

[Escribir el nombre de la compañía]

# APUNTES DE INTRODUCCION A LOS MODELOS ECONOMETRICOS

[Escribir el subtítulo del documento]

NARCISO GUARAMATO PARRA



2009

## INTRODUCCION

El presente trabajo tiene como objetivo principal, ayudar a todas aquellas personas con conocimientos limitados de Estadística y Economía, especialmente a los alumnos involucrados en esta cátedra. Aportándoles una herramienta que les proporcione un conocimiento básico de la Econometría.

A lo largo de mi experiencia docente en la Escuela Nacional de Administración y Hacienda Pública I.U.T, y en la Universidad Santa María, he observado con preocupación lo difícil y problemático que le resulta al estudiantado, el inicio del estudio de la Econometría.

Entre los factores que explican esta situación, destacan la deficiencia que traen algunos alumnos en materias imprescindibles para el estudio del tema, como son la Estadística y la Economía. La Econometría involucra todo un bagaje de nuevo vocabulario que dificulta en una primera etapa su entendimiento.

Se ha utilizado la claridad de algunos autores para tratar algunos temas específicos y mi experiencia enseñando la materia, para lograr un texto donde se combinen los fundamentos teóricos básicos de la Econometría con unos ejemplos prácticos, que permitan ver en una forma sencilla sus aplicaciones, usando en varios de ellos el Software econométrico Eviews

En referencia al contenido del texto, inicialmente, en el capítulo I, se hace referencia a los conceptos básicos que se deben manejar en la Econometría. En los capítulos II, III, IV y V se tratan los fundamentos de la regresión mínimo cuadrática. En los capítulos VI, VII y VIII se tocan las diferentes violaciones a los supuestos del modelo mínimo cuadrático Y finalmente en los capítulos IX y X se hacen referencia a algunos temas complementarios.

Es importante señalar que este trabajo, de ninguna manera constituye un tratado de la materia, debido a que en el mercado existen muchos de una excelente calidad. Lo que se ha tratado es de que sin abandonar la formalidad en el tratamiento de los temas, el estudiante pueda tener en sus manos un texto didáctico que le permita iniciar con éxito el estudio de los modelos econométricos

Finalmente, quiero agradecerle a la Escuela Nacional de Administración y Hacienda Pública I.U.T. por haberme invitado como profesor de la materia durante los años 2000 y 2001, y a la Universidad Santa María, donde dicto actualmente Econometría I y II, y en especial a todos mis alumnos por que me permitieron ordenar mis apuntes, fuente de este trabajo.

# CONTENIDO

## I ECONOMETRIA

1. Definición de econometría
2. Evolución histórica de la econometría.
3. Modelos
4. Modelos Econométricos
5. Tipos de modelos Econométricos
6. Formas Funcionales.

## II MODELO DE REGRESION LINEAL UNIECUACIONAL (MODELO CLASICO)

1. Supuestos
2. Propiedades de la Función de Regresión Muestral (FRM)
3. Mejores Estimadores Linealmente Insesgados (MELI)
4. Teorema de Gauss – Markov
5. Estimación de los Parámetros a través del Método de los Mínimos Cuadrados Ordinarios
6. Coeficiente de Determinación
7. Coeficiente de Correlación
8. Estimación por Intervalos
9. Prueba de Hipótesis (Significancia Individual del Coeficiente)
10. Presentación Resumida de los Resultados Obtenidos.

## III SIGNIFICADO DE LOS COEFICIENTES

1. Pendiente de la Ecuación (Variación Marginal)
2. Elasticidad
3. Modelo Logarítmico
4. Ejercicios

## IV MODELO DE REGRESION MULTIPLE

1. Modelo de Regresión Múltiple (2 Variables Explicativas)
2. Prueba F (Significancia Global de los Coeficientes)
3. Ejercicios

## V MODELO DE REGRESIÓN LINEAL CON $k$ VARIABLES EXPLICATIVAS

1. Supuestos del modelo clásico
2. Estimación de los coeficientes de mínimo cuadrados ordinarios.
3. Propiedades MELI de los estimadores mínimo cuadrados,
4. Estimador de la varianza de las perturbaciones ( $\sigma^2$ ).
5. Coeficiente de Determinación.

6. El caso particular de Regresión Simple.
7. Estimador Máximo Verosimil.

## VI MULTICOLINEALIDAD

1. Definición
2. Naturaleza de la Multicolinealidad.
3. Consecuencias de la Multicolinealidad
4. Como Detectar la Multicolinealidad
5. Como solucionar el problema de la Multicolinealidad

## VII HETEROCEDASTICIDAD

1. Definición
2. Consecuencias de la Heterocedasticidad
3. Como Detectar la Heterocedasticidad
4. Como Remediar el Problema de la Heterocedasticidad..
5. ESTIMACION POR MINIMOS CUADRADOS GENERALIZADOS (MCG) y MINIMOS CUADRADOS PONDERADOS (MCP)

## VIII AUTOCORRELACION

1. Definición
2. Como Detectar la Autocorrelación
3. Como Solucionar el Problema de la Autocorrelación

## IX VARIABLES FICTICIAS, MODELOS DE REZAGOS DISTRIBUIDOS Y MODELOS AUTORREGRESIVOS

1. Variables Ficticias o Cualitativas (Variables Dummy)
2. Modelo de Rezagos Distribuidos
3. Modelos Autorregresivos

## X ESTACIONARIEDAD

## XI OTROS TEMAS DE ECONOMETRIA

1. Error de especificación, Definición
2. Omisión de una Variable Relevante
3. Inclusión de Variables irrelevantes
4. Omisión Versus Inclusión de Variables.
5. Evaluación de modelos.

## APENDICE

## TABLAS

## BIBLIOGRAFIA

### CAPITULO I

#### 1.- DEFINICION DE ECONOMETRIA

A continuación se presentan algunas definiciones de econometría:

“ La econometría<sup>1</sup> es la disciplina que se ocupa de la cuantificación de los fenómenos económicos y de la verificación de las teorías económicas, con base en los datos que se disponen sobre las distintas variables y aplicando métodos específicos basados en la inferencia estadística.”<sup>2</sup>

“La econometría se ocupa del estudio de estructuras que permitan analizar características o propiedades de una variable económica utilizando como causas explicativas otras variables económicas. Por ejemplo, podría construirse una relación para explicar el comportamiento de la inflación, utilizando como variables explicativas el ritmo de crecimiento de la oferta monetaria y algún indicador de la demanda agregada en la economía. Distintos aspectos del análisis econométrico son:

- a) La especificación de la estructura a utilizar, llamada modelo econométrico;
- b) El análisis de las propiedades estadísticas de dicho modelo.
- c) Su estimación.
- d) La utilización de dicho modelo con fines predictivos, y
- e) La capacidad de dicho modelo para el análisis de determinadas cuestiones de política económica.”<sup>3</sup>

Samuelson, Koopmans y Stone (1954): ‘... el análisis cuantitativo de fenómenos económicos actuales, basado en el desarrollo congruente de teoría y observaciones, y relacionado por métodos apropiados de inferencia.’

Valavanis (1959): ‘El objetivo de la econometría es expresar las teorías económicas bajo una forma matemática a fin de verificarlas por métodos estadísticos y medir el impacto de una variable sobre otra, así como predecir acontecimientos futuros y dar consejos de política económica ante resultados deseables.’

Klein (1962): ‘El principal objetivo de la econometría es dar contenido empírico al razonamiento a priori de la economía.’

Malinvaud (1966): ‘... aplicación de las matemáticas y método estadístico al estudio de fenómenos económicos.’

---

<sup>1</sup> El termino “Econometric” fue introducido en el mundo académico a comienzos de la década de 1930’s con la formación de la “Econometric Society” en el año 1930 en la ciudad de Cleveland, Ohio, USA y con la fundación en el año 1933 de la revista “Econometrica”.

<sup>2</sup> Martin, Guillermina; José María Labeaga y Francisco Mochón. Introducción a la econometría. Prentice Hall. España.1997. p.5

<sup>3</sup> NOVALES; Alfonso. Econometría. 2da Edic. Mc GRAW HILL. España.1993.

Christ (1966): 'Producción de declaraciones de economía cuantitativa que explican el comportamiento de variables ya observadas, o predicen la conducta de variables aún no observadas.'

Intriligator (1978): 'Rama de la economía que se ocupa de la estimación empírica de relaciones económicas.'

Chow (1983): 'Arte y ciencia de usar métodos para la medida de relaciones económicas.'

“...econometría no significa lo mismo que estadística económica. No es idéntica que lo que llamamos teoría económica, aunque una parte importante de esta teoría tienen marcado carácter cuantitativo. No podría tomarse la econometría como sinónimo de aplicaciones matemáticas en la economía. La Experiencia ha demostrado que unos de estos tres puntos de vista, estadística, teoría económica y matemáticas, son condiciones necesarias pero no suficientes para un conocimiento real de las relaciones cuantitativas en la vida económica moderna. Es la unificación de las tres lo que es poderoso. Y esta unificación es lo que constituye la econometría...”<sup>4</sup>

De las definiciones reseñadas se puede concluir que la econometría nos proporciona una metodología y un instrumental que permite básicamente alcanzar dos objetivos: cuantificar o parametrizar la relación existente entre dos o mas variables económicas. Y en segundo lugar permite realizar estimaciones de una variable en función de valores estimados o proyectados de otras variables con las cuales está relacionado.

Es importante señalar que la Econometría nos proporciona una metodología para alcanzar un fin, en ningún caso puede ser el fin en si mismo. Su uso adecuado proporciona una poderosa herramienta para el análisis de fenómenos económicos.

Es pertinente tomar en consideración las palabras de Maurice Allais<sup>5</sup>: “Por desgracia, el abuso de las matemáticas no es el único fallo de los escritos económicos contemporáneos, que con demasiada frecuencia generan seudoteorías basadas en la aplicación mecánica, carente de toda comprensión real, de las técnicas econométricas y estadísticas. Todas estas teorías reúnen las mismas características: elaboración de modelos de correlación lineal, en realidad seudomodelos, acompañados por una planopía matemático estadística de factores econométricos sin domar, totalmente injustificados, que a los ingenuos les parecen teorías científicas, mientras no suelen ser mas que cáscaras vacías; aplicación ciega y brutal de programas de correlación lineal y de las pruebas asociadas con ellos, aun cuando estas pruebas por lo general no son aplicables a los casos estudiados, y empleo de los

---

<sup>4</sup> Frisch, R. (1933) “Editorial”. *Econometría* 1, 1-4. Citado por: Vicéns Otero, José. “Econometría y Contrastación Empírica . Concepto e Historia”. Documento 98/1. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid. 1998. p.12.

<sup>5</sup> Economista francés, catedrático de economía en la Ecole Nationale Supérieure des Mines de París y obtuvo el premio Nobel de Economía en 1988.

modelos, con frecuencia usados para un solo país y en período breve, en que las variables explicativas y los parámetros arbitrarios alcanzan tal número que las aplicaciones no pueden tener significado real”.<sup>6</sup>

## **2. EVOLUCION HISTORICA DE LA ECONOMETRIA**

Para fines explicativos se puede establecer cuatro períodos<sup>7</sup> en la evolución histórica de la econometría:

### *Etapa 1: Antecedentes.*

Esta primera etapa se inicia con los primeros intentos de medición de los fenómenos económicos en la Europa del siglo XIX con los trabajos de economía matemática de Von Thunen, Cournot, Edgeworth, Jevons, Walrras, Pareto, etc. Esta etapa inicial de caracteriza por comenzar un acercamiento entre la matemáticas y la Economía sin considerar en forma explícita la relación entre datos económicos y técnicas estadísticas. Las condiciones comunes de esta etapa se centran en los desarrollos paralelos de teorías económicas y formalizaciones estadísticas que posteriormente serían integradas en el área del conocimiento que se define como “Econometría”.

### *Etapa 2: Desarrollos iniciales.*

El comienzo de esta etapa está marcada por la publicación de H. Moore, “Economic Cycles: their Law and Causes” (1914), que es considerado por como el primer trabajo econométrico. En el mismo se realizan las primeras estimaciones de las relaciones económicas implícitas en la demanda a través de las estadísticas económicas de principios del siglo XX en Inglaterra.

En el desarrollo de esta etapa se pueden detectar un conjunto de trabajos que cumplen con la metodología econométrica, al menos desde la perspectiva funcional, sin embargo, no existe evidencia de una escuela formal que aglutine los esfuerzos y las líneas de investigación. La mayoría de las aportaciones provienen de individualidades o instituciones aisladas que coinciden en la forma de abordar el análisis económico aplicado.

### *Etapa 3: Formalización.*

El inicio de esta etapa se ubica a partir de que el 29 de diciembre de 1930 se funda en Cleveland la Econometric Society, promovida inicialmente por Charles Roos, Ragnar Frisc e Irvin Fisher. En el desarrollo de esta etapa, aparece la revista “Econométrica”,

---

<sup>6</sup> Szenerg, Micahael, editor. “Grandes Economistas de Hoy”. Editorial Debate S.A. Madrid. 1992. p39.

<sup>7</sup> Armenta fraire, Ieticia. José de la cruz gallegos y Luis alejandro lagunas Toledo. “Modelo de análisis y Prospectiva Económica Aplicada MAPEA, Un Instrumento de Simulación y Pronostico Econométrico para los Tomadores de Decisiones”. Editorial Trillas. Mexico. 2001. p.26

que se constituye como el principal medio de comunicación de los econométricos alrededor del mundo y cuyo primer número se publica en 1933. Además se establece la “Cowles Comisión”, la cual se erigiría como el núcleo central que habría de configurar la ortodoxia econométrica. A finales de esta etapa se crea también el “Department of Applied Economics” en la Universidad de Cambridge. El cual, aunque inicialmente se constituye en 1939 bajo la coordinación indirecta de Keynes, no fue operativo sino hasta el final de la Segunda Guerra Mundial, cuando Richard Stone toma la dirección del mismo.

Esta época se caracteriza por un esfuerzo de normalización de las aproximaciones y metodología econométrica, que trata de dotar a la econometría de un cuerpo de conocimiento generalmente aceptado.

#### *Etapas 4: Extensión.*

Esta cuarta etapa se inicia con la publicación de la Monografía número 10 de la Cowles Comisión en la que, bajo el título de “Statistical Inference in Dynamic Economic Models”, Koopmans, Rubin y Leipnik (1950) establece de una forma sistemática las normas básicas de elaboración de investigaciones econométricas.

Este compendio de normalización econométrica se vería completado tres años más tarde con la publicación, en 1953, de la Monografía número 14 con el título “Studies in Econometric Methods”.

A partir de estos primeros años de la década de los cincuenta ya podemos considerar que la econometría es una disciplina madura, al menos en el campo teórico, y prueba de ello es la aparición de los primeros manuales de econometría como el publicado por Klein en 1953<sup>8</sup>.

La caracterización básica de la etapa de extensión viene definida desde dos puntos de vista alternativos. En primer término, desde el campo de la econometría teórica, se destaca el perfeccionamiento de los métodos de estimación disponibles, así como el desarrollo de múltiples contrastes y especificaciones alternativas que tratan de solventar los problemas derivados del incumplimiento de las hipótesis consideradas a priori. Y en segundo término desde la perspectiva de la econometría aplicada, se genera un gran desarrollo en la modelización y los primeros esfuerzos sistemáticos de aplicaciones empíricas.

#### *Etapas 5: Diversidad de enfoques.*

El principio de la década de los setenta marca el inicio de la quinta y última de las etapas y arranca con la publicación del trabajo de Box y Jenkins sobre los modelos univariantes de series de tiempo (Time Series Analysis) (Time Series Analysis).

---

<sup>8</sup> Klein, L. R. “A Textbook of Econometrics. Prentice Hall. Nueva York. 1953.



El período en que se desarrolla esta última etapa, esta condicionada por el aumento de los precios energéticos y la consiguiente crisis económica que sufrieron la mayoría de los países desarrollados que, por primera vez, vieron aumentar al unísono sus niveles de paro e inflación sin que la teoría económica disponible fuera capaz de ofrecer una explicación adecuada al respecto.

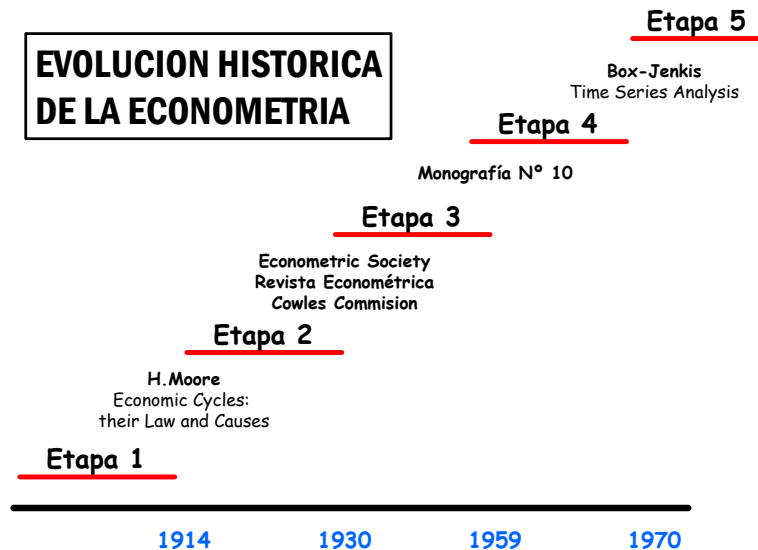
En lo estrictamente econométrico, los distintos modelos elaborados hasta la fecha comenzaron a fallar sistemáticamente en sus predicciones, y se puso en duda lo que hasta el momento había sido el baluarte que sustentaba todos los desarrollos aplicados, y que era su capacidad predictiva.

Partiendo de esta aparente inutilidad de los desarrollos econométricos para adaptarse y anticiparse al nuevo orden económico mundial, surgirá un nuevo incentivo para los econométricos que ha marcado todos los desarrollos posteriores de la disciplina y que podemos asimilar como la característica diferenciadora de esta etapa.

Para solventar los problemas antes señalados se desarrollaron aplicaciones cuya justificación última es la obtención de buenos resultados empíricos en cualquiera de las funciones esenciales de los trabajos econométricos (explicación de relaciones económicas, predicción o simulación de escenarios alternativos); es decir, la economía toma un cariz estrictamente funcional y las distintas alternativas metodológicas y aplicaciones prácticas se empiezan a juzgar por su capacidad explicativa o predictiva.

En este contexto empieza a surgir múltiples fuentes de crítica a la modelización tradicional, representada por los grandes modelos macroeconómicos de ecuaciones simultáneas, y que sirvieron como incentivo para el desarrollo de nuevos contrastes, especificaciones alternativas y nuevas técnicas para abordar el análisis económico aplicado. Esta diversidad de planteamientos constituye el segundo de los factores diferenciadores que delimitan esta última etapa de la historia econométrica.

Por último, los inicios del siglo XXI, el instrumental teórico sobre análisis econométrico ha sido fortalecido por un desarrollo exponencial de las tecnologías informáticas, las cuales han aportado poderosas herramientas computacionales que han permitido el uso de sistemas de resolución muy complejos en períodos muy cortos. Asimismo, los lenguajes de programación amigables han facilitado a los investigadores la posibilidad de generar sus propias herramientas de cómputo, lo que ha diversificado enormemente las posibilidades de aplicación teórica.



### 3. MODELOS.

Un Modelo es una representación simplificada de la realidad, en el cual se señalan los aspectos principales o fundamentales para su análisis.

En forma particular un modelo económico se define como una expresión lógica, verbal, gráfica o matemática de las relaciones entre variables económicas.<sup>9</sup>

Los modelos económicos se pueden clasificar en:

- a) Cuantitativos:
  - i) Opinión de expertos.
  - ii) Encuestas
- b) Causales.
  - i) Econométricos.
  - ii) Vectores Autorregresivos (VAR).
- c) Series de Tiempo.
  - i) Box –Jenkins (ARIMA).
  - ii) Función de transferencia.

Un modelo económico-matemático es un conjunto de relaciones que representan un proceso económico, expresadas en forma matemática.<sup>10</sup>

<sup>9</sup> López Casuso, Rafael. "Cálculo de Probabilidades e Inferencia Estadística". 3ra. Edic. Universidad Católica Andrés Bello. Caracas.2000.p.483.

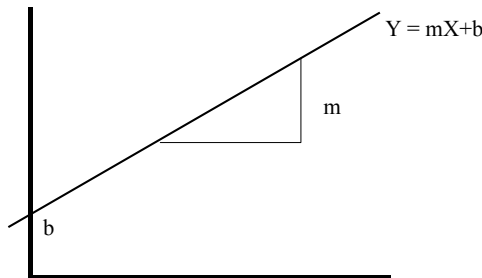
<sup>10</sup> López Casuso, Rafael. Ob.cit. p484.

La econometría se basa en los modelos económicos-matemáticos, en el cual una variable dependiente (efecto) está en función de un(as) variable(s) independiente(s) (causa). Esquemáticamente se escribe:  $X = f(Y, Z)$ , que se puede leer: la variable X está en función de dos variables Y y Z.

El modelo matemático fundamental es el de la línea recta:

$$Y = mX + b$$

Donde: Y = variable dependiente o variable endógena



X = variable independiente o variable exógena

m = pendiente

b = Intercepto (punto donde la recta corta el eje de las ordenadas).

#### 4. MODELOS ECONOMETRICOS.

El modelo básico o llamado también “Modelo Clásico”, es muy parecido al modelo de la línea recta:

$$Y = \alpha + \beta X$$

Donde:

$\alpha$  = Coeficiente intercepto<sup>11</sup>.

$\beta$  = Coeficiente pendiente,

<sup>11</sup> Es de uso generalizado en econometría. El uso de letras griegas para señalar los coeficientes (constantes), por ejemplo:  $\alpha = \text{alfa}$ ;  $\beta = \text{beta}$ ,  $\gamma = \text{gamma}$ ;  $\delta = \text{delta}$ ;  $\varepsilon = \text{épsilon}$ ;  $\theta = \text{theta}$   $\lambda = \text{lamda}$ ;  $\pi = \text{pi}$ ;  $\rho = \text{ro}$ ;  $\sigma = \text{sigma}$  etc.

Y = Variable dependiente ó explicada, y  
X = Variable independiente ó explicativa.

A diferencia de los modelos matemáticos, en la cual se analiza la dependencia de una variable (dependiente) con respecto a otra (independiente), el modelo econométrico debe explicar todas las posibles causas que afecten a una variable determinada.

Así por ejemplo si queremos estimar una función del gasto en consumo de alimentos (C) con respecto al ingreso disponible (Y), con base en una muestra de 500 familias, especificaríamos el modelo de la siguiente forma:

$$C = \alpha + \beta Y \quad (3.1)$$

Se espera que no todas las 500 observaciones queden exactamente sobre la línea recta porque, además del ingreso, existen otras variables que afectan el gasto en consumo. Por ejemplo, el tamaño de la familia, el precio de los bienes de consumo, el precio de los bienes sustitutivos o complementarios, etc.

Para dar cabida a relaciones inexactas entre las variables, la econometría plantea especificar la función de la siguiente forma:

$$C_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad (3.2)$$

donde  $u$ , es conocida como el término de perturbación, o de error, es una variable aleatoria (estocástica) que tiene propiedades probabilísticas claramente definidas. El término de perturbación o variable estocástica ( $u$ ) *puede representar claramente todos aquellos factores que afectan el gasto de consumo pero que no son considerados en el modelo*. En otras palabras la variable  $u$  absorbe todas aquellas variables que explican el comportamiento de la variable dependiente pero que no están planteadas en el modelo, ya sea por que no son cuantificables o medibles, o bien sencillamente por que el investigador considera que no son importantes en el modelo.

Las razones fundamentales que justifican la incorporación del término de perturbación aleatoria al modelo econométrico son, básicamente los siguientes:<sup>12</sup>

a) Si existe alguna teoría que determine el comportamiento de la variable dependiente, ésta suele ser incompleta. Por lo tanto, la variable aleatoria podría ser utilizada como un sustituto de todas las variables excluidas del modelo.

---

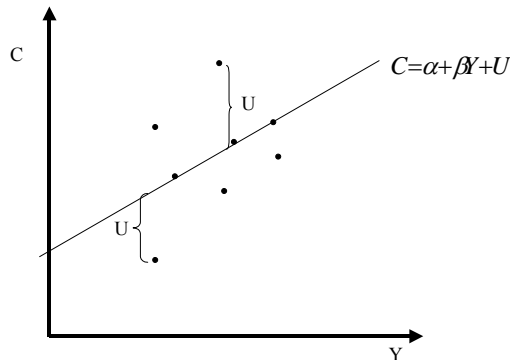
<sup>12</sup> Díaz Fernández, Montserrat y María del Mar Llorente Marrón. Econometría. Ediciones Pirámide. Madrid.1998. p.27

b) Aun sabiendo cuáles son las variables relevantes en la especificación del modelo, es muy probable que no haya datos sobre todas ellas. En el análisis empírico, es muy común que los datos que todos deseamos tener no siempre estén disponibles.

c) Es posible que la influencia individual de variables poco relevantes en el comportamiento de la variable dependiente sea insignificante y no sistemática y que, por razones de coste, no justifique su introducción explícita en el modelo. Cuando esto suceda, el efecto combinado de dichas variables podría ser tratado como una variable aleatoria.

d) Aun incluyendo satisfactoriamente las variables relevantes en el modelo, es preciso tener en cuenta el carácter aleatorio de la conducta humana. La variable aleatoria  $u$  podría reflejar también dicho comportamiento.

e) El modelo econométrico deberá ser sencillo en su estructura (principio de parcimonia), incorporando en su especificación las variables más relevantes. Si se puede explicar el comportamiento de la variable dependiente con dos o tres variables, y si además nuestra teoría no es lo suficientemente sólida, representaremos por  $u$  a todas las demás.



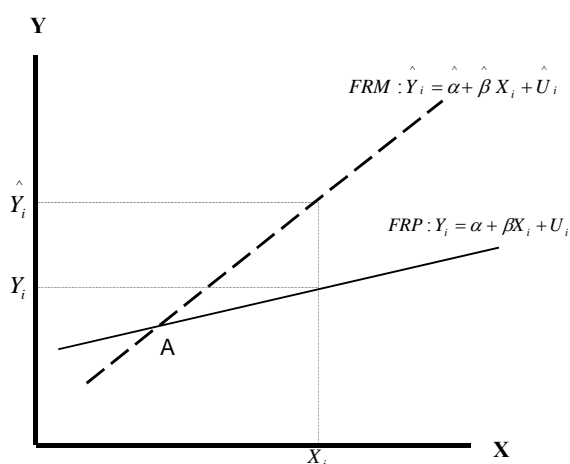
En el caso del modelo planteado (3.2), este se puede leer de la siguiente forma: el gasto de consumo depende en forma lineal del ingreso disponible y de otras variables, las cuales están contenidas en  $u$ .

El subíndice  $(i)$  que tienen las variables, nos indica que los datos son obtenidos de una muestra de corte transversal. En el caso de que los datos sean de una serie cronológica o de tiempo, el subíndice sería una  $(t)$ :  $X_t, Y_t, u_t$ .

En el modelo anterior se ha intentado realizar una descripción sobre el comportamiento general de una relación económica, en otras palabras se ha descrito un marco teórico. A este tipo de modelo general, lo denominaremos *Modelo de Regresión Poblacional* (MRP).

En la práctica, en muy raras veces podremos determinar un modelo que describa el comportamiento general, ya que sería necesario tener todos los datos que representan la población. Lo más común es que trabajemos con los datos correspondientes a parte de la población, es decir una muestra, por lo tanto a la hora de establecer un modelo econométrico, trabajaremos con una *Función de Regresión Muestral* (FRM), la cual es muy parecida a la poblacional pero con unas características propias que la determinan.

$$FRM : \hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i$$



Donde: el símbolo (^) indica que el valor es estimado (calculado) a partir de los datos de la muestra, es decir  $\hat{\alpha}$  se leería como alfa estimado.  $\hat{u}$  es el valor estimado de la variable estocástica, y se conoce con el nombre de residual y es el producto de la diferencia existente entre el valor verdadero de un dato de la variable Y y el valor estimado del mismo, una vez regresado el modelo.  $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$

La construcción de un modelo implica (i) disponer o elaborar una explicación previa teórica, básicamente relacionado con la complejidad de relaciones (tipo de modelo a precisar), (ii) señalar el algoritmo de transformación de unos valores en otros (especificación) y (iii) a partir de las observaciones, estimar el valor de los parámetros y señalar sus características para evaluar el ajuste del modelo al fenómeno bajo estudio.<sup>13</sup>

<sup>13</sup> Mata Mollejas, Luis y José Niño Díaz. Revisión de los Métodos Cuantitativos en la Economía. Fondo Editorial Tropykos y Comisión de Estudios de Postgrados. U.C.V. Caracas. 2000. P.39

## 5. TIPOS DE MODELOS

### 5.1 Según el número de variables:

a) Modelo de regresión simple: este modelo contiene solamente dos variables, una variable dependiente y una sola variable explicativa.

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

b) Modelo de regresión múltiple: contiene más de una variable explicativa.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

### 5.2 Según el número de ecuaciones:

a) Modelos uniecuacionales: son los modelos que contienen una sola ecuación

$$Q_i = \alpha + \beta P_i + u_i$$

b) Modelos de ecuaciones simultáneas: contienen más de una ecuación.

$$PIB_t = \alpha + \beta INV_t + u_t$$

$$INV_t = \lambda + \phi TI_t + \varepsilon_t$$

### 5.3 Atendiendo a la forma de las relaciones, los modelos pueden clasificarse en;

a) Modelos lineales. Cuando se habla de modelos lineales, hacemos referencia a dos sentidos de linealidad: en las variables o en los parámetros. En la práctica, la linealidad de los parámetros es la más importante, especialmente al momento de la aplicación de los métodos de estimación de los mismos. La linealidad de las variables generalmente se consigue fácilmente aplicando alguna transformación al modelo.

b) Modelos no lineales.

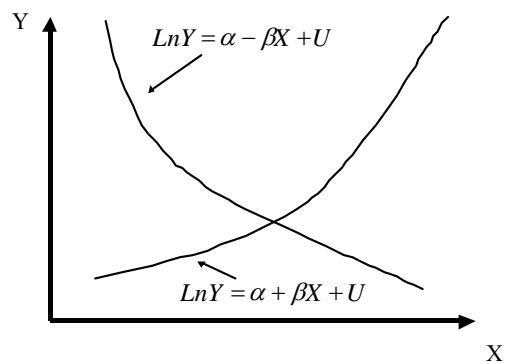
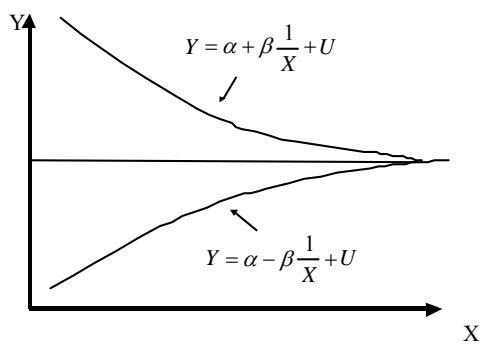
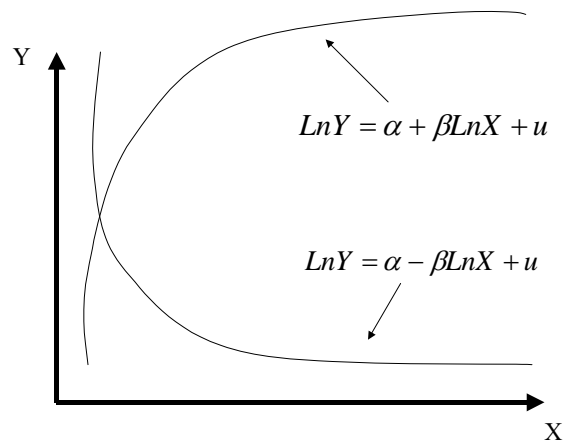
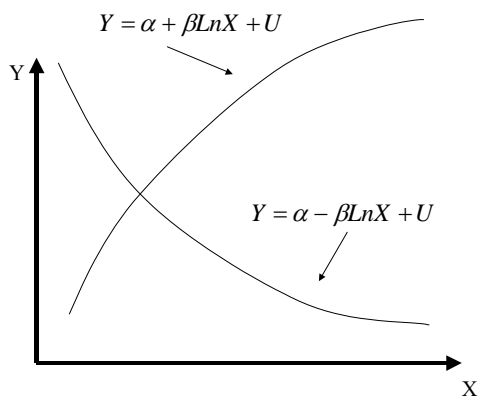
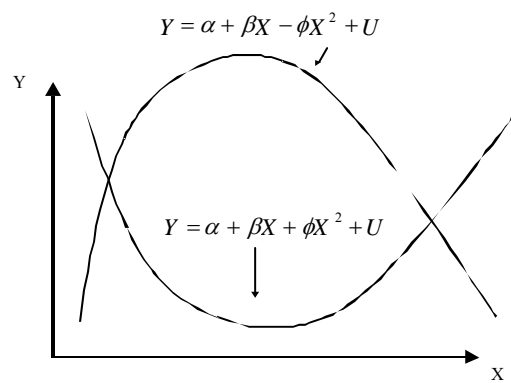
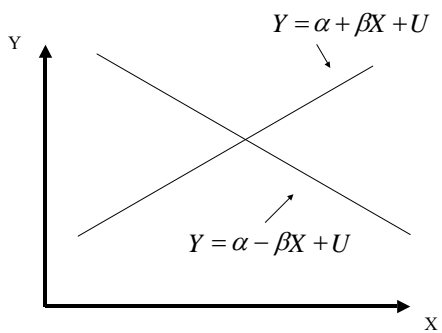
## 6. FORMAS FUNCIONALES

A continuación se muestra un cuadro con los principales tipos de modelos con que generalmente se trabaja en la práctica así como sus representaciones gráficas.

Modelo	Ecuación	Pendiente $\left( = \frac{dY}{dX} \right)$	Elasticidad $\left( = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y} \right)$
Lineal	$Y = \alpha + \beta X + u$	$\beta$	$\beta \left( \frac{X}{Y} \right)$
Log-Lin O Log-Log	$\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$	$\beta \left( \frac{Y}{X} \right)$	$\beta$
Log-Lin	$\ln Y = \alpha + \beta X + u$	$\beta(Y)$	$\beta(X)$
Lin-Log	$Y = \alpha + \beta \ln X + u$	$\beta \left( \frac{1}{x} \right)$	$\beta \left( \frac{1}{Y} \right)$
Recíproco	$Y = \alpha + \beta \frac{1}{X} + u$	$-\beta \left( \frac{1}{X^2} \right)$	$-\beta \left( \frac{1}{XY} \right)$

Fuente: Damodar Gujarati, Econometría, Mc Graw Hill.





## CAPITULO II

### MODELO DE REGRESION LINEAL UNIECUACIONAL (MODELO CLASICO)

#### 1. SUPUESTOS.

##### 1.1. MODELO DE REGRESIÓN LINEAL.

El modelo de regresión es lineal en los parámetros, como se observa a continuación.

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

Como se indica en el supuesto los parámetros son los que deben ser lineales (elevados a la uno) sin importar que forma tomen la variable dependiente y la variable explicativa

¿Es el modelo lineal en los parámetros?	¿Es el modelo lineal en las variables?	
	Sí	No
Sí	MRL	MRL
No	MRLN	MRLN

MRL= Modelo de regresión lineal

MRNL = Modelo de regresión no lineal.

Por ejemplo de los modelos que se presentan a continuación, solo el modelo b) es un modelo de regresión lineal.

- (a)  $Y = e^{\alpha + \beta X + u}$
- (b)  $Y = \frac{1}{1 + e^{\alpha + \beta X + u}}$
- (c)  $\ln Y = \alpha + \beta \frac{1}{X} + u$
- (d)  $Y = \alpha + \beta^2 X + u$

##### 1.2. LOS VALORES DE X SON FIJOS EN MUESTREO REPETIDO.

Los valores que toma la variable explicativa (X) son considerados fijos en muestreo repetido. Más técnicamente, se supone no estocásticos.

Cuando estamos analizando un evento económico lo deseable es que se tengan diferentes muestras, para poder así observar el comportamiento promedio de los

parámetros. Este supuesto nos indica que para todas las muestras analizadas, los valores que tome(n) la(s) variable(s) explicativa(s), deben ser los mismos para todas las muestras.

### 1.3. EL VALOR MEDIO DE LA PERTURBACIÓN $u$ ES IGUAL A CERO.

Dado el valor de  $X$ , la media o el valor esperado del término aleatorio de perturbación  $u$  es cero. Técnicamente, el valor de la media condicional de  $u$  es cero. Simbólicamente, se tiene  $E(u / X_i) = 0$ <sup>14</sup> para toda  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 1.4. HOMOCEDASTICIDAD O IGUAL VARIANZA DE $u$ .

Dado el valor de  $X$ , la varianza de  $u$  es la misma para todas las observaciones. Esto es, las varianzas condicionales de  $u$  son idénticas, Simbólicamente se tiene que

$$\begin{aligned} \text{var}(u_i / X_i) &= E[u_i - E(u_i) / X_i]^2 \\ &= E(u_i^2 / X_i) \text{ por el supuesto 3} \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Donde **var** significa varianza<sup>15</sup>. Como se observa  $\sigma^2$  no posee ningun subíndice con lo cual la varianza se considera una constante.

---

<sup>14</sup> La esperanza matemática (también llamada *valor esperado*) de una variable aleatoria  $X$  cuyos valores posibles  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$  y cuya función de probabilidad es  $f(x)$ , se escribe como  $E(X)$  y se define como

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n)$$

En la ecuación anterior se observa que el valor esperado de  $X$  se define como un *promedio ponderado* de sus posibles valores, en donde las ponderaciones son las probabilidades que se le asocian.

Al valor esperado de una variable aleatoria a menudo se le denomina como promedio o valor promedio y se denota por la letra  $\mu$ . Por ejemplo,  $E(Z) = \mu_Z$  y  $E(X) = \mu_X$ . El promedio de una variable es una medida de su tendencia central; si el experimento se realiza un gran número de veces, el promedio es el valor que podemos esperar que sea la media aritmética de la variable sobre todos los experimentos.

Algunas propiedades de la esperanza matemática son las siguientes propiedades:

- a) El valor esperado de una constante es igual a la constante  $E(K) = K$
- b)  $E(KX) = KE(X)$
- c)  $E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$

<sup>15</sup> "En el análisis de una serie de datos no podemos conformarnos con el simple conocimiento de los promedios, sino que es necesario determinar como varían o se dispersan el resto de los valores de la serie con relación al promedio elegido o seleccionado.

Es decir, un promedio es un valor representativo de un conjunto de datos, pero necesitamos conocer cómo se alejan o se acercan del mismo, la totalidad de los datos de una serie a fin de considerar la mayor o menor representatividad del promedio seleccionado.

La ecuación anterior establece que la varianza de  $u$  para cada  $X$  (esto es la varianza condicional de  $u$ ) es algún número positivo constante igual a  $\sigma^2$ . Técnicamente la ecuación representa el supuesto de *Homocedasticidad*, o igual

---

A mayor valor de una medida de variación o de dispersión menos concentrados estarán los datos de una serie con relación al promedio de la misma y por tanto menor representatividad tendrá el promedio de la distribución.

A menor valor de una medida de variación o dispersión mas concentrados estarán los datos alrededor del promedio, siendo éste por tanto más representativo.

Lo ideal o utópico sería que al calcular una medida de variación ésta nos resulte igual a cero, lo cual nos indicaría que no existe alguna dispersión entre los datos y su promedio, siendo por tanto todos los valores de la serie iguales y alcanzando el promedio de la misma una representatividad óptima.<sup>15</sup>

Entre las principales medidas de dispersión tenemos a la Desviación Típica o Error Estándar ( $\sigma$ ) y la Varianza ( $\sigma^2$ ).

La desviación Típica se define como la raíz cuadrada positiva del promedio aritmético de los cuadrados de los desvíos con respecto a la media aritmética.

Sean  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$  los datos de una serie y donde  $\left(X_1 - \bar{X}\right)^2, \left(X_2 - \bar{X}\right)^2, \dots, \left(X_N - \bar{X}\right)^2$  son los cuadrados de los desvíos con respecto a la media aritmética.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\left(X_1 - \bar{X}\right)^2 + \left(X_2 - \bar{X}\right)^2 + \left(X_3 - \bar{X}\right)^2 + \dots + \left(X_N - \bar{X}\right)^2}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{N}} \text{ donde } d = (X - \bar{X})$$

La varianza se define como el cuadrado de la desviación típica o estándar

$$\sigma^2 = \frac{\sum \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{N} = \frac{\sum d_i^2}{N}$$

$$\sigma_x^2 = E(X - E(X))^2$$

(homo) dispersión (homocedasticidad), o igual varianza. Planteado de otra forma, la ecuación significa que las poblaciones Y correspondientes a diversos valores de X tienen la misma varianza.

En contraste, cuando la varianza condicional de la población Y varía con X, se conoce como *Heterocedasticidad*, o dispersión desigual o varianza desigual.

$$\text{var}(u_i / X_i) = \sigma_i^2$$

### 1.5. NO AUTOCORRELACIÓN ENTRE LAS PERTURBACIONES.

Dado dos valores cualquiera de U, La correlación entre dos  $u_i$  y  $u_j$  cualquiera ( $i \neq j$ ) es cero. Simbólicamente

$$\begin{aligned} \text{cov}(u_i, u_j / X_i, X_j) &= E(u_i - E(u_i) / X_i)(u_j - E(u_j) / X_j) \\ &= E(u_i / X_i)(u_j / X_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde i y j son dos observaciones diferentes y donde cov significa covarianza,

Lo que supuesto nos indica es que entre dos o más perturbaciones (observaciones de la variable aleatoria) no debe existir ninguna relación.

*Cuando el término de perturbación cumple con los supuestos de homocedasticidad y no autocorrelación se le califica de perturbación esférica.*

### 1.6. LA COVARIANZA ENTRE $u_i$ Y $X_i$ ES CERO.

o. Formalmente.

$$\begin{aligned} \text{cov}(u_i, X_i) &= E[u_i - E(u_i)][X_i - E(X_i)] \\ &= E[u_i(X_i - E(X_i))], \text{ puesto que } E(u_i) = 0 \\ &= E(u_i X_i) - E(X_i)E(u_i), \text{ puesto que } E(X_i) \text{ es no estocástica.} \\ &= E(u_i X_i), \text{ puesto que } E(u_i) = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Este supuesto establece que la perturbación  $u_i$  y la variable explicativa X no están correlacionadas. El razonamiento para este supuesto es el siguiente: Cuando se expresa la FRP, se supone que X y u (la cual puede representar la influencia de todas las variables omitidas) tienen una influencia separada (y aditiva)

sobre Y. Pero si X y  $u$  están correlacionadas, no es posible determinar sus efectos individuales sobre Y. Así si X y  $u$  están correlacionadas positivamente, X aumenta cuando  $u$  aumenta y disminuye cuando  $u$  disminuye. Similarmente, si X y  $u$  están correlacionadas negativamente X aumenta cuando  $u$  disminuye y disminuye cuando  $u$  aumenta. En cualquier caso, es difícil aislar la influencia de X y  $u$  sobre Y.

Este supuesto se cumple automáticamente si la variable X no es aleatoria o no es estocástica.

#### 1.7. NO HAY MULTICOLINEALIDAD PERFECTA.

Es decir, no hay relaciones perfectamente lineales entre las variables explicativas.

$$\text{cov}(X_i, X_j) = 0 \quad \text{donde } (i \neq j)$$

Para poder analizar la relación existente entre la variable dependiente y las variables explicativas, el investigador debe tener seguridad de que las variables explicativas son totalmente independientes una de las otras, para poder tener certeza plena del significado de cada uno de los coeficientes pendientes.

#### 1.8. EL NÚMERO DE OBSERVACIONES $n$ DEBE SER MAYOR QUE EL NÚMERO DE PARÁMETROS POR ESTIMAR.

Alternativamente, el número de observaciones  $n$  debe ser mayor al número de variables explicativas.

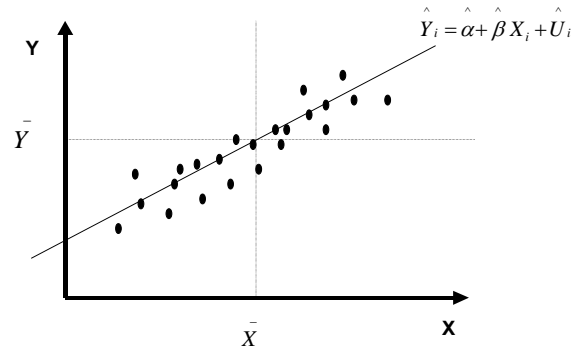
#### 1.9. VARIABILIDAD DE LOS VALORES DE X.

No todos los valores de X en una muestra dada deben ser iguales, Técnicamente,  $\text{var}(X)$ , debe ser un número positivo finito.

## 2. PROPIEDADES DE LA FUNCION DE REGRESION MUESTRAL (FRM)

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i$$

2.1. Pasa a través de las medias muestrales de Y y X



2.2. El valor de la media de los residuos  $\hat{u}_i$  es igual a cero. Recordemos que  $\hat{u} = Y - \hat{Y}$

### 3. MEJORES ESTIMADORES LINEALMENTE INSESGADOS (MELI)

Un estimador es considerado el mejor estimador linealmente insesgado<sup>16</sup> (MELI) cuando cumple las siguientes propiedades:

a) Es lineal, es decir, función lineal de una variable aleatoria, tal como la variable dependiente Y en el modelo de regresión.

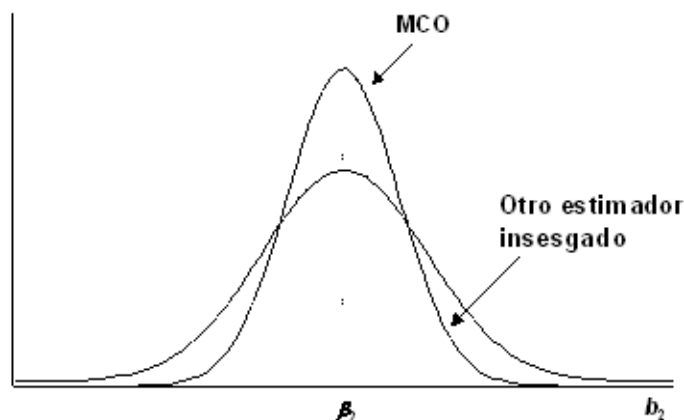
b) Es insesgado, es decir, su valor promedio o esperado,  $E(\hat{\beta})$  es igual al valor verdadero,  $E(\hat{\beta}) = \beta$

c) Tiene varianza mínima dentro de toda la clase de todos los estimadores lineales insesgados; Un estimador insesgado con varianza mínima es conocido como un estimador eficiente

---

<sup>16</sup> También es conocido con las siglas de ELIO (Estimador Linealmente Insesgado Optimo). O con sus siglas en ingles BLUE (Best Linear Unblased Estimator)

Función de Densidad  
de Probabilidad  $b_2$



d) Son consistentes, a medida que aumenta el tamaño de la muestra, el estimador, se va aproximando al parámetro verdadero.

Dado que un estimador es una función matemática de los valores de la muestra, si sustituimos en dicha función los valores observados, que componen una muestra concreta, se obtiene un número que es la estimación. El objetivo de la econometría es que la estimación se aproxime lo más posible al verdadero valor del parámetro que pretendemos estimar y para ello, el estimador ha de cumplir una serie de propiedades deseables.

En primer lugar. Convendría que el estimador proporcionara estimaciones centradas en el verdadero valor del parámetro cuando tenemos diferentes muestras. Este hecho está relacionado con una propiedad que se conoce como insesgadez. Un estimador es insesgado si su esperanza matemática coincide con el valor del parámetro que pretende aproximar. En definitiva, lo que se establece es que la variable aleatoria estimador tiene una distribución cuya media es el parámetro que se está estimando.

Otra propiedad conveniente de considerar es la variabilidad o dispersión del estimador. Puede que un estimador tenga muy poca variabilidad, aun siendo sesgado, y que otro estimador insesgado posea una gran varianza. El estimador lineal e insesgado de menor varianza será el óptimo, que se conoce como MELI.

#### 4. TEOREMA DE GAUSS-MARKOV

*Dados los supuestos del modelo clásico de regresión lineal, los estimadores de mínimos cuadrados, dentro de la clase de estimadores lineales insesgados, tienen varianza mínima, es decir son MELI.*



Lo que este teorema nos indica es que siempre y cuando se cumplan los supuestos del modelo clásico (no autocorrelación, no multicolinealidad, homocedasticidad, etc.), los parámetros estimados mediante el método de los mínimos cuadrados ordinarios, serán los mejores estimadores linealmente insesgados (MELI), lo que nos permite a partir de un Modelo de Regresión Muestral realizar conclusiones válidas sobre una posible relación de causalidad a nivel poblacional.

## 5. ESTIMACION DE LOS PARAMETROS A TRAVES DEL METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS ORDINARIOS.

El método consiste en minimizar la sumatoria del cuadrado de los residuales.

Como se sabe, para calcular el mínimo o máximo de una función, se calcula la primera derivada de la función y se iguala a cero para determinar los valores críticos.

A continuación realizaremos los siguientes pasos:

a) se determinará la función: sumatoria del cuadrado de los residuales a partir del modelo clásico

$$Y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X + \hat{u}$$

$$\hat{u} = Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X$$

$$\hat{u}^2 = (Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)^2$$

$$\sum \hat{u}^2 = \sum (Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)^2$$

b) Ahora tenemos una función con dos incógnitas. A continuación realizaremos las derivadas parciales de la función con respecto a los dos coeficientes, e igualaremos a cero ambas derivadas.

$$\frac{\partial \hat{u}^2}{\partial \hat{\alpha}} = 2 \sum (Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)(-1) = 0$$

$$(-2) \sum (Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X) = 0$$

$$\sum (Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X) = 0$$

$$\sum Y - N \hat{\alpha} - \hat{\beta} \sum X = 0$$

$$\sum Y = N \hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum X \quad (1ra \text{ ecuación normal})$$

$$\frac{\sum Y}{N} = \frac{N \hat{\alpha}}{N} + \frac{\hat{\beta} \sum X}{N}$$

$$\bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \bar{X}$$

$$\boxed{\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}}$$

$$\sum \hat{u}^2 = \sum (Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)^2$$

$$\frac{\partial \hat{u}^2}{\partial \hat{\beta}} = 2 \sum (Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)(-X) = 0$$

$$(-2) \sum (Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)(X) = 0$$

$$\sum (Y - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)(X) = 0$$

$$\sum (YX - \hat{\alpha} X - \hat{\beta} X^2) = 0$$

$$\sum YX - \hat{\alpha} \sum X - \hat{\beta} \sum X^2 = 0$$

$$\sum YX = \hat{\alpha} \sum X + \hat{\beta} \sum X^2 \quad (2da \text{ ecuación normal})$$

$$\sum YX = (\bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}) \sum X + \hat{\beta} \sum X^2$$

$$\sum YX = \bar{Y} \sum X - \hat{\beta} \bar{X} \sum X + \hat{\beta} \sum X^2$$

$$\sum YX = \bar{Y} N \bar{X} - \hat{\beta} \bar{X} N \bar{X} + \hat{\beta} \sum X^2$$

$$\sum YX = N \bar{Y} \bar{X} - \hat{\beta} N \bar{X}^2 + \hat{\beta} \sum X^2$$

$$\sum YX - N \bar{Y} \bar{X} = \hat{\beta} \left( \sum X^2 - N \bar{X}^2 \right)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum YX - N \bar{Y} \bar{X}}{\sum X^2 - N \bar{X}^2}$$

la cual también se puede expresar:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum yx}{\sum x^2} \quad \text{donde } y = (Y_i - \bar{Y}) \text{ y } x = (X_i - \bar{X})$$

### EJERCICO N° 1

Supongamos que la función de demanda de un bien Z se pueda aproximar mediante un modelo de regresión simple donde X representa el precio del bien e Y la cantidad demandada del mismo. A partir de la información muestral recogida en la tabla siguiente estimaremos los coeficientes beta de la regresión.

Y	X
200	50
300	25
100	75
50	125
75	100
725	375

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad (\text{FRP})$$

$$\beta \geq 0$$

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i \text{ (FRM)}$$

Y	X	XY	X <sup>2</sup>
200	50	10.000	2.500
300	25	7.500	625
100	75	7.500	5.625
50	125	6.250	15.625
75	100	7.500	10.000
725	375	38.750	34.375

$$\bar{Y} = \frac{725}{5} = 145 \quad \bar{X} = \frac{375}{5} = 75$$

$$\hat{\beta} = \frac{38750 - (5)(75)(145)}{34375 - (5)(75)^2} = -2,5$$

$$\hat{\alpha} = 145 - (-2,5)(75) = 332,5$$

$$\hat{Y}_i = 332,5 - 2,5X_i$$

## EJERCICIO Nº 2

A continuación se presentan los datos hipotéticos sobre el gasto de consumo familiar semanal (Y) y el ingreso familiar semanal (X)

Y(\$)	X(\$)
70	80
65	100
90	120
95	140
110	160
115	180
120	200
140	220
155	240
150	260

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \quad (\text{FRP})$$

$$\beta \geq 0$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i \quad (\text{FRM})$$

Y(\$)	X(\$)	YX	X <sup>2</sup>
70	80	5.600	6.400
65	100	6.500	10.000
90	120	10.800	14.400
95	140	13.300	19.600
110	160	17.600	25.600
115	180	20.700	32.400
120	200	24.000	40.000
140	220	30.800	48.400
155	240	37.200	57.600
150	260	39.000	67.600
1.110	1.700	205.500	322.000

$$\bar{Y} = \frac{1110}{10} = 111 \qquad \bar{X} = \frac{1700}{10} = 170$$

$$\hat{\beta} = \frac{205500 - (10)(111)(170)}{322000 - (10)(170)^2} = 0,5091$$

$$\hat{\alpha} = 111 - (0,5091)(170) = 24,4545$$

$$\hat{Y}_i = 24,4545 + 0,5091X_i$$

## 6. COEFICIENTE DE DETERMINACION ( $R^2$ )

El coeficiente de determinación nos indica el porcentaje de variaciones de la variable dependiente que son explicados por el modelo. A medida que el porcentaje es mayor, nos indica en que medida el modelo se ajusta a los datos, motivo por el cual a este estadístico también se le conoce con el nombre de *BONDAD DE AJUSTE*.

