PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA
SEMESTRE 2013-II

PUCP

18-10-13

ECONOMETRÍA 1: SOLUCIONARIO PRÁCTICA DIRIGIDA 6

Profesor:	Gabriel Rodríguez	(gabriel.rodriguez@pucp.edu.pe)
Jefe de práctica:	Patricia Lengua Lafosse	(patricia.lengua@pucp.pe)

1 Heterocedasticidad

1. Explique en qué consiste la heterocedasticidad y cuáles son sus consecuencias.

SOLUCIÓN

La heterocedasticidad ocurre cuando las varianzas de los términos de perturbación ya no son constantes entre las observaciones. Esto es:

$$Var(\epsilon_i|\mathbf{X}_i) = \sigma_i^2, \qquad t = 1, ..., N. \tag{1}$$

Asumiendo que los términos de perturbación siguen estando no correlacionados, tenemos que:

$$\sum = Var(\epsilon) = E\left[\epsilon\epsilon'|\mathbf{X}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

El caso más simple de heterocedasticidad es cuando la varianza de las observaciones es proporcional a una variable w_i, por lo que se cumple que: $\sigma_i^2 = \sigma^2\omega_i$. De esta forma:[1]

$$\sum = Var(\epsilon) = E\left[\epsilon\epsilon'|\mathbf{X}\right] = \sigma^2\mathbf{\Omega} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_N \end{bmatrix} \tag{3}$$

Consecuencias:

- Estimadores MCO siguen siendo insesgados, consistentes y con distribución asintótica normal (La heterocedasticidad no genera sesgo).
- Sin embargo, ya no son eficientes ya que los estimadores de las varianzas de los estimadores MCO resultan ser sesgados. La fórmula $\sigma^2(X'X)^{-1}$ ya no es válida. La verdadera varianza es $\sigma^2(X'X)^{-1}(X'\Omega X)(X'X)^{-1}$ Dado que los errores estándares de MCO se basan directamente en estas varianzas, ya no son válidos para procedimientos de inferencia (intervalos de confianza y pruebas de hipótesis).

[1] De aquí se puede ver que el modelo de regresión clásico homocedástico es una caso particular cuando $\omega_i = 1\ \forall i$. Recordar que en el modelo de regresión clásico con Homocedasticidad, teniamos que:

$$Var(\epsilon) = E\left[\epsilon\epsilon'|\mathbf{X}\right] = \sigma^2\mathbf{I} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Los estimadores MCO ya no son MELI. Es posible hallar estimadores más eficientes que los estimadores MCO en presencia de heterocedasticidad.

2. Considere el siguiente modelo:
$$Y = X\beta + \epsilon \tag{4}$$
donde se cumplen todos los supuestos clásicos, excepto el supuesto de homocedasticidad. En este caso tenemos $\Sigma = E(\epsilon\epsilon') = \sigma^2\Omega$.

   (a) Mostrar las propiedades del estimador MCO: $\widehat{\beta}_{MCO}$.

   (b) Calcular el estimador de mínimos cuadrados generalizados: $\widehat{\beta}_{MCG}$.

   (c) Mencione cuáles son las propiedades del estimador $\widehat{\beta}_{MCG}$.

SOLUCIÓN

(a) Mostrar las propiedades del estimador MCO: $\widehat{\beta}_{MCO}$.

Propiedades en muestras finitas:

- $\widehat{\beta}_{MCO}$ **es insesgado:**
$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{MCO} &= (X'X)^{-1}X'Y \\ \widehat{\beta}_{MCO} &= (X'X)^{-1}X'(X\beta+\epsilon) \\ \widehat{\beta}_{MCO} &= \beta + (X'X)^{-1}X'\epsilon \end{aligned} \tag{5}$$

  Si X es no estocástico:

  Tomando la esperanza condicional en X, tenemos que:[2]
$$\begin{aligned} E(\widehat{\beta}_{MCO}|X) &= E(\beta + (X'X)^{-1}X'\epsilon\big| X) \\ E(\widehat{\beta}_{MCO}|X) &= \beta + E((X'X)^{-1}X'\epsilon\big| X) \\ E(\widehat{\beta}_{MCO}|X) &= \beta \quad \rightarrow \quad \widehat{\beta}_{MCO} \text{ es insesgado} \end{aligned} \tag{6}$$

  Si X es estocástico:[3]
$$E(\widehat{\beta}_{MCO}) = E_X\left\{E(\widehat{\beta}_{MCO}|X)\right\} = E_X[\beta] = \beta \quad \rightarrow \quad \widehat{\beta}_{MCO} \text{ es insesgado} \tag{7}$$

- **Varianza del estimador** $\widehat{\beta}_{MCO}$:

  Si X es no estocástico:
$$\begin{aligned} Var(\widehat{\beta}_{MCO}|X) &= E\left[(\widehat{\beta}_{MCO}-\beta)(\widehat{\beta}_{MCO}-\beta)'|X\right] \\ &= E\left[((X'X)^{-1}X'\epsilon)((X'X)^{-1}X'\epsilon)'|X\right] \\ &= E\left[(X'X)^{-1}X'\epsilon\epsilon'X(X'X)^{-1}|X\right] \\ &= (X'X)^{-1}X'E(\epsilon\epsilon')X(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1}(X'\Omega X)(X'X)^{-1} \end{aligned} \tag{8}$$

[2] Recordar que $E(\epsilon|X) = 0$.

[3] Por la ley de Esperanzas Iteradas:
$$E(M) = E_N[E(M|N)]$$
donde $E_N[.]$ indica la esperanza sobre los valores de N.

lo cual se puede escribir como:

$$Var(\widehat{\beta}_{MCO}|X) = \frac{\sigma^2}{N}\left[\frac{1}{N}X'X\right]^{-1}\left[\frac{1}{N}X'\Omega X\right]\left[\frac{1}{N}X'X\right]^{-1} \tag{9}$$

Si X es estocástico:

$$Var(\widehat{\beta}_{MCO}) = E_X\left\{Var(\widehat{\beta}_{MCO}|X)\right\} \tag{10}$$

Además, si ϵ se distribuye como una Normal, entonces: $\widehat{\beta}_{MCO} \sim N\left[\beta, \sigma^2(X'X)^{-1}(X'\Omega X)(X'X)^{-1}\right]$.

Lo único que cambia respecto al modelo de regresión clásico es la varianza del estimador que ahora no es $\sigma^2(X'X)^{-1}$, por lo que las inferencias basadas en esta última están sesgadas. Por otro lado, el estimador de σ^2 (s^2) no tiene por qué haber retenido sus propiedades, de hecho es un estimador sesgado.

Propiedades en muestras grandes:

- **Consistencia del estimador $\widehat{\beta}_{MCO}$:**

Sabemos que si $P\lim Var(\widehat{\beta}_{MCO}) = 0$, entonces $\widehat{\beta}_{MCO}$ es consistente[4].

Sabiendo que $P\lim \frac{X'X}{N} = Q$, donde Q es una matriz definida positiva.Volviendo a la ecuación (9) y resolviendo $P\lim Var(\widehat{\beta}_{MCO})$, tenemos:

$$P\lim Var(\widehat{\beta}_{MCO}|X) = P\lim(\frac{\sigma^2}{N})p\lim\left[\frac{1}{N}X'X\right]^{-1}p\lim\left[\frac{1}{N}X'\Omega X\right]p\lim\left[\frac{1}{N}X'X\right]^{-1}$$

-> $P\lim\left(\frac{\sigma^2}{N}\right) = 0$,
-> $P\lim\left[\frac{1}{N}X'X\right]^{-1} = Q^{-1}$ una matriz finita,
-> $P\lim\left[\frac{1}{N}X'\Omega X\right] =$ matriz finita (si los regresores cumplen las condiciones de Grenander).

$$P\lim Var(\widehat{\beta}_{MCO}|X) = 0 \times Q^{-1} \times p\lim\left[\frac{1}{N}X'\Omega X\right] \times Q^{-1} = 0 \tag{11}$$

De esta forma, $P\lim Var(\widehat{\beta}_{MCO}) = 0$ y se muestra que $\widehat{\beta}_{MCO}$ es consistente.

- **Normalidad asintótica del estimador $\widehat{\beta}_{MCO}$:**

El estimador $\widehat{\beta}_{MCO}$ es asintóticamente normal porque las mismas condiciones de Grenander impuestas para que :

$$\sqrt{N}(\widehat{\beta}_{MCO} - \beta) = \left[\frac{1}{N}X'X\right]^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{N}}X'\epsilon\right]$$

[4] Es una forma alternativa de comprobar que $P\lim\widehat{\beta}_{MCO} = \beta$.

se distribuya asintóticamente normal, se cumplen aún si hay heterocedasticidad. En este caso, atmbién se aplica el teorema de Límite Central. De esta forma, la varianza asintótica del estimador $\widehat{\beta}_{MCO}$ será:

$$AVar(\widehat{\beta}_{MCO}) = \frac{\sigma^2}{N}Q^{-1}P\lim(\frac{1}{N}X'\Omega X)Q^{-1} \tag{12}$$

En resumen, la heterocedasticidad no afecta la estimación de los parámetros porque éstos no dependen de la varianza de la distribución. Pero, obviamente afecta la varianza del estimador.

(b) Calcular el estimador de mínimos cuadrados generalizados: $\widehat{\beta}_{MCG}$.

El problema que presenta la existencia de heterocedasticidad es exactamente nuestra ignorancia respecto a la estructura de ésta; es decir, respecto de $E[\epsilon\epsilon']$. El estimador de mínimos cuadrados generalizados es un estimador eficiente bajo el supuesto que conocemos $E[\epsilon\epsilon']$. Si no conocemos $E[\epsilon\epsilon']$, se tiene que usar el estimador de mínimos cuadrados fáctibles (MCGF). forma de la heterocedast.

Si conocemos $E[\epsilon\epsilon'] = \sigma^2\Omega$, donde Ω es simétrica y definida positiva, el modelo $Y = X\beta + \epsilon$ con $E(\epsilon\epsilon') = \sigma^2\Omega$ puede ser tranformado multiplicando por una matriz $P_{T\times T}$:

$$\begin{aligned} PY &= PX\beta + P\epsilon \\ Y^* &= X^*\beta + \epsilon^* \end{aligned} \tag{13}$$

con $X^* = PX$ y $Y^* = PY$ donde:

$$E(\epsilon^*) = E(P\epsilon) = 0 \tag{14}$$

$$Var(\epsilon^*) = E[(P\epsilon)(P\epsilon)'] = PE(\epsilon\epsilon')P' = \sigma^2 P\Omega P' \tag{15}$$

Queremos que el modelo transformado (13) se uno con perturbaciones esféricas: $E(\epsilon^*) = 0$ y $Var(\epsilon^*) = \sigma^2 I$, pues podremos estimar el modelo (13) por mínimos cuadrados ordinarios ya que los erorres serían homodedásticos y podremos recuperar los estimadores del modelo original. La primera condición se cumple, para que la segunda condición se cumple tiene que suceder que $P\Omega P' = I$, esto sucede cuando $\Omega^{-1} = P'P$. Finalmente, el estimado $\widehat{\beta}_{MCG}$ no es más que el estimador MCO del modelo transformado:

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{MCG} &= (X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}Y^* \\ \widehat{\beta}_{MCG} &= ((PX)'(PX))^{-1}(PX)'(PY) \\ \widehat{\beta}_{MCG} &= (X'P'PX)^{-1}(X'P'PY) \\ \widehat{\beta}_{MCG} &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}Y) \end{aligned} \tag{16}$$

Notar que el estimador MCO es un caso particualr de MCG cuando $P = I$. Si no conocemos $E[\epsilon\epsilon']$, se tiene que usar el estimador de mínimos cuadrados fáctibles (MCGF), para esto se tiene que estimar Ω con algún estimador consistente. De esta forma: (feasible)

$$\widehat{\beta}_{MCGF} = (X\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}(X'\widehat{\Omega}^{-1}Y) \tag{17}$$

(c) Mencione cuáles son las propiedades del estimador $\widehat{\beta}_{MCG}$.

Propiedades en muestras finitas:

- $\widehat{\beta}_{MCG}$ **es insesgado:**

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{MCG} &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}(X\beta+\epsilon)) \\ \widehat{\beta}_{MCG} &= \beta+(X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}\epsilon)\end{aligned} \tag{18}$$

Si X es no estocástico:

Tomando la esperanza condicional en X, tenemos que:[5]

$$\begin{aligned}E(\widehat{\beta}_{MCG}|X) &= \beta+E\left[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}\epsilon)\middle|\,X\right] \\ E(\widehat{\beta}_{MCG}) &= \beta \quad\rightarrow\quad \widehat{\beta}_{MCG} \text{ es insesgado}\end{aligned} \tag{19}$$

Si X es estocástico:[6]

$$E(\widehat{\beta}_{MCG}) = E_X\left\{E(\widehat{\beta}_{MCG}|X)\right\} = E_X\left[\beta\right] = \beta \quad\rightarrow\quad \widehat{\beta}_{MCG} \text{ es insesgado} \tag{20}$$

- **Varianza del estimador** $\widehat{\beta}_{MCO}$:

