PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA
SEMESTRE 2013-II

ECONOMETRÍA 1: PRÁCTICA DIRIGIDA 5

Curso:	Econometría 1	
Profesor:	Gabriel Rodríguez	(gabriel.rodriguez@pucp.edu.pe)
Jefe de práctica:	Patricia Lengua Lafosse	(patricia.lengua@pucp.pe)

1. Suponga que el verdadero modelo que deseamos estimar es:

$$Y = X_1\beta_1 + \epsilon \qquad \text{(Modelo Correcto)} \qquad (1)$$

Sin embargo, al hacer la estimación incluimos erróneamente un grupo de variables X_2 que no son relevantes, por tanto estimamos el siguiente modelo incorrecto:

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \epsilon \qquad \text{(Modelo Incorrecto)} \qquad (2)$$

(a) Muestre que el estimador MCO de β_1 en el modelo incorrecto es insesgado.

(b) Muestre que la varianza de $\widehat{\beta}_1$ del modelo incorrecto es mayor que la varianza de $\widehat{\beta}_1$ del modelo correcto.

(c) Plantee la hipótesis de relevancia del estimador de la variable X_2 utilizando la prueba F.

2. Suponga que se estima el siguiente modelo por MCO:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \epsilon_t \qquad \text{(Modelo Incorrecto)} \qquad (3)$$

Sin embargo, el verdadero valor de la constante es cero. Esto es:

$$Y_t = \beta_2 X_t + \epsilon_t \qquad \text{(Modelo Correcto)} \qquad (4)$$

Compare las varianzas de la pendiente estimada por MCO del modelo sin el término constante con la varianza de la pendiente estimada del modelo que tiene en cuenta una término constante irrelevante.

3. Considere el siguiente modelo:

$$\ln(salario_i) = \beta_0 + \beta_1 educ_i + \epsilon_i$$

donde: *salario* es el salario percibido por el individuo i y *educ* es el número de años de educación del individuo i. Se tienen los siguientes datos para una muestra de 5 individuos:

salario	*educ*	ln salario
562	6	6,33
650	10	6,47
769	15	6,64
808	18	6,69
825	19	6,71

(a) Encuentre el R^2 y R^2 ajustado.

(b) Encuentre el criterio de información de Akaike.

(c) Encuentre el criterio de Schwartz.

Practica Dirigida 5

1. Modelo Correcto: $Y = X_1\beta_1 + \epsilon$
   Modelo Incorrecto: $Y_1 = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \epsilon$

$$X = [X_1 \vdots X_2] \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad Y = X\beta + e$$

Sabemos que: $\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y \rightsquigarrow (X'X)\hat{\beta} = X'Y$

∘) $X'X = \begin{bmatrix} X_1' \\ \cdots \\ X_2' \end{bmatrix} [X_1 \vdots X_2] = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & \vdots & X_1'X_2 \\ \cdots & & \cdots \\ X_2'X_1 & \vdots & X_2'X_2 \end{bmatrix}$

∘) $X_1'X_1\hat{\beta}_1 + X_1'X_2\hat{\beta}_2 = X_1'Y \quad \ldots (a)$
$X_2'X_1\hat{\beta}_1 + X_2'X_2\hat{\beta}_2 = X_2'Y \quad \ldots (b)$

De (b): $X_2'X_2\hat{\beta}_2 = X_2'Y - X_2'X_1\hat{\beta}_1$
$\rightarrow \hat{\beta}_2 = (X_2'X_2)^{-1}(X_2'Y - X_2'X_1\hat{\beta}_1)$

Reemplazo en (a):

$$X_1'X_1\hat{\beta}_1 + X_1'X_2[(X_2'X_2)^{-1}(X_2'Y - X_2'X_1\hat{\beta}_1)] = X_1'Y$$
$$X_1'X_1\hat{\beta}_1 + X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'Y - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2X_1\beta_1 = X_1'Y$$
$$X_1'[I - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2']X_1\hat{\beta}_1 = X_1'[I - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2']Y$$
$$X_1'M_2X_1\hat{\beta}_1 = X_1'M_2Y$$
$$\hat{\beta}_1 = (X_1'M_2X_1)^{-1}(X_1'M_2Y)$$

a) Insesgamiento del modelo incorrecto.

$$\breve{\beta}_1 = (X_1'M_2X_1)^{-1}(X_1'M_2(X_1\beta_1 + \epsilon))$$
$$\hat{\beta}_1 = (X_1'M_2X_1)^{-1}(X_1'M_2X_1)\beta + (X_1'M_2X_1)^{-1}X_1'M_2\epsilon$$
$$\breve{\beta}_1 = \beta_1 + (X_1'M_2X_1)^{-1}X_1M_2\epsilon$$

$$E(\hat{\beta}_1) = E[\beta_1 + (X_1'M_2X_1)^{-1}X_1M_2\epsilon]$$

$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \rightsquigarrow$ insesgado

b) Eficiencia en el modelo correcto:

∘) $\hat{\beta}_{1\,correcto} = (X'X)^{-1}(X'Y) \qquad var(\hat{\beta}_1 c) = \sigma^2(X'X)^{-1} \quad (i)$

o) $\hat{\beta}_1 = (X_1' M_2 X_1)^{-1} (X_1 M_2 Y)$

$$var(\hat{\beta}_1) = E[(\hat{\beta}_1 - \underbrace{E(\hat{\beta}_1)}_{\beta_1})(\hat{\beta}_1 - \underbrace{E(\hat{\beta}_1)}_{\beta_1})']$$

$$var(\hat{\beta}_1) = E[\{(X_1' M_2 X_1)^{-1} (X_1' M_2 \epsilon)\}\{(X_1' M_2 X_1)^{-1} (X_1' M_2 \epsilon)'\}]$$

$$var(\hat{\beta}_1) = E[(X_1' M_2 X_1)^{-1} X_1' M_2 \epsilon \cdot \epsilon' M_2' X_1 (X_1' M_2' X_1)^{-1}]$$

$\{(A^{-1})' = (A')^{-1}\}$

$$var(\hat{\beta}_1) = (X_1' M_2 X_1)^{-1} X_1 M_2 \cdot E(\epsilon \epsilon') M_2' X_1 (X_1' M_2 X_1)^{-1}]$$

$$var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 I \cancel{(X_1 M_2 X_1)^{-1}} \cdot \cancel{X_1 M_2 M_2' X_1} \cdot (X_1' M_2 X_1)^{-1}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 (X_1' M_2 X_1)^{-1} \quad (ii)$$

Comparando varianzas: (mismas dimensiones en matrices)

* Nota: fc cuadrática $X'AX$

→ Si A es definida positiva $X'AX > 0 \quad \forall X \neq 0$

→ Si A es d negativa $X'AX < 0 \quad \forall X \neq 0$

$$\Rightarrow X_1' X_1 - X_1' M_2 X_1 = X_1' [I - M_2] X_1 = X_1' [I - (I - X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2')] X_1$$

$$= X_1' [\underbrace{X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2'}_{\text{forma cuadrática definida positiva}}] X_1 > 0$$

$\theta^2 B^{-1}$ $\theta^2 A^{-1}$ $< \frac{\theta^2}{B}$ $\frac{\theta^2}{A}$

$A > B$

c) Plantear hipótesis de relevancia de X_2

$H_0: \beta_2 = 0$ } k_2 restricciones.

$H_1: \beta_2 \neq 0$

Modelo irrestricto (incorrecto)

$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon$

Modelo restricto. (correcto)

$Y = \beta_1 X_1 + \epsilon$

$$F = \frac{(SCR_R - SCR_I)/k_2}{SCR_I / T-k} \quad ó \quad F = \frac{(R_R^2 - R_I^2)/k_2}{(1-R_I^2)\ T-K}$$

Modelo correcto

$\theta^2 (X_1' X_1)^{-1}$

Modelo incorrecto

$\theta^2 (X_1' M_2 X_1)^{-1}$

4. Caso particular de pregunta 1.

Modelo correcto: $Y_t = \beta_2 X_t + \epsilon_t$

Modelo incorrecto: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \epsilon_t$

o) Modelo con intercepto:

- $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X} \\ \dfrac{\Sigma (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\Sigma (x_t - \bar{x})^2} \end{bmatrix}$

- $var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$ $\qquad var(\hat{\beta}_2) = \dfrac{\sigma^2}{\Sigma (x_t - \bar{x})^2}$

o) Modelo sin intercepto:

- $\hat{\beta} = (x'x)^{-1}(x'y)$ $\qquad$ con $x = M^0 X \wedge y = M^0 Y$

  $* \; \hat{\beta}_2 = \dfrac{\Sigma x_t y_t}{\Sigma x_t^2}$ $\qquad M^0 = I - (i'i)^{-1} i i'$

- $var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (x'x)^{-1}$ $\qquad * \; var(\hat{\beta}_2) = \dfrac{\sigma^2}{\Sigma x_t^2}$

o) Comparando varianzas

Intercepto $\dfrac{\sigma^2}{\Sigma (x_t - \bar{x})^2} > \dfrac{\sigma^2}{\Sigma x_t^2}$ Sin Intercepto $\qquad$ con: $\bar{X}$ es distinto de cero.

3. Comparando Modelos:

- $R^2 = \dfrac{SCE}{SCT} = 1 - \dfrac{SCR}{SCT}$

- $R^2_{ajustado}: \; 1 - \dfrac{(T-1)}{(T-k)} \cdot (1 - R^2)$

- $AIC = \ln\left(\dfrac{SCR}{T}\right) - \dfrac{2k}{T}$

- $BIC = \ln\left(\dfrac{SCR}{T}\right) - \dfrac{k \ln(T)}{T}$

o) $SCR = \underbrace{\Sigma (y_t - \bar{y})^2}_{SCT} - \underbrace{\hat{\beta}_1^2 \cdot \Sigma (x_t - \bar{x})^2}_{SCE}$

$SCR = 0,1077 - (0,0295)^2 (121,2)$

$SCR = 0,0017$

o) $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\Sigma (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\Sigma (x_t - \bar{x})^2} = \dfrac{3,5857}{121,2} = 0,0295$

$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ $\quad \begin{cases} \bar{X} = 13,6 \\ \bar{y} = 2,85 \end{cases}$ $\qquad \hat{\beta}_0 =$

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{0{,}0017}{0{,}1077} = 0{,}9841$$

$$R^2 \text{ ajustado} := 1 - \frac{(5-1)}{(5-2)} \cdot (1 - 0{,}9841) = 0{,}9788$$

$$AIC = \ln\left(\frac{0{,}0017}{5}\right) - \frac{2\ (2)}{5} = -7{,}1865$$

$$BIC = \ln\left(\frac{0{,}0017}{5}\right) - \frac{2 \ln(5)}{5} = -7{,}3427$$