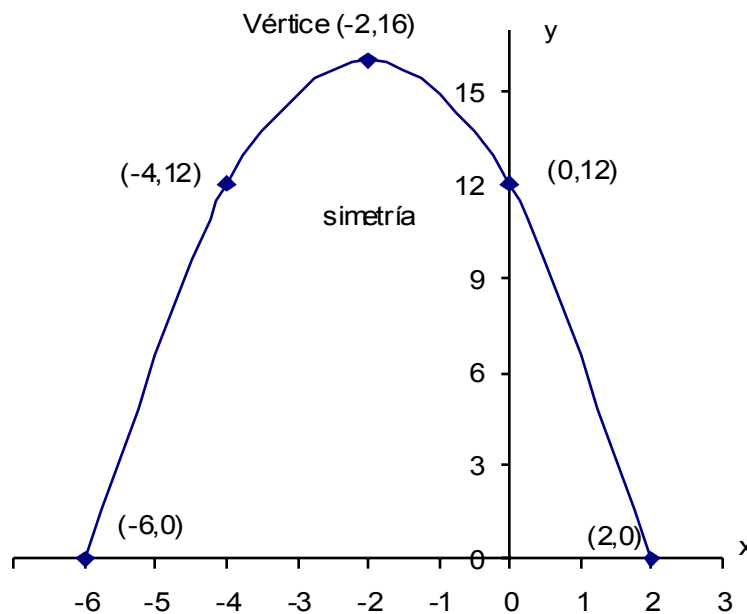
Así, si la ecuación cuadrática es $Y = f(x) = ax^2 + bx + c$ sustituyendo en, $-x^2 - 4x + 12$, vemos que $a = -1$, $b = -4$ y $c = 12$. Puesto que a es menor que 0, la parábola abre hacia abajo. La coordenada X del vértice es $-b/2a = -(-4)/2(-1) = -2$. La coordenada Y es $f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) + 12 = 16$. Así, el vértice o punto más alto de la parábola es $(-2, 16)$. Como $c = 12$, la ordenada en el origen ($x=0$) es 12.

Para determinar las abscisas en el origen, se iguala Y a 0, es decir $Y = -x^2 - 4x + 12$ y con ello determinamos el valor de x :

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 - 4x + 12 \\ 0 &= -(x^2 + 4x - 12) \\ 0 &= -(x + 6)(x - 2) \end{aligned}$$

luego entonces $X_1 = -6$; también, $X_2 = 2$

Así tenemos el vértice en $(-2, 16)$, las intercepciones en $(-6, 0)$ y $(2, 0)$. Como el punto de intercepción al eje Y es $(0, 12)$ denominado *ordenada en el origen*, está a dos unidades a la derecha del vértice, $(-2, 16)$, existe un punto a la izquierda del mismo con igual ordenada $(-4, 12)$, con el que se obtiene la **simetría con respecto al vértice**.



Solución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática

En la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde a,b y c son constantes y a diferente de cero, entonces la fórmula es:

$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; nota, la b dentro del radical es al cuadrado, no pude poner el exponente.

a).- Resolver $4x^2 - 17x + 15 = 0$ aquí tenemos: $a = 4$; $b = -17$ y $c = 15$

luego $X = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(4)(15)}}{2(4)} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{8}$

las raíces son : $X_1 = \frac{17+7}{8} = \frac{24}{8} = 3$ y $X_2 = \frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

b).- $3x^2 - 5x = 2$
 $3x^2 - 5x - 2 = 0$ $a = 3$, $b = -5$ y $c = -2$

Así, $X = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$

Luego $X_1 = \frac{5+7}{6} = 2$ y $X_2 = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

Sistema de ecuaciones o ecuaciones simultáneas

Cuando una situación se describe en forma matemática, en ocasiones se expresa por medio de un conjunto de ecuaciones. Al respecto, es importante decir que un conjunto de ecuaciones simultáneas se puede resolver normalmente con álgebra **si el número de ecuaciones es igual al número de variables**. Así para resolver dos variables se requieren dos ecuaciones; generalizando, resolver para n variables, significa que se requieren n ecuaciones. Sin embargo en ocasiones aun cuando el número de ecuaciones es igual al número de variables no se encuentra su solución. Lo anterior se ilustra con los siguientes ejemplos:

Sistema de Ecuaciones Lineales

i).- **inconsistente** : $x - y = 2$ (1) el sistema es inconsistente por que es igual a 2 o 5 pero no
 $x - y = 5$ (2)

ii).- **Dependiente** : $2x + 3y = 6$ (1)
 $6x + 9y = 18$ (2) hay una relación o dependencia de 1 a 3 de la ecuación uno a la dos, o viceversa.

iii).- **Independientes y consistentes**:

$$\begin{aligned}x + y &= 5 \text{(1)} \\x - y &= 1 \text{(2)}\end{aligned}$$

Solo tienen solución los sistemas de ecuaciones que son ambas : independientes y consistentes, cuya solución puede ser por los métodos de **1.- eliminación ; 2.- sustitución y 3.- determinantes**.

1.- Por eliminación de una variable por adición o sustitución

$$\begin{aligned}5x + 2y &= -5 \text{(1)} \\-3x + 4y &= 29 \text{(2)}\end{aligned}$$

si multiplicamos (1) por 2 :

$$\begin{aligned}10x + 4y &= -10 \text{(1) por 2} \\-3x + 4y &= 29 \text{(2)}\end{aligned}$$

$$\text{solución } 13x + 0 = -39$$

$$x = -3$$

Comprobación:

Sustituimos (-3) por X en (1) y tenemos

$$\begin{aligned}5(-3) + 2y &= -5 \\-15 + 2y &= -5 \\y &= 5\end{aligned}$$

respuesta $X = -3$; $Y = 5$

2.- Por sustitución de una variable

$$\begin{array}{ll} \text{Ejemplo: } 3x - 4y = 5 & \dots\dots\dots(1) \\ X + 7y = 10 & \dots\dots\dots(2) \end{array}$$

De la segunda ecuación $x = 10 - 7y$, luego sustituyendo $(10 - 7y)$ por x en (1) tenemos:

$$3(10 - 7y) - 4y = 5 \dots\dots\dots(1)$$

$$30 - 21y - 4y = 5$$

$$30 - 25y = 5$$

$$30 - 5 = 25y$$

$$25 = 25y$$

$$y = 1$$

sustituimos 1 por y en (1) :

$$3x - 4(1) = 5$$

$$x = 3$$

respuesta $x = 3$; $y = 1$

3.- Por determinantes

Referencias: sabemos que una **matriz** se define como un arreglo rectangular de números y que una matriz cuadrada es aquella en que el número de “ renglones “ es igual al número de “ columnas “ :

A cada matriz cuadrada **A** corresponde un sólo valor conocido como su determinante $|A|$.

3.1.- Tipos de determinantes.

Determinante de segundo orden, se define como :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

vemos que el valor de $|A|$ está dado por la diferencia de dos productos cruzados. Con números

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4(3) - 5(1) = 7$$

determinante de tercer orden, se define en términos de determinante de segundo orden

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (0-5) - 5(-4+20) + 3(2-0) = -5+20 - 100 + 6 - 0 = -105 + 26$$

$$|A| = -79$$

En general decimos que un determinante de orden **n** se define en términos del determinante de orden (n-1).

Ejemplos:

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas para **X** e **Y**.

$$3x - 4y = 5$$

$$x + 7y = 10$$

$$X = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} \text{ entre } \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 35 - (-40) / 21 - (-4) = 75 / 25 = 3$$

$$X = 3$$

$$\text{Para } Y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} \text{ entre } \begin{vmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 30 - 5 / 21 - (-4) = 25 / 25$$

$$Y = 1$$

Regla de Cramer

Al método de resolver un par de ecuaciones lineales de dos incógnitas se puede extender al caso general de una ecuación con n incógnitas. Si $Ax = h$

La solución es $X_1 = |A_1|$ entre $|A|$

Donde $|A|$ es el *determinante base o determinante de la matriz coeficiente* $|A|$, y $|A_1|$ representa el determinante de la matriz coeficiente A con el coeficiente de X_1 reemplazado por la columna de las constantes $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$.

$X_2 = |A_2|$ entre $|A|$ y en general $X_j = |A_j|$ entre $|A|$

Observe que cuando la matriz A es singular, es decir, $|A| = 0$ no se puede usar la **Regla de Cramer**. Ejemplo, encuentre los valores de las tres incógnitas (X, Y, Z) de las siguientes ecuaciones usando la Regla de Cramer:

$$x + y + z = 6$$

$$5x - y + 2z = 9$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

los ponemos en notación matricial

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 9 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}} = 57/57 = 1$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 5 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}} = 114/57 = 2$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 5 & -1 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}} = 171/57 = 3$$

Sistema no lineal, también llamado solución de ecuaciones simultáneas cuando al menos una de las ecuaciones es cuadrática.

Un sistema de ecuaciones simultáneas de un tipo más complejo se puede resolver usando el *método de sustitución*, ejemplo:

$$X^2 + 4y = 20 \dots\dots\dots(1)$$

$$Y - 2x = 8 \dots\dots\dots(2)$$

Sustituya (8+2x) por y en (2) en la primera ecuación:

$$X^2 + 4(8+2x) = 20 \dots\dots\dots(1)$$

$$X^2 + 32 + 8x = 20$$

$$X^2 + 8x + 12 = 0$$

$$(x + 6)(x + 2) = 0$$

obtenemos ya sea $x = -6$ o $x = -2$

Si $x = -6$, la segunda ecuación se convierte en :

$$Y - 2(-6) = 8 \dots\dots\dots(2)$$

$$Y + 12 = 8$$

$$Y = -4$$

Cuando $x = -2$, la segunda ecuación se convierte en :

$$Y - 2(-2) = 8 \dots\dots\dots(2)$$

$$Y + 4 = 8$$

$$Y = 4$$

Respuesta: hay dos soluciones: ya sea $x = -6$ con $y = -4$ o también: $x = -2$, $y = 4$.

Ejemplo 2: resolver el sistema $X^2 - 2x + y - 7 = 0$ (1)

$$3x - y + 1 = 0 \text{(2)}$$

despejando y en la segunda ecuación obtenemos :

$$y = 3x + 1 \text{(3)}$$

sustituyendo en la (1) y simplificando:

$$X^2 - 2x + (3x + 1) - 7 = 0$$

$$X^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

se obtiene $X = -3$ o bien $X = 2$

de la ecuación (3), cuando $x = -3$, tenemos $y = -8$; también, cuando $x = 2$, $y = 7$.

II.3 El Concepto de una Función^(2 y 3)

Como señalan E. Haeussler y R.S. Paul, el matemático G.W. Leibniz en el siglo XVII introdujo el concepto de Función dentro del vocabulario matemático; una **función** es un tipo especial de relación de entrada y salida, o dicho en otras palabras: insumo y producto.

Definición: una función es una **regla** que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. El conjunto de todos los números de entrada a los cuales se aplica la regla se le llama dominio de la función. Al conjunto de todos los números de salida se le llama ámbito o *contradominio*.

Ejemplo, al invertir dinero a una tasa de interés, el interés I , (salida), depende del tiempo t (entrada) en que se invierte el dinero. Para expresar esta dependencia decimos: “ I es función de t “. Así, supongamos que \$ 100.00 producen interés simple a una tasa anual del 6%; escribimos:

$$I = 100(i)t$$

$$I = 100(0.06)t \text{(1)}$$

Donde I se expresa en pesos y t en años. Si $t = 1/2$, obtenemos:

$$I = 100(0.06)1/2 \text{(2)}$$

En este caso, en (2) se asigna a la entrada t el valor $1/2$ y a la salida 3. En (1) se define la **regla**: el multiplicar t por $100(0.06)$. Dicha en otra forma $t \rightarrow I$, también: $t \rightarrow 100(0.06)t$.