Si X es no estocástico:

$$\begin{aligned}Var(\widehat{\beta}_{MCG}|X) &= E\left[(\widehat{\beta}_{MCG}-\beta)(\widehat{\beta}_{MCG}-\beta)'|X\right] \\ &= E\left[((X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}\epsilon))(((X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}\epsilon))'|X\right] \\ &= E\left[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\epsilon\epsilon'\Omega^{-1'}X(X'\Omega^{-1'}X)^{-1}|X\right] \\ &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}E(\epsilon\epsilon')\Omega^{-1'}X(X'\Omega^{-1'}X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1'}X(X'\Omega^{-1'}X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}\end{aligned} \tag{21}$$

lo cual se puede escribir como:

$$Var(\widehat{\beta}_{MCG}|X) = \frac{\sigma^2}{N}\left[\frac{1}{N}X'\Omega X\right]^{-1} \tag{22}$$

Si X es estocástico:

$$Var(\widehat{\beta}_{MCG}) = E_X\left\{Var(\widehat{\beta}_{MCG}|X)\right\} \tag{23}$$

Además, si ϵ se distribuye como una Normal, entonces: $\widehat{\beta}_{MCO} \sim N\left[\beta, \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}\right]$.

Propiedades en muestras grandes:

[5] Recordar que $E(\epsilon|X)=0$.

[6] Por la ley de Esperanzas Iteradas:

$$E(M) = E_N\left[E(M|N)\right]$$

donde $E_N\left[.\right]$ indica la esperanza sobre los valores de N.

- **Consistencia del estimador $\widehat{\beta}_{MCG}$:**

  Sabemos que si $P\lim Var(\widehat{\beta}_{MCG}) = 0$, entonces $\widehat{\beta}_{MCG}$ es consistente[7].

  Si $P\lim(\frac{1}{N}X^{*\prime}X^*) = Q^*$ donde Q^* es una matriz finita definida positiva. Sustituyendo $X^* = PX$, esto implica que $P\lim\left[\frac{1}{N}X'\Omega X\right]^{-1} = Q^{*^{-1}}$. Volviendo a la ecuación (22) y resolviendo $P\lim Var(\widehat{\beta}_{MCG})$, tenemos:

$$P\lim Var(\widehat{\beta}_{MCG}|X) = P\lim(\frac{\sigma^2}{N})p\lim\left[\frac{1}{N}X'\Omega X\right]^{-1}$$

  --> $P\lim\left(\frac{\sigma^2}{N}\right) = 0$,
  --> $P\lim\left[\frac{1}{N}X'X\right]^{-1} = Q^{*^{-1}}$ una matriz finita.

$$P\lim Var(\widehat{\beta}_{MCG}|X) = 0 \times Q^{*^{-1}} = 0 \tag{24}$$

  De esta forma, $P\lim Var(\widehat{\beta}_{MCG}) = 0$ y se muestra que $\widehat{\beta}_{MCG}$ es consistente.

- **Normalidad asintótica del estimador $\widehat{\beta}_{MCG}$:**

  El estimador $\widehat{\beta}_{MCG}$ es asintóticamente normal con media β y varianza asintótica:

$$AVar(\widehat{\beta}_{MCG}) = \sigma^2(\frac{1}{N}X^{*\prime}X^*)^{-1} = \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1} \tag{25}$$

  Dado que los estimadores MCG son MELI, son más eficientes que los estimadores MCO.

3. Dado que existe una matriz no singular P tal que $\Omega^{-1} = P'P$ nuestro modelo se puede transformar en lo siguiente:

$$\begin{aligned} PY &= PX\beta + P\epsilon \qquad (26) \\ Y^* &= X^*\beta + \epsilon^* \end{aligned}$$

   Demostrar lo siguiente:

   (a) $E(\epsilon^*) = 0$
   (b) $Var(\epsilon^*) = \sigma^2 I$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} E(\epsilon^*) &= E(P\epsilon) = 0 \qquad (27) \\ Var(\epsilon^*) &= E\left[(P\epsilon)(P\epsilon)'\right] = PE(\epsilon\epsilon')P' = \sigma^2 P\Omega P' \qquad (28) \end{aligned}$$

1. Si $\Omega^{-1} = P'P$, tenemos que $Var(\epsilon^*) = \sigma^2 P(P'P)^{-1}P' = \sigma^2 PP^{-1}P'^{-1}P' = \sigma^2 I$.

[7] Es una forma alternativa de comprobar que $P\lim\widehat{\beta}_{MCG} = \beta$.

