



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

# **INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS NO LINEALES**

## **TAREA N° 1**

Nombre: Javier Riedemann Aros

Profesor: Daniel Sbarbaro

### **Problema 1**

Investigue y describa sistemas dinámicos que evidencien múltiples puntos de equilibrio, ciclos límites y caos. De un ejemplo de cada uno de ellos y realice las simulaciones respectivas.

### **Respuesta**

#### **Múltiples puntos de equilibrio**

##### **Modelo depredador-presa**

Una de las características más notables de la vida en nuestro planeta es la gran diversidad de aspectos y hábitos que tienen los organismos que la componen. Sin embargo, es bastante más difícil observar que esta manifestación de diversidad no se da de una forma arbitraria, sino todo lo contrario. Los organismos viven en comunidades, formando intrincadas relaciones de interacción, donde cada especie depende directa o indirectamente de la presencia de las otras. Una de las tareas de la ecología es el desarrollo de una teoría de la organización de las comunidades que permita entender las causas de la diversidad y los mecanismos de interacción.

Un modelo empleado para describir la dinámica de sistemas biológicos en lo que interactúan dos especies es el modelo de Lotka-Volterra. Este modelo se basa en las siguientes hipótesis.

1. La población crece proporcionalmente a su tamaño, es decir, tiene espacio y alimento suficiente. Si esto sucede y  $x(t)$  representa a la población presa (en ausencia de depredador), entonces el crecimiento de la población está dado por:

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad , \quad a > 0$$
$$x(t) = x_0 e^{at}$$

El número de presas en ausencia de depredador crece exponencialmente.

2. El depredador  $y(t)$  sólo se alimenta de la presa  $x(t)$ . Así, si no hay presas, su tamaño decae con una velocidad proporcional a su población, esto es

$$\frac{dy}{dt} = -dy \quad , \quad d > 0$$

$$y(t) = y_0 e^{-dt}$$

El número de depredadores en ausencia de presa, decrece exponencialmente hasta extinguirse.

3. El número de encuentros entre el depredador y la presa es proporcional al producto de sus poblaciones. Además, cada uno de los encuentros favorece al número de depredadores y disminuye el número de las presas. Por lo tanto, la presencia de la presa beneficia el crecimiento del depredador como

$$cxy \quad , \quad c > 0$$

Mientras que la interacción entre ellas, disminuye el crecimiento de la presa por

$$-bxy \quad , \quad b > 0$$

Bajo las hipótesis anteriores, se tiene que un modelo de interacción entre  $x(t)$  y  $y(t)$  está dado por el siguiente sistema:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

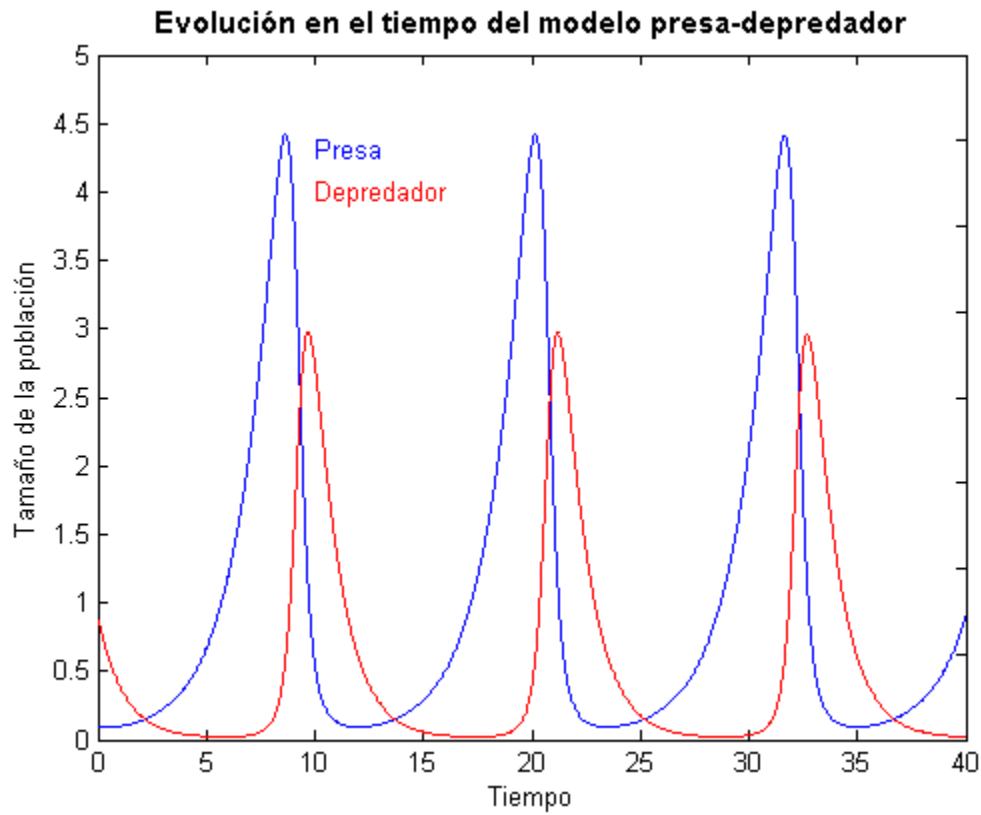
Con  $x > 0$ ,  $y > 0$  y los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , son números reales positivos.

Considerando los estados  $x_1 = x$  y  $x_2 = y$ , el modelo en ecuaciones de estado es el siguiente

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(cx_1 - d)$$

Resolviendo mediante MATLAB (*preypredator\_time.m* y *preypredator\_eq.m*) para las constantes  $a = 0.6$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0.8$  y  $d = 0.9$ , se obtiene la figura 1.



**Figura 1.** Gráfico población-tiempo del modelo presa-depredador

Para hallar los puntos de equilibrio:

$$0 = x_1(a - bx_2)$$

$$0 = x_2(cx_1 - d)$$

Resolviendo se llega a la conclusión que este sistema presenta dos puntos de equilibrio aislados

$$(x_1, x_2) = (0, 0)$$

y

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$$

La primera solución representa la extinción de ambas especies. Si ambas poblaciones son cero, continuarán así indefinidamente. La segunda solución representa un punto de equilibrio en el cual ambas poblaciones mantendrán sus valores actuales distintos de cero en forma indefinida.

Los niveles de las poblaciones en los cuales se alcanza el equilibrio dependen únicamente de los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

### ***Diagrama de fase***

Para graficar el diagrama de fase del sistema presa-depredador, debe encontrarse la familia de curvas en el plano  $x_1 - x_2$  que satisface el modelo en ecuaciones de estado; de esta manera:

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1(a - bx_2)}{cx_1 - d}$$

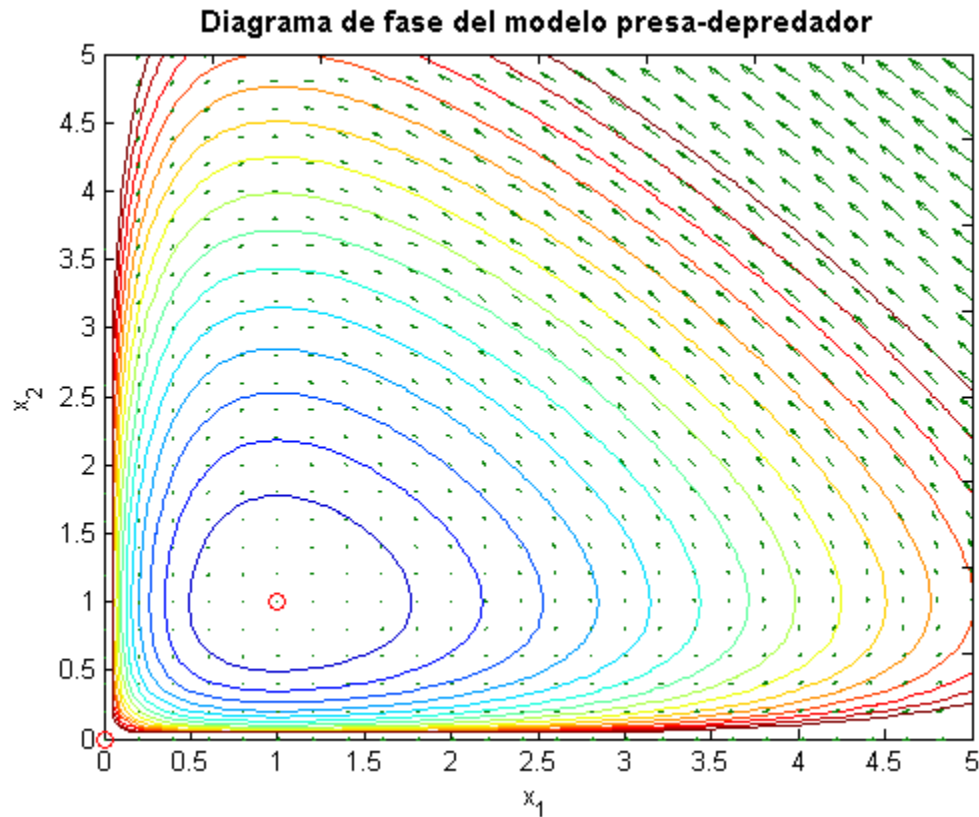
$$\frac{(cx_1 - d)}{x_1} dx_1 = \frac{(a - bx_2)}{x_2} dx_2$$

Integrando

$$cx_1 - d \ln x_1 = a \ln x_2 - bx_2 + K \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

$$cx_1 + bx_2 - d \ln x_1 - a \ln x_2 = K \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Mediante MATLAB (*preypredator\_phase*) se obtiene el diagrama de fase (figura 2), para las constantes  $a = b = c = d = 1$ , junto al campo vectorial de velocidad de crecimiento de las poblaciones. Se observa que el modelo alcanza ciclos límite.



**Figura 2.** Diagrama de fase del modelo presa-depredador

## Ciclos Límite

### Modelo de la dinámica de tráfico en una vía unidimensional

Las dinámicas de tráfico son estudiadas en diferentes formas, y son evaluadas con motivo de mejorar la calidad del flujo de tráfico. La pregunta en cuestión en el estudio del tráfico es como optimizar la demanda de movimiento en un sistema.

El modelo a presentar es una vista unidimensional de una vía de tráfico. Cada vehículo en la vía se rige por un sistema de dos dimensiones, siendo el problema general de orden  $2N$ , donde  $N$  es el número total de vehículos en la vía. La densidad de la vía, es el principal parámetro del modelo y se calcula como  $\rho = N/L$ , siendo  $L$  la longitud de la vía.

De esta manera, si  $\rho$  varía significa que han ocurrido bifurcaciones. Si  $\rho$  comienza a disminuir, se tiene una vía escasamente poblada, dejando lugar para que cada vehículo

alcance la velocidad que desea. Este sistema parece entonces, una vía de flujo libre donde cada vehículo podrá alcanzar la velocidad permitida o deseada.

Si ahora  $\rho$  alcanza una cierta densidad crítica  $\rho_{crit}$ , se nota un cambio en el comportamiento. En este punto la vía se vuelve muy densa para el flujo de tráfico libre y se comienzan a observar *ciclos límites*. Es importante notar que la vía de tráfico es un toro; cuando un vehículo alcanza el final de la pista, aparece nuevamente como el primer vehículo al comienzo de la pista como un punto de referencia. Es importante además, tener presente que este modelo no permite colisiones

El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_n &= v_n \\ \dot{v}_n &= A \left( 1 - \frac{v_n T + D}{x_{n+1} - x_n} \right) - \frac{Z^2(v_n - v_{n+1})}{2(x_{n+1} - x_n - D)} - kZ(v_n - v_{per})\end{aligned}$$

Las ecuaciones consisten en dos variables y cinco parámetros. Las dos variables del modelo son  $x_n$ , la posición del  $n$ -ésimo vehículo en el sistema y  $v_n$ , la velocidad del  $n$ -ésimo vehículo en el sistema. Los cinco parámetros son,  $A$ , un parámetro de sensibilidad medido en  $m/s^2$ ,  $k$ , otro parámetro de sensibilidad medido en  $1/s^2$ ,  $D$ , una distancia mínima medida en metros,  $T$ , un tiempo de reacción medido en segundos y  $v_{per}$ , una velocidad máxima permitida medida en  $m/s$ .

Los términos  $D$ ,  $T$  y  $v_n$  se combinan para crear una distancia de seguridad, definida como  $v_n T + D$ . El sistema también contiene una variable  $Z$ , la cuál calcula la función de Heaviside del término a su derecha; esta función se define por

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

El primer aspecto importante a notar en el modelo es que la primera ecuación, define que un cambio en la posición de un vehículo se rige únicamente por su velocidad.

La segunda ecuación es más compleja y es donde ocurre la mayor parte de la dinámica; establece que un cambio en la velocidad de un vehículo es regido por la aceleración. La ecuación se compone de tres términos. El primer término consiste en una

aceleración definida por la distancia al vehículo del frente y la distancia de seguridad preferida por el conductor a su velocidad actual. Si la distancia de seguridad es menor que la distancia entre los dos vehículos, el primer término será positivo y el conductor aumentará la velocidad. Si la distancia de seguridad es mayor que la distancia entre los dos vehículos, el primer término será negativo y actuará como un término de frenado para disminuir la velocidad.

El segundo término es sólo un término de frenado, expresado a través del signo menos que lleva delante. El numerador contiene  $Z$  que significa que si la diferencia entre  $v_n$  y  $v_{n+1}$  es negativa o cero, esto es, la velocidad del vehículo  $n$ -ésimo es menor que la del vehículo  $(n + 1)$ -ésimo, entonces el término desaparece. De lo contrario, el valor de la diferencia de velocidad se multiplica por uno y luego se eleva al cuadrado. El denominador de este término indicará cuanto frenado será necesario aplicar. Si el denominador es grande y el numerador es pequeño, sólo se requerirá de un frenado ligero. Si el denominador es pequeño y el numerador es grande se requerirá aplicar un frenado fuerte.

El tercer y último término en la ecuación actúa como un frenado que busca llevar a todos los vehículos que circulan sobre la velocidad máxima permitida, de vuelta a la velocidad permitida. Nuevamente cuando la diferencia entre  $v_n$  y  $v_{per}$  es negativa o cero, el término desaparece. Cuando es positivo, se multiplica por uno y por el parámetro de sensibilidad  $k$ .

### ***Condiciones de equilibrio***

Para analizar el modelo se requieren algunas condiciones.

1. Los vehículos se encuentran igualmente espaciados, esto es

$$\delta_n := x_{n+1} - x_n \text{ y } \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_N = \frac{1}{\rho}$$

2. La velocidad de todos los vehículos es la misma:

$$v_1 = v_2 = \dots = v_N = v_0$$



Luego, para hallar los puntos de equilibrio:

$$\dot{v}_n = 0 = A \left( 1 - \frac{v_0 T + D}{1/\rho} \right) - \frac{Z^2(v_0 - v_0)}{2(1/\rho - D)} - kZ(v_0 - v_{per})$$

Permitiendo  $v_0 > v_{per}$  se tiene:

$$0 = A - Av_0 T \rho - AD\rho - kv_0 + kv_{per}$$

$$Av_0 T \rho + kv_0 = A - AD\rho + kv_{per}$$

$$v_0(AT\rho + k) = A(1 - D\rho) + kv_{per}$$

Por lo tanto, la velocidad de equilibrio es:

$$v_0^* = \frac{A(1 - D\rho) + kv_{per}}{AT\rho + k}$$

Esto es válido sólo para  $v_0 > v_{per}$ , entonces debe existir una densidad crítica a la cual el equilibrio cambia:

$$0 = A \left( 1 - \frac{v_{per} T + D}{1/\rho} \right)$$

$$0 = 1 - v_{per} T \rho - D\rho$$

$$\rho(v_{per} T + D) = 1$$

Así, la densidad crítica es:

$$\rho_c = \frac{1}{v_{per} T + D}$$

Resolviendo para  $v_0 < v_{per}$

$$0 = A \left( 1 - \frac{v_0 T + D}{1/\rho} \right)$$

$$0 = 1 - v_0 T \rho - D\rho$$

$$v_0 T \rho = 1 - D\rho$$

Luego, la velocidad de equilibrio es:

$$v_0^* = \frac{1 - D\rho}{T\rho}$$

Análisis de  $\dot{x}_n$ :

$$\dot{x}_n = v_n$$

La solución de equilibrio para  $\dot{x}_n$  será simplemente  $v_0$ .

Teniendo en cuenta las distancias entre cada par de vehículos y la distancia recorrida por ellos, se obtiene la posición de equilibrio para cada vehículo:

$$x_n^* = \frac{1 - n}{\rho} + v_0 t$$

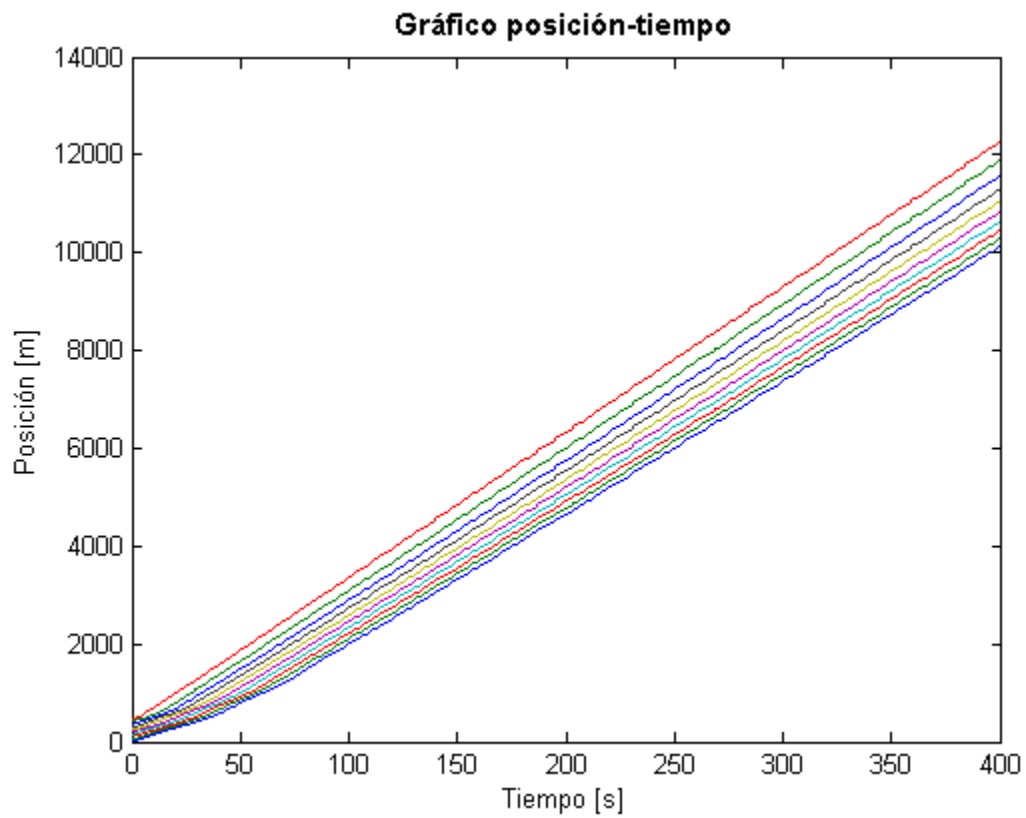
### ***Simulaciones***

Utilizando MATLAB y los programas *traffic.m*, *traffic1.m* y *zfunc.m* se realizan simulaciones para distintas densidades de tráfico  $\rho$ , y las constantes  $A = 3$ ,  $D = 5$ ,  $T = 3$ ,  $v_{per} = 25$  y  $k = 1/2$ .

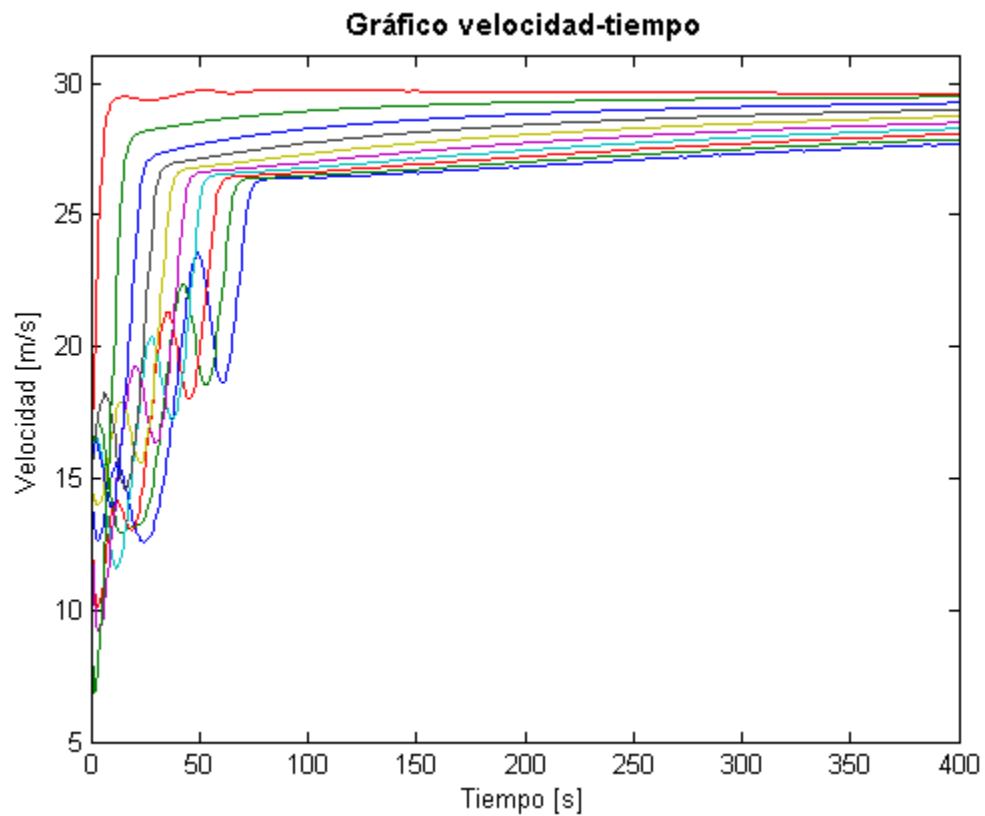
Con una configuración inicial de  $N = 10$  y  $L = 560$ , con lo que se tiene una densidad  $\rho = \frac{1}{56}$ , se observa que la velocidad (figura 3) presenta ciertas fluctuaciones al comienzo pero finalmente el sistema llega a un estado de flujo libre donde todos los conductores alcanzan la velocidad deseada o permitida. Para el gráfico posición-tiempo (figura 4) se tiene una función lineal para cada vehículo en la medida que estos alcanzan la velocidad de estado estacionario.

Para una configuración inicial con  $N = 10$  y  $L = 150$  (densidad  $\rho = 1/15$ ), el sistema converge a un *ciclo límite*, el que se manifiesta físicamente por atochamientos periódicos en la vía para todo intervalo de tiempo (figura 5 y figura 6).

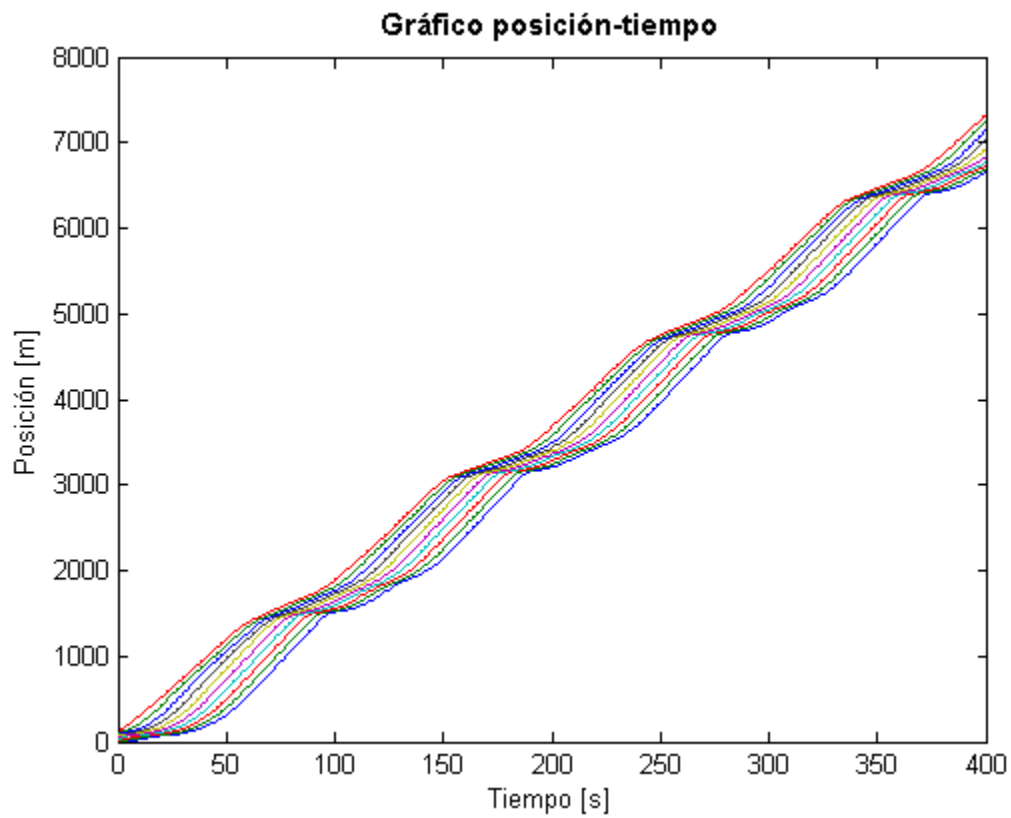
Finalmente para una configuración con  $N = 15$  y  $L = 20$ , esta alta densidad de tráfico ( $\rho = 3/4$ ) genera un comportamiento oscilatorio donde los vehículos finalmente alcanzarán velocidades que fluctúan, pero muy por debajo de la velocidad permitida (figura 6 y figura 7).



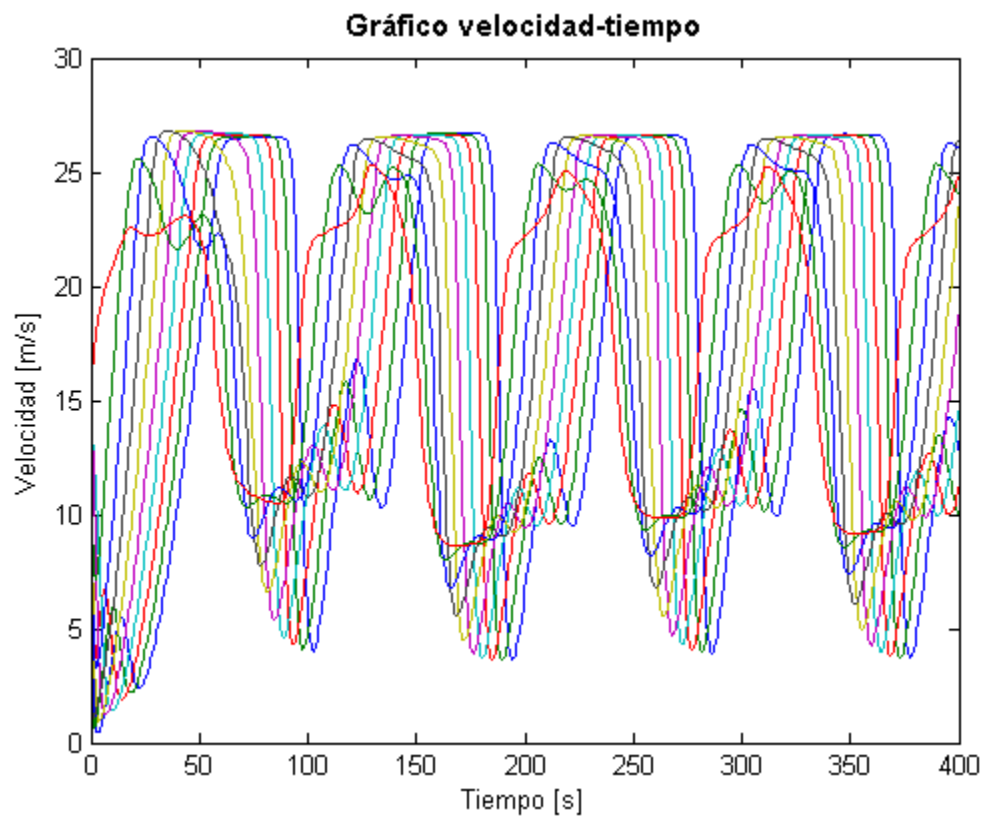
**Figura 3.** Gráfico posición-tiempo del modelo de tráfico para  $\rho = 1/56$



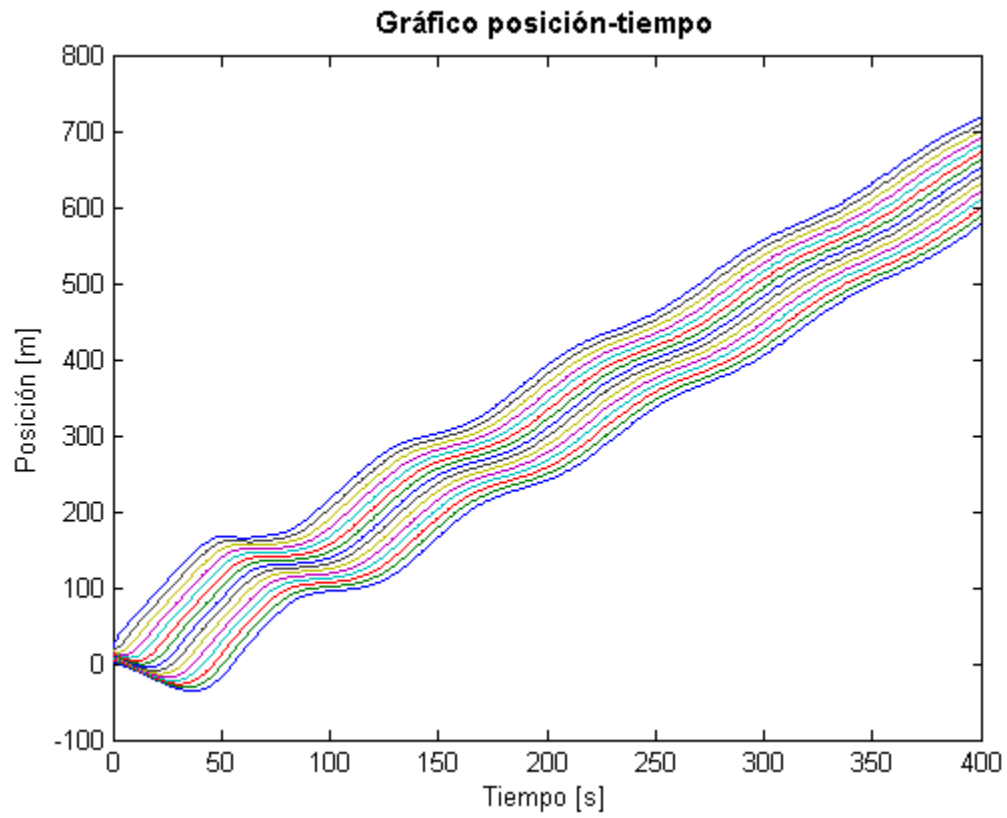
**Figura 4.** Gráfico velocidad-tiempo del modelo de tráfico para  $\rho = 1/56$



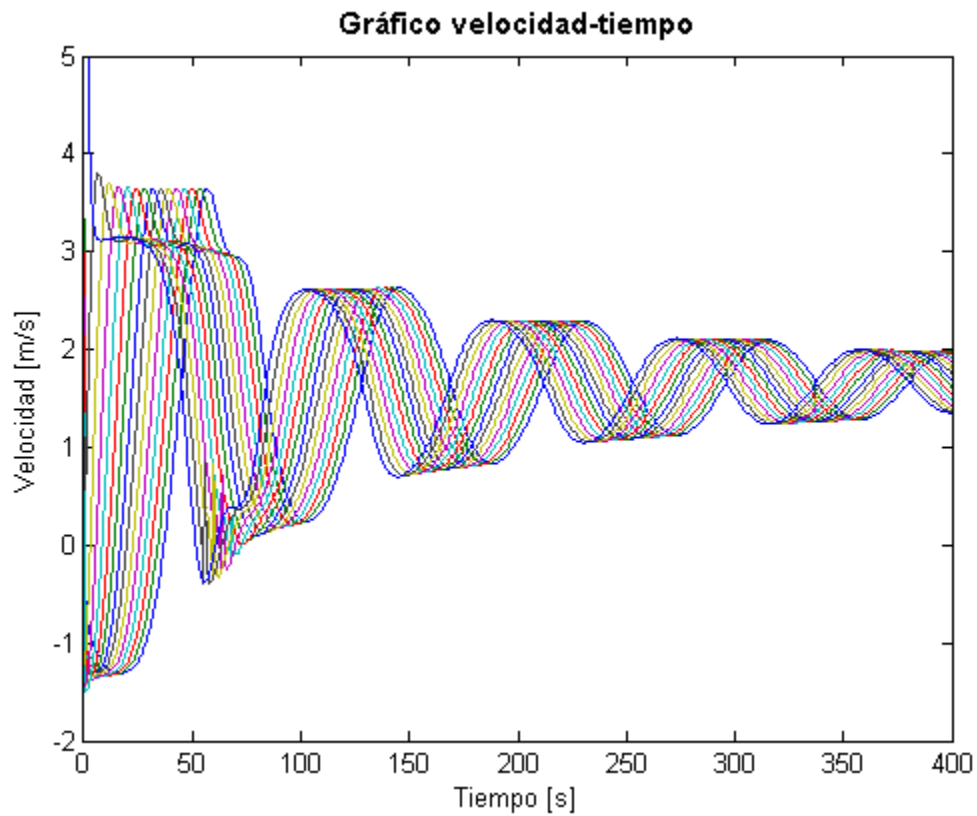
**Figura 5.** Gráfico posición-tiempo del modelo de tráfico para  $\rho = 1/15$



**Figura 6.** Gráfico velocidad-tiempo del modelo de tráfico para  $\rho = 1/56$



**Figura 7.** Gráfico posición-tiempo del modelo de tráfico para  $\rho = 3/4$



**Figura 8.** Gráfico velocidad-tiempo del modelo de tráfico para  $\rho = 3/4$

# Caos

## Ecuaciones de Lorenz

El comienzo de la historia del caos según las teorías actuales se puede situar cuando se inventaron los computadores de alta velocidad (sobre 1950) y se desarrollaron algunas intuiciones sobre cómo eran los sistemas no lineales. Esto es, cuando se vieron las primeras gráficas sobre el comportamiento de estos sistemas mediante métodos numéricos. En 1963 Edward Lorenz trabajaba en unas ecuaciones, las ecuaciones mundialmente conocidas como ecuaciones de Lorenz, que esperaba predijeran el tiempo en la atmósfera, y trató mediante los computadores ver gráficamente el comportamiento de sus ecuaciones. Luego de simular se encontró con una figura que ahora se conoce como atractor de Lorenz.

Las ecuaciones de Lorenz son

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

Donde  $\sigma$  es el número de Prandtl (viscosidad/conductividad térmica),  $r$  es el número de Rayleigh (diferencia de temperatura entre base y tope) y  $b$  es la razón entre longitud y altura del sistema.

Lorenz observó dos cosas fundamentales que ocurrían en su ecuación:

1. Cualquier diferencia en las condiciones iniciales antes de los cálculos, incluso infinitesimal, cambiaba de forma dramática los resultados. Tan sólo se podía predecir el sistema por cortos períodos. Llevando eso a la meteorología, suponía lo que se llamó efecto mariposa, hipersensibilidad a las condiciones iniciales.
2. A pesar de lo anterior, la impredecibilidad del sistema, lejos de ser un comportamiento al azar, tenía una curiosa tendencia a evolucionar dentro de una zona muy concreta del espacio de fases, situando una especie de pseudocentro de gravedad de los comportamientos posibles, lo que se conoce como atractor extraño.

Las ecuaciones de Lorenz fueron propuestas como un modelo muy simplificado de la convección en forma de anillos que parece ocurrir a veces en la atmósfera terrestre. Por ello, las tres magnitudes a las que Lorenz se refiere en su sistema son:

$x$ : razón de rