INVESTIGACION OPERATIVA

Es el procedimiento que nos permite adoptar modelos para asignar mejoraos recursos con la intención de optimizar una función objetiva.

Estos modelos resuelven problemas de maximización y minimización, asignaciones, rutas criticas, etc. Aplicados a la economía administración, finanzas, ingeniería y otras disciplinas.

La aplicación de la investigación operativa en problemas específicos tiene por objetivo la determinación de una buena decisión, así como asumiendo un criterio preestablecido para hallarla la solución optima.

La investigación de operaciones en su intención de resolver los problemas hace uso de la programación lineal, y dinámica.

ETAPAS DE UN ESTUDIO DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

1.-FORMULACION DE PROBLEMA. **-** Debe considerar:

¿Cuál es el objetivo?

2.-CONSTRUCCION DEL MODELO MATEMATICO Y PUESTA EN PRÁCTICA

3.-OBTENCION DE UNA SOLUCION

4.-VERIFICACION DEL MODELO Y LA SOLUCION ÓPTIMA

5.-ESTABLECIMIENTO DE CONTROLES.

CAP II PROGRAMACION LINEA l

3.1 Introducción a la programación lineal

Es una técnica de modelado matemático diseñado para optimizar el empleo de recursos limitados.

-Se aplica exitosamente en la agricultura industria el transporte, la economía, otros

Es una técnica matemática de optimización que consiste en la maximización o minimización de una función lineal llamada función objetiva, sujeto a restricciones lineales.

La programación lineal PL tiene propósito de construir modelos adecuados de problemas de decisión, que es muy solicitada en la industria, el gobierno, y la economía, y la ingeniería. Siendo su estructura la más simple.

Naturaleza de PL

Máximo o minimización

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n$$

Sujeto a las restricciones estructurales

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{n}x_n \left| \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \right| b_i \qquad i = 1,2,3,...,n$$

Y las restricciones de no negatividad

$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,3,...n$

3.2.-Construcción y presentación del modelo PL.-Esta etapa de construcción y presentación consta de tres elementos básicos.

Primer paso:

Definir las variables de decisión. -Son aquellas magnitudes que nos interesa determinar.

Ejemplo

Empresas Carlitos fabrica muñecas y carritos

X_1= Numero de muñecas a producir en un día

X_2=Numero de carritos a producir en un día

Segundo paso

Construir la función objetivo. - Un objetivo es lo que deseamos alcanzar

Es una relación matemática que nos permite relacionar variables de decisión

Ejemplo

Si Z representa la utilidad diaria total de la empresa carlitos, en miles de nuevos soles entonces tenemos:

$Z = 5x_1 + 4x_2$

Tercer paso

Ilustrar las restricciones. -Son las limitaciones que se encuentran en un determinado problema. Las restricciones se van a expresar a través de desigualdades flexibles como: $\leq, \geq, =$

Ejemplo

Empleo de maquinarias:

Horas de disponibilidad de maquina 1, entonces $2x_1 + 5x_2 \leq 50$

Horas de disponibilidad de maquinaria 2, entonces $4x_1 \leq 40$

Horas de disponibilidad de maquinaria 3, entonces $2x_1 + x_2 \leq 30$

Cuarto paso

Condición de no negatividad. - Las variables de decisión no pueden tomar valores negativos, en la respuesta a la solución de un problema.

PLANTEAMIENTO DEL MODELO LINEAL

Ejemplo 1

La compañía "empresa Carlitos" produce baldes y jarras de plástico: Para producir cada balde se requiere dos horas de la maquina Nº 1, 4 hrs de la maquina Nº 2 y 2 hrs de la maquinaria Nº 3. Para producir cada jarra se requiere 5 hrs de la maquina Nº 1 y una hr. de maquina Nº 3. La disponibilidad de la maquina Nº 1 es de 50 hrs, la disponibilidad de maquina Nº 2 es de 40 hrs y la disponibilidad de maquina Nº 3 es de 30 hrs. Los baldes reportan S/ 5 de ganancia por unidad y las jarras reportan S/6 de ganancia por unidad. El gerente desea determinar cuántas jarras y baldes debe producir para maximizar la ganancia

i). -Variables de decisión

X_1= Cantidad de baldes

X_2=Cantidad de jarras

ii). -Restricciones

$2x_1 + 5x_2 \leq 50$ Horas de disponibilidad de maquinaria Nº 1

$4x_1 \leq 40$ Horas de disponibilidad de maquinaria Nº 2

$2x_1 + x_2 \leq 30$ Horas de disponibilidad de maquinaria Nº 3

iii). -Función Objetiva. -

Maximización $Z = 5x_1 + 6x_2$

iv). - Condición de no negatividad

$x_1, x_2 \geq 0$

Producto	Maqui 1	Maqui 2	Maqui 3	Ganancia
x1=baldes	2	4	2	S/. 5.00
x2=jarras	5		1	S/. 4.00
Disponibilidad hrs	50	40	30	

Ejemplo2

Una pequeña fábrica produce pinturas para interiores de casa y exteriores de casas para su distribución del área. Si utiliza dos materias primas básicas A y B para producir las pinturas. La disponibilidad máxima de A es de 6 toneladas diaria; la de B es de 8 toneladas por días. Los requisitos diarios de materia prima prima por tonelada métricas de pintura para interiores y exteriores se resumen en la tabla siguiente:

Producto pinturas	Toneladas de materia prima por tonelada de pintura		
Materias primas	exteriores	interiores	Disponibilidad máxima (toneladas)
Materia prima A	1	2	6
Materia prima B	2	1	8

Un estudio de mercado ha establecido que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la de pintura de exteriores en más de una tonelada. El estudio señala así mismo que la demanda máxima de pintura para interiores está limitado a 2 toneladas diarias. El precio al por mayor por tonelada es S/ .3000 para pintura de exteriores y S/ 2000 para las pinturas de interiores. ¿Cuánta pintura para exteriores e interiores debe producir la compañía todos los días para maximizar el ingreso bruto?

Solución

i). -Variables de decisión

X_1= Cantidad de pintura para exteriores

X_2=Cantidad de pintura para interiores

ii). -Restricciones

$x_1 + 2x_2 \leq 6$ Toneladas

$2x_1 + x_2 \leq 8$ Toneladas

$x_2 \leq x_1 + 1 \Rightarrow x_2 - x_1$ Toneladas

$x_2 \leq 2$ Toneladas

iii). -Función Objetiva. -

Maximización $Z = 3000x_1 + 2000x_2$

iv). - Condición de no negatividad

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ejemplo 3

Una fábrica produce mesas y sillas, tarda 2 hrs en ensamblar una mesa y 30 minutos en armadura una silla. El ensamblaje lo realiza 4 trabajadores sobre la base de un solo turno diario de 8 hrs. Los clientes suelen comprar cuando menos 4 sillas cada mes, lo que significa que la fabrica debe producir por lo menos 4 veces mas sillas por mesas. El precio de venta S/ 150 por mesa y S/ 50. Determine la combinación de mesas y sillas en la producción diaria que maximiza el ingreso total diario de la mencionada fábrica.

Solución

i). -

i). -Variables de decisión

X_1= numero de mesas a producir

X_2= numero de sillas a producir

ii). -Restricciones

$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 32$ Horas de disponibilidad

$\frac{x_1}{x_2} \leq \frac{1}{4}$ Horas de disponibilidad

iii). -Función Objetiva. -

Maximización $Z = 150x_1 + 50x_2$

iv). - Condición de no negatividad

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ejemplo 4

Una compañía de productos electrónicos produce 2 modelos de radio, cada uno en su línea de producción de volumen diferente. La capacidad diaria de la primera línea es de 60 unidades y de la segunda es de 75 radios. Cada unidad del primer modelo utiliza 10 piezas de cierto componente electrónico, en tanto que en cada unidad del segundo modelo requiere 8 piezas del mismo componente. La disponibilidad diaria máxima del componente especial es de las 800 piezas.

La ganancia por unidad de los modelos 1 y 2 es S/ 30y S/ 20 respectivamente ¿Determina la producción diaria optima de cada modelo de radio?

Solución

i). -Variables de decisión

X_1= modelo de radio 1

X_2= modelo de radio 2

ii). -Restricciones

$x_1 \leq 60$ Unidades de radio

$x_2 \leq 75$ Unidades de radio

$10x_1 + 8x_2 \leq 800$ Piezas

iii). -Función Objetiva. -

Maximización $Z = 30x_1 + 20x_2$

iv). - Condición de no negatividad

$x_1, x_2 \geq 0$

Ejemplo5

Un agricultor posee 200 cerdos que consumen 90 lb de comida especial todos los días. El alimento se prepara como mezclado de maíz y harina de soya con las siguientes composiciones

Alimento	Libra por día de alimentos			
	Calcio	Proteína	fibra	costo en soles
maíz	0.001	0.09	0.02	0.2
harina de soya	0.002	0.6	0.06	0.6

Los requisitos diarios de alimentos de los cerdos son:

1.-Cuando menos 1% del calcio

2.-Por lo menos 30% de proteínas

3.-Máximo 5% de fibra

Determine la mezcla de alimentos con el minino costo por día

i). -

i). -Variables de decisión

X_1= libras de maíz

X_2=libras de harina de soya

ii). -Restricciones

$$x_1 + x_2 = 90$$

$$0.001x_1 + 0.002x_2 \geq 0.9$$

$$0.09x_1 + 0.60x_2 \geq 27$$

$$0.02x_1 + 0.06x_2 \geq 4.5$$

iii). -Función Objetiva. -

Maximización $Z = 0.20x_1 + 0.60x_2$

iv). - Condición de no negatividad

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.-Cuando menos; $90x0.01 = 0.9$

2.-por lo menos $90x0.3 = 27$

3.-máximo; $90x0.05 = 4.5$

2.3 METODOS DE SOLUCION INICIAL

Método Grafico

Definición. -Es una técnica matemática para hallar la solución óptima a un problema dado dentro de un conjunto de soluciones factibles. La técnica se puede usar para resolver varios tipos de problemas comerciales complicados, como los de maximización de ganancias o minimización de costos

Desigualdades. -Una desigualdad es una preposición que indica que una expresión algebraica es mayor que o menor que otra expresión. Las tres reglas para las operaciones con desigualdades son:

1.-Si se suma o se resta el mismo numero a ambos lados de una desigualdad estas subsisten en su mismo sentido Ejemplo

7+3>2+3

2.-Si se multiplican o dividen ambos lados de una desigualdad por un mismo número positivo esta subsiste y conserva el mismo sentido ejemplo

10x2>9x2

3.-Si se multiplica o divide los dos lados de una desigualdad por el mismo numero negativo, la desigualdad subsiste, pero cambia al sentido ejemplo inicial 10>6 ahora 10x(-2)<6x(-2). Las desigualdades son importantes en la ilustración de PL.

Método Grafico para los problemas de máximos

Los pasos para resolver problemas son los siguientes:

Derive un grupo de ecuaciones y desigualdades lineales basadas en las condiciones específicas o restricciones dadas en el problema.

2.-Resuelva el grupo de ecuaciones y desigualdades para la solución optima basada en la función que se ha de maximizar o minimizar, la cual se conoce como función objetiva.

Método grafico para los problemas de mínimos

Estos problemas buscan que su función objetivo le permita lograr el costo mínimo posible ejemplo ítem

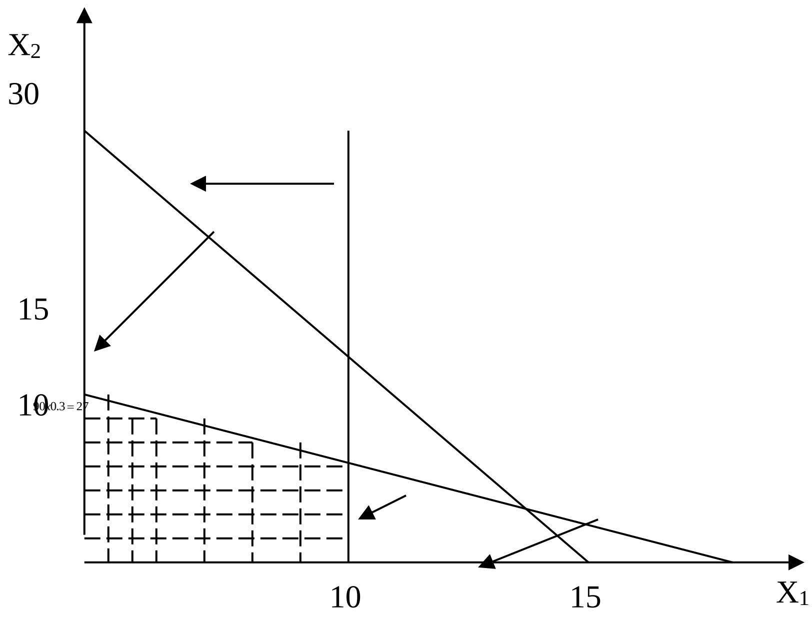
Ejemplo

$$\max \quad Z = 5x_1 + 6x_2$$

$s.a$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &\le 50 \\ 4x_1 \quad\quad &\le 40 \\ 2x_1 + \ x_2 &\le 50 \\ x_1,\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

Solución



$x_2 = 10 - \frac{2}{5}x_1$ (1)

$x_1 = 10$ (2)

$x_2 = 30 - 2x_1$ (3)

De (1) y (2)

$x_1 = 10$
$X_2 = 6$

De (1) y (3)

$x_1 = 12.5$
$X_5 = 5$

El óptimos es (10,6) Z=86 es un máxima

$x_m + x_s = 90 \Rightarrow x_s = 90 - x_m$ (4)

$0.001x_m + 0.002x_s = 0.09 \Rightarrow x_s = \frac{0.05}{0.002} - \frac{0.001}{0.002}x_m$ (1)

$0.09x_m + 0.60x_s = 27 \Rightarrow x_s = \frac{27}{0.6} - \frac{0.09}{0.6}x_m$ (2)

$0.02x_m + 0.06x_s = 4.5 \Rightarrow x_s = \frac{4.5}{0.06} - \frac{0.02}{0.06}x_m$ (3)

De (1) y (2)

$\frac{0.05}{0.002} - \frac{0.001}{0.002}x_m = \frac{27}{0.6} - \frac{0.09}{0.6}x_m$

$45 - 0.5x_m = 45 - 0.15x_m$

$x_m = 0$

$x_s = 45 - 0.5(0)$

$x_s = 45$

De (1) y (3)

$45 - 0.5x_m = 75 - 0.33x_m$

$-0.5x_m + 0.33x_m = 30$

$x_m = -176.47$

$x_s = 16.76$

De (2) y (3)

$$45 - 0.15x_m = 75 - 0.33x_m$$
$$x_m = 166$$
$$x_s = 20$$

De (1) y (4)

$$45 - 0.5x_m = 90 - x_m$$
$$x_m = 90$$
$$x_s = 0$$

De (3) y (4)

$$75 - 0.33x_m = 90 - x_m =$$
$$x_m = 22.38$$
$$x_s = 67.61$$

De (2) y (4)

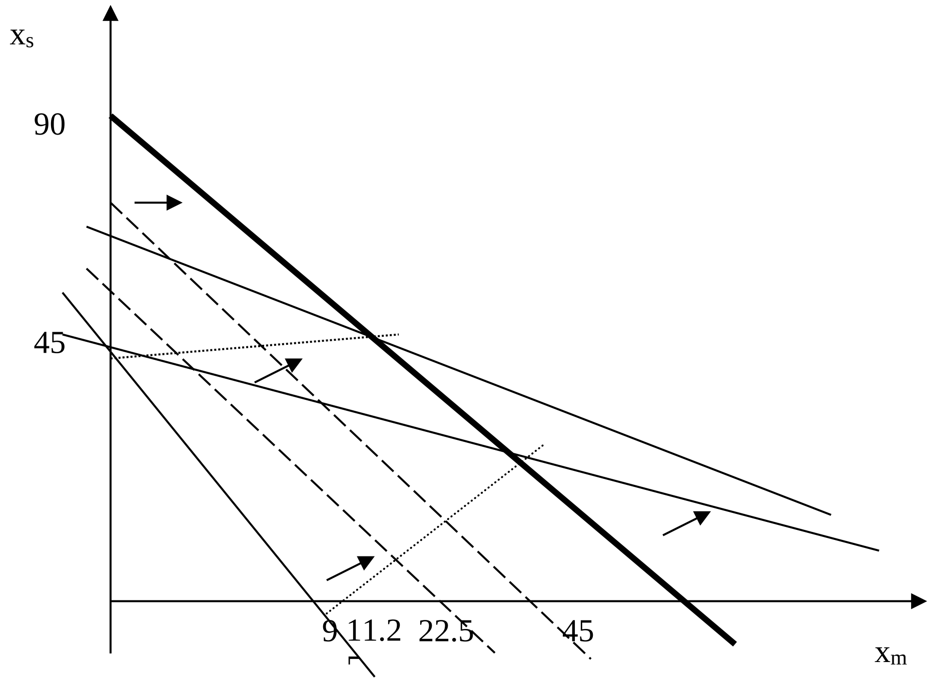
$$45 - 0.15x_m = 90 - x_m$$
$$x_m = 52.94$$
$$x_s = 37.06$$

$$P_1(0,45) \quad P_2(-176.97,16.76) \quad P_3(166,20) \quad P_4(90,0) \quad P_5(52.94,37.06) \quad P_6(22.38,67.61)$$
$$Z_1 = 27 \quad Z_2 = 25.24 \quad Z_3 = 45.2 \quad Z_4 = 18 \quad Z_5 = 32.82 \quad Z_6 = 45.04$$

$$Z_1 = 27$$
$$Z_2 = 25.24$$
$$Z_3 = 45.2$$
$$Z_4 = 18$$
$$Z_5 = 32.82$$
$$Z_6 = 45.04$$

$$Z = 0.20x_m + 0.6x_s$$
$$x_s = \frac{Z}{0.06} - 0.33x_m$$

90



Por lo tanto, el punto cercano a (0,0) a nivel de la región factible representa el punto óptimo cuando la pendiente se acerca a 0 la línea recta más plana y ocurre todo lo contrario cuando la pendiente se aleja mas de 0.

Notación matricial de PL

$$Max \quad o \quad \min \qquad Z = \overline{C}\,\overline{X}$$

$$s.a$$

$$A\overline{X} \begin{vmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{vmatrix} \vec{b}$$

$$y \qquad \overline{X} \geq \overline{0}$$

Donde:

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \overline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

C y X son vectores columna de n componentes, b es un vector columna de m componentes, A es una matriz de orden mxn.

Formas de presentación de PPL1.-Forma Canónica. -Se dice que un PPL tiene la forma canónica sea esta de máximos (o mínimos) cuando no tiene la constante C=o, cuyas restricciones están expresadas en “< =, =, >=” de acuerdo al caso que se presenta: El rango de variabilidad es no negativa.

-Cuando es maximizar la desigualdad es <=

-cuando es minimizar la desigualdad es >=

Naturaleza

$$MaxZ = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$s.a$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_5 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_5 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \qquad \vee \quad \min \begin{matrix} \geq b_1 \\ \geq b_2 \\ \cdots \\ \geq b_m \end{matrix}$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_5 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \qquad x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$

2.-Forma mixta. -El modelo de un PL está en forma mixta cuando la función objetiva sea de máx. o min. sujeto a la restricción de la forma “<= o=” c”>=, =” y las variables de decisión admite valores no negativos ejemplo

$$\max \quad Z = 4x_1 + 7x_2$$

$$s.a$$

$$6x_1 + x_2 \leq 0$$

$$x_1 \quad + 20x_2 \geq 200$$

$$x_1, x \geq 0$$

3.-Formas estandarizadas. - Si el objetivo es maximizar una fusión sujeta a restricciones estructurales, entonces tiene la forma ecuacional, es decir, “un igual” o exclusivamente las variables de decisión solo admiten valores no negativos.

$$
\begin{array}{l}
Max \quad Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_{n1} \\
\quad s.a \\
\qquad \begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} = b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} = b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} = b_m
\end{array} \\
\\
\qquad x, x_2, ,..., x_n n \geq 0
\end{array}
$$

$Forma \quad matricial$

$$
\begin{array}{l}
Max \quad Z = \overline{C}\overline{X} \\
sa: \quad A\overline{X} \equiv \overline{b} \\
\qquad y \qquad \overline{X} \geq 0
\end{array}
$$

4.-Forma genérica. -Existe una constante que es diferente de cero, y cuyas restricciones se expresa como "$\leq, =, \geq,$," sean estos de máx. o min. y el rango de variabilidad es no negativo ç

Naturaleza

$$
\begin{array}{l}
\max Z = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \\
s.a \qquad A\overline{X} \leq \overline{b} \\
\qquad\qquad y \qquad X_j \geq 0; \qquad X_j \leq 0 \quad libre
\end{array}
$$

Transformación de un PL de una forma a otra

Teorema. -Un PL expresado en forma estandarizada o en forma mixta puede ser transformado a la forma canónica y viceversa.

Ejemplo1

Exprese el siguiente PL en forma canónica

$$
\begin{array}{l}
\min \quad V = 4x_1 + 3x_2 \\
s.a \\
\qquad 3x_1 + x_2 \leq 10 \\
\qquad x_1 + 4x_2 \leq 20 \\
\qquad x_1, x \geq 0
\end{array}
$$

Solución

$$\min \quad V = \max \quad Z = -4x_1 - 3x_2$$
$$\textit{forma} \quad \textit{canonica}$$
$$\max \quad Z = -4x_1 - 3x_2$$
$$s.a$$
$$3x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 20$$
$$x_1,\, x_2 \geq 0$$

Si la restricción es

$$3x_1 + x_2 \geq 10 \qquad (1)$$
$$2x_1 + 6x_2 \equiv 20 \qquad (2) \quad FC$$
$$\Rightarrow -x_1 - 3x_2 \leq -10 \qquad (1)$$
$$2x_1 + 6x_2 \leq O \geq 20$$

Ejemplo

Expresar el siguiente PL estandarizada:

$$\max \quad Z = 4x_1 + 7x_2 + x_3$$
$$s.a$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$$
$$6x_1 + 9x_2 + x_3 \leq 500$$
$$x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 350$$
$$x_1,\, x_2, x_3 \geq 0$$

Solución

$$\max \quad Z = 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 0x_4^h + 0x_5^h + 0x_6^h$$
$$s.a$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4^h + 0x_5^h + 0x_6^h = 100$$
$$6x_1 + 9x_2 + x_3 + 0x_4^h + 0x_5^h + 0x_6^h = 500$$
$$x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 0x_4^h + 0x_5^h + 0x_6^h = 350$$
$$x_1,\, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Las variables de holgura son x_4, x_5, x_6. Estos generan vectores unitarios.

Variable de Holgura. -Una variable de holgura es una disponibilidad adicional de recursos que se tiene destinados a la producción de una determinada linea de producción.

Nota 1.-La variable adicional tiene como coeficiente 1 siempre para solucionar PL se debe llevar a la forma de máximo; si esta es minina se lleva a la del máximo.

Ejemplo

$$\max \quad Z = 5 + 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$\Rightarrow \max \quad (Z - 5) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

Ejemplo. - Expresar el siguiente PL en forma estandarizada

$$\max \quad Z = 4x_1 + 7x_2$$

$s.a$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 20 \\ 7x_1 + 8x_2 &\geq 10 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

<u>Solución</u>

$$\max \quad Z = 4x_1 + 7x_2 + 0S_1$$

$s.a$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 \quad &= 20 \\ 7x_1 + 8x_2 - S_1 &= 10 \\ x_1,\ x_2, S_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nota 2.- Al agregar la variable de holgura esta se hace en función a la cantidad de restricciones, y correspondiente a cada una de ellas una variable de holgura.

METODO ALGEBRAICO

Es un sistema cómodo y sencillo, sin embargo, no es práctico, dado que con este método solo se puede resolver problemas de dos variables. Para problemas se tiene que trabajar en el espacio de tres dimensiones, también posible; pero mucho menos sencillo. El método pierde su aplicación para problemas de más de 3 variables.

Ejemplo: Ítem

$$\max \quad Z = 5x_1 + 6x_2$$

$s.a$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 \quad &\leq 50 \\ 4x_1 \qquad\quad &\leq 40 \\ 2x_1 + x_2 \quad &\leq 30 \\ x_1,\ x_2, &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución

Primero llevando a la forma estandarizada

$$\max \quad Z = 5x_1 + 6x_2 + 0x_3^h + 0x_4^h + 0x_5^h$$

$$s.a$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3^h + 0x_4^h + 0x_5^h &= 50 \\ 4x_1 + 0x_2 + 0x_3^h + x_4^h + 0x_5^h &= 40 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3^h + 0x_4^h + x_5^h &= 30 \\ x_j \geq 0 \qquad , \quad j &= 1,2,3,....,5 \end{aligned}$$

Segundo. -para encontrar el número de soluciones básicas aplicamos la formula del calculo combinatorio.

$$C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

N: es número de variables

M: es número de restricciones

Dado que n=5 y m=3

$$C_3^5 = \frac{5!}{2!3!} = 10 \quad \text{Soluciones Básicas}$$

Tercero. -Expresar los coeficientes de las varíeles restringidas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segundo. -Expresar en forma resumida

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3^h \qquad &= 50 \\ 4x_1 + \qquad x_4^h \qquad &= 40 \qquad (x_1, x_2) = (10,6) \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_5^h &= 30 \end{aligned}$$

Esto constituye un sistema de ecuaciones lineales simultaneas las cuales pueden resolverse con los medios ordinarios del algebra.

Existen cinco incógnitas y solo tres ecuaciones. Por lo menos dos variables deben ser iguales a cero para que exista la solución única. En el caso de la solución grafica, donde el punto óptimo estaba en la intersección de la ecuación (1) y (2) (restricción (1) y (2))

En (1)

$$2x_1 + 5x_2 + x_3^h = 50$$
$$2(10) + 5(6) + x_3^h = 50$$
$$x_3^h = 0$$

Ahora en (2)

$$4x_1 + x_4^h = 40$$
$$4(10) + x_4^h = 40$$
$$x_4^h = 40$$

Ahora en (3)

$$2x_1 + x_2 + x_5^h = 30$$
$$2(10) + 6 + x_5^h = 30$$
$$x_5^h = 4$$

El 4 representa la capacidad no utilizada de la maquina tres, para ser exacto 4 horas. Llamado también 4 unidades de holgura.

En caso de que se reste la variable de holgura y esta es 4 entonces en términos económicos son los recursos que no se utilizan.

Nota. -La solución encontrada a partir de la ecuación (1) y (2), pudiera haberse obtenido algebraicamente, si se hubiera tenido comparación eficiente del problema asimismo si:

$$x_3^h = x_4^h = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$2x_1 + 5x_2 = 50$$
$$4x_1 = 40$$
$$2x_1 + x_2 + x_5^h = 30$$

Despejando x_1, x_2, x_5^h por eliminación utilizando operaciones de fila

Nota. - Se convierte mediante operaciones de linea las ecuaciones a una del tipo unitario

Por lo tanto, se llega a la forma:

$$x_1 + 0x_2 + 0x_5^h = 10$$
$$0x_1 + 1x_2 + 0x_5^h = 6$$
$$0x_1 + 0x_2 + 1x_5^h = 4$$

Otra forma: metodo matricial

Como

$$x_3^h = x_4^h = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x_1 + 5x_2 = 50$$
$$4x_1 = 40$$
$$2x_1 + x_2 + x_5^h = 30$$

Representación matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$A\overline{X} = \overline{b}$$

La solución es:

$$\overline{X} = A^{-1}\overline{b}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Resolviendo

Por lo tanto

$$x_1 = 10$$
$$x_2 = 6$$
$$x_5^h = 4$$

Ejemplo

Método Algebraico

$$
\begin{aligned}
&\max \quad Z = 3x_1 + 4x_2 \\
&s.a \\
&\qquad x_1 + 2x_2 \quad \le 1000 \\
&\qquad 3x_1 + 2x_2 \le 1800 \\
&\qquad\qquad x_2 \le 400 \\
&\qquad x_1,\ x_2, \ge 0
\end{aligned}
$$

Solución: estandarizando: forma resumida

$$
\begin{aligned}
&\max \quad Z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
&s.a \\
&\qquad x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 1000 \qquad (1) \\
&\qquad 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1800 \qquad (2) \\
&\qquad\qquad x_2 + x_5 = 400 \qquad (3) \\
&\qquad x_j \ge 0 \qquad (j = 1,2,..,5)
\end{aligned}
$$

1º. Para encontrar el numero de soluciones básicas se aplica la formula del calculo combinatorio

$$C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

N: es número de variables

M: es número de restricciones

Dado que n=5 y m=3

$C_3^5 = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$ Soluciones Básicas

“º. Las posibles soluciones de variables básicas, se muestran en detalle

$(1,2,3,4,5,)$

1	(x_3, x_4, x_5)	6	(x_1, x_2, x_3)
2	(x_2, x_3, x_4)	7	(x_1, x_2, x_5)
3	(x_2, x_4, x_5)	8	(x_1, x_3, x_5)
4	(x_2, x_3, x_5)	9	(x_1, x_4, x_5)
5	(x_1, x_2, x_4)	10	(x_1, x_3, x_4)

3º. Se halla todas las soluciones básicas, y se determina cuáles de estos son factibles, luego se evalúa la función objetiva para todas las soluciones básicas factibles.

Ejemplo elegimos.

$$(x_3, x_4, x_5) \quad \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$\Rightarrow Z = 0$$

$$x_3 = 1000$$
$$x_4 = 1800$$
$$x_5 = 400$$

Nota: En esta se deshecha las que no son factibles

Así sucesivamente

Nota previa. - Con este método no se encuentra en forma inmediata la solución básica factible, sino que a medida que se va resolviendo se va mejorando la función objetiva hasta llegar al valor optimo, decir, se encuentra una solución inicial y luego acudiendo a un criterio de decisión se verifica si es susceptible de ser mejorado. Si la solución puede mejorarse se procede a su revisión y mejoramiento y se busca otra solución. El proceso continuo repitiéndose hasta que se encuentre la polución optima.

4º.-Solución Básica factible inicial. -Elegimos (x_3, x_4, x_5), esto implica que $x_1 = x_2 = 0$, entonces la solución es:

$x_3 = 1000$ Minutos de tiempo torno

$x_4 = 1800$ Minutos de tiempo lijado

$x_5 = 400$ Bates medianos no producidos.

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ (Costo=0)

Por lo tanto, Z=0

Observación. - (x_3, x_4, x_5)= son variables básicas

(x_1, x_2)= variables no básicas

Con este resultado se reagrupa las variables de las observaciones

(1), (2), (3) de la siguiente manera:

$$x_3 \quad = 1000 - x_1 - 2x_2 \qquad (1)$$
$$x_4 = 1800 - 3x_1 - 2x_2 \qquad (2)$$
$$x_5 = 400 - x_2 \qquad (3)$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,..,5)$$

La interpretación propia

Si X_1=1 (se produce un bate)

X_3 se disminuirá en 1 y x_4 en 3. Cada coeficiente asociado con una variable estructural indica la merma producible en la holgura correspondiente en un determinado tipo de restricción

5º.-Revisión de la solución básica factible

Puesto que Z=0 entonces es posible mejorar este resultado una mejora se realiza teniendo una nueva solución; reemplazando una variable que no figura en la solución por otra existente, el reemplazo se hace una a la vez.

Formulemos 2 preguntas:

1.- ¿Qué variables(bates) que no está en la presente solución debe ingresar en reemplazo de una de las variables que esta en la solución

METODO SIMPLEX CON TABLAS

3.1 Introducción

La tabla simplex es un cuadro donde se puede visualizar con facilidad todas las operaciones que involucra la solución de un problema de programación lineal.

La tabla simplex tiene dos ventajas:

a) Facilita los cálculos de cada iteración, la determinación de la matriz inversa y de la matriz $Y=B^{-1}R$.

b) Permite visualizar en reducido espacio el desarrollo de la resolución de un problema *determinado y todos los datos necesarios para un análisis posterior.*

La tabla simplex no es sino una expresión del sistema en forma explícita correspondiente a la base que se explora en cada iteración.

3.2 La Forma Explícita de un problema de programación lineal

Sea la forma explícita respecto a una base "B":

$\boldsymbol{Z = Z + (C^R - Z^R)\, X^R}$

$\boldsymbol{X^B + YX^R = X^B}$

$\boldsymbol{X^B\ ,\ X^R}$

$\boldsymbol{-Z = -Z + 0X^B + (C^R - Z^R)\, X^R}$ **(6)**

$X^B = 0Z + U\, X^B + Y\, X^R$ *(7)*

En donde:

U es una matriz identidad de orden "m"

Eliminando la función Z en el sistema anterior puesto que sus coeficientes nunca varían se puede escribir de la siguiente manera:

	X^B	X^R
$-Z$	0	C^R-Z^R
X^B	U	Y

ESQUEMA Nº 01

CASILLA CERO	*FILA CERO*
COLUMNA CERO X^B	*COLUMNAS*

3.3 Procedimiento

El proceso a seguir es el siguiente:

a) *Formular el problema en forma normal de máximo.*
b) *Seleccionar una base posible inicial.*
c) *Calcular la matriz Y, ZR, CR-ZR, XB, Z.*
d) *Disponer el sistema en la forma del esquema Nº 01.*

I. *Condición de Optimo:*

Si todos los elementos de la fila cero (no se incluye ;la casilla cero) son no positivos.

CONCLUSION: La solución considerada es óptima.

Si existen elementos positivos en la fila cero, seleccionar las columnas asociadas a dichos elementos.

II. *Condición de Optimo no Finito:*

Si algunas de las columnas seleccionadas tienen todos sus elementos no positivos el pproblema tiene óptimo no finito.

Si ninguna de las columnas seleccionadas tiene todos sus elementos no positivos existe una solución básica mejor.

III. *Seleccionar una nueva Base*

a) *Variable de Entrada: Xk*

Seleccionar el elemento Ck-Zk de mayor valor en la fila cero. La variable asociada con este elemento es la variable entrante.

b) *Variable Saliente: Xk*

Seleccionar los elementos positivos Ysk de la columna Yk correspondiente a la variable entrante y los elementos Xs de la columna cero asociados a los anteriores.

Efectuar los cocientes entre cada elemento Xs seleccionado en la columna cero y su asociado en la columna Ysk de la columna Yk de la variable entrante y anotar el resultado como una columna adicional a la derecha de la tabla.

Seleccionar el cociente Xg/Ygk de menor valor. La variable Xg asociado en la columna cero con este cociente mínimo es la variable saliente.

PIVOTE: El elemento Ygk que se encuentra en la intersección de la variable entrante y saliente se llama pivote y se acostumbra cerrarlo en un círculo.

IV. Construir una nueva tabla

Confeccionar una nueva tabla de iguales dimensiones y en donde las variables de la columna cero son las mismas de la tabla anterior y en su mismo orden excepto la variable saliente Xg que debe ser reemplazado por la variable entrante Xk.

La fila del pivote pasa a la nueva tabla dividida en todos sus elementos por el elemento pivote Ygk.

Los elementos de cualquier otra fila incluidos los de la columna cero deben de sumarse con sus correspondientes de la fila del pivote multiplicando previamente a estos últimos por un factor tal que el elemento resultante en la columna del pivote sea cero, el factor puede ser positivo o negativo. En general, para cada fila habrá un factor distinto.

3.4 Ejercicio

$$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \quad 430$$

$$3X_1 + 0X_2 + 2X_3 \quad 460$$

$$X_1 + 4X_2 + 0X_3 \quad 420$$

$X_1, X_2, X_3 \quad 0$

SOLUCION:

X1=0, X2=100, X3=230, X6=20,

EJERCICIOS

CONSIDERE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS DE PROGRAMACION LINEAL:

1. $Max\ Z = 6X_1 - 2X_2 + 3X_3$

$$2X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 2$$
$$X_1 \quad + 4X_3 \leq 4$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

2. $Max\ Z = 2X_1 + X_2 + 2X_3$

$$4X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 12$$
$$4X_1 + X_2 + 12X_3 \leq 8$$
$$4X_1 - X_2 + 3X_3 \leq 8$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

3. $Min\ Z = 2X_1 + X_2$

$$3X_1 + X_2 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

4. $Min\ Z = 8X_1 + 4X_2$

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$
$$4X_1 + 2X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

5. $Min\ Z = 2X_1 + 3X_2$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

6. $Min\ Z = 5X_1 + 6X_2$

$X_1 + X_2 \leq 2$
$4X_1 + X_2 \geq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

Resuélvalos utilizando el:

a) *Método Gráfico*
b) *Método Simplex con tablas*
c) *Método de dos fases*
d) *Método de coeficientes de castigo*

METODO SIMPLEX: BECERRA PACHERRES, JOSE

Representación Matricial de un PL

$$MaxZ = \begin{bmatrix} C^B & C^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^B \\ X^R \end{bmatrix}$$

$s.a$

$$\begin{bmatrix} B & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^B \\ X^R \end{bmatrix} = b$$

$X_j \geq 0$

Resolviendo

$$Z = C^B X^b + C^R X^R \qquad (1)$$
$$BX^b + RX^R = b \qquad (2)$$

En ecuación (2) $X^R=0$

$$BX^B = b$$
$$\overset{=}{X}^B = B^{-1}b$$ solución básica posible

En la ecuación (1, como $X^R = 0$)

$$Z = C^B X^B + C^R X^R \Rightarrow Z = C^B X^B \qquad \left(X^B = \overset{=}{X}^B \right)$$

$$\Rightarrow \overset{=}{Z} = C^B \overset{=}{X}^B$$

$$\Rightarrow \overset{=}{Z} = C^B \overset{=}{X}^B$$

$X^B \geq 0$

Generalización mediante la naturaleza de un PL

$$Max \quad Z = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$s.a$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 \qquad = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \quad x_5 \qquad = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \qquad x_6 \quad = b_{3_3}$$

$$y$$

$$x_j, s_i \geq\geq 0 \quad \begin{pmatrix} j = 1,2,3 \\ ,..i = 4,5,6, \end{pmatrix}$$

N=6 y m=3

n-m=6-3=3

Donde:

N= igual al numero de variables existentes

M= al numero de restricciones

n-m= variables que deben ser eliminadas

Nota. -Se debe asignar los valores arbitrariamente como por lo menos a tres variables

-Comprobar si son linealmente dependientes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución Básica. -Es aquella que resulta de eliminar previamente n-m variables del sistema.

Variables Básicas. - Son aquellas variables asociadas la solución básica. Y las variables no básicas son aquellas que no son eliminadas previamente del sistema.

Asumimos que $X_1= X_{2=}\ X_3$

$$BX^B \quad = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \overset{=}{x}_4 \\ \overset{=}{x}_4 \\ \overset{=}{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$base \quad del\, sistema \qquad\qquad solocion \quad basica$$

Asumimos 2 $X_1= X_{3=}\ X_6=0$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}\bar{\bar{x}}_4\\\bar{\bar{x}}_4\\\bar{\bar{x}}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$base \quad del\, sistema \qquad\qquad solocion \quad basica$

$$B=\begin{bmatrix}a_{12} & 0 & 0\\a_{22} & 1 & 0\\a_{32} & 0 & 1\end{bmatrix} \quad ; \quad X^B=\begin{bmatrix}x_2\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$ Variable básica

$$X^R = \begin{bmatrix}x_1\\x_3\\x_6\end{bmatrix}$$ Variables no básicas

$$R=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{13} & 0\\a_{21} & a_{23} & 0\\a_{31} & a_{33} & 1\end{bmatrix}$$ Matriz no básica

Asumiendo 3 $X_4= X_{5=} X_6=0$

$$B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \qquad R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad X^B=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \qquad X^R=\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{x}}^B=\begin{bmatrix}\bar{\bar{x}}_4\\\bar{\bar{x}}_4\\\bar{\bar{x}}_5\end{bmatrix}=[B]^{-1}[b]$$

Si $|B0| \neq 0$ Hay una solución básica posible.

Ojo. - No toda base que se escoge puede ser una solución.

Resolver mediante el algoritmo simplex el siguiente problema de programación lineal:

METODOD SIMPLEX

Conceptos básicos

A.-Variable de holgura. -El método requiere que las restricciones sean ecuaciones en vez de inecuaciones, adicionando una variable de holgura por cada restricción

Propiedades

-Toadas las restricciones son ecuaciones con lado derecho no negativo.

-Todas las variables son no negativas.

Las variables de holgura se utilizan para convertir las inecuaciones a ecuaciones

METODO SIMPLEX EN TABLAS

$-\overset{=}{Z} =$	$C^R - Z^R$	o
$\overset{=}{X}$	Y	I

CASILLA CERO	**FILA CERO**
COLUMNA CERO	**COLUMNAS**

$-\overset{=}{Z} =$: Es la Z solución de la función objetiva

C^R = Es el vector fila no básica

Z^R Es la condición de optimo ($Z^E=C^BY$)

O. son las variables asociadas a la holgura en la función objetiva

$\overset{=}{X}$ Es la ex solución de las variables básicas

Y = Es la condición de optimo asociada a las variables no basitas

I = Es la matriz de identidad

Para efectos de solución se efectúa el algoritmo simplex

Inversión

Ejemplo

De menor restricción o igual restricción

$$\min \quad Z = x_1 - x_2$$
$$s.a$$
$$40x_1 + 5x_2 \quad \geq 10$$
$$x_1 - x_2 \geq 6$$
$$-6x_1 - x_2 \geq -6$$
$$-12x_1 - 12x_2 \geq -1$$
$$x_1, x_2, \geq 0$$

Si en la solución optima de recurso, b_1 solamente sea ha utilizado la cantidad $b_{1,}$ entonces el valor que tomara la variable de holgura en la solución optima será

$$S_1\left[X_{h+1} = b_1 - b_{1'}\right]$$

Variable Artificial. -Es una variable que no tiene significado físico en términos de un PPL del mundo real. Simplemente permiten crear una solución factible básica principiar el algoritmo simple. A una variable artificial no se le permite aparecer en la solución final

$$\max \quad Z = 5x_1 + 6x_2$$
$$s.a$$
$$2x_1 + 5x_2 \quad \leq 50$$
$$4x_1 \qquad \leq 40$$
$$2x_1 + x_2 \quad \leq 30$$
$$x_1, x_2, \geq 0$$

Solución

Primero llevando a la forma estandarizada

$$\max \quad Z = 5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4^h + 0x_5$$
$$s.a$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 50$$
$$4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 40$$
$$2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 30$$
$$x_j \geq 0 \qquad , \quad j = 1,2,3,....,5$$

X1	X2	x3	x4	x5	b
5	6	0	0	0	0=-Z
2	5	1	0	0	50
4	0	0	1	0	40
2	1	0	0	1	30

X2: columna clave fila clave

Primero. -Variable que ingresa x2 (columna x2).

Segundo. -Variable que sale; identificada fila clave

$x_2 = \frac{50}{5} = 10$ Fila clave (fila 1)

$x_2 = \frac{40}{0} = \infty$

$x_2 = \frac{30}{1} = 30$

X1	X2	x3	x4	x5	b
13/5	0	-6/5	0	0	244/5
2/5	1	1/5	0	0	10
4	0	0	1	0	40
8/5	0	-1/5	0	1	20

Columna clave fila clave

Tercero. -Elegimos columna x1 (columna clave)

Elegimos fila clave

$x_1 = \frac{10}{\frac{2}{5}} = 25$

$x_1 = \frac{40}{4} = 10$ Fila clave

$x_1 = \frac{20}{\frac{8}{5}} = 12.5$

X1	X2	x3	x4	x5	b
0	0	-6/5	-13/20	0	-Z=144/5=22.8
0	1	1/5	-1/10	0	6
1	0	0	1/4	0	10
0	0	-1/5	-8/20	1	4

Por lo tanto, los valores de la fila Z es no positiva solución Optimal

X2=6

X1=10

X5=4

X3=x4=0

Z=22.8 máximo

EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

Un problema del transporte es un tipo especial del problema dentro de programación lineal y que tiene que ver con la determinación y fijación esquemas óptimos para el transporte de mercancía o productos ya conocidos de los lugares de oferta a los lugares donde son requeridos, y que con el conocimiento de costos individuales proporcionales a la cantidad transportada se puede hallar el costo total con la suma de todos estos costos particulares.

Formulación de un problema clásico de un transporte se puede determinar como la distribución de cualquier producto desde los centros de producción llamados orígenes a otro grupo de centros de recepción llamados destinos de tal manera que estas cantidades transportadas satisfagan con, con el costo total mínimo. Como se muestra gráficamente y en forma tabular

Destinos

orígenes		1	2	3	4	
	1	C_{11}	C_{12}	$\dots$	C_{1n}	a_1
	2	C_{21}	C_{22}	$\dots$	C_{2n}	a_2
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	m	C_{m1}	C_{m2}	$\dots$		a_m
	b_j	b_1	b_2	$\dots$	b_n	

Existen varios métodos para determinar una solución factible básica inicial los cuales varían en el tiempo para determinar la solución de menos a más como sigue:

1.-Método de la esquina Nor-este (N-O)

2.-Método de la matriz mínima

3.-Método de Vocel

4.-Método de Rossell

Lagunas consideraciones generales sobre el problema del transporte

1.-Solución factible básica no degenerada ($\sum filas + \sum columnas - 1$)

-> numero de las variables basitas

2.- Solución factible básica degenerada ($\sum m + \sum n - 1$)

- > número menor de variables básicas (método de la esquina N-O)

3.-Problemas de transporte desbalanceados ($\sum a_i \neq \sum b_1$)

-> $\sum disponibildades \leftrightarrow \sum demandas$)

4.-Rutas prohibidas

En la solución final:

$X_{14}, X_{33} = 0$

-Inundaciones, camino en construcción, peso limite, etc.

-Cuando maximizamos: $X_{14}, X_{33} = 1000$

	D1	D2	D3	D4	ai
O1	12	17	20	M	5
O2	18	20	21	15	5
O3	20	10	M	16	8
bj	4	5	4	4	

5.-Caso de maximización en el lugar de minimización eficiencias como ganancias. Hacemos una pequeña variación a los costos unitarios X (-1) .Y se prosigue normalmente

$$MAX(Z) = \sum i \sum j \quad C_{ij}.X_{ij} = MIN(-z) = \left[\sum i \sum j \sum ij.X_{ij}\right]$$

EL METODO DE ESQUINA NOR-ESTE (N-O)

1.-Cuando un problema del transporte real esta desbalanceado, añadiéndose ya sea orígenes o destinos artificiales así se balancea.

2.-Se construye una matriz de flujos de la siguiente manera $\sum a_i = \sum b_j$

3.-En la posición 1.1 que es el extremo nor-occidental de la matriz, asígnese al mínimo (a1, b1) resta X11 de la oferta a1 o de la demanda b1, obviamente alguna de estas cantidades se convierta en 0

4.-Si a1 es menor que b1 se pasara a la posición (2,1) y se hace $X_{21} = MIN(a_1, b_1)$ si por otro lado si a1 es mayor que b1 se pasara a la posición (1,2) $X_{12} = MIN(a_1, b_2)$

5.-Se continúa con la misma lógica hasta llegar a determinar el camino ya sea por columnas o filas.

6.-Se reemplaza los costos mínimos en la tabla de precios unitarios donde resulta el costo total.

Problema Balanceado:

Una compañía de gaseosas, quiere nuevos mercados esta compañía tiene fabricas en A,B,C y quiere proveer a estos mercados, cuyos almacenes están en W,X,Y,y,Z, las capacidades mensuales de las fabricas son: 100,150 y 170 unidades respectivamente.

Los costos unitarios de embarque son los siguientes:

Destino	W	X	Y	Z
Origen				
A	12	20	12	5
B	17	14	21	10
C	16	15	15	20

Determinar una solución factible básica inicial y el costo total mínimo utilizando el método de la esquina N-O solución:

i). -Primeramente, colocar los datos claramente en nuestro cuadro de operaciones

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1	12 *	20	12	5	100
O2	17	14	21	10	150
O3	16	15	15	20	170
bj	70	90	120	140	

$$CTMIN = \sum C_{ij} X_{ij}$$

ii). -Nuestro cuadro debe estar balanceado es decir los orígenes deben ser igual a los destinos

$$\sum a_i = \sum b_j$$

$$100 + 150 + 170 = 70 + 90 + 120 + 140$$
$$120 = 120 \qquad (Balanceado)$$

iii). -Se empieza resolviendo en la celda (1,1) ósea la esquina nor-este y minimizando.

$$X_{11} = \min(a_i, b_i) \qquad a_1 > b_1$$
$$X_{11} = \min(100{,}70) \qquad a_1 = a_1 - b_1 = 100 - 70 = 30$$

al haber hecho este paso, recomendamos la siguiente tabla:

ai bi	
A<b1 A1>b1	Nos movemos a la celda de abajo Nos movemos a la celda continua

En X11 como a1 > b1, nos movemos a la celda (1,2)

	W	X	Y	Z	Ai
A	12	20 *	12	5	30
B	17	14	21	10	150
C	16	15	15	20	170
Bj	70	90	120	140	

X12=min (a1,b2)

X12=min (30,90)=30

A1<b2 entonces b2=b2 – a1 =60

Pasamos a la celda (2,2)

	W	X	Y	Z	Ai
A	12	20	12	5	30
B	17	14 *	21	10	150
C	16	15	15	20	170
Bj	70	60	120	140	

X22=min (a2, b2)

X22=min (150,60) = 60

A2>b2 entonces a2=a2 – b2 =90

Pasamos a la celda (2,3)

	W	X	Y	Z	Ai
A	12	20	12	5	30
B	17	14	21 *	10	150
C	16	15	15	20	170
Bj	70	90	120	140	

X23=min.(a2,b3)

X23=min.(90,120)=90

B3>a2 entonces b3=b3-a2=30

Pasamos a la celda (3,3)

W	X	Y	Z	Ai

A	12	20	12	5	30
B	17	14	21	10	150
C	16	15	15	20 *	170
Bj	70	90	30	140	

X33=min.(a3,b3)

X33=min. (170,30)=30

A3>b3 entonces a3=a3-b3 =140

Pasamos a la celda (3,$)

	W	X	Y	Z	Ai
A	12	20	12	5	30
B	17	14	21	10	150
C	16	15	15	20 *	140
Bj	70	90	30	140	

X34=min.(a3,b3)

X34=min.(140,140)=140

A3>b4 entonces a3=a3-b4=0

Se pasaría a cualquier celda ya que salio cero, como no hay mas acaba el ejercicio.

Entonces:

	W	X	Y	Z	Ai
A	12 70	20 30	12	5	30
B	17	14 60	21 90	10	150
C	16	15 60	15 30	20 140	170
Bj	70	90	120	140	

X11=70x12=840

X12=30x20=600

X22=60x14=840

X23=90x21=1890

X33=30x15=450

X34=140x20=2800

Costo Total =7420

El costo total mínimo es igual S/ 7420 en nuevos soles

Las otras variables asumen valor 0 (cero).

Nota: Es una polución factible básica no degenerada con exactamente n+m-1 variables básicas positivas m (número de columnas) n (número de filas) -1 entonces 4+3-1 =6

Problema no balanceado

Una compañía tiene 5 fabricas ubicadas en: A, B, C, D y E y que provee a los almacenes ubicados en F, G, H, I y la capacidad mensual de la fabricas 100, 200, 300, 400, 500 y las necesidades de almacenes son de 600,500, 200, 100 los costos de transportes son:

Destino					
Origen	F	G	H	I	ai
A	10	20	5	7	100
B	13	9	12	8	200
C	4	15	7	9	300
D	14	7	1	0	400
E	3	12	15	19	500

i). -Se igualan los orígenes y destinos, se aumenta en vector columna con el fin de igualar la ecuación $\sum a_i = \sum b_j \Rightarrow 1500 = 1500$

	F	G	H	I	J	Ai
A	10 *	20	5	7	0	100
B	13	9	12	8	0	200
C	4	15	7	9	0	300
D	14	7	1	0	0	400
E	3	12	15	19	0	500
Bj	600	500	200	100	100	

$$X_{11} = \min(a_i, b_i)$$
$$X_{11} = \min(100{,}600) = 100$$
$$a_1 < b_1 \Rightarrow b_1 = b_1 - a_1 = 500$$

Se pasa a la celda (2,1)

	F	G	H	I	J	Ai
A	10	20	5	7	0	100
B	13 *	9	12	8	0	200
C	4	15	7	9	0	300
D	14	7	1	0	0	400
E	3	12	15	19	0	500
Bj	500	500	200	100	100	

$$X_{21} = \min(a_2, b_i)$$
$$X_{21} = \min(200{,}500) = 500$$
$$a_1 < b_1 \Rightarrow b_1 = b_1 - a_2 = 300$$

Se pasa a la celda (3,1)

	F	G	H	I	J	Ai
A	10	20	5	7	0	100
B	13	9	12	8	0	200
C	4 *	15	7	9	0	300
D	14	7	1	0	0	400
E	3	12	15	19	0	500
Bj	300	500	200	100	100	

$$X_{31} = \min(a_3, b_i)$$
$$X_{31} = \min(300{,}300) = 300$$
$$a_1 = b_1 \Rightarrow a_3 = a_3 - b_1 = 0$$

Se pasa a la celda (4,1)

	F	G	H	I	J	Ai
A	10	20	5	7	0	100
B	13	9	12	8	0	200
C	4	15	7	9	0	0
D	14 *	7	1	0	0	400
E	3	12	15	19	0	500
Bj	300	500	200	100	100	

$$X_{41} = \min(a_4, b_i)$$
$$X_{41} = \min(400{,}300) = 300$$
$$a_4 > b_1 \Rightarrow a_3 = a_4 - b_1 = 100$$

Se pasa a la celda (4,2)

	F	G	H	I	J	Ai
A	10	20	5	7	0	100
B	13	9	12	8	0	200
C	4	15	7	9	0	0
D	14	7 *	1	0	0	100
E	3	12	15	19	0	500
Bj	300	500	200	100	100	

$$X_{42} = \min(a_4, b_2)$$
$$X_{42} = \min(100{,}500) = 100$$
$$a_1 < b_2 \Rightarrow b_2 \ = b_2 - a_4 = 400$$

Se pasa a la celda (5,2)

	F	G	H	I	J	Ai
A	10	20	5	7	0	100
B	13	9	12	8	0	200
C	4	15	7	9	0	0
D	14	7	1	0	0	400
E	3	12 *	15	19	0	500
Bj	300	400	200	100	100	

$$X_{52} = \min(a_5, b_2)$$
$$X_{52} = \min(500{,}400) = 400$$
$$a_5 > b_2 \Rightarrow a_5 = a_5 - b_2 = 100$$

Se pasa a la celda (5,3)

	F	G	H	I	J	Ai
A	10	20	5	7	0	100
B	13	9	12	8	0	200
C	4	15	7	9	0	0
D	14	7	1	0	0	400
E	3	12	15 *	19	0	100
Bj	300	400	200	100	100	

$$X_{53} = \min(a_5, b_3)$$
$$X_{53} = \min(100{,}200) = 100$$
$$a_5 > b_3 \Rightarrow b_3 = b_3 - a_5 = 100$$

Se acaba el ejercicio.

Costo Total (CT)

	F	G	H	I	J	Ai
A	10	20	5	7	0	
	100					100
B	13	9	12	8	0	
	200					200
C	4	15	7	9	0	
	300					0
	14	7	1	0	0	
D	300	100				400
	3	12	15	19	0	
E		400	100			100
Bj	300	400	200	100	100	

CT = 10(100)+13(200)+4(300)+14(300)+7(100)+12(400)+15(100)

CT = 16000

Método de la matriz mínima

Una segunda forma del método de transporte consiste en elegir el menor precio unitario que ocasiona transportar de un origen “m” a un destino “n”. Ejemplo tenemos la siguiente matriz

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1	9	8	3	1	5
	*			*	
O2	10	13	14	3	10
O3	15	12	18	4	8
Bj	10	5	5	3	

En este caso escogemos la celda C (1,4) que tiene el precio unitario, ahora si por ejemplo no estuviera el 1 tendríamos que elegir las celdas C (1,3) y C (1,4) quienes tienen precio unitario 3. Este caso tendríamos que analizar según la siguiente condición:

a). -mayor demanda

b). -menor oferta

Luego, como vemos escogemos la celda C (2,4)

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1	9	8	3	1	5
O2	10	13	14	3 *	10
O3	15	12	18	4	8
bj	10	5	5	3	

Seguidamente aplicamos el algoritmo respectivo:

min.(a2,b4) entonces min.(10,3) entonces 3

Como a2>b4 luego a2=a2-b4 entonces a2=7

Reemplazamos la fila a2 y eliminamos la columna b4

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1	9	8	3		5
O2	10	13	14		10
O3	15	12	18		8
bj	10	5	5		

Repetimos el mismo procedimiento: Escogemos la menor celda C (1,3) entonces 3

Min(a1,b2)=min.(5,5) $\leftarrow$ 5

En este caso la cantidad de almacén es igual. Por costumbre escogemos la fila eliminado de b3.

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1	9	8 *			5
O2	10	13			10
O3	15	12			8
Bj	10	5			

Min (a1, b2) entonces min.(0,3) entonces 0

Como b2>a1 entonces b2=b2-a1 entonces b2=5

Eliminamos la fila i=1

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1					
O2	10	13			10
O3	15	12 *			8
Bj	10	5			

Min (a3,b2) entonces min.(8,5) entonces 5

A3>b2 entonces a3=a3-b2

A3=3

Eliminamos columna j=2

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1					
O2	10 *				10
O3	15				8
bj	10				

Min (a2, b2) entonces min.(7,10) entonces 7

B2>a1 entonces b1=b1-a2

B1=3

Eliminamos fila i = 2

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1					
O2					
O3	15 *				8
bj	10				

Min (a3,b1) entonces min. (3,3) entonces 3

A3=b1 entonces a3=a3-b1

A3=0

Eliminamos columna j =1

Entonces la solución básica factible seria:

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1		8 0	3 5		5
O2	10 7			3 3	10
O3	15 3	12 5			8
bj	10				

SBF= 8(10)+3(5)+10(7)+3(3)+15(3)+12(5)

SBF=109

El método recomienda:

- Transportar 0 unidades de origen A hasta el destino E.
- Transportar 5 unidades de origen A hasta el destino F
- Transportar 7 unidades de origen B hasta el destino D
- Transportar 3 unidades de origen B hasta el destino G
- Transportar 3 unidades de origen hasta el destino D
- Transportar 5 unidades de origen C hasta el destino E

Si el problema se tratase de maximización por ejemplo se multiplica por (-1) y se prosigue el mismo algoritmo como se tratase de un problema de minimización.

Nota: verificar si esta balanceado se procederá a añadir filas o columnas ficticias para que pueda balancearse.

Problema no balanceado

Una empresa con 3 fabricas en distintos polos de la ciudad debe proveer a 4 mercados definidos una dicha localidad los cuales tienen una de 250,300,100 y 150(en miles de un producto) y la cantidad disponible de las fabricas es de 225, 200 y 300 respectivamente. Los costos unitarios son las que se detallan a continuación

Destino	M1	M2	M3	M4
Origen				
F1	12	13	23	24
F2	21	14	16	10
F3	17	20	12	14

La empresa requiere hallar el costo mínimo total para la mejor asignación de los productos con la mayor economía.

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1	12	13	23	24	225
O2	21	14	16	10	200
O3	17	20	12	14	300
bj	250	300	100	150	

Se observa que las sumatorias de las ofertas y demandas no son iguales, es decir al problema no está balanceada (ai diferente bj), existe un déficit de 75 de las fábricas para cubrir la demanda total de los mercados, esto se soluciona con una columna imaginaria de oferta con el valor deficitario.

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1	12	13	23	24	225
O2	21	14	16	10	200
O3	17	20	12	14	300
O*	0	0	0	0	75
bj	250	300	100	150	

Se busca el menor costo monetario de la matriz y se analiza la misma cantidad entre la oferta y la demanda de dicha celda de la tabla para luego efectuar la sustracción al mayor numero e y eliminar la fila y columna de la menor cantidad para futuros cálculos; repeliéndose esta operación hasta eliminar toda la tabla

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1	12	13	23	24	225
O2	21	14	16	10 *	200
O3	17	20	12	14	300
O*	0	0	0	0	75
bj	250	300	100	150	

X24 =min (a2,b2)

X24=min (200,150) =150

A2>b4 entonces a2=b3-b4=50

Se elimina columna j=4

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1	12	13	23		225
O2	21	14	16		200
O3	17	20	12 *		300
O*	0	0	0		75
bj	250	300	100		

- Se escoge por menor demanda

  X33=min.(a3,b3)

  X33=min (300,100)=100

  A3>b3 entonces a3=a3-b3=200

  Se elimina columna j=3

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1	12 *	13			225
O2	21	14			200
O3	17	20			300
O*	0	0			75
bj	250	300			

X11=min (a1, b1)

X11=min (225,250)=250

B1>a1 entonces b1=b1-a1=25

Se elimina fila i=1

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1					
O2	21	14 *			200
O3	17	20			300
O*	0	0			75
bj	250	300			

X22=min (a2,b2)

X22=min (50,300)=50

B2>a2 entonces b2=b2-a2=250

Se elimina fila i=2

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1					
O2					
O3	17 *	20			300
O*	0	0			75
bj	250	300			

X31=min (a3,b1)

X31=min (200,25)=25

A3>b1 entonces a3=a3-b1=175

Se elimina columna j =1

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1					
O2					
O3		20 *			300
O*		0			75
bj		300			

X32=min (a3, b2)

X32=min (175,250) = 175

B2>a3 entonces b2=b2-a3=75

Se elimina fila i =3

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1					
O2					
O3					
O*		0			75
bj		300			

Aquí termina las iteraciones puesto que solo queda 75 ofertados de forma ficticia es decir el déficit de las fábricas para cubrir la demanda. Situando las soluciones en la tabla serian como sigue.

	D1	D2	D3	D4	Ai
O1	12	13	23	24	
	225				225
O2	21	14	16	10	
		50		150	200
O3	17	20	12	14	300
		175	100		
bj	250	300	100	150	

Costo total mínimo = 10(150)+12(100)+12(225)+14(50)+17(25)+20(175)

CT min.=10025

Entonces el método recomienda:

- Transportar de la fabrica 1, 225 unidades al mercado 1
- Transportar de la fábrica 2, 50 unidades al mercado 2
- Transportar de la fábrica 2, 150 unidades al mercado 4
- Transportar de la fábrica 3, 25 unidades al mercado 1
- Transportar de la fabrica 3, 175 unidades al mercado 2
- Transportar de la fabrica 3, 100 unidades al mercado 1
- Quedando en el mercado 2 una demanda no satisfecha de 75 unidades

EL PROBLEMA DE ASIGNACION

Uno de los casos especiales de la programación lineal son los problemas de asignación que es un caso particular del problema actual transporte como su nombre lo indica consiste en asignar o dar destino a distintos recursos.

Los problemas de asignación de recursos son de tres tipos tales como.

-El primero esta definido por las siguientes condiciones:

a.-Hay que efectuar ciertos trabajos o tareas

b.-Existen ciertas instalaciones o recursos determinados

c.-Existe varias maneras de usar los recursos o instalaciones disponibles para hacer por lo menos algunos de los trabajos.

-El segundo tipo del problema de asignación de recursoso se presenta cuando los trabajos están determinados para los recursos usados, son susceptibles de decisión.

Se trata entonces de determinar que combinación de recursoso será la más económica.

-El tercer tipo de problema de asignación de recursos se caracteriza por que los recursos a usar están prefijados deben decidirse los trabajos que se realizaran.

Formulación del problema

la problema de asignación puede formularse de esta forma: dados “n” servicios n tareas y dado el rendimiento en cada servicio aplicado a C tarea (el cuadro que contiene los n_z valores de rendimiento se llama una matriz de orden nxn). El problema consiste en asignar cada servicio a un trabajo, y solo a uno de forma que la medida de rendimiento sea la optima.

Sea C_{ij} =coeficiente de costo (ganancia) de ejecución de la tarea j por el servicio operativo i

Ademas hagamos X_{ij} = 1 si el servicio i asignado a la tarea j.

X_{ij} = Si el servicio i no es asignado a la tarea j

Nuestro problema será entonces:

$$Max \quad o \quad Min \quad Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , i = 1,2,3,...,n$$

El servicio i debe ser asignado a una y solamente a una tarea

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , j = 1,2,3,...,n$$

X_{ij} =0 0 Para todas las Xij

Se definirán dos matrices esta vez e orden de nxn

$$x = \lfloor x_{ij} \rfloor; \quad c = \lfloor c_{ij} \rfloor$$

X_1 es la matriz programa (solución) y C es la matriz costo

Ademas la solución clásica x tendrá n+n-1=2n-1 componentes

	Lo que debe hacerse						**cantidad**
$\mathrm{Re}cursos$	J_1	J_2	$\cdots$	J_j	$\cdots$	J_n	$\mathrm{Re}cursos \quad disponibles$
R_1	C_{11}	C_{12}	$\cdots$	C_{1j}	$\cdots$	C_{1n}	b_1
R_2	C_{21}	C_{22}	$\cdots$	C_{2j}	$\cdots$	C_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_i	C_{i1}	C_{i2}		C_{ij}		C_{in}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
R_m	C_{m1}	C_{m2}	$\cdots$	C_{mj}	$\cdots$	C	b_m

La cantidad de recursos $a_1 \quad a_2 \quad ... \quad a_j \quad ....a_n$

Las principales técnicas usadas para resolver problemas de asignación (PL) suponen que las cantidades de recursos disponibles (b_j) las cantidades requeridas (a_j= y los costos (C_{ij}) se conocen sin error. Este no siempre es el caso

Si la suma de los recursos disponibles

Problemas:

Caso de minimización

1.-Ingresan a una fábrica 3 personas Juan, Pedro y Pablo; para realizar 3 diferentes trabajos. En almacen, producción y ventas.

Se desea saber ¿Cuál es la mejor asignación a los diversos trabajos a fin de reducir el mínimo costo?

Tomar en cuenta la siguiente tabla:

Los costos unitarios son en soles.

Trabajador / Personas	Almacén	Producción	Ventas
Juan	4	4.4	4.6
Pedro	3.6	3.5	4.4
Pablo	3.75	4.6	4.6

Solución

1.-Min (Z) =costo total mínimo

2.-La matriz es cuadrada $A_{33} = A_3$

3.-Ubicamos al menor valor de las columnas (v_j)

Columna v_1 =s/ 3.6

Columna v_2 = s/ 3.5

Columna v_3 =s/ 4.4

Procedemos a formar una nueva matriz

C_{ij}= Cij-v_j

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.9 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 1.10 & 0.20 \end{bmatrix}_{3x3} = C_3$$

4.-Ubicamos el menor valor de las filas (u_i) de la matriz anterior

Fila u_1 = 0.20

Fila u_2=0

Fila u_3 =0.15

Procedemos a formar una nueva matriz

$$C_{ij}^{*} = C_{ij} - u_i$$

$$C_{ij}^{*} = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.7'0 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0.5 \end{bmatrix}_{3x3}$$

5.-Tratamos de cubrir todos los ceros con la menor cantidad de líneas verticales y horizontales, eligiendo en cada fila o columna el mayor numero de ceros

$C_{ij}^{*} = C_{ij} - u_i$

$$C_{ij}^{*} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0.20 & 0.70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0.05 \end{bmatrix}_{3x3} & \begin{array}{c} \\ L_1 \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_3 & & L_2 \end{array} & \end{array}$$

6.-Comparamos si en:

n_i = número de líneas verticales y horizontales

n= orden de matriz

n_i =3

n=3 $\Rightarrow$ n_i n. entonces existe una asignación optima