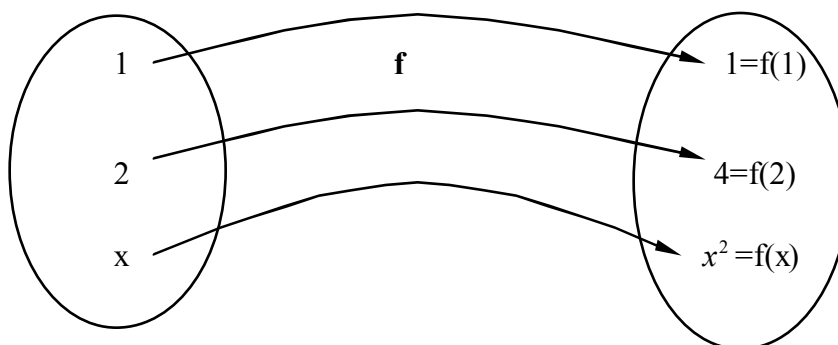
De lo anterior observamos que el número de entrada t no puede ser negativo porque $(-)$ no tiene sentido. Luego entonces el dominio consiste en todos los números no negativos, $t \geq 0$. En la ecuación (2), cuando la entrada es $\frac{1}{2}$, la salida es 3, es decir, es la parte del ámbito o *contradominio*.

A la variable t que representa números de entrada para una función se le llama **variable independiente** y a la variable I que representa números de salida se le denomina **dependiente**, pues su valor depende del valor de la variable independiente; decimos que la segunda es función de la primera, en otras palabras, la salida es *función* de la entrada.

Por costumbre se usa la letra f para representar reglas de funciones, pero si lo deseamos, podemos usar otras letras. En el caso anterior escribimos $I=f(t)$.

Debe comentarse que $f(t)$ no significa f multiplicado por t , sino que $f(t)$ significa la salida que corresponde a t .

Lo anterior lo podemos generalizar diciendo que gráficamente lo expresamos de la siguiente manera; digamos si $f(x)=x^2$ y si recordamos que una función es una correspondencia mediante la cual se asigna exactamente un número de salida en el contradominio a solo uno de los números de la entrada del dominio, tenemos:



II.3:1.- Funciones especiales

Función constante:

Una función constante de la forma $k(x)=c$, en donde c es una constante, se denomina *función constante*.

Ejemplo: $j(x)=3$, el dominio de j son todos los números reales.

Como dicen E.F. Haeussler y R. S. Paul³: “ las funciones constantes pertenecen a una clase más amplia de funciones “, denominadas funciones *polinomiales*. En general decimos que una función de la siguiente forma:

$F(x)=C_nX^n + C_{n-1}X^{n-1} + \dots + C_1X^1 + C_0$, donde n es un número entero no negativo y C_n, C_{n-1}, \dots, C_0 son constantes con $C_n \neq 0$ se llaman función polinomial en (x) . A

n se le llama **grado de la función** y a cada C_i , *coeficiente*. Luego $f(x) = 4X^2 - 6X + 3$ es una función polinomial de segundo grado con coeficiente inicial 4; también : $H(x) = 2-3X$ es una función de primer grado. En este caso se dice que la primera es una *función cuadrática* y la segunda, *función lineal*.

Con base en lo anterior es que podemos decir que en una ecuación se establece una relación particular entre dos o más expresiones algebraicas. Las ecuaciones pueden contener cualquier número de variables. Con la terminología matemática se expresa como $Y=f(X)$.

Se dice que Y es función de X , es decir el valor de Y depende del valor que tome X ; cuando su valor depende de más de una variable escribimos: $Y = f(x, z, h)$.

En este caso el valor de Y depende del valor que tomen las variables (x, z, h) .

Como puede observarse, lo anterior puede formalizarse y generalizarse para más variables que llamaremos explicativas o independientes.

II.3:2.- Funciones exponenciales y logarítmicas

II.3.2.1.- Funciones exponenciales

Estas se caracterizan por contener una constante (b) elevada a un exponente variable (x), es decir, $f(x) = b^x$, donde b es mayor que 0 y también $b \neq 1$, x es cualquier número real; también decimos que cuando es mayor que 1, la curva $Y=b^x$ asciende de izquierda a derecha, en otras palabras, al aumentar x también lo hace y . Cuando $0 \leq b \leq 1$, entonces, en ese caso la curva de $Y=b^x$ desciende de izquierda a derecha, se observa un comportamiento distinto de la variable y al del caso anterior, es decir, al aumentar x , el valor de la variable y disminuye y toma valores cercanos a 0.

Un ejemplo típico del uso de una función exponencial es su aplicación a los intereses que gana un capital invertido durante cierto número de años a una tasa de interés determinada. Hablamos de **interés compuesto**⁽³⁾ cuando: “ el interés que percibe una suma de dinero invertida (capital o monto especial) se reinvierte, de manera que este interés también gana interés. Es decir, el interés *se compone* o convierte en capital y, por ello, “ hay interés sobre interés “.

Por ejemplo supóngase que se invierten \$ 100 dólares (o cualquier otra unidad monetaria) a la tasa del 5% compuesto anualmente. Al final del primer año, el valor de la inversión es el capital original (\$ 100) más el interés generado por este $[100(0.05)] = 100 + 100(0.05) = \105.00

Esta es la cantidad sobre la que se genera interés para el segundo año. Al final del segundo periodo anual, el valor de la inversión es el capital que se tenía al final

del primer año, (\$105 más el interés producido por esa cantidad $[105(0.05)] = 105+105(0.05) = \110.25 .

Así, el capital se incrementa en 5% cada año. Los \$110.25 representan el capital original, más todo el **interés acumulado; se le denomina monto acumulado o monto compuesto**. La diferencia entre el monto compuesto y el capital original se denomina **interés compuesto**. Así, el interés compuesto aquí es $110.25 - 100.00 = 10.25$.

En términos más generales, si se invierte un capital P a una tasa de $100r$ por ciento compuesto anualmente (por ejemplo, al 5% r es (0.05), el monto compuesto después de un año será $P + Pr$ o bien $P (1 + r)$. Al final del segundo año, el monto compuesto es

$$P(1+r) + P[1+r] = P(1+r) + [1+r] = P(1+r)^2$$

Esta operación continúa. Después de tres años, el monto compuesto es $P(1+r)^3$. En general, el **monto compuesto** S de un capital P al final de **n** años, a la tasa de **r** compuesta anualmente, está dado por $S = P (1 + r)^n$ (1)

Por considerar importante distinguir las ecuaciones de interés compuesto de las de **interés simple**, diremos que⁽²⁾ calculamos éste último, cuando “ el dinero es invertido a interés simple, los pagos de interés son hechos **cada año sobre la inversión original**. Por consiguiente si P pesos son invertidos a una tasa de **r** por **t**

años, el valor de la inversión, **A**, al final del periodo, será:

$$A = P + Prt$$

Ejemplo:

Calcule el valor de una inversión de \$ 500.00 después 3 años si el interés simple se paga anualmente a una tasa anual del 5%.

$$A = P + Prt$$

$$A = 500 + (500*5/100*3)$$

$$A = 575 \text{ pesos}$$

II.4 Funciones Explícitas e Implícitas.

Cualquier función que es de la forma **$Y=f(X)$** es conocido como una función explícita de Y. Claramente se ve que el valor de Y depende del valor de X, y decimos que mientras que X es una variable independiente, Y es una variable dependiente.

En ciertos casos no se distingue con claridad la relación funcional entre las variables dependiente e independiente. Por ejemplo, $2x^2 + 3xy + y^2 = 0$, es una función de la forma $f(x, y) = 0$ conociéndose como una función implícita.

En ocasiones una función explícita puede, pero no siempre, derivarse de funciones implícitas simples, por ejemplo, la función implícita $2x^2 + 3y - 8 = 0$, produce dos funciones explícitas:

$$Y = \frac{8 - 2X^2}{3} \quad X = \sqrt{4 - \frac{3Y}{2}}$$

II.5 El Rango o dominio de una Variable

Para muchas funciones de la forma $Y = f(X)$ la variable independiente X puede tener cualquier valor negativo, cero o positivo. En tales casos decimos que el rango o dominio de la variable X es el *conjunto de todos los números enteros*. Ejemplos de este tipo de funciones son:

$$Y = 3x$$

$$Y = 2x^2 - 5$$

$$Y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

En otros casos deseamos limitar el rango de la variable independiente. Por ejemplo la función $Y = \sqrt{X}$.

Si Y es un número real X debe tener un valor positivo. En este caso X se limita al rango de números positivos. El rango o dominio está determinado cuando $X > 0$.

Si el movimiento de la variable independiente se restringe a cierto rango, entonces se deben fijar los límites superiores e inferiores del rango.

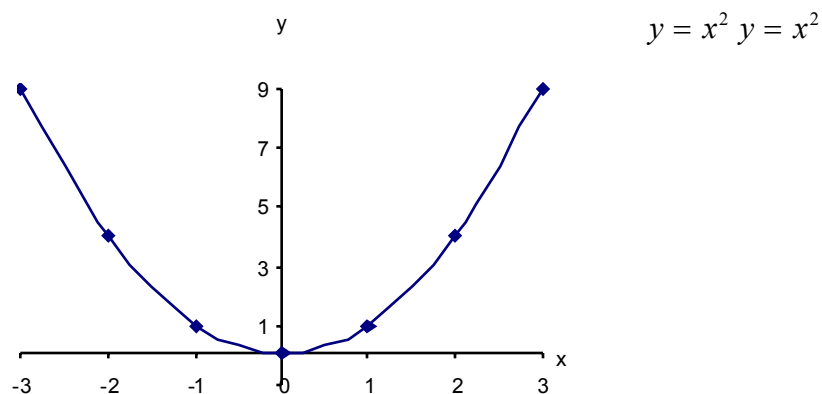
Así, si nos interesan todos los valores de x entre $x=a$, y $x=b$, el rango es $a < x < b$ o hablando más estrictamente $a \leq x \leq b$ donde x puede ser igual a cualquiera de los límites o estos contenida a ellos.

En funciones algebraicas se supone que las variable es continua cuando puede dividirse o fraccionarse, y es discreta cuando no se puede dividir o fraccionarse.

II. 6 Simetría³

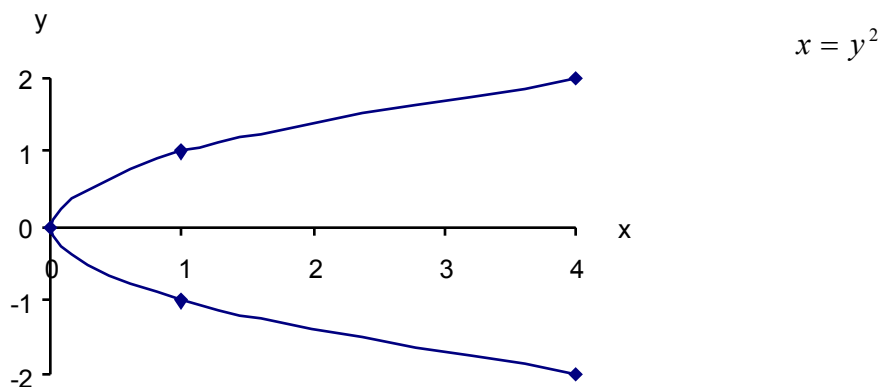
La simetría forma parte del análisis sobre el comportamiento gráfico de las ecuaciones. Así por ejemplo:

1.- Si tenemos la ecuación $Y = X^2$ y si le damos valores a X de $-1, 0$ y 1 , obtenemos para Y los valores $1, 0$ y 1 , respectivamente. Si graficamos estos valores observamos que la parte o porción que está del lado izquierdo del eje de las “ y ” es el espejo o imagen sobre sobre el eje “ y ” de la parte que se halla al lado derecho del mismo, y viceversa. Con literales diremos que si (X_0, Y_0) es cualquier punto en la curva, entonces el punto $(-X_0, Y_0)$ también está en la curva, por lo que decimos que es una **curva simétrica con respecto al eje “ y ”**.



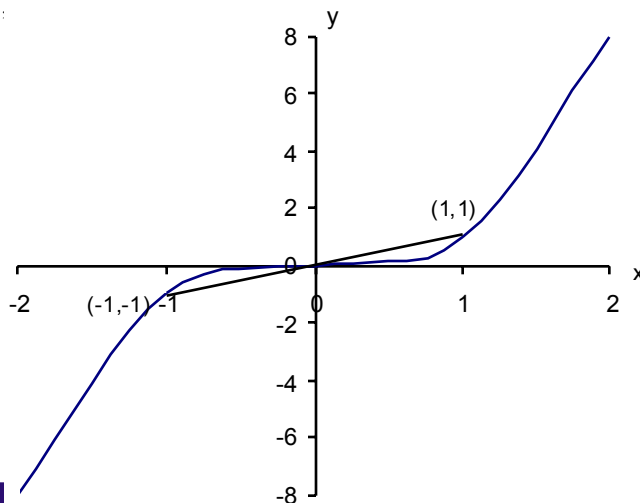
Definición: Una curva es simétrica con respecto al eje “y” $\Leftrightarrow (-X_0, Y_0)$ queda en la curva cuando (X_0, Y_0) también queda.

2.- De manera complementaria podemos decir que si tenemos la ecuación $X=Y^2$ podemos probar la simetría con respecto al eje “x”, dando valores a Y, digamos: -1, 0 y 1, en cuyo caso X toma los valores 1, 0 y 1, que al graficarlos obtenemos una curva en la que vemos que a cada punto en ella, con coordenadas $(X_0, -Y_0)$ corresponde otro punto en la misma curva con coordenadas (X_0, Y_0) .



Luego entonces decimos que una curva es simétrica con respecto al eje de las “x” $\Leftrightarrow (X_0, -Y_0)$ está en la curva cuando (X_0, Y_0) también lo está.

3.- Cuando tenemos $Y=X^3$ y le damos valores a X de -1, 0 y 1, obtenemos para Y los valores de -1, 0 y 1.



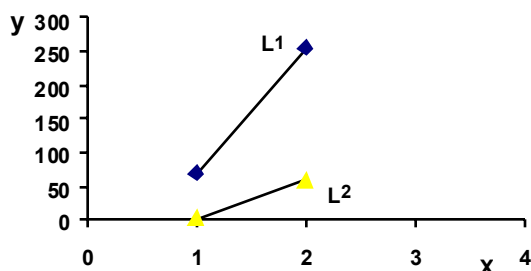
en este caso se dice que la curva es simétrica con respecto al “origen” porque si el punto (X, Y) está en la curva, vemos que el punto con coordenadas $(-X, -Y)$ también lo está; en consecuencia, el segmento de recta que une los puntos (X, Y) y $(-X, -Y)$ es bisecado por el origen.

Definición: una curva es simétrica con respecto al “origen” \Leftrightarrow el punto $(-X, -Y)$ está en la curva cuando el punto (X, Y) también lo está.

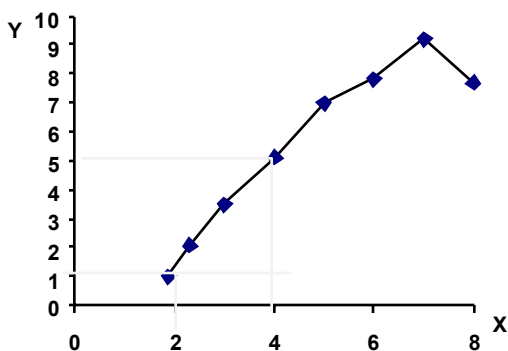
II.7 Rectas, Parábolas y Sistemas³

II.7.1 Rectas

Se pueden representar en forma conveniente muchas relaciones entre cantidades mediante rectas. Una característica de una recta es su inclinación. Por ejemplo en el siguiente diagrama la recta L_1 tiene una mayor inclinación que la recta L_2 , ello significa que L_1 tiene mayor inclinación con respecto al eje horizontal



Para medir la inclinación de una recta se utiliza el concepto de **Pendiente**. Así si tenemos los puntos $(2, 1)$ y $(4, 5)$ podemos trazar la recta L .



Se observa que la coordenada x aumenta de 2 a 4 y la coordenada Y aumento 1 a 5. La tasa promedio de variación de Y con respecto a x es la razón:

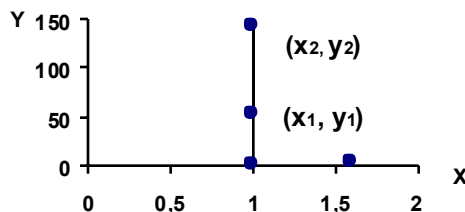
$$\frac{\text{Cambio} \rightarrow \text{en} \rightarrow Y}{\text{Cambio} \rightarrow \text{en} \rightarrow X} = \frac{\text{cambio} \rightarrow \text{vertical}}{\text{cambio} \rightarrow \text{horizontal}} = \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ello indica que para cada aumento unitario en X se tiene un aumento de 2 unidades en Y. Por ello la recta asciende de izquierda a derecha. Se dice que la pendiente de la recta es 2.

Definición: Sean $(X_1$ y $Y_1)$ y $(X_2$ y $Y_2)$ dos puntos sobre una recta en donde $X_1 \neq X_2$, la pendiente de la recta es el número dado por:

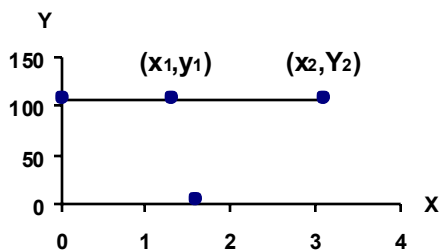
$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} \quad (1)$$

No se define la pendiente de una recta vertical, pues $X_1 = X_2$ tal que el denominador en (1) es cero.



Donde $x_1 = x_2$

Para una recta horizontal, dos puntos cualquiera tiene $Y_1 = Y_2$, por lo que el numerador en (1) es cero; y decimos que $m = 0$



$$Y_1 = Y_2$$

Con base en lo antes expuesto podemos resumir diciendo que :

FORMAS DE ECUACIONES DE RECTAS

Forma punto- pendiente	$Y - Y_1 = m(X - X_1)$
Forma pendiente-intercepción "Y"	$Y = mX + b$
Forma lineal general	$Ax + By + C = 0$
Recta vertical	$X = 0$
Recta horizontal	$Y = b$

II.7.1.1 Ejercicios:

1.- Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por (1,-3). Sabemos que $m=2$ y que $(X_1, Y_1)=(1, -3)$, utilizando la forma punto-pendiente, escribimos $Y - (-3) = 2(X - 1)$, resolviendo tenemos:

$Y + 3 = 2X - 2$, luego llegamos a la forma lineal general $2X - Y - 5 = 0$.

2.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-3,8) y (4,-2). Aquí tenemos que $m = -2 - 8 / 4 - (-3) = -10/7$

si tomamos las coordenadas del primer punto (-3,8) como (X_1, Y_1) en la forma punto-pendiente, escribimos $Y - 8 = -10/7 [X - (-3)]$, haciendo operaciones tendremos lo siguiente:

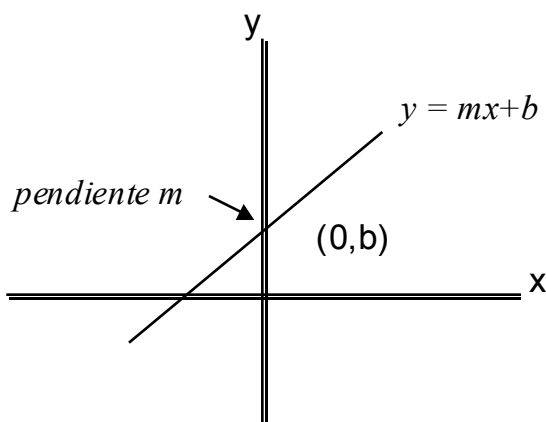
$$Y - 8 = -10/7(X + 3)$$

$$7Y - 56 = -10X - 30$$

$$\text{o bien } 10X + 7Y + 26 = 0$$

Ahora, si escogemos las coordenadas del segundo punto (4,-2) como (X_1, Y_1) también llegamos al mismo resultado.

3.- Cuando tenemos el punto (0,b) decimos que una recta corta el eje "Y" y se denomina **intercepción Y**; asimismo indicamos que b es la ordenada en el origen.



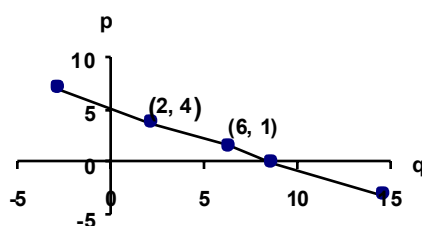
Si conocemos la pendiente (m) y la ordenada en el origen (b) de una recta, la ecuación es: $Y - b = m(X - 0)$,

Si despejamos Y tenemos $Y=mX+b$, llamada forma pendiente-intercepción “y”.

Ejemplo económico:

Sea $X = q =$ cantidad; luego si $(2, 4)=(q_1, p_1)$
 $Y = p =$ precio $(6, 1)=(q_2, p_2)$

tenemos que $m = \frac{1-4}{6-2} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$



ello significa que por cada aumento unitario en q, ocasiona una disminución de $\frac{3}{4}$ en P.

En resumen podemos decir que una recta:

- 1.- Tiene pendiente cero, cuando la recta es horizontal;
- 2.- Tiene pendiente indefinida, cuando la recta es vertical;
- 3.- Tiene pendiente positiva, cuando la recta asciende de izquierda a derecha.
- 4.- Tiene pendiente negativa, cuando la recta desciende de izquierda a derecha.

La ecuación de una recta con pendiente 3 y ordenada en el origen -4 es:

$$\begin{aligned} Y &= mx + b \\ Y &= 3x + (-4) \\ Y &= 3x - 4 \end{aligned}$$

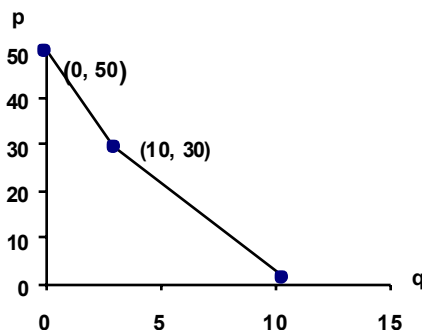
Aplicaciones:

Un fabricante dispone de 100 kilos de material con el que puede producir dos productos, A y B, que requieren de 4 y 2 kilos de material por unidad, respectivamente. Si X y Y denotan A y B, entonces todos los niveles de producción están dados por los cambios de X y Y que satisfacen la ecuación:

$$4x + 2y = 100 \text{ en donde } x, y \geq 0.$$

Despejando Y, se obtiene la forma pendiente-ordenada en el origen $Y = -2x + 50$ donde $m=-2$ indicando la tasa de variación del nivel de producción de B con respecto al nivel de producción de A, así si fabricamos una unidad más de A, se

requieren 4 kilos más de material, lo que daría por resultado $4/2=2$ unidades menos de B. Por consiguiente al aumentar X en una unidad, Y disminuye en 2 unidades. Para trazar su gráfica de $Y=-2x+50$ puede utilizar la intercepción $y(0, 50)$ y si cuando $x=10$, $y=30$, tenemos:



Uso de la sumatoria \sum

Como se usará mucho, sabemos que con propiedad se escribe $\sum_{i=1}^n$ donde $i=1,2,\dots,n$, y que n = tamaño de la muestra; sin embargo, en lo sucesivo y por motivos prácticos simplemente se escribirá \sum , sin que se olvide su representatividad apropiada.

III. ILUSTRACIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS APLICANDO LOS CONCEPTOS BÁSICOS EXPUESTOS: MEDIANTE EL ANÁLISIS DE REGRESIÓN Y CORRELACIÓN ⁽⁵⁾,

Con base en los conceptos y supuestos básicos antes expuestos, ahora estamos en condiciones de iniciar su aplicación al ámbito econométrico, es decir, los utilizaremos para expresar y desarrollar la terminología y métodos de esta disciplina aplicada a la ciencia económica, mediante la construcción de modelos. .

Empezaremos con la aplicación del concepto de función en el ámbito de la regresión y correlación.

Regresión es la estimación de una variable dependiente, con una ecuación por el método de mínimos cuadrados. La ecuación se denomina de regresión: $Y = f(x)$.

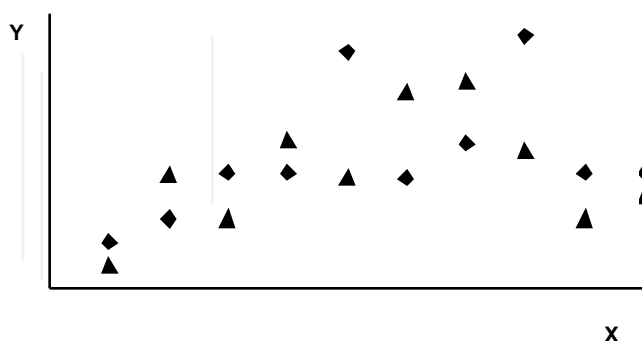
La correlación es la determinación del grado de relación que existe entre dos variables por medio del coeficiente de correlación (r).

III.1 Modelo Lineal Simple.MLS⁽¹⁵⁾

La regresión y correlación son simples cuando solamente se manejan dos variables y es múltiple cuando se maneja más de dos variables.

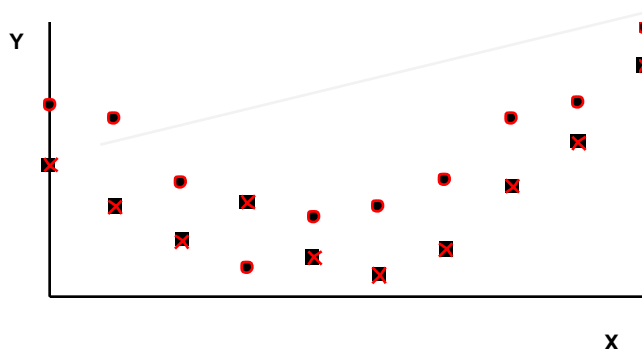
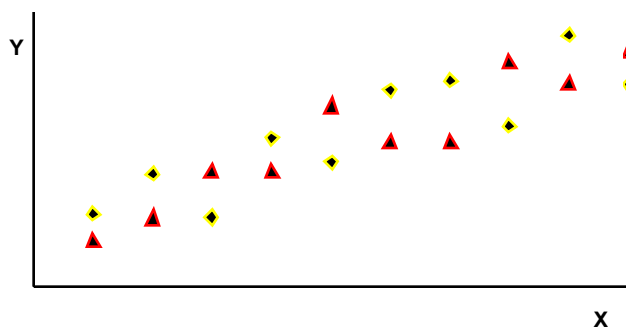
La ecuación de regresión puede corresponder a diferentes formas funcionales (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica) etc.

La selección de la forma funcional adecuada se obtiene utilizando el diagrama de dispersión:

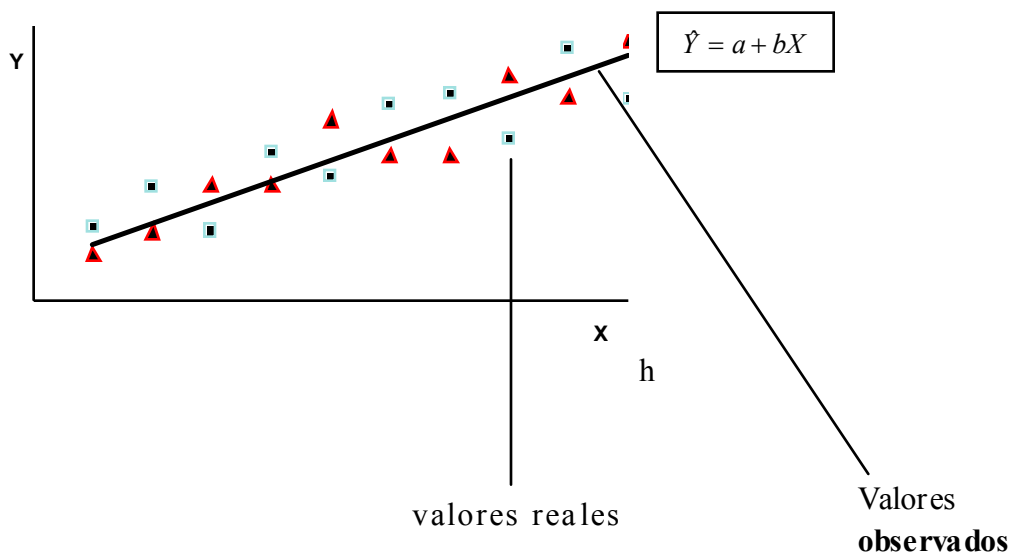


Esto nos indica la distribución que tienen las variables, si tienen la forma anterior, inmediatamente se ve que el ajuste o ecuación a manejar es lineal.

Pero si tiene la siguiente forma, entonces la ecuación a manejar es cuadrática o de segundo grado.



El método de estimación de Y variable dependiente, a partir de X variable independiente, se denomina “mínimos cuadrados”, porque está demostrado que la suma de las diferencias entre los valores reales y los observados es un mínimo, es decir:



Las “ecuaciones normales” se obtienen así:

Si definimos Q como un mínimo, tenemos

$$Q = \sum (Y_i - a - bX_i)^2 \text{ hacemos}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \Rightarrow \sum 2(\hat{Y}_i - a - bX_i)(-1) = 0$$

$$2\sum (\hat{Y}_i - a + bX_i)(-1) = 0$$

$$-2\sum (\hat{Y}_i - \sum a + b\sum X_i)(-1) = 0$$

$$-2\sum Y_i + 2\sum a + 2b\sum X_i = 0$$

dividimos entre dos y hacemos

$$\sum Y_i = na + b\sum X_i$$

si dividimos entre n

$$\bar{Y} = a + b\bar{X}$$

$$\text{Ahora } \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \Rightarrow 2\sum (Y_i - a - bX_i)(-X_i)$$

$$\sum (2Y_i - 2a - 2bX_i)(-X_i)$$

$$-2\sum Y_i X_i + 2a\sum X_i + 2b\sum X_i^2 = 0$$

dividimos entre 2 y hacemos

$$\sum Y_i X_i = a\sum X_i + b\sum X_i^2$$

Así las ecuaciones normales para hallar a y b son:

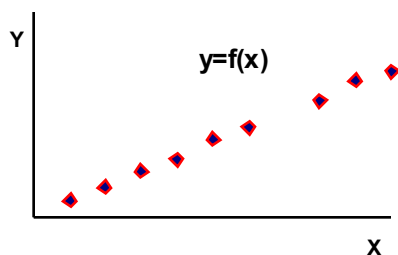
$$\sum Y_i = na + b\sum X_i \quad (1)$$

$$\sum X_i Y_i = a\sum X_i + b\sum X_i^2 \quad (2)$$

Ahora bien, en el caso de la correlación los valores del coeficiente oscilan entre 0, 1 y -1. Cuando r tiende a cero, se dice que hay una nula relación o correlación entre X y Y.

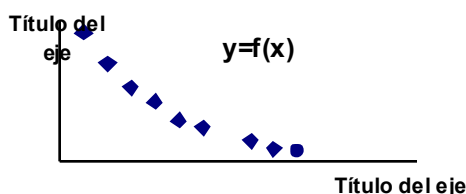
Cuando r tiende a uno, se dice que hay una fuerte relación o correlación entre X y Y, tal que X es una buena variable explicativa de Y. Es decir, podemos explicar el comportamiento de Y basándonos en el comportamiento de X. En este caso se dice que a medida que aumenta X, Y también lo hace.

Gráficamente:



Igualmente cuando r tiende a -1 , también hay una fuerte correlación ó relación entre X y Y , por lo que la primera sirve para explicar ó determinar adecuadamente los cambios en Y . Pero en este caso a medida que X aumenta Y disminuye.

Gráficamente:



Ejemplo del cálculo del coeficiente de correlación r . Se desea estimar el grado de relación que existe entre la circulación monetaria y el nivel general de precios.

$$r = \frac{\sum x' y'}{\sqrt{\sum x'^2 \sum y'^2}}$$

donde $x' = x - \bar{x}$, y $y' = y - \bar{y}$

Años	Circulación Monetaria (X)	Nivel Gral. de Precios (Y)	$x' = x - \bar{x}$	$y' = y - \bar{y}$	$x' * y'$	$(x')^2$	$(y')^2$
1998	100.0	100.0	-96.4	-34.13	3290.45	9292.96	1165.08
1999	112.3	103.4	-84.1	-30.73	2584.67	7072.81	944.54
2000	145.0	107.3	-51.4	-26.83	1379.23	2641.96	720.03
2001	179.8	127.7	-16.6	-6.43	106.79	275.56	41.39
2002	276.9	164.0	80.5	29.87	2404.27	6480.25	892.02
2003	364.4	202.4	168.0	68.27	11468.80	28224.00	4660.34
Total	1178.4	804.80			21234.22	53987.54	8423.39

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1178.40}{6} = 196.40$$

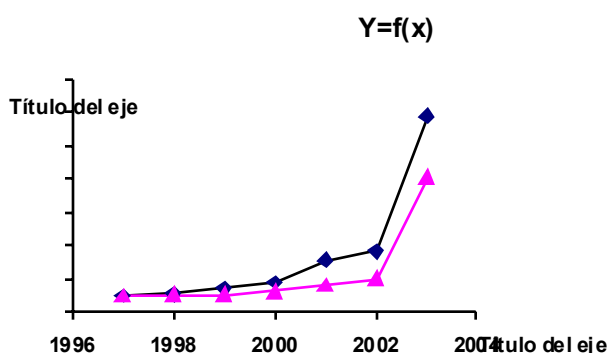
$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{804.80}{6} = 134.13$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2}}$$

$$r = \frac{21234.22}{\sqrt{(53987.54)} \sqrt{(8423.3933)}} = .9957$$

Por lo tanto $r=.9957$ lo cual significa que hay una gran relación o correlación entre X (circulación monetaria), y Y (nivel general de precios), a medida que aumenta X, aumenta Y tal que si graficamos los datos anteriores obtenemos una curva con pendiente positiva.

Gráficamente:



La forma funcional $Y=f(x)$ puede tener la forma funcional cuadrática cuya ecuación es: $Y=a+bx+cx^2$, exponencial $Y=ab^x$ etc. En cualquier caso, se le llama “ecuación de regresión” y los valores de los parámetros se determinan con las “ecuaciones normales”. **El número de ecuaciones normales viene dado por el número de parámetros a determinar.** En el caso de la ecuación lineal los parámetros a determinar son “a” y “b” luego se necesitan dos ecuaciones normales las cuales son:

$$\sum y = na + b \sum x \quad (1)$$

$$\sum xy = a \sum x + b \sum x^2 \quad (2)$$

En caso de $Y=a+bx+cx^2$, las ecuaciones son:

$$\sum y = na + b \sum x + c \sum x^2 \quad (1)$$

$$\sum xy = a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 \quad (2)$$

$$\sum x^2 y = a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 \quad (3)$$

En el caso de un polinomio:

$$Y = a + bx + cz + dQ$$

entonces necesitamos 4 ecuaciones:

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum z + d\sum Q \quad (1)$$

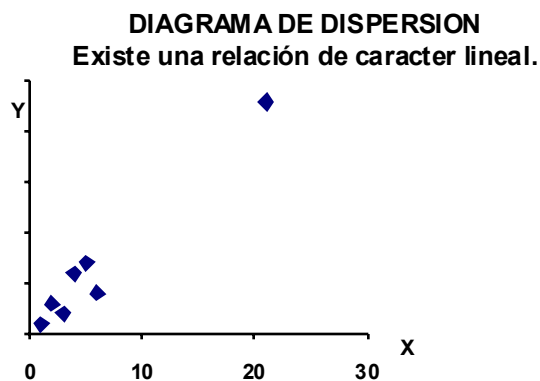
$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum xz + d\sum Qx \quad (2)$$

$$\sum zy = a\sum z + b\sum xz + c\sum z^2 + d\sum Qz \quad (3)$$

$$\sum Qy = a\sum Q + b\sum xQ + c\sum zQ + d\sum Q^2 \quad (4)$$

Ejemplo adicional:

Año (x)	Producción de Trigo (y)	x^2	y^2	$x * y$	\hat{y}	$e = y - \hat{y}$
1	1	1	1	1	1.6	-0.6
2	3	4	9	6	2.5	0.5
3	2	9	4	6	3.4	-1.4
4	6	16	36	24	4.3	1.7
5	7	25	49	35	5.2	1.8
6	4	36	16	24	6.1	-2.1
Total	23	91	115	96	23.0	0.0



La ecuación de regresión a manejar será: $Y = a + bx$. Para encontrar a y b usamos las ecuaciones normales:

$$\begin{aligned} \sum Y &= Na + b\sum X \\ \sum YX &= a\sum X + b\sum X^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} 23 &= 6a + 21b \\ 96 &= 21a + 91b \end{aligned}$$

$$a = 96 - 91b/21 = 23 - 21b/6 = 576 - 546b = 483 - 441b = 93 = 105b \text{ de donde:}$$

$$b = \frac{93}{105} = 0.8857, \text{ sustituyendo en}$$

$$b \sum x + n \sum a = y \text{ que es igual a } (0.8857) \cdot 21 + 6a = 23 \text{ quedando}$$

$$6a = 23 - 18.5997 = 4.4003$$

$$a = 4.4003/6 = 0.7333 \text{ así } a = 0.7333$$

luego la ecuación de regresión será $Y = 0.7333 + 0.8857X$.

Con ello podemos estimar ó calcular los valores de Y en función de las variaciones de X.

Si deseamos estimar \hat{Y} , entonces si sabemos que X representa los años:

$$\hat{Y}_1 = 0.8857(1) + 0.7333 = 1.6$$

$$\hat{Y}_2 = 0.8857(2) + 0.7333 = 2.5$$

$$\hat{Y}_3 = 0.8857(3) + 0.7333 = 3.4$$

$$\hat{Y}_4 = 0.8857(4) + 0.7333 = 4.3$$

$$\hat{Y}_5 = 0.8857(5) + 0.7333 = 5.2$$

$$\hat{Y}_6 = 0.8857(6) + 0.7333 = 6.1$$

Como esto es una estimación podemos calcular el error estándar de la (estimación).

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - 2}}$$

$e = y - \hat{y}$	$e^2 = (y - \hat{y})^2$
-0.6190	0.3832
0.4952	0.2453
-1.3905	1.9334
1.7238	2.9715
1.8381	3.3786
-2.0476	4.1927
0.0000	13.1047

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(13.1047)}{6 - 2}} = \sqrt{3.2761}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$\text{luego } \sigma^2 = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - 2} = 3.2761$$

$$\bar{y} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{23}{6} = 3.83$$

$x' = \bar{x}_i - x$	$y' = \bar{y}_i - y$	$x' y'$	$(x')^2$	$(y')^2$
-2.5	-2.83	7.0833	6.25	8.0278
-1.5	-0.83	1.2500	2.25	0.6944
-0.5	-1.83	0.9167	0.25	3.3611
0.5	2.17	1.0833	0.25	4.6944
1.5	3.17	4.7500	2.25	10.0278
2.5	0.17	0.4167	6.25	0.0278
		15.5000	17.50	26.8333

$$r = \frac{\sum x' y'}{\sqrt{\sum x'^2} \sqrt{\sum y'^2}} = \frac{15.50}{\sqrt{(17.50)} \sqrt{(26.8333)}} = r = \frac{15.50}{21.6698} = 0.7152$$

Por lo tanto $r=0.7152$ que es el coeficiente de correlación a partir del cual calculamos el coeficiente de determinación $R^2=(.7152)^2=0.5116$.

La fórmula de S. Shao es⁶:

$$\text{El coeficiente de determinación } R^2_{yx} = 1 - \frac{\sigma^2_{yx}}{\sigma^2_y}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e^2}{\sum y^2}, R^2 = \frac{\sum \hat{y}^2}{\sum y^2}, R^2 = \frac{\text{Varianza explicada}}{\text{Varianza total}}$$

$$\text{Donde: } \sigma^2_{yx} = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n} = \frac{13.1048}{6} = 2.1841$$

$$\sigma^2_y = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n} = \frac{26.8333}{6} = 4.4722$$

$$R^2_{yx} = 1 - \frac{2.1841}{4.4722} = 1 - 0.4884 = 0.5116$$

De aquí en adelante usaremos R^2_{yx} , para calcular r_{yx} = coeficiente de correlación.

III.1.1 Otros Métodos de Estimación**III.1.1.1 Método de Momentos para Obtener los Parámetros a y b**

Si con el método de mínimos cuadrados $\hat{Y}_i = a + bX_i$ entonces $e_i = \text{residuos} =$ variable aleatoria, tal que $e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - a - bX_i$, luego las dos “ecuaciones normales” para obtener a y b se obtienen con base en algunas de las hipótesis planteadas; así recordando que $\bar{E}(e_i) = \frac{1}{n} \sum e_i = \sum e_i = 0$ y que

$$\text{cov}(x_i, e_i) = 0 = \frac{1}{n} \sum X_i e_i = \sum X_i e_i = 0$$

$$\text{Así: i) } \sum e_i = 0 \text{ ó } \sum (Y_i - a - bX_i) = 0 \quad (1)$$

$$\text{ii) } \sum x_i e_i = 0 \text{ ó } \sum X_i (Y_i - a - bX_i) = 0 \quad (2)$$

Sabiendo que $\sum a = na$, las ecuaciones (1) y (2) también se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\sum Y_i = na + b \sum X_i \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum X_i Y_i = a \sum X_i + b \sum X_i^2 \dots\dots\dots (2)$$

Su solución permite obtener los valores de a y b, cuyo valor es idéntico al obtenido con el método de mínimos cuadrados. Si queremos simplificar la obtención de a y b resolvamos simultáneamente las ecuaciones (1) y (2). Así:

$$b = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

$$a = \bar{Y}_i - b\bar{X}_i$$

También si hacemos $x_i = X_i - \bar{X}_i$ e $y_i = Y_i - \bar{Y}_i$ tenemos $b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$; el parámetro a se obtiene igual, es decir $a = \bar{Y}_i - b\bar{X}_i$.

III.1.1.2 Método de Participación de los Residuos para Obtener los Parámetros a y b, así como el Coeficiente de Determinación.

Como señala el profesor G.S. Maddala (1996:79) si en las ecuaciones normales sustituimos el valor de a de la ecuación (1) en la ecuación (2), a partir de la ecuación en que $\bar{Y}_i = a + b\bar{X} = a + b\bar{X}$, tenemos que

$$\sum Y_i X_i = \sum X_i (\bar{Y} - b\bar{X}) + b \sum X_i^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$\sum Y_i X_i = n\bar{X}(\bar{Y} - b\bar{X}) + b \sum X_i^2$$

Con esas referencias, ahora se definen las siguientes S`s

$$S_{YY} = \sum (Y_i - \bar{Y}_i)^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}_i^2$$

$$S_{XY} = \sum (X_i - \bar{X}_i)(Y_i - \bar{Y}_i) = \sum X_i Y_i - n\bar{X}_i \bar{Y}_i$$

así como $S_{XX} = \sum (X_i - \bar{X}_i)^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}_1^2$

La ecuación (3) se puede denotar como $bS_{XX}=S_{XY}$ obteniéndose $b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}$ así como

$$a = \hat{Y} - b\hat{X}$$

Ahora bien para obtener el coeficiente de determinación (r^2), recordemos que los residuos estimados son $e_i = Y_i - a - bX_i$, mismos que satisfacen $\sum e_i = 0$ y $\sum X_i e_i = 0$. Si denotamos la suma de cuadrados residuales con RSS donde

$$\begin{aligned} RSS &= \sum (Y_i - a - bX_i)^2 \\ &= \sum [Y_i - \bar{Y}_i - b(X_i - \bar{X}_i)]^2 \\ &= \sum (Y_i - \bar{Y}_i)^2 + b^2 \sum (X_i - \bar{X}_i)^2 + 2b \sum (Y_i - \bar{Y}_i)(X_i - \bar{X}_i) \\ &= S_{YY} + b^2 S_{XX} - 2b S_{XY} \end{aligned}$$

Puesto que $b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}$, se tiene $RSS = S_{YY} - \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}} = S_{YY} - bS_{XY}$

Si expresamos S_{YY} como TSS= Suma de Cuadrados Total, también a bS_{XY} con ESS como la suma de cuadrados explicada, decimos que:

$$\begin{aligned} TSS &= ESS + RSS. \\ (\text{Total}) &= (\text{Explicada}) + (\text{residual}) \end{aligned}$$

Ahora si denotamos con r_{XY}^2 =coeficiente de determinación de X en Y = $\frac{ESS}{TSS}$ y

$1 - r_{XY}^2 = \frac{RSS}{TSS}$ decimos que r_{XY}^2 explica el efecto de X en Y y que $1 - r_{XY}^2$ es la proporción no explicada por X, o en otras palabras, éste último indica la proporción del efecto de otras variables en Y, distintas a X. Derivado de lo anterior

$$r_{xy}^2 \text{ también se obtiene así: } r_{XY}^2 = \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}S_{YY}} = \frac{bS_{XY}}{S_{YY}}$$

En esta forma ahora se cuenta con nuevas fórmulas para obtener el coeficiente de determinación.

III.1.1.2 Otros Métodos de Estimación:

Existen otros como el de Máxima Verosimilitud, Mínimos Cuadrados de Primera y Segunda Etapa, etc. cuya ilustración no se hace en este libro.

Practica Número I

Nombre del alumno: _____

1. Indique que significa y para que sirve:

a) El análisis de regresión simple;

Se usa para probar hipótesis sobre la relación entre una variable dependiente Y, y una variable independiente, X, y para pronóstico, que contrasta con el análisis de regresión múltiple en el que hay más de una variable independiente.

b) El análisis de regresión lineal

Supone que hay una relación lineal entre X y Y.

c) El diagrama de dispersión.

Su fin es determinar por inspección ocular la relación funcional entre X y Y.

2. Establezca la relación general entre el consumo Y, y el ingreso disponible X, con:

a) Forma lineal exacta o determinística;

$$\hat{Y}_i = a + bX_i$$

b) Forma estocástica;

$$\hat{Y}_i = a + bX_i + e_i$$

c) ¿Por qué se supone que la mayoría de los valores observados de Y no caen exactamente sobre una línea recta?

Porqué hay otras variables explicativas omitidas que también tienen efecto en Y; por errores de medición de Y_i y por la aleatoriedad inherente a la conducta humana.

3. Con el método de mínimos cuadrados ordinarios, para estimar los valores poblacionales de α y β con los valores muestrales de a y b diga:

a) ¿Por qué se usa éste método?

Da la línea recta óptima que minimiza las diferencias de Y_i con \hat{Y}_i

b) ¿Qué *propiedades* tienen los estimadores a y b?

Produce estimadores con propiedades de insesgabilidad, eficiencia, suficiencia y consistencia.

c) ¿Por qué se miden verticalmente las desviaciones?

Porque tratamos de explicar movimientos en Y_i que se miden en el eje vertical.

- d) ¿Porqué no simplemente se toman la suma de las desviaciones sin elevarlas al cuadrado?

Por que su suma es igual cero.

- e) ¿Porqué no tomarse la suma de las desviaciones absolutas?

Por que su suma no es un mínimo.

4. i) Establezca la diferencia entre a y b por un lado, y α y β por el otro; en una población *infinita*, α y β son los parámetros de la línea de regresión verdadera pero desconocida en tanto que a y b son los parámetros de la línea de regresión estimada conocida.

- ii) Establezca la diferencia entre μ_i y e_i , es decir que significa μ_i y e_i ?

μ_i es el término de perturbación aleatorio, error estocástico en la relación verdadera pero desconocida en una población infinita entre X_i y Y_i , mientras que $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

- iii) Escriba las ecuaciones para las relaciones verdaderas en el universo y estimadas con la muestra entre X e Y .