4. Considere el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_2 X_{3i} + ... + \beta_k X_{ki} + \epsilon_i \tag{29}$$

donde se cumplen todos los supuestos clásicos, excepto el supuesto de homocedasticidad. En este caso tenemos $E(\epsilon\epsilon') = \sigma^2\Omega$, siendo Ω una matriz diagonal definida de la siguiente manera:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \omega_i \end{bmatrix} \tag{30}$$

(a) Si denominamos a $\epsilon^* = P\epsilon$. Determinar la matriz no singular P tal que $E(\epsilon^*\epsilon^{*\prime}) = \sigma^2 I_N$.

(b) Teniendo en cuenta la pregunta anterior y para el caso en que solo hay un regresor y $\beta_1 = 0$, obtener, bajo el supuesto de heterocedasticidad, el estimador MCG de β_2 y su varianza para los siguientes casos:

$$(i)\ \omega_i = 1,\ (ii)\ \omega_i = X_i,\ (iii)\ \omega_t = X_i^{0.5} \text{ y } (iv)\ \omega_i = X_t^2$$

SOLUCIÓN

(a) Si denominamos a $\epsilon^* = P\epsilon$. Determinar la matriz no singular P tal que $E(\epsilon^*\epsilon^{*\prime}) = \sigma^2 I_N$.

$$\begin{aligned} E(\epsilon^*\epsilon^{*\prime}) &= E((P\epsilon)(P\epsilon)') = E(P\epsilon\epsilon'P') = PE(\epsilon\epsilon')P' = \sigma^2 P\Omega P' \\ &= \sigma^2 I_N \end{aligned} \tag{31}$$

Entonces $P\Omega P' = I_N$, y se desprende que $\Omega = P^{-1}P'^{-1}$ y $\Omega^{-1} = P'P$.

Entonces por dato $\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \omega_N \end{bmatrix}$ y $\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\omega_N} \end{bmatrix}$

Una matriz P que cumple que $\Omega^{-1} = P'P$ es $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_N \end{bmatrix}$ ya que:

$$P'P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_N^2 \end{bmatrix}$$

donde $\Omega^{-1} = P'P = \begin{bmatrix} P_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\omega_N} \end{bmatrix}$

De esta forma se encuentra que $P_i^2 = \frac{1}{\omega_i}$. Así. $P_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}$ y la matriz no singular P tal que $E(\epsilon^* \epsilon^{*\prime}) = \sigma^2 I_N$ es:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_N}} \end{bmatrix} \tag{32}$$

(b) Teniendo en cuenta la pregunta anterior y para el caso en que solo hay un regresor y $\beta_1 = 0$, obtener, bajo el supuesto de heterocedasticidad, el estimador MCG de β_2y su varianza para los siguientes casos:

$$(i)\ \omega_i = 1,\ (ii)\ \omega_i = X_i,\ (iii)\ \omega_i = X_i^{0.5}\ \text{y}\ (iv)\ \omega_t = X_i^2 \tag{33}$$

Aplicamos MCO al modelo transformado:

$$PY = PX\beta + P\epsilon \tag{34}$$

o (Bivariado sin intercepto)
como solo hay un regresor y $\beta_1 = 0$, entonces el modelo transformado es:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{2N} \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix} \tag{35}$$

(a)

$$\begin{bmatrix} \frac{Y_1}{\sqrt{\omega_1}} \\ \frac{Y_2}{\sqrt{\omega_2}} \\ \vdots \\ \frac{Y_N}{\sqrt{\omega_N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_{21}}{\sqrt{\omega_1}} \\ \frac{X_{22}}{\sqrt{\omega_2}} \\ \vdots \\ \frac{X_{2N}}{\sqrt{\omega_N}} \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_1}{\sqrt{\omega_1}} \\ \frac{\epsilon_2}{\sqrt{\omega_2}} \\ \vdots \\ \frac{\epsilon_N}{\sqrt{\omega_N}} \end{bmatrix} \tag{36}$$

En este caso, podemos hallar $\widehat{\beta}_{MCG}$ se aplica MCO al modelo transformado y se puede hallar $\widehat{\beta}_{MCG}$ con la fórmula del modelo bivariado sin intercepto :

$$\widehat{\beta}_{MCG} = \frac{\sum \frac{X_i}{\sqrt{w_i}} \frac{Y_i}{\sqrt{w_i}}}{\sum \left(\frac{X_i}{\sqrt{w_i}}\right)^2} = \frac{\sum \frac{X_i Y_i}{w_i}}{\sum \frac{X_i^2}{w_i}} \tag{37}$$

La varianza de $\widehat{\beta}_{MCG}$ es:

$$Var(\widehat{\beta}_{MCG}) = \sigma^2 (X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \frac{\sigma^2}{\sum \frac{X_i^2}{w_i}} \tag{38}$$