Sea:

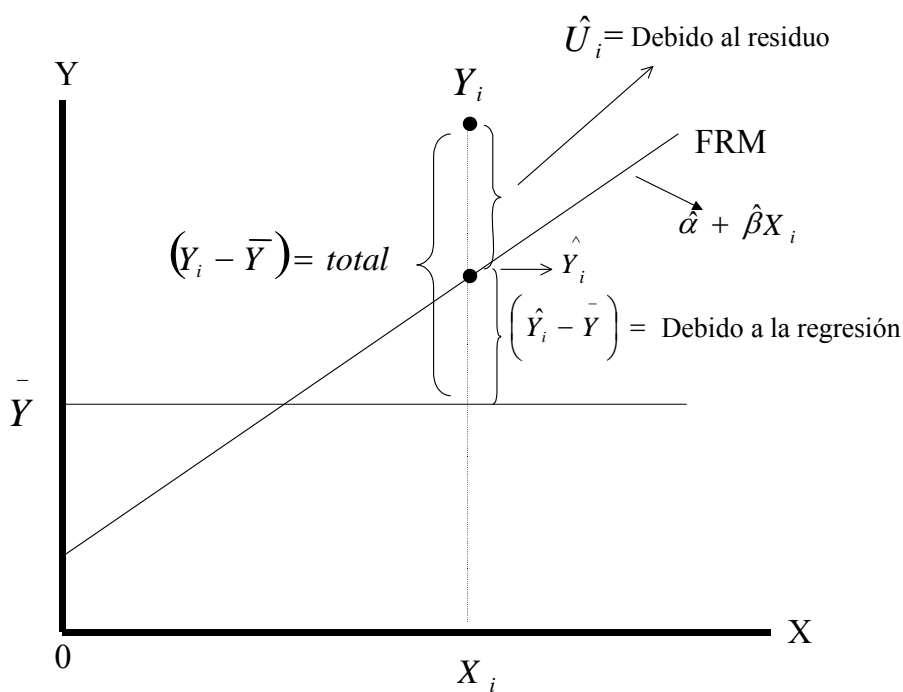
$$STC = \text{suma total de cuadrados} = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

$$SCR = \text{suma de cuadrados debida a la regresión (o explicada)} = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

$$SEC = \text{suma de los errores al cuadrado} = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum \hat{u}_i^2$$

Entonces.

$$STC = SEC + SCR$$



Para medir la capacidad de explicación de la ecuación de regresión requerimos una medida que indique toda la variación en  $Y_i$  que la regresión puede explicar. Una medida tal es:

$$R^2 = \frac{SCR}{STC} = \frac{STC - SEC}{STC} = 1 - \frac{SEC}{STC}$$

Donde a  $r^2$  se le conoce como el coeficiente de determinación. Si la ecuación de regresión puede explicar toda la variación de  $Y_i$  (por ejemplo  $\hat{Y}_i = Y_i$  para todas la i), y  $\hat{u}_i = 0$ , por lo que  $SEC = 0$ . En este caso  $SCR = STC$  y por lo tanto  $r^2 = 1$ . Puesto que,  $Y_i$  sería una perfecta combinación lineal de. Por lo tanto todos los puntos del diagrama de dispersión entre  $Y_i$  y  $X_i$  deberán caer sobre la línea.

En el otro extremo, si la ecuación de regresión no explica nada,  $SEC$  asume su valor máximo; es decir  $SEC = STC$ . Notemos que  $SCR = 0$  y por lo tanto  $r^2 = 0$ . Por tal motivo, debido a que  $SCR = 0$ , debemos tener que  $\hat{Y}_i = \bar{Y}_i$  para todo i. Esto implica que.

En los casos más tradicionales, la ecuación de regresión responde para algunos de los valores de, pero no para todos; el valor de  $r^2$  cae entre cero y la unidad.

Mientras mayor sea la explicación de la ecuación a variaciones de  $Y_i$  (por ejemplo mientras los puntos caigan más cerca de la línea de regresión), más se acercará  $r^2$  a la unidad, y conforme se debilita la relación entre  $Y_i$  y, el valor de  $r^2$  se acercará a cero. Por lo tanto,  $r^2$  indica la fracción de la variable dependiente a la que puede responder la ecuación estimada; por ejemplo, si  $r^2 = 0,63$  decimos que la relación estimada puede explicar el 63 por ciento de las variaciones de la variable dependiente.

La fórmula general para el coeficiente de determinación en regresión simple es:

$$R^2 = \frac{(\text{cov}(Y_i, X_i))^2}{\text{var}(Y_i)\text{var}(X_i)} = \frac{(\sum (yx))^2}{\sum y^2 \sum x^2} = \frac{\sum yx \sum yx}{\sum x^2 \sum y^2}$$

$$R^2 = \hat{\beta} \frac{\sum yx}{\sum y^2} = \hat{\beta} \frac{\sum YX - N\bar{Y}\bar{X}}{\sum Y^2 - N\bar{Y}^2}$$

ejemplo: para el ejercicio anterior

Y(\$)	X(\$)	XY	X <sup>2</sup>	Y <sup>2</sup>
70	80	5.600	6.400	4.900
65	100	6.500	10.000	4.225
90	120	10.800	14.400	8.100
95	140	13.300	19.600	9.025
110	160	17.600	25.600	12.100
115	180	20.700	32.400	13.225
120	200	24.000	40.000	14.400
140	220	30.800	48.400	19.600
155	240	37.200	57.600	24.025
150	260	39.000	67.600	22.500
1.110	1.700	205.500	322.000	132.100

$$r^2 = 0,509 \frac{205500 - 10(111)(170)}{132100 - 10(111)^2} = 0,509 \frac{16800}{8890} = 0,962$$

Lo que nos indica que el 96,20% de las variaciones del gasto de consumo familiar son explicados por el modelo, el otro 3,80% es explicado por otras variables ( $\hat{u}_i$ )

## 7. COEFICIENTE DE DETERMINACION AJUSTADO ( $\bar{R}^2$ )

Se puede fácilmente demostrar que, cuando en un modelo se incluyen nuevas variables explicativas, el coeficiente  $R^2$  aumenta o como mínimo permanece inalterado, aunque las nuevas variables no contribuyesen en nada a la explicación de Y. Por ello, para comparar dos o más modelos con diferentes números de variables explicativas, se recurre al coeficiente de determinación corregido o ajustado, definido por:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{N - 1}{N - K}$$

De acuerdo con la ecuación se hace entendible que para  $k > 1$ ,  $\bar{R}^2 < R^2$ , lo cual implica que a medida que el número de variables X aumenta, el  $\bar{R}^2$  aumenta menos que  $R^2$ , y el  $\bar{R}^2$  puede ser negativo, aun cuando el  $R^2$  es necesariamente un valor positivo. En caso de que el  $\bar{R}^2$  resulte ser negativo en una aplicación, su valor se toma como cero.

## 8. COEFICIENTE DE CORRELACION (r)

Una cantidad estrechamente relacionada con el coeficiente de determinación, pero conceptualmente muy diferente de este es el coeficiente de correlación (r), el cual es una medida del grado de asociación o relación entre dos variables.



$$r = \pm\sqrt{r^2}$$

$$r = \frac{\text{cov}(YX)}{\sqrt{\text{var}(Y)\text{var}(X)}} = \frac{\sum yx}{\sqrt{\sum y^2 \sum x^2}}$$

$$r = \frac{\sum YX - N\bar{Y}\bar{X}}{\sqrt{[\sum Y^2 - N\bar{Y}^2][\sum X^2 - N\bar{X}^2]}}$$

Algunas de las propiedades de  $r$  son las siguientes:

- a) Puede tener signo positivo o negativo, según la relación entre las variables sea directa o inversa respectivamente. El signo del coeficiente lo determina el numerador, el cual mide la covarianza muestral entre las dos variables.
- b) Cae entre los límites  $-1$  y  $+1$ ; es decir  $-1 \leq r \leq 1$ .
- c) Es simétrico por naturaleza; es decir, el coeficiente de correlación entre  $X$  y  $Y$  ( $r_{XY}$ ) es el mismo que entre  $Y$  y  $X$  ( $r_{YX}$ ).
- d) Es una medida de asociación lineal solamente; su uso en la descripción de relaciones no lineales no tiene significado, por ejemplo  $Y = X^2$  puede describir una relación exacta y  $r$  puede ser cero.

En forma referencial se dice que:

Cuando  $r < 0,30$  el Coeficiente de correlación es débil.

Cuando  $0,30 \leq r \leq 0,50$  el Coeficiente de Correlación es mediano.

Cuando  $0,51 \leq r \leq 0,80$  el Coeficiente de Correlación es apreciable.

Cuando  $0,81 \leq r \leq 1,00$  el Coeficiente de Correlación es fuerte.

## 9. ESTIMACION POR INTERVALOS

Dada una muestra y obtenida una estimación de  $\beta$  mediante el método de los mínimos cuadrados (MCO), se puede construir un intervalo que arrojará dos valores entre los cuales se encuentra el parámetro buscado con el nivel de confianza que se desea. Cuanto más pequeño sea ese intervalo más precisa será la estimación.

$$\Pr[\hat{\beta} - t_{\delta/2} ee(\hat{\beta}) \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_{\delta/2} ee(\hat{\beta})] = 1 - \delta$$

La ecuación anterior proporciona un intervalo de confianza para  $\beta$  al, el cual puede ser escrito en forma más compacta como:

$$\hat{\beta} \pm t_{\delta/2} ee(\hat{\beta}) \text{ intervalo de confianza para } \beta \text{ al } 100(1-\delta)\%.$$

Donde:

$t_{\delta/2}$  = es el valor de la variable t obtenida de la distribución t para un nivel de significancia  $\delta/2$  y n-k grados de libertad (n = N° de observaciones; k = N° de coeficientes del modelo), normalmente es llamado el valor crítico t a un nivel de significancia de.

$\delta$  = nivel de significancia. Es de práctica generalizada, utilizar niveles de significancia de 1%, 5% y 10%, siendo el más usado, el de 5%.

$ee(\hat{\beta})$  = error estándar del coeficiente

$$\text{a su vez } ee(\hat{\beta}) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{1}{\sum X^2 - N\bar{X}^2}}$$

$$ee(\hat{\alpha}) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{\sum X^2}{N(\sum X^2 - N\bar{X}^2)}}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}^2}{n-k} = \text{varianza estimada de los residuales.}$$

$\sum \hat{u}^2 = (1-r^2) [\sum Y^2 - N\bar{Y}^2]$  = sumatoria del cuadrado de los residuales.

Es importante destacar que el intervalo de confianza es proporcional al error estándar del estimador. Es decir mientras más grande sea el error estándar, más amplio será el intervalo de confianza. Expresado de otra forma, entre más grande sea el error estándar del estimador, mayor será la incertidumbre de estimar el verdadero valor del parámetro desconocido. Así, el error estándar de un estimador es descrito frecuentemente como una medida de la precisión del estimador, es decir, qué tan preciso mide el estimador al verdadero valor poblacional.

El significado del intervalo de confianza  $\hat{\beta} \pm t_{\delta/2} ee(\hat{\beta})$  es el siguiente: de cada 100 intervalos que se formen,  $(100 - \delta)$  contendrán al parámetro o coeficiente poblacional.

Ejemplo:

$$\sum \hat{u}^2 = (1 - 0,962)[132100 - 10(111)^2] = (0,038)(8890) = 337,82$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{337,82}{10 - 2} = 42,23$$

$$ee(\hat{\beta}) = \sqrt{42,23 \frac{1}{332000 - 10(170)^2}} = \sqrt{\frac{42,23}{33000}} = 0,036$$

$$t_{\delta/2} = 2,306 \quad \delta = 5\% = 0,05$$

$$0,509 - (2,306)(0,036) \leq \beta \leq 0,509 + (2,306)(0,036)$$

$$0,426 \leq \beta \leq 0,592$$

La interpretación de este intervalo de confianza es: dado el coeficiente de confianza de 95%, (1-0,05)%, en el largo plazo, en 95 de cada 100 casos intervalos

como (0,426; 0,592) contendrán el verdadero valor. Es de hacer notar que no se puede decir que la probabilidad de que el intervalo específico (0,426; 0,592) contenga el verdadero valor  $\beta$  sea de 95% porque este intervalo es ahora fijo y no aleatorio; por consiguiente  $\beta$  se encontrará o no dentro de el. La probabilidad de que el intervalo específicamente fijado incluya al verdadero valor de  $\beta$  es 1 o 0.

## 10. PRUEBA DE HIPOTESIS (SIGNIFICANCIA INDIVIDUAL DEL COEFICIENTE O PRUEBA T).

Cuando realicemos una prueba de hipótesis nos estaremos planteando la siguiente pregunta: ¿es compatible una observación dada o un hallazgo, con algunas hipótesis planteadas o no?. La palabra compatible, se utiliza aquí en el sentido de que la observación está lo suficientemente cercana al valor hipotético de tal forma que no se rechaza la hipótesis planteada.

La hipótesis planteada es conocida como *hipótesis nula* y está denotada por el símbolo ( $H_0$ ). La hipótesis nula es usualmente probada frente a una *hipótesis alternativa* denotada por ( $H_1$ ). La hipótesis alternativa puede ser simple (prueba de una cola) o compuesta (prueba de dos colas).

Utilizando la metodología de las pruebas de hipótesis, realizaremos la prueba de la significancia individual de los coeficientes. En términos generales, una prueba de

significancia es un procedimiento mediante el cual se verifica si una observación dada es significativamente igual o diferente a una hipótesis nula planteada.

Procedimiento:

Realizaremos una prueba de dos colas (hipótesis alternativa compuesta), en la cual trataremos de verificar si nuestros coeficientes estimados  $(\alpha, \beta)$  son significativamente diferentes o no a cero, lo cual nos conduce a plantear las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \beta = 0$$

$$H_1 : \beta \neq 0$$

¿Por qué cero?. ¿qué implica que aceptemos la hipótesis nula de que el coeficiente estimado estadísticamente sea igual a cero?. El valor cero denota no-existencia, si por ejemplo para el modelo:  $FRM : \hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i$  aceptamos la hipótesis de que  $\beta = 0$ , esto nos indicaría que no importa que valor tome X, ya que al

multiplicarse por cero, este se anularía, es decir, la variable explicativa no tiene una presencia real en el modelo. En otras palabras no existe relación entre X y Y.

Seguidamente calcularemos un estadístico t:

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta}{ee(\hat{\beta})}$$

donde  $\beta$  es el valor medio de beta estimado, cuyo valor correspondiente es aquel que hemos definido previamente en la hipótesis nula, que en nuestro caso es cero, por lo cual en nuestra situación, el estadístico t calculado quedaría de la siguiente forma:

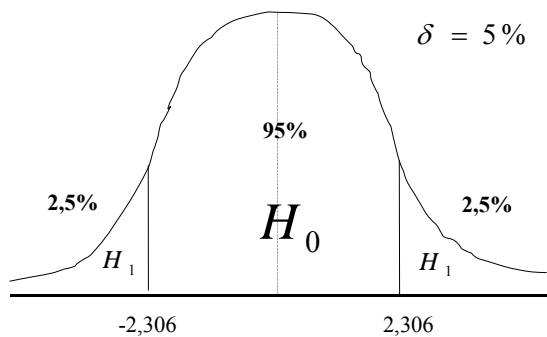
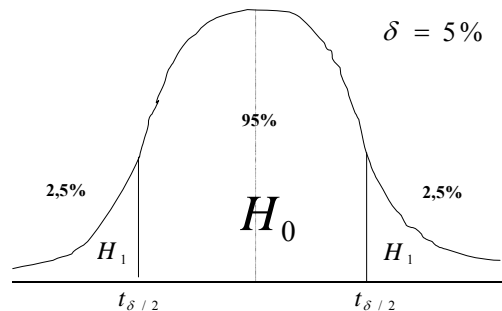
$$t = \frac{\hat{\beta}}{ee(\hat{\beta})}$$

A continuación este estadístico calculado, lo compararemos con el estadístico, con n-k grados de libertad y un nivel de significancia, determinado en la tabla de la distribución t.

En el gráfico que se muestra a continuación, podemos ver tres áreas claramente definidas, una central, o zona de confianza, o llamada también zona de aceptación de la hipótesis nula, y dos zonas laterales o colas, llamadas zonas críticas, o zonas de rechazo.

Si la  $t$  que hemos calculado cae en la zona central, nuestra decisión es aceptar la hipótesis nula de que el  $\beta$  es igual a cero, con lo cual nuestra conclusión sería que *el coeficiente  $\beta$  no es significativamente diferente de cero*. Generalmente esta conclusión se expresa en forma resumida de la siguiente forma: el coeficiente no es significativo.

Igualmente, si el  $t$  calculado cae en alguna de las dos colas, nuestra decisión es rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa, con lo cual nuestra conclusión sería: *el coeficiente  $\beta$  si es significativamente diferente a cero*. O en forma resumida el coeficiente si es significativo.



$$H_0 : \beta = 0$$

$$H_1 : \beta \neq 0$$

Ejemplo:

Puntos porcentuales de la distribución t

	0,25 0,50	0,10 0,20	0,05 0,10	0,025 0,05	0,01 0,02	0,005 0,01	0,001 0,00
·							
·							
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
·							
·							

NOTA: La primera columna corresponde a los grados de libertad, y la primera fila corresponde a los niveles de significación

Como se puede ver la tabla t nos indica que el estadístico para una prueba de dos colas, con un 5% de significancia ( $\alpha = 0,05$ ) y 8 grados de libertad ( $n - k = 10 - 2$ ) es igual a 2,306.

$$t = \frac{0,509}{0,036} = 14,139$$

Como se puede observar la t calculada (14,139) es mayor que la t de la tabla (2,306), por lo tanto cae en la cola de la derecha, por lo cual rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la hipótesis alternativa de que el beta es diferente de cero, con lo que concluimos que el coeficiente beta es significativamente diferente a cero, o en forma resumida, el coeficiente es significativo. Lo que nos indica que si existe una relación entre el gasto de consumo familiar semanal (Y) y el ingreso familiar semanal (X).

## 11. PRESENTACION RESUMIDA DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Una forma muy práctica de presentar los resultados obtenidos, es la siguiente:

$$\hat{Y}_i = 24,454 + 0,509 X_i$$

$$\begin{matrix} (6,414) & (0,036) \\ (3,813) & (14,139) \end{matrix}$$

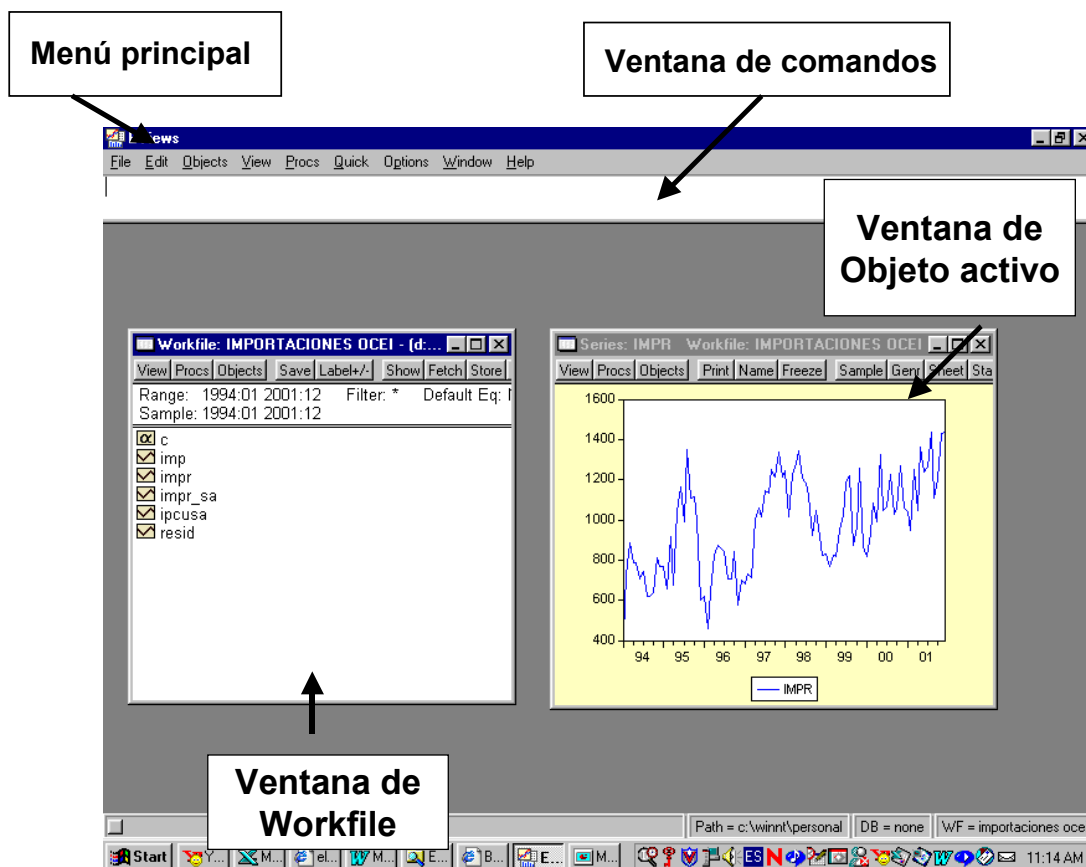
$$r^2 = 0,902$$

donde el primer número entre paréntesis debajo de cada coeficiente, corresponde al error estándar del coeficiente, y el segundo paréntesis corresponde a la t calculada de cada coeficiente.

## APENDICE 1

### RESOLUCION DE EJERCICIO MEDIANTE EL PAQUETE Eviews 5.0<sup>17</sup>

A continuación realizaremos el ejercicio de la página 36 a través del paquete econométrico Eviews 5.0 .



En primer lugar definiremos el tipo de la serie a regresar,.. Como se puede observar la serie es de corte transversal, con 10 observaciones. A tal fin seleccionamos: FILE / NEW / WORKFILE , con lo cual aparecerá la ventana de *Workfile Range*

<sup>17</sup> Para una más amplia explicación, se puede consultar: Pulido, Antonio y Ana María López. Predicción y Simulación Aplicada a la Economía de Empresas. Ediciones Pirámide S.A.. Madrid. 1999.

Carrascal A, Ursicino, Yolanda González G. Y Beatriz Rodríguez P. Análisis Económico con Eviews. RA – MA Editorial. Madrid. 2001

**Workfile Create**

Workfile structure type  
 Unstructured / Undated

Data range  
 Observations: 10

Irregular Dated and Panel workfiles may be made from Unstructured workfiles by later specifying date and/or other identifier series.

Names (optional)  
 WF:   
 Page:

OK Cancel

A continuación definimos las variables a utilizar, para lo cual escribimos: Data INGRESO CONSUMO en la Ventana de Comandos y se introducen los datos de la serie. Los datos también se pueden traer de Excel mediante un COPY/PASTE, o mediante la opción de menú FILE/IMPORT:

**EViews**

File Edit Objects View Procs Quick Options Window Help

data ingreso consumo

Workfile: UNTITLED

View Procs Objects Save Label+/- Show Fetch Store Delete Genr Sample

Range: 1 10  
 Sample: 1 10

Group: UNTITLED Workfile: UNTITLED

View Procs Objects Print Name Freeze Transform Edit+/- Smpl+/- InsDel Transpose Title

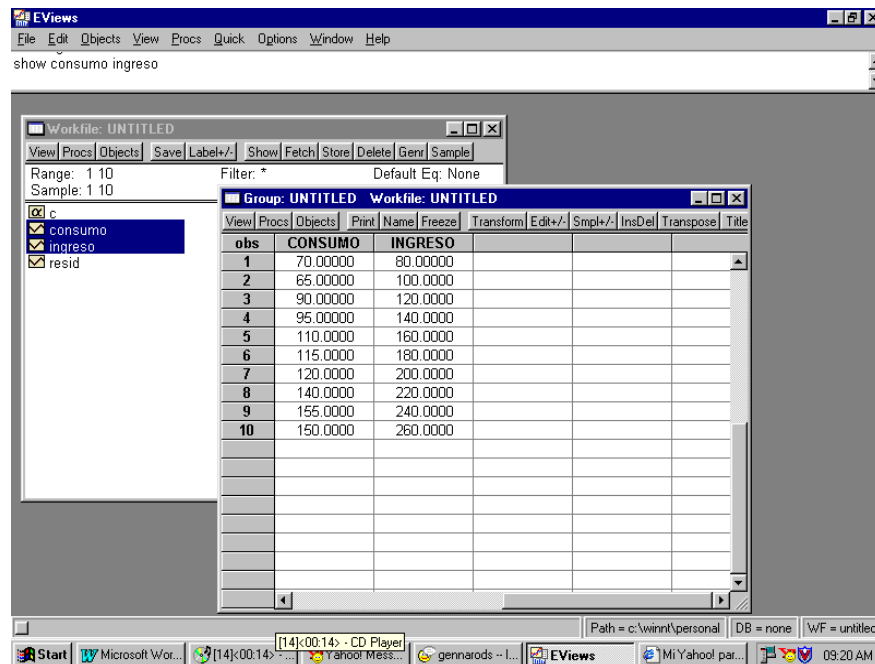
obs	obs	INGRESO	CONSUMO
1	1	80.0000	70.0000
2	2	100.0000	65.0000
3	3	120.0000	90.0000
4	4	140.0000	95.0000
5	5	160.0000	110.0000
6	6	180.0000	115.0000
7	7	200.0000	120.0000
8	8	220.0000	140.0000
9	9	240.0000	155.0000
10	10	260.0000	150.0000

Path = c:\winnt\personal DB = none /WF = untitled

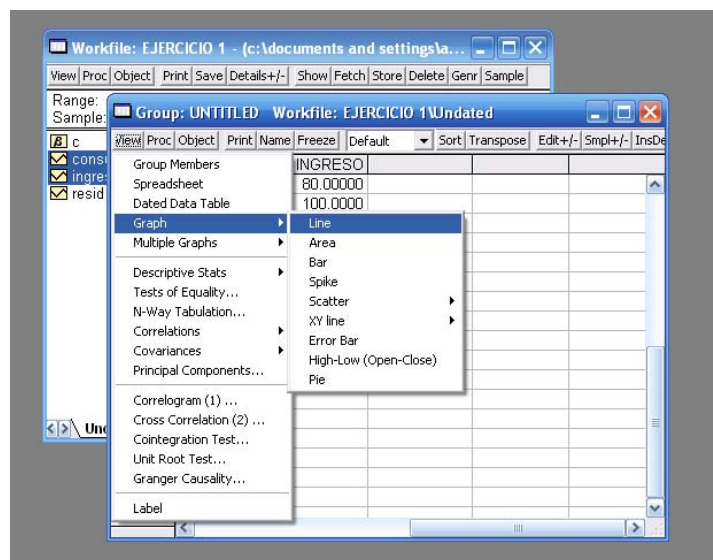
Start Microsoft Wor... [14]:01:33> - ... Yahoo! Mess... gennarods -- l... EViews Mi Yahoo! par... 09:19 AM

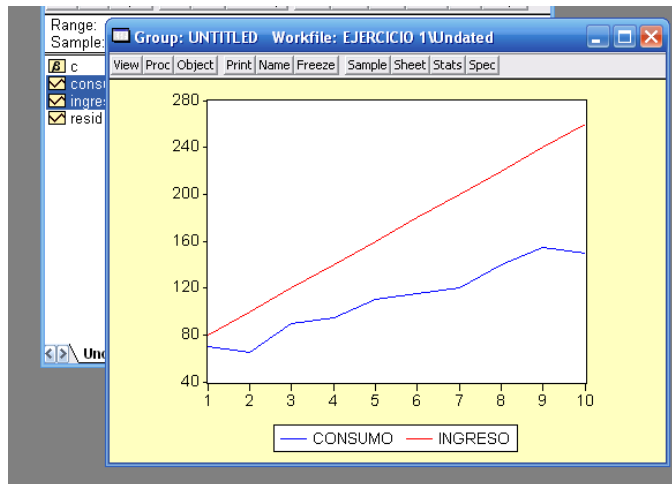
Para activar los datos escribimos: show consumo ingreso.





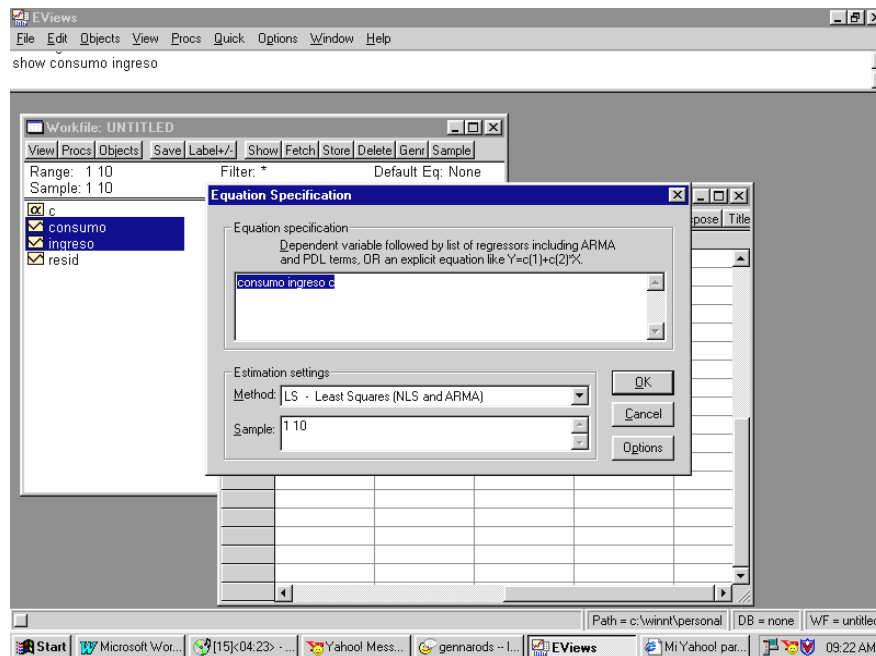
Una vez introducido los datos podemos visualizar en primer lugar el gráfico de los datos, para tal fin seleccionamos: VIEW/GRAPH/LINE





El gráfico nos da un primer acercamiento al tipo de relación existente entre las variables.

Para realizar la regresión seleccionamos: PROCS / MAKE EQUATION /OK



Equation: UNTITLED    Workfile: UNTITLED				
View	Procs	Objects	Print	Name
Freeze	Estimate	Forecast	Stats	Resids
Dependent Variable: CONSUMO				
Method: Least Squares				
Date: 09/11/02    Time: 09:23				
Sample: 1 10				
Included observations: 10				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INGRESO	0.509091	0.035743	14.24317	0.0000
C	24.45455	6.413817	3.812791	0.0051
R-squared	0.962062	Mean dependent var		111.0000
Adjusted R-squared	0.957319	S.D. dependent var		31.42893
S.E. of regression	6.493003	Akaike info criterion		6.756184
Sum squared resid	337.2727	Schwarz criterion		6.816701
Log likelihood	-31.78092	F-statistic		202.8679
Durbin-Watson stat	2.680127	Prob(F-statistic)		0.000001

Finalmente nos aparece la salida final con el modelo ya regresado, en el cual se muestran todos los datos necesarios para nuestro análisis:

- Número de Observaciones: 10
- Variable dependiente : CONSUMO
- Variable explicativa: INGRESO
- Intercepto : C
- Coeficiente Pendiente: 0,509091
- Coeficiente Intercepto: 24,45455
- Error estándar del coeficiente pendiente: 0,035743
- Estadístico T del coeficiente pendiente: 14,24317
- Error estándar del coeficiente intercepto: 6,413817
- Estadístico T del coeficiente intercepto: 3,812791
- Coeficiente de Determinación ( $R^2$ ): 0,962062

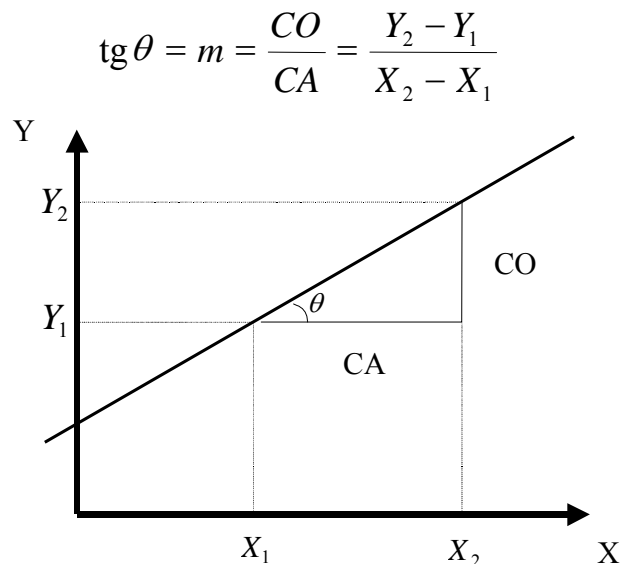
Un valor importante de destacar es el P-valor (Prob), el cual nos indica el mínimo que debe tener  $\alpha$  para que el coeficiente sea significativo. Por ejemplo el P-valor para el coeficiente de la variable ingreso es 0,0000, lo que nos indica que a cualquier nivel de  $\alpha$  el coeficiente es significativamente diferente a cero. Generalmente diremos que el coeficiente es significativo si el P-valor es menor o igual que 0,05.

## CAPITULO III.

### SIGNIFICADO DE LOS COEFICIENTES

#### 1.PENDIENTE DE LA ECUACIÓN (VARIACIÓN MARGINAL)

¿Cuál es el significado económico del coeficiente pendiente?. La pendiente de una recta está definida como la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de las ordenadas.



Geométricamente la tangente del ángulo está definida como cateto opuesto (CO) sobre cateto adyacente. En el gráfico podemos observar que ambos catetos son el resultado de la diferencia entre dos puntos, así  $CO = Y_2 - Y_1$  y  $CA = X_2 - X_1$

Cuando restamos dos valores. Lo que estamos obteniendo es la variación absoluta entre esos dos valores, por ejemplo si el año pasado nuestro sueldo era de 100.000 Bs. Y ahora es de 120.000 Bs. , la variación absoluta en el sueldo (o en este caso, el aumento) es de 20.000 Bs.

Lo anterior nos indica que la pendiente es simplemente el número de unidades en que varía la variable dependiente cuando varía en una unidad la variable independiente. En economía este concepto se conoce como *variación marginal*. (costo marginal, producto marginal, ingreso marginal, etc.)

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$\Delta$  = variación

En una función continua como es el caso de los modelos econométricos, la pendiente de la ecuación viene definida como la primera derivada de la misma.

$$m = \frac{dY}{dX}$$

Si derivamos el modelo clásico  $Y = \alpha + \beta X + u$  tenemos que:

$$\frac{dY}{dX} = \beta = m$$

Lo cual significa que en el modelo clásico el coeficiente beta (el que acompaña a la X) es la pendiente de la ecuación, y el mismo indica el número de unidades en que varía la variable dependiente, cuando se incrementa en una unidad la variable explicativa.

En el ejemplo que hemos estado trabajando  $\hat{Y}_t = 24,454 + 0,509X_t$  podemos interpretar que por cada unidad monetaria en que se incrementa X, la variable Y se incrementará (signo positivo) en 0,509 unidades monetarias. Mas específicamente por cada dólar en que se incrementa el ingreso familiar semanal, el gasto de consumo familiar se incrementará en 0,509 dólares.

## 2.ELASTICIDAD

La elasticidad de una función es una medida de variación relativa y nos indica el grado de sensibilidad de una variable dependiente ante cambios en la variable explicativa. Su fórmula de cálculo resulta de dividir el cambio relativo o porcentual en la variable dependiente entre el cambio relativo o porcentual en la variable explicativa.

Para una función discreta la elasticidad viene definida por:

$$E = \frac{\text{variación.\%}Y}{\text{variación.\%}X} = \frac{\frac{Y_2 - Y_1}{Y_1}}{\frac{X_2 - X_1}{X_1}} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \frac{X_1}{Y_1}$$

Para una función continua:

$$E = \frac{dY}{dX} \frac{X}{Y}$$

En el cuadro siguiente se indica el significado de los posibles resultados de la elasticidad

Sí $ E  < 1$	La elasticidad es inelástica
Si $ E  = 1$	La elasticidad es unitaria
Sí $ E  \Rightarrow 1$	La elasticidad es elástica

Donde el símbolo  $| |$  indica valor absoluto.

Una elasticidad inelástica nos indica que el cambio relativo en la variable dependiente es menos que proporcional al cambio en la variable explicativa. Por ejemplo si  $E = -0,8$  nos indicaría que por cada 1% que aumente la variable explicativa, la variable dependiente disminuirá en 0,8%, como vemos la disminución de Y es menor que el aumento de X. Es importante tener presente que el signo positivo o negativo que tenga el valor de la elasticidad solamente nos señala el sentido de la relación, directa o inversa, respectivamente,

Una elasticidad unitaria nos indica que las dos variables varían en la misma proporción.

Una elasticidad elástica nos indica que el cambio relativo en la variable dependiente es más que proporcional al cambio en la variable explicativa. Por ejemplo si  $E = 2,5$  nos indica que por cada 1% que aumente la variable explicativa, la variable dependiente aumentará en 2,5%, como vemos la disminución de Y es mayor que el aumento de X

Existen dos tipos fundamentales de elasticidad, la puntual y la promedio,. La puntual calcula la elasticidad en un punto específico de la función, y está definida por:

$$E = \frac{dY}{dX} \times \frac{X_1}{\hat{Y}_1}$$

Y la promedio:

$$E = \frac{dY}{dX} \times \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$$

En el caso del modelo clásico, la primera derivada es:  $\frac{dY}{dX} = \beta$ , por lo tanto las fórmulas quedan de la siguiente forma:

$$\text{Puntual } E = \hat{\beta} \frac{X_i}{\hat{Y}_i} \text{ y promedio } E = \hat{\beta} \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$$

Por ejemplo determine: a) la elasticidad ingreso del consumo familiar cuando el ingreso familiar es de 300\$, y b) determine la elasticidad ingreso promedio del consumo familiar.

$$\text{a) } E = \hat{\beta} \frac{X_i}{\hat{Y}_i}$$

$$\hat{Y}_i = 24,454 + 0,509(300) = 177.154$$

$$E = 0,509 \frac{300}{177,154} = 0,862$$

Cuando el ingreso es de 300\$, por cada 1% que aumente el mismo, el consumo familiar aumentará en 0,862%.

$$\text{b) } E = \hat{\beta} \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 0,509 \frac{111}{170} = 0,332$$

Cuando el ingreso promedio aumenta en 1% el consumo aumenta en 0,332%

### 3. MODELO LOGARITMICO

$$Y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} e^{u_i}$$

Este modelo es conocido como el *modelo de regresión exponencial*, el cual presenta la dificultad de no ser lineal en los parámetros ( $\beta_1$ , es de por sí un exponente), por lo tanto no le es posible aplicar el método de los mínimos cuadrados ordinarios. Para poder hacerlo, tenemos que transformar la ecuación en una lineal, lo cual haremos aplicando logaritmos.

$$\ln Y_i = \ln(\beta_0 X_i^{\beta_1} e^{u_i})$$

$$\ln Y_i = \ln \beta_0 + \ln X_i^{\beta_1} + \ln e^{u_i}$$

$$\ln Y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + u_i \ln e$$

$$\ln Y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + u_i$$

Este modelo es conocido como el *modelo de regresión logarítmico*. Esta función es de mucha utilidad por que el coeficiente  $\beta_1$  es directamente la elasticidad del modelo, por lo cual también es conocido como *modelo de regresión de elasticidad constante*.

$$E = \frac{dY}{dX} \frac{X}{Y}$$

$$\text{Si } Y = \beta_0 X^{\beta_1} e^u$$

$$\frac{dY}{dX} = \beta_0 \beta_1 X^{\beta_1-1} e^u = \beta_0 \beta_1 X^{\beta_1} X^{-1} e^u = \frac{\beta_0 \beta_1 X^{\beta_1} e^u}{X}$$

$$E = \frac{\beta_0 \beta_1 X^{\beta_1} e^u}{X} \frac{X}{Y} = \frac{\beta_0 \beta_1 X^{\beta_1} e^u}{X} \frac{X}{\beta_0 X^{\beta_1} e^u} = \beta_1$$

$$\text{Si } \ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X + u$$

$$\frac{d \ln Y}{d \ln X} = \beta_1 = \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dX}{X}} = \frac{dY}{dX} \frac{X}{Y} = E$$

Para determinar la variación marginal:

$$\beta_1 = E = \frac{dY}{dX} \frac{X}{Y}, \text{ despejando } \frac{dY}{dX} = \beta_1 \frac{Y}{X}$$

Por lo tanto para el modelo logarítmico:



Elasticidad	$\beta_1$
Variación marginal $\frac{dY}{dX}$	$\beta_1 \frac{\hat{Y}}{X}$ ó $\beta_1 \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$

### EJERCICIO Nº 3

#### . ELASTICIDADES<sup>18</sup>

Una empresa fabricante de automóviles desea estimar la demanda de automóviles ( $D_t$ ) en función del precio de los mismos ( $P_t$ ), para cual dispone de los datos de ambas variables de la propia empresa en los últimos 120 meses ( $t = 1, 2, \dots, 120$ ).

Con este objetivo se estiman los siguientes modelos:

a)  $D_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_t$

b)  $\ln(D_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(P_t) + u_t$

c)  $\ln(D_t) = \mu_0 + \mu_1 P_t + u_t$

d)  $D_t = \gamma_0 + \gamma_1 \ln(P_t) + u_t$

i) ¿Cuál es el signo esperado del coeficiente  $\alpha_1$  del primer modelo?

ii) Interprete matemática, gráfica y económicamente los coeficientes  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ .

iii) Interprete el significado económico de los coeficientes  $\beta_1$ ,  $\mu_1$  y  $\gamma_1$  de los modelos anteriores.

iv) ¿Cómo podemos obtener las elasticidades precio de la demanda de automóviles en cada modelo a partir de  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\mu_1$  y  $\gamma_1$ ?

#### Respuesta:

i) A primera vista parece lógico pensar que la demanda de automóviles disminuya conforme aumente su precio. En tal caso el coeficiente  $\alpha_1$  debería tener signo negativo. ( $\alpha_1 < 0$ )

ii) En el modelo (a) tenemos que, matemáticamente, el coeficiente  $\alpha_1$  es la derivada de la cantidad demandada respecto al precio:

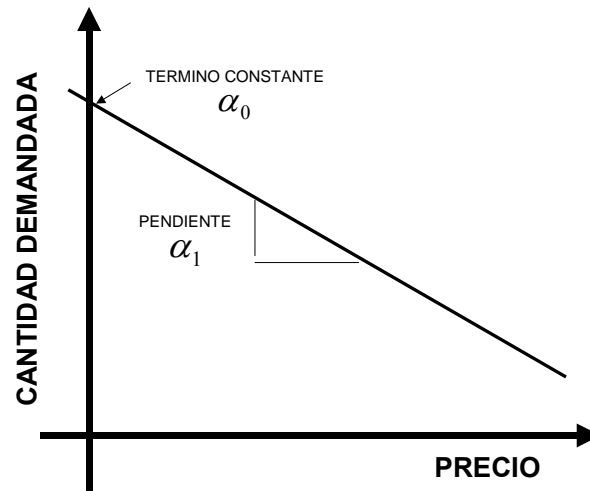
<sup>18</sup> Tomado de: Pérez Amara, Teodosio, Pablo Amorós González y Silvia Relloso Pereda. "Ejercicios de Econometría Empresarial". Mc Graw Hill, España. 1993. p.1

$$\alpha_1 = \frac{dD_t}{dP_t}$$

que en términos de incrementos puede expresarse como:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta D_t}{\Delta P_t}$$

por otro lado, en este modelo, la demanda de automóviles en un determinado momento del tiempo es una función lineal de los precios en ese mismo período, del tipo:



Donde  $\alpha_1$  es, gráficamente, la pendiente de la recta y  $\alpha_0$  el punto de corte con el eje de las ordenadas (eje que en este caso indica la cantidad demandada).

Por lo tanto, económicamente,  $\alpha_1$  mide cuantas unidades variará la cantidad demandada de vehículos cuando el precio se incrementa en una unidad (consumo marginal). Como ya se comentó en el apartado anterior, es previsible que dicho coeficiente tenga signo negativo y que, consecuentemente, si el precio sube una unidad la cantidad demandada de automóviles decrezca  $|\alpha_1|$  unidades.

En cuanto a  $\alpha_0$ , ayuda a colocar la función de demanda en el eje de las ordenadas. Sin embargo, en este caso carece de significado económico.

iii) La Interpretación económica del coeficiente  $\beta_1$  del modelo (b) no es tan inmediata.

Efectivamente,  $\beta_1$  es la derivada del logaritmo de la demanda respecto al logaritmo de los precios:

$$\beta_1 = \frac{d \ln D_t}{d \ln P_t} = \frac{\Delta \ln D_t}{\Delta \ln P_t} = \frac{\Delta D_t}{\Delta P_t} \frac{P_t}{D_t}$$

Como consecuencia de este resultado, podemos interpretar económicamente el coeficiente  $\beta_1$  de la siguiente manera: cuando los precios crecen 1%, la demanda lo hará en  $\beta_1$  %. Nótese que esto no es otra cosa que *la elasticidad* precio de la demanda de automóviles:

$$E_{D,P} = \frac{\Delta D_t}{\Delta P_t} \frac{P_t}{D_t} = \beta_1$$

Por otra parte, el coeficiente  $\mu_1$  del modelo (c) es la derivada del logaritmo de la demanda con respecto al precio (sin logaritmos):

$$\mu_1 = \frac{d \ln D_t}{d P_t} = \frac{\Delta \ln D_t}{\Delta P_t}$$

Luego, si los precios suben 1 unidad, la demanda aumenta en  $\mu_1$  %. Por lo tanto, podemos expresar  $\mu_1$  como:

$$\mu_1 = \frac{\Delta D_t}{(\Delta P_t \cdot D_t)}$$

que es una semielasticidad.

En cuanto al coeficiente  $\gamma_1$  del modelo (d) , puede expresarse como:

$$\gamma_1 = \frac{d D_t}{d \ln P_t} = \frac{\Delta D_t}{\Delta \ln P_t}$$

y por lo tanto:

$$\gamma_1 = \left( \frac{\Delta D_t}{\Delta P_t} \right) P_t$$

Luego si los precios aumentan en 1%, la demanda variará en  $\gamma_1$  unidades.

iv) Sabemos que la elasticidad precio de la función de la demanda se define como:

$$E_{D,P} = \left( \frac{\Delta D_t}{\Delta P_t} \right) \left( \frac{P_t}{D_t} \right)$$

Por lo tanto tenemos que:

- 1) en el modelo (a) :  $E_{D,P} = \alpha_1 \frac{P_t}{D_t}$
- 2) en el modelo (b) :  $E_{D,P} = \beta_1$
- 3) en el modelo (c):  $E_{D,P} = \mu_1 P_t$
- 4) en el modelo (d):  $E_{D,P} = \gamma_1 \frac{1}{D_t}$

Si tuviésemos que estimar las elasticidades utilizaríamos los valores estimados para  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\mu_1$  y  $\gamma_1$ , en su caso los valores promedios muestrales de  $P_t$  y  $D_t$

#### EJERCICIO N° 4

El siguiente cuadro incluye el precio y la oferta total de un bien durante un periodo de 10 años

Años	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Precio	47	56	59	65	70	71	76	90	92	105
Oferta	150	140	160	170	150	162	185	165	190	185

a) Estime una función lineal de oferta que le permita encontrar la elasticidad constante de la función.

b) Encuentre la oferta marginal promedio.

c) Pruebe la significancia individual del coeficiente, a un 5% de significancia.

a) Plantearemos un modelo logarítmico, ya que el coeficiente pendiente es la elasticidad constante de la función.

$$\ln O_t = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln P_t + u_t$$

$$\beta_1 > 0$$

$$\ln O_t = \ln \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \ln P_t + u_t$$

donde O= oferta y P = precio

años	O	P	lnO	lnP	lnOlnP	lnO^2	lnP^2
1966	150	47	5.0106	3.8501	19.2917	25.1065	14.8236
1967	140	56	4.9416	4.0254	19.8918	24.4198	16.2035
1968	160	59	5.0752	4.0775	20.6942	25.7574	16.6263
1969	170	65	5.1358	4.1744	21.4388	26.3764	17.4255
1970	150	70	5.0106	4.2485	21.2877	25.1065	18.0497
1971	162	71	5.0876	4.2627	21.6868	25.8836	18.1704
1972	185	76	5.2204	4.3307	22.6080	27.2521	18.7553
1973	165	90	5.1059	4.4998	22.9758	26.0707	20.2483
1974	190	92	5.2470	4.5218	23.7259	27.5313	20.4466
1975	185	105	5.2204	4.6540	24.2953	27.2521	21.6593
1657	731	51.0552	42.6449	217.8960	260.7564	182.4085	

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum YX - N\bar{Y}\bar{X}}{\sum X^2 - N\bar{X}^2} = \frac{\sum \ln O_t \ln P_t - N \bar{\ln O_t} \bar{\ln P_t}}{\sum (\ln P)^2 - N(\bar{\ln P})^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{217,896 - 10(5,1055)(4,2645)}{182,4085 - 10(4,2645)^2} = \frac{0,1718}{0,5498} = 0,3125$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \ln \hat{\beta}_0 = \bar{\ln O_t} - \hat{\beta}_1 \bar{\ln P_t}$$

$$\ln \hat{\beta}_0 = 5,1055 - 0,3125(4,2645) = 3,7728$$

$$\ln \hat{O}_t = 3,7728 + 0,3125 \ln P_t$$

$$b) \quad Omg = \frac{dO}{dP} = \hat{\beta}_1 \frac{\bar{O}}{\bar{P}} = 0,3125 \frac{165,7}{73,1} = 0,70836$$

$$c) \quad r^2 = \hat{\beta}_1 \frac{\sum YX - N\bar{Y}\bar{X}}{\sum Y^2 - N\bar{Y}^2} = \hat{\beta}_1 \frac{\sum \ln O_t \ln P_t - N \ln \bar{O}_t \ln \bar{P}_t}{\sum (\ln O_t)^2 - N \left( \ln \bar{O}_t \right)^2}$$

$$r^2 = 0,3125 \frac{0,1718}{260,7564 - 10(5,1055)^2} = 0,3125 \frac{0,1718}{0,0934} = 0,5748$$

El 57,48% de las variaciones en el logaritmo de la oferta, son explicados por variaciones en el logaritmo del precio.

$$\sum \hat{u}^2 = (1 - r^2) [\sum Y^2 - N\bar{Y}^2] = (1 - r^2) \left[ \sum (\ln O_t)^2 - N \left( \ln \bar{O}_t \right)^2 \right]$$

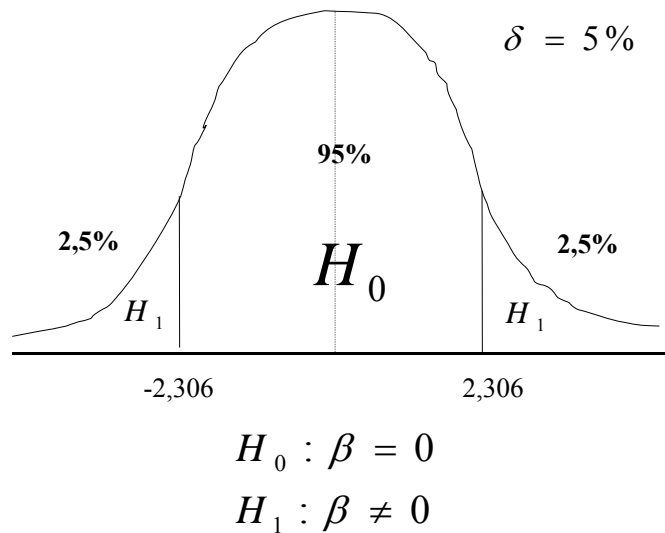
$$\sum \hat{u}^2 = (1 - 0,5748) 0,0934 = 0,0397$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}^2}{N - K} = \frac{0,0397}{10 - 2} = 0,005$$

$$ee(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{1}{\sum X^2 - N\bar{X}^2}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{1}{\sum (\ln P_t)^2 - N \left( \ln \bar{P}_t \right)^2}}$$

$$es(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{0,005}{0,5498}} = 0,095$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{ee(\hat{\beta}_1)} = \frac{0,3125}{0,095} = 3,2891$$



La  $t$  calculada es mayor que el valor crítico ( $3,2891 > 2,306$ ), por lo tanto rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alternativa de que el coeficiente es diferente a cero, con lo cual concluimos que el coeficiente  $\hat{\beta}_1$  es significativamente diferente a cero, o simplemente, el coeficiente es significativo.

### EJERCICIO N° 5

Los teóricos cuantitavistas o monetaristas sostienen que el ingreso nacional está fundamentalmente determinado por la cantidad de dinero. Para probar esta hipótesis, con los datos que se presentan a continuación, estime un modelo que permita determinar la elasticidad del ingreso nacional con respecto a la oferta monetaria y compruebe la significancia individual del parámetro pendiente...

TRIMESTRE	PNB (MMUS\$)	OFERTA MONETARIA (MMMUS\$)
1972:01	1127,0	237,5
1972:02	1156,7	242,3
1972:03	1181,4	247,4
1972:04	1219,4	252,9
1973:01	1365,0	257,6
1973:02	1287,8	261,7
1973:03	1319,7	265,3
1973:04	1352,7	268,7
1974:01	1370,9	272,7
1974:02	1391,0	276,5
1974:03	1424,4	279,4
1974:04	1441,3	282,2

Respuesta:

Para determinar la elasticidad del ingreso nacional con respecto a la oferta monetaria estimamos un modelo logarítmico.

$$LNPNB_t = \beta_0 + \beta_1 LNOM_t + u_t$$

$$\beta_1 > 0$$

$$LNPNB_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 LNOM_t + \hat{u}_t$$

TRIMESTRE	OFERTA MONETARIA		LNPNB	LNOM	LNPNB*LNOM	LNOM <sup>2</sup>	LNPNB <sup>2</sup>
	PNB (MMUS\$)	MONETARIA (MMMUS\$)					
1972:01	1127,0	237,5	7,0273	5,4702	38,4406	29,9227	49,3831
1972:02	1156,7	242,3	7,0533	5,4902	38,7240	30,1420	49,7494
1972:03	1181,4	247,4	7,0745	5,5110	38,9874	30,3712	50,0479
1972:04	1219,4	252,9	7,1061	5,5330	39,3181	30,6140	50,4969
1973:01	1365,0	257,6	7,2189	5,5514	40,0751	30,8181	52,1127
1973:02	1287,8	261,7	7,1607	5,5672	39,8650	30,9937	51,2755
1973:03	1319,7	265,3	7,1852	5,5809	40,0994	31,1460	51,6265
1973:04	1352,7	268,7	7,2099	5,5936	40,3290	31,2883	51,9821
1974:01	1370,9	272,7	7,2232	5,6084	40,5105	31,4538	52,1749
1974:02	1391,0	276,5	7,2378	5,6222	40,6923	31,6093	52,3854
1974:03	1424,4	279,4	7,2615	5,6326	40,9015	31,7267	52,7295
1974:04	1441,3	282,2	7,2733	5,6426	41,0404	31,8391	52,9009
			86,0316	66,8033	478,9833	371,9250	616,8648

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum XY - N\bar{X}\bar{Y}}{\sum X^2 - N\bar{X}^2} = \frac{\sum LNOM \cdot LNPNB - N\left(\overline{LNOM}\right)\left(\overline{LNPNB}\right)}{\sum LNOM^2 - \left(\overline{LNOM}\right)^2}$$

$$\left(\overline{LNOM}\right) = \frac{\sum LNOM}{N} = \frac{66,8033}{12} = 5,5669$$

$$\left(\overline{LPNB}\right) = \frac{\sum LNPNB}{N} = \frac{86,0316}{12} = 7,1693$$



$$\hat{\beta}_1 = \frac{478,9833 - 12(5,5669)(7,1693)}{371,925 - 12(5,5669)^2} = \frac{0,0506}{0,0355} = 1,4245$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \left( \overline{LNPNB} \right) - \hat{\beta}_1 \left( \overline{LNOM} \right) = 7,1693 - (1,4245)(5,5669) = -0,7609$$

$$LNPNB_t = -0,7609 + 1,4245 LNOM_t$$

La elasticidad del ingreso nacional con respecto a la oferta de dinero es igual a 1,4245, por cada 1% que aumente la oferta monetaria el ingreso nacional aumentará en 1,4245%.