Para la verdadera: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$

Para la estimada: $\hat{Y}_i = a + bX_i + e_i$

5. Con los siguientes datos a) hallar los valores de a y b ; b) representar gráficamente la línea de regresión y mostrar las desviaciones de cada Y_i del correspondiente \hat{Y}_i . Interpretelas.

a) Para hallar a y b tenemos:

Año	Y=Consumo	X=Ingreso	$X_i Y_i$	X_i^2
1	102	114	11,628	12,996
2	106	118	12,508	13,924
3	108	126	13,608	15,876
4	110	130	14,300	16,900
5	122	136	16,592	18,496
6	124	140	17,360	19,600
7	128	148	18,944	21,904
8	130	156	20,280	24,336
9	142	160	22,720	25,600
10	148	164	24,272	26,896
11	150	170	25,500	28,900
12	154	178	27,412	31,684
Suma	1,524	1,740	225,124	257,112
Media	127	145		

$$n = 12, \sum Y_i = 1,524, \bar{Y} = 127, \sum X_i = 1,740, \bar{X} = 145, \sum X_i Y_i = 225,124, \sum X_i^2 = 257,112$$

$$b = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{(12)(225,124) - (1,740)(1,524)}{(12)(257,112) - (1,740)^2} = \frac{49,728}{57,744} = 0.86$$

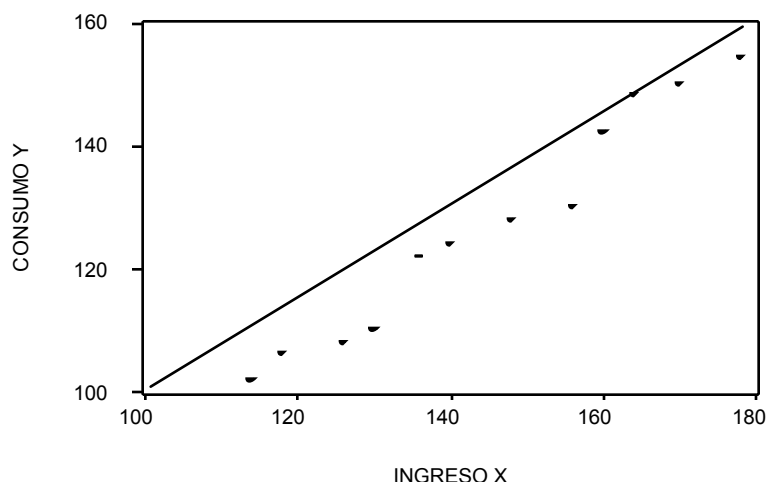
$$a = \bar{Y} - b\bar{X} = 127 - (0.86 \cdot 145) = 127 - 124.70 = 2.30$$

Luego la ecuación de regresión: $\hat{Y}_i = 2.30 + 0.86X_i$

b) Para ello obtenemos 2 puntos cualesquiera sobre la línea de regresión, digamos

$$\text{Cuando } X_i = 114, \hat{Y}_i = 2.30 + (0.86 \cdot 114) = 100.34$$

$$\text{Cuando } X_i = 178, \hat{Y}_i = 2.30 + (0.86 \cdot 178) = 155.38$$



$$\hat{Y} = 2.30 + 0.86X_i$$

Comentarios: _____

III.2 Regresión y Correlación no Lineal, Cuadrática o Parabólica⁷

En este caso el comportamiento de Y, como resultado de los cambios en X, no es lineal, por lo que la ecuación de regresión será: $Y=a +bx+cx^2$ y para encontrar a, b, c, las ecuaciones lineales serán:

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2 \quad (1)$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 \quad (2)$$

$$\sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 \quad (3)$$

Ejemplo: Existen 8 vendedores y se desea explicar o estimar sus volúmenes de ventas en función de su experiencia acumulada. Para ello se registran sus ventas (Y), y el número de años de trabajo (X).

$$Y=f(x)$$

Observar la siguiente tabla:

Vendedor	Ventas (Y)	Experiencias en años (X)	X ²	X ³	X ⁴	X*Y	X ² *Y
A	9	6	36	216	1,296	54	324
B	6	5	25	125	625	30	150
C	4	3	9	27	81	12	36
D	3	1	1	1	1	3	3
E	3	4	16	64	256	12	48
F	5	3	9	27	81	15	45
G	8	6	36	216	1,296	48	288
H	2	2	4	8	16	4	8
Total	40	30	136	684	3,652	178	902

Sustituyendo los resultados de la tabla anterior en las ecuaciones tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 8a+30b+136c &= 40 \\ 30a+136b+684c &= 178 \\ 136a+684b+3652c &= 902 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de cramer, el resultado es: $Y=3.5914-0.9127X+0.2842X^2$. La cual nos permite estimar las ventas (Ye) en función de los años de experiencia (X) de los vendedores.

De esta manera \hat{y} es igual:

$Y_1 = 3.5914 - 0.9127(6) + 0.2842(6)^2 = 8.3464$ Para A
$Y_2 = 3.5914 - 0.9127(5) + 0.2842(5)^2 = 6.1329$ Para B
$Y_3 = 3.5914 - 0.9127(3) + 0.2842(3)^2 = 3.4111$ Para C
$Y_4 = 3.5914 - 0.9127(1) + 0.2842(1)^2 = 2.9629$ Para D
$Y_5 = 3.5914 - 0.9127(4) + 0.2842(4)^2 = 4.4878$ Para E
$Y_6 = 3.5914 - 0.9127(3) + 0.2842(3)^2 = 3.4111$ Para F
$Y_7 = 3.5914 - 0.9127(6) + 0.2842(6)^2 = 8.3464$ Para G
$Y_8 = 3.5914 - 0.9127(2) + 0.2842(2)^2 = 2.9028$ Para H

La estimación es buena y nos sirve para calcular las ventas de los vendedores y también para calcular los coeficientes de correlación y de determinación, para esto necesitamos hacer los siguientes cálculos:

\hat{y}	$e = (y - \hat{y})$	$e^2 = (y - \hat{y})^2$	$(Y - \bar{Y})$	$(Y - \bar{Y})^2$
8.3464	0.6536	0.4272	4	16
6.1329	-0.1329	0.0177	1	1
3.4111	0.5889	0.3468	-1	1
2.9629	0.0371	0.0014	-2	4
4.4878	-1.4878	2.2135	-2	4
3.4111	1.5889	2.5246	0	0
8.3464	-0.3464	0.1200	3	9
2.9028	-0.9028	0.8150	-3	9
40	0.0	6.4662	0	44

Sustituyendo los resultados de la tabla anterior en la siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{yx} = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{6.4662}{8}} = \sqrt{0.8082} \text{ luego } \sigma_{yx}^2 = 0.8082$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n} = \frac{44}{8} = 5.5$$

$$\text{como: } R^2_{yx} = 1 - \frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}$$

Por lo tanto tenemos que $R^2_{yx} = 1 - (0.8082/5.5) = 0.8530$, lo cual indica que el 85.3% de los cambios en Y se deben a variaciones en X. Dicho en otras palabras el coeficiente de determinación r^2_{yx} , nos indica el porcentaje de cambio que tienen

las ventas como resultado de los años de experiencia de los vendedores. Conocido R^2_{yx} , podemos calcular el coeficiente de correlación r_{yx} .

En este caso: $r_{yx} = \sqrt{R^2_{yx}} = \sqrt{0.8530} = .9235$ Lo cual revela que hay una alta correlación o relación positiva entre X y Y, de tal forma que podemos utilizar a (X) años de experiencia como variable independiente o explicativa de las ventas (Y); no se tiene que recurrir a buscar otra variable independiente o explicativa de Y, digamos quizá los precios (Z).

III.3 MODELO LINEAL GENERAL O MULTIPLE ,MLG.

Para construirse se usa la Regresión y Correlación Múltiple⁽⁷⁾

Muchas veces necesitamos explicarnos los cambios de Y en función de varias variables. En este caso se aplican el análisis de regresión y correlación múltiple.

Por ejemplo: El caso anterior las ventas Y podemos explicarlas no solamente en función de los años de experiencia sino también en función, digamos de las calificaciones que obtienen los vendedores en sus cursos de actualización quedando la función $Y=f(X_1, X_2)$.

Si hacemos que $Y=X_1$, tendremos que $Y=f(X_1, X_2)$. Donde X_1 =ventas, X_2 =años de experiencias; X_3 = calificaciones de los vendedores.

En este caso la ecuación de regresión será: $X_1=a+bX_2+cX_3$, y para encontrar a, b, c; necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum Y = na + b\sum X_1 + c\sum X_2 \quad (1)$$

$$\sum YX_1 = a\sum X_1 + b\sum X_1^2 + c\sum X_1X_2 \quad (2)$$

$$\sum YX_2 = a\sum X_2 + b\sum X_1X_2 + c\sum X_2^2 \quad (3)$$

El coeficiente de determinación lo denominaremos por: R^2_{123} : indicando que los cambios en X_1 , se deben a las variaciones de X_2 y X_3

Vendedor	Ventas (Y)	Experiencias en años (X_1)	Calificación (X_2)	Y^2	X_1^2	X_2^2	$Y \cdot X_1$	$Y \cdot X_2$	$X_1 \cdot X_2$
A	9	6	3	81	36	9	54	27	18
B	6	5	2	36	25	4	30	12	10
C	4	3	2	16	9	4	12	8	6
D	3	1	1	9	1	1	3	3	1
E	3	4	1	9	16	1	12	3	4
F	5	3	3	25	9	9	15	15	9
G	8	6	3	64	36	9	48	24	18
H	2	2	1	4	4	1	4	2	2
Total	40	30	16	244	136	38	178	94	68

Sustituyendo los resultados de la tabla anterior en el **sistema de ecuaciones** tenemos:

$$\begin{aligned} 8a + 30b + 16c &= 40 \\ 30a + 136b + 68c &= 178 \\ 16a + 68b + 38c &= 94 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por el método de Cramer nos queda:

$$\hat{Y} = -0.4545 + 0.7273X_1 + 1.3636X_2$$

Por lo cual podemos estimar las ventas:

$\hat{Y}_1 = -0.4545 + 0.7273(6) + 1.3636(3) = 8.0000$	para A
$\hat{Y}_2 = -0.4545 + 0.7273(5) + 1.3636(2) = 5.9091$	para B
$\hat{Y}_3 = -0.4545 + 0.7273(3) + 1.3636(2) = 4.4545$	para C
$\hat{Y}_4 = -0.4545 + 0.7273(1) + 1.3636(1) = 1.6364$	para D
$\hat{Y}_5 = -0.4545 + 0.7273(4) + 1.3636(1) = 3.8182$	para E
$\hat{Y}_6 = -0.4545 + 0.7273(3) + 1.3636(3) = 5.8182$	para F
$\hat{Y}_7 = -0.4545 + 0.7273(6) + 1.3636(3) = 8.0000$	para G
$\hat{Y}_8 = -0.4545 + 0.7273(2) + 1.3636(1) = 2.3636$	Para H

\hat{Y}	$(Y - \hat{Y})$	$(Y - \hat{Y})^2$	$(Y - \bar{Y})$	$(Y - \bar{Y})^2$
8.0000	1.0000	1.0000	4	16
5.9091	0.0909	0.0083	1	1
4.4545	-0.4545	0.2066	-1	1
1.6364	1.3636	1.8595	-2	4
3.8182	-0.8182	0.6694	-2	4
5.8182	-0.8182	0.6694	0	0
8.0000	0.0000	0.0000	3	9
2.3636	-0.3636	0.1322	-3	9
40.0000	0.0000	4.5455	0.0	44

En este caso el error estándar de estimación será

$$\sigma_{123} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{4.5455}{8}} = \sqrt{0.5682} \text{ por lo que } \sigma^2_{123} = 0.5682$$

De manera similar el coeficiente de determinación:

$$R^2_{123} = 1 - \frac{\sigma^2_{123}}{\sigma^2_1}$$

$$\sigma^2_1 = \frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n} = \frac{44}{8} = 5.5 \quad \text{luego tendremos } R^2_{123} = 1 - \frac{0.5682}{5.5} = .8966$$

Indicando que el 89.66 % de los cambios en Y se deben a los cambios de X_1 y X_2 .

Igualmente el coeficiente de correlación será: $R_{123} = \sqrt{R^2_{123}} = \sqrt{0.8966} = 0.9468$, revelando que hay una fuerte correlación o relación positiva entre Y, X_1 , X_2 . Por lo que podemos utilizar X_1 , X_2 para explicar adecuadamente a Y.

IV. BANDAS O INTERVALOS DE CONFIANZA.

Se construyen para “asegurar” con cierta probabilidad de que los valores reales u observados se hallen dentro de un intervalo dado.

$$\text{Si } \hat{Y} = a + bx$$

\hat{Y} : es el valor estimado con los parámetros **a** y **b** así como con los cambios que experimente X. Luego la banda de confianza: $\hat{Y} \pm s_{\hat{y}} z_{\alpha}$ cuando se maneja la población ó muestras grandes; $\hat{Y} \pm s_{\hat{y}} t_{\alpha}$, cuando se manejan muestras pequeñas. Donde t_{α} y z_{α} : probabilidad fijada apriorísticamente.

IV.1 Calidad o Bondad de los Estimadores⁸

¿Cómo determinamos si los estimadores $\hat{a} \dots y \dots \hat{b}$ de los parámetros poblacionales a y b (en el caso de que manejemos una relación lineal donde $y=a+bx$) son los adecuados o apropiados ?; dicho en otras palabras, ¿De qué manera los principios estadísticos de estimación pueden aplicarse al análisis de regresión?

Los valores de \hat{a} y \hat{b} encajan en la naturaleza de los promedios o medias. Es posible que ningún valor de y sea igual al de \hat{y} (ningún punto observado en el diagrama de dispersión cae dentro de la línea de tendencia calculada), pero los valores de \hat{y} pueden estar cercanos de los de y. Puesto que se espera que haya errores en todas las estimaciones, es necesario medir la cantidad de error e inferir a partir de ella el grado de confianza que se puede atribuir a los estimadores.

Primero calcularemos el error estándar del coeficiente de regresión, \hat{b} . Este concepto es similar en significado al del error estándar de la media descrito antes, cuando usamos la información de la muestra para estimar la media de la población. Designaremos el error estándar del coeficiente de regresión con $S_{\hat{b}}$, su cuadrado viene dado por la fórmula:

$$S_{\hat{b}}^2 = \frac{n \sum y^2 - (\sum y)^2 - \left[\frac{(n \sum xy - \sum x \sum y)^2}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \right]}{(n-2) \left\{ n \sum x^2 - (\sum x)^2 \right\}}$$

donde grados de libertad igual a n-k; k es el número de parámetros.

Más adelante observaremos que hay similitud de las literales y por consiguiente de las cantidades entre paréntesis de esta fórmula con las que se usan para calcular \hat{a} y \hat{b} , por el método de Cramer. Para encontrar $S_{\hat{b}}$, simplemente le sacamos raíz a esta cantidad, así:

$$S_b = \sqrt{S^2_{\hat{b}}}$$

Continuando con el desarrollo del procedimiento para verificar la calidad de los estimadores, recordemos que hemos supuesto que los errores $e = (Y - \hat{Y})$ son aleatorios e independientes. Ahora haremos un supuesto adicional; que están distribuidos normalmente. Así, si la distribución de los errores es normal, la cantidad $t = \frac{\hat{b} - b}{S_{\hat{b}}}$ sigue la distribución t con (n-2) grados de libertad.

El número de grados de libertad es el número de observaciones menos dos debido al número de parámetros muestrales (\hat{a} y \hat{b}) que han sido previamente determinados, con los datos de la muestra, lo cual significa en el análisis de regresión que el número de observaciones menos el número de parámetros calculados, con los datos de la muestra y usados (\hat{a} y \hat{b}) para obtener cada \hat{Y} , **constituyen los grados de libertad, cuyo valor sirve para mejorar la estimación de b con \hat{b} .**

Obviamente si tuviéramos n observaciones y n constantes, no habría “errores” porque cada valor \hat{Y} sería igual al valor real Y . En general, en la medida que sea menor el número de constantes, mayor será la libertad dejada a las diferencias adicionales.

Así, t es la medida de la diferencia entre el coeficiente empírico y el coeficiente hipotético de la población, tomando en cuenta la variación de los datos de la muestra. La t es útil para establecer límites de confianza y para pruebas de significación.

El procedimiento usual es realizar una prueba de significancia, es decir, probar la significación estadística del coeficiente poblacional **b**. Si no hay una relación lineal entre X y Y en la población, entonces **b**=0. La hipótesis nula a probar es que **b**=0, para ello se escoge un nivel de significancia, usualmente es del 5% y se representa con α . Si rechazamos la hipótesis, decimos que el coeficiente **b** es significativo estadísticamente, y es significativamente diferente de 0. Si aceptamos la hipótesis nula, entonces **b** no es significativa y probablemente no hay relación lineal entre X y Y en la población.

Ejemplo:

Y	X	X ²	XY	Y ²	\hat{Y}	$e = (Y - \hat{Y})$	e^2
5	10	100	50	25	3.3227	1.6773	2.8132
-4	-4	16	16	16	-6.6674	2.6674	7.1152
-6	4	16	-24	36	-0.9588	-5.0412	25.4141
-2	1	1	-2	4	-3.0995	1.0995	1.2089
5	16	256	80	25	7.6042	-2.6042	6.7821
-15	-10	100	150	225	-10.9489	-4.0511	16.4112
-8	-12	144	96	64	-12.3761	4.3761	19.1502
10	13	169	130	100	5.4635	4.5365	20.5799
-1	5	25	-5	1	-0.2452	-0.7548	0.5698
-10	-6	36	60	100	-8.0946	-1.9054	3.6306
$\Sigma Y = -26$	$\Sigma X = 17$	$\Sigma X^2 = 863$	$\Sigma XY = 551$	$\Sigma Y^2 = 596$			103.6751

Si la ecuación de regresión en la población es $Y = a + bx$.

La solución se obtiene con el método de Cramer:

$$\hat{a} = \frac{\sum x^2 * \sum y - \sum x * \sum xy}{n * \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad \hat{b} = \frac{n * \sum xy - \sum x * \sum y}{n * \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

sustituyendo los valores en cada ecuación nos queda:

$$\hat{a} = \frac{(863)(-26) - (17)(551)}{(10)(863) - (17)^2} = \frac{-31805}{8341} = -3.8131 \quad \hat{b} = \frac{(10)(551) - (17)(-26)}{(10)(863) - (17)^2} = \frac{5952}{8341} = 0.7136$$

Luego la ecuación de regresión para estimar $Y = a + bx$ será $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}x$ es decir:

$$\hat{Y} = -3.8131 + 0.7136x$$

Para saber si hay una relación lineal entre X y Y usamos:

$$S^2_{\hat{b}} = \frac{n \sum y^2 - (\sum y)^2 - \left\{ \frac{(n \sum xy - \sum x * \sum y)^2}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \right\}}{(n-2) \left\{ n \sum x^2 - (\sum x)^2 \right\}}$$

donde los grados de libertad es igual a $n-k$; k es el número de parámetros.

sustituyendo:

$$S_{\hat{b}}^2 = \frac{(10) \cdot (596) - (26)^2 - \left\{ \frac{[(10) \cdot (551) - (17)(-26)]^2}{(10)(863) - (17)^2} \right\}}{(8) \{10(863) - (17)^2\}} = \frac{1037}{66728} = 0.0155 \dots \text{luego}$$

$$S_{\hat{b}} = \sqrt{S_{\hat{b}}^2} = \sqrt{0.0155} = 0.1245$$

Enseguida se establece $H_0: b=0$ y $H_a: b \neq 0$; dado que $n \leq 30$ probamos con t donde

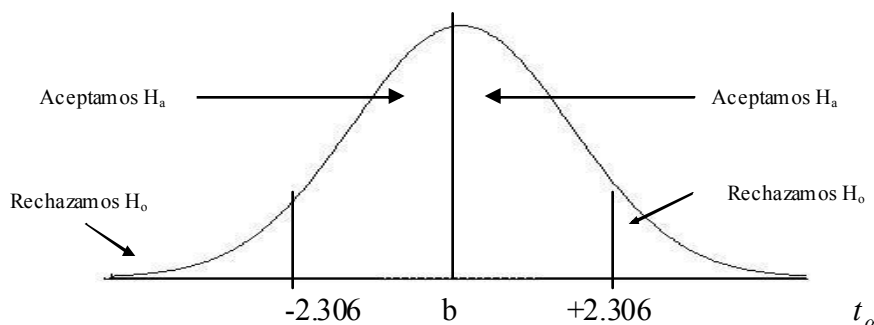
$$t_b = \frac{\hat{b} - b}{S_{\hat{b}}} = \frac{0.7136 - 0}{0.1245} = 5.7317$$

Dado este valor empírico de t , nuestra tarea final es escoger la t teórica (o de tablas como le llaman otros autores) con un nivel de significación al cual probaremos la hipótesis nula de que $b=0$. Supóngase que escogemos el 5% de significación, con $n-2=10-2=8$ grados de libertad, la tabla indica que $t_{\alpha} = \pm 2.306$, cuya interpretación es que podemos esperar un valor positivo o negativo de b tan grande como 2.306 si la hipótesis es cierta, es decir, si el coeficiente de la población es cero. Podemos esperar una diferencia entre cero y el empírico \hat{b} , que es el resultado de la selección aleatoria de la muestra, pero esta diferencia no puede ser tan grande como para conducir a valores de t que exceden de 2.306 (positivos o negativos).

Ahora bien nuestra t empírica es mucho más grande que 2.306, por ello rechazamos la hipótesis nula que $b=0$ (que no hay relación lineal entre X y Y en la población) y aceptando la hipótesis alternativa, H_a de que $b \neq 0$. Decimos que nuestro coeficiente de regresión es significativo a un nivel de significación del 5%. Si la t empírica hubiera sido menor que 2.306, diríamos que el coeficiente de regresión $\hat{b}=0.7136$ no sería significativo. La diferencia entre \hat{b} y cero sería pequeña. En este caso se dice que hay relación lineal porque se rechazó que $b=0$; en concreto, aceptamos la bondad o calidad de las estimaciones, aceptando H_a .

Gráficamente lo anterior se ilustra así:

$H_0: b=0$ con $\alpha=5\%$ y $n-2=8$ grados de libertad tenemos $t_{\alpha} = \pm 2.306$;
 $H_a: b \neq 0$ llamado punto crítico para aceptar o rechazar H_0



rechazamos H_0 porque $t_\alpha < t_b$ luego b es diferente de cero, hay una diferencia significativa que no puede atribuirse a la selección aleatoria de la muestra, *sino a los valores de la variable exógena X explicando la variable endógena Y .*

Por otra parte para calcular los límites o bandas de confianza, se parte del razonamiento de que algunos parámetros poblacionales se pueden estimar calculando el intervalo o banda de confianza en torno al valor del estimador; si el valor hipotético del parámetro esta contenido dentro del intervalo, se acepta la hipótesis; si no, se rechaza. Ahora bien si el nivel de significación es de 5%, ello equivale al error de excluir el valor correcto del parámetro poblacional del intervalo de confianza. Por ello la probabilidad de incluirlo en el intervalo de confianza es de 95%. Decir que \hat{b} es significativo al 5% de nivel de significación, es decir que la probabilidad es de 95%, que los límites de confianza incluyen o contengan el verdadero parámetro poblacional.

Los límites de confianza se pueden calcular para un coeficiente de confianza del 95% sustituyendo el valor teórico de $t_\alpha = \pm 2.306$ por el valor empírico $t_b = \frac{0.7136 - b}{0.1245} = 5.7317$ resolviendo la ecuación para b obtenemos:

- a) $0.7136 - b = +2.306(0.1245) = 0.2871$
 $b = 0.7136 - 0.2871 = 0.4265 = \text{Límite inferior}$
- b) $0.7136 - b = -2.306(0.1245) = -0.2871$
 $b = 0.7136 + 0.2871 = 1.0007 = \text{Límite superior}$

Interpretación: Los límites que comprenden el coeficiente verdadero de la población (b) a un nivel de probabilidad del 95% son: 0.4265 y 1.0007

Comparación de $S_{\hat{b}}$ con $\hat{\sigma}$

Sabemos que $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum(Y - \hat{Y})^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{103.64}{10 - 2}} = 3.5999$ y que $S_{\hat{b}} = 0.1245$

Se ve que $\hat{\sigma} = 3.5999 > S_{\hat{b}} = 0.1245$ por que este último estima b a partir de \hat{b} , en tanto que el primero es mayor porque estima Y a partir de \hat{Y} .

V. PRUEBA DE SIGNIFICACION DE (R)⁸.

Coeficiente de correlación:

Se prueba que $r=0$ e indica que X no explica a Y.

Se hace con la fórmula $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$ luego trabajando con los datos de la tabla anterior y sabiendo que $n=10$; $r=0.897$ y $R^2=0.805$ tenemos

$$t = \frac{0.897\sqrt{8}}{\sqrt{1-0.805}} = \frac{0.897(2.37)}{0.442} = 5.74.$$

Puesto que con $\alpha=5\%$ y 8 grados de libertad la tabla dice que $t_{\alpha}=\pm 2.306$ rechazamos la hipótesis que $r=0$ y decimos que r es significativo con $\alpha=5\%$; que x explica el 80% de los cambios en Y, el 20% restante los explican otras variables denotadas por " e_i ".

De esta prueba de hipótesis se derivan dos propiedades:

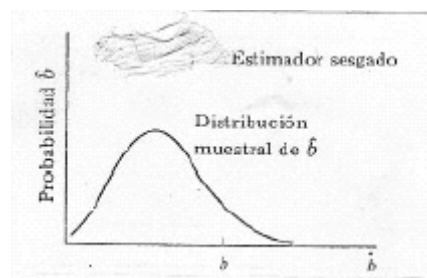
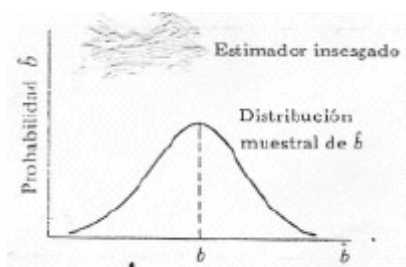
- 1.-A medida que r crece es más probable que sea significativa.
2. Este valor de $t=5.74$ es igual al de $t=5.74$ cuando probamos \hat{b} porque la hipótesis de que $b=0$ implica la hipótesis que $r=0$.

VI. PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES ⁸

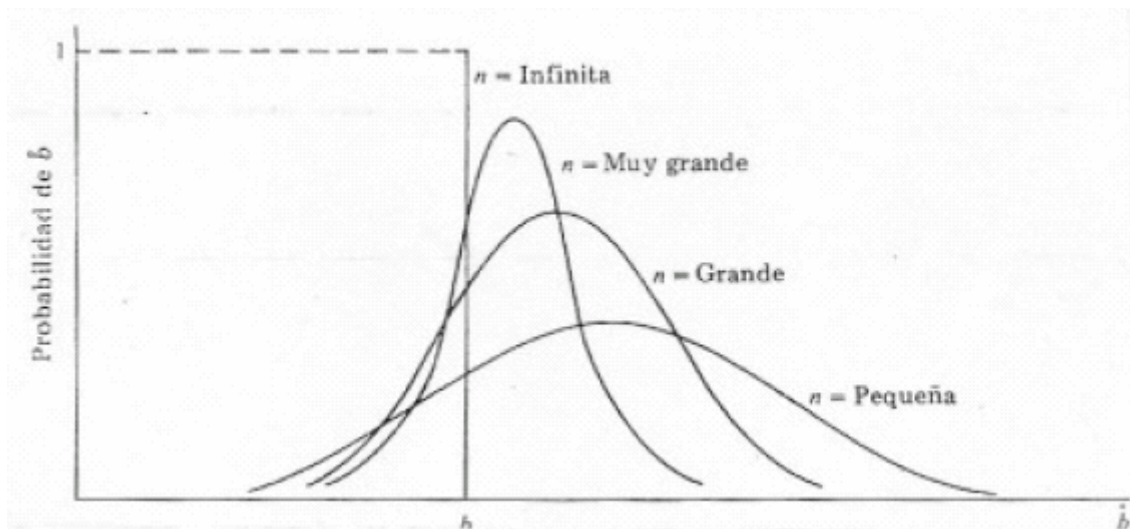
La inferencia que hacemos de una muestra sobre una población estadística en cierto sentido pasa a través de la distribución de muchas muestras o de una muestra más grande, aún cuando observamos una sola muestra de un tamaño fijo determinado. En otras palabras, la bondad o calidad de un estimador obtenido de una muestra es evaluada parcialmente en términos de lo que se espera que sucedería si muchas muestras estuvieran disponibles o si el tamaño de muestra pudiera aumentarse a nuestro antojo.

Hay cuatro propiedades que debe tener un buen estimador (o también llamado "estadística" muestral).

1. Insesgado. Una propiedad deseada en un estimador es que este sea insesgado. Un estimador insesgado es aquel que su valor promedio o esperado es igual al valor verdadero, del parámetro poblacional. Gráficamente⁹:

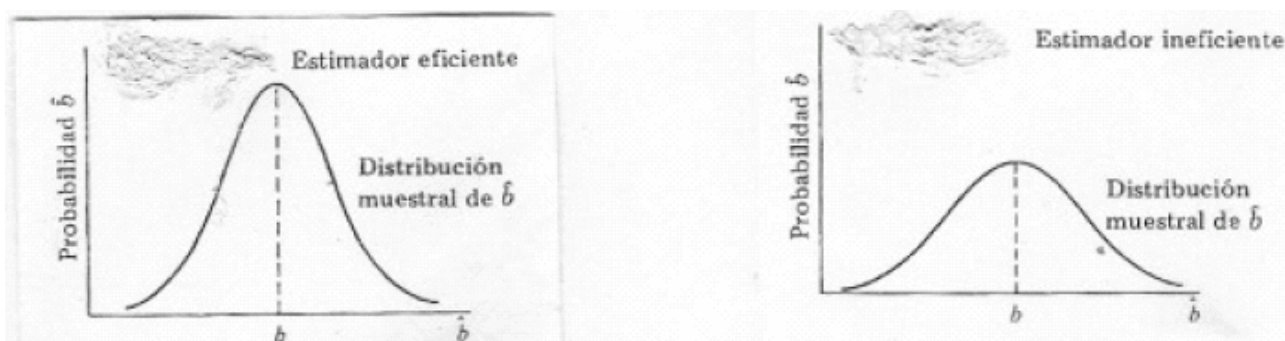


2. Consistente. Una segunda propiedad deseada en un estimador es que este sea consistente. Una “estadística” consistente es la que se acerca al valor del parámetro poblacional a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Aquí va la gráfica



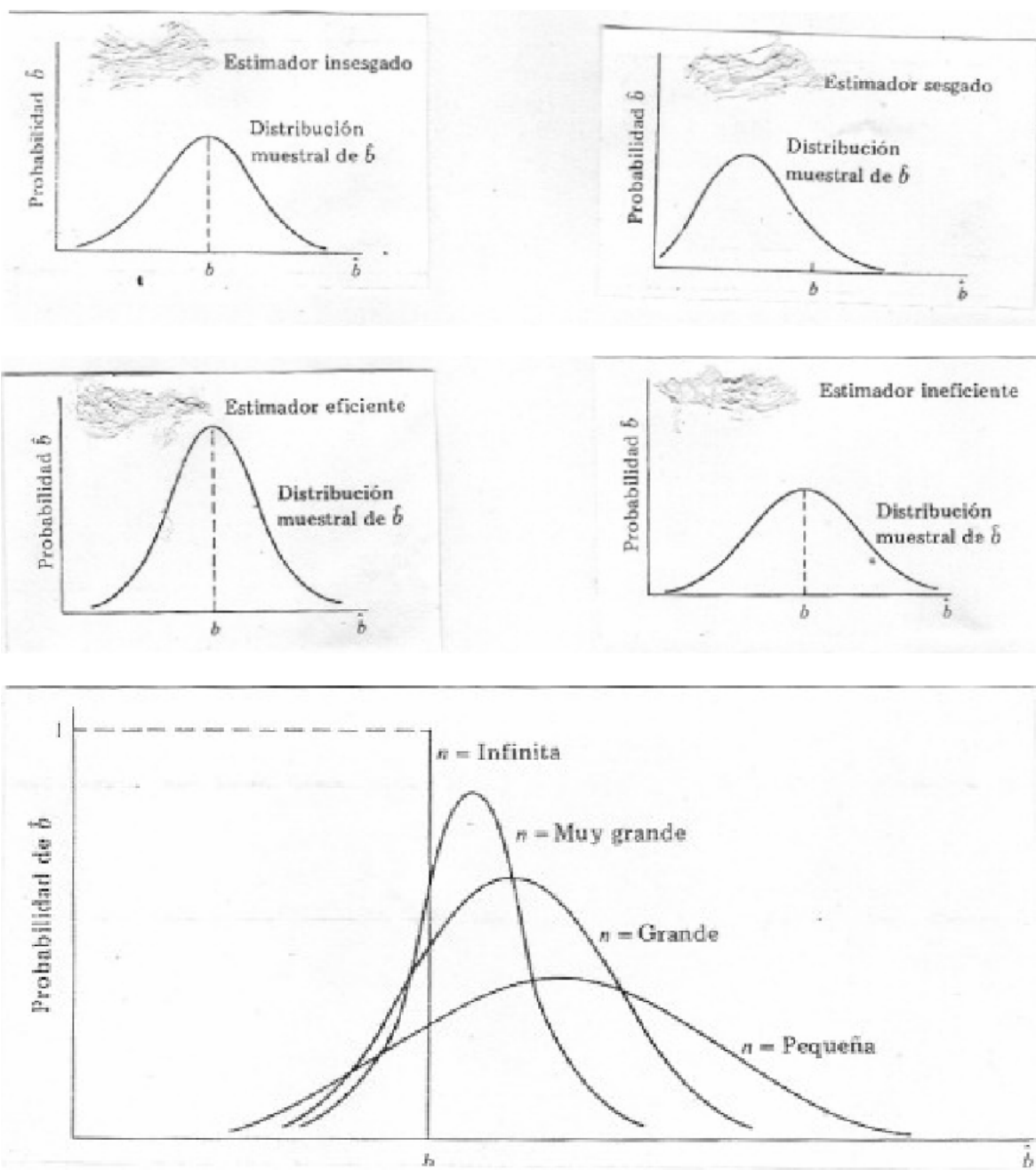
Vemos que cuando n crece \hat{b} se acerca a b y que cuando n se acerca al infinito en el límite, la distribución de \hat{b} cae sobre b .

3. Eficiente. Una “estadística” eficiente es aquella que tiene la varianza mínima entre todos los estimadores posibles. En términos del grado, mientras más eficiente es una “estadística” más pequeña es la varianza de su distribución. Aquí va la gráfica



4. Suficiente. Una “estadística” o estimador suficiente es aquel que contiene toda la información disponible de la muestra que usamos para inferir al parámetro poblacional.

Las siguientes cuatro figuras se resumen en la siguiente forma.



Al respecto es importante señalar que en la actual investigación empírica en economía a menudo debemos contentarnos con que los estimadores que posean una o más de estas propiedades, *pero no todas ellas*. Suponiendo que hay más de un método para estimar un parámetro, un estimador determinado se considera superior con respecto a otros si posee más propiedades que los otros. De gran importancia es que sea insesgado y consistente⁸.

Curso de introducción a la econometría: Facultad de Economía de la UNAM

Dr. Genaro Sánchez Barajas : Primer examen parcial.

Nombre del alumno.....calif_____

I.-Conteste con un si o un no las siguientes 10 preguntas:

- 1.- La econometría expresa y mide las relaciones entre Y e X: Si_____;No_____
- 2.- Los modelos multiecuacionales son los únicos que se usan: SI____;NO_____
- 3.-La covarianza mide la relación univoca entre Y e X: SI_____;NO_____
- 4.- El valor del coeficiente de determinación entre -1,0 y +1:SI____;NO_____
- 5.-La variable dicotómica expresa cuantitativamente un atributo: SI____;NO_____
- 6.- Una variable retardada es estática en el tiempo: SI_____;NO_____
- 7.-La variables aleatoria también se llama estocástica: SI____;NO_____
- 8.- Todas las perturbaciones aleatorias tienen la misma varianza: SI____;NO_____
- 9.- El método de mínimos cuadrados no produce la variación mínima en los estimadores con respecto a los parámetros que estiman: SI_____:NO_____
- 10.-El diagrama de dispersión ayuda a identificar la forma funcional: SI_____;NO_____

Cada respuesta cuenta medio punto, es decir, en total 5.0 puntos

II.-Resuelva el siguiente ejercicio e interprete los resultados principales: los coeficientes de la ecuación, los de correlación y determinación.

Suponga que el consumo (Y) y el ingreso (X) para los últimos 4 años (en millones de pesos) son los siguientes:

<i>Año</i>	<i>(Y_i)</i>	<i>(X_i)</i>				
<i>1</i>	3	5				
<i>2</i>	4	6				
<i>3</i>	5	8				
<i>4</i>	8	9				

Se desea probar la hipótesis de que el consumo en México depende de las variaciones que experimenta el ingreso, ¿es cierto?

Este ejercicio cuenta cinco puntos, es decir, 5.0