A continuación chequearemos la significancia individual de  $\beta_1$

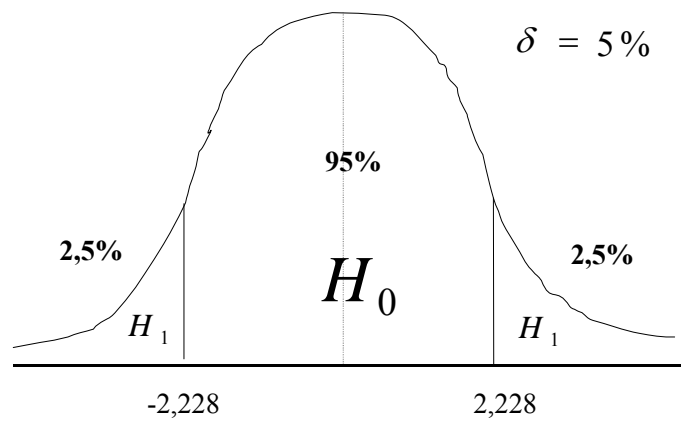
$$r^2 = \hat{\beta}_1 \frac{\sum XY - N\bar{X}\bar{Y}}{\sum Y^2 - N\bar{Y}^2} = \hat{\beta}_1 \frac{\sum LNOM \cdot LNPNB - N \left( \overline{LNOM} \right) \left( \overline{LNPNB} \right)}{\sum LNPNB^2 - N \left( \overline{LNPNB} \right)^2}$$

$$r^2 = 1,4245 \frac{0,0506}{616,8648 - 12(7,1693)^2} = 1,4245 \frac{0,0506}{0,0779} = 0,9242$$

$$\sum \hat{u}^2 = (1 - r^2) [\sum Y^2 - N\bar{Y}^2] = (1 - 0,9242) 0,0779 = 0,0059$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum \hat{u}^2}{N - K} = \frac{0,0059}{12 - 2} = 0,00059$$

$$ee(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 \frac{1}{\sum X^2 - N\bar{X}^2}} = \sqrt{\frac{0,00059}{0,0355}} = \sqrt{0,0166} = 0,12899$$



$$H_0 : \beta_I = 0$$

$$H_1 : \beta_I \neq 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{ee(\hat{\beta}_1)} = \frac{1,4245 - 0}{0,12899} = 11,0428$$

11,0428 > 2,228, por lo tanto rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alterna de que  $\beta_1 \neq 0$ , con lo que concluimos que  $\beta_1$  es significativamente diferente a cero. Dado el resultado anterior podemos afirmar que la oferta monetaria explica el comportamiento del ingreso nacional, medido a través de una variable proxis como es el PNB.

## CHEQUEO DE LOS RESULTADOS EN EViews

DATOS

View	Procs	Objects	Print	Name	Freeze	Edit+/-	Smp
obs	LOM	LPNB					
1972:1	5.470168	7.027315					
1972:2	5.490177	7.053326					
1972:3	5.511006	7.074455					
1972:4	5.532994	7.106114					
1973:1	5.551408	7.218910					
1973:2	5.567199	7.160691					
1973:3	5.580861	7.185160					
1973:4	5.593596	7.209858					
1974:1	5.608372	7.223223					
1974:2	5.622211	7.237778					
1974:3	5.632644	7.261506					
1974:4	5.642616	7.273301					

# SALIDA EVIEWS

Dependent Variable: LPNB  
 Method: Least Squares  
 Date: 10/30/02 Time: 17:10  
 Sample: 1972:1 1974:4  
 Included observations: 12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOM	1.424515	0.129000	11.04277	0.0000
C	-0.760881	0.718168	-1.059475	0.3143
R-squared	0.924210	Mean dependent var	7.169303	
Adjusted R-squared	0.916631	S.D. dependent var	0.084178	
S.E. of regression	0.024305	Akaike info criterion	-4.445239	
Sum squared resid	0.005907	Schwarz criterion	-4.364421	
Log likelihood	28.67143	F-statistic	121.9428	
Durbin-Watson stat	2.424997	Prob(F-statistic)	0.000001	

## EJERCICIO N° 6

La siguiente tabla da el rendimiento de maíz por acre (Y), resultante del uso de varias cantidades de fertilizante en libras por acre (X), producidas en una granja en cada uno de los años 1971 a 1980.

Año	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
Y	40	44	46	48	52	58	60	68	74	80
X	6	10	12	14	16	18	22	24	26	32

- Estime una función lineal de rendimiento del maíz.
- Encuentre la elasticidad promedio del rendimiento del maíz.
- Determine la bondad de ajuste.
- Pruebe la significancia individual del coeficiente, a un 5%.

Respuesta:

$$Y_t = 27,125 + 1,6597 X_t$$

$$(1,979) (0,101)$$

$$(16,38) (1,704)$$

$$R^2 = 0,971049$$

Recuerde: el primer paréntesis debajo de cada coeficiente, indica el error estándar del coeficiente, y el segundo paréntesis, indica el valor del estadístico T calculado.

### EJERCICIO N° 7

La siguiente tabla da los datos para una muestra aleatoria de 12 parejas sobre el número de hijos que tienen (Y), y el número de hijos que habían establecido que querían en el momento del matrimonio.

PAR.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	4	3	0	4	4	3	0	4	3	1	3	1
X	3	3	0	2	2	3	0	3	2	1	3	2

- Estime una función lineal.
- Determine la bondad de ajuste.
- Pruebe la significancia individual del coeficiente, a un 5%.
- Determine el número de hijos que tendría una pareja que estimaba para el momento de su matrimonio la concepción de 4 hijos. (Puede redondear el valor).

Respuesta:

$$Y_i = 0,2143 + 1,1429 X_i$$

$$\begin{matrix} (0,567) & (0,249) \\ (0,378) & (4,581) \end{matrix}$$

$$R^2 = 0,6772$$

### EJERCICIO N° 8

El siguiente cuadro incluye el precio y la oferta total de un bien durante un período de 10 años.

Años	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Precio	47	56	59	65	70	71	76	90	92	105
Oferta	150	140	160	170	150	162	185	165	190	185

- Estime una función lineal de oferta, que le permita encontrar la elasticidad constante.

- b) Encuentre la variación marginal de la oferta con respecto al precio, cuando el precio es de 80.
- c) Determine la bondad de ajuste.
- d) Pruebe la significancia individual del coeficiente, a un 5%.

Respuesta:

$$\ln OFERTA_i = 3,7728 + 0,3125 \ln PRECIO_i$$

$$(0,406) \quad (0,095)$$

$$(9,297) \quad (3,289)$$

$$R^2 = 0,5749$$

### EJERCICIO N° 9

La siguiente información se refiere a 10 años sobre los gastos de inversión y la tasa de interés real:

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inv.	656	804	836	765	777	711	755	747	696	787
Tasa	5	4	4,5	5,5	6	6	6	5	7	6,5

- a) Compruebe la hipótesis de que la inversión se relaciona inversamente con la tasa de interés real.
- b) Determine la eficacia marginal del capital.
- c) Determine la elasticidad promedio de la inversión.
- d) Determine la bondad de ajuste.
- e) Pruebe la significancia individual del coeficiente, a un 5%.

Respuesta:

$$INV_i = 873,8835 - 21,7087 TASA_i$$

$$(106,467) \quad (18,947)$$

$$(8,208) \quad (-1,145)$$

$$R^2 = 0,140963$$

### EJERCICIO N° 10

Suponga que usted posee la siguiente información acerca del ahorro (S), y el ingreso nacional (Y), para el período 1965 –1974.

Años	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
S	20	25	25	30	33	38	35	45	43	50
Y	100	110	130	140	160	170	170	200	240	250

- Estime mediante mínimos cuadrados ordinarios la función de ahorro.
- Encuentre la elasticidad promedio del ahorro.
- Pruebe la significancia individual del parámetro a un 5%.

Respuesta:

$$S_t = 3,734 + 0,184Y_t$$

$$(3,271) (0,019)$$

$$(1,141) (9,756)$$

$$R^2 = 0,9224$$

## CAPITULO IV

### 1. MODELO DE REGRESION MULTIPLE (2 VARIABLES EXPLICATIVAS)

Cuando hablamos de un modelo de regresión múltiple, nos estamos refiriendo a un modelo de regresión con más de una variable explicativa.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + \dots + \beta_n X_{nt} + u_t$$

Para facilidad de la explicación en los puntos siguientes nos referiremos al modelo con dos variables explicativas:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t : \text{FRP}$$

$$Y_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1t} + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \hat{u}_t : \text{FRM}$$

donde los estimadores mínimos cuadrados son:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_1 y \sum x_2^2 - \sum x_2 y \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_2 y \sum x_1^2 - \sum x_1 y \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

donde  $x = (X_i - \bar{X}) = \text{desvíos de X}$ ;  $y = (Y_i - \bar{Y}) = \text{desvíos de Y}$

El coeficiente de Determinación ( $R^2$ )

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 \sum x_1 y + \hat{\beta}_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}$$

Errores estándar:

$$ee(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\sigma^2 \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}}$$

$$ee(\hat{\beta}_2) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}}$$

Equivalencias entre valores en desvío y valores observados:

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - N \bar{X}_1 \bar{Y}$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - N \bar{X}_2 \bar{Y}$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - N \bar{X}_1 \bar{X}_2$$

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - N \bar{X}_1^2$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - N \bar{X}_2^2$$

$$\sum Y^2 = \sum Y^2 - N \bar{Y}^2$$

### EJERCICIO N° 11

El siguiente cuadro incluye información acerca de la tasa de inflación observada  $Y(\%)$ , tasa de desempleo  $X_1 (\%)$  y tasa de inflación esperada  $X_2$  para los Estados Unidos, en el período 1970-1982.

Año	Y	$X_1$	$X_2$
1970	5.92	4.9	4.78
1971	4.30	5.9	3.84
1972	3.30	5.6	3.13
1973	6.23	4.9	3.44
1974	10.97	5.6	6.84
1975	9.14	8.5	9.47
1976	5.77	7.7	6.51
1977	6.45	7.1	5.92
1978	7.60	6.1	6.08
1979	11.47	5.8	8.09
1980	13.46	7.1	10.01
1981	10.24	7.6	10.81
1982	5.99	9.7	8.00

a) Estime una función lineal de inflación para los Estados Unidos.



b) Realice al análisis económico y estadístico del modelo. (5% de nivel de significancia)

a)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$$

$$\beta_1 < 0 \quad \beta_2 > 0$$

$$Y_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1t} + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \hat{u}_t$$

Año	(Y)	(X1)	(X2)	(X1)Y	(X2)Y	(X1)(X2)	(X1)^2	(X2)^2	Y^2
1970	5.92	4.90	4.78	29.01	28.30	23.42	24.01	22.85	35.05
1971	4.30	5.90	3.84	25.37	16.51	22.66	34.81	14.75	18.49
1972	3.30	5.60	3.13	18.48	10.33	17.53	31.36	9.80	10.89
1973	6.23	4.90	3.44	30.53	21.43	16.86	24.01	11.83	38.81
1974	10.97	5.60	6.84	61.43	75.03	38.30	31.36	46.79	120.34
1975	9.14	8.50	9.47	77.69	86.56	80.50	72.25	89.68	83.54
1976	5.77	7.70	6.51	44.43	37.56	50.13	59.29	42.38	33.29
1977	6.45	7.10	5.92	45.80	38.18	42.03	50.41	35.05	41.60
1978	7.60	6.10	6.08	46.36	46.21	37.09	37.21	36.97	57.76
1979	11.47	5.80	8.09	66.53	92.79	46.92	33.64	65.45	131.56
1980	13.46	7.10	10.10	95.57	135.95	71.71	50.41	102.01	181.17
1981	10.24	7.60	10.81	77.82	110.69	82.16	57.76	116.86	104.86
1982	5.99	9.70	8.00	58.10	47.92	77.60	94.09	64.00	35.88
	100.84	86.50	87.01	677.11	747.47	606.90	600.61	658.40	893.25

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{N} = \frac{86,50}{13} = 6,654$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N} = \frac{87,01}{13} = 6,693$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{100,84}{13} = 7,757$$

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - N \bar{X}_1 \bar{Y} = 677,11 - 13(6,654)(7,757) = 6,114$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - N \bar{X}_2 \bar{Y} = 747,47 - 13(6,693)(7,757) = 72,541$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - N \bar{X}_1 \bar{X}_2 = 606,90 - 13(6,654)(6,693) = 27,942$$

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - N \bar{X}_1^2 = 600,61 - 13(6,654)^2 = 25,026$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - N \bar{X}_2^2 = 658,40 - 13(6,693)^2 = 76,049$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - N \bar{Y}^2 = 893,25 - 13(7,757)^2 = 111,026$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_1 y \sum x_2^2 - \sum x_2 y \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(6,114)(76,049) - (72,541)(27,942)}{(25,026)(76,049) - (27,942)^2} = \frac{-1.561.977}{1.122,477} = -1,392$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_2 y \sum x_1^2 - \sum x_1 y \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(72,541)(25,025) - (6,114)(27,942)}{(25,026)(76,049) - (27,942)^2} = \frac{1.644,501}{1.122,477} = 1,465$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

$$\hat{\beta}_0 = 7,757 - (-1,392)(6,654) - (1,465)(6,693) = 7,214$$

$$\hat{Y}_T = 7,214 - 1,392 X_{1T} + 1,465 X_{2T}$$

b)

b.1) Análisis económico: Los signos de los coeficientes están acordes con la hipótesis inicial. Existe una relación inversa entre la tasa de desempleo y la tasa de inflación observada. Por cada punto porcentual en que se incrementa la tasa de desempleo, la

inflación observada disminuirá en 1,392 unidades porcentuales. Existe una relación directa entre la tasa de inflación esperada y la tasa de inflación observada. Por cada unidad porcentual en que se incrementa la tasa de inflación esperada, la tasa de inflación observada se incrementará en 1,465 unidades porcentuales.

b.2) Análisis estadístico:

b.2.1) Coeficiente de determinación ( $R^2$ )

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 \sum x_1 y + \hat{\beta}_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}$$

$$R^2 = \frac{(-1,392)(6,114) + (1,465)(72,541)}{111,026} = \frac{97,762}{111,026} = 0,881$$

El 88,10% de las variaciones en la inflación observada son explicadas por el modelo.

b.2.2.) Prueba de significancia individual de los coeficientes pendientes.

$$\sum \hat{u}_t = (1 - R^2) \sum y^2 = (1 - 0,881) 111,026 = 13,312$$

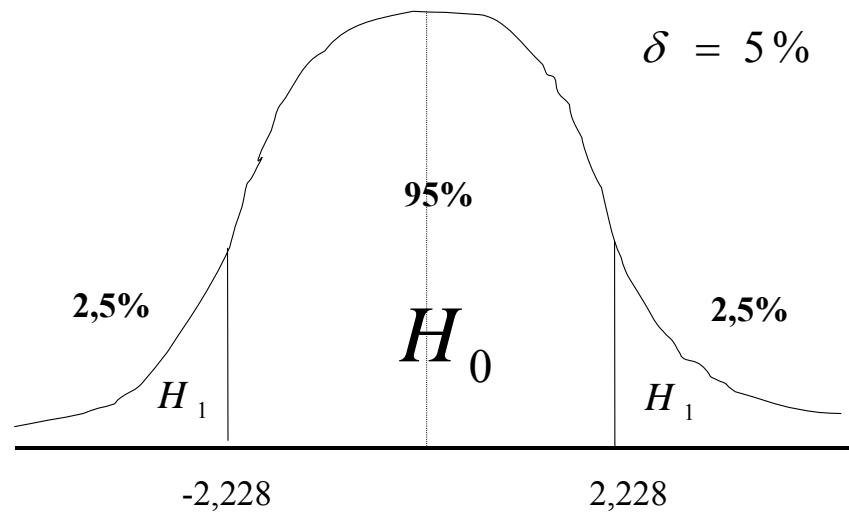
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}^2}{N - K} = \frac{13,212}{13 - 3} = 1,321$$

$$ee(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}}$$

$$ee(\hat{\beta}_1) = \sqrt{1,321 \frac{76,049}{1.122,477}} = \sqrt{0,089} = 0,299$$

$$ee(\hat{\beta}_2) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}}$$

$$ee(\hat{\beta}_2) = \sqrt{1,321 \frac{25,026}{1.122,477}} = \sqrt{0,029} = 0,172$$



$$H_0 : \beta_i = 0 \quad i = 1, 2$$

$$H_1 : \beta_i \neq 0$$

$$t_1 = \frac{\hat{\beta}_1 - \bar{\beta}_1}{ee(\hat{\beta}_1)} = \frac{-1,392 - 0}{0,299} = \frac{-1,392}{0,299} = -4,656$$

como  $-4,656 < -2,228$ , entonces  $t_1$  calculado cae en la cola de la izquierda, en la de significancia, por lo tanto rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alternativa de que el coeficiente beta es significativamente diferente de cero.

$$t_2 = \frac{\hat{\beta}_2 - \bar{\beta}_2}{ee(\hat{\beta}_2)} = \frac{1,465 - 0}{0,172} = \frac{1,465}{0,172} = 8,517$$

como  $8,817 > 2,228$ , entonces  $t_2$  calculado cae en la cola de la izquierda, en la de significancia, por lo tanto rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alternativa de que el coeficiente beta es significativamente diferente de cero.

Resumen de los resultados obtenidos.

$$\begin{array}{rcc} \hat{Y}_T = 7,214 - 1,392X_{1T} + 1,465X_{2T} & & \\ (0,229) & (0,172) & \\ (-4,656) & (8,517) & R^2 = 0,881 \end{array}$$

### EJERCICIO N° 12

Dado el siguiente modelo:

$$\begin{array}{rcc} \hat{Y}_i = -0,0636 + 1,446X_{2i} - 0,4898X_{3i} & & \\ (0,567) & (0,271) & (0,197) \end{array}$$

$$N = 10$$

Se pide efectuar los siguientes contrastes de hipótesis con un nivel de significación  $\alpha = 0,05$ :

1.  $H_0 : \beta_1 = 0$   
 $H_1 : \beta_1 \neq 0$
2.  $H_0 : \beta_2 = 1$   
 $H_1 : \beta_2 \neq 1$
3.  $H_0 : \beta_3 = -0,5$   
 $H_1 : \beta_3 \neq -0,5$

Solución:

En primer lugar obtendremos el estadístico  $t$  de la tabla para un  $\alpha = 0,05$  y 7 ( $N=10$ ,  $k = 3$ ) grados de libertad

Puntos porcentuales de la distribución t

	0,25 0,50	0,10 0,20	0,05 0,10	0,025 0,05	0,01 0,02	0,005 0,01	0,001 0,00
·							
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	<b>2,365</b>	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
·							

NOTA: La primera columna corresponde a los grados de libertad, y la primera fila corresponde a los niveles de significación

1.  $H_0 : \beta_1 = 0$   
 $H_1 : \beta_1 \neq 0$

El estadístico apropiado para efectuar este contraste de hipótesis:

$$t_{\beta_1} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\beta_1}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\hat{\sigma}_{\beta_1}} = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\beta_1}}$$

el cual se distribuye con  $N - K$  ( $10 - 3 = 7$ ) grados de libertad. El valor del estadístico es:

$$t_{\beta_1} = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\beta_1}} = \frac{0,0636}{0,567} = 0,11$$

Dado que  $|t_{\beta_1}| = 0,11 < t_{0,025}(7) = 2,365$  aceptamos la hipótesis nula ( $\beta_1 = 0$ ) y concluimos que el parámetro no es significativamente diferente a cero al nivel de significación  $\alpha = 0,05$ .

2.  $H_0 : \beta_1 = 1$   
 $H_1 : \beta_1 \neq 1$

El estadístico de contrastes es:

$$t_{\beta_2} = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\beta_2}} = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{\hat{\sigma}_{\beta_2}}$$

el cual se distribuye como una  $t$  de Student con  $N - K$  ( $10 - 3 = 7$ ) grados de libertad.

$$t_{\beta_2} = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{\hat{\sigma}_{\beta_2}} = \frac{1,446 - 1}{0,271} = 1,65$$

Dado que la distribución es la misma que en el caso anterior, el valor crítico seguirá siendo el mismo ( $t_{0,025}(7) = 2,365$ ) y, dado que:

$$|t| = 1,65 < 2,365$$

aceptamos la hipótesis nula de que  $\beta_2 = 0$ , y concluimos que el parámetro no es significativamente diferente a 1 a un  $\alpha = 0,05$

3.  $H_0 : \beta_3 = -0,5$   
 $H_1 : \beta_3 \neq -0,5$

En este caso el estadístico adecuado es:

$$t_{\beta_3} = \frac{\hat{\beta}_3 - \beta_3}{\hat{\sigma}_{\beta_3}} = \frac{\hat{\beta}_3 - 0,5}{\hat{\sigma}_{\beta_3}} = \frac{0,4898 - 0,5}{0,197} = -5,02$$

Dado que la distribución sigue siendo la misma que en los casos anteriores, el valor crítico sigue siendo el mismo. Por lo tanto, como:

$$|t| = 5,02 > 2,365$$

rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alterna de que  $\beta_3 \neq -0,5$ , por lo tanto concluimos que el coeficiente es significativamente diferente a -0,5 a un  $\alpha = 0,05$

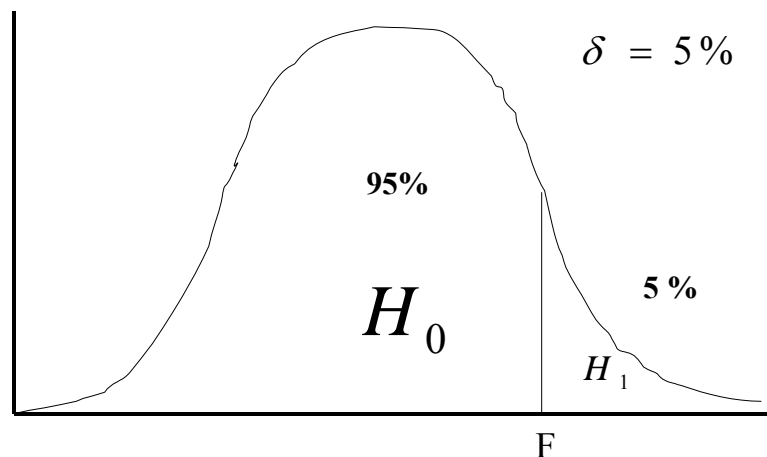
## 2. PRUEBA F (SIGNIFICANCIA GLOBAL DE LOS COEFICIENTES)

Adicionalmente a la prueba de significancia individual, es necesario realizar la prueba de significancia global, a través de la prueba F, la cual nos permite chequear si los coeficientes en su conjunto son significativamente iguales o no a una hipótesis nula determinada. Como en el caso de la significancia individual, la hipótesis que se plantea es que los coeficientes son iguales a cero:  $\beta_1 = \beta_2 = 0$

La metodología a aplicar es similar a la utilizada en la prueba T, se calculará un estadístico F:

$$F = \frac{R^2 / (K - 1)}{(1 - R^2) / (N - K)}$$

el cual se comparará con el estadístico F que nos indique la tabla de la distribución F



$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$$

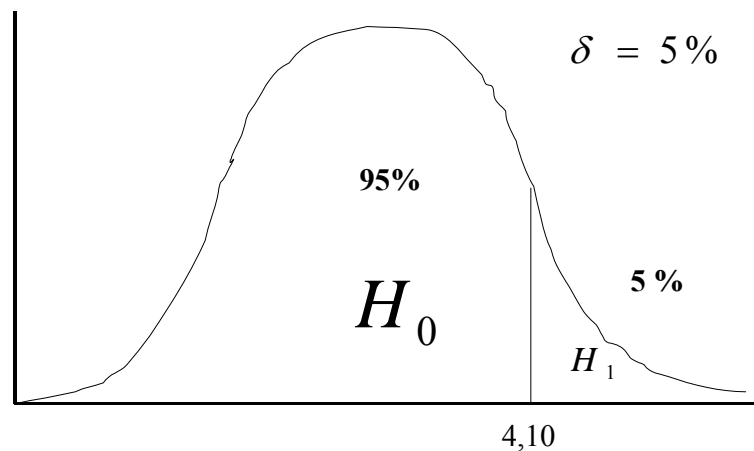


Si la F calculada es menor que la F que indica la tabla, esta caerá en la región central, o zona de aceptación de la hipótesis nula, con lo cual, la conclusión sería que los coeficientes globalmente no son significativamente iguales a cero.

Si la F calculada es mayor que la F de la tabla, esta caerá en la cola de la derecha o zona de rechazo, o zona de significancia, con lo que la conclusión sería que los coeficientes globalmente si son significativamente iguales a cero.

Es importante indicar que la T calculada siempre será un valor positivo.

Ejemplo:



$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$$

Para el ejercicio anterior:

$$F = \frac{0,881/(3-1)}{(1-0,881)/(13-3)} = \frac{0,441}{0,012} = 36,71$$

Puntos porcentuales de la distribución F

g. de l. para el denominador (N-K)	Pr	g. de l. para el numerador (K-1)			
		1	2	3	4
...					
10	0.25	1.49	1.60	1.60	1.59
	0.10	3.29	2.92	2.73	2.61
	0.05	4.96	<b>4.10</b>	3.71	3.48
	0.01	10.00	7.56	6.55	5.99
11	0.25	1.47	1.58	1.58	1.57
	0.10	3.23	2.86	2.66	2.54
	0.05	4.84	3.98	3.59	3.36
	0.01	9.65	7.21	6.22	5.67
...					

Como  $36,71 > 4.10$  entonces rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alternativa de que los coeficientes son diferentes a cero, por lo que se concluye que los coeficientes globalmente si son significativamente diferentes a cero.

Es importante resaltar que existe una relación directa entre el coeficiente de determinación y el estadístico F calculado, mientras mas alto es  $R^2$ , más alto es F, por ejemplo si en el ejercicio anterior  $R^2 = 1$ , indicando un ajuste perfecto, el estadístico F sería:

$$F = \frac{1/(3-1)}{(1-1)/(13-3)} = \frac{0,5}{0} = \infty$$

Es decir cuando  $\lim_{R^2 \rightarrow 1} F = \infty$

### EJERCICIO N° 13

Un investigador estimó una función de COBB-DOUGLAS para el sector agrícola de Taiwan durante 1958-1992, obteniendo los siguientes resultados.

$$\ln \hat{Y}_i = -3,3384 + 1,4988 \ln L_i + 0,4899 \ln K_i$$

$$T = \begin{matrix} (2,449) & (0,239) & (0,102) \\ (-1,363) & (6,268) & (4,801) \end{matrix}$$

$$R^2 = 0,8705$$

$$g \text{ de l} = 12$$

donde  $Y$ = producción;  $L$ = factor productivo trabajo y  $K$ = factor productivo capital.

Se requiere que analice desde el punto de vista económico y estadístico los resultados obtenidos

NOTA: El modelo de COBB-DOUGLAS es un modelo de producción en forma logarítmica que relaciona la producción de un bien con los factores productivos, trabajo y capital.

Análisis económico:

Primeramente analizaremos los signos de los pendientes, los dos signos son positivos, lo cual concuerda con la teoría, existe una relación directa entre el uso de los factores productivos y la producción de un bien.

Como es un modelo logarítmico, los coeficientes pendientes, nos indican las elasticidades del modelo. El coeficiente 1,4988, representa la elasticidad de la producción con respecto al factor productivo trabajo, y nos indica que por cada 1% que aumenta el factor trabajo, la producción aumentará en 1,4988%, un aumento mas que proporcional. (elástico). El coeficiente 0,4899, representa la elasticidad de la producción con respecto al factor productivo capital, y nos indica que por cada 1% que aumenta el factor trabajo, la producción aumentará en 0,4899%, un aumento menos que proporcional. (inelástico).

Análisis estadístico:

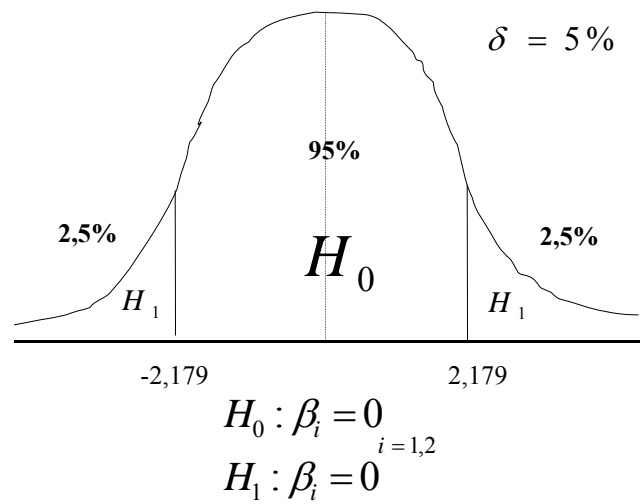
El coeficiente de determinación o bondad de ajuste ( $R^2 = 0,8705$ ) nos indica que el 87,05% de las variaciones en el logaritmo de la producción, son explicadas por el modelo.

Significancia individual:

$$t_1 = 6,268$$

$$t_2 = 4,801$$

$$g \text{ de } l = 12$$

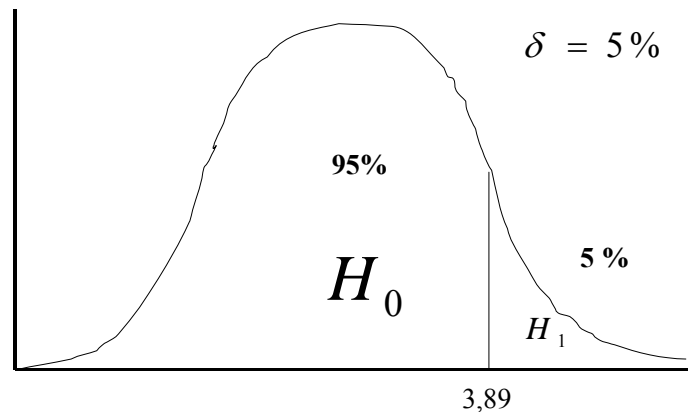


6,268 > 2,179 y 4,801 > 2,179. En ambos casos la T calculada cae en la cola, es decir en la zona de significancia o zona de rechazo. Por lo tanto rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alternativa de que los coeficientes son diferentes a cero. Finalmente concluimos que ambos coeficientes pendientes si son significativamente diferente a cero.

Significancia global.

Puntos porcentuales de la distribución F (continuación...)

g. de l. para el denominador (N-K)	Pr	g. de l. para el numerador (K-1)						
		1	2	3	4	5	6	7
...								
12	0.25	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52
	0.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28
	0.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91
	0.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64
13	0.25	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50
	0.10	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23
	0.05	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83
	0.01	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44
...								



$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$$

$$F = \frac{R^2 / (K - 1)}{(1 - R^2) / (N - K)} = \frac{0,8705 / (3 - 1)}{(1 - 0,8705) / (15 - 3)} = \frac{0,435}{0,011} = 39,545$$

Como  $39,545 > 3,89$ , rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alternativa de que los coeficientes son diferentes a cero, por lo cual concluimos que los coeficientes, globalmente si son significativamente diferente a cero.

#### EJERCICIO N° 14

La compañía petrolífera Campsol<sup>19</sup> desea elaborar un modelo de regresión lineal trimestral para explicar las ventas totales de gasolina en una gasolinera ( $G_t$ ) en una función de la renta total de su área ( $Y_t$ ), un índice de precios de gasolina ( $P_t$ ), el número total de vehículos matriculados en su área ( $M_t$ ) y un índice de cubicaje de los automóviles de su área ( $CU_t$ ). Para ello dispone de los datos trimestrales observados durante el período 1980 – 1985 que se muestran a continuación:

<sup>19</sup> Ejercicio tomado de Pérez Amaral, Teodosio. Ob.cit. p.18

TRIMESTRE	$G_t$	$Y_t$	$P_t$	$M_t$	$CU_t$
1980:01	61,26	738,40	2,73	68,56	1,93
1980:02	73,41	737,70	1,76	68,86	1,87
1980:03	75,09	732,10	1,76	68,96	1,77
1980:04	70,75	737,70	2,02	68,88	1,82
1981:01	70,39	750,10	2,06	69,22	1,69
1981:02	73,82	759,60	1,90	69,54	1,84
1981:03	74,45	779,01	2,02	69,65	1,70
1981:04	67,46	789,20	2,41	70,23	1,73
1982:01	67,76	798,40	2,55	70,48	1,73
1982:02	65,47	805,50	2,73	70,62	1,70
1982:03	66,80	808,01	2,56	71,08	1,61
1982:04	65,12	811,01	2,88	71,41	1,49
1983:01	67,09	826,70	2,81	71,46	1,29
1983:02	64,03	839,70	3,05	71,66	1,17
1983:03	63,14	848,60	3,26	72,17	1,01
1983:04	63,15	864,20	3,49	72,36	0,92
1984:01	64,81	873,70	3,35	72,57	0,81
1984:02	64,68	880,90	3,35	72,97	0,77
1984:03	64,58	886,70	3,53	73,16	0,67
1984:04	64,18	906,70	3,67	73,77	0,62
1985:01	64,12	919,70	3,82	74,13	0,56
1985:02	64,37	934,01	3,79	74,56	0,51
1985:03	65,38	956,70	3,91	74,96	0,46
1985:04	62,74	975,40	4,42	75,71	0,44

- a) Utilizando el programa Eviews estime un modelo de regresión lineal para la venta de gasolinas.

$$G = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 P_t + \beta_3 M_t + \beta_4 CU_t + u_t$$

- b) Estime un modelo de regresión lineal para la venta de gasolinas que permita determinar la elasticidad constante del modelo.

$$G_t = \beta_0 Y_t^{\beta_1} P_t^{\beta_2} M_t^{\beta_3} CU_t^{\beta_4} e^{u_t}$$

RESPUESTA:

- a)

Dependent Variable: VENTAS

Method: Least Squares

Date: 10/31/02 Time: 15:30

Sample: 1980:1 1985:4

Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RENTA	0.073064	0.043915	1.663767	0.1126
PRECIOS	-12.89888	1.185649	-10.87917	0.0000
VEHICULOS	-0.093968	1.447429	-0.064921	0.9489
INDICE	-3.019481	1.882571	-1.603913	0.1252
C	54.11210	72.11527	0.750356	0.4622
R-squared	0.921833	Mean dependent var	66.83542	
Adjusted R-squared	0.905377	S.D. dependent var	4.019677	
S.E. of regression	1.236488	Akaike info criterion	3.445480	
Sum squared resid	29.04917	Schwarz criterion	3.690908	
Log likelihood	-36.34576	F-statistic	56.01730	
Durbin-Watson stat	1.402800	Prob(F-statistic)	0.000000	

b)

Dependent Variable: LVENTAS

Method: Least Squares

Date: 11/03/02 Time: 13:26

Sample: 1980:1 1985:4

Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LRENTA	0.806792	0.280151	2.879844	0.0096
LPRECIOS	-0.450642	0.022078	-20.41162	0.0000
LVEHICULOS	-0.305849	0.798317	-0.383117	0.7059
LINDICE	-0.029554	0.015168	-1.948495	0.0663
C	0.554216	1.852427	0.299184	0.7680
R-squared	0.977270	Mean dependent var	4.200552	
Adjusted R-squared	0.972484	S.D. dependent var	0.058783	
S.E. of regression	0.009751	Akaike info criterion	-6.239893	
Sum squared resid	0.001806	Schwarz criterion	-5.994465	
Log likelihood	79.87872	F-statistic	204.2220	
Durbin-Watson stat	2.609417	Prob(F-statistic)	0.000000	

### EJERCICIO N° 15

A continuación se presentan algunos modelos ya regresados, Para todos se requiere que se analice: a) desde un punto de vista económico y b) estadísticamente.

$$\begin{aligned} 1) \quad \ln Q_t &= 0,50 + 0,76 \ln L_t + 0,188 \ln K_t \\ &\quad (0,7073) \quad (0,1386) \\ R^2 &= 0,9688 \\ N &= 15 \end{aligned}$$

Donde Q= producción, L= trabajo y K = capital

$$\begin{aligned} 2) \quad Md_t &= 0,003 - 0,261 I_t + 0,530 Y_t + 0,367 L_t \\ &\quad (0,009) \quad (0,112) \quad (0,101) \quad (0,102) \\ R^2 &= 0.8953; N= 20 \end{aligned}$$

donde Md = Oferta monetaria; I= tasa de interés; Y = ingreso nacional; L= tenencia de activos líquidos.

$$\begin{aligned} 3) \quad S_i &= -256 + 0.125 Y_i + 0.004 I_i \\ &\quad (0,044) \quad (0.001) \\ R^2 &= 0,853 \\ N &= 12 \\ F &= 26.11 \end{aligned}$$

S= ahorro; Y = ingreso disponible; I = tasa de interés



## CAPITULO V

### MODELO DE REGRESION LINEAL CON $k$ VARIABLES EXPLICATIVAS

El modelo de regresión múltiple lineal se puede expresar en forma matricial de la siguiente forma:

$$Y = X\beta + u$$

donde

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{K1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{K2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_{2N} & X_{3N} & \dots & X_{KN} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Lo que nos indica que  $Y$  es un vector columna ( $n \times 1$ ) cuyos elementos son las observaciones de la variable dependiente;  $X$  es una matriz  $n \times k$  con la primera columna de unos (cuando en el modelo se especifica un intercepto) y las otras columnas con las observaciones de cada una de las variables explicativas (tantas columnas como  $X$  tenga el modelo);  $\beta$  es un vector columna ( $k \times 1$ ) cuyos elementos son los coeficientes o parámetros del modelo y  $u$  es un vector columna ( $n \times 1$ ) cuyos elementos son los términos de perturbación.

#### 1.SUPUESTOS

##### 1.1 Forma funcional lineal de la relación:

$$Y = X\beta + u$$

Debemos recordar que dentro del contexto de la regresión, la linealidad hace referencia a la manera que los parámetros y la perturbación entran a formar parte de la ecuación y no necesariamente a la relación entre las variables.

## 1.2. Rango Completo

$\mathbf{X}$  es una matriz  $n \times k$  con rango  $k$

Significa que  $\mathbf{X}$  tiene rango de columna<sup>20</sup> completo; las columnas son linealmente independientes (*supuesto de no multicolinealidad*), y hay al menos  $k$  observaciones. Si el número de observaciones es menor que  $k$ , entonces  $\mathbf{X}$  no puede tener un rango completo. Por lo tanto se supone que  $n$  es al menos del mismo tamaño que  $k$ .

## 1.3. El valor esperado<sup>21</sup> de la perturbación aleatoria debe ser cero para cualquier observación

$$E(u_i | \mathbf{X}) = 0$$

$$E(\mathbf{u} | \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(u_1 | \mathbf{X}) \\ E(u_2 | \mathbf{X}) \\ \vdots \\ E(u_i | \mathbf{X}) \end{bmatrix} = 0$$

La parte izquierda de la ecuación afirma, que la media de cada término de perturbación condicionada a todas las observaciones  $\mathbf{X}$ , es cero.

Que la media condicionada sea cero, implica que la media no condicionada también sea cero:

$$E(u_i) = E(E(u_i | \mathbf{X})) = E(0) = 0$$

<sup>20</sup> El rango columna de una matriz es la dimensión del vector espacio generado por las columnas de la matriz que sean linealmente independientes.

<sup>21</sup> Denotando con  $\mathbf{x}$  un vector columna de  $T$  variables aleatorias:

$$\mathbf{x}' = (X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_T)$$

Cada una de estas variables aleatorias tiene un valor esperado que se denota:

$$\mu = E(X_i), \quad i = 1, 2, \dots, T$$

Entonces, el vector de esperanzas matemáticas de  $\mathbf{x}$  se expresa como:

$$\mu = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_T \end{pmatrix}$$

Este supuesto conlleva a que:

- a) la  $COV(\mathbf{X}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ <sup>22</sup>
- b)  $E(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) = E(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + E(\mathbf{u}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$

---

<sup>22</sup> Las varianzas y las covarianzas de las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_T$ , se definen como:

$$Var(X_i) = E[(X_i - \mu_i)^2], i = 1, 2, \dots, T$$

$$Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)], \forall i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, T.$$

entonces, si se define el vector  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}$  y se escribe la esperanza matemática de este vector multiplicado por su transpuesto, esto es:

$$E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})']$$

se obtiene

$$E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'] = E \left[ \begin{pmatrix} (X_1 - \mu_1) \\ (X_2 - \mu_2) \\ \vdots \\ (X_T - \mu_T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2) & \cdots & (X_T - \mu_T) \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & \cdots & \cdots & E[(x_1 - \mu_1)(x_T - \mu_T)] \\ E[(x_2 - \mu_2)(x_1 - \mu_1)] & (X_2 - \mu_2)^2 & \cdots & E[(x_2 - \mu_2)(x_T - \mu_T)] \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ E[(x_T - \mu_T)(x_1 - \mu_1)] & \cdots & \cdots & (X_T - \mu_T)^2 \end{pmatrix}$$

puede observarse cómo en esta expresión los elementos de la diagonal principal incluyen las varianzas de las variables  $X_i$ , mientras que el resto de los elementos incluyen las covarianzas. En concreto, el elemento  $(i, i)$  contendrá la varianza de  $X_i$  mientras que el elemento  $(i, j)$  contendrá la covarianza entre  $X_i$  y  $X_j$ .

A esta matriz se le denomina *matriz de varianzas y covarianzas* del vector  $\mathbf{x}$ , y se denota como  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  o  $\boldsymbol{\Sigma}$ :

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'] = \boldsymbol{\Sigma}$$

La matriz de varianzas y covarianzas ( $\boldsymbol{\Sigma}$ ) tiene dos propiedades importantes:

- Es simétrica
- Es semidefinida positiva; mas aún,  $\boldsymbol{\Sigma}$  es definida positiva si y solo si los elementos de  $\mathbf{x}$  son variables aleatorias no linealmente dependientes (Trívez Bielsa, 2004)

#### 1.4. Varianzas y Covarianzas de las perturbaciones (Perturbaciones esféricas)

$$Var(u_i | \mathbf{X}) = \sigma^2 \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

(supuesto de Homocedasticidad)

$$Cov(u_i, u_j | \mathbf{X}) = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

(Supuesto de no correlación serial en las perturbaciones)

Estos supuestos implican que:

$$Var(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}\mathbf{u}' | \mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I}$$

$$= E \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \end{pmatrix} (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_i) = E \begin{pmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_i \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & \dots & u_2 u_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_i u_1 & u_i u_2 & \dots & u_i u_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

El supuesto de que  $Var(\mathbf{u}) = \sigma^2 \mathbf{I}$  lleva implícito dos supuestos:

- a) Los elementos fuera de la diagonal de la matriz son iguales a cero. Estos elementos son las covarianzas entre los términos de perturbación correspondientes a observaciones diferentes. Al afirmar que estas covarianzas son iguales a cero, estamos suponiendo que los términos de perturbación no están correlacionados entre si.
- b) La matriz es escalar, es decir, la diagonal principal es constante y está conformada por las varianzas de los términos de perturbación de las distintas observaciones. en otras palabras, estamos suponiendo que la varianza del término de perturbación es constante, ya sea a lo largo del tiempo o a través de la sección cruzada.

#### 1.5. **X** es una matriz conocida de n x k de constantes

Al afirmar que **X** es una matriz conocida de n x k de constantes, estamos diciendo que las observaciones  $x_i$  que conforman la matriz **X** son fijas en muestras repetidas, es decir, si se tuviera la oportunidad de obtener mas de una muestra, los valores de las variables explicativas deben ser las mismas para todas las muestras..

#### 1.6. Supuesto de normalidad.

Las perturbaciones están normalmente distribuidas, con media cero y varianza constante.

$$u_i | \mathbf{X} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$$

Resumiendo, los supuestos del modelo clásico son:

Notación escalar	Notación matricial
1.- $E(u_i) = 0$ para todo $i$	1.- $E(u) = 0$ donde $u$ y $0$ son vectores $n \times 1$ , siendo $0$ un vector nulo.
2.- $E(u_i u_j) = 0 \quad i \neq j$ $E(u_i)^2 = \sigma^2$	2.- $E(uu') = \sigma^2 I$ donde $I$ es una matriz identidad $n \times n$
3.- $X_1, X_2, \dots, X_n$ son fijas o no explicativas	3.- Rango Completo. La matriz <b>X</b> , $n \times k$ , es no estocástica, es decir, consiste en un conjunto de números fijos
4.- No hay relación lineal exacta entre las variables $X$ , es decir, no hay multicolinealidad.	El rango de <b>X</b> es $K$ , donde $k$ es el número de columnas en <b>X</b> y $k$ es menor que el número de observaciones.
5.- Para la prueba de hipótesis $u_i \sim N(0, \sigma^2)$	5.- EL vector $u$ tiene una distribución normal multivariada, es decir $u \sim N(0, \sigma^2 I)$

## 2. ESTIMACION DE LOS COEFICIENTES DE MINIMO CUADRADOS ORDINARIOS

Dado el modelo  $Y = X\beta + u$  el problema consiste minimizar la suma de los cuadrados de los residuos, es decir minimizar  $\sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y - X_i\hat{\beta})^2 = u'u$

$$u'u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_i & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$$

si  $u_i = Y_i - \hat{Y}$  y  $\hat{Y} = X\hat{\beta}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} u'u &= (Y - \hat{Y})(Y - \hat{Y})' = (Y - X\hat{\beta})(Y - X\hat{\beta})' \\ \Rightarrow u'u &= (Y' - \hat{\beta}'X')(Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \end{aligned}$$

El segundo y el tercer término son iguales puesto que  $Y'X\hat{\beta}$  es de orden  $1 \times 1$  y  $\hat{\beta}'X'Y$  es su traspuesta<sup>23</sup>.

$$\Rightarrow u'u = Y'Y - 2Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Para minimizar una función de varias variables, en este caso  $u'u$  función de  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k$ , la condición de primer orden es que las derivadas parciales sean iguales a cero. En forma matricial:

$$\frac{\partial u'u}{\partial \hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$\Rightarrow X'X\hat{\beta} = X'Y$$

multiplicando por la inversa de  $X'X$

---

<sup>23</sup>  $Y'X\hat{\beta} = (\hat{\beta}'X'Y)'$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Ya que  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{I} = (\text{matriz identidad})$

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Como se puede observar, para hallar los estimadores mínimo cuadráticos es necesario hallar la inversa de la matriz  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ , esta matriz cuadrada de orden  $k$  debe ser no singular<sup>24</sup>, o sea su rango debe ser  $k$ . Para que se cumpla esta condición, el rango de la matriz  $\mathbf{X}$  debe ser  $k$ . Al ser  $k$  el número de columnas de la matriz  $\mathbf{X}$ , para que su rango sea  $k$  deben darse dos condiciones: en primer lugar, el número de filas de la matriz no puede ser menor que el número de columnas ( $n \geq k$ ), sin embargo para nosotros la condición es más restrictiva ( $n > k$ ). En segundo lugar las columnas deben ser linealmente independientes (supuesto de no multicolinealidad perfecta). Si el número de filas es menor que el número de columnas o si existiese alguna combinación lineal entre las columnas de  $\mathbf{X}$ , su rango sería menor que  $k$ , puesto que el rango de una matriz es igual al número de filas o columnas linealmente independientes. Recordando que las columnas de  $\mathbf{X}$  son los valores de las variables explicativas, se justifica el supuesto de que no exista relación lineal exacta entre ellas<sup>25</sup>.

DEFINICION: el vector de residuales mínimo cuadrados está definido por:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

PROPOSICION:  $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$

$$E(\mathbf{e}) = E(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = E(\mathbf{y}) - E(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

PROPOSICION:  $\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{X}'\mathbf{X}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}]$$

como  $\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{I}$ , tenemos que:  $\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{0}$

<sup>24</sup> Se dice que una matriz es *no singular* cuando es una matriz cuadrada que tiene inversa

<sup>25</sup> López Casuso, Rafael. "Cálculo de Probabilidades e Inferencia Estadística, con Tópicos de Econometría". Universidad Católica Andrés Bello. Caracas. 2000. P.518.

### 3. PROPIEDADES MELI DE LOS ESTRIMADORES MINIMO CUADRATICOS

#### 3.1. INSESGAMIENTO.

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\text{como } Y = X\beta + u$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'(X\beta + u)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'X\beta + (X'X)^{-1} X'u$$

$$\text{dado que } (X'X)^{-1} X'X = I$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'u$$

tomando valor esperado en ambos miembros de la igualdad

$$E(\hat{\beta}) = E(\beta + (X'X)^{-1} X'u)$$

$$\Rightarrow E(\hat{\beta}) = E(\beta) + E((X'X)^{-1} X'u)$$

$$\Rightarrow E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1} X'E(u)$$

$$\text{como } E(u) = 0$$

nos queda que

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

#### 3.2 MINIMA VARIANZA

Para demostrar que los estimadores mínimos cuadráticos son de mínima varianza, hay que calcular la varianza de los estimadores, expresándola en términos de la matriz de covarianzas.



Por definición:

$$\mathbf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' = \mathbf{E}((\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})')$$

como se vio anteriormente  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$

$$\Rightarrow \mathbf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{E}((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

Dado que la traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas con el orden cambiado y además  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  es una matriz simétrica.

$$\mathbf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} =$$

Utilizando el supuesto 1,4, que indica que  $\mathbf{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2\mathbf{I}$

$$\mathbf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{pmatrix} \text{Var}(\hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \dots & \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & \text{Var}(\hat{\beta}_2) & \dots & \text{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \text{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \dots & \text{Var}(\hat{\beta}_k) \end{pmatrix}$$

es decir la  $\mathbf{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$  es una matriz en la cual la diagonal principal está conformada por las Varianzas de los coeficientes estimados y los elementos distintos a la diagonal principal, son las covarianzas.

A continuación se demostrará que cualquier otro estimador insesgado de  $\boldsymbol{\beta}$  tiene una mayor varianza que  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ .

En efecto, consideremos otro estimador lineal de  $\beta$ , digamos  $\hat{\beta}^* = \left[ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{C} \right] \mathbf{Y}$ , siendo  $\mathbf{C}$  una matriz de constantes y  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$

$$\hat{\beta}^* = \left[ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{C} \right] (\mathbf{X}\beta + \mathbf{u})$$

$$\hat{\beta}^* = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{X}\beta + \mathbf{C}\mathbf{u}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}^* = \beta + \mathbf{C}\mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u}$$

Para que  $\hat{\beta}^*$  sea un estimador insesgado de  $\beta$ , se debe cumplir que,  $\mathbf{E}(\hat{\beta}^*) = \beta$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\hat{\beta}^*) = \mathbf{E}(\beta + \mathbf{C}\mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\hat{\beta}^*) = \beta + \mathbf{C}\mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}\mathbf{E}(\mathbf{u})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\hat{\beta}^*) = \beta + \mathbf{C}\mathbf{X}\beta$$

$$\Rightarrow \text{para que } \mathbf{E}(\hat{\beta}^*) = \beta, \Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}^* = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}^* - \beta = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u}$$

Calcularemos ahora la matriz de varianzas y covarianzas de  $\hat{\beta}^*$

$$\mathbf{Var}(\hat{\beta}^*) = \mathbf{E} \left( (\hat{\beta}^* - \beta)(\hat{\beta}^* - \beta)' \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Var}(\hat{\beta}^*) = \mathbf{E} \left( \left( (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u} \right) \left( (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u} \right)' \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Var}(\hat{\beta}^*) = \mathbf{E} \left( \left( (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u} \right) \left( \mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{u}'\mathbf{C}' \right) \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Var}(\hat{\beta}^*) = \mathbf{E} \left( (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{C}' + \mathbf{C}\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{C}' \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Var}(\hat{\beta}^*) = \mathbf{E} \left( (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{C}' + \mathbf{C}\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \mathbf{C}\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{C}' \right)$$

$$\Rightarrow \text{Var}(\hat{\beta}^*) = E\left(\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \sigma^2(\mathbf{C}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})' + \sigma^2\mathbf{C}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \sigma^2\mathbf{C}\mathbf{C}'\right)$$

dato que  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \text{Var}(\hat{\beta}^*) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + \sigma^2\mathbf{C}\mathbf{C}'$$

$$\Rightarrow \text{Var}(\hat{\beta}^*) = \text{Var}(\hat{\beta}) + \sigma^2\mathbf{C}\mathbf{C}'$$

La matriz  $\mathbf{C}\mathbf{C}'$  es semidefinida positiva y con eso  $\text{Var}(\hat{\beta}^*)$  es por lo menos igual o mas grande que  $\text{Var}(\hat{\beta})$ . Por lo tanto podemos afirmar que en el modelo clásico de regresión lineal, el estimador de mínimos cuadrados  $\hat{\beta}$  es el estimador lineal de mínima varianza de  $\beta$

#### 4. ESTIMADOR DE LA VARIANZA DE LAS PERTURBACIONES ( $\sigma^2$ )

Por ser  $\sigma^2$  una medida de las desviaciones de los términos de perturbación con respecto a su media cero<sup>26</sup>, parecería lógico que un estimador de  $\sigma^2$  se base en los residuos del modelo, puesto que estos pueden considerarse como representativos de los términos de perturbación.

Un estimador insesgado de  $\sigma^2$  es:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{n - k}$$

en efecto se tiene

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}$$

$$\text{si, } \mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}, \text{ y } \hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\beta + \mathbf{u})$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

<sup>26</sup> López Casuso, Rafael. Ob.Cit. p.528.

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{u}$$

siendo  $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')$ , entonces la suma del cuadrado de los residuos es:

$$\mathbf{u}'\mathbf{u} = \mathbf{u}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}$$

puesto que  $\mathbf{M}$  es una matriz simétrica e idempotente<sup>27</sup>

tomando valores esperados:

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{E}(\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u})$$

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}) = \sigma^2 \text{tr}\mathbf{M}, \text{ tr} = \text{traza}^{28}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}) = \sigma^2 \text{tr}[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}']$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}) = \sigma^2 [\text{tr}\mathbf{I}_n - \text{tr}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}']$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}) = \sigma^2 [\text{tr}\mathbf{I}_n - \text{tr}(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}) = \sigma^2 [\text{tr}\mathbf{I}_n - \text{tr}\mathbf{I}_k] = \sigma^2(n - k)$$

luego

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{\mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}})}{n - k} = \frac{\sigma^2(n - k)}{(n - k)} = \sigma^2$$

<sup>27</sup> Una matriz simétrica es una matriz cuadrada  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$  en que  $a_{ij} = a_{ji}$  para todo  $i = j$ .

Se dice que una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  es idempotente si  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}$

<sup>28</sup> La traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de la diagonal.

## 5. COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN

Como se vio anteriormente el coeficiente de determinación nos indica el porcentaje de variaciones de la variable dependiente que son explicados por el modelo. A medida que el porcentaje es mayor, nos indica en que medida el modelo se ajusta a los datos, motivo por el cual a este estadístico también se le conoce con el nombre de *BONDAD DE AJUSTE*.

Sea:

$$STC = \text{suma total de cuadrados} = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = Y'Y - n\bar{Y}^2$$

$$SCR = \text{suma de cuadrados debida a la regresión (o explicada)} = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = Y'Y - \bar{Y}^2$$

$$SEC = \text{suma de los errores al cuadrado} = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum \hat{u}_i^2 = \hat{u}'\hat{u}$$

Entonces.

$$STC = SEC + SCR$$

Para medir la capacidad de explicación de la ecuación de regresión requerimos una medida que indique toda la variación en  $Y_i$  que la regresión puede explicar. Una medida tal es:

$$R^2 = \frac{SCR}{STC} = \frac{STC - SEC}{STC} = 1 - \frac{SEC}{STC}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}}{Y'Y - n\bar{Y}^2}$$

## 6. EL CASO PARTICULAR DE REGRESIÓN SIMPLE<sup>29</sup>

En el caso del modelo de regresión simple:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$$

---

<sup>29</sup> Pulido San Román, Anonio y Julián Pérez García. "Modelos Econométricos". Ediciones Pirámide. Madrid. 2001. p.182.

Procederemos como si fuera un caso particular de la regresión múltiple donde como ya se ha visto  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$ , donde  $k = 2$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \mathbf{X}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{X}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X}_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & \mathbf{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}$$

Dado que es una matriz simétrica, coincidirá con su transpuesta y calculando la matriz conjugada y dividiendo por el valor de la determinante:

$$|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = n \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Obtenemos:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^*}{|\mathbf{X}'\mathbf{X}|} = \frac{1}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{bmatrix}$$

Por su parte

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Resultando

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y} = \frac{1}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} \\ \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

### EJERCICIO N° 16

Un país<sup>30</sup>, que tiene que importar todo el petróleo que consume, está interesado en realizar una política de construcción de viviendas tal que reduzca el consumo de petróleo destinado a la calefacción. Se tienen datos referidos a los últimos siete años de las siguientes variables: consumo anual de petróleo en miles de bidones (Y), temperatura promedio en invierno, en grados centígrados ( $X_1$ ), y cantidades de aislamiento exigidas en las paredes, en pulgadas ( $X_2$ ).

Consumo Petróleo	Temperatura	Aislamiento
216	12	6
200	12	8
230	10	6
240	7	8
203	11	4
190	11	3
200	10	7

se pide estimar una ecuación lineal de consumo, el coeficiente de determinación, pruebas T y F.

$$Y = X\hat{\beta} + u$$

$$\begin{pmatrix} 216 \\ 200 \\ 230 \\ 240 \\ 203 \\ 190 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 6 \\ 1 & 12 & 8 \\ 1 & 10 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \\ 1 & 11 & 4 \\ 1 & 11 & 3 \\ 1 & 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

<sup>30</sup> Ejercicio tomado de: Martin, Guillermina; José María Labeaga y Francisco Mochón. Ob.Cit. p. 91

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 12 & 10 & 7 & 11 & 11 & 10 \\ 6 & 8 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 12 & 6 \\ 1 & 12 & 8 \\ 1 & 10 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \\ 1 & 11 & 4 \\ 1 & 11 & 3 \\ 1 & 10 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 73 & 42 \\ 73 & 779 & 431 \\ 42 & 431 & 274 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 11,61 & -0,80 & -0,53 \\ -0,80 & 0,06 & 0,02 \\ -0,53 & 0,02 & 0,05 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 12 & 10 & 7 & 11 & 11 & 10 \\ 6 & 8 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 216 \\ 200 \\ 230 \\ 240 \\ 203 \\ 190 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.479 \\ 15.295 \\ 8.978 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 11,61 & -0,80 & -0,53 \\ -0,80 & 0,06 & 0,02 \\ -0,53 & 0,02 & 0,05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.479 \\ 15.295 \\ 8.978 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 259,21 \\ -6,18 \\ 2,76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

$Y$	$\hat{Y}$	$\hat{u}$
216	201,57	14,43
200	207,09	-7,09
230	213,94	16,06
240	238,01	1,99
203	202,23	0,77
190	199,47	-9,47
200	216,70	-16,70



$$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 14,43 & -7,09 & 16,06 & 1,99 & 0,77 & -9,47 & -16,70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14,43 \\ -7,09 \\ 16,06 \\ 1,99 \\ 0,77 \\ -9,47 \\ -16,70 \end{pmatrix} = 889,61$$

$$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 216 & 200 & 230 & 240 & 203 & 190 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 216 \\ 200 \\ 230 \\ 240 \\ 203 \\ 190 \\ 200 \end{pmatrix} = 314.465$$

$$\bar{Y} = \left( \frac{\sum Y_i}{n} \right) = \left( \frac{216 + 200 + 230 + 240 + 203 + 190 + 200}{7} \right) = 211,29$$

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2} = 1 - \frac{889,61}{314.465 - 7(211,29)^2} = 0,5492$$

$$\sigma^2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{n - k} = \frac{889,61}{7 - 3} = 222,40$$

$$Var(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = 222,40 \begin{pmatrix} 11,61 & -0,80 & -0,53 \\ -0,80 & 0,06 & 0,02 \\ -0,53 & 0,02 & 0,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.581,63 & -177,18 & -117,03 \\ -177,18 & 14,36 & 4,57 \\ -117,03 & 4,57 & 11,56 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Var(\hat{\beta}_1) = 2.581,63; \quad Var(\hat{\beta}_2) = 14,36; \quad Var(\hat{\beta}_3) = 11,56$$

$$\text{si } ee(\hat{\beta}) = \sqrt{Var(\hat{\beta})}$$

$$\Rightarrow ee(\hat{\beta}_1) = 50,81; \quad ee(\hat{\beta}_2) = 3,79; \quad ee(\hat{\beta}_3) = 3,40$$

$$\text{si } \begin{matrix} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{matrix}$$

$$t = \frac{\hat{\beta}}{ee(\hat{\beta})}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{259,21}{50,81} = 5,102; \quad t_2 = \frac{-6,18}{3,79} = -1,632; \quad t_3 = \frac{2,76}{3,40} = 0,812$$

$$F = \frac{\frac{R^2}{k-1}}{\frac{1-R^2}{n-k}} = \frac{\frac{0,5492}{3-1}}{\frac{1-0,5492}{7-3}} = 2,437$$

## Resultados

$$\hat{Y}_i = 259,21 - 6,18 X_1 + 2,76 X_2$$

$$\begin{matrix} (50,81) & (3,79) & (3,40) \\ (5,102) & (-1,632) & (0,812) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} R^2 = 0,5492 \\ F = 2,437 \end{matrix}$$

## Comprobación de resultados mediante Eviews

Dependent Variable: Y				
Method: Least Squares				
Date: 08/21/03 Time: 12:23				
Sample: 1 7				
Included observations: 7				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	259.2138	50.80978	5.101653	0.0070
X1	-6.183648	3.789530	-1.631771	0.1781
X2	2.759748	3.400446	0.811584	0.4626
R-squared	0.549207	Mean dependent var	211.2857	
Adjusted R-squared	0.323811	S.D. dependent var	18.13573	
S.E. of regression	14.91314	Akaike info criterion	8.539890	
Sum squared resid	889.6075	Schwarz criterion	8.516709	
Log likelihood	-26.88962	F-statistic	2.436627	
Durbin-Watson stat	1.523845	Prob(F-statistic)	0.203214	

### EJERCICIO Nº 17

Durante el período 1986-1996, la evolución de la producción<sup>31</sup>, Q, capital invertido, K, y el nivel de empleo, L, en el sector agrario del país Z ha sido recogida en la tabla siguiente:

capital invertido y nivel de empleo en el sector agrario del país Z  
durante el período 1986-1996

Año	Produccion Q	Capital K	Empleo L
1986	80	200	50
1987	95	210	55
1988	100	240	80
1989	120	150	86
1990	150	260	90
1991	165	230	95
1992	180	245	96
1993	175	250	98
1994	170	295	100
1995	190	300	110
1996	195	300	115

Bajo el supuesto de que la relación entre el nivel de producción, capital y empleo puede expresarse adecuadamente mediante una función de Cobb-Douglas.

$$Q_t = \beta_1 K_t^{\beta_2} L_t^{\beta_3} e^{u_t} \quad \forall t = 1986, \dots, 1996$$

se pide estimar una ecuación de producción tipo Cobb-Douglas, el coeficiente de determinación, pruebas T y F.

Dado que el modelo propuesto no satisface la hipótesis de linealidad se comprobará si es susceptible de linealización, con objeto de utilizar la técnica de mínimos cuadrados. La función de producción de Cobb-Douglas, se puede expresar en términos logarítmicos como:

$$\ln Q_t = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln K_t + \beta_3 \ln L_t + u_t \quad \forall t = 1986, \dots, 1996$$

La transformación logarítmica realizada se encuadra en el apartado de modelos doble logarítmicos o modelos log-log. Suponiendo que el término aleatorio satisface los

<sup>31</sup> Ejercicio tomado de: Díaz Fernández, Montserrat y María del Mar Llorente Marrón. Ob.Cit. p.133.

supuestos básicos establecidos en el modelo de regresión, la transformación propuesta será susceptible de estimación por el método de mínimos cuadrados.

Tomando logaritmos neperianos de las observaciones de las variables consideradas tendremos:

Año	LnQ	LnK	LnL
1986	4,3820	5,2983	3,9120
1987	4,5539	5,3471	4,0073
1988	4,6052	5,4806	4,3820
1989	4,7875	5,0106	4,4543
1990	5,0106	5,5607	4,4998
1991	5,1059	5,4381	4,5539
1992	5,1930	5,5013	4,5643
1993	5,1648	5,5215	4,5850
1994	5,1358	5,6870	4,6052
1995	5,2470	5,7038	4,7005
1996	5,2730	5,7038	4,7449

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 4,3820 \\ 4,5539 \\ 4,6052 \\ 4,7875 \\ 5,0106 \\ 5,1059 \\ 5,1930 \\ 5,1648 \\ 5,1358 \\ 5,2470 \\ 5,2730 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 5,2983 & 3,9120 \\ 1 & 5,3471 & 4,0073 \\ 1 & 5,4806 & 4,3820 \\ 1 & 5,0106 & 4,4543 \\ 1 & 5,5607 & 4,4998 \\ 1 & 5,4381 & 4,5539 \\ 1 & 5,5013 & 4,5643 \\ 1 & 5,5215 & 4,5850 \\ 1 & 5,6870 & 4,6052 \\ 1 & 5,7038 & 4,7005 \\ 1 & 5,7038 & 4,7449 \end{pmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 11 & 60,2527 & 49,0093 \\ 60,2527 & 330,4598 & 268,7660 \\ 49,0093 & 268,7660 & 219,0638 \end{pmatrix} \quad (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 71,0869 & -12,3237 & -0,7839 \\ -12,3237 & 3,5352 & -1,5802 \\ -0,7839 & -1,5802 & 2,1186 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 54,4587 \\ 298,7202 \\ 243,4130 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -0,8541 \\ 0,2607 \\ 0,9823 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

$LnQ_t$	$L\hat{n}Q_t$	$\hat{u}$
4,3820	4,3703	0,0117
4,5539	4,4766	0,0772
4,6052	4,8795	-0,2744
4,7875	4,8280	-0,0405
5,0106	5,0161	-0,0055
5,1059	5,0373	0,0687
5,1930	5,0640	0,1289
5,1648	5,0895	0,0753
5,1358	5,1525	-0,0167
5,2470	5,2505	-0,0035
5,2730	5,2942	-0,0212

$$\hat{u}'\hat{u} = 0,1108 \quad Y'Y = 270,5988 \quad \bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = 4,9508$$

$$R^2 = 1 - \frac{0,1108}{270,5988 - 11(4,9508)^2} = 0,8875$$

$$\sigma^2 = \frac{0,1108}{11-3} = 0,0139$$

$$Var(\hat{\beta}) = 0,0139 \begin{pmatrix} 71,0868 & -12,3237 & -0,7839 \\ -12,3237 & 3,5352 & -1,5802 \\ -0,7839 & -1,5802 & 2,1186 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9846 & -0,1707 & -0,0109 \\ -0,1707 & 0,0490 & -0,0219 \\ -0,0109 & -0,0219 & 0,0293 \end{pmatrix}$$

$$ee(\hat{\beta}) = \sqrt{Var(\hat{\beta})} = \begin{pmatrix} 0,9923 & & \\ & 0,2213 & \\ & & 0,1713 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = \frac{-0,8541}{0,9923} = -0,861; \quad t_2 = \frac{0,2607}{0,2213} = 1,178; \quad t_3 = \frac{0,9823}{0,1713} = 5,735$$

$$F \frac{\frac{0,8875}{3-1}}{\frac{(1-0,8875)}{11-3}} = 31,560$$

### Resultados generales

$$\begin{array}{lll} \text{Ln}Q_t = -0,8541 + 0,2607 \text{Ln}K_t + 0,9823 \text{Ln}L_t \\ (0,9923) \quad (0,2213) \quad (0,1713) \\ (-0,861) \quad (1,178) \quad (5,735) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R^2 = 0,8875 \\ F = 31,560 \end{array}$$

### Comprobación de resultados mediante Eviews

Dependent Variable: LQ  
Method: Least Squares  
Date: 08/21/03 Time: 15:51  
Sample: 1986 1996  
Included observations: 11

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.854068	0.992258	-0.860732	0.4144
LK	0.260726	0.221277	1.178281	0.2725
LL	0.982344	0.171300	5.734638	0.0004
R-squared	0.887515	Mean dependent var	4.950792	
Adjusted R-squared	0.859394	S.D. dependent var	0.313855	
S.E. of regression	0.117687	Akaike info criterion	-1.214568	
Sum squared resid	0.110803	Schwarz criterion	-1.106051	
Log likelihood	9.680125	F-statistic	31.56040	
Durbin-Watson stat	1.848129	Prob(F-statistic)	0.000160	

## 7. ESTIMADOR MAXIMO VEROSIMIL

Una forma alternativa de calcular los estimadores beta, es calculando los estimadores máximo verosimiles<sup>32</sup>, es decir aquellos que son más probables dada la distribución de los datos muestrales y su implicación sobre la función de densidad conjunta. Para ello admimos por el momento la hipótesis de normalidad del término de perturbación.

$$u_i | X \sim N(0, \sigma^2 I)$$

Por lo que la función de densidad conjunta, normal multivariante será<sup>33</sup>:

$$f(u) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} u'u\right)$$

Y la función logaritmica de verosimilitud para los valores muestrales, expresando ya  $u$  en función de  $y$ , es decir  $u = y - X\tilde{\beta}$  y denominando  $\tilde{\beta}$  al vector de estimadores máximo verosímiles.

$$L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (y - X\tilde{\beta})' (y - X\tilde{\beta})$$

El máximo de esta función respecto a  $\tilde{\beta}$  coincide con el mínimo del tercer sumando, que es el único que depende de  $\tilde{\beta}$ , pero esta última es precisamente la expresión a minimizar por el criterio de mínimos cuadrados.

Igualando a cero las derivadas con respecto a  $\tilde{\beta}$  y  $\sigma^2$ , se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{\beta}} = -\frac{1}{2\sigma} [-2X'(y - X\tilde{\beta})] = 0$$

<sup>32</sup> El método de estimación de máximo verosimilitud se basa en un determinado supuesto acerca de la muestra de distribución de donde se obtuvo la muestra. La función de máximo verosimilitud es la función de probabilidad conjunta de la muestra; cuando esta es aleatoria simple, las distintas observaciones muestrales son independientes entre si y la función de verosimilitud es el producto de los valores de la función de densidad para cada una de las observaciones.

<sup>33</sup> La función de densidad para una normal n-variante tal que  $u \sim N[E(u), \Omega]$  es:

$$f(u) = (2\pi)^{-n/2} |\Omega|^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} [u - E(u)]' \Omega^{-1} [u - E(u)]\right\}$$

Donde en este caso en particular:

$$|\Omega| = (\sigma^2)^n; \quad E(u) = 0; \quad \Omega^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} I$$

$$\frac{\partial \text{Ln}L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (y - X\tilde{\beta})' (y - X\tilde{\beta}) = 0$$

Luego

$$\tilde{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

$$\sigma^2 = \frac{(y - X\tilde{\beta})' (y - X\tilde{\beta})}{n} = \frac{u'u}{n}$$

Bajo el supuesto de normalidad del término de perturbación, el estimador de máxima verosimilitud del vector  $\beta$  coincide con el estimador MCO



## APENDICE 2

### ELEMENTOS BASICOS DE MATRICES

#### 1.- CONCEPTO DE MATRIZ

Se llama “matriz” a un conjunto ordenado de números, variables, funciones, etc., dispuestos en  $m$  filas y  $n$  columnas..

Las líneas horizontales reciben el nombre de filas u las líneas verticales se llaman columnas. El número de filas puede ser menor, igual o mayor al número de columnas.

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

#### 2.- MATRIZ CUADRADA

Una matriz cuadrada es una matriz que consta del mismo número de filas y columnas ( $m = n$ ). Al referirse al orden de una matriz cuadrada de orden  $(n,n)$ , se dice simplemente que es una matriz cuadrada de orden  $n$ .

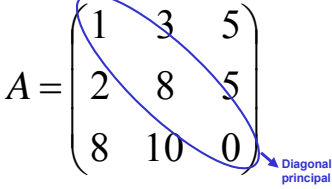
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \text{ es una matriz cuadrada de orden 2}$$

#### 3.- MATRIZ RECTANGULAR

Es una matriz en que el número de filas, es distinto al número de columnas ( $n \neq m$ ). Todas las matrices que no son cuadradas, son matrices rectangulares.

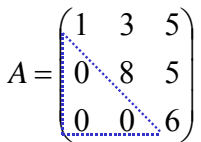
#### 4.- DIAGONAL PRINCIPAL

En una matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ , la **diagonal principal** es el conjunto de elementos  $a_{ij}$ , tales que  $i = j$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$


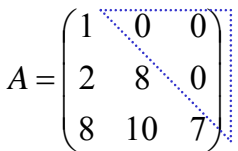
## 5.- MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Es una matriz en que todos los elementos bajo la diagonal principal son nulos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$


## 6.- MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Es una matriz en que todos los elementos sobre la diagonal principal son nulos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$


## 7.- MATRIZ DIAGONAL

Es una matriz cuadrada en que los elementos no diagonales son todos nulos.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

## 8.- MATRIZ ESCALAR

Es una matriz diagonal en la que todos los elementos diagonales son iguales

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

## 9.- MATRIZ IDENTIDAD (O UNIDAD)

Es una matriz en que todos los elementos diagonales son iguales a la unidad. Se simbolizan con  $I_n$ , en que  $n$  indica el orden matricial, o simplemente con  $I$ .

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 10.- MATRIZ SIMETRICA

Es una matriz cuadrada  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  en que  $a_{ij} = a_{ji}$  para todo  $i, j$ ,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{N}$  es una matriz simétrica, ya que cumple que  $n_{12} = n_{21} = 2$ ;  $n_{13} = n_{31} = 1$ ;  $n_{23} = n_{32} = -3$

## 11.- VECTOR FILA

Es una matriz formada por una fila, su orden es  $(1, n)$ .

$$\mathbf{T}_{13} = (0 \quad 2 \quad 1)$$

## 12.- VECTOR COLUMNA

Es una matriz formada por una sola columna. Su orden es  $(m, 1)$

$$\mathbf{Y}_{41} = \begin{pmatrix} 5,33 \\ -4,67 \\ -2,05 \\ 6,87 \end{pmatrix}$$

### 13.- VECTOR NULO

Es un vector (fila o columna) cuyos componentes son todos ceros.

$$\mathbf{X} = (0 \ 0 \ 0 \ 0) \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 14.- MATRIZ NULA

Es una matriz en que todos sus elementos son nulos

$$\mathbf{O}_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 15. EL RANGO DE UNA MATRIZ

Sea una matriz  $\mathbf{A}$  de orden  $m \times n$  que tiene  $n$  vectores columnas, cada uno con  $m$  componentes. El mayor número de esos vectores columna de  $\mathbf{A}$  que forman un conjunto de *vectores linealmente independientes* se llama rango de  $\mathbf{A}$  y se denota  $r(\mathbf{A})$ .

### 16. MATRICES TRASPUESTAS

Cuando se intercambian las filas por las columnas de una matriz  $\mathbf{A}$ , de forma que su primera fila pasa a ser su primera columna, y viceversa, obtendremos la *traspuesta* de  $\mathbf{A}$ , que se denota por  $\mathbf{A}'$  o  $\mathbf{A}^T$ . En el caso de una matriz cuadrada  $n \times n$ , esta posee una traspuesta de la misma dimensión.

$$\text{Dado } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

#### Propiedades de las traspuestas

- a)  $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$ , la traspuesta de la traspuesta es la matriz original.

b)  $(A + B)' = A' + B'$ , la traspuesta de una suma, es igual a la suma de las traspuestas.

c)  $(AB)' = B' A'$ , la traspuesta de un producto es igual al producto de las traspuestas en orden inverso.

## 17. SUMA DE MATRICES

Sean las matrices  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  y  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  ambas de orden  $m \times n$ . Se denomina suma de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , y se denota  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , a la matriz de orden  $m \times n$ , cuyo elemento genérico es  $a_{ij} + b_{ij}$ .

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

Ejemplo:

Sean las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+0 & -2+1 & 0+2 \\ 4+3 & 1+1 & 0+0 & 3-4 \\ 7+0 & 8+1 & 9+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 0 & -1 \\ 7 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

a)  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

b)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

c)  $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

## 18. MULTIPLICACION DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Sean la matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  de orden  $m \times n$ , y el escalar  $\alpha$ . Se denomina producto de  $\alpha$  por  $\mathbf{A}$ , y se denota mediante  $\alpha \mathbf{A}$ , a la matriz de orden  $m \times n$ :

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Ejemplo:

Sea el escalar  $\alpha = 3$  y la matriz  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -5 & 10 & -2 \end{pmatrix}$ , entonces el producto de  $\alpha$  por  $\mathbf{A}$ :

$$\alpha \mathbf{A} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -5 & 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 4 & 3 \times 3 \\ 3 \times 0 & 3(-2) & 3 \times 1 \\ 3(-5) & 3 \times 10 & 3(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 9 \\ 0 & -6 & 3 \\ -15 & 30 & -6 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

$$d) \quad \alpha (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}$$

$$e) \quad (\alpha + \delta) \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}$$

## 19.- MULTIPLICACION DE MATRICES

### 19.1.- Vector fila por vector columna

Sean el vector fila  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  de orden  $(1, n)$ , y el vector columna

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

de orden  $(n, 1)$

El producto  $\mathbf{XY}$  se obtiene multiplicando cada componente del vector  $\mathbf{X}$  por la componente correspondiente del vector  $\mathbf{Y}$ , y sumando los productos parciales así obtenidos. Esto es:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

#### Comentarios:

- Para que el producto  $\mathbf{XY}$  pueda efectuarse, se requiere que los dos vectores sean *conformables*. Esto es, ambos deben estar formados por el mismo número de elementos. En este caso, el orden del vector fila  $\mathbf{X}$  es  $(1, n)$  y del vector columna  $\mathbf{Y}$  es  $(n, 1)$ , por lo que el requisito se satisface.
- El resultado del producto  $\mathbf{XY}$  es un número real (un escalar) y no un vector. El orden del producto es  $(1, 1)$ , esto es tantas filas como el vector  $\mathbf{X}$  y tantas columnas como el vector  $\mathbf{Y}$ .

#### Ejemplo:

Sean los vectores  $\mathbf{X} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$  y  $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{XY} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1(4) + 2(-1) + 3(2) + 4(1) = 4 - 2 + 6 + 4 = 12$$

### **19.2.- Matriz por vector columna**

Dadas la matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  de orden  $(m, n)$  y el vector columna  $\mathbf{Y}$  de orden  $(n, 1)$ , el producto  $\mathbf{AY}$  se obtiene considerando la matriz  $\mathbf{A}(m, n)$ , como integrada por un conjunto de  $m$  vectores fila (de  $n$  elementos cada uno), y multiplicando cada uno de ellos por el vector columna  $\mathbf{Y}$ .

Sea la matriz  $\mathbf{A}$  de orden  $(m, n)$ , y el vector  $\mathbf{Y}$  de orden  $(n, 1)$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

El producto  $\mathbf{AY}$  se obtiene así:

$$\mathbf{AY} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} y_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} y_j \end{pmatrix}$$

#### Comentarios:

- Para que el producto  $\mathbf{AY}$  pueda efectuarse, se requiere que ambos factores sean conformables. Esto es que el número de columnas de la matriz  $\mathbf{A}$  sea igual al número de filas del vector  $\mathbf{Y}$ . En este caso el orden de la matriz es  $(m,n)$  y el vector es  $(n,1)$ , por lo que el requisito se satisface.
- El orden del producto  $\mathbf{AY}$  es  $(n,1)$ , esto es un vector columna con tantas filas como la matriz  $\mathbf{A}$  y tantas columnas como el vector  $\mathbf{Y}$ .

#### Ejemplo:

Sean:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para efectuar el producto  $\mathbf{AY}$ , supondremos que la matriz  $\mathbf{A}$  está formada por los siguientes vectores filas de orden  $(1,4)$ :



$$a_1 = (1 \quad 2 \quad 1 \quad 0)$$

$$a_2 = (2 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$$

$$a_3 = (3 \quad -1 \quad 2 \quad 0)$$

Multiplicamos cada vector fila de la matriz **A** por el vector columna **Y**, es decir que multiplicamos los componentes correspondientes y sumamos los productos parciales, como sigue:

$$a_1 \mathbf{Y} = (1 \quad 2 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1(4) + 2(-1) + 1(2) + 0(1) = 4$$

$$a_2 \mathbf{Y} = (2 \quad 0 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(4) + 0(-1) + 1(2) + 1(1) = 11$$

$$a_3 \mathbf{Y} = (3 \quad -1 \quad 2 \quad 0) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3(4) + (-1)(-1) + 2(2) + 0(1) = 17$$

$$\Rightarrow \mathbf{AY} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}$$

### 19.3.- Vector fila por Matriz

- Para que el producto pueda efectuarse, se requiere que ambos factores sean conformables. Esto es, que el número de elementos del vector fila sea igual al número de filas de la matriz.
- El orden del producto de un vector fila por una matriz, es un vector fila, con tantas filas como las del vector fila, y tantas columnas como la de la matriz.

Sea :

$$\mathbf{Q} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{QA} = \left( (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathbf{QA} = (1(1) + 2(2) + 3(3) + 4(1) \quad 1(2) + 2(0) + 3(-1) + 4(1) \quad 1(1) + 2(1) + 3(2) + 4(0))$$

$$\mathbf{QA} = (18 \quad 3 \quad 9)$$

#### 19.4.- Matriz por Matriz

Para que la operación de multiplicación de matrices sea posible, se requiere que estas sean conformables, es decir que consten de un número adecuado de filas y columnas.

En general, para que los factores sean conformables, el primero de ellos debe tener el mismo número de columnas que el número de filas de la segunda matriz. O sea que si  $\mathbf{A}$  es de orden  $(m, n)$  y  $\mathbf{B}$  es de orden  $(s, t)$ , el producto  $\mathbf{AB}$  puede efectuarse únicamente si  $n = s$ . En caso contrario, cuando  $n \neq s$ , la multiplicación no está definida y no puede efectuarse.

El orden de la matriz producto es  $(m, t)$ , es decir tantas filas como la matriz  $\mathbf{A}$  y tantas columnas como la matriz  $\mathbf{B}$ .

Sean las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} (1 & 2 & 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (1 & 2 & 3) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & (1 & 2 & 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (4 & 5 & 6) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (4 & 5 & 6) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & (4 & 5 & 6) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 10 & -13 & 0 \end{pmatrix}$$

**NOTA: LA MULTIPLICACION DE MATRICES NO ES CONMUTATIVA  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$**

## 20.- MATRIZ INDEMPOTENTE

Una matriz idempotente es aquella que es igual a su cuadrado, es decir  $\mathbf{M}^2 = \mathbf{MM} = \mathbf{M}$ . Si  $\mathbf{M}$  es una matriz idempotente simétrica, entonces  $\mathbf{M}'\mathbf{M} = \mathbf{M}$ .

## 21.- TRAZA DE UNA MATRIZ

La traza de una matriz cuadrada  $n \times n$  es la suma de los elementos de la diagonal

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Algunos resultados fáciles de comprobar son:

$$\text{Tr}(c\mathbf{A}) = c(\text{tr}(\mathbf{A}))$$

$$\text{Tr}(\mathbf{A}') = \mathbf{A}$$

$$\text{Tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$$

$$\text{Tr}(\mathbf{I}_n) = n$$

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$$

## 22.- DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Toda matriz  $\mathbf{A}$  cuadrada de orden  $n$  lleva asociado un valor numérico llamado determinante de  $\mathbf{A}$  y que denotaremos indistintamente por:  $\det|\mathbf{A}|$

Las matrices cuadradas más sencillas son  $1 \times 1$ , y su determinante es numéricamente igual al único elemento de dicha matriz.

Dada una matriz 2x2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Dada una matriz 3x3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{Para los tres productos positivos}).$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{Para los tres productos negativos}).$$

Propiedades:

- Una matriz cuadrada y su traspuesta tienen el mismo determinante.
- Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales entre si, su determinante es cero. Una matriz con determinante igual a cero se dice *singular*.
- Una matriz con una línea de ceros tiene determinante igual a cero.
- El determinante del producto de dos matrices cuadradas de igual orden es igual al producto de sus respectivos determinantes.
- Si se multiplica una línea de una matriz  $n \times n$  por una constante, el determinante queda multiplicado por esa constante. Si se multiplica una matriz cuadrada por una constante, su determinante queda multiplicado por dicha constante elevada a la potencia n-ésima

## 23.- MTRICES INVERSAS

En el conjunto de los números reales, para todo número  $c \neq 0$  existe un número  $b$ , llamado inverso multiplicativo (o recíproco), que verifica la propiedad

$$ab = ba = 1$$

Se simboliza ese número  $b$  por  $a^{-1}$  o por  $\frac{1}{a}$

Análogamente se plantea la posibilidad de que dada una matriz **A** cualquiera, exista otra matriz **B**, conformable con **A** para la operación de producto, que satisfaga la relación **AB = I**, la relación **BA = I**, o ambas simultáneamente, es decir:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

En que **I** es una matriz identidad de orden apropiado. Si esa matriz **B** existe, diremos que es una inversa multiplicativa de la matriz **A**, y se le simbolizará por **A**<sup>-1</sup>.

### Calculo de la inversa a través del método de los cofactores

Para simplificar la explicación supondremos una matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a) Se calcula la determinante de **A**

b) Se calcula la matriz de cofactores  $|C_{ij}| = \begin{pmatrix} |C_{11}| & -|C_{12}| \\ -|C_{21}| & |C_{22}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

$$C_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix} = a_{22} \quad C_{21} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix} = a_{12}$$

$$C_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix} = a_{21} \quad C_{22} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix} = a_{11}$$

Es importante destacar que aquellos cofactores en que,  $i + j = \text{impar}$  son negativos, como es el caso en nuestro ejemplo con  $|C_{12}|$  y  $|C_{21}|$

c) Se calcula la traspuesta de **C** a la que se suele denominar adjunta de **A**

$$\mathbf{C}' = \mathbf{adj} \mathbf{A} \quad \mathbf{C}' = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

- d) Se calcula la inversa,  $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj} \mathbf{A}$ , como se puede observar para que  $\mathbf{A}^{-1}$  exista,  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , es decir,  $\mathbf{A}$  debe ser no singular.

Ejemplo:

Hallar la inversa de  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Puesto que  $|\mathbf{A}| = -2 \neq 0$ , existe la inversa  $\mathbf{A}^{-1}$ . El cofactor de cada elemento es en este caso una determinante 1x1.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} |\mathbf{C}_{11}| & -|\mathbf{C}_{12}| \\ -|\mathbf{C}_{21}| & |\mathbf{C}_{22}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \text{adj} \mathbf{A} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar el orden de la inversa es el mismo que el de la matriz original.

Ejemplo

Hallar la inversa de  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Como  $|\mathbf{B}| = 99 \neq 0$ ,  $\mathbf{B}^{-1}$  existe.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 6 & -9 \\ -7 & 31 & 3 \\ 5 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{adj} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{B}|} \mathbf{adj} \mathbf{B} = \frac{1}{99} \begin{pmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/99 & -7/99 & 5/99 \\ 6/99 & 31/99 & -8/99 \\ -9/99 & 3/99 & 12/99 \end{pmatrix}$$

### Propiedades de las matrices inversas

- a) El producto de dos matrices inversas es conmutativo  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ .
- b) Si una matriz cuadrada tiene inversa, esta es única.
- c) La inversa de la matriz inversa es la matriz original  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ .
- d) La inversa de un producto de matrices, es igual al producto de las inversas en orden contrario.  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .

## APENDICE 3

### CALCULO DE MATRICES CON EXCEL

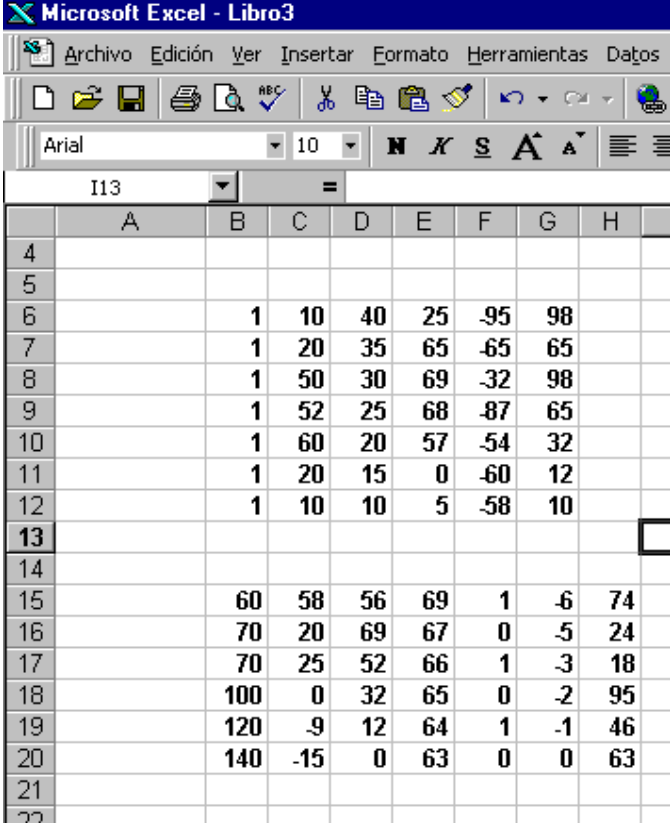
#### 1. Multiplicación de matrices.

Para que la operación de multiplicación de matrices sea posible, se requiere que estas sean conformables, es decir que consten de un número adecuado de filas y columnas.

En general, para que los factores sean conformables, el primero de ellos debe tener el mismo número de columnas que el número de filas de la segunda matriz. O sea que si **A** es de orden  $(m,n)$  y **B** es de orden  $(s,t)$ , el producto **AB** puede efectuarse únicamente si  $n = s$ . En caso contrario, cuando  $n \neq s$ , la multiplicación no esta definida y no puede efectuarse.

El orden de la matriz producto es  $(m,t)$ , es decir tantas filas como la matriz **A** y tantas columnas como la matriz **B**.

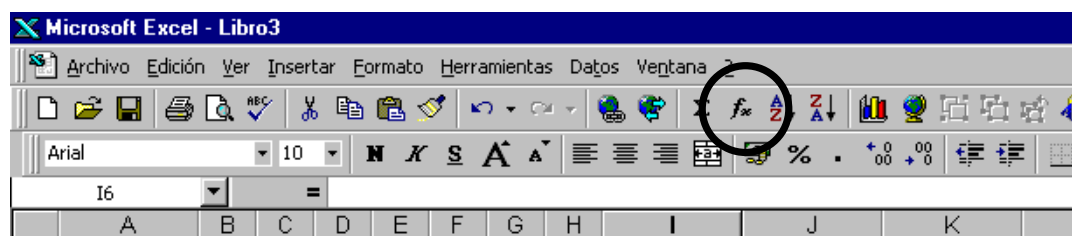
Dado las siguientes matrices en Excel.



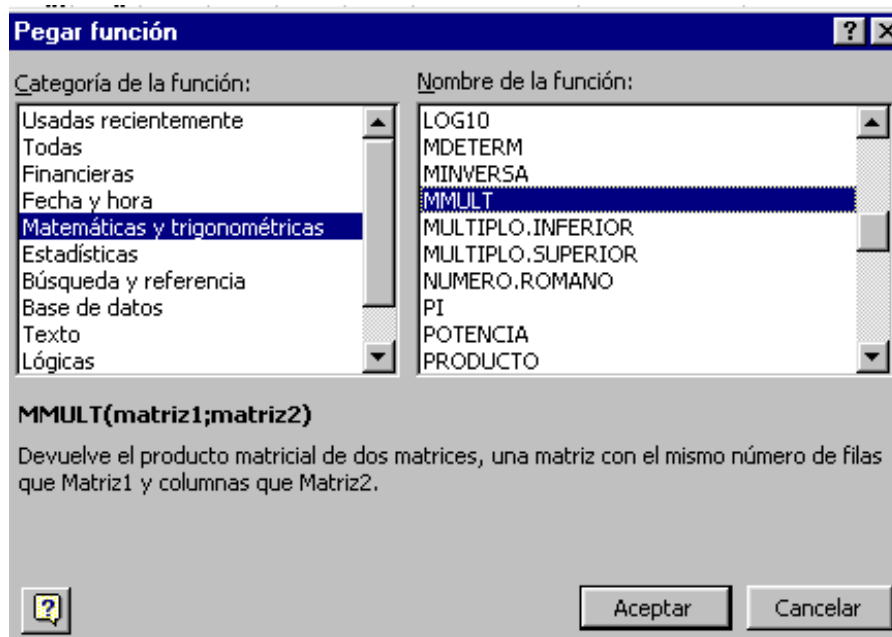
	A	B	C	D	E	F	G	H
4								
5								
6		1	10	40	25	-95	98	
7		1	20	35	65	-65	65	
8		1	50	30	69	-32	98	
9		1	52	25	68	-87	65	
10		1	60	20	57	-54	32	
11		1	20	15	0	-60	12	
12		1	10	10	5	-58	10	
13								
14								
15		60	58	56	69	1	-6	74
16		70	20	69	67	0	-5	24
17		70	25	52	66	1	-3	18
18		100	0	32	65	0	-2	95
19		120	-9	12	64	1	-1	46
20		140	-15	0	63	0	0	63
21								
22								



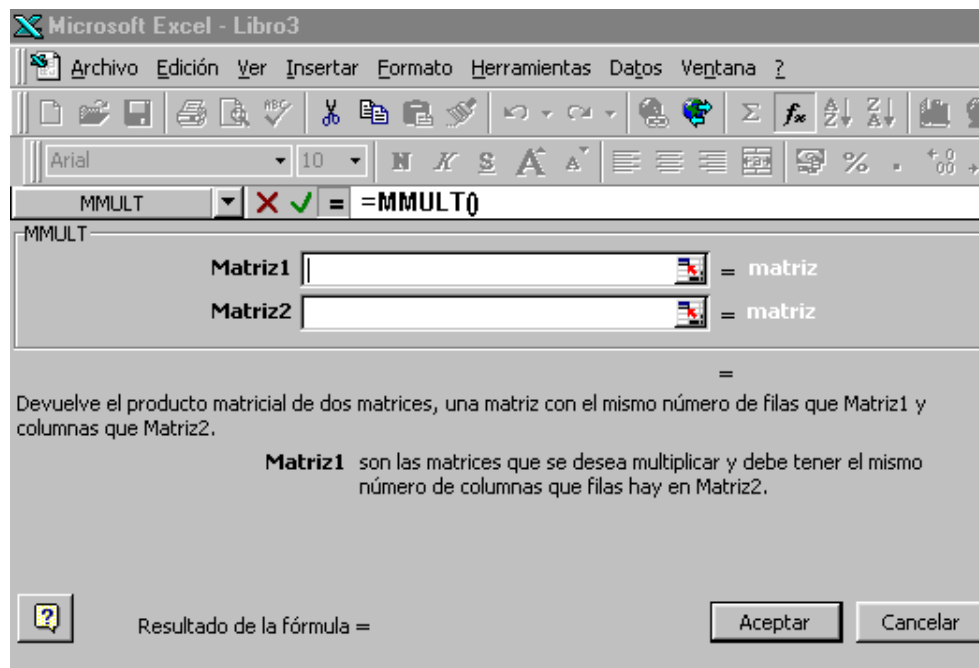
Para dar inicio al proceso de multiplicar dos matrices ubicamos el cursor en la celda a partir de la cual queremos que aparezca el resultado de la multiplicación (area de la matriz producto) y luego activamos el comando de “Pegar Función”



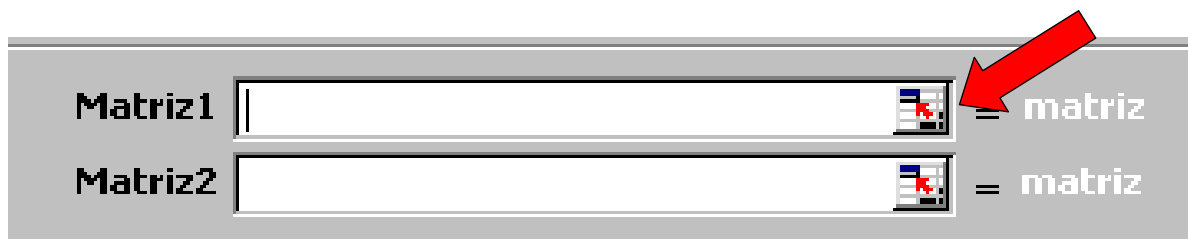
Con lo que aparecerá una primera ventana de diálogo, en la cual se buscara la función “MMULT”, la cual está ubicada en la categoría de funciones “Matemáticas y trigonométricas”:



Seguidamente se abrirá una segunda ventana de diálogo, donde veremos 2 areas donde se definirán el rango de las dos matrices: Matriz 1 y matriz 2



Para definir el rango de la matriz 1 hacemos click en el botón que se encuentra a la derecha del area



y deslizamos el cursor abarcando toda el area de la matriz en la hoja de cálculo. Para finalizar, volvemos a hacer click en el botón de la derecha del area





Microsoft Excel - Libro3

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?

Arial 10 N K S A A % . 0 00 0

J8 =MMULT(B6:G12;B15:H20)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
4										
5										
6		1	10	40	25	-95	98			
7		1	20	35	65	-65	65			
8		1	50	30	69	-32	98			8380
9		1	52	25	68	-87	65			
10		1	60	20	57	-54	32			
11		1	20	15	0	-60	12			
12		1	10	10	5	-58	10			
13										
14										
15		60	58	56	69	1	-6	74		
16		70	20	69	67	0	-5	24		
17		70	25	52	66	1	-3	18		
18		100	0	32	65	0	-2	95		
19		120	-9	12	64	1	-1	46		
20		140	-15	0	63	0	0	63		
21										

Para completar los valores de la matriz producto, procedemos a asombrar el area que abarca la misma. Debemos recordar que esta matriz tendrá el mismo número de filas que la matriz 1 y el mismo número de columnas de la matriz 2. En este ejemplo sombrearemos un área conformado por 7 filas y 7 columnas.

Microsoft Excel - Libro3

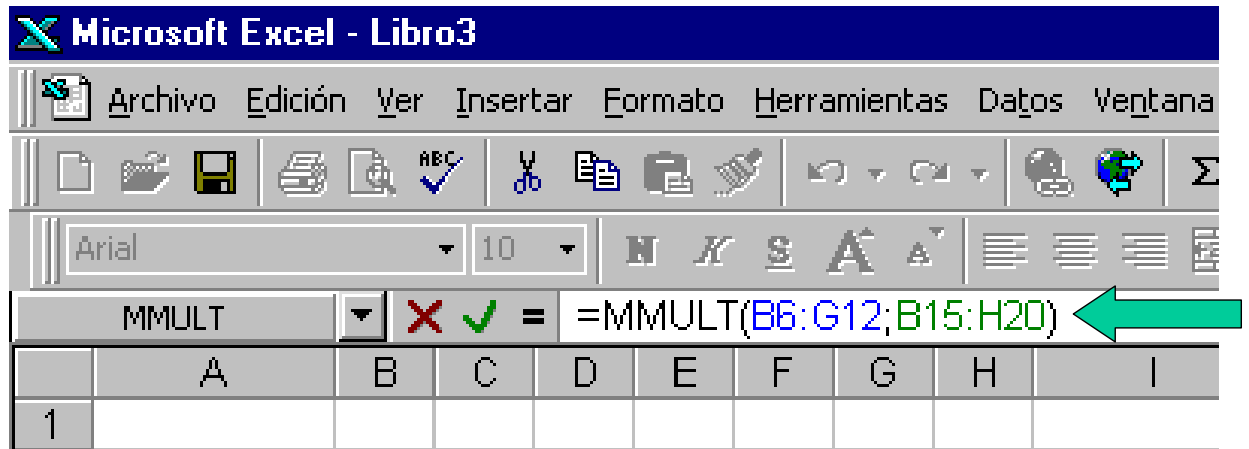
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?

Arial 10 N K S A A % . 0 00 0

MMULT X ✓ =MMULT(B6:G12;B15:H20)

	I	J	K	L	M	N	O	P
4								
5								
6								
7								
8		=MMUL						
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								

Una vez sombreado el area, procedemos a ubicar el cursor en la barra de formulas y hacemos click la misma.



y se oprime en forma simultanea, en el teclado, los botones de CONTROL, SHIFT y ENTER

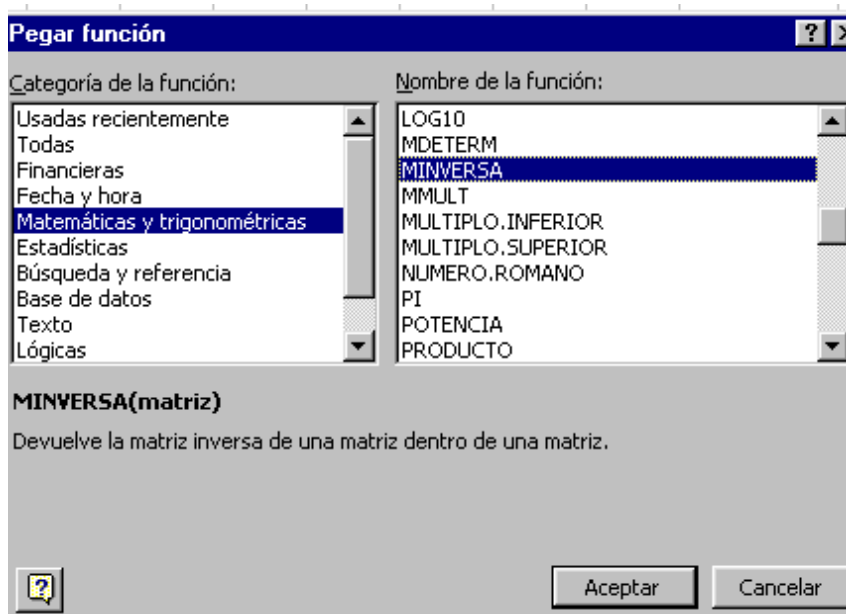


con lo cual aparecerá el resto de los valores de la matriz producto..

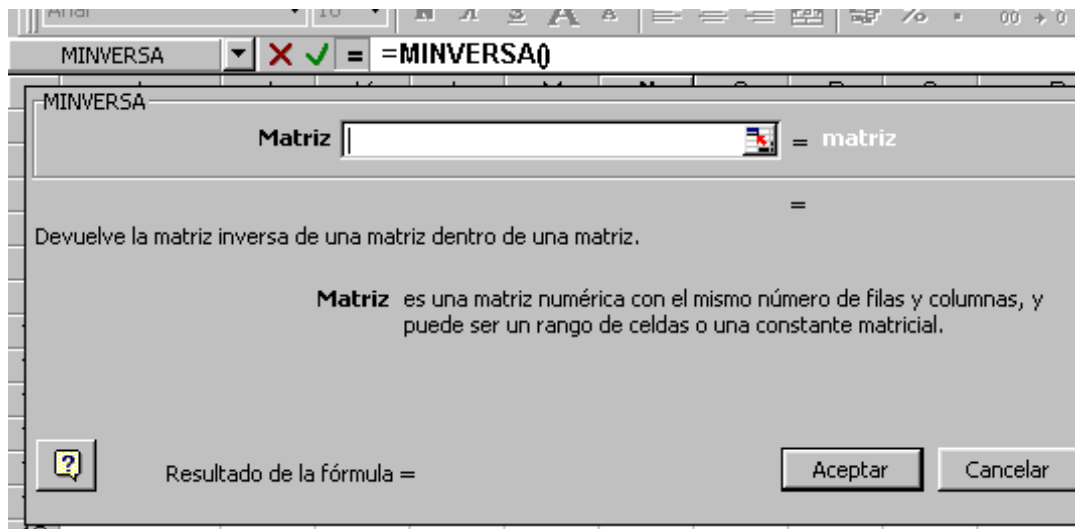

## 2 Inversa de una matriz.

El procedimiento para calcular la inversa de una matriz ( $A^{-1}$ ), es similar al de la multiplicación de matrices. Es importante recordar, que este procedimiento sólo se puede realizar a matrices cuadradas.

Primeramente seleccionamos la celda a partir de la cual queremos la salida de la matriz inversa y activamos el botón de “Pegar Función” para que seguidamente seleccionemos la función “MINVERSA”






Con lo que aparece la ventana de diálogo donde definimos el area de la matriz a la cual le vamos a calcular la inversa



Hacemos click en el botón a la derecha del área de la matriz y con el cursor señalamos los valores de la matriz en la hoja de cálculo

Arial 10 N K S A A

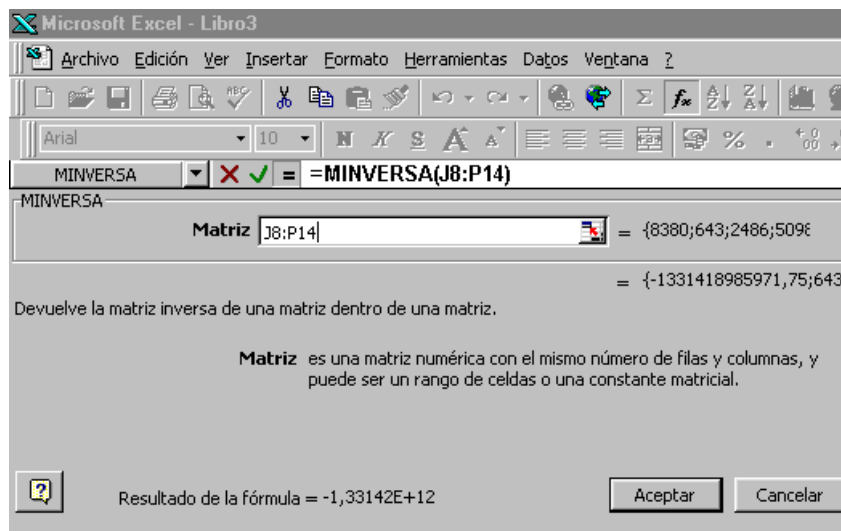
MINVERSA    = =MINVERSA(J8:P14)

J8:P14

4								
5								
6								
7								
8		8380	643	2486	5098	-54	-131	5213
9		11710	943	4556	7879	-29	-276	8464
10		22440	626	6890	14010	-1	-452	13071
11		10910	1531	6076	8150	-61	-390	8325
12		9360	1764	6412	7674	-33	-426	6821
13		-3010	1193	1496	-685	-44	-91	-1180
14		-3600	880	730	-1358	-47	-38	-1069
15								
16								
17								
18								
19								
20								

I:P14)

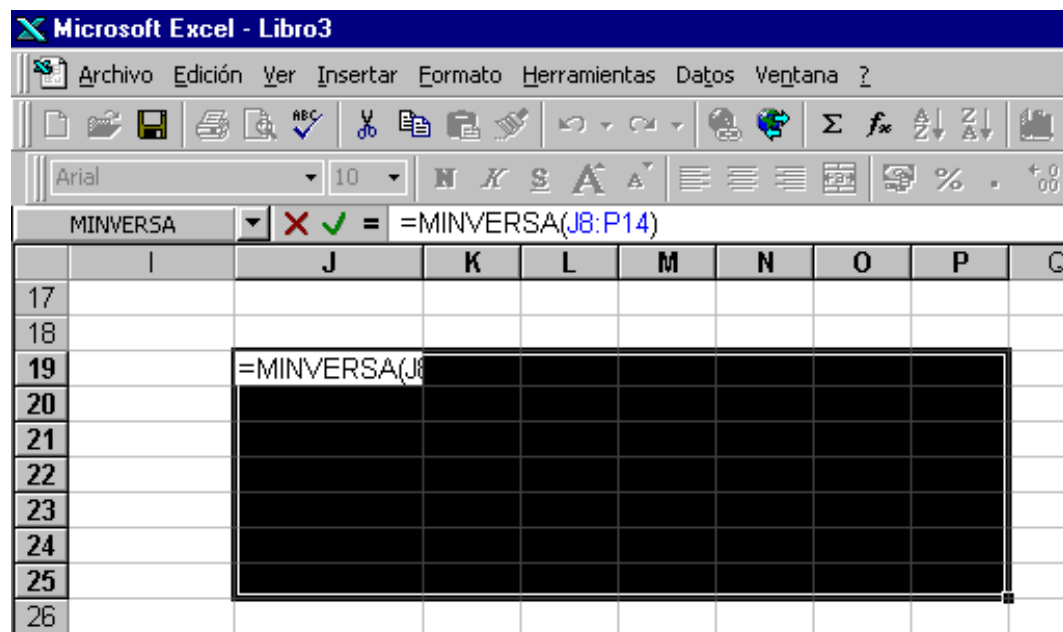




Definido el área de la matriz, hacemos click en el boton “Aceptar” y obtenemos el valor bucado en la acelda seleccionada

	J	K	L	M	N	O	P
3							
4							
5							
6							
7							
8	8380	643	2486	5098	-54	-131	5213
9	11710	943	4556	7879	-29	-276	8464
10	22440	626	6890	14010	-1	-452	13071
11	10910	1531	6076	8150	-61	-390	8325
12	9360	1764	6412	7674	-33	-426	6821
13	-3010	1193	1496	-685	-44	-91	-1180
14	-3600	880	730	-1358	-47	-38	-1069
15							
16							
17							
18							
19	-1,33142E+12						
20							
21							
22							
23							

Para obtener el resto de los valores, sombreamos un el área equivalente al orden de la matriz inversa, la cual es es mismo de la matriz original.



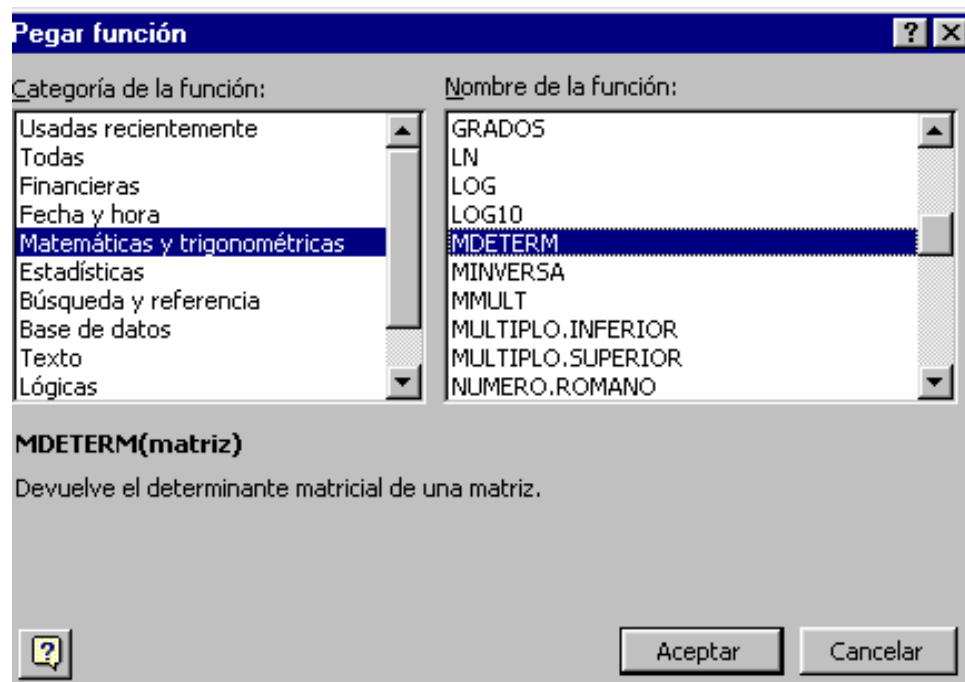
Una vez sombreado el area, procedemos a ubicar el cursor en la barra de formulas y se oprime en forma simultanea, en el teclado, los botones de CONTROL, SHIFT y ENTER con lo cual aparecerá el resto de los valores de la matriz inversa.

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the formula bar displaying `=MINVERSA(J8:P14)`. The worksheet grid shows the result of the function, which is a 7x7 matrix of values in scientific notation. The values are displayed in the range J8:P14.

	J	K	L	M	N	O	P
19	-1,33142E+12	6,43456E+11	5,33154E+11	1,48488E+12	-2,39885E+12	2,98167E+12	-1,91289E+12
20	-5,96004E+11	2,8804E+11	2,38664E+11	6,64701E+11	-1,07383E+12	1,33473E+12	-8,56297E+11
21	-1,69015E+12	8,16825E+11	6,76804E+11	1,88496E+12	-3,04518E+12	3,78502E+12	-2,42829E+12
22	3,00899E+12	-1,4542E+12	-1,20492E+12	-3,35581E+12	5,42136E+12	-6,73852E+12	4,3231E+12
23	-1,39967E+13	6,7644E+12	5,60484E+12	1,561E+13	-2,52181E+13	3,13451E+13	-2,01095E+13
24	-4,94996E+12	2,39225E+12	1,98217E+12	5,52051E+12	-8,91846E+12	1,10853E+13	-7,11176E+12
25	-1,92184E+11	92880017917	76958409769	2,14336E+11	-3,46263E+11	4,3039E+11	-2,76117E+11

### 3. Otras operaciones

Otra función importante que trae el Excel es el cálculo de la determinante de una matriz, cuyo procedimiento es similar a los casos anteriores.



## CAPITULO VI

### MULTICOLINEALIDAD

#### 1. DEFINICION

Uno de los supuestos del modelo clásico es:  $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ , es decir, entre dos o más variables explicativas del modelo no debe existir ninguna relación. Si se viola este supuesto, se presenta un hecho que se denomina multicolinealidad.

Se conoce como multicolinealidad a una situación en la que, como consecuencia de una fuerte interrelación entre las variables explicativas, es difícil desligar los efectos que cada variable tiene, de forma individual sobre la variable dependiente.

Por lo tanto podemos indicar que un modelo sufre de multicolinealidad cuando hay presencia de una *relación lineal* entre dos o más variables explicativas del modelo, como por ejemplo:

$$X_1 = \phi_2 X_2 + \phi_3 X_3$$

Es importante resaltar que multicolinealidad solo se refiere al concepto de relación lineal, ya que ecuaciones no lineales como por ejemplo:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + u$$

en las cuales la relación entre las variables explicativas no es lineal (en el ejemplo anterior, es cuadrática) no violan el supuesto de no multicolinealidad.

Existen dos clases de multicolinealidades, la perfecta y la imperfecta. Existe multicolinealidad perfecta cuando existe una relación lineal entre dos o más variables explicativas del modelo, como por ejemplo:  $X_1 = \lambda X_2$ , es decir el comportamiento de una de las variables explicativas es explicado en un 100% de los casos por otra variable explicativa. Hay multicolinealidad imperfecta, cuando una variable explicativa, es explicada en un porcentaje menor al 100% por otra(s) variable(s) explicativa(s), por ejemplo:  $X_1 = \lambda X_2 + v$ , donde  $v$  es una variable aleatoria o estocástica.

#### 2. NATURALEZA DE LA MULTICOLINEALIDAD

A pesar que la definición plantea que la multicolinealidad surge cuando existe una relación lineal entre las variables explicativas, lo más común que suceda en la práctica, es que al recopilar los datos para las variables explicativas del modelo, nos

encontremos que los datos asociados a dos o más variables diferentes, estén relacionados entre sí, por lo cual, se dice que la multicolinealidad es netamente un *problema muestral*, es decir que sucede en la muestra, mas no en la población.

Al ser un problema muestral. Los estimadores mínimos cuadrados seguirán siendo, los mejores estimadores linealmente insesgados, es decir seguirán siendo MELI.

### 3. CONSECUENCIAS DE LA MULTICOLINEALIDAD

En el caso de la multicolinealidad perfecta, la consecuencia directa es que no se pueden estimar los coeficientes, Al aplicar las ecuaciones mínimo cuadráticas, estas nos darán cero sobre cero o lo que es lo mismo, indeterminado. Por ejemplo, dado el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$$

y partiendo del supuesto:

$$x_1 = \lambda x_2$$

tenemos que:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_1 y \sum x_2^2 - \sum x_2 y \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} = \frac{\sum \lambda x_2 y \sum x_2^2 - \sum x_2 y \sum \lambda x_2 x_2}{\sum (\lambda x_2)^2 \sum x_2^2 - (\sum \lambda x_2 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\lambda \sum x_2 y \sum x_2^2 - \lambda \sum x_2 y \sum x_2^2}{\lambda^2 \sum x_2^2 \sum x_2^2 - \lambda^2 (\sum x_2^2)^2} = \frac{0}{0} = \text{indeterminado}$$

Desde el puntos de vista matricial al haber una relación lineal entre dos o más columnas de la matriz  $\mathbf{X}$ , la determinante de la matriz  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  es igual a cero, por lo tanto, es una matriz singular, y no se puede calcular su inversa, lo cual imposibilita el cálculo de los coeficientes de la ecuación ( $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$ ).

En el caso de la multicolinealidad imperfecta, tenemos las siguientes consecuencias:

- 1 A diferencia del caso de multicolinealidad perfecta, si se pueden estimar los coeficientes.

2. Es prácticamente imposible separar los efectos o influencias relativas de las diferentes variables explicativas sujetas a un fuerte grado de correlación lineal, por lo que las estimaciones concretas pueden cometer errores muy fuertes al absorber unos parámetros la influencia de las otras con las que están correlacionadas.
3. Los errores estándar de los coeficientes estimados pueden ser muy grandes, llevando a aceptar hipótesis nulas indebidamente y despreciar ciertas variables como explicativas cuando sí lo son. Es decir, los test de significancia individual y global de los coeficientes del modelo pueden establecer conclusiones contradictorias.
4. Pequeños cambios en los datos pueden producir grandes variaciones en los estimadores de los coeficientes.
5. Los coeficientes pueden tener signo opuesto al esperado o una magnitud poco creíble.

Es importante hacer resaltar que pese a la presencia de multicolinealidad en el modelo, si este presenta un coeficiente de determinación elevado, el modelo conservara su capacidad de estimar valores de la variable dependiente.

#### 4. COMO DETECTAR LA MULTICOLINEALIDAD

1. Una primera aproximación para sospechar que un modelo sufre de multicolinealidad no los da la teoría económica. Por ejemplo el siguiente modelo:

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y + \beta_2 S + u$$

el cual nos indica que el consumo(C) de un bien esta en función lineal de los niveles de ingreso (Y) y de los niveles de ahorro (S), puede esta bien planteado desde el punto de vista teórico (cuando una persona piensa comprar un vehículo siempre toma en consideración sus niveles de ingreso, para el pago de las mensualidades y de sus ahorros para la inicial), Pero a nivel econométrico sabemos que el ingreso y el ahorro no pueden esta conjuntamente como variables explicativas dado que la teoría económica nos indica que el ahorro esta en función directa de los niveles de ingreso.

2. Un segundo método es a través de las pruebas de significancia individual y global. Si en un modelo estimado se rechaza la hipótesis  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$  a través de la prueba F y algunos coeficientes ( o todos) son individualmente no significativos, mediante la prueba T. Esto da indicios de un posible problema de multicolinealidad. Por ejemplo dado el siguiente modelo:

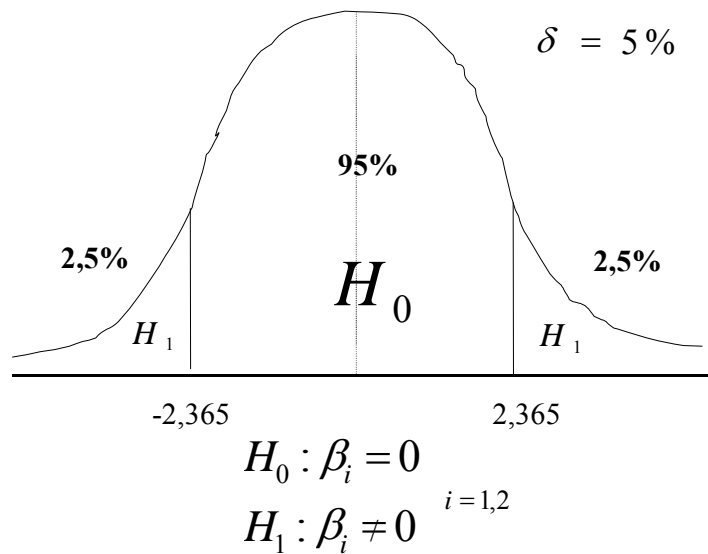
$$\hat{Y}_i = 24,7747 + 0,9415X_{1i} - 0,0424X_{2i}$$

$$\begin{matrix} (6,7525) & (0,8229) & (0,0807) \\ T = & (3,6690) & (1,442) & (-0,5261) \end{matrix}$$

$$R^2 = 0,9635 \quad \text{g de l} = 7$$

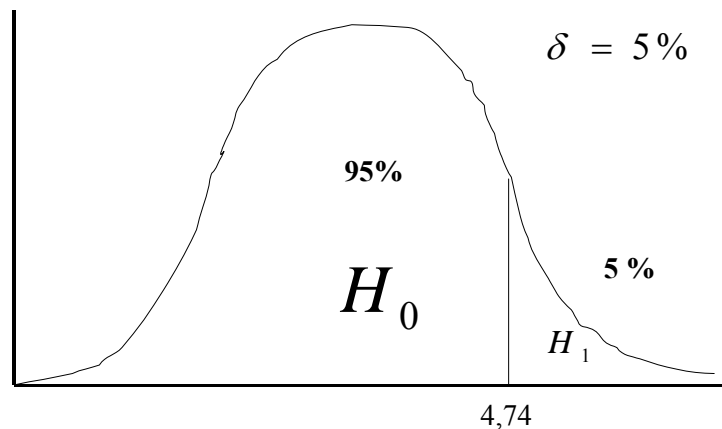
Y = consumo;  $X_1$  = ingreso;  $X_2$  = riqueza

Análisis estadístico:



En primer lugar tenemos un coeficiente de determinación bastante alto, el 96,35% de las variaciones en el consumo son explicadas por el ingreso y la riqueza. Este resultado nos indica que el modelo se ajusta bastante bien a los datos recolectados.

Comparando la T calculadas con las T de la gráfica,  $(1,1442 < 2,365)$  y, en ambos casos aceptamos la hipótesis nula de que los coeficientes son iguales a cero, por lo tanto podemos concluir que ambos coeficientes no son significativamente diferentes a cero.



$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$$

$$F = \frac{R^2 / (K - 1)}{(1 - R^2) / (N - K)} = \frac{0,9635 / (3 - 1)}{(1 - 0,9635) / (10 - 3)} = \frac{0,482}{0,005} = 96,40$$

dado que  $96,40 > 2,365$  rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alternativa de que los coeficientes betas son diferentes a cero, por lo tanto concluimos que los coeficientes globalmente son significativamente diferentes de cero.

¿ Cómo se explica que los coeficientes individualmente no sean significativos pero globalmente si lo sean?. La única explicación posible es la existencia de una correlación lineal entre las variables explicativas.

3. Un último método de detección de la multicolinealidad es a través de los coeficientes de correlación de orden cero y parcial entre las variables explicativas.

### EJERCICIO N° 18

En el siguiente cuadro se tiene una Información hipotética sobre el gasto de consumo  $Y$  (US\$), el ingreso  $X_1$  (US\$) y la riqueza  $X_2$  (US\$).



$Y$	$X_1$	$X_2$
70	80	810
65	100	1009
90	120	1273
95	140	1425
110	160	1633
115	180	1876
120	200	2052
140	220	2201
155	240	2435
150	260	2686

Se necesita estimar un modelo lineal, y determinar si el mismo presenta multicolinealidad o no

b)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

$$\beta_1 > 0 \quad \beta_2 > 0$$

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{u}_i$$

$Y$	$X_1$	$X_2$	$X_1 Y$	$X_2 Y$	$X_1 X_2$	$X_1^2$	$X_2^2$	$Y^2$
70	80	810	5600	56700	64800	6400	656100	4900
65	100	1009	6500	65585	100900	10000	1018081	4225
90	120	1273	10800	114570	152760	14400	1620529	8100
95	140	1425	13300	135375	199500	19600	2030625	9025
110	160	1633	17600	179630	261280	25600	2666689	12100
115	180	1876	20700	215740	337680	32400	3519376	13225
120	200	2052	24000	246240	410400	40000	4210704	14400
140	220	2201	30800	308140	484220	48400	4844401	19600
155	240	2435	37200	377425	584400	57600	5929225	24025
150	260	2686	39000	402900	698360	67600	7214596	22500
1110	1700	17400	205500	2102305	3294300	322000	33710326	132100

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{N} = \frac{1700}{10} = 170$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N} = \frac{17400}{10} = 1740$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{1110}{10} = 111$$

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - N \bar{X}_1 \bar{Y} = 205500 - 10(170)(111) = 16800$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - N \bar{X}_2 \bar{Y} = 2102305 - 10(1740)(111) = 170905$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - N \bar{X}_1 \bar{X}_2 = 3294300 - 10(170)(1740) = 336300$$

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - N \bar{X}_1^2 = 322000 - 10(170)^2 = 33000$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - N \bar{X}_2^2 = 33710326 - 10(1740)^2 = 3434326$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - N \bar{Y}^2 = 132100 - 10(111)^2 = 8890$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_1 y \sum x_2^2 - \sum x_2 y \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(16800)(3434326) - (170905)(336300)}{(33000)(3434326) - (336300)^2} = \frac{221325300}{235068000} = 0,9415$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_2 y \sum x_1^2 - \sum x_1 y \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(170905)(33000) - (16800)(336300)}{(33000)(3434326) - (336300)^2} = \frac{-9975000}{235068000} = -0,0424$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

$$\hat{\beta}_0 = 111 - (0,9415)(170) - (-0,0424)(1740) = 24,7747$$

$$\hat{Y}_i = 24,7747 + 0,9415X_{1i} - 0,0424X_{2i}$$

b) Análisis.

b.1) Análisis económico: El signo del coeficiente que acompaña a la variable ingreso es el esperado y nos indica que por cada dólar adicional de ingreso el consumo aumentará en 0,9415 dólares. El signo del coeficiente que acompaña a la variable riqueza no es el esperado lo cual puede indicar que hay cierto problema en los datos. Este coeficiente tal como está nos indica que por cada dólar adicional de riqueza el consumo disminuirá en 0,0424 dólares.

b.2) Análisis estadístico:

b.2.1) Coeficiente de determinación ( $R^2$ )

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 \sum x_1 y + \hat{\beta}_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}$$

$$R^2 = \frac{(0,9415)(16800) + (-0,0424)(170905)}{8890} = \frac{8570,828}{8890} = 0,9635$$

El 96,35% de las variaciones en la inflación observada son explicadas por el modelo

b.2.2.) Prueba de significancia individual de los coeficientes pendientes.

$$\sum \hat{u}_i^2 = (1 - R^2) \sum y^2 = (1 - 0,9635) 8890 = 324,4459$$

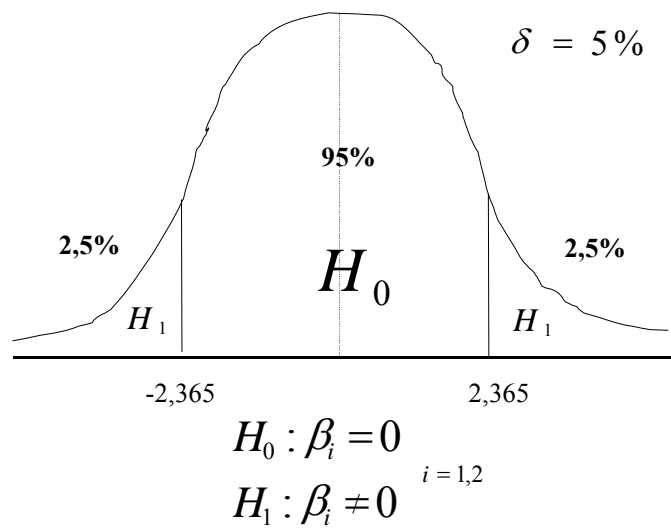
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N - K} = \frac{324,4459}{10 - 3} = 46,3494$$

$$ee(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{\sum x_2^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}}$$

$$ee(\hat{\beta}_1) = \sqrt{46,3494 \frac{3434326}{235068000}} = 0,8229$$

$$ee(\hat{\beta}_2) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{\sum x_1^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}}$$

$$ee(\hat{\beta}_2) = \sqrt{46,3494 \frac{33000}{235068000}} = 0,0807$$



$$T_1 = \frac{\hat{\beta}_1 - \bar{\beta}_1}{ee(\hat{\beta}_1)} = \frac{0,9415 - 0}{0,8229} = \frac{0,9415}{0,8229} = 1,1441$$

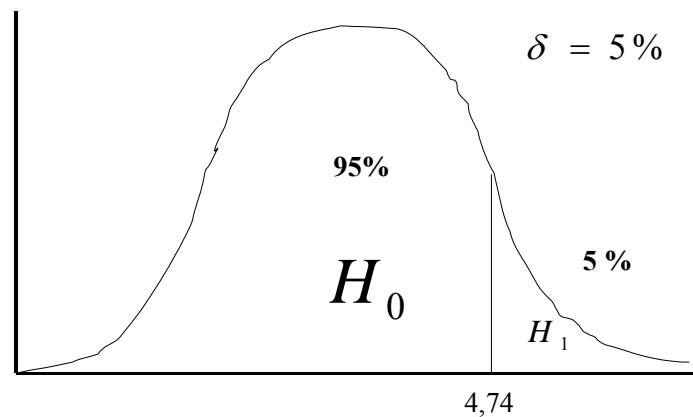
Como, entonces  $T_1$  calculado cae en la zona de aceptación, por lo tanto aceptamos la hipótesis nula por lo que se concluye que el coeficiente no es significativamente diferente de cero.

$$T_2 = \frac{\hat{\beta}_2 - \bar{\beta}_2}{ee(\hat{\beta}_2)} = \frac{-0,0424 - 0}{0,0807} = \frac{-0,0424}{0,0807} = -0,5254$$

Como, entonces  $T_2$  calculado cae en la zona de aceptación, por lo tanto aceptamos la hipótesis nula por lo que se concluye que el coeficiente no es significativamente diferente de cero.

Prueba de significancia global

$$F = \frac{R^2 / (K - 1)}{(1 - R^2) / (N - K)} = \frac{0,9635 / (3 - 1)}{(1 - 0,9635) / (10 - 3)} = \frac{0,4818}{0,0052} = 92,6538$$



$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$$

:

Como  $92,6538 > 4,74$  entonces rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alternativa de que los coeficientes son diferentes a cero, por lo que se concluye que los coeficientes globalmente si son significativamente diferentes a cero.

Dado los resultados obtenidos en donde tenemos que los dos coeficientes individualmente no son significativos y globalmente si lo son, se puede sospechar la existencia de multicolinealidad en el modelo. Por lo cual estimaremos el coeficiente de correlación entre las dos variables explicativas para reafirmar o no la sospecha.

$$r_{x_1x_2} = \frac{\text{cov}(X_1X_2)}{\sqrt{\text{var}(X_1)\text{var}(X_2)}} = \frac{\sum x_1x_2}{\sqrt{\sum x_1^2 \sum x_2^2}} = \frac{336300}{\sqrt{(33000)(3434326)}} = 0,9989$$

El coeficiente de correlación nos da un valor bastante alto lo que indica una fuerte relación entre las variables explicativas. Lo que reafirma la sospecha de la existencia de multicolinealidad en el modelo

## 5. COMO SOLUCIONAR EL PROBLEMA DE MULTICOLINEALIDAD

1. El problema de multicolinealidad se reduce, de forma esencial, a una falta de información suficiente que permita estimar de forma más o menos exacta los parámetros individuales. En algunas ocasiones podemos estar interesados en unos parámetros más que en otros y, si existe un elevado grado de multicolinealidad entre las variables que forman parte de la regresión, podemos tratar de excluir una de ellas y estimar los parámetros correspondientes al resto.

Al aplicar esta metodología hay que tener mucho cuidado ya que al excluir o eliminar una de las variables explicativas se puede correr el riesgo de que el modelo se vea afectado en mayor medida que con la presencia de multicolinealidad. Se puede dar el caso de que la variable eliminada sea importante para explicar el comportamiento de la variable dependiente, motivo por el cual el nuevo modelo regresado (sin la variable) pierda capacidad predictiva, lo cual se ve reflejado a través de una reducción en el valor del coeficiente de determinación y el posible surgimiento de autocorrelación. Cuando se presenta esta condición se dice que el modelo está mal especificado.

2. Algunos autores afirman que el problema de multicolinealidad es el mismo que se presenta cuando se tienen pocos datos, y es el de tener unas varianzas muy grandes. Por lo tanto, una forma de atenuar (no eliminar) el problema es aumentando el tamaño de la muestra.
3. Otra metodología que se utiliza, es la transformación de los datos. Entre las transformaciones más frecuentes se pueden señalar las siguientes: trabajar con tasas de crecimiento en vez de con valores absolutos; expresar las variables en diferencias o incrementos; expresar las variables en proporciones; utilizar una transformación logarítmica de las variables, etc. Se debe tener presente la teoría económica a la hora de efectuar transformaciones que tengan sentido y que no

supongan meramente un juego matemático con las ecuaciones del modelo econométrico.

### EJERCICIO N° 19

En la pagina 82 se estimó una regresión lineal para las ventas para la compañía petrolífera Campsol, obteniéndose los siguientes resultados.

Dependent Variable: VENTAS				
Method: Least Squares				
Date: 10/31/02 Time: 15:30				
Sample: 1980:1 1985:4				
Included observations: 24				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RENTA	0.073064	0.043915	1.663767	0.1126
PRECIOS	-12.89888	1.185649	-10.87917	0.0000
VEHICULOS	-0.093968	1.447429	-0.064921	0.9489
INDICE	-3.019481	1.882571	-1.603913	0.1252
C	54.11210	72.11527	0.750356	0.4622
R-squared	0.921833	Mean dependent var	66.83542	
Adjusted R-squared	0.905377	S.D. dependent var	4.019677	
S.E. of regression	1.236488	Akaike info criterion	3.445480	
Sum squared resid	29.04917	Schwarz criterion	3.690908	
Log likelihood	-36.34576	F-statistic	56.01730	
Durbin-Watson stat	1.402800	Prob(F-statistic)	0.000000	

Como se puede observar se tienen por lo menos tres (3) coeficientes individualmente no son significativos, pero el Coeficiente de Determinación o Bondad de ajuste arroja un resultado bastante alto (0,921833) y finalmente la prueba de significancia global nos indica que los coeficientes son globalmente significativos. Estos resultados nos dan un primer indicio sobre la existencia de multicolinealidad en el modelo.

Para profundizar en el análisis de la posibilidad de existencia o no de multicolinealidad, procedemos a chequear la matriz de correlaciones:

Correlation Matrix					
	VENTAS	RENTA	PRECIOS	INDICE	VEHICULOS
VENTAS	1.000000	-0.654803	-0.827766	0.623249	-0.645971
RENTA	-0.654803	1.000000	0.957205	-0.965715	0.996321
PRECIOS	-0.827766	0.957205	1.000000	-0.931767	0.951514
INDICE	0.623249	-0.965715	-0.931767	1.000000	-0.965870
VEHICULOS	-0.645971	0.996321	0.951514	-0.965870	1.000000

En la matriz anterior se puede observar como en todos los casos el coeficiente de correlación simple entre cada par de variables ( $r$ ) no es menor de 0,9, Indicando una fuerte correlación entre todas las variables explicativas del modelo.

En tercer término se puede realizar la regresión de cada regresor frente al resto de las variables explicativas para así determinar si realmente todas las variables son multicolineales o alguna de ellas es irrelevante:

Dependent Variable: RENTA  
Method: Least Squares  
Date: 11/12/02 Time: 15:21  
Sample: 1980:1 1985:4  
Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PRECIOS	8.973317	5.693902	1.575952	0.1307
INDICE	-4.512198	9.532441	-0.473352	0.6411
VEHICULOS	30.37999	2.858344	10.62853	0.0000
C	-1362.189	205.0748	-6.642399	0.0000
R-squared	0.993621	Mean dependent var	831.6558	
Adjusted R-squared	0.992664	S.D. dependent var	73.50617	
S.E. of regression	6.295960	Akaike info criterion	6.668705	
Sum squared resid	792.7822	Schwarz criterion	6.865047	
Log likelihood	-76.02446	F-statistic	1038.367	
Durbin-Watson stat	1.543381	Prob(F-statistic)	0.000000	



Dependent Variable: PRECIOS  
Method: Least Squares  
Date: 11/12/02 Time: 15:23  
Sample: 1980:1 1985:4  
Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INDICE	-0.182334	0.352694	-0.516975	0.6108
VEHICULOS	-0.129213	0.271444	-0.476021	0.6392
RENTA	0.012310	0.007811	1.575952	0.1307
C	2.144382	13.59208	0.157767	0.8762
R-squared	0.917979	Mean dependent var		2.909583
Adjusted R-squared	0.905675	S.D. dependent var		0.759287
S.E. of regression	0.233195	Akaike info criterion		0.077126
Sum squared resid	1.087596	Schwarz criterion		0.273469
Log likelihood	3.074485	F-statistic		74.61288
Durbin-Watson stat	1.473998	Prob(F-statistic)		0.000000

Dependent Variable: VEHICULOS  
Method: Least Squares  
Date: 11/12/02 Time: 15:28  
Sample: 1980:1 1985:4  
Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RENTA	0.027965	0.002631	10.62853	0.0000
PRECIOS	-0.086701	0.182137	-0.476021	0.6392
INDICE	-0.229924	0.286250	-0.803229	0.4313
C	48.82364	2.220180	21.99085	0.0000
R-squared	0.992940	Mean dependent var		71.54042
Adjusted R-squared	0.991881	S.D. dependent var		2.119997
S.E. of regression	0.191020	Akaike info criterion		-0.321870
Sum squared resid	0.729769	Schwarz criterion		-0.125528
Log likelihood	7.862443	F-statistic		937.6582
Durbin-Watson stat	1.613203	Prob(F-statistic)		0.000000

Dependent Variable: INDICE  
Method: Least Squares  
Date: 11/12/02 Time: 15:26  
Sample: 1980:1 1985:4  
Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
VEHICULOS	-0.135918	0.169214	-0.803229	0.4313
RENTA	-0.002455	0.005187	-0.473352	0.6411
PRECIOS	-0.072323	0.139897	-0.516975	0.6108
C	13.23061	8.038536	1.645898	0.1154
R-squared	0.935342	Mean dependent var		1.254583
Adjusted R-squared	0.925643	S.D. dependent var		0.538597
S.E. of regression	0.146867	Akaike info criterion		-0.847570
Sum squared resid	0.431397	Schwarz criterion		-0.651227
Log likelihood	14.17084	F-statistic		96.44012
Durbin-Watson stat	0.436751	Prob(F-statistic)		0.000000

resumiendo los resultados obtenidos para los coeficientes de determinación:

$X_t$	$R^2_{X_1 / X_2 \dots X_K}$
RENTA	0,993621
PRECIOS	0,917979
VEHICULOS	0,992940
INDICE	0,935342

Cono se puede observar todos los  $R^2$  dan valores cercanos a 1, lo que nos indica una fuerte relación entre las variables explicativas.

Por todo lo anterior, podemos decir que hay indicios de la presencia de multicolinealidad en el modelo. La solución al problema conlleva a la eliminación de aquellas variables causantes del problema, ya que observa que la relación lineal entre ellas es muy fuerte. Dado que en este caso, todas las variables explicativas guardan relación entre ellas, el proceso de eliminación debe hacerse por tanteo hasta lograr un modelo que cumpla con los requerimientos.

Por ejemplo, una estimación tentativa, sería eliminando las variables. VEHICULOS e INDICE, cuyo coeficiente de correlación simple es uno de los mas elevado, aunque hay que hacer la acotación de que como se verá mas adelante puede presentar problemas de autocorrelación.

Dependent Variable: VENTAS				
Method: Least Squares				
Date: 11/13/02 Time: 09:55				
Sample: 1980:1 1985:4				
Included observations: 24				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RENTA	0.089797	0.012298	7.301941	0.0000
PRECIOS	-12.70339	1.190535	-10.67032	0.0000
C	29.11663	6.988768	4.166203	0.0004
R-squared	0.911046	Mean dependent var		66.83542
Adjusted R-squared	0.902575	S.D. dependent var		4.019677
S.E. of regression	1.254663	Akaike info criterion		3.408080
Sum squared resid	33.05776	Schwarz criterion		3.555336
Log likelihood	-37.89696	F-statistic		107.5391
Durbin-Watson stat	1.255094	Prob(F-statistic)		0.000000

## EJERCICIO Nº 20

Se dispone de 20 observaciones<sup>34</sup> relativas al consumo interno (CONS), rentas salariales agrarias (WA), rentas no salariales no agrarias (RNA) y rentas agrarias (RA), para el período 1928 –1941 y 1945 –1950 de la economía estadounidense. Con esta información se va a estimar el modelo de Klein y Goldberger (1955) en el que se explica el consumo en función de las mencionadas rentas.

Observaciones	CONS	RA	WA	RNA
1	55,2	4,39	39,21	17,73
2	62,2	4,60	42,31	20,29
3	58,6	3,25	40,37	18,83
4	56,6	2,61	39,15	17,44
5	51,1	1,67	34,00	14,76
6	51,1	2,44	33,59	13,39
7	54,0	2,39	36,88	13,93
8	57,2	5,08	39,27	14,67
9	62,8	3,93	45,51	17,20
10	65,0	5,48	46,06	15,92
11	63,9	4,37	44,16	17,57
12	67,5	4,51	47,68	18,49
13	71,3	4,90	50,79	18,49
14	76,6	6,37	57,78	19,18
15	86,3	8,42	78,97	19,12
16	95,7	9,27	73,54	19,76
17	98,3	8,87	71,92	17,55
18	100,3	9,30	74,01	19,17
19	103,2	6,95	75,51	20,20
20	108,9	7,15	80,97	22,12

El objetivo de este ejercicio es el análisis de la presencia de colinealidad en el modelo econométrico señalado, según la siguiente especificación:

$$Cons_i = \beta_0 + \beta_1 RA_i + \beta_2 WA_i + \beta_3 RNA_i + u_i$$

Se pide:

- a) Estime el modelo anterior por MCO.
- b) Detecte por distintas vías la presencia de multicolinealidad en el modelo.
- c) Corrija la multicolinealidad en caso de ser necesario.

<sup>34</sup> Ejercicio tomado de Pena Trapero, J. Bernardo, Julio A Estavillo D, María E. Galindo F., María J. Leceta R. Y María del Mar Zamora S. "Cien Ejercicios de Econometría". Ediciones Pirámide. Madrid. 1999. P.219.

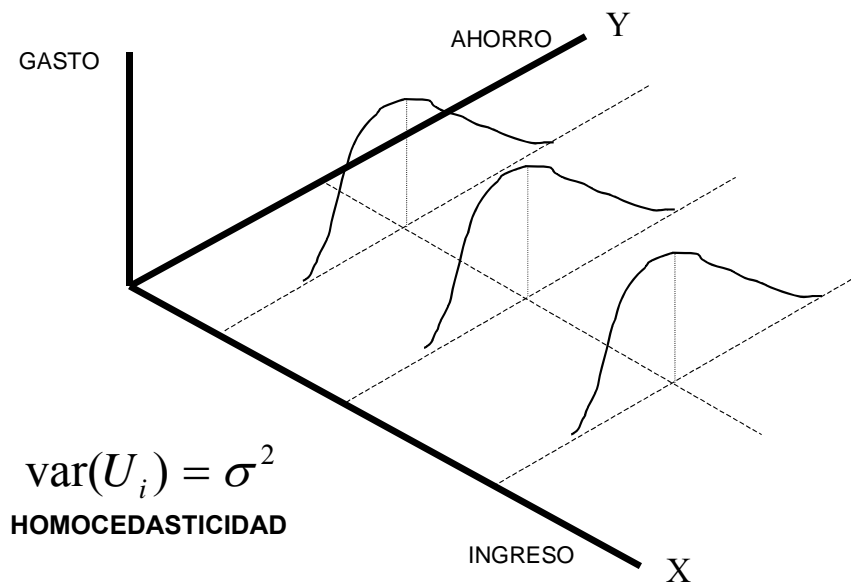
## CAPITULO VII

### HETEROCEDASTICIDAD

#### 1. DEFINICION

El supuesto de *Homocedasticidad*<sup>35</sup> nos indica que:

$$\text{var}(U_i) = \text{constante} = \sigma^2$$



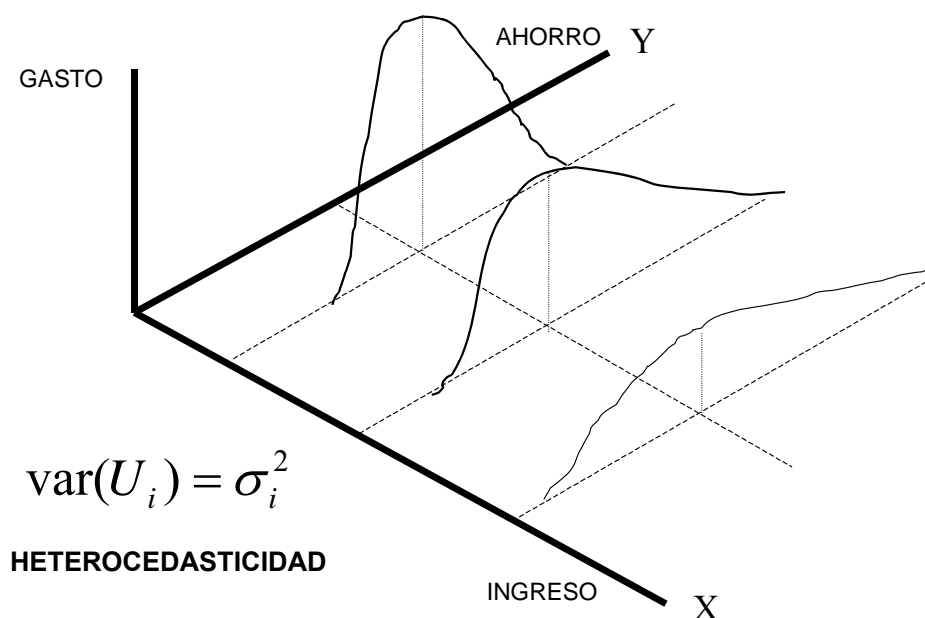
Lo cual significa nos indica que todos los términos de perturbación tienen la misma varianza. Sin embargo, puede darse el caso de que no todos los términos de perturbación tengan la misma varianza. Esta condición de varianza inconstante se conoce con el nombre de *Heterocedasticidad*<sup>36</sup>. Como por ejemplo, al estudiar los niveles de gasto de consumo de las familias a diferentes ingresos disponibles, podemos encontrar que la varianza en el consumo se eleva con el nivel de ingresos. Tal es el caso por el cual familias con mayores ingresos pueden tener mayor flexibilidad respecto al consumo.

Otro ejemplo sería si queremos cuantificar una relación en la que nos preocupe explicar los gastos en innovación que una empresa realiza, mediante diferentes variables explicativas como el capital, o la estructura de empleo, es muy probable que

<sup>35</sup> homo = igual; cedasticidad = dispersión  $\Rightarrow$  Homocedasticidad = igual dispersión

<sup>36</sup> hetero = diferente; cedasticidad = dispersión  $\Rightarrow$  Heterocedasticidad = diferente dispersión

se produzca una mayor variación en el monto de dichos gastos en empresas de mayor tamaño, por lo que también es muy probable que los errores generados tras realizar la regresión presenten un problema de Heterocedasticidad.



Por otra parte, si pretendemos ajustar una regresión con datos regionales per cápita en la que estamos interesados en contratar la relación entre los gastos de inversión en estructura y la renta de las regiones, es muy posible que los errores presenten Heterocedasticidad por el hecho de que para obtener los valores de la variable dependiente y explicativa hemos dividido los datos agregados por la población de cada región, por lo que posiblemente las varianzas sean proporcionales a la población de cada región que se ha utilizado para promediar dichos datos.

El problema de Heterocedasticidad es probablemente más común en la información de corte transversal que en la información de series de tiempo. En la información de corte transversal, generalmente se trata con miembros de una población en un momento dado del tiempo, tal como los consumidores individuales o sus familias, empresas, industrias, o subdivisiones geográficas tales como estados, países, ciudades, etc. Además, estos miembros pueden ser de diferentes tamaños como por ejemplo empresas pequeñas, medianas o grandes o de ingresos bajos, medios o altos. En las series de tiempo, por el contrario, las variables tienden a ser datos de magnitud similares por que generalmente se recopila información sobre el

mismo fenómeno o hecho durante un período de tiempo (días, meses, años, etc. Son ejemplos el PIB, el gasto público, el empleo en Venezuela, durante el período 1960 – 2000.

## 2. CONSECUENCIAS DE LA HETEROCEDASTICIDAD

Para un modelo con perturbaciones heterocedásticas aceptaremos que cada término del error  $u_i$  está distribuido en forma normal con varianza, donde la varianza  $\text{var}(u_i) = E[u_i^2] = \sigma_i^2$  no es constante entre observaciones. Cuando está presente la Heterocedasticidad, la estimación de mínimos cuadrados ordinarios da más ponderación a las observaciones con varianzas de perturbaciones grandes que aquella con varianza de errores menores. La ponderación ocurre debido a que es probable que la suma de residuales cuadrados asociada con términos de error de varianza grande sea considerablemente mayor que la suma de residuales cuadrados asociada con errores de varianza baja.

$$\sum u_i^2 = \sigma_i^2 (N - K)$$

La línea de regresión se ajustará para minimizar la suma total de residuales cuadrados, y esto puede lograrse mejor garantizando un ajuste muy bueno en la porción de los datos de varianza grande. *Debido a esta ponderación implícita, los estimadores de los coeficientes de mínimos cuadrados ordinarios son insesgados y consistentes, pero no eficientes, es decir los estimadores mínimos cuadráticos en presencia de Heterocedasticidad no son los mejores estimadores linealmente insesgados, ya no son MELI.*

Hay que recordar que según el teorema de Gauss – Markov. El método de los mínimos cuadrados supone que las varianzas de los términos de perturbación es constantes, es decir homocedástica. Por lo tanto si estas varianzas ya no son constantes, hay Heterocedasticidad, al momento de estimar los coeficientes debemos utilizar una metodología que contemple este supuesto, como sería el caso del método de los mínimos cuadrados generalizados<sup>37</sup>.

Lo anterior nos indica que cuando utilizamos el método de los mínimos cuadrados ordinarios en presencia de Heterocedasticidad, estamos utilizando una metodología equivocada. Pero sucede que en la realidad normalmente verificamos la presencia o no de Heterocedasticidad posteriormente a la regresión del modelo, lo que significa que ya se realizó la estimación de los coeficientes, los errores estándar

de los coeficientes y las pruebas F y T. ¿qué sucede con estos valores, son validos o no?.

Si recordamos la ecuación para estimar, por ejemplo, el error estándar de:

---

<sup>37</sup> Ver Gujarati. Ob. cit. P.355

$$ee(\tilde{\beta}_1) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{1}{\sum X^2 - N\bar{X}^2}}$$

El problema radica en que la fórmula anterior conducirá a valores sesgados (mayor o menor al valor verdadero) del error estándar, por lo tanto, si se utiliza este valor, las pruebas estadísticas (T y F) y los intervalos de confianza serán incorrectas.

### 3. COMO DETECTAR LA HETEROCEDASTICIDAD

Para detectar el problema de Heterocedasticidad realizaremos la siguiente metodología:

1. En primer lugar se realiza la regresión normal  $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{u}_i$  con la finalidad de estimar los residuales. Recordando que  $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$
2. A continuación se regresa alguno de los siguientes modelos:

$$\ln \hat{u}_i^2 = \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + \nu_i = \text{Prueba de Park}$$

$$\left. \begin{aligned} |\hat{u}_1| &= \beta_0 + \beta_1 X_i + \nu_i \\ |\hat{u}_i| &= \beta_0 + \beta_1 \sqrt{X_i} + \nu_i \\ |\hat{u}_i| &= \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i} + \nu_i \\ |\hat{u}_i| &= \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + \nu_i \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Prueba de Glejser} \\ || = \text{valor absoluto} \end{array}$$

3. Se realiza la prueba T (significancia individual) para el coeficiente pendiente, con N-K grados de libertad, con el siguiente conjunto de hipótesis

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

que sería equivalente a plantear el siguiente conjunto de hipótesis:

$$H_0 : \text{var}(\hat{u}_i) = \sigma^2 = \text{homocedasticidad}$$

$$H_1 : \text{var}(\hat{u}_i) = \sigma_i^2 = \text{heterocedasticidad}$$

## EJERCICIO Nº 21

OBSERVACIONES	PIB	EMPLEO
Andalucía	6.895.665	1.834,1
Aragón	1.747.221	412,3
Asturias	1.338.540	351,2
Baleares	1.150.586	252,9
Canarias	1.830.265	446,4
Cantabria	660.038	162,3
Castilla y León	2.980.371	841,6
Castilla-La Mancha	1.846.983	528,3
Cataluña	9.511.088	2.222,9
Comunidad Valenciana	4.949.357	1.276,7
Extremadura	963.305	302,6
Galicia	2.752.518	1.012,8
Madrid	7.935.591	1.636,0
Murcia	1.240.645	317,0
Navarra	840.372	183,9
País Vasco	3.251.025	708,5
La Rioja	384.298	90,3
Ceuta y Melilla	135.876	29,7

Se quiere estimar la relación existente entre el empleo y el PIB en las comunidades autónomas españolas. Para ello se utilizan los datos del valor añadido bruto al costo de factores (precios corrientes, en millones de pesetas) y el número de ocupados (medias anuales en miles de personas) para el año 1991, que aparecen en la siguiente tabla:

Existe la posibilidad de que haya Heterocedasticidad en la varianza de las perturbaciones dependiendo directamente de la variable empleo o alguna transformación de ésta.

Se pide verificar la existencia de Heterocedasticidad.<sup>38</sup>

En primer lugar establecemos el modelo:

$$PIB_i = \beta_0 + \beta_1 EMP_i + u_i$$

$$\beta_1 > 0$$

$$PIB_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 EMP_i + \hat{u}_i$$

regresando mediante el método de los mínimos cuadrados, tenemos que el modelo resultante es:

---

<sup>38</sup> Tomado de: Pena Trampero J. Bernardo, julio A. Estavillo D. Y y otros autores. Cien ejercicios de Econometría. Ediciones Pirámide S.A. Madrid 1999.



$$\hat{PIB}_i = -118.413,4 + 4.167,1 EMP_i$$

(199,5353)  
(20,884)

$R^2 = 0,964613$

Dependent Variable: PIB  
Method: Least Squares  
Date: 02/06/05 Time: 21:33  
Sample: 1 18  
Included observations: 18

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-118413.4	187797.8	-0.630536	0.5372
EMPLEO	4167.111	199.5353	20.88407	0.0000

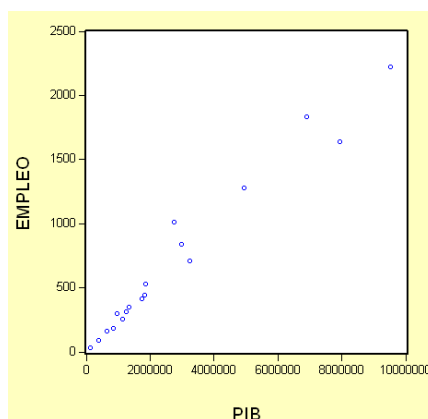
  

R-squared	0.964613	Mean dependent var	2800764.
Adjusted R-squared	0.962401	S.D. dependent var	2744155.
S.E. of regression	532101.5	Akaike info criterion	29.31150
Sum squared resid	4.53E+12	Schwarz criterion	29.41043
Log likelihood	-261.8035	F-statistic	436.1445
Durbin-Watson stat	2.513420	Prob(F-statistic)	0.000000

Para el análisis de la posible heterocedasticidad en el modelo en primer lugar se realizara el análisis gráfico. De la regresión original se ha obtenido la serie de residuos que es necesario renombrar, para tal fin generamos la siguiente instrucción:

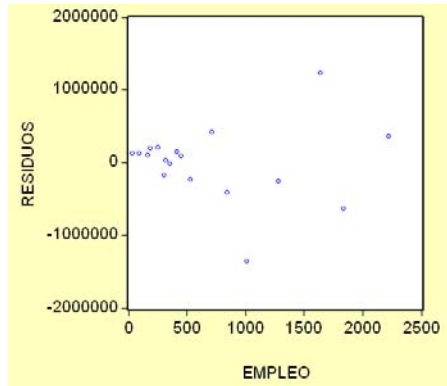
GENR RESIDUOS = RESID

En primer lugar se realiza la representación gráfica del PIB frente a la variable empleo



Este gráfico permite observar que a niveles bajos de PIB existe pequeña volatilidad en la ocupación y, sin embargo, la dispersión aumenta a medida que lo hace el PIB:

En segundo lugar, se puede analizar también de forma gráfica la relación existente entre los residuos y la variable explicativa:



Como se puede observar a valores elevados de la variable EMPLEO le corresponde valores elevados de los residuos. Como conclusión de esta parte, a través del análisis gráfico se puede sospechar la existencia de heterocedasticidad en el modelo.

#### 4. Contraste de WHITE<sup>39</sup>

El contraste de White es uno de los más utilizados para la detección de Heterocedasticidad dado que no requiere una especificación concreta bajo la alternativa:

$$H_0 : \sigma_i^2 = \sigma^2 \text{ para todo } i.$$

$$H_1 : \text{no se verifique } H_0$$

La forma de realizar el contraste se basa en la regresión de errores mínimo cuadráticos al cuadrado, que son el indicativo de la varianza de las perturbaciones, frente a un término independiente, los regresores, sus cuadrados y sus productos cruzados dos a dos (o de segundo orden). Por ejemplo, partiendo del siguiente modelo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

La regresión auxiliar para realizar este contrastes sería:

$$\hat{u}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 X_{1i} + \delta_2 X_{2i} + \delta_{11} X_{1i}^2 + \delta_{22} X_{2i}^2 + \delta_{12} X_{1i} X_{2i} + \varepsilon_i$$

La interpretación del contrastes reside en que si las perturbaciones fueran homocedásticas, las variables incluidas en la regresión no deberían tener ningún poder explicativo sobre los residuos al cuadrado y por lo tanto, el  $R^2$  debería ser pequeño. Por ello, si el valor muestral del estadístico es suficientemente alto como

<sup>39</sup> Artículo tomado de: Carrascal Arranz, Ursicino. Ob.cit. p.230

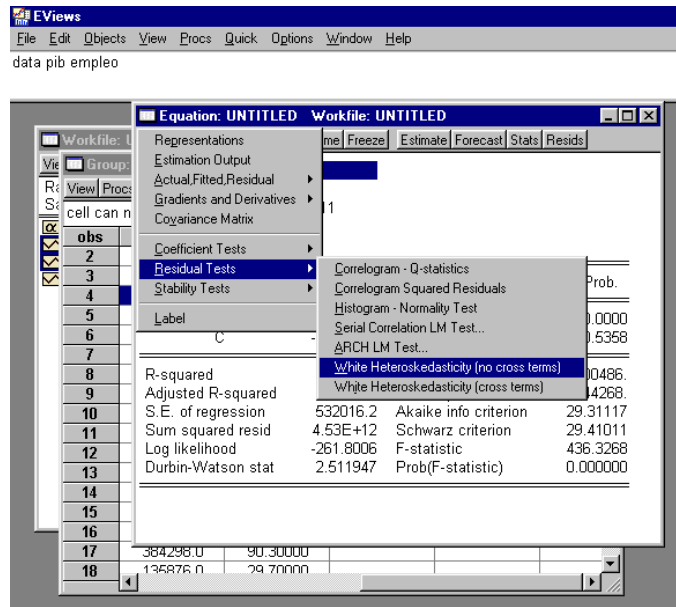
para que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta sea menor al 5% rechazaremos la hipótesis nula de Homocedasticidad.

El paquete Eviews incorpora dos versiones de este contraste. Una en la que se incluyen en la regresión los productos cruzados dos a dos ( $\delta_{12} X_{1i} X_{2i}$ ) según la versión original del test de White, y otra en la que estos no se incluyen. En la práctica se realiza el contraste para regresiones mínimo cuadráticas sin productos cruzados

Ejemplo: En el ejercicio anterior queríamos detectar la presencia de Heterocedasticidad para el modelo:

Dependent Variable: PIB				
Method: Least Squares				
Date: 11/27/02 Time: 16:11				
Sample: 1 18				
Included observations: 18				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
EMPLEO	4167.314	199.5034	20.88844	0.0000
C	-118833.1	187767.7	-0.632873	0.5358
R-squared	0.964627	Mean dependent var		2800486.
Adjusted R-squared	0.962417	S.D. dependent var		2744268.
S.E. of regression	532016.2	Akaike info criterion		29.31117
Sum squared resid	4.53E+12	Schwarz criterion		29.41011
Log likelihood	-261.8006	F-statistic		436.3268
Durbin-Watson stat	2.511947	Prob(F-statistic)		0.000000

Utilizando el test de White sin productos cruzados, seleccionamos VIEWS/RESIDUAL TEST/WHITE HETEROSKEDASTICITY (NO CROSS TERMS)



Y obtenemos:

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	3.697202	Probability	0.049504
Obs*R-squared	5.943417	Probability	0.051216

Test Equation:  
Dependent Variable: RESID^2  
Method: Least Squares  
Date: 11/27/02 Time: 16:22  
Sample: 1 18  
Included observations: 18

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-3.03E+11	2.39E+11	-1.266366	0.2247
EMPLEO	1.44E+09	6.56E+08	2.194397	0.0444
EMPLEO^2	-512389.6	302558.5	-1.693522	0.1110
R-squared	0.330190	Mean dependent var	2.52E+11	
Adjusted R-squared	0.240882	S.D. dependent var	5.29E+11	
S.E. of regression	4.61E+11	Akaike info criterion	56.70229	
Sum squared resid	3.19E+24	Schwarz criterion	56.85069	
Log likelihood	-507.3206	F-statistic	3.697202	
Durbin-Watson stat	1.229806	Prob(F-statistic)	0.049504	

Como se puede observar el valor de  $R^2$  es bajo y el estadístico F es significativo a un 4,9 %, por lo que se rechaza la hipótesis nula de la presencia de Homocedasticidad en el modelo, lo que aclara los resultados obtenidos con la metodología aplicada anteriormente, la cual daba resultados un poco ambiguos.

#### 4. COMO REMEDIAR EL PROBLEMA DE LA HETEROCEDASTICIDAD

1. El método principal que se utiliza para eliminar la Heterocedasticidad es aplicar el método de los mínimos cuadrados generalizados, por el cual se necesita conocer la varianza de cada una de las perturbaciones, hecho esto, que en la práctica es bastante difícil de conseguir.
2. A falta de conocimiento del verdadero valor de las varianzas de las perturbaciones, en la práctica, lo que se hace es plantear un supuesto sobre el comportamiento de las mismas y seguidamente se transforma el modelo de manera que se cumpla el supuesto de Homocedasticidad. Entre los diferentes supuestos que se pueden establecer, señalaremos los dos principales:

- a) El primer supuesto que se puede hacer es establecer que la varianza de las perturbaciones es proporcional al cuadrado de la variable explicativa:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^2$$

donde  $\sigma^2$  es la varianza Homocedástica.

bajo esta hipótesis de Heterocedasticidad, si se trata de restablecer la igualdad de varianza en, se tendría que transformar el modelo dividiendo el modelo original por, con lo que la especificación a estimar sería

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{\beta_0}{X_i} + \beta_1 + \frac{u_i}{X_i}$$

comprobación:

$$\text{var}\left(\frac{u_i}{X_i}\right) = E\left(\frac{u_i}{X_i}\right)^2 = \frac{E(u_i)^2}{E(X_i)^2} = \frac{\sigma_i^2}{X_i^2} = \sigma^2$$

- b) Suponer que la varianza es proporcional al valor de la variable explicativa:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i$$

con lo que el modelo con el mismo propósito que anteriormente resultaría:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{X_i}} + \beta_1 \sqrt{X_i} + \frac{u_i}{\sqrt{X_i}}$$

## EJERCICIO N° 22

En el cuadro que se presenta a continuación<sup>40</sup> se muestran los datos referidos a una encuesta realizada a 16 familias. En los mismos se recoge el comportamiento con relación al ahorro realizado, S, en función de la renta salarial Y, expresadas ambas variables en miles de pesetas:

UNIDAD FAMILIAR	AHORRO	RENTA DISPONIBLE
1	12,2	38,3
2	14,2	43,5
3	17,9	53,5
4	21,4	60,8
5	23,7	66,4
6	24,9	71,2
7	27,1	77,2
8	31,6	86,1
9	35,4	94,6
10	37,5	102,4
11	40,7	109,9
12	42,5	115,6
13	45,0	121,0
14	47,7	127,0
15	51,0	129,9
16	53,7	134,7

Considerando el modelo de regresión lineal simple como modelo teórico:

$$S_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + u_i$$

<sup>40</sup> Tomado de: Díaz Fernández, Monserrat y María del Mar Llorente Marrón. Ob.Cit. p.255

Trataremos de detectar y en su caso corregir, un posible problema de heterocedasticidad.

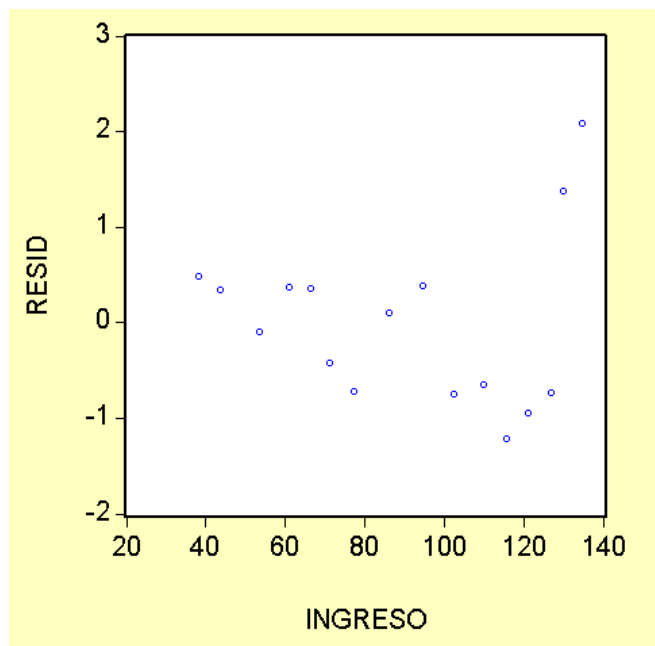
Como primera aproximación al análisis del modelo señalaremos la existencia de ciertas sospechas acerca de un posible problema de heterocedasticidad. Se trata de una muestra de corte transversal en las que las variables seleccionadas podrían presentar una diferente variabilidad. Con objeto de disipar nuestras dudas, estimaremos en primer lugar el modelo, y trataremos de detectar dicho problema a través de diferentes criterios.

Dependent Variable: AHORRO  
Method: Least Squares  
Date: 02/17/03 Time: 11:21  
Sample: 1 16  
Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INGRESO	0.413985	0.007361	56.24019	0.0000
C	-4.148012	0.696954	-5.951632	0.0000
R-squared	0.995593	Mean dependent var	32.90625	
Adjusted R-squared	0.995279	S.D. dependent var	13.23004	
S.E. of regression	0.909078	Akaike info criterion	2.763696	
Sum squared resid	11.56991	Schwarz criterion	2.860270	
Log likelihood	-20.10957	F-statistic	3162.959	
Durbin-Watson stat	0.736348	Prob(F-statistic)	0.000000	

Los resultados obtenidos nos permite valorar positivamente los resultados. La regresión es estadísticamente significativa de acuerdo con la prueba F ( $F = 3162.959$ ) e individualmente los parámetros  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son estadísticamente significativos con la prueba t-Student ( $t_0 = -5.9516$ ) y, respectivamente. Las variaciones experimentadas por la variable dependiente del modelo se explican en 99%, aproximadamente, a partir del comportamiento de la variable explicativa seleccionada.

Como primera aproximación al estudio de la posible existencia de heterocedasticidad en el modelo, realizaremos el gráfico de los residuos y la variable explicativa INGRESO: Para tal fin seleccionamos en Eviews: QUICK/GRAPH/RESID INGRESO/SCATTER DIAGRAM



Como se puede observar en el gráfico, existe una tendencia que implica una relación inversa entre los residuales y el ingreso lo cual es indicativo de la presencia de heterocedasticidad en el modelo.

b) Prueba de Park

$$\ln \hat{u}_i^2 = \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + v_i$$



Dependent Variable: LOG(R2)  
 Method: Least Squares  
 Date: 02/17/03 Time: 11:55  
 Sample: 1 16  
 Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOG(INGRESO)	2.526450	0.871711	2.898264	0.0117
C	-12.47525	3.872383	-3.221595	0.0062
R-squared	0.374998	Mean dependent var	-1.294663	
Adjusted R-squared	0.330355	S.D. dependent var	1.647660	
S.E. of regression	1.348311	Akaike info criterion	3.552050	
Sum squared resid	25.45118	Schwarz criterion	3.648624	
Log likelihood	-26.41640	F-statistic	8.399934	
Durbin-Watson stat	1.741852	Prob(F-statistic)	0.011682	

De acuerdo con la prueba de Park, la regresión confirma la sospecha de la existencia de heterocedasticidad, dado que de acuerdo con la prueba t-Student la pendiente del modelo es estadísticamente significativo a un 5%.

c) Prueba de Glejser

$$|\hat{u}_i| = \beta_0 + \beta_1 Y_i + v_i$$

Dependent Variable: ABS(RESIDUOS)  
 Method: Least Squares  
 Date: 02/17/03 Time: 12:07  
 Sample: 1 16  
 Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INGRESO	0.011960	0.002894	4.132782	0.0010
C	-0.381307	0.274005	-1.391605	0.1858
R-squared	0.549548	Mean dependent var	0.689198	
Adjusted R-squared	0.517373	S.D. dependent var	0.514458	
S.E. of regression	0.357401	Akaike info criterion	0.896552	
Sum squared resid	1.788298	Schwarz criterion	0.993126	
Log likelihood	-5.172419	F-statistic	17.07989	
Durbin-Watson stat	1.198620	Prob(F-statistic)	0.001015	

$$|\hat{u}_i| = \beta_0 + \beta_1 \ln Y_i + v_i$$

Dependent Variable: ABS(RESIDUOS)  
Method: Least Squares  
Date: 02/17/03 Time: 12:11  
Sample: 1 16  
Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOG(INGRESO)	0.857087	0.257019	3.334719	0.0049
C	-3.103766	1.141750	-2.718428	0.0166
R-squared	0.442683	Mean dependent var		0.689198
Adjusted R-squared	0.402875	S.D. dependent var		0.514458
S.E. of regression	0.397542	Akaike info criterion		1.109435
Sum squared resid	2.212552	Schwarz criterion		1.206009
Log likelihood	-6.875480	F-statistic		11.12035
Durbin-Watson stat	1.014920	Prob(F-statistic)		0.004911

$$|\hat{u}_i| = \beta_0 + \beta_1 Y_i^2 + v_i$$

Dependent Variable: ABS(RESIDUOS)  
Method: Least Squares  
Date: 02/17/03 Time: 12:15  
Sample: 1 16  
Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INGRESO2	7.23E-05	1.47E-05	4.905131	0.0002
C	0.041192	0.154828	0.266049	0.7941
R-squared	0.632163	Mean dependent var		0.689198
Adjusted R-squared	0.605889	S.D. dependent var		0.514458
S.E. of regression	0.322968	Akaike info criterion		0.693941
Sum squared resid	1.460316	Schwarz criterion		0.790515
Log likelihood	-3.551531	F-statistic		24.06031
Durbin-Watson stat	1.407891	Prob(F-statistic)		0.000232

$$|\hat{u}_i| = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{Y_i} + v_i$$

Dependent Variable: ABS(RESIDUOS)				
Method: Least Squares				
Date: 02/17/03 Time: 12:17				
Sample: 1 16				
Included observations: 16				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INVINGRESO	-51.88372	19.91511	-2.605244	0.0208
C	1.361277	0.280153	4.859050	0.0003
R-squared	0.326512	Mean dependent var		0.689198
Adjusted R-squared	0.278405	S.D. dependent var		0.514458
S.E. of regression	0.437015	Akaike info criterion		1.298771
Sum squared resid	2.673753	Schwarz criterion		1.395345
Log likelihood	-8.390170	F-statistic		6.787298
Durbin-Watson stat	0.875633	Prob(F-statistic)		0.020764

En todas las regresiones la pendiente es estadísticamente significativa, siendo el mas significativo, el coeficiente pendiente de la regresión:  $\hat{u}_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i^2 + \nu_i$ , ( $t = 4,9051$ ). En consecuencia, de acuerdo con el criterio de Glejser, diremos que estamos ante un problema de heterocedasticidad. Dado que este método constituye

ademáaas una solución empírica al problema, retomaremos este resultado al final del ejercicio con el objeto de transformar el modelo original.

#### d) Contraste de White

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	11.08165	Probability	0.001553
Obs*R-squared	10.08474	Probability	0.006458

Test Equation:  
 Dependent Variable: RESID^2  
 Method: Least Squares  
 Date: 02/17/03 Time: 15:58  
 Sample: 1 16  
 Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.950198	1.639455	1.799499	0.0952
INGRESO	-0.087493	0.040566	-2.156783	0.0503
INGRESO^2	0.000625	0.000229	2.734673	0.0170
R-squared	0.630296	Mean dependent var		0.723120
Adjusted R-squared	0.573419	S.D. dependent var		1.100149
S.E. of regression	0.718542	Akaike info criterion		2.344177
Sum squared resid	6.711942	Schwarz criterion		2.489037
Log likelihood	-15.75341	F-statistic		11.08165
Durbin-Watson stat	1.253025	Prob(F-statistic)		0.001553

Como se puede observar el estadístico F es significativo a 0,1% por lo que se rechaza la hipótesis nula de la presencia de homocedasticidad en el modelo y aceptando la alternativa, lo que nos lleva a concluir que ha presencia de heterocedasticidad en el modelo.

En todas las pruebas realizadas hemos llegado a la misma conclusión: el modelo presenta un problema de heterocedasticidad. Dado que la resolución del mismo requiere la adopción de algún supuesto inicial acerca del esquema de comportamiento de la varianza del término aleatorio, y de los contrastes realizados alguno de ellos cumple la doble función de detección y propuesta de una solución empírica al problema. Según vimos en la prueba de glejser, el modelo cuya pendiente era mas significativa era:  $|\hat{u}_i| = \beta_0 + \beta_1 Y_i^2 + \nu_i$ , lo que sugiere que el esquema según el cual se genere la varianza del término aleatorio:

$$E(u_i^2) = \sigma^2 Y_i^4$$

siendo,

$$\frac{S_i}{Y_i^2} = \beta_0 \frac{1}{Y_i^2} + \beta_1 \frac{1}{Y_i} + \frac{u_i}{Y_i^2}$$

la transformación a realizar, dado que

$$E\left(\frac{u_i}{Y_i^2}\right)^2 = \frac{1}{[E(Y_i^2)]^2} E(u_i^2) = \frac{1}{Y_i^4} E(u_i^2) = \sigma^2$$

el nuevo término aleatorio sí es Homocedástico.

Dependent Variable: AHORROT  
Method: Least Squares  
Date: 02/17/03 Time: 17:19  
Sample: 1 16  
Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INVINGRESO2	-3.293606	0.233400	-14.11144	0.0000
INVINGRESO	0.402478	0.004400	91.48009	0.0000
R-squared	0.997761	Mean dependent var		0.004566
Adjusted R-squared	0.997601	S.D. dependent var		0.001681
S.E. of regression	8.23E-05	Akaike info criterion		-15.85474
Sum squared resid	9.49E-08	Schwarz criterion		-15.75816
Log likelihood	128.8379	F-statistic		6237.767
Durbin-Watson stat	1.330728	Prob(F-statistic)		0.000000

donde:

$$AHORROT = \frac{S_I}{Y_I^2}$$

$$INVINGRESO2 = \frac{1}{Y_I^2}$$

$$INVINGRESO = \frac{1}{Y_I}$$

utilizando el contraste de White, podemos ver que en el modelo resultante no hay evidencia de la presencia de multicolinealidad.

White Heteroskedasticity Test:

F-statistic	0.501332	Probability	0.688414
Obs*R-squared	1.781985	Probability	0.618863

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Date: 02/17/03 Time: 17:25

Sample: 1 16

Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	4.43E-08	3.67E-08	1.207803	0.2504
INVINGRESO2	0.000374	0.000366	1.050425	0.3142
INVINGRESO2^2	-0.225708	0.209801	-1.075823	0.3032
INVINGRESO	-7.45E-06	7.12E-06	-1.046409	0.3160
R-squared	0.111374	Mean dependent var	5.93E-09	
Adjusted R-squared	-0.110782	S.D. dependent var	6.81E-09	
S.E. of regression	7.17E-09	Akaike info criterion	-34.45573	
Sum squared resid	6.17E-16	Schwarz criterion	-34.26259	
Log likelihood	279.6459	F-statistic	0.501332	
Durbin-Watson stat	1.411998	Prob(F-statistic)	0.688414	

## 5. ESTIMACION POR MINIMOS CUADRADOS GENERALIZADOS (MCG) y MINIMOS CUADRADOS PONDERADOS (MCP)

Uno de los supuestos del modelo clásico es el de “perturbaciones esféricas”, término con el cual se engloba los supuestos de homocedasticidad y la de ausencia de correlación serial (autocorrelación). Como nos indica el teorema de Gauss-Markov, dado el cumplimiento de los supuestos la estimación mínimo cuadrática me garantiza Los Mejores Estimadores Linealmente Insesgados. (MELI). ¿Qué sucede cuando uno de estos supuestos se abandona?.. Como se mencionó anteriormente los estimadores mínimos cuadráticos dejan de ser eficientes. Por lo tanto se hace necesario buscar una metodología de estimación de los coeficientes, que contemple en no cumplimientos del supuesto de perturbaciones esféricas. *Los estimadores mínimos cuadráticos generalizados (MCG) o estimadores Aitken*, son los mejores los mejores estimadores linealmente insesgados del modelo de regresión cuando se considera la existencia de heterocedasticidad o correlación serial<sup>41</sup>.

Para permitir la presencia tanto de heterocedasticidad como de correlación serial, se plantea que:

$$Cov(u) = E(uu') = \sigma^2 \Omega \quad (1)$$

<sup>41</sup> El tema de correlación serial se desarrolla en el siguiente capítulo.

donde  $\Omega$  es una matriz simétrica positiva definida, de orden  $n$  y  $\sigma^2$  es un parámetro conocido. Este caso se reduce a perturbaciones esféricas si  $\Omega$  es la matriz identidad  $E(uu') = \sigma^2 I$  pero, de modo más general considera perturbaciones no esféricas.

Cuando  $\Omega$  es conocida existe un estimador de  $\beta$  con las mismas propiedades que el estimador mínimo cuadrático bajo los supuestos clásicos. Para encontrar dicho estimador, hay que tener en cuenta que como  $\Omega$  es definida positiva, su inversa  $\Omega^{-1}$  también lo es y, por lo tanto, se puede calcular a partir de  $\Omega$  una matriz  $P$  tal que  $\Omega^{-1} = P'P$ .

Cuando los elementos de  $\Omega$  en (1) son números conocidos, la matriz  $P$  puede calcularse de acuerdo con que  $\Omega^{-1} = P'P$  y utilizarse para transformar el modelo clásico:  $Y = X\beta + u$ , de la siguiente manera:

$$(PY) = (PX)\beta + (PU),$$

O bien:

$$\ddot{Y} = \ddot{X}\beta + \ddot{U} \quad (2)$$

Donde

$$\ddot{Y} \equiv PY, \quad \ddot{X} \equiv PX, \quad \ddot{U} \equiv PU$$

$$\text{Con: } E(\ddot{U}) = 0 \text{ y}$$

$$\text{Var}(\ddot{U}) = E(\ddot{U}\ddot{U}') = PE(UU')P' = \sigma^2 P\Omega P' = \sigma^2 P(P'P)^{-1}P = \sigma^2 I$$

Lo que implica que las perturbaciones en el modelo transformado son esféricas, además, como el vector de parámetros definido en (2) es el mismo que en el modelo original, toda la inferencia sobre  $\beta$  en dicho modelo se puede llevar a cabo aplicando MCO a la ecuación (2).

En concreto el estimador MCO de  $\beta$  en  $\ddot{Y} = \ddot{X}\beta + \ddot{U}$  es:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_Y &= (\ddot{X}'\ddot{X})^{-1} \ddot{X}'\ddot{Y} = (X'P'PX)^{-1} X'P'PY \\ &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X'\Omega^{-1}Y \end{aligned}$$

y cuya matriz de varianzas es:

$$\text{Var}(\ddot{\beta}_Y) = \sigma^2 (X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

Debido a que, en la práctica, la matriz de covarianzas  $\Omega$  en general es desconocida y no observable, para emplear el estimador MCO es necesario construir una matriz de covarianzas adecuada. En el caso de Heterocedasticidad, la matriz de covarianzas es de la forma:

$$\text{cov}(u) = \sigma^2 \Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Donde  $\sigma^2$  es la varianza de i-ésimo término de perturbación estocástica,  $i=1,2,\dots,n$ . Entonces, la inversa usada en el estimador MCG es:

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz cuyos elementos diagonales son los recíprocos de las varianzas correspondientes de los términos de perturbación estocástica. Esta es la matriz inversa que en teoría, debe ser empleada en el estimador MCG para el caso de heterocedasticidad. Si las  $n$  varianzas están dadas, este estimador puede ser calculado.

Desde otro punto de vista:

$$\Omega^{-1} = P'P \quad \text{donde} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}$$

La matriz  $\mathbf{P}$  es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal son los recíprocos de las desviaciones estándar correspondientes de los términos de perturbación, por lo tanto se puede deducir que tanto la variable dependiente como las variables explicativas son ponderadas en cada observación por el recíproco de la desviación estándar de la variable dependiente (o término de perturbación estocástica) en esa observación. Así, en este caso, la estimación MCG puede interpretarse como



una estimación MCO para la cual los datos son reemplazados por los datos transformados:

$$PY = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\sigma_1} \\ \frac{y_2}{\sigma_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{y_n}{\sigma_n} \end{pmatrix} \quad y \quad PX = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sigma_1} \\ \frac{x_2}{\sigma_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{x_n}{\sigma_n} \end{pmatrix}$$

Respectivamente. Si la desviación estándar en cada observación  $\sigma_i$  puede suponerse proporcional a una de las variables explicativas, por ejemplo  $X_1$ , entonces la transformación que requiere MCG puede ser ejecutada empleando cocientes de variables adecuadas. Como se puede deducir, de lo que se trata es de ponderar a cada una de las variables mediante un valor proximo de la desviación estándar. Por estos motivos, el estimador MCG aplicado a un modelo con perturbaciones heterocedásticas suele denominarse *estimador de mínimo cuadrados ponderados (MCP)*

### EJERCICIO N° 23

Ante la próxima reunión de la Comisión de la Unión Europea<sup>42</sup> sobre la concesión de subvenciones para la explotación agraria dedicadas a verduras y hortalizas, el Ministerio de Agricultura, Pesca y alimentación ha decidido establecer una función lineal que explique la producción en función de la superficie cultivada. Para ello dispone de la información del año 1993, referidas a las variables:

Y: Producción de verduras y hortalizas medidas en Qm  
X: Superficie cultivada medida en hectáreas.

<sup>42</sup> Tomado de: Pena Trampero, J. Bernardo, Ob.Cit. p.277

OBSERVACIONES	Y	X
Pimiento	7.338	25.243
Acelga	702	3.283
Ajo	2.063	30.548
Alcahofa	3.341	23.556
Batata	329	1.779
Berenjenas	1.367	4.208
Calabaza y calabacín	2.430	6.739
Cardo	270	1.050
Coliflor	2.747	13.903
Escarola	535	2.504
Guisantes verdes	567	10.398
Habas verdes	890	12.393
Judías verdes	2.473	25.526
Lechuga	9.535	33.797
Melón	8.528	50.514
Pepino	3.357	7.083
Sandía	6.046	23.217

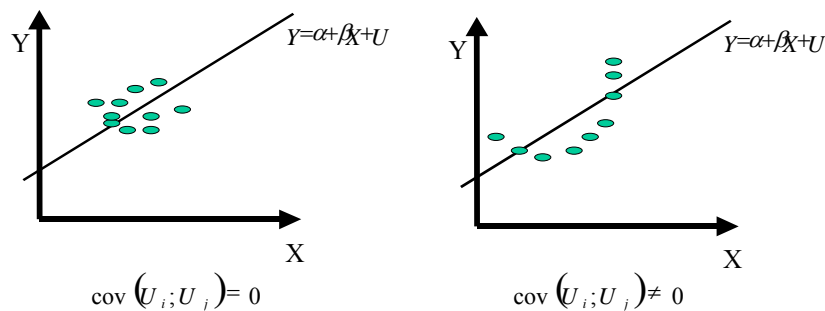
Analice la posible presencia de heterocedasticidad en el modelo, utilizando:

- a) Análisis gráfico
- b) La Prueba de Glejser.
- c) El Contraste de White.

## CAPITULO VIII

### AUTOCORRELACIÓN

#### 1. DEFINICION



Uno de los supuestos del modelo clásico nos indica que:  $\text{cov}(u_i; u_j) = 0$  que nos indica que la covarianza entre las perturbaciones de un modelo debe ser igual a cero, más concretamente el supuesto indica que no debe existir ninguna relación entre dos o más observaciones diferentes de la variable estocástica. Si este supuesto no se cumple, se dice que el modelo presenta problemas de autocorrelación o correlación serial.

Por lo tanto el término autocorrelación se puede definir como la correlación existente en el término de perturbación ( $u$ ).

De manera simplificada se puede decir que un modelo presenta problemas de autocorrelación cuando el término de perturbación (la variable aleatoria) está absorbiendo algún elemento que es importante para explicar el comportamiento de la variable dependiente, que no está planteado en forma explícita en el modelo.

Son causas de autocorrelación:

- a) Problemas en la especificación del modelo, que pueden ser de 2 tipos: forma funcional incorrecta y omisión de variables.

En el primer caso se dice que un modelo está mal especificado cuando no tiene la forma funcional correcta, por ejemplo, la teoría de costos nos indica que la curva de costo medio está representada por una función cuadrática.

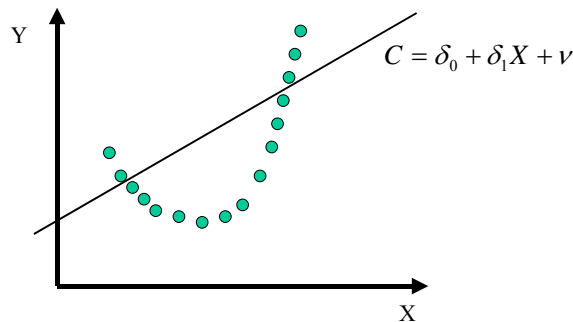
$$C = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + u$$

pero se ajusta de la siguiente forma:

$$C = \delta_0 + \delta_1 X + \nu$$

Si la primera ecuación es la correcta, la segunda debe presentar problemas de autocorrelación ya que como se puede observar esta no contempla el efecto cuadrático que debe tener la curva y por lo tanto, el mismo es absorbido por la variable estocástica  $\nu$ ,

$$\nu = \beta_2 X^2 + u$$



En segundo lugar, un modelo está mal especificado cuando se omite una variable explicativa en el modelo que es importante para explicar las variaciones de la variable dependiente.

Por ejemplo, si tenemos una función en que la demanda de un bien está explicada por el precio del bien y por el ingreso familiar:

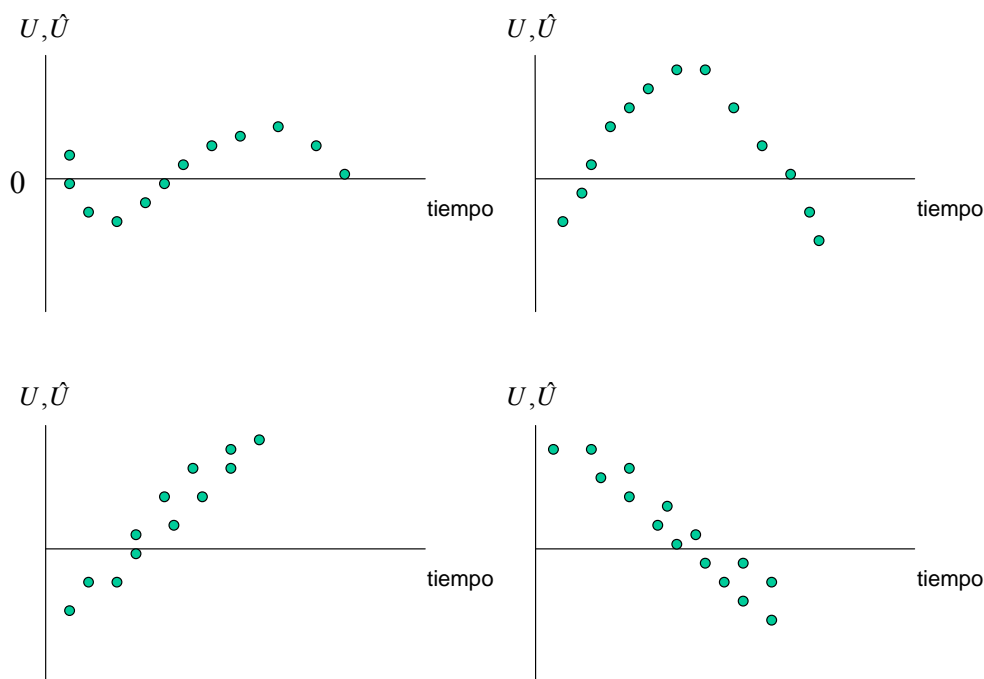
$$C = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 Y + u$$

pero se ajusta un modelo en el cual el consumo está en función únicamente del ingreso:

$$C = \alpha_0 + \alpha_1 Y + \nu$$

si el primer modelo es el correcto, posiblemente el segundo modelo experimente problemas de autocorrelación, ya que el término de perturbación absorberá a la variable precio.

$$\nu = \beta_1 P + u$$



Patrones de autocorrelación

b) Una característica relevante de todas las series de tiempo de variable económicas, es la inercia. Como se sabe toda variable económica (PIB, empleo, precios, etc.) presenta un comportamiento cíclico (ciclos económicos). Empezando en el fondo de la recesión, cuando se inicia la recuperación económica, la mayoría de estas series empieza a moverse hacia arriba. En este movimiento hacia arriba, el valor de una serie en un punto del tiempo es mayor que su valor anterior, Así hay un “momentum” construido en ellas y éste continuará hasta que algo suceda (por ejemplo, un aumento de la tasa de interés o en los impuestos o ambos) para reducirlo. Por consiguiente, en las regresiones que consideran datos de series de tiempo, es probable que las observaciones sucesivas sean interdependientes.

## 2. COMO DETECTAR LA AUTOCORRELACION

En este punto nos centraremos a tratar de detectar la autocorrelación de primer orden. Es decir, si suponemos que hay presencia de autocorrelación en el modelo, esta está generada de la siguiente forma:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

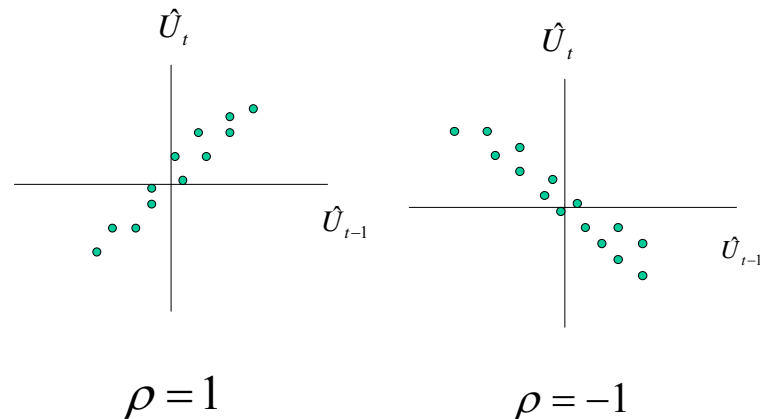
Este modelo es conocido como *esquema autorregresivo de primer orden*. Autorregresivo por que la variable dependiente aparece como variable explicativa, pero rezagada en el tiempo, y de primer orden, por que el rezago es de solo un periodo.

$\rho$  es el coeficiente de autocorrelación, el cual está comprendido en el intervalo cerrado  $[-1,1]$ , y el mismo indica al grado de correlación existente entre la perturbación de un periodo y la perturbación del periodo anterior.

Si  $\rho = -1$ , hay perfecta autocorrelación negativa.

Si  $\rho = 0$ , no hay autocorrelación.

Si  $\rho = 1$ , hay perfecta autocorrelación positiva



Para detectar autocorrelaciones de primer orden utilizaremos el estadístico de Durbin – Watson, el cual se basa en los siguientes supuestos:

- El modelo de regresión incluye el término de intercepto.
- Las variables explicativas,  $X$ , son no estocástica, es decir, son fijas en muestreo repetido.
- Las perturbaciones  $u_t$  se generan mediante un esquema autorregresivo de primer orden.
- El modelo no incluye valor(es) rezagado(s) de la variable dependiente como una de las variables explicativas. Por tanto, la prueba es inaplicable a modelos del siguiente tipo:  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$  donde  $Y_{t-1}$  es el valor de  $Y$  rezagado un periodo. Tales modelos son conocidos como *modelos autorregresivos*.
- No hay observaciones faltantes en los datos.

La prueba del Durbin – Watson es similar en su tratamiento a las pruebas T y F. Es decir calcularemos un estadístico, el cual posteriormente compararemos con unos valores dados por una tabla a fin de aceptar una hipótesis.

El estadístico calculado se define como la razón de la suma de diferencias al cuadrado de residuales sucesivos entre la suma de los cuadrados de los residuales, y es igual a:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2}$$

obsérvese que el numerador la sumatoria se realiza a partir de la segunda observación, ya que una observación se pierde al realizar las diferencias consecutivas. La primera observación no tiene ninguna observación anterior con que realizar la diferencia.

Manipulando un poco la ecuación podemos encontrar una ecuación que nos relacione el estadístico Durbin – Watson con el coeficiente de autocorrelación:

$$d = \frac{\sum (\hat{u}_t^2 - 2\hat{u}_t\hat{u}_{t-1} + \hat{u}_{t-1}^2)}{\sum \hat{u}_t^2}$$

$$d = \frac{\sum \hat{u}_t^2 - 2\sum \hat{u}_t\hat{u}_{t-1} + \sum \hat{u}_{t-1}^2}{\sum \hat{u}_t^2}$$

donde se utilizó el supuesto de que  $\sum \hat{u}_t^2 = \sum \hat{u}_{t-1}^2$ , dado que ambos difieren solamente en una observación, se puede considerar que en muestras grandes son aproximadamente iguales.

$$d = \frac{2\sum \hat{u}_t^2 - 2\sum \hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2} = 2 \left( 1 - \frac{\sum \hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2} \right)$$

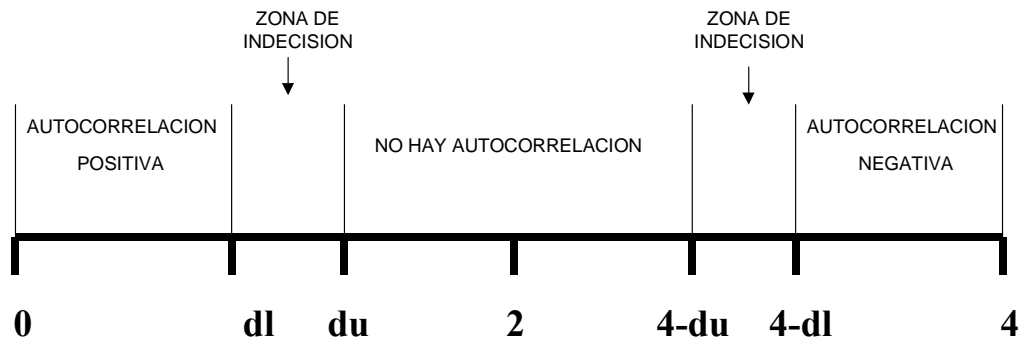
$$\text{si definimos que } \rho = \frac{\sum \hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

tenemos que  $d = 2(1 - \rho)$

La anterior identidad nos da una aproximación de los valores que puede tomar el estadístico Durbin – Watson.

Si $\rho = -1$	$d = 4$
Si $\rho = 0$	$d = 2$
Si $\rho = 1$	$d = 0$

El cuadro nos indica que el estadístico de Durbin - Watson siempre será un valor positivo y menor o igual que cuatro, pero en el mismo solo se presentan las casos extremos de perfecta autocorrelación positiva y negativa, y el caso de que no haya autocorrelación, pero generalmente el estadístico tendrá un valor comprendido entre estos valores extremos, como podría ser por ejemplo:  $d = 1,34$ . Para poder decidir sobre la existencia o no de autocorrelación dado un valor del Durbin – Watson, utilizaremos como herramienta complementaria, el gráfico del Durbin – Watson:



### LIMITES DEL ESTADISTICO DURBIN - WATSON

Dependiendo de la ubicación del estadístico calculado en el gráfico, podremos decidir sobre la existencia o no de autocorrelación en base a la siguiente regla:



VALOR DEL DURBIN - WATSON	RESULTADO
$0 \leq d < dl$	Se acepta la presencia de autocorrelación positiva.
$dl < d < du$	Resultado indeterminado.
$du < d < 4 - du$	No hay autocorrelación.
$4 - du < d < 4 - dl$	Resultado indeterminado.
$4 - dl < d \leq 4$	Se acepta la presencia de autocorrelación negativa.

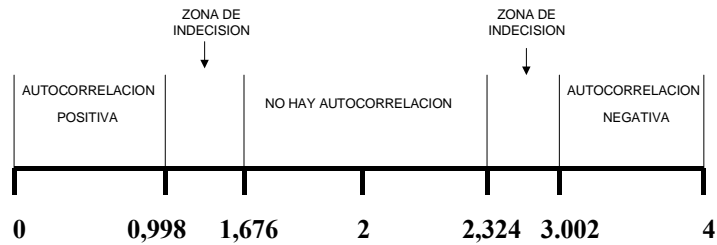
Los valores de los límites  $dl$  y  $du$  son determinados a través de la tabla del estadístico Durbin – Watson:

Por ejemplo para un modelo con 3 variables explicativas y 20 observaciones, los valores de  $dl$  y  $du$  son:

**Estadístico  $d$  de Durbin-Watson: puntos de significancia de  $dl$  y  $du$  al nivel de significancia del 5%**

	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
⋮										
<b>17</b>	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104
<b>18</b>	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060
<b>19</b>	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023
<b>20</b>	1.201	1.411	1.100	1.537	<b>0.998</b>	<b>1.676</b>	0.894	1.828	0.792	1.991
<b>21</b>	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964
<b>22</b>	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940
<b>23</b>	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920
⋮										

Con lo cual el gráfico quedaría de la siguiente forma:



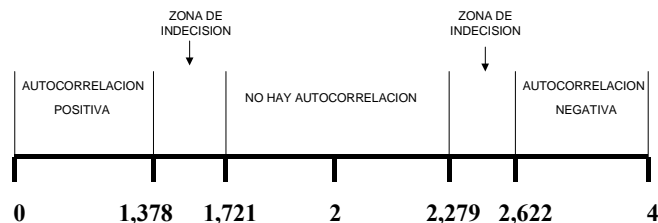
LIMITES DEL ESTADISTICO DURBIN - WATSON

## EJERCICIO N° 24

Dada una muestra de 50 observaciones y de 4 variables explicativas, que puede usted decir sobre autocorrelación si (a)  $d = 1,05$ ? (b)  $d = 1,40$ ? (c)  $d = 2,50$ ? (d)  $d = 3,97$ ?<sup>43</sup>

Estadístico d de Durbin-Watson: puntos de significancia de dl y du al nivel de significancia del 5%

	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
...										
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	<b>1.378</b>	<b>1.721</b>	1.335	1.771
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767
...										



LIMITES DEL ESTADISTICO DURBIN - WATSON

a)  $d = 1,05$   $0 < 1,05 < 1,378$  hay presencia de autocorrelación positiva.

<sup>43</sup> Tomado de Gujarati. Ob cit.

- b)  $d = 1,40$   $1,378 < 1,40 < 1,721$ , no se puede decidir sobre la presencia o no de autocorrelación.
- c)  $d = 2,50$   $2,279 < 2,50 < 2,622$ , no se puede decidir sobre la presencia o no de autocorrelación.
- d)  $d = 3,97$   $2,262 < 3,97 < 4$ , hay presencia de autocorrelación negativa.

### EJERCICIO N° 25

Sea el modelo:  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$  donde Y denota el número de transacciones comerciales que se realizan en una determinada unidad económica, y X el Producto Nacional Bruto (PNB), se requiere detectar la presencia o no de autocorrelación en el modelo, utilizando el estadístico Durbin – Watson.

AÑO	Y	X
1960	699	776
1961	730	811
1962	763	791
1963	749	825
1964	766	986
1965	858	1206
1966	438	1321
1967	1021	1495
1968	1084	1846
1969	1161	2140
1970	1257	2356
1971	1314	2694
1972	1385	3227
1973	1490	4006
1974	1580	4960
1975	1652	5940
1976	1778	6941

Respuesta:

Primeramente regresamos el modelo, para poder obtener los valores de los residuales recordando que un residual es igual a la diferencia existente entre el valor de Y observado y el valor de Y estimado:  $\hat{U}_t = Y_t - \hat{Y}_t$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

$$\beta_1 > 0$$

$$Y_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t + \hat{u}_t$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum XY - N\bar{X}\bar{Y}}{\sum X^2 - N\bar{X}^2} = \frac{57.667.054 - 17(2.489,47)(1.101,47)}{164.292.835 - 17(2.489,47)^2} = \frac{11.051.753,14}{58.936.000} = 0,188$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X} = 1.101,47 - 0,188(2489,47) = 633,45$$

$$\hat{Y}_T = 633,45 + 0,188X_T$$

	AÑO	Y	X	XY	X <sup>2</sup>
1	1960	699.00	776.00	542,424.00	602,176.00
2	1961	730.00	811.00	592,030.00	657,721.00
3	1962	763.00	791.00	603,533.00	625,681.00
4	1963	749.00	825.00	617,925.00	680,625.00
5	1964	766.00	986.00	755,276.00	972,196.00
6	1965	858.00	1,206.00	1,034,748.00	1,454,436.00
7	1966	438.00	1,321.00	578,598.00	1,745,041.00
8	1967	1,021.00	1,495.00	1,526,395.00	2,235,025.00
9	1968	1,084.00	1,846.00	2,001,064.00	3,407,716.00
10	1969	1,161.00	2,140.00	2,484,540.00	4,579,600.00
11	1970	1,257.00	2,356.00	2,961,492.00	5,550,736.00
12	1971	1,314.00	2,694.00	3,539,916.00	7,257,636.00
13	1972	1,385.00	3,227.00	4,469,395.00	10,413,529.00
14	1973	1,490.00	4,006.00	5,968,940.00	16,048,036.00
15	1974	1,580.00	4,960.00	7,836,800.00	24,601,600.00
16	1975	1,652.00	5,940.00	9,812,880.00	35,283,600.00
17	1976	1,778.00	6,941.00	12,341,098.00	48,177,481.00
		18,725.00	42,321.00	57,667,054.00	164,292,835.00

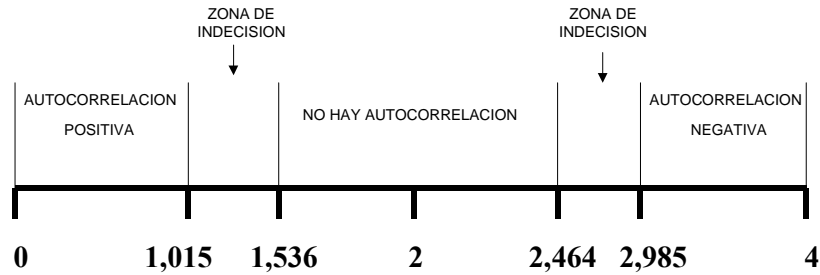
AÑO	Y	$\hat{Y}$	$\hat{U}_t$	$\hat{U}_t - \hat{U}_{t-1}$	$(\hat{U}_t - \hat{U}_{t-1})^2$	$\hat{U}_t^2$
1960	699.00	779.34	-80.34			6,454.19
1961	730.00	785.92	-55.92	24.42	596.34	3,126.82
1962	763.00	782.16	-19.16	36.76	1,351.30	367.03
1963	749.00	788.55	-39.55	-20.39	415.83	1,564.20
1964	766.00	818.82	-52.82	-13.27	176.04	2,789.74
1965	858.00	860.18	-2.18	50.64	2,564.41	4.74
1966	438.00	881.80	-443.80	-441.62	195,028.22	196,956.66
1967	1,021.00	914.51	106.49	550.29	302,816.88	11,340.12
1968	1,084.00	980.50	103.50	-2.99	8.93	10,712.66
1969	1,161.00	1,035.77	125.23	21.73	472.11	15,682.55
1970	1,257.00	1,076.38	180.62	55.39	3,068.27	32,624.31
1971	1,314.00	1,139.92	174.08	-6.54	42.82	30,303.15
1972	1,385.00	1,240.13	144.87	-29.20	852.87	20,988.48
1973	1,490.00	1,386.58	103.42	-41.45	1,718.27	10,696.11
1974	1,580.00	1,565.93	14.07	-89.35	7,983.78	197.96
1975	1,652.00	1,750.17	-98.17	-112.24	12,597.82	9,637.35
1976	1,778.00	1,938.36	-160.36	-62.19	3,867.35	25,714.69
	18,725.00		0.00		533,561.24	379,160.78

Después de haber obtenido los residuales procedemos a calcular el estadístico Durbin – Watson, para posteriormente ubicarlo en el gráfico.

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2} = \frac{533.561,24}{379.160,78} = 1,407$$

**Estadístico d de Durbin-Watson: puntos de significancia de dl y du al nivel de significancia del 5%**

	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
⋮										
<b>14</b>	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296
<b>15</b>	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220
<b>16</b>	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157
<b>17</b>	1.133	1.381	<b>1.015</b>	<b>1.536</b>	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104
<b>18</b>	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060
<b>19</b>	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023
⋮										



1,015 < 1,407 < 1,536, el estadístico cae en una zona de indecisión, por lo tanto no se puede concluir nada sobre la existencia o no de autocorrelación en el modelo.

### 3. COMO SOLUCIONAR EL PROBLEMA DE AUTOCORRELACION

Dado el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \quad (1)$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde  $\rho$  = coeficiente de autocorrelación y  $\varepsilon_t$  es un término de perturbación estocástica que cumple con todos los supuestos.

Lo anterior nos indica que en el modelo hay presencia de autocorrelación de primer orden generado bajo un esquema autorregresivo de primer orden. Para solucionar este problema lo que se hace es transformar el modelo de tal manera que el término de perturbación quede libre del problema.

Transformación:

Sí la igualdad presentada en (1) es cierta, también es cierta en el período t-1, por tanto podemos rezagar todo el modelo en un período:

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + u_{t-1} \quad (2)$$

Multiplicando (2) por  $\rho$  a ambos lados de la igualdad, se obtiene:

$$\rho Y_{t-1} = \rho \beta_0 + \rho \beta_1 X_{t-1} + \rho u_{t-1} \quad (3)$$

restando (3) de (1):

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0 - \rho \beta_0 + \beta_1 X_t - \rho \beta_1 X_{t-1} + u_t - \rho u_{t-1}$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1 - \rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + u_t - \rho u_{t-1}$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1 - \rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

donde en el último paso se utilizó el supuesto del esquema autorregresivo de primer orden.

El modelo resultante se conoce como *modelo de diferencias generalizadas*, en el cual se hace necesario conocer el verdadero valor del coeficiente de autocorrelación. Conocer este coeficiente en la práctica se hace muy difícil, por lo cual normalmente la que se hace es buscar un valor estimado del mismo, con lo cual el modelo quedaría de la siguiente forma:

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \beta_0(1 - \hat{\rho}) + \beta_1(X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Para estimar el valor de  $\rho$  se pueden utilizar varias metodologías, entre las cuales podemos mencionar:

- a)  $\rho$  basado en el estadístico de Durbin – Watson, para muestras grandes.

$$d = 2(1 - \rho)$$

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{d}{2}$$

- b) Estimación del  $\rho$  de Theil–Nagar basado en el estadístico d, para muestras pequeñas:

$$\hat{\rho} = \frac{n^2 \left(1 - \frac{d}{2}\right) + k^2}{n^2 - k^2}$$

donde n = número total de observaciones, k = Número de coeficientes betas y d = estadístico Durbin-Watson.

- c) Procedimiento en dos etapas de Cochrane – Orcutt.

c.1) Primero se estima el modelo original para obtener los residuales.

c.2) Obtenidos los residuales se procede a estimar  $\rho$  mediante la siguiente igualdad:

$$\text{si } \hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

En todos los casos mencionados anteriormente se utiliza el valor estimado de  $\rho$  para realizar la regresión del modelo de diferencias generalizadas

### EJERCICIO Nº 26

En la siguiente tabla tenemos los datos sobre importaciones (Y) y el Producto Interno Bruto (X) para un determinado país.

AÑO	Y	X
1970	8.5324	23.5138
1971	8.9014	24.2506
1972	8.4803	24.1241
1973	8.8930	25.2862
1974	9.1000	26.2759
1975	9.6888	27.0954
1976	9.7070	27.5747
1977	9.8690	28.1368
1978	9.9479	28.2368
1979	10.3831	29.3655
1980	11.2380	30.8207
1981	11.1803	31.9207
1982	11.3324	32.3333
1983	11.6282	33.7559
1984	12.4099	35.6920
1985	12.4775	36.5885
1986	12.6901	37.2184
1987	13.2535	38.0230
1988	13.9578	39.2874
1989	14.6620	40.0920



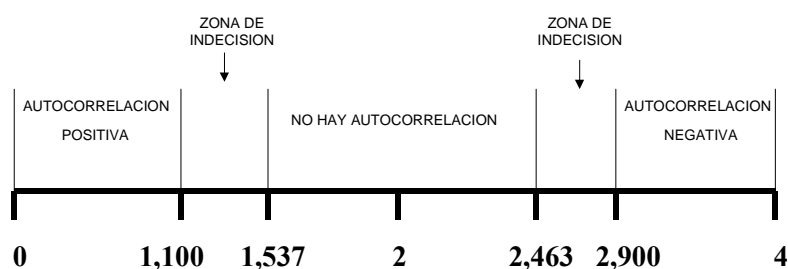
	AÑO	Y	X	XY	$X^2$	$\hat{Y}$	$\hat{U}_t$	$\hat{U}_t - \hat{U}_{t-1}$	$(\hat{U}_t - \hat{U}_{t-1})^2$	$\hat{U}_t^2$
1	1970	8.5324	23.5138	200.6289	552.8983	8.3617	0.1707			0.0292
2	1971	8.9014	24.2506	215.8642	588.0901	8.6138	0.2876	0.1169	0.0137	0.0827
3	1972	8.4803	24.1241	204.5795	581.9741	8.5705	-0.0902	-0.3779	0.1428	0.0081
4	1973	8.8930	25.2862	224.8692	639.3924	8.9682	-0.0753	0.0150	0.0002	0.0057
5	1974	9.1000	26.2759	239.1103	690.4208	9.3069	-0.2069	-0.1316	0.0173	0.0428
6	1975	9.6888	27.0954	262.5212	734.1607	9.5874	0.1014	0.3083	0.0951	0.0103
7	1976	9.7070	27.5747	267.6689	760.3646	9.7514	-0.0444	-0.1458	0.0212	0.0020
8	1977	9.8690	28.1368	277.6823	791.6784	9.9438	-0.0747	-0.0304	0.0009	0.0056
9	1978	9.9479	28.2368	280.8963	797.3157	9.9780	-0.0301	0.0446	0.0020	0.0009
10	1979	10.3831	29.3655	304.9051	862.3338	10.3643	0.0188	0.0489	0.0024	0.0004
11	1980	11.2380	30.8207	346.3638	949.9149	10.8622	0.3758	0.3569	0.1274	0.1412
12	1981	11.1803	31.9207	356.8823	1,018.9305	11.2387	-0.0584	-0.4342	0.1885	0.0034
13	1982	11.3324	32.3333	366.4140	1,045.4449	11.3799	-0.0475	0.0109	0.0001	0.0023
14	1983	11.6282	33.7559	392.5189	1,139.4581	11.8667	-0.2386	-0.1910	0.0365	0.0569
15	1984	12.4099	35.6920	442.9322	1,273.9160	12.5293	-0.1194	0.1191	0.0142	0.0143
16	1985	12.4775	36.5885	456.5317	1,338.7191	12.8361	-0.3587	-0.2392	0.0572	0.1286
17	1986	12.6901	37.2184	472.3066	1,385.2086	13.0517	-0.3615	-0.0029	0.0000	0.1307
18	1987	13.2535	38.0230	503.9385	1,445.7478	13.3270	-0.0735	0.2880	0.0830	0.0054
19	1988	13.9578	39.2874	548.3631	1,543.4967	13.7597	0.1980	0.2715	0.0737	0.0392
20	1989	14.6620	40.0920	587.8270	1,607.3645	14.0351	0.6269	0.4289	0.1839	0.3930
		218.3324	619.5915	6,952.8041	19,746.8299		0.0000		1.0602	1.1026

La regresión mínimo cuadrática dio como resultado:

$$\hat{Y}_t = 0,3147 + 0,3422 X_t$$

El estadístico Durbin-Watson es igual a:

$$d = \frac{1,0602}{1,1026} = 0,962$$



$0 < 0,962 < 1,100$  con lo cual se concluye que hay evidencia de autocorrelación positiva en el modelo.

Para eliminar el problema de autocorrelación, estimaremos el modelo de diferencias generalizadas:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_0(1 - \rho) + \beta_1(X_t - \rho X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

para lo cual tendremos que estimar el valor del coeficiente de autocorrelación, la cual se realizará a través de la identidad:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

$$\hat{\rho} = \frac{0,3614}{1,0735} = 0,337$$

	AÑO	$\hat{U}_t$	$\hat{U}_t \hat{U}_{t-1}$	$\hat{U}_t^2$
2	1971	0.2876	0.0491	0.0827
3	1972	-0.0902	-0.0260	0.0081
4	1973	-0.0753	0.0068	0.0057
5	1974	-0.2069	0.0156	0.0428
6	1975	0.1014	-0.0210	0.0103
7	1976	-0.0444	-0.0045	0.0020
8	1977	-0.0747	0.0033	0.0056
9	1978	-0.0301	0.0022	0.0009
10	1979	0.0188	-0.0006	0.0004
11	1980	0.3758	0.0071	0.1412
12	1981	-0.0584	-0.0220	0.0034
13	1982	-0.0475	0.0028	0.0023
14	1983	-0.2386	0.0113	0.0569
15	1984	-0.1194	0.0285	0.0143
16	1985	-0.3587	0.0428	0.1286
17	1986	-0.3615	0.1297	0.1307
18	1987	-0.0735	0.0266	0.0054
19	1988	0.1980	-0.0146	0.0392
20	1989	0.6269	0.1241	0.3930
			0.3614	1.0735

Es importante hacer notar como al estimar el valor de  $\rho$  se pierde una observación. Teniendo el valor estimado de  $\rho$ , se procede a estimar el modelo de diferencias generalizadas.

$$Y_t - 0,337Y_{t-1} = \beta_0(1 - 0,337) + \beta_1(X_t - 0,337X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

el cual regresado es igual a:

$$Y_t - 0,337Y_{t-1} = -0.0164 + 0,353(X_t - 0,337X_{t-1})$$

modelo este que no presenta problemas de autocorrelación.

	AÑO	Y	X	$Y_t - 0,337Y_{t-1}$	$X_t - 0,337X_{t-1}$	$X^*Y^*$	$X^{*2}$
0	1970	8.5324	23.5138				
1	1971	8.9014	24.2506	6.0260	16.3264	98.3829	266.5521
2	1972	8.4803	24.1241	5.4805	15.9517	87.4234	254.4567
3	1973	8.8930	25.2862	6.0351	17.1564	103.5405	294.3412
4	1974	9.1000	26.2759	6.1031	17.7544	108.3564	315.2190
5	1975	9.6888	27.0954	6.6221	18.2404	120.7895	332.7135
6	1976	9.7070	27.5747	6.4419	18.4436	118.8120	340.1649
7	1977	9.8690	28.1368	6.5977	18.8441	124.3285	355.1002
8	1978	9.9479	28.2368	6.6220	18.7547	124.1941	351.7382
9	1979	10.3831	29.3655	7.0307	19.8497	139.5567	394.0116
10	1980	11.2380	30.8207	7.7389	20.9245	161.9332	437.8351
11	1981	11.1803	31.9207	7.3931	21.5341	159.2031	463.7182
12	1982	11.3324	32.3333	7.5646	21.5761	163.2151	465.5267
13	1983	11.6282	33.7559	7.8092	22.8595	178.5136	522.5579
14	1984	12.4099	35.6920	8.4912	24.3162	206.4732	591.2793
15	1985	12.4775	36.5885	8.2953	24.5603	203.7361	603.2093
16	1986	12.6901	37.2184	8.4852	24.8881	211.1811	619.4156
17	1987	13.2535	38.0230	8.9769	25.4804	228.7360	649.2504
18	1988	13.9578	39.2874	9.4913	26.4736	251.2694	700.8522
19	1989	14.6620	40.0920	9.9582	26.8521	267.3989	721.0358
		218.3324	619.5915	141.1631	400.7864	3057.0438	8678.9778

### EJERCICIO N° 27

En el cuadro que se presenta a continuación<sup>44</sup> se muestran los datos referidos al número de transacciones comerciales que se realizan en una determinada unidad económica (Y), y el Producto Nacional Bruto (PNB) para el período 1960 -1976:

AÑO	N° DE TRANSACCIONES	PNB
1960	699	776
1961	730	811
1962	763	791
1963	749	825
1964	766	986
1965	858	1206
1966	438	1321
1967	1021	1495
1968	1084	1846
1969	1161	2140
1970	1257	2356
1971	1314	2694
1972	1385	3227
1973	1490	4006
1974	1580	4960
1975	1652	5940
1976	1778	6941

Considerando el modelo de regresión lineal simple como modelo teórico:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 PNB_t + u_t$$

Trataremos de detectar y en su caso corregir, un posible problema de Autocorrelación.

Para realizar el análisis de la posible existencia de autocorrelación en los residuos, es necesario estimar el modelo original

---

<sup>44</sup> Tomado de: Díaz Fernández, Monserrat y María del Mar Llorente Marrón. Ob.Cit. p.218

Dependent Variable: TRANSAC  
Method: Least Squares  
Date: 02/24/03 Time: 17:21  
Sample: 1960 1976  
Included observations: 17

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PNB	0.187521	0.020709	9.054851	0.0000
C	634.6430	64.38031	9.857720	0.0000
R-squared	0.845345	Mean dependent var	1101.471	
Adjusted R-squared	0.835035	S.D. dependent var	391.4376	
S.E. of regression	158.9858	Akaike info criterion	13.08564	
Sum squared resid	379147.2	Schwarz criterion	13.18366	
Log likelihood	-109.2279	F-statistic	81.99032	
Durbin-Watson stat	1.406670	Prob(F-statistic)	0.000000	

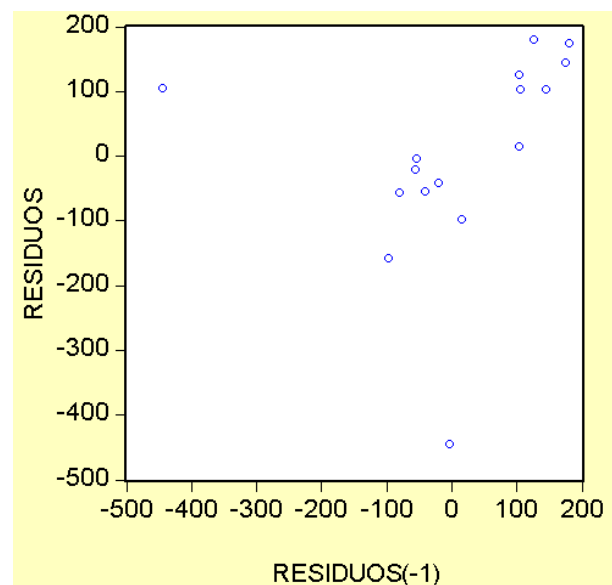
A partir de esta estimación, se genera la serie de mínimo cuadrados correspondientes

Instricciones: GENR RESIDUOS = RESID

a) Contrastes Gráficos

a.1) Diagrama de dispersión entre  $u_t$  y  $u_{t-1}$

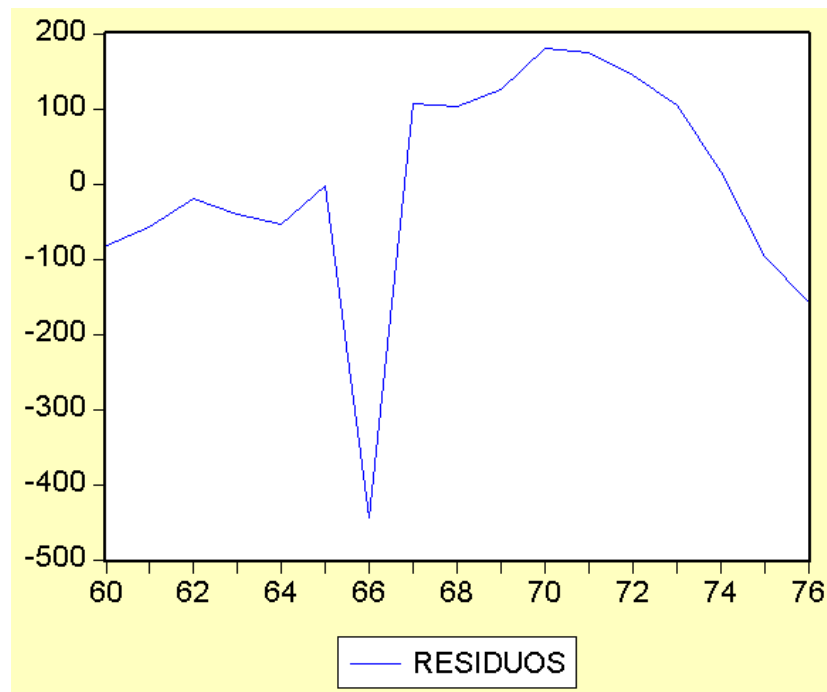
Instrucciones: QUICK/GRAPH/ SCATTER DIAGRAM/ RESIDUOS RESIDUOS(-1)



se puede observar que los puntos se colocan en el diagrama en su gran mayoría en el primer cuadrante, por lo que puede ser indicativo de ausencia de autocorrelación

a.2) Gráfico de los residuos en el tiempo.

Instrucciones: QUICK/GRAPH/LINE GRAPH/RESIDUOS



La representación gráfica de los residuos no presenta un comportamiento sistemático lo cual indica la posible ausencia de autocorrelación en el modelo.

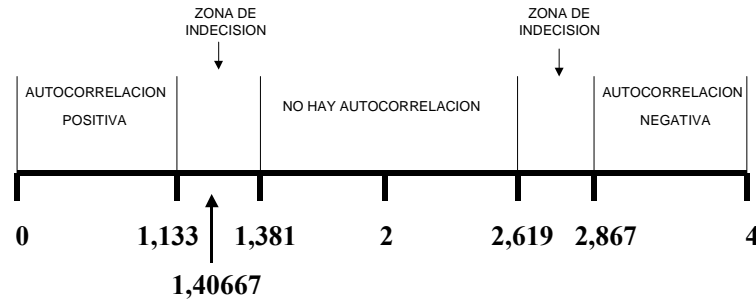
b) Contrate de Durbin – Watson

En la salida de regresión que ofrece el Eviews se puede encontrar el valor del estadístico de Durbin-Watson el cual es :  $d = 1,40667$

En las tablas podemos obtener los límites inferiores y superiores ( $d_l, d_u$ ), al 95% de confianza, con un tamaño de muestra igual a 17 y con  $k$  igual a 1:

Estadístico d de Durbin-Watson: puntos de significancia de dl y du al nivel de significancia del 5%

	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
...										
14	1,045	1,350	0,905	1,551	0,767	1,779	0,632	2,030	0,505	2,296
15	1,077	1,361	0,946	1,543	0,814	1,750	0,685	1,977	0,562	2,220
16	1,106	1,371	0,982	1,539	0,857	1,728	0,734	1,935	0,615	2,157
17	<b>1,133</b>	<b>1,381</b>	1,015	1,536	0,897	1,710	0,779	1,900	0,664	2,104
18	1,158	1,391	1,046	1,535	0,933	1,696	0,820	1,872	0,710	2,060
19	1,180	1,401	1,074	1,536	0,967	1,685	0,859	1,848	0,752	2,023
...										



dado que  $dl = 1,133 < d = 1,40667 < du = 1,381$  diremos que nos hemos situado en una zona de indecisión, en la que nada podemos decir acerca de la presencia o no de autocorrelación en el modelo.

- c) Por último dado que suponemos que el esquema de autocorrelación mediante el cual se genera la variable aleatoria es de primer orden, podemos contrastar la presencia de autocorrelación, analizando la significatividad estadística del parámetro  $\rho$  en la regresión.

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Dependent Variable: RESIDUOS  
Method: Least Squares  
Date: 02/24/03 Time: 18:16  
Sample(adjusted): 1961 1976  
Included observations: 16 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RESIDUOS(-1)	0.272989	0.255287	1.069339	0.3018
R-squared	0.069805	Mean dependent var		5.072450
Adjusted R-squared	0.069805	S.D. dependent var		157.5116
S.E. of regression	151.9147	Akaike info criterion		12.94498
Sum squared resid	346171.0	Schwarz criterion		12.99326
Log likelihood	-102.5598	Durbin-Watson stat		2.038688

El estadístico  $\hat{\rho}$  no es estadísticamente significativo a un 5%, evidenciando la ausencia de autocorrelación en el modelo.

### EJERCICIO Nº 28

Se ha recogido información<sup>45</sup> de la economía española para el período 1985-1997 de las macromagnitudes consumo público (CP) y producto interior bruto a precios de mercado (PIBPM), en millones de pesetas, con el objeto de estimar un modelo de regresión lineal y comprobar la posible presencia de autocorrelación en las perturbaciones, las series toman los siguientes valores:

AÑO	PIBPM	CP
1985	28.200.885	4.498.034
1986	32.323.992	4.740.221
1987	36.143.972	5.159.905
1988	40.158.739	5.368.137
1989	45.044.128	5.813.462
1990	50.145.195	6.197.776
1991	54.927.320	6.543.696
1992	59.104.986	6.808.095
1993	60.952.584	6.971.511
1994	64.811.535	6.948.140
1995	69.780.058	7.074.014
1996	73.743.261	7.141.101
1997	77.896.586	7.239.097

A partir de dicha información, contraste el posible incumplimiento de la hipótesis clásica de no autocorrelación. En caso de detectar dicho problema, trate de corregirlo.

#### Solución:

Considerando el modelo de regresión lineal simple como modelo teórico:

$$CP_t = \beta_0 + \beta_1 PIBPM_t + u_t$$

Trataremos de detectar y en su caso corregir, un posible problema de Autocorrelación.

<sup>45</sup> Tomado de Pena Trampero, J. Bernardo. Ob.Cit. p.289



Para realizar el análisis de la posible existencia de autocorrelación en los residuos, es necesario estimar el modelo original

Dependent Variable: CP  
Method: Least Squares  
Date: 02/24/03 Time: 18:38  
Sample: 1985 1997  
Included observations: 13

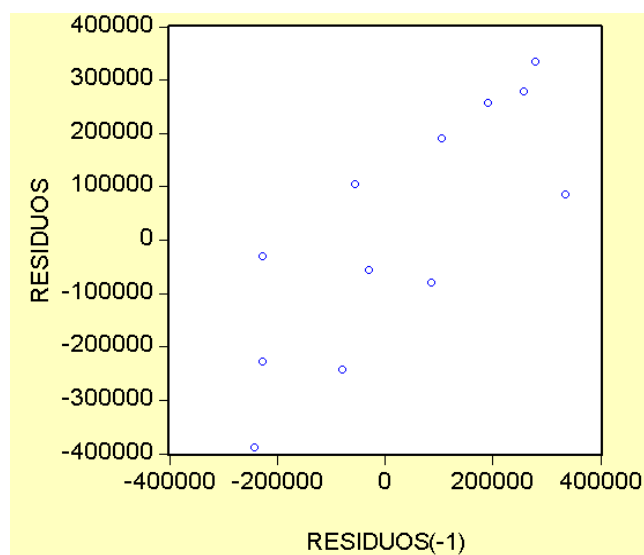
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PIBPM	0.058374	0.004282	13.63260	0.0000
C	3079706.	237829.5	12.94922	0.0000
R-squared	0.944119	Mean dependent var	6192553.	
Adjusted R-squared	0.939039	S.D. dependent var	971351.1	
S.E. of regression	239828.9	Akaike info criterion	27.75388	
Sum squared resid	6.33E+11	Schwarz criterion	27.84079	
Log likelihood	-178.4002	F-statistic	185.8479	
Durbin-Watson stat	0.343122	Prob(F-statistic)	0.000000	

A partir de esta estimación, se genera la serie de mínimo cuadrados correspondientes

Instricciones: GENR RESIDUOS = RESID

#### a) Contrastes Gráficos

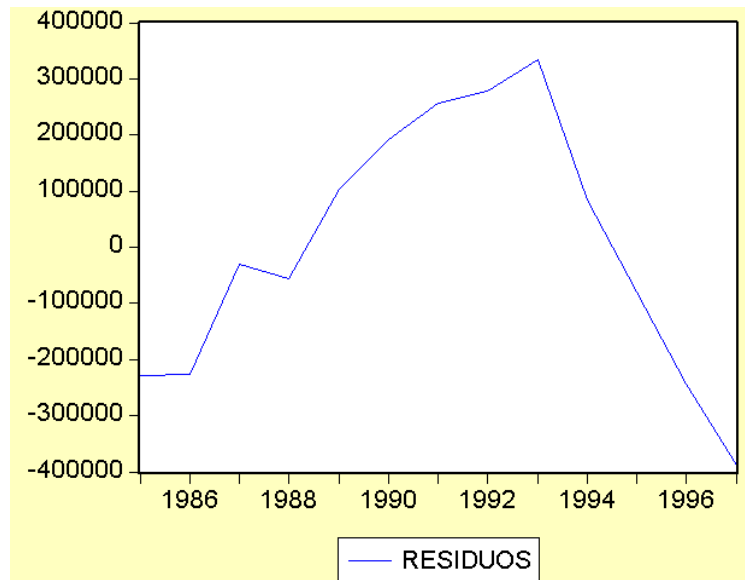
##### a.1) Diagrama de dispersión entre $u_t$ y $u_{t-1}$



Se puede observar que los puntos se colocan en el diagrama en el primer y tercer cuadrante, por lo que puede ser indicativo de presencia de autocorrelación positiva

a.2) Gráfico de los residuos en el tiempo.

Instrucciones: QUICK/GRAPH/LINE GRAPH/RESIDUOS



La presentación gráfica de los residuos presenta un comportamiento sistemático, posiblemente cíclico que sigue indicando la posible presencia de problemas de autocorrelación.

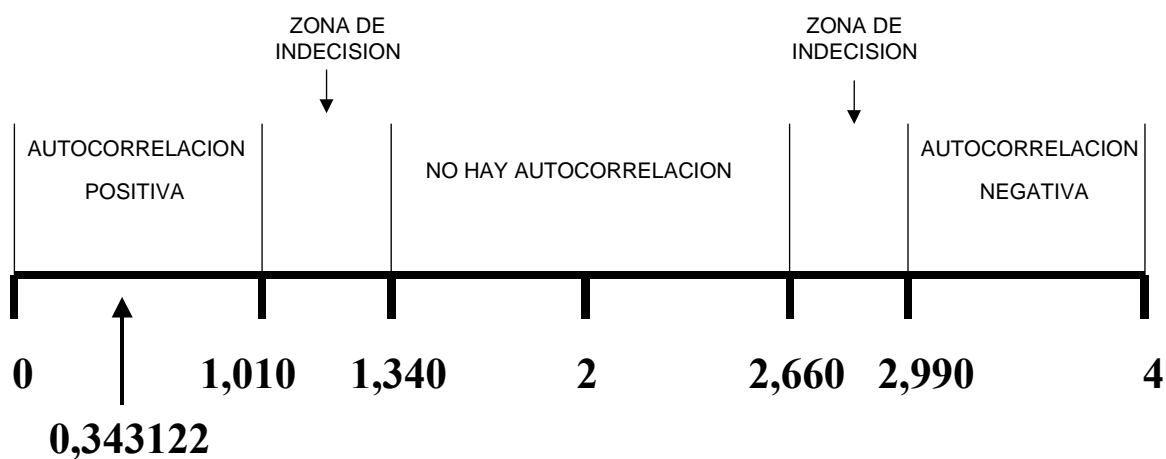
b) Contraste de Durbin – Watson

En la salida de regresión que ofrece el Eviews se puede encontrar el valor del estadístico de Durbin-Watson el cual es :  $d = 0,343122$

En las tablas podemos obtener los límites inferiores y superiores ( $d_l, d_u$ ), al 95% de confianza, con un tamaño de muestra igual a 13 y con  $k$  igual a 1:

**Estadístico d de Durbin-Watson: puntos de significancia de dl y du  
al nivel de significancia del 5%**

	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5		K=6	
	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
...												
11	0,927	1,324	0,658	1,604	0,595	1,928	0,444	2,283	0,316	2,645	0,203	3,005
12	0,971	1,331	0,812	1,579	0,658	1,864	0,512	2,177	0,379	2,506	0,268	2,832
13	<b>1,010</b>	<b>1,340</b>	0,861	1,562	0,715	1,816	0,574	2,094	0,445	2,390	0,328	2,692
14	1,045	1,350	0,905	1,551	0,767	1,779	0,632	2,030	0,505	2,296	0,389	2,572
15	1,077	1,361	0,946	1,543	0,814	1,750	0,685	1,977	0,562	2,220	0,447	2,472
...												



dado que  $0 < d = 1,40667 < dl = 1,010$  diremos que existe autocorrelación positiva de primer orden

c) Por último dado que suponemos que el esquema de autocorrelación mediante el cual se genera la variable aleatoria es de primer orden, podemos contrastar la presencia de autocorrelación, analizando la significatividad estadística del parámetro  $\rho$  en la regresión.

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Dependent Variable: RESIDUOS				
Method: Least Squares				
Date: 02/24/03 Time: 18:44				
Sample(adjusted): 1986 1997				
Included observations: 12 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RESIDUOS(-1)	0.876997	0.198851	4.410323	0.0010
R-squared	0.636051	Mean dependent var		18989.94
Adjusted R-squared	0.636051	S.D. dependent var		228918.5
S.E. of regression	138102.3	Akaike info criterion		26.58903
Sum squared resid	2.10E+11	Schwarz criterion		26.62944
Log likelihood	-158.5342	Durbin-Watson stat		0.994888

Como se puede observar el coeficiente pendiente ( $\rho = 0,876997$ ) es estadísticamente significativo a un 5% de significancia, confirmando la existencia de autocorrelación positiva en el modelo.

### SOLUCION

Los instrumentos gráficos analizados y el contrates de Durbin-Watson, han mostrado la existencia de autocorrelación de primer orden que puede aproximarse por un esquema AR(1)<sup>46</sup>.

Las opciones a ejecutar en Eviews para estimar un modelo con autocorrelación, son las mismas que se requieren para estimar el modelo por mínimos cuadrados ordinarios, pero añadiendo una serie de diferencias.

Nos situamos en el objeto ecuación en el que hemos estimado por mínimo cuadrados ordinarios el modelo de consumo.

Pulsamos el botón ESTIMATE de su barra de herramientas para reestimar el modelo inicial, pero suponiendo un esquema de autocorrelación para las perturbaciones mediante in proceso AR(1). En el cuadro de diálogo correspondiente a la especificación incorporamos al lado de las variables ya escritos el término AR(1), tal como puede verse en la figura a continuación

<sup>46</sup> Este esquema se desarrollara con mas detalle en el capítulo X.

**Equation Specification**

Equation specification  
 Dependent variable followed by list of regressors including ARMA and PDL terms, OR an explicit equation like  $Y=c(1)+c(2)*X$ .

cp pibpm AR(1) d

Estimation settings

Method: LS - Least Squares (NLS and ARMA)

Sample: 1985 1997

OK  
 Cancel  
 Options

Esta metodología se basa en el método de Cochrane-Orcutt, el cual es un criterio de estimación iterativo para obtener estimadores lineales, insesgados y óptimos, bajo la especificación del modelo MCO. Los resultados que se obtienen son:

Dependent Variable: CP  
 Method: Least Squares  
 Date: 02/27/03 Time: 10:24  
 Sample(adjusted): 1986 1997  
 Included observations: 12 after adjusting endpoints  
 Convergence achieved after 23 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PIBPM	0.017607	0.032603	0.540044	0.6023
C	6314991.	3359629.	1.879669	0.0929
AR(1)	0.860221	0.100112	8.592626	0.0000
R-squared	0.984927	Mean dependent var		6333763.
Adjusted R-squared	0.981578	S.D. dependent var		864007.5
S.E. of regression	117270.1	Akaike info criterion		26.39467
Sum squared resid	1.24E+11	Schwarz criterion		26.51589
Log likelihood	-155.3680	F-statistic		294.0541
Durbin-Watson stat	1.518941	Prob(F-statistic)		0.000000
Inverted AR Roots	.86			

Esta estimación muestra los resultados de la repetición 23 veces del proceso Cochrane-Orcutt para conseguir la convergencia. Cabe destacar que la variable PIBPM

pasa a ser no significativa, mientras que el proceso autorregresivo es significativo a un 5%.

### EJERCICIO N° 29

La tabla a continuación<sup>47</sup> indica el nivel de importaciones de USA y el PNB (ambos en miles de millones de dólares) desde 1960 hasta 1979

AÑO	IMPORTACIONES	PNB
1960	23,2	506,1
1961	23,1	523,3
1962	25,2	563,8
1963	26,4	594,7
1964	28,4	635,7
1965	32,1	688,1
1966	37,7	753,1
1967	40,6	796,3
1968	47,7	868,5
1969	52,9	935,5
1970	58,5	982,4
1971	64,2	1063,4
1972	75,9	1171,1
1973	94,4	1306,6
1974	131,9	1412,9
1975	126,9	1528,8
1976	155,4	1702,2
1977	185,8	1899,5
1978	217,5	2127,6
1979	260,9	2368,5

Se pide:

- Estimar una función que relacione las importaciones con el PNB.
- Determinar la posible existencia de autocorrelación en el modelo mediante:
  - Contrastes Gráficos.
  - Contraste de Durbin – Watson.
- En caso de ser necesario corregir el problema

<sup>47</sup> Tomado de: Salvatore, Dominick. "Econometría". Serie Schaum. McGraw-Hill.. Mexico. 1983. P161

## **CAPITULO IX**

### **VARIABLES FICTICIAS, MODELOS DE REZAGOS DISTRIBUIDOS Y MODELOS AUTORREGRESIVOS.**

#### **1. VARIABLES FICTICIAS O CUALITATIVAS (VARIABLES DUMMY)**

En la especificación del modelo de regresión lineal hemos considerado, hasta ahora, que las variables seleccionadas son de carácter cuantitativo, es decir, variables que toman de forma continua valores reales.

Factores como el sexo, estado civil o la localización geográfica constituyen variables de carácter cualitativo que desempeñan un papel protagonista en el estudio de los fenómenos económicos, que hasta ahora no hemos considerado en el modelo de regresión. Cuando queremos construir un modelo econométrico que, por ejemplo, describa las pautas de consumo con relación a un determinado bien, la consideración de factores como la localización, rural o urbana, de las unidades familiares o la situación de la cabeza de familia con relación al empleo, el componente estacional, además de las variables cuantitativas habituales, constituyen variables a tener en cuenta para explicar el comportamiento de la variable dependiente.

Los factores de naturaleza cualitativa no sólo se incluyen dentro de la categoría de variables explicativas, sino que también pueden aparecer en el modelo como variable a explicar o dependiente. El análisis de la influencia de la localización geográfica, rural o urbana, en el comportamiento electoral de una determinada población constituyen un claro ejemplo con relación a esta cuestión. El tratamiento de estas situaciones requiere la construcción de unas variables artificiales que permitan cuantificar las variaciones cualitativas de los distintos factores considerados. En términos econométricos, estas variables se denominan variables ficticias y únicamente toman los valores de 1 y 0. Tomarán el valor de 1 cuando en el elemento muestral correspondiente se constatare la presencia del atributo considerado, y el valor 0, cuando aquel no esté presente en la correspondiente unidad muestral. En otras palabras valores 1 y 0 para denotar la presencia o ausencia, respectivamente, del atributo considerado.

Estas variables reciben también la denominación de variables binarias o dicotómicas, con relación a los dos valores que toman, 1 y 0. En ocasiones se utiliza también la denominación inglesa, variables dummy, para su consideración.<sup>48</sup>

Un ejemplo de un modelo que utilice variables ficticias sería:

---

<sup>48</sup> Díaz Fernández, Montserrat. Ob cit.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 D_t + u_t$$

Donde D es la variable ficticia. Es de uso práctico utilizar la letra D (dummy) para las variables ficticias y así poder diferenciar a simple vista, una variable cualitativa de una cuantitativa

Para considerar la interpretación que en un modelo econométrico se debe dar a los coeficientes de las variables ficticias plantearemos un ejemplo muy sencillo. Supongamos que tenemos una muestra con los salarios de N individuos y una característica ocupacional que representa si el individuo es un trabajador es un profesional universitario o no. Se pretende explicar el nivel de salarios de los individuos y para ello se plantea la siguiente regresión simple:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + u_i$$

Donde  $Y_i$  es el salario individual y  $D_i$  es una variable ficticia que tomará el valor de 1 si el trabajador es profesional universitario y 0 si el trabajador no es profesional universitario.

En este ejemplo tan simple,  $\beta_0$  mide el salario esperado de un trabajador no profesional universitario, mientras que  $\beta_1$  mide la diferencia entre los salarios esperados para el trabajador profesional y el no profesional.

Si en el momento de realizar la prueba de significación individual según la metodología acostumbrada, concluimos que  $\beta_1$  no es significativo, estaremos aceptando que no existen diferencias en los salarios entre trabajadores profesionales y no profesionales.

Supongamos que en lugar de tener un atributo de calificación con dos posibilidades o valores distintos, tenemos que dicho atributo recoge la posibilidad de licenciados universitarios, técnicos superiores, y trabajadores sin educación universitaria. Consideremos que el salario de los tres tipos de trabajadores puede ser diferente. Para contrastarlo plantearemos la siguiente especificación:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_{1i} + \beta_2 D_{2i} + u_i$$

en la que de nuevo  $Y_i$  es el salario del trabajador i y las variables  $D_{1i}$  y, están definidas:



$$D_{2i} = \begin{cases} 1, \text{ si el trabajador es} \\ \text{técnico superior} \\ 0, \text{ si no lo es} \end{cases}$$

La combinación de valores de las variables es la siguiente

TRABAJADOR	$D_{1i}$	$D_{2i}$
Licenciado	1	0
Técnico Superior	0	1
No universitario	0	0

Y con ello los valores esperados para el salario son:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \beta_0 & \text{si} & D_{1i} = 0 \quad D_{2i} = 0 \\ \beta_0 + \beta_1 & \text{si} & D_{1i} = 1 \quad D_{2i} = 0 \\ \beta_0 + \beta_2 & \text{si} & D_{1i} = 0 \quad D_{2i} = 1 \end{array} \right.$$

donde ahora  $\beta_0$  mide el salario esperado de un trabajador sin estudios universitarios, mientras que  $\beta_1$  mide la diferencia entre los salarios esperados para un licenciado y el no universitario y  $\beta_2$  la diferencia entre los salarios esperados para técnicos superiores y no universitarios<sup>49</sup>.

*Cuando se introducen variables ficticias en un modelo de regresión, si pretendemos considerar m situaciones o el atributo está compuesto de m alternativas, se debe tener cuidado de introducir m-1 variables ficticias. De lo contrario, se produciría un problema de multicolinealidad perfecta en el modelo, a menos que a la vez que introducimos las m variables cualitativas, excluyamos de la especificación la constante.*

### EJERCICIO N° 30

En la siguiente tabla se presenta información<sup>50</sup> trimestral (sin ajustar trimestralmente) sobre venta de acciones de fondos mutuales por parte de la industria de fondos mutuales durante el periodo 1968-1973.

#### Valor de acciones de Fondos Mutuales (Millones de US\$)

AÑO	TRIMESTRES			
	I	II	III	IV
1968	1.564	1.654	1.607	1.994
1969	2.129	1.658	1.428	1.503
1970	1.381	1.039	975	1.230
1971	1.304	1.288	1.108	1.446
1972	1.398	1.176	1.099	1.219
1973	1.382	888	933	1.156

Se requiere estimar un modelo que permita determinar si el factor “trimestre” es relevante para la venta de acciones de fondos mutuales.

Solución:

<sup>49</sup> Para un estudio completo del tema, ver: Gujarati. Ob. Cit.

<sup>50</sup> Tomado de Gujarati, Damodar. Ob.Cit. p 525

Par determinar si el factor estacional es importante, estimaremos un modelo de la siguiente forma:

$$VENTAS_t = \beta_1 D_1 + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \beta_4 D_4 + u_t$$

Donde:  $D_1 = 1$  para el primer trimestre, 0 de lo contrario.  
 $D_2 = 1$  para el segundo trimestre, 0 de lo contrario.  
 $D_3 = 1$  para el tercer trimestre, 0 de lo contrario.  
 $D_4 = 1$  para el cuarto trimestre, 0 de lo contrario.

Dependent Variable: VENTAS

Method: Least Squares

Date: 03/08/03 Time: 16:13

Sample: 1968:1 1973:4

Included observations: 24

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D1	1526.333	123.1084	12.39829	0.0000
D2	1283.833	123.1084	10.42848	0.0000
D3	1191.667	123.1084	9.679818	0.0000
D4	1424.667	123.1084	11.57246	0.0000
R-squared	0.178674	Mean dependent var	1356.625	
Adjusted R-squared	0.055475	S.D. dependent var	310.2820	
S.E. of regression	301.5527	Akaike info criterion	14.40678	
Sum squared resid	1818681.	Schwarz criterion	14.60312	
Log likelihood	-168.8813	F-statistic	1.450292	
Durbin-Watson stat	0.267973	Prob(F-statistic)	0.258081	

Como se puede observar en el modelo ya regresado, todos los coeficientes son significativos al 5%, lo que indica que el factor estacional es importante para la estimación de la venta de fondos mutuales

## 2. MODELO DE REZAGOS DISTRIBUIDOS

Cuando se analiza un fenómeno económico, normalmente nos encontraremos que la relación causa efecto no sucede en el mismo período, por ejemplo, la emisión de dinero inorgánico por parte del gobierno y su posterior incidencia en la elevación del nivel general de precios (inflación) no sucede inmediatamente, generalmente, esto

sucede con cierto número de períodos de diferencia, por lo tanto es importante especificar en un modelo este hecho. Tal especificación lo podemos realizar a través de un modelo de rezago distribuido, el cual es un caso particular de las series de tiempo.

Un modelo de rezagos distribuidos se caracteriza por incluir no solamente los valores actuales sino además los valores rezagados (pasados) de las variables explicativas:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_k X_{t-k} + u_t$$

donde  $\beta_0$  se conoce como el multiplicador de corto plazo o de impacto, porque da el cambio en el valor medio de Y que sigue a un cambio unitario en X en el mismo período de tiempo. Si el cambio en X se mantiene al mismo nivel desde el principio, entonces  $(\beta_0 + \beta_1)$  nos da el cambio en (el valor medio de) Y en el período siguiente,  $(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)$  en el que sigue y así sucesivamente. Estas sumas parciales se denominan multiplicadores intermedios. Finalmente, después de K períodos se obtiene

$$\sum_{i=0}^k \beta_i = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k = \beta$$

que se conoce como el multiplicador de rezagos distribuidos de largo plazo o total, Siempre y cuando la suma  $\beta$  exista.

Los problemas que surgen al aplicar la estimación mínimo cuadrática a los modelos de rezagos distribuidos son:

- a) Se pierden k grados de libertad porque estos modelos solo se pueden estimar a partir de (n-k) observaciones, si k es grande esto conduce a una reducción considerable en el número de observaciones efectivas utilizadas.
- b) Frecuentemente existe multicolinealidad elevada entre las variables explicativas, y esto da como resultado estimaciones imprecisas de las.

Usualmente para solventar los problemas antes mencionados, se estiman modelos alternos, como son los modelos de ajuste parcial. Modelo de expectativas adaptables y la aproximación polinomial de Almon.<sup>51</sup>

---

<sup>51</sup> Ver: Gujarati. Ob.cit. Cap. 17.

**GENERACION DE UN BANCO DE DATOS A  
PARTIR DE LOS REZAGOS DE X**

$X_t$	$X_{t-1}$	$X_{t-2}$	$X_{t-3}$	...	$X_{t-n}$
10	----	----	----		----
20	10	----	----		----
30	20	10	----		----
40	30	20	10		----
50	40	30	20		----
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
100	90	80	70		10

Ejemplo de modelo de rezagos distribuidos<sup>52</sup>

Supóngase que una persona recibe un incremento salarial de US\$ 2.000 en su pago anual y supóngase que se trata de un incremento “permanente” en el sentido de que se mantiene el incremento en el salario. ¿Cuál será el efecto de este incremento en el ingreso sobre el gasto de consumo anual de la persona?

Inmediatamente después del aumento en el ingreso, la gente usualmente no se apura a gastarse todo el incremento inmediatamente. Así, el beneficiario del ejemplo puede decidir aumentar su gasto de consumo en US\$ 800 durante el primer año siguiendo el incremento salarial en el ingreso, en US\$ 600 en el siguiente año y en otros US\$ 400 un año después y ahorra el resto. A fines del tercer año, el gasto de consumo anual de la persona habrá aumentado en US\$ 1.800. Se puede escribir la función de consumo como:

$$Y_t = \text{constante} + 0,4X_t + 0,3X_{t-1} + 0,2X_{t-2} + u_t$$

donde Y es el gasto de consumo y X es el ingreso.

La ecuación anterior muestra que el efecto de un incremento de US\$ 2.000 se propaga, o se distribuye, durante un período de tres años. Por consiguiente modelos como este se denominan *modelos de rezagos distribuidos* porque el efecto de una causa dada ( el ingreso) se propaga durante un número de períodos de tiempo.

<sup>52</sup> Gujarati. Ob.cit.

### EJERCICIO Nº 31

Se desea estimar un modelo<sup>53</sup>. que permita explicar el número de vehículos de fabricación nacional (FABNAC) a partir de la variable Importaciones de Vehículos (IMPORT) retardada en número diferente de períodos.

La determinación, desde un punto de vista econométrico, se convierte en un problema de selección de modelos en el que hay que tener presente que si el número de retardos es escaso incurrimos en un error de especificación por omisión, mientras que si es excesivo cometeremos un error de especificación por inclusión.

La selección entre modelos puede llevarse a cabo comparando el coeficiente de determinación ajustado a cada uno de ellos y/o utilizando algún criterio de información como el de Akaike o el de Schwarz<sup>54</sup> (ambos calculados por Eviews)

Para tal fin vamos agregando un retardo por vez al modelo y vamos observando los estadísticos antes señalados.

En la tabla que se presenta a continuación, se recogen para cada uno de los modelos estimados, el número de retardos utilizados (M), el número total de observaciones ( $N^* = N - M$ ), el valor del coeficiente de determinación ajustado (CDA), el criterio de información de Akaike (AIC) y el criterio de Schwarz (SBC).

---

<sup>53</sup> Tomado de: Carrascal A. Ursicino. Ob.Cit. p.309.

<sup>54</sup> - Coeficiente de Determinación ajustado ( $\bar{R}^2$ ) (Adjusted R-squared): Este coeficiente se obtiene a partir del  $R^2$ , ponderándolo por los grados de libertad

$$\bar{R}^2 = 1 - \left( R^2 \frac{n-1}{n-k-1} \right)$$

La ventaja que presenta este coeficiente frente al  $R^2$  es que permite comparar la capacidad explicativa de modelos referidos a una misma muestra de la misma variable endógena con distinto número de variables explicativas.

- El criterio de información de Akaike (Akaike info criterion) y el Criterio de Schwarz (Schwarz criterion), son dos estadísticos que sirven para analizar la capacidad explicativa de un modelo y permite realizar comparaciones a este respecto entre modelos anidados.

M	T*	CDA	AIC	SBC
0	25	0,782131	19,45869	19,55620
1	24	0,793596	19,48690	19,63416
2	23	0,790627	19,55606	19,75353
3	22	0,770240	19,70695	19,95491
4	21	0,827643	19,49262	19,79105
5	20	0,919698	18,81132	19,15982
6	19	0,966824	18,00576	18,40342
7	18	0,979235	17,59055	18,03573
8	17	0,972380	17,78463	18,27476

Los resultados de la tabla llevan a seleccionar el modelo que incluye siete retardos de la variable IMPORTACIONES, ya que es el que presenta el mayor coeficiente de determinación ajustado y el menor valor en los criterios de Akaike y de Schwarz.

Dependent Variable: FABNAC  
Method: Least Squares  
Date: 03/09/03 Time: 15:16  
Sample(adjusted): 1997:07 1998:12  
Included observations: 18 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
IMPORT	0.686235	0.029224	23.48200	0.0000
IMPORT(-1)	0.014172	0.028696	0.493866	0.6332
IMPORT(-2)	0.020239	0.028391	0.712885	0.4940
IMPORT(-3)	0.084385	0.028999	2.909915	0.0173
IMPORT(-4)	-0.110356	0.029284	-3.768508	0.0044
IMPORT(-5)	-0.117150	0.030854	-3.796967	0.0042
IMPORT(-6)	-0.154351	0.036107	-4.274761	0.0021
IMPORT(-7)	-0.046855	0.038443	-1.218811	0.2539
C	12772.06	3915.376	3.262026	0.0098
R-squared	0.989007	Mean dependent var	37106.17	
Adjusted R-squared	0.979235	S.D. dependent var	9510.563	
S.E. of regression	1370.470	Akaike info criterion	17.59055	
Sum squared resid	16903700	Schwarz criterion	18.03573	
Log likelihood	-149.3149	F-statistic	101.2119	
Durbin-Watson stat	2.352370	Prob(F-statistic)	0.000000	

### 3. MODELOS AUTORREGRESIVOS

En los diferentes estudios económicos es interesante estudiar el comportamiento de una variable a través del tiempo. Normalmente el comportamiento de una variables es explicado por el comportamiento que ha tenido la misma en períodos pasados, por ejemplo, el consumo de una persona para un período determinado está influenciado en cierta medida por su patrón de consumo, es decir de la forma en que viene consumiendo a través del tiempo. Un modelo que refleje esta situación sería:

$$C_t = \delta_0 + \delta_1 C_{t-1} + u_t$$

Si el modelo incluye uno o más valores rezagados de la variable dependiente entre sus variables explicativas, se denomina *modelo autorregresivo*. En la literatura a este tipo de modelos también se les conoce como *modelos dinámicos* puesto que señalan la trayectoria en el tiempo de la variable dependiente en relación con su(s) valor(es) pasado(s).

En forma genérica, un modelo autorregresivo se puede esquematizar de la siguiente forma:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$$

Es importante resaltar que en este tipo de modelos, la aparición de  $Y_{t-1}$  como variable explicativa puede crear algunos problemas estadísticos.  $Y_{t-1}$  al igual que, es estocástico (aleatorio), lo cual significa que se tiene una variable explicativa estocástica en el modelo. Se debe recordar que la teoría clásica de mínimos cuadrados se basa en el supuesto de que las variables explicativas o bien sean no estocásticas o, en caso de serlo, están distribuidas independientemente del término de perturbación estocástico.

Igualmente la presencia de Y rezagado viola uno de los supuestos en los cuales se basa la prueba de Durbin-Watson. Por consiguiente, se hace necesario utilizar un método diferente para comprobar la existencia o no de autocorrelación en un modelo autorregresivo (por ejemplo, la prueba h de Durbin).

#### EJERCICIO N° 32

Un investigador utilizando datos anuales<sup>55</sup> para el período 1964-1998 para la formación bruta de capital fijo (I80) y del producto interior bruto a coste de los factores

---

<sup>55</sup> Tomado de: Carrascal A. Ursicino. Yolanda Gonzalez G. Y Beatriz Rodríguez. “Análisis Econométrico con Eviews”. RA-MA. Madrid. 2001. p.296.



(PIBCF80) en pesetas constantes de 1980, intentó explicar la producción en función de la inversión. Para tal fin estimó el siguiente modelo:

$$PIBCF80_t = \beta_0 + \beta_1 I80_t + \beta_2 PIBCF80_{t-1} + u_t$$

obteniéndose los siguientes resultados:

Dependent Variable: PIBCF80				
Method: Least Squares				
Date: 03/09/03 Time: 12:51				
Sample(adjusted): 1965 1998				
Included observations: 34 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
I80	0.446382	0.095248	4.686508	0.0001
PIBCF80(-1)	0.885580	0.025701	34.45696	0.0000
C	400842.4	147213.1	2.722871	0.0105
R-squared	0.997098	Mean dependent var	14964320	
Adjusted R-squared	0.996910	S.D. dependent var	4156494.	
S.E. of regression	231032.7	Akaike info criterion	27.62260	
Sum squared resid	1.65E+12	Schwarz criterion	27.75728	
Log likelihood	-466.5843	F-statistic	5325.118	
Durbin-Watson stat	0.854917	Prob(F-statistic)	0.000000	

Los resultados muestran la significancia individual de los coeficientes de I80 y PIBCF80(-1). Como es un modelo autorregresivo, no podemos utilizar el estadístico de Durbin-Watson para chequear la existencia o no de autocorrelación de primer orden en el modelo. Para realizar este análisis podemos utilizar el estadístico de la h de Durbin o el Contraste de Breusch-Godfrey.

El Contraste de Breusch-Godfrey lo realizamos desde la ventana de la ecuación MCO seleccionando en el menú: VIEW/RESIDUAL TEST/SERIAL CORRELATION LM.

EViews - [Equation: EQ01 Workfile: INVERSION]				
File Edit Objects View Procs Quick Options Window Help				
Representations	Name	Freeze	Estimate	Forecast
Estimation Output				
Actual,Fitted,Residual	PIBCF80			
Covariance Matrix	2:51			
Coefficient Tests	1998			
Residual Tests	Correlogram - Q-statistics			
Stability Tests	Correlogram Squared Residuals			
Label	Histogram - Normality Test			Prob.
	Serial Correlation LM Test...			
	ARCH LM Test...			0.0001
	White Heteroskedasticity (no cross terms)			0.0000
	White Heteroskedasticity (cross terms)			0.0105
R-squared	0.997098	Mean dependent var	14964320	
Adjusted R-squared	0.996910	S.D. dependent var	4156494	

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	8.174354	Probability	0.001530
Obs*R-squared	12.25737	Probability	0.002179

Test Equation:  
Dependent Variable: RESID  
Method: Least Squares  
Date: 03/09/03 Time: 13:28

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
IBO	-0.067088	0.086238	-0.777948	0.4429
PIBCF80(-1)	0.016171	0.022919	0.705579	0.4861
C	24285.21	122273.5	0.198614	0.8440
RESID(-1)	0.684266	0.180955	3.781411	0.0007
RESID(-2)	-0.139669	0.192164	-0.726821	0.4732
R-squared	0.360511	Mean dependent var	-1.95E-09	
Adjusted R-squared	0.272306	S.D. dependent var	223922.3	
S.E. of regression	191016.9	Akaike info criterion	27.29316	
Sum squared resid	1.06E+12	Schwarz criterion	27.51763	
Log likelihood	-458.9838	F-statistic	4.087177	
Durbin-Watson stat	2.118713	Prob(F-statistic)	0.009525	

En los resultados podemos observar la no significación individual de RESID(-2), lo que lleva a plantear la existencia de un esquema AR(1)

Dependent Variable: PIBCF80  
 Method: Least Squares  
 Date: 03/09/03 Time: 13:36  
 Sample(adjusted): 1966 1998  
 Included observations: 33 after adjusting endpoints  
 Convergence achieved after 28 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
IB0	0.597210	0.152146	3.925245	0.0005
PIBCF80(-1)	0.831424	0.046297	17.95848	0.0000
C	634390.0	434529.5	1.459947	0.1551
AR(1)	0.657586	0.159527	4.122094	0.0003
R-squared	0.997900	Mean dependent var	15193037	
Adjusted R-squared	0.997683	S.D. dependent var	3997771.	
S.E. of regression	192423.9	Akaike info criterion	27.28600	
Sum squared resid	1.07E+12	Schwarz criterion	27.46740	
Log likelihood	-446.2190	F-statistic	4594.454	
Durbin-Watson stat	1.776185	Prob(F-statistic)	0.000000	
Inverted AR Roots	.66			

El modelo finalmente estimado permite concluir que el efecto a corto plazo de la inversión sobre el producto interior bruto es igual a 0,597. Así mismo, esa unidad adicional de inversión genera efectos sobre el producto interior bruto de los periodos siguientes, de modo que a largo plazo el efecto de la inversión sobre el PIB se cifra en 3,54 unidades ( $3,54 = 0,5972 / (1 - 0,8314)$ )

#### 4. ANALISIS DE LA ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE LOS COEFICIENTES

En las series de tiempo, una de las hipótesis que suponemos cumple el modelo de regresión es que los coeficientes se mantienen constantes para todo el período muestral. Sin embargo, es posible que existan submuestras para las que el comportamiento del modelo, su estructura, sea diferente, siendo necesario contrastar esta posibilidad.

Una de las pruebas más populares para identificar un cambio estructural en el modelo, es la Prueba de CHOW.

Dada una muestra de tamaño  $N$ , se dividirá en la unidad temporal en la que se produce el cambio estructural de los coeficientes, obteniéndose dos submuestras de tamaño  $n_1$  y  $n_2$ , respectivamente. El contraste de estabilidad en el comportamiento estructural del modelo se planteará comprobar si los coeficientes se mantienen constantes para las dos submuestras, o por el contrario, se mantienen constantes para las dos submuestras.

Dado

$$Y_t = \delta_0 + \delta_1 X_t + u_t \text{ con } N - k \text{ g.l. (1)}$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \text{ con } n_1 - k \text{ g.l. (2)}$$

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + v_t \text{ con } n_2 - k \text{ g.l. (3)}$$

$$H_0 : \beta_1 = \alpha_1$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \alpha_1$$

Si el modelo presenta un comportamiento estable, se estimaría el modelo (1) con una muestra de  $N = n_1 + n_2$ , observaciones. Si no presenta un comportamiento estable, necesariamente hay que estimar un modelo para cada submuestra, es decir los modelos (2) y (3).

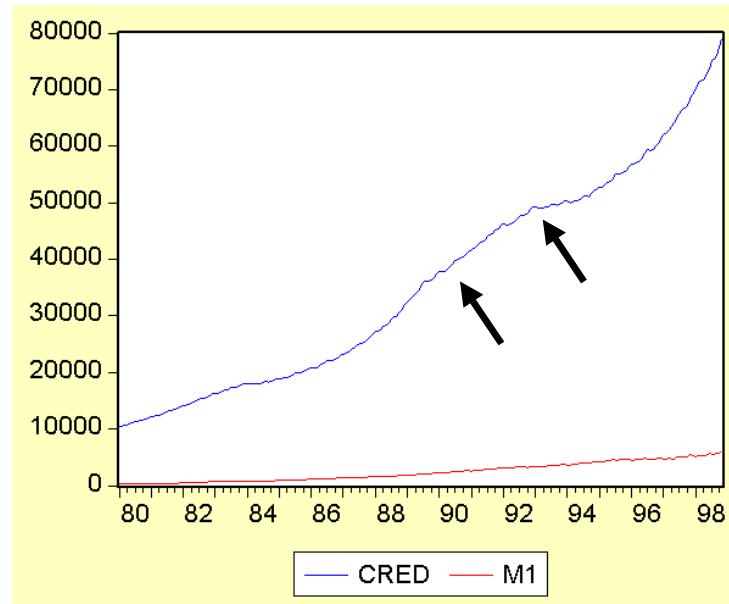
Denominando SRC, a la suma de residuos mínimo-cuadráticos de la muestra de tamaño N, y  $SRC_{n1}$  y  $SRC_{n2}$ , respectivamente, la suma de residuos al cuadrado de cada submuestra individualmente, se calcula el estadístico F siguiente:

$$F = \frac{\frac{SRC_N - (SRC_{n1} + SRC_{n2})}{k}}{\frac{SRC_{n1} + SRC_{n2}}{n_1 + n_2 - 2k}}$$

A continuación se presenta un modelo en el cual el crédito interno neto (CRED) está en función de la oferta monetaria (M1). Para el período: enero de 1980 - noviembre de 1998.

Dependent Variable: CRED  
Method: Least Squares  
Date: 07/24/03 Time: 14:40  
Sample: 1980:01 1998:11  
Included observations: 227

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
M1	11.17397	0.089308	125.1178	0.0000
C	9351.935	259.6182	36.02189	0.0000
R-squared	0.985831	Mean dependent var		36048.63
Adjusted R-squared	0.985768	S.D. dependent var		18678.33
S.E. of regression	2228.304	Akaike info criterion		18.26464
Sum squared resid	1.12E+09	Schwarz criterion		18.29482
Log likelihood	-2071.037	F-statistic		15654.45
Durbin-Watson stat	0.180658	Prob(F-statistic)		0.000000

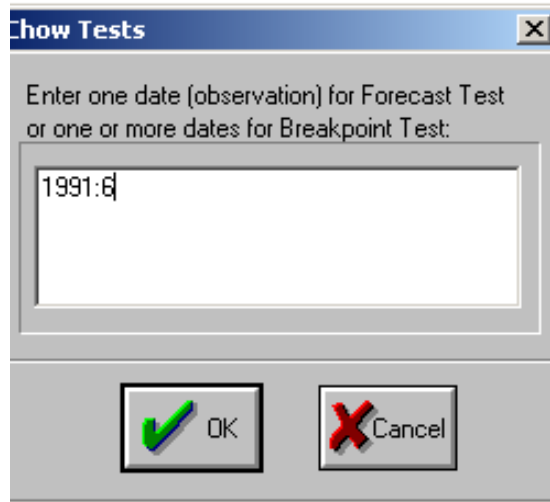


Observando el gráfico de las variables podemos observar cambios en la pendiente de la curva del crédito interno neto en los años 1991 y 1993, lo cual puede sugerir que para esos períodos hubo un cambio estructural en el modelo.

Para analizar en Eviews la estabilidad estructural de los coeficientes a través el test de Chow, seleccionamos en la barra de herramientas VIEW / STABILITY TESTS / CHOW BREAK POINT TEST

EViews - [Equation: EQ01 Workfile: EJERCICIO_VEC]			
File Edit Objects View Procs Quick Options Window Help			
Representations	Name	Freeze	Estimate Forecast Stats Resids
Estimation Output	ED		
Actual, Fitted, Residual	4:40		
Covariance Matrix	1		
Coefficient Tests	27		
Residual Tests	Chow Breakpoint Test...		
Stability Tests	Chow Forecast Test...		
Label	Ramsey RESET Test...		
M1	Recursive Estimates (OLS only) ...		
C	ic Prob.		
R-squared	0.985831	Mean dependent var	36048.63
Adjusted R-squared	0.985768	S.D. dependent var	18678.33
S.E. of regression	2228.304	Akaike info criterion	18.26464
Sum squared resid	1.12E+09	Schwarz criterion	18.29482
Log likelihood	-2071.037	F-statistic	15654.45
Durbin-Watson stat	0.180658	Prob(F-statistic)	0.000000

Lo que da a lugar a un cuadro de dialogo como el que se muestra a continuación:



En el mismo deben escribirse los puntos, fechas o números de observaciones en los que se cree que ha existido el cambio estructural. También se pueden considerar más de un punto de ruptura, siempre con la precaución de que el número de observaciones de cada submuestra sea superior a  $k+1$ , el número de coeficientes o parámetros a estima.

En la tabla aparecen los valores estadísticos que calcula Eviews para contrastar un cambio estructural en junio de 1996. El valor del estadístico F y su probabilidad indican el rechazo de la hipótesis nula de estabilidad estructural, puesto que la probabilidad de rechazar dicha hipótesis siendo cierta no supera el 5% (0,05). Por tanto, se concluye que en el modelo estimado se produce un cambio estructural en junio de 1991.

Chow Breakpoint Test: 1991:06

F-statistic	41.28389	Probability	0.000000
Log likelihood ratio	71.50496	Probability	0.000000

## CAPITULO X

### ESTACIONARIEDAD

Según José Otero<sup>56</sup>, una serie de tiempo o serie cronológica, es una sucesión de valores observados de una variable referidos a momentos o a periodos de tiempo diferentes, generalmente regulares. La característica distintiva entre una serie de tiempo, en contraposición a las observaciones de corte transversal, es que los datos aparecen ordenados cronológicamente.

Una serie de tiempo está conformada por las siguientes partes<sup>57</sup>:

$$Y = \text{sistemática} + \text{determinista} + \text{aleatoria}$$

La variable Y se dice ser estocástica por que su valor en cada momento del tiempo está en función de una parte conocida bastante predecible y de una parte desconocida o impredecible. La parte conocida, a su vez, contiene dos elementos: uno sistemático que recoge patrones de comportamiento del fenómeno de interés (como la estacionalidad) y otro determinista que recoge características predeterminados de la serie. La parte puramente aleatoria está formada de eventos no explícitamente considerados en el modelo o factores estocásticos (tendencia estocástica)

En este capítulo describiremos la metodología para la estimación de un tipo de modelos estocásticos especialmente útiles para la predicción de series de tiempo, los modelos ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) a través de la metodología desarrollada por Box y Jenkins<sup>58</sup> (1976) para tratar modelos lineales univariantes. Los cuales están conformados por dos componentes, la parte autorregresiva, a fin de recoger la parte determinista del modelo, y la partes de promedios móviles, que pretende reflejar el componente estocástico.

### 1.PROCESOS ESTOCASTICOS

Un proceso estocástico  $[X_t]$ , para  $t = 1, 2, 3, \dots$ , se define como una colección de variables aleatorias,  $X_t$ , ordenadas de acuerdo con el parámetro discreto, que en

nuestro contexto es el tiempo. En otras palabras se asume que cada valor  $X_1, X_2, \dots, X_t$  en la serie es extraído al azar de una distribución de probabilidad.

---

<sup>56</sup> Otero, José M. "Modelos Econométricos y Predicción de Series Temporales". Editorial AC. España. 1989. p1.

<sup>57</sup> Blanco Odio, Carlos M. "Aspectos Conceptuales Sobre Series de Tiempo". Banco Central de Venezuela. Mimeo, 1997 p.6.

<sup>58</sup> Box, George y Gwilym Jenkins. "Time Series Analysis, Forecasting and Control". San Francisco, Calif. Holden Day. 1976.

## 2. CAMINATA ALEATORIA

El ejemplo mas simple de una serie de tiempo estocástica es el proceso de *caminata aleatoria* o *Random Walk*<sup>59</sup>. En el proceso más simple de caminata aleatoria cada cambio sucesivo en  $y_t$  es extraído en forma independiente de una distribución de probabilidad con media 0. Por tanto,  $y_t$  está determinado por:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

con  $E(\varepsilon_t) = 0$ ,  $E(\varepsilon_t)^2 = \sigma^2$  y  $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$  para  $t \neq s$ . Dicho proceso puede ser representado por los lanzamientos sucesivos de una moneda, donde una cara recibe un valor de +1 y una cruz recibe un valor de -1.

A menudo, la caminata aleatoria es comparada con la caminata de una persona ebria. Al dejar el bar, el ebrio se mueve a una distancia aleatoria  $u_t$  en el tiempo  $t$  si el o ella continúa caminando indefinidamente, se alejarán cada vez más del bar. Lo mismo se dice acerca del precio de las acciones. El precio de las acción hoy es igual al precio de la acción ayer más un “shock” o innovación aleatoria<sup>60</sup>

Consideremos el caso en el que se requiere un pronóstico para un proceso de caminata aleatoria. El pronóstico está dado por:

$$\hat{y}_{t+1} = E(y_{t+1} / y_t, \dots, y_1) = y_t + E(\varepsilon_{t+1}) = y_t$$

## 3. ESTACIONARIEDAD

Cuando se comienza a desarrollar modelos para series de tiempo, se desea saber si es posible suponer que el proceso estocástico subyacente que generó la series es invariable con respecto al tiempo. Si las características del proceso estocástico cambian con el tiempo; es decir, si el proceso *no es estacionario*, en general será difícil representar la serie de tiempo durante intervalos de tiempo pasados y futuros con un modelo algebraico simple. Por el contrario, si el proceso estocástico está fijo en el tiempo; es decir, si *es estacionario*, entonces podemos modelar el proceso a través de una ecuación con coeficientes fijos que pueden estimarse a partir de datos pasados.

En sentido *amplio*, se dice que un *proceso estocástico es estacionario* (o débilmente estacionario) si su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos períodos depende solamente de la distancia o rezago entre dos períodos de tiempo y no del tiempo en el cual se ha calculado la covarianza. En otras

<sup>59</sup> Pindyck, Robert. Ob.Cit. p.515.

<sup>60</sup> Gujarati, Damodar. Ob.Cit. p.702



palabras, una serie es estacionaria cuando su distribución de probabilidad no depende del tiempo. Esto implica que a pesar de sus oscilaciones la serie tiende a converger a un valor medio fijo, y su varianza es constante.

Las series no estacionarias son aquellas cuya media o varianza cambian con el tiempo. Cuando sólo la media depende del tiempo se dice que existe *tendencia determinística* y cuando es la varianza la que depende del tiempo, se habla de *tendencia estocástica*. Es de resaltar que la mayoría de las series económicas encontradas en la práctica son no estacionarias. Un aspecto importante a considerar con respecto a las series estacionarias, tiene que ver con la innovaciones, lo que significa que mientras un shock tiene carácter transitorio en series estacionarias, su efecto es permanente sobre fenómenos no estacionarios.

Gráfico N° 1

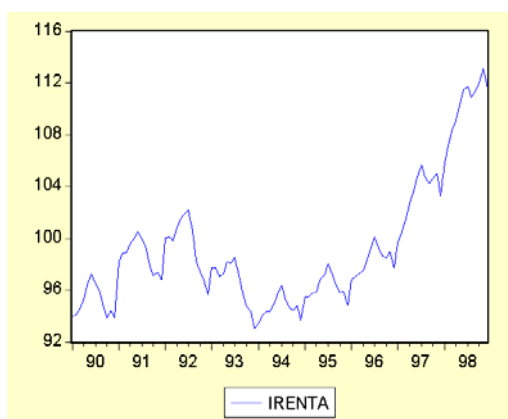
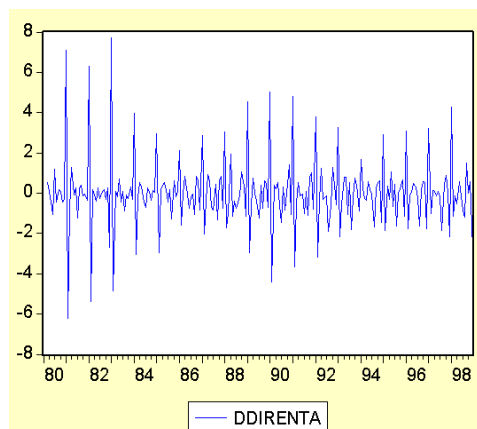


Gráfico N° 2



En el gráfico N° 1<sup>61</sup> se puede observar una serie no estacionaria, en el mismo se puede observar claramente una tendencia, lo que es indicativo de que la media no es constante para toda la serie. En el gráfico N° 2 se muestra una serie de tiempo estacionaria

La definición de estacionariedad en sentido *estricto* implica que las características del proceso estocástico no sufren alteración al considerar tiempos históricos diferentes

A continuación se presenta un cuadro resumiendo las características principales de una serie estacionaria y de una no estacionaria:

---

<sup>61</sup> El ejemplo es tomado de Pulido, Antonio y Ana María López. Ob.Cit. y el mismo consiste en una serie de tiempo que abarca el periodo 1980-1998, con periodicidad mensual de un indicador de renta salarial real para la economía española.

ESTACIONARIA	NO ESTACIONARIA
Tiene una media constante y hay una tendencia de la serie a volver hacia esta media cuando se ha desviado de ella. Por tanto tiende a fluctuar alrededor de la media	Tiene un comportamiento divagante, en el sentido de que no se manatene sobre un valor medio a lo largo de su historia.
Tiene autocorrelaciones que decrecen rapidamente al alejarnos en el tiempo	Las autocorrelaciones tienden a uno para cualquier retardo
Tiene varianza finita e independiente del tiempo	La varianza depende del tiempo.
Tiene memoria limitada de su comportamiento pasado. Por tanto los efectos de un Shock aleatorio son sólo transitorios y van decreciendo (perdiendo fuerza) en el tiempo.	El proceso tiene memoria ilimitada y, por tanto, un shock aleatorio tendrá efectos permanentes en el proceso.

Muy pocas series económicas de tiempo son estacionarias. Los motivos de la falta de estacionariedad suelen ser:

- a) Se presenta una tendencia.
- b) La varianza no es una constante.
- c) Hay variaciones estacionales.

La presencia de variaciones estacionales se traduce en una variabilidad de la media del proceso, lo que es contrario a la hipótesis de estacionariedad. Afortunadamente, es posible transformar muchas series económicas de tiempo en otras estacionarias, sometiéndolas a operaciones algebraicas.

#### 4. RAICES UNITARIAS, OPERADOR DIFERENCIA Y ORDEN DE INTEGRACION DE UNA SERIE DE TIEMPO

es importante destacar la asociación existente entre la noción de serie no estacionaria y raíz unitaria, para ello consideramos la siguiente representación autorregresiva de la serie  $X_t$ :

$$X_t = \phi X_{t-1} + a_t \quad \text{donde } a_t \text{ es un ruido blanco}$$

utilizando el operador de retardo ( $B^j X_t = X_{t-j}$ ) obtenemos la siguiente representación:

$$X_t = \phi X_{t-1} + a_t = \phi B X_t$$

$$\Rightarrow X_t - \phi B X_t = a_t$$

$$\Rightarrow (1 - \phi B) X_t = a_t$$

$$\Rightarrow \phi(B) X_t = a_t \text{ donde } \phi(B) = (1 - \phi B)$$

$\phi(B) X_t = a_t$  es la representación general de un modelo autorregresivo de orden 1

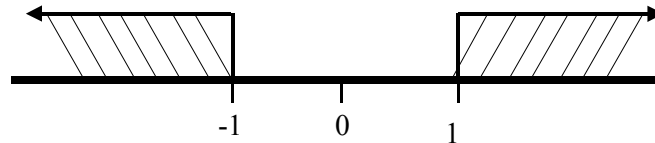
Obsérvese que  $\phi(B)$  es un polinomio de grado 1, cuya raíz viene dada por  $\lambda = \frac{1}{\phi}$ :

$$(1 - \phi B) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\phi} = B = \lambda$$

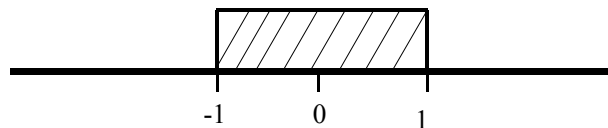
Ahora bien, un resultado teórico establece que un modelo como el anterior es débilmente estacionario si toda raíz  $\lambda$  de  $\phi(B)$  cumple con las siguiente condición:

$$|\lambda| > 1$$

(la raíz está fuera del círculo unitario)



$$\Rightarrow \frac{1}{|\phi|} > 1 \Rightarrow |\phi| < 1$$



El caso de mayor interés es cuando , esto es, cuando existe raíz unitaria, y se puede probar que cuando esto ocurre, la varianza de  $X_t$  no es finita, en otras

palabras, la serie es no estacionaria. De allí que la relación fundamental que siempre se ha de tener en cuenta es: **EXISTENCIA DE RAICES UNITARIAS EQUIVALE A NO ESTACIONARIEDAD**



SI  $\phi = 1$

$$X_t = \phi X_{t-1} + a_t$$

$$X_t = X_{t-1} + a_t = \text{caminata aleatoria}$$

$\Rightarrow$  proceso integrado

$\Rightarrow$  no estacionario

Saber que existen raíces unitarias provee de la transformación necesaria para superar el problema de la no estacionariedad. Considerando nuevamente una representación autorregresiva para  $X_t$ , si existe raíz unitaria se tiene que:

$$X_t = X_{t-1} + a_t :$$

$$\Rightarrow X_t - X_{t-1} = a_t$$

denotando  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$  y sustituyendo en la ecuación anterior, resulta:

$$\Leftrightarrow \Delta X_t = a_t$$

La primera diferencia de  $X_t$  es estacionaria, de forma que la no estacionariedad se supera diferenciando la serie tantas veces como raíces unitarias posea.

En general, diremos que una serie  $X_t$  es integrable de orden  $d$ , si debe ser diferenciada  $d$  veces para alcanzar estacionariedad y se denota:

$$X_t \sim I(d)$$

## 5. PRUEBA DE ESTACIONARIEDAD BASADA EN EL CORRELOGRAMA

Una prueba sencilla de estacionariedad está basada en la denominada función de autocorrelación (ACF). La ACF al rezago  $k$ , denotada por  $\rho_k$ , se define como:

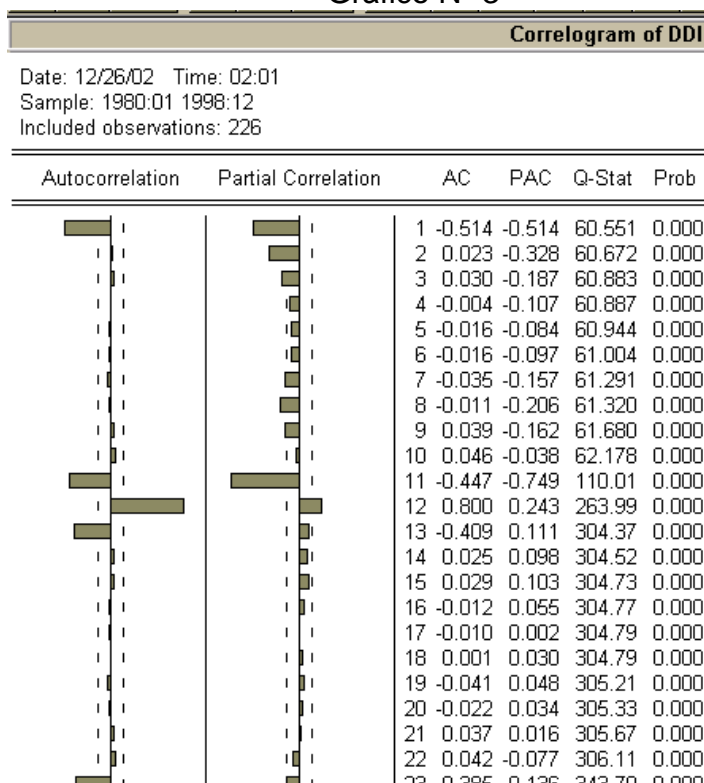
$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\text{covarianza.al.rezago.k}}{\text{varianza}}$$

Puesto que la covarianza y la varianza están medidas en las mismas unidades,  $\rho_k$  es un número sin unidad de medida, o puro. Se encuentra entre  $-1$  y  $+1$ , igual que cualquier coeficiente de correlación. Si se grafica  $\rho_k$  frente a  $k$ , la gráfica obtenida se conoce como *correlograma*.

Para obtener el correlograma en Eviews, seleccionamos VIEWS/CORRELOGRAM.

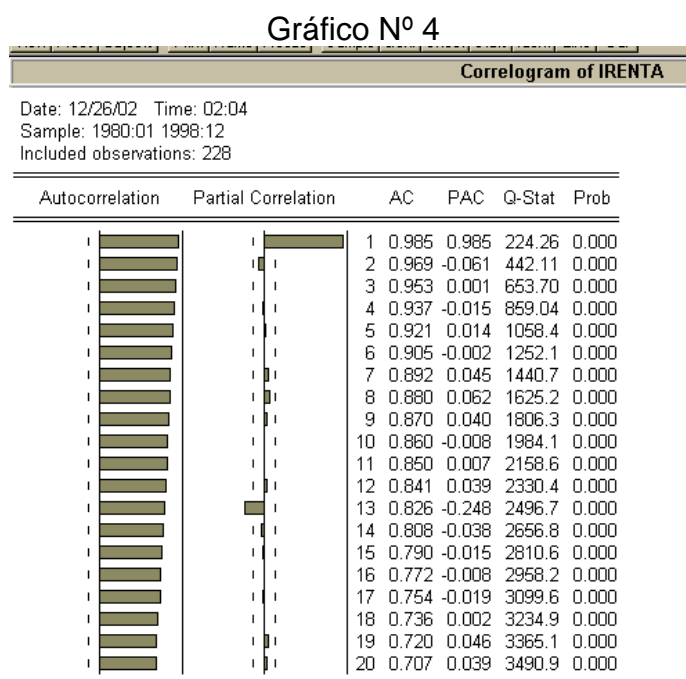
La ACF de las series estacionarias disminuye sensiblemente a medida que aumenta el desfase temporal  $K$  (gráfico N° 3). Esto no suele ocurrir con las series estacionarias (gráfico N° 4).

Gráfico N° 3



En el gráfico N° 3 se aprecia como la función de autocorrelación decrece rápidamente, ya para la observación 2, esta función es cercana a cero, lo cual es indicativo de una serie estacionaria.

En el caso de un proceso estocástico puramente aleatorio, su autocorrelación en cualquier rezago mayor que cero es cero.



En el gráfico N° 4 se aprecia que la ACF decrece exponencialmente y de forma lenta, mientras que la función de autocorrelación parcial presenta un valor significativo en el retardo uno, con un coeficiente de autocorrelación cercano a la unidad (0,941). Este gráfico puede considerarse como indicativo de la no estacionariedad.

## 6. PRUEBA DE RAZ UNITARIA SOBRE ESTACIONARIEDAD – PRUEBA DICKEY – FULLER (ADF).

Dado el siguiente modelo autorregresivo de primer orden<sup>62</sup>:  $Y_t = Y_{t-1} + u_t$  donde  $u_t$  es el término de error estocástico que sigue los supuestos del modelo clásico, tiene media cero, varianza constante y no esta autocorrelacionado. Un término de error con tales propiedades es conocido también como *término de error de ruido blanco (White noise)*. Ahora bien si el coeficiente de  $Y_{t-1}$  es igual a 1, surge lo que

<sup>62</sup> Gujarati, Damodar. Ob.Cit. p.702

se conoce como el *problema de raíz unitaria* es decir, una situación de no estacionariedad. Por consiguiente al realizar la regresión  $Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t$  y se encuentra que  $\rho = 1$ , entonces se dice que la variable estocástica  $Y_t$  tiene una raíz unitaria.

Si a la ecuación anterior se le resta  $Y_{t-1}$  podemos hallar una forma alternativa de expresarla de muy frecuente utilización:

$$Y_t - Y_{t-1} = \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta Y_t = (\rho - 1)Y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t$$

donde  $\delta = (\rho - 1)$  y  $\Delta$  es el operador de primera diferencia  $\Delta = Y_t - Y_{t-1}$ . Si se cumple la hipótesis nula de  $\delta = 0$  el modelo se puede escribir de la siguiente forma:  $\Delta Y_t = u_t$ , lo cual nos indica que la primera diferencia de una serie de tiempo de caminata aleatoria es una serie de tiempo *estacionaria* porque por supuestos,  $u_t$  es puramente aleatoria.

Lo anterior supone que una serie de tiempo no estacionaria, se puede convertir en estacionaria diferenciándola. Ahora bien, si una serie de tiempo ha sido diferenciada una vez y la serie diferenciada resulta estacionaria, se dice que la serie original (caminata aleatoria) es *integrada de orden 1*, y se denota por  $I(1)$ . En forma similar, si la serie original debe ser diferenciada dos veces (es decir, debe tomarse la primera diferencia de la primera diferencia) para hacerla estacionaria, se dice que la serie original es integrada de orden dos, o  $I(2)$ . En general, si una serie de tiempo debe ser diferenciada  $d$  veces, esta se dice que esta es integrada de orden  $d$ , o  $I(d)$ . En su gran mayoría las series de tiempo económicas son integrada de orden uno, o  $I(1)$ .

Para saber si una serie es estacionaria o no, se debe determinar si  $\hat{\rho}$  es estadísticamente igual a uno ( $H_0 : \hat{\rho} = 1$ ), o si  $\hat{\delta}$  es estadísticamente igual a cero ( $H_0 : \hat{\delta} = 0$ ). Lamentablemente, los estadísticos  $t$  que se obtengan no siguen una distribución  $t$  de Student aun en muestras grandes.

Bajo la hipótesis nula de  $\rho = 1$ , el estadístico  $t$  calculado se conoce como el estadístico  $\tau$  (tau), cuyos valores críticos han sido tabulados por Dickey-Fuller<sup>63</sup>, por lo que a esta prueba se conoce como la prueba de Dickey-Fuller (DF).

Posteriormente, las tablas con los valores críticos, fueron ampliadas por Mackinnon.

---

<sup>63</sup> A. Dickey y W.A. Fuller. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. Journal of the American Statistical Association. Vol. 4 1979.

Por razones teóricas y prácticas, la prueba de Dickey-Fuller se aplica a regresiones efectuadas en las siguientes formas:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + u_t$$

Donde  $t$  es la variable tiempo o tendencia. En cada caso, la hipótesis nula es que  $\delta = 0$ , es decir que hay una raíz unitaria, o lo que es lo mismo, la variable estocástica no es estacionaria.

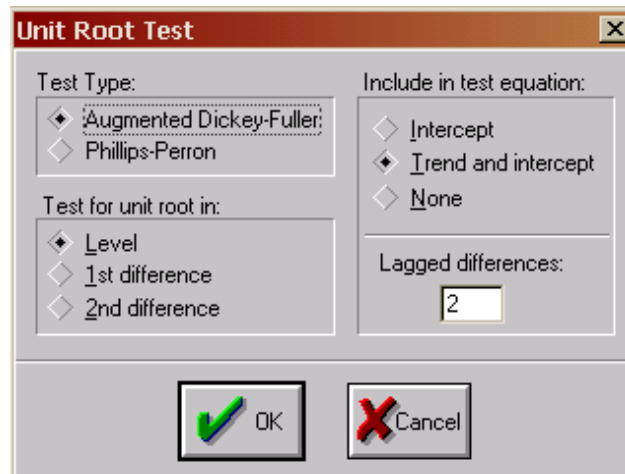
Si el término de error  $u_t$  está correlacionado, se modifica la ecuación  $\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + u_t$  de la siguiente forma:

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + \alpha_1 \sum_{i=1}^m \Delta Y_{t-i} + u_t$$

donde, por ejemplo,  $\Delta Y_{t-1} = (Y_{t-1} - Y_{t-2})$ ,  $\Delta Y_{t-2} = (Y_{t-2} - Y_{t-3})$ , etc., es decir se utilizan términos en diferencia rezagados. El número de términos en diferencia rezagados que deben incluirse con frecuencia se determina empíricamente, siendo la idea incluir suficientes términos, de tal manera que el término de error  $u_t$  sea serialmente independiente (ruido blanco). La hipótesis nula es la misma, es decir que existe una raíz unitaria en  $Y_t$  (o lo que es igual,  $Y_t$  es no estacionaria). Esta prueba se llama Dickey-Fuller aumentada (ADF)

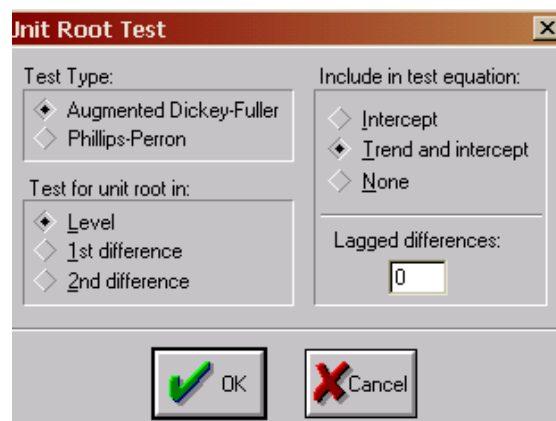
En el paquete Eviews, se puede obtener fácilmente la prueba de Dickey-Fuller, para tal fin seleccionamos VIEWS/UNIT ROOT TEST, con lo cual obtenemos el siguiente cuadro:





Como se puede observar, en el cuadro se pueden identificar cuatro áreas: en la superior izquierda, identificamos que prueba se utilizará, la de Dickey-Fuller aumentada o la de Phillips-Perron (que se tratará mas adelante). En la inferior izquierda, indicamos si la prueba se va a realizar sobre la serie en niveles, primeras diferencias o segundas diferencias de la serie original. En el área superior derecha, especificamos la forma funcional del modelo a regresar: con intercepto solamente, con tendencia e intercepto, o finalmente, sin tendencia ni intercepto. Para esta parte resulta bastante importante ver el gráfico de la serie. Finalmente, en el área inferior derecho, indicamos el número de rezagos de la variable en diferencias que se va a utilizar.

Por ejemplo, seleccionando:



Se obtiene el siguiente cuadro

ADF Test Statistic	-2.749934	1% Critical Value*	-4.0015
		5% Critical Value	-3.4307
		10% Critical Value	-3.1387

\*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(IRENTA)

Method: Least Squares

Date: 01/06/03 Time: 15:48

Sample(adjusted): 1980:02 1998:12

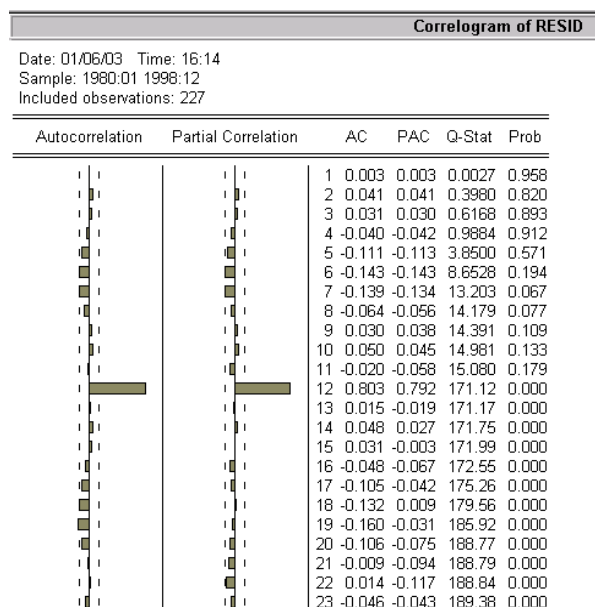
Included observations: 227 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
IRENTA(-1)	-0.037743	0.013725	-2.749934	0.0064
C	2.509374	0.996494	2.518202	0.0125
@TREND(1980:01)	0.008192	0.002348	3.489593	0.0006
R-squared	0.052585	Mean dependent var	0.103009	
Adjusted R-squared	0.044125	S.D. dependent var	1.203451	
S.E. of regression	1.176600	Akaike info criterion	3.176262	
Sum squared resid	310.1026	Schwarz criterion	3.221526	
Log likelihood	-357.5057	F-statistic	6.216352	
Durbin-Watson stat	1.983749	Prob(F-statistic)	0.002358	

El estadístico del test ADF (-2,749934) coincide con el estadístico t de la variable dependiente retardada IRENTA(-1), incluida como regresor en la ecuación estimada.

La hipótesis nula ( $H_0$  : existe una raíz unitaria) se acepta si el estadístico t es menor que los valores críticos de Mackinnon. En este ejemplo, comprobamos que la hipótesis nula se acepta a cualquiera de las de los tres niveles de significación presentados (1%, 5% y 10%), es decir, la serie IRENTA, presenta una raíz unitaria, es decir, no es estacionaria. Adicionalmente, podemos ver que tanto la tendencia como el intercepto son significativos a un 5%.

Es importante destacar que un requisito para que esta prueba sea válida, es que el término de perturbación sea un ruido blanco, por lo cual, se hace necesario ver el correlograma de los residuales



Para que sea ruido blanco, los residuales no deben estar autocorrelacionados. En el correlograma se puede observar que los primeros 6 coeficientes de correlación no son significativos, con lo cual podríamos interpretar que el término de perturbación  $u_t$  es un ruido blanco, por lo tanto la prueba del Dickey-Fuller es válida. En el caso de que no fuera un ruido blanco, se realiza una nueva prueba de Dickey-Fuller aumentada, incluyendo rezagos de la variable en diferencias.

### EJERCICIO N° 33

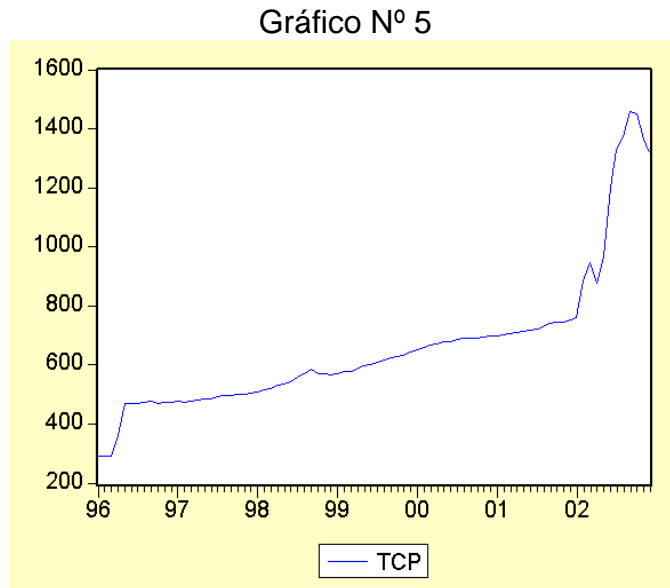
A continuación se presenta un cuadro con el tipo de cambio promedio para Venezuela para el período 1996-2002. Se pide determinar si la serie es estacionaria o no.

**CUADRO N° 1**  
**VENEZUELA - TIPO DE CAMBIO PROMEDIO**  
(millones de US\$)

	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
ENERO	290,00	476,84	507,29	568,84	652,15	699,70	761,55
FEBRERO	290,00	474,40	514,64	577,10	658,51	702,58	884,21
MARZO	290,00	478,40	520,90	579,40	666,12	705,52	947,22
ABRIL	360,47	479,25	530,08	587,29	672,01	709,64	876,54
MAYO	468,89	483,27	537,05	595,63	679,53	714,39	965,48
JUNIO	471,25	485,63	542,00	602,13	680,55	716,69	1196,74
JULIO	470,75	491,25	557,39	610,56	685,21	722,00	1328,98
AGOSTO	474,20	495,90	570,19	615,22	688,89	730,82	1373,93
SEPTIEMBRE	476,12	496,79	584,42	624,48	690,08	742,94	1457,20
OCTUBRE	470,01	498,62	571,25	630,19	692,46	743,07	1452,32
NOVIEMBRE	471,57	499,93	569,25	634,15	695,31	744,73	1366,60
DICIEMBRE	474,73	502,80	566,19	643,35	698,34	751,91	1320,67

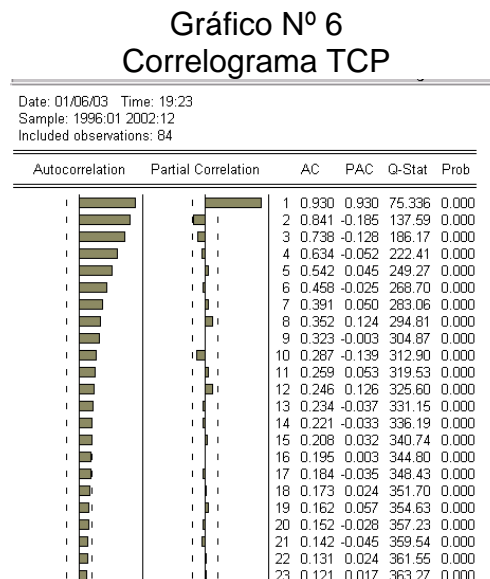
FUENTE: B.C.V.

En primer lugar debemos observar el gráfico de la serie:



En el gráfico N° 5, se observa que la serie de tiempo muestra una clara tendencia ascendente, por lo que la media no puede ser constante, lo que evidencia que la serie no es estacionaria en niveles.

En segundo lugar vemos el correlograma:



Observando el correlograma, vemos como la función de autocorrelación decrece

exponencialmente y de forma lenta, mientras que la función de autocorrelación parcial presenta un valor significativo en el retardo uno, con un coeficiente de

autocorrelación cercano a uno (0,93). Este gráfico puede considerarse como indicativo de la no estacionariedad de la serie, es decir, presenta raíz unitaria.

Para comprobar de forma más exhaustiva esta característica de la serie, procedemos a aplicar la prueba de raíces unitarias. Seleccionando en el cuadro de diálogo de aplicación de la prueba ADF (datos en niveles, tendencia, intercepto y tres rezagos). Eviews nos presenta los siguientes resultados:

ADF Test Statistic	-3.458072	1% Critical Value*	-4.0756
		5% Critical Value	-3.4659
		10% Critical Value	-3.1593

\*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

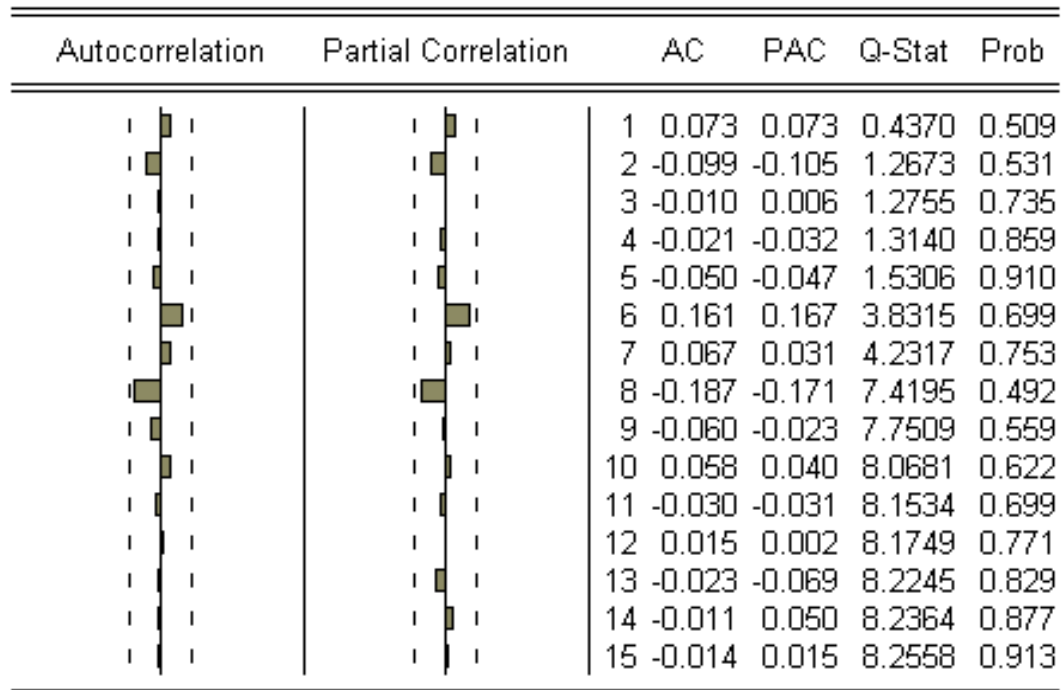
Augmented Dickey-Fuller Test Equation  
Dependent Variable: D(TCP)  
Method: Least Squares  
Date: 01/06/03 Time: 19:40  
Sample(adjusted): 1996:05 2002:12  
Included observations: 80 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TCP(-1)	-0.120775	0.034926	-3.458072	0.0009
D(TCP(-1))	0.861946	0.099642	8.650417	0.0000
D(TCP(-2))	-0.496062	0.113210	-4.381771	0.0000
D(TCP(-3))	0.681069	0.119324	5.707713	0.0000
C	37.43472	13.07977	2.862031	0.0055
@TREND(1996:01)	0.935537	0.273970	3.414738	0.0010

R-squared	0.537253	Mean dependent var	12.00250
Adjusted R-squared	0.505986	S.D. dependent var	39.64425
S.E. of regression	27.86441	Akaike info criterion	9.564616
Sum squared resid	57455.50	Schwarz criterion	9.743268
Log likelihood	-376.5847	F-statistic	17.18289
Durbin-Watson stat	1.805188	Prob(F-statistic)	0.000000

GRAFICO Nº 7  
CORRELOGRAMA DE  
LOS RESIDUOS

Date: 01/06/03 Time: 19:40  
Sample: 1996:01 2002:12  
Included observations: 80



El estadístico ADF (-3,4181) es menor que el valor crítico de Mackinnon a un 5% de significación, por lo que se acepta la hipótesis nula, es decir, la serie TCP presenta raíz unitaria, no es estacionaria.

A continuación se presenta la prueba de Dickey-Fuller para la primera diferencia del tipo de cambio promedio y el correlograma de los residuales:

ADF Test Statistic -4.670409 1% Critical Value\* -4.0771  
5% Critical Value -3.4666  
10% Critical Value -3.1597

Date: 01/06/03 Time: 19:55  
Sample: 1996:01 2002:12  
Included observations: 79

\*Mackinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation  
Dependent Variable: D(TCP,2)  
Method: Least Squares  
Date: 01/06/03 Time: 19:55  
Sample(adjusted): 1996:06 2002:12  
Included observations: 79 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(TCP(-1))	-0.608316	0.130249	-4.670409	0.0000
D(TCP(-1),2)	0.484877	0.136476	3.552845	0.0007
D(TCP(-2),2)	-0.312052	0.102515	-3.043957	0.0032
D(TCP(-3),2)	0.406355	0.109455	3.712521	0.0004
C	-5.111969	6.623539	-0.771788	0.4427
@TREND(1996:01)	0.259469	0.143804	1.804319	0.0753
R-squared	0.583230	Mean dependent var	-1.953797	
Adjusted R-squared	0.554684	S.D. dependent var	40.42725	
S.E. of regression	26.97791	Akaike info criterion	9.500824	
Sum squared resid	53129.96	Schwarz criterion	9.680782	
Log likelihood	-369.2826	F-statistic	20.43131	
Durbin-Watson stat	1.887803	Prob(F-statistic)	0.000000	

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.036	0.036	0.1063	0.744	
2	-0.012	-0.013	0.1185	0.942	
3	-0.018	-0.018	0.1473	0.986	
4	0.013	0.015	0.1627	0.997	
5	-0.050	-0.051	0.3770	0.996	
6	-0.014	-0.010	0.3942	0.999	
7	-0.034	-0.034	0.4975	0.999	
8	-0.096	-0.097	1.3338	0.995	
9	-0.025	-0.018	1.3896	0.998	
10	-0.036	-0.041	1.5076	0.999	
11	-0.037	-0.041	1.6395	0.999	
12	0.016	0.016	1.6646	1.000	
13	-0.027	-0.042	1.7363	1.000	
14	-0.003	-0.007	1.7373	1.000	
15	-0.021	-0.031	1.7803	1.000	

## 7. PRUEBA DE PHILLIPS-PERRON (test PP)

Phillips y Perron<sup>64</sup> propusieron en 1988 un método no paramétrico para controlar la correlación serial de orden elevado en una serie. La prueba de regresión contenida en el test PP es el proceso autorregresivo de primer orden AR(1):

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Mientras que la prueba ADF corrige la correlación serial de orden elevado añadiendo más retardos del término diferenciado de la serie original en el lado derecho de la ecuación, el test PP realiza una corrección del estadístico t sobre el coeficiente en la regresión AR(1) para considerar la correlación serial en el término  $\varepsilon$ .

La distribución asintótica del estadístico t del test PP es la misma que la del estadístico t de la prueba ADF y se contrastan los resultados del test con los valores críticos de Mackinnon. Igual que en la prueba ADF tenemos que especificar si incluimos una constante, constante mas término de tendencia o nada en la regresión, para el test PP además hay que especificar el numero de períodos de correlación serial a incluir.

<sup>64</sup> Pulido, Antonio y Ana María López. Ob.Cit. p.271

Phillips-Perron Unit Root Test on IRENTA				
PP Test Statistic	-2.749934	1% Critical Value*	-4.0015	
		5% Critical Value	-3.4307	
		10% Critical Value	-3.1387	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Lag truncation for Bartlett kernel: 0 (Newey-West suggests: 4)				
Residual variance with no correction	1.366091			
Residual variance with correction	1.366091			
Phillips-Perron Test Equation				
Dependent Variable: D(IRENTA)				
Method: Least Squares				
Date: 01/06/03 Time: 16:34				
Sample(adjusted): 1980:02 1998:12				
Included observations: 227 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
IRENTA(-1)	-0.037743	0.013725	-2.749934	0.0064
C	2.509374	0.996494	2.518202	0.0125
@TREND(1980:01)	0.008192	0.002348	3.489593	0.0006
R-squared	0.052585	Mean dependent var	0.103009	
Adjusted R-squared	0.044125	S.D. dependent var	1.203451	
S.E. of regression	1.176600	Akaike info criterion	3.176262	



## CAPITULO XI

### OTROS TEMAS DE ECONOMETRIA

#### 1. ERROR DE ESPECIFICACION. DEFINICION

Hasta el momento los modelos econométricos estudiados, se han basado, en gran parte, en el supuesto de que el modelo que se va a estimar esté especificado en forma correcta. Una vez que se asume la especificación correcta del modelo, la estimación y prueba del mismo se hacen relativamente sencillas. Sin embargo, en realidad, nunca podemos estar seguros de que un modelo determinado está especificado en forma correcta. Generalmente se examinan más de una probable especificación, intentando encontrar la especificación que describa en mejor forma el proceso bajo estudio.

Los principales errores que se pueden cometer en el momento de especificar un modelo son:

- a) Omisión de una variable relevante.
- b) Inclusión de una variable innecesaria.

#### 2. OMISION DE UNA VARIABLE RELEVANTE.

Supongamos que la ecuación "verdadera" y "correcta" para la demanda de un bien es la siguiente:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i \quad (2.1)$$

Donde se especifica que la cantidad demandada del bien ( $Y_i$ ) está en función del precio de dicho bien ( $X_{1i}$ ) y la publicidad del mismo ( $X_{2i}$ ).

Ahora bien, por equivocación o ignorancia de la relación verdadera, estimamos el siguiente modelo:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + u_i \quad (2.2)$$

estaremos incurriendo en un error de especificación al omitir una variable relevante para explicar el comportamiento de la variable dependiente.

Al no especificar la función de demanda tal como se indica en la ecuación (2.1), el estimador  $\alpha_1$  obtenido en la ecuación (2.2) será sesgado. El sesgo dependerá de la

relación existente entre las dos variables explicativas. Precio y publicidad, y del poder explicativo de la publicidad en función de demanda, es decir el coeficiente. Si la publicidad está correlacionada positivamente con la demanda, y el precio aparece correlacionada positivamente con la publicidad, el estimador mínimo cuadrático  $\alpha_1$  tomará valores mayores que lo realmente debiera, es decir, se sobrestimaré.

Esquemáticamente, las consecuencias de omitir una variable explicativa relevante en el modelo son las siguientes:

- Si la variable excluida  $X_2$  está correlacionada con la variable incluida,  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  son sesgados como también inconsistentes. Es decir  $E(\alpha_0) \neq \beta_0$  y, independientemente del tamaño de la muestra.
- Aun cuando  $X_1$  y  $X_2$  no estén correlacionadas,  $\alpha_0$  es aun sesgado, aun cuando  $\alpha_1$  sea ahora insesgado.
- La varianza de la perturbación  $\sigma^2$  está incorrectamente estimada.
- La varianza del coeficiente  $\alpha_1$  es un estimador sesgado de la varianza verdadera de.
- En consecuencia, es probable que el intervalo de confianza usual y los procedimientos de prueba de hipótesis conduzcan conclusiones equivocadas sobre la significancia estadística de los coeficientes estimados.

Este sesgo de especificación cuantitativamente será igual a:

$$E(\alpha_1) = \beta_1 + \delta_1 \beta_2 \quad (2.3)$$

donde  $\delta_1$  es igual a la pendiente de la regresión entre las dos variables explicativas

$$X_{1i} = \delta_0 + \delta_1 X_{2i} + u_i$$

alternativamente la ecuación (2.3) se puede escribir de la siguiente forma:

$$E(\alpha_1) = \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum x_1 x_2}{\sum x_2^2} = \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum X_1 X_2 - N \bar{X}_1 \bar{X}_2}{\sum X_2^2 - N \bar{X}_2^2}$$

Es importante recordar que el especificar mal un modelo puede traer como consecuencia la presencia de autocorrelación en el modelo, por lo tanto la utilización del estadístico Durbin-Watson, y el estudio de los residuales pueden ser una metodología adecuada para sospechar la presencia de un sesgo de especificación por la omisión de una variable relevante.

### 3. INCLUSION DE VARIABLES IRRELEVANTES.

Ahora supongamos que la función verdadera es la (2.2), y nosotros estimamos la (2.1), donde, no es significativamente diferente de cero. La consecuencia directa es que si  $X_1$  y  $X_2$  están correlacionados, la varianza de  $\beta_1$  será mayor a la varianza de  $\alpha_1$  provocando una pérdida en la eficiencia de los estimadores de las variables relevantes. Este aumento puede incluso llevarnos a aceptar la hipótesis nula al aplicar el estadístico t para verificar la significación individual de los coeficientes de variables que realmente son relevantes.

Esquemáticamente las consecuencias de incluir una variable irrelevante son:

- Los estimadores MCO de los coeficientes del modelo incorrecto son todos insesgados y consistentes, es decir  $E(\beta_0) = \alpha_0$  y.
- La varianza del error  $\sigma^2$  está correctamente estimada.
- Los procedimientos usuales de intervalos de confianza y de prueba de hipótesis continúan siendo válidos.
- Sin embargo, los estimadores MCO generalmente serán ineficientes, es decir, sus varianzas generalmente serán más grandes que las del verdadero modelo.

Una forma de comprobar si una variable es irrelevante o no, es la observar el comportamiento de los errores estándar de las demás variables explicativas antes y después de incluir la variable en cuestión.

### 4. OMISION VERSUS INCLUSION DE VARIABLES<sup>65</sup>

A continuación se presenta un cuadro resumen en donde se presentan las posibles situaciones de sesgo de especificación.

DECISION	REALIDAD	
	$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + U_i$	$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + U_i$
$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + U_i$	(1) Estimado mínimo cuadrático insesgado y	(2) OMISIO DE VARIABLE RELEVANTE: Estima Mco con restricción sesgado con menor varianza que en
$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + U_i$	(3) INCLUSION DE VARIABLE IRRELEVANTE: Estimado MCO insesgado con varianza mayor que en	(4) Estimado mínimo cuadrático insesgado y

<sup>65</sup> Martín Guillermina, José María Labeaga y Francisco Mochón. Introducción a la Econometría. Prentice Hall. España. 1997.

### Ejercicio<sup>66</sup>Nº 34

En un estudio de la demanda de dinero a largo y a corto plazos, Gregory Chow estimó la siguiente ecuación de demanda (los errores estándar están entre paréntesis y todos los datos son trimestrales):

$$\hat{M}_t = 0,1365 + 1,069Y_{pt} - 0,1321Y_t - 0,7476R_t$$

(0,148) (0,139) (0,054)

$$R^2 = 0,9965$$

donde M = logaritmo natural de la reserva total de dinero.

$Y_p$  = logaritmo natural del ingreso permanente.

Y = logaritmo natural del ingreso actual.

R = logaritmo natural de la tasa de interés.

En vista de que Chow ve la ecuación estimada como una ecuación a largo plazo para la demanda de dinero, concluye que el ingreso permanente es más importante que el dinero actual como la restricción a largo plazo sobre bienes individuales. (La variable Y es insignificante, mientras que  $Y_p$  es altamente significativa.) Sin embargo, uno puede afirmar que la ecuación estimada es de hecho una mala especificación de la ecuación correcta para la demanda de dinero a largo plazo. Taylor y Newhouse afirman que la especificación correcta es:

$$M_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{pt} + \beta_3 Y_t + \beta_4 R_t + \beta_5 M_{t-1} + \varepsilon_t$$

Si la ecuación anterior es correcta, esperaríamos que los coeficientes de la ecuación estimada de Chow fueran sesgados.

Si la variable  $M_{t-1}$  no está disponible, tendremos que especular acerca de extensión de cualquier sesgo de especificación que esté presente. Sin embargo, en este ejemplo particular  $M_{t-1}$  está disponible, en vista de que implica un rezago de un período de una variable presente en la ecuación mal especificada. Dado que se sabe que  $M_{t-1}$  y  $Y_{pt}$  están altamente correlacionados y esperamos que el signo de  $M_{t-1}$  sea positivo cuando se ejecute la ecuación especificada en forma correcta, predeciríamos que el sesgo es positivo y considerable. En otras palabras, la extensión de la importancia del ingreso permanente es exagerada debido al error de

<sup>66</sup> Pindyck, Robert S. y Daniel L. Rubinfeld. Econometría modelos y pronósticos. Mc Graw Hill. Mexico.2001.

especificación. Esta suposición se corrobora cuando se estima el modelo especificado en forma correcta. Los resultados son los siguientes:

$$\hat{M}_t = 0,3067 + 0,06158Y_{pt} + 0,3274Y_t - 0,3325R_t + 0,5878M_{t-1}$$

$$(0,143) \quad (0,094) \quad (0,059) \quad (0,067)$$

$$R^2 = 0,9988$$

El coeficiente  $M_{t-1}$  es positivo y significativo, mientras que el coeficiente  $Y_{pt}$  es positivo pero es no significativo en el nivel de 5%. Por tanto, la conclusión original debería revisarse para establecer que el ingreso actual es más importante que el ingreso permanente para explicar la demanda de dinero a largo plazo.

## 5. EVALUACION DE MODELOS

En capítulos anteriores, se planteó que para realizar la evaluación de un modelo econométrico es necesario utilizar el coeficiente de determinación ( $R^2$ ) y las pruebas  $T$  y  $F$ . A continuación se completará el proceso de evaluación mediante ciertas medidas que es posible establecer, bien en la fase de construcción del mismo, o bien, durante la aplicación del modelo.

a) *Medidas sobre los errores: error cuadrático medio, Error medio absoluto y porcentaje de error.*

En referencia a las medidas establecidas sobre los errores o residuos., a parte del estimador insesgado de la varianza de las perturbaciones  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-k}$  se pueden analizar los errores absolutos y relativos (porcentajes de error), así como las correspondientes medias y desviaciones típicas.

Dado los supuestos del modelo clásico, se debe cumplir que  $\sum \hat{u}_i = 0$  y por lo tanto que  $\bar{u} = 0$  con lo que el error cuadrático medio ( $S_u^2$ ) coincidirá con la varianza residual  $S_u^2 = \hat{\sigma}^2$

$$S_u^2 = \frac{\sum (\hat{u}_i - \bar{u})^2}{n} = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n}$$

Dada la nulidad del error medio, puede interesar conocer el error medio absoluto:

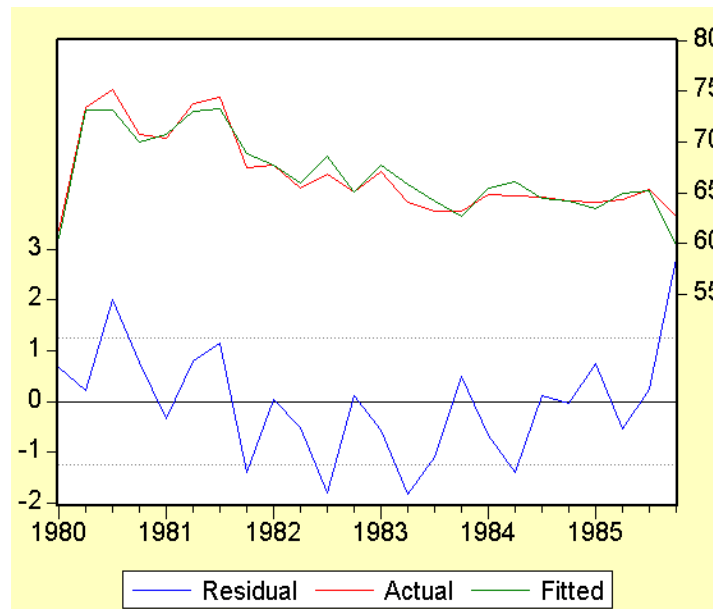
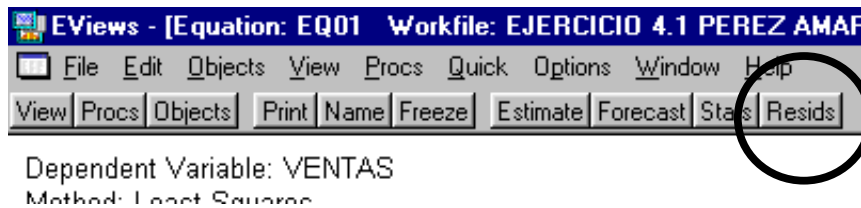
$$|\bar{u}| = \frac{\sum |\hat{u}_i|}{n}$$

o el porcentaje medio del error

$$\frac{\sum \left| \frac{\hat{u}_i}{y_i} \right|}{n}$$

*b) Representación gráfica de los errores.*

Con respecto a la representación gráfica de los errores podemos realizar el dibujo de la líneas correspondientes a los valores reales y estimados de la variable endógena, por diferencia entre los cuales quedan representados los residuos o errores de predicción para el período muestral. También se puede representar los errores sobre el eje cero de abscisas correspondiente a su valor medio nulo.. El paquete Eviews nos permite obtener los dos gráficos indicados. Teniendo activo la salida del modelo, seleccionamos en el menú secundario, Resids.



Para analizar la fiabilidad del modelo se toma en cuenta la mayor o menor distancia de los valores estimados y reales, y observando el error sistemático (puntos situados principalmente en la zona de sub o sobreestimación).

c) *Coeficiente de desigualdad de Theil..*

A partir de los valores estimados y reales de la variable endógena, puede definirse el modelo.

$$\hat{y}_i = \alpha + \beta y_i \quad (\beta > 0)$$

para el caso de una predicción perfecta no sólo supondrá que  $R^2 = 1$ , sino que deberá cumplirse que  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ , a fin de que coincidan punto a punto ambas series de valores. Concretamente, el coeficiente de determinación así obtenido no aporta ninguna información adicional.

Basándose en estos supuestos, Theil establece el “coeficiente de desigualdad” que nos va a permitir,. Mediante su aplicación, analizar la bondad de predicción. Definimos  $U$ , como el coeficiente de desigualdad entre  $\hat{y}_i$  e  $y_i$ , a partir de la siguiente expresión aplicada a los porcentajes de cambio respectivos.

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (\Delta \hat{y}_i - \Delta y_i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum \Delta \hat{y}_i^2} + \sqrt{\frac{1}{n} \sum \Delta y_i^2}}$$

El valor del coeficiente esta comprendido entre 0 y 1, excepto en el caso de que tanto las predicciones como los valores reales sean todos cero, ya que entonces el coeficiente será indeterminado.

En caso de que  $U = 0$ , implicaría que los valores de predicción coinciden con los reales, es el caso de predicción perfecta.

En caso de que  $U = 1$ , implicaría una predicción totalmente errónea. Este valor puede obedecer: i) Predicciones nulas para valores reales distintas a cero; ii) Predicciones no nulas sobre valores iguales a cero; iii) que las predicciones equivoquen sistemáticamente el signo del cambio.

## TABLAS



### Puntos porcentuales de la distribución t

<b>Pr g de l</b>	<b>0,25 0,50</b>	<b>0,10 0,20</b>	<b>0,05 0,10</b>	<b>0,025 0,05</b>	<b>0,01 0,02</b>	<b>0,005 0,01</b>	<b>0,001 0,002</b>
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,310
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,686	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160

Nota: La primera columna corresponde a los grados de libertad (n-k)

La probabilidad más baja que aparece en el encabezamiento de cada columna es el área en una cola; la probabilidad mas alta es el área en ambas colas.

**Puntos porcentuales de la distribución F**

g. de l. para el denominador (N-K)	g. de l. para el numerador (K-1)							
	Pr	1	2	3	4	5	6	7
1	0.25	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10
	0.10	39.90	49.50	53.60	55.80	57.20	58.20	58.90
	0.05	161.00	200.00	216.00	225.00	230.00	234.00	237.00
2	0.25	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34
	0.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35
	0.05	18.50	19.00	19.20	19.20	19.30	19.30	19.40
	0.01	98.50	99.00	99.20	99.20	99.33	99.30	99.40
3	0.25	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43
	0.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27
	0.05	10.10	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89
	0.01	34.10	30.80	29.50	28.70	28.20	27.90	27.70
4	0.25	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08
	0.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98
	0.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09
	0.01	21.20	18.00	16.70	16.00	15.50	15.20	15.00
5	0.25	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89
	0.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37
	0.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88
	0.01	16.30	13.30	12.10	11.40	11.00	10.70	10.50
6	0.25	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78
	0.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01
	0.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21
	0.01	13.70	10.90	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26
7	0.25	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70
	0.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78
	0.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79
	0.01	12.20	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99
8	0.25	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64
	0.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62
	0.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50
	0.01	11.30	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18
9	0.25	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60
	0.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51
	0.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29
	0.01	10.60	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61

**Puntos porcentuales de la distribución F (continuación...)**

g. de l. para el denominador (N-K)	g. de l. para el numerador (K-1)							
	Pr	1	2	3	4	5	6	7
<b>10</b>	0.25	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57
	0.10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41
	0.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14
	0.01	10.00	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20
<b>11</b>	0.25	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54
	0.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34
	0.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01
	0.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89
<b>12</b>	0.25	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52
	0.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28
	0.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91
	0.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64
<b>13</b>	0.25	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50
	0.10	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23
	0.05	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83
	0.01	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44
<b>14</b>	0.25	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49
	0.10	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19
	0.05	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76
	0.01	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28
<b>15</b>	0.25	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47
	0.10	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16
	0.05	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71
	0.01	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14
<b>16</b>	0.25	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46
	0.10	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13
	0.05	4.49	3.63	3.24	3.10	2.85	2.74	2.66
	0.01	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03
<b>17</b>	0.25	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45
	0.10	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10
	0.05	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61
	0.01	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93
<b>18</b>	0.25	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44
	0.10	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08
	0.05	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58
	0.01	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84

**Estadístico d de Durbin-Watson: puntos de significancia de dl y du  
al nivel de significancia del 5%**

n	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5		K=6	
	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
6	0.610	1.400										
7	0.700	1.356	0.467	1.896								
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.368	2.287						
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588				
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822		
11	0.927	1.324	0.658	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.316	2.645	0.203	3.005
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.379	2.506	0.268	2.832
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.445	2.390	0.328	2.692
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296	0.389	2.572
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.447	2.472
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.554	2.318
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.603	2.257
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.692	2.162
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.732	2.124
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.769	2.090
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.804	2.061
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.012
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.951	1.958
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.975	1.944
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825	1.020	1.920
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819	1.041	1.909
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813	1.061	1.900
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	1.080	1.891
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803	1.097	1.884
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	1.114	1.877
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795	1.131	1.870
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	1.146	1.864
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	1.161	1.859
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786	1.175	1.854
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776	1.238	1.835
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.291	1.822

Nota: K = número de variables explicatorias (Nº de X), n = número de observaciones

**Estadístico d de Durbin-Watson: puntos de significancia de dl y du**  
**continuación**

n	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5		K=6	
	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du	dl	du
<b>55</b>	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.334	1.814
<b>60</b>	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767	1.372	1.808
<b>65</b>	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767	1.404	1.805
<b>70</b>	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768	1.433	1.802
<b>75</b>	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770	1.458	1.801
<b>80</b>	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772	1.480	1.801
<b>85</b>	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774	1.500	1.801
<b>90</b>	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776	1.518	1.801
<b>95</b>	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778	1.535	1.802
<b>100</b>	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780	1.550	1.803
<b>150</b>	1.720	1.746	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802	1.651	1.817
<b>200</b>	1.758	1.778	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.810	1.718	1.820	1.707	1.831

Nota: K = número de variables explicatorias (Nº de X), n = número de observaciones

## BIBLIOGRAFIA

- ARMENTA FRAIRE, LETICIA. JOSE DE LA CRUZ GALLEGOS Y LUIS ALEJANDRO LAGUNES TOLEDO. Modelo de análisis y Prospectiva Económica Aplicada MAPEA, Un Instrumento de Simulación y Pronostico Econométrico para los Tomadores de Decisiones. Editorial Trillas. Mexico. 2001
- AZNAR, ANTONIO Y FRANCISCO JAVIER TRIVEZ. Métodos de Predicción en Economía. Vol. 1. Editorial Ariel S.A. Barcelona. 1993
- BALTAGI, DAVID H. Econometrics. Springer-Verlag. Germany. 1998.
- BROOKS, CHRIS. Introductory Econometric for Finance. Cambridge University Press. United Kingdom. 2002
- CARRASCAL A, URSICINO, YOLANDA GONZÁLEZ G. Y BEATRIZ RODRÍGUEZ P. Análisis Econométrico con Eviews. RA – MA Editorial. Madrid. 2001.
- CHARENZA, WOJCIECH AND DEREK F. DEADMAN. New Directions in Econometric Practice. Second Edition. Edward Elgar Publishing Limited. Cheltenham. UK. 1997.
- CHIANG, ALPHA C. Métodos Fundamentales de Economía Matemática. Tercera Edición. McGraw-Hill. México.1993.
- DAVIDSON, RUSSELL Y JAMES G. MACKINNON. Estimation and Inference in Econometrics. Oxford University Press. New York. 1993
- DAVISON, JAMES. Econometric Theory. Publishers Ltd. USA. 2000
- DÍAZ FERNÁNDEZ, MONTSERRAT Y MARÍA DEL MAR LLORENTE MARRÓN. Econometría. Ediciones Pirámide. Madrid 1998.
- DHRYMES, PHOEBUS J. Mathematics for Econometrics. Third Edition. Springer - Verlag New York Inc. 2000.
- FAVERO, CARLOS A. Applied Macroeconometrics. OXFORD University Press. Great Britain. 2001
- FERNANDEZ ANA, PILAR GONZALEZ, MARTA REGULEZ, PAZ MORAL Y VICTORIA ESTEBAN. Ejercicios de Econometría. McGraw Hill/Inter5americana de España, S.A.U. Serie Shaum. España. 2005.
- GOLDBERGER, ARTHUR S. A Course in Econometrics. Harvard University press. Cambridge, Masachusettts. 1991

- GOLDBERGER, ARTHUR S. Introductory Econometrics. Harvard University press. Cambridge, Massachusetts. 1998
- GREENE, WILLIAM H. Análisis Económico. Tercera edición, Prentice Hall. Madrid.1999.
- GUJARATI, DAMODAR N. Econometría. cuarta edición. Mc. Graw Hill. Mexico. 2004.
- GUJARATI, DAMODAR N. Principios de Econometría. tercera edición. Mc. Graw Hill. España. 2006.
- HENDRY, DAVID F. Dynamic Econometrics. Oxford University Press. New York. 1995.
- HERNÁNDEZ ALONSO, JOSE. Ejercicios de Econometría. Segunda edición
- HYASHI, FUMIO. Econometrics. Princeton University Press. USA. 2000
- INTRILIGATOR MICHAEL D. Modelos Económicos, Técnicas y Aplicaciones. Fondo de Cultura Económica. México.1990.
- JOHNTON, JACK Y JOHN DINARDO. Econometric Methods. Fourth Edition. McGraw Hill Internacional Editions. Economics Series. Singapore. 1997
- KELEJIAN, HARRY H. Y WALLACE E. OATES. Introducción a la Econometría. Tercera edición. Harla S.A. México.1989.
- KENNEDY, PETER. Introducción a la econometría. Fondo de Cultura Económica. México. 1997.
- KLEIMAN, ARIEL Y ELENA K. DE KLEIMAN. Matrices, Aplicaciones Matemáticas en Economía y Administración. Editorial LIMUSA S.A. México. 2000.
- KMENTA, JAN. Elementos de Econometría. Segunda Edición. VICENS universidad. España. 1980.
- LEVIN, RICHARD I. Y DAVID S. RUBIN. Estadística para Administradores. Sexta edición. Prentice Hall. México.1996.
- MADDALA G.S. Econometría. Mc Graw Hill. España.1985.
- MARTÍN, GUILLERMINA; JOSÉ MARÍA LABEAGA Y FRANCISCO MOCHÓN. Introducción a la Econometría. Prentice Hall. España.1997.

- MATA MOLLEJAS, LUIS Y JOSÉ NIÑO DÍAZ. Revisión de los Métodos Cuantitativos en la Economía. Fondo Editorial Tropykos y Comisión de Estudios de Postgrados. U.C.V. Caracas. 2000
- NOVALES, ALFONSO. Econometría. Segunda edición. Mc. Graw Hill. España.1993.
- ORTUZAR S. JUAN DE DIOS. Modelos Econométricos de Elección Discreta. Ediciones Universidad Católica de Chile.. Santiago, Chile. 2000
- PENA TRAPERO, J. BERNARDO, JULIO A. ESTAVILLO DORADO, MARÍA ESTHER GALINDO F., MARÍA JOSÉ LECETA REY Y MARÍA DEL MAR ZAMORA SANZ. Cien Ejercicios de Econometría. Ediciones Pirámide S.A. Madrid.1999.
- PÉREZ AMARAL, TEODOSIO, PABLO AMORÓS GONZÁLEZ Y SILVIA RELLOSO PEREDA. Ejercicios de Econometría Empresarial. Mc Graw Hill. Madrid. 1993
- PINDIYCK, ROBERT S. Y DANIEL L. RUBENFELD. Econometría, modelos y pronóstico. Mc. Graw Hill. México. 2001.
- PULIDO, ANTONIO Y ANA MARÍA LÓPEZ. Predicción y Simulación Aplicada a la Economía de Empresas. Ediciones Pirámide S.A.. Madrid. 1999.
- SALAS, JAVIER. Econometría aplicada a los países en Desarrollo, el caso mexicano. Fondo de Cultura Económica S.A..México.1990
- SALVATORE, DOMINICK. Econometría. Mc. Graw Hill. Serie Schaum. México. 1985.
- SANCHEZ GONZÁLEZ, CARLOS. Métodos Econométricos. Ariel Economía. España 1999.
- SCHMIDT, PETER. Econometrics. Marcel Dekker, INC. USA. 1976.
- SOTO NEGRIN, ARMANDO: Iniciación a la Estadística. Editorial José Martí. Caracas.1982.
- SZENERG, MICHAEL, editor. Grandes Economistas de Hoy. Editorial Debate S.A Madrid. 1992.
- TRIVEZ BIELSA, FRANCISCO JAVIER. Introducción a la Econometría. Ediciones Pirámide. Madrid. 1996.
- VÁSQUEZ, MAURA Y GUILLERMO RAMÍREZ. Aspectos Teóricos del Álgebra Matricial con Aplicaciones Estadísticas. Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, UCV. Caracas.



- VIAL, JOAQUIN. "Especificación y Evaluación de Modelos Econométricos". Serie Docente N° 3. Corporación de Investigaciones Económicas para América Latina (CIEPLAN). Santiago de Chile. 1991.
- WOOLDIGDE, JEFFREY M. Introducción a la Econometría. Thomson Learning. México, 2001.
- WOOLDIGDE, JEFFREY M. Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. 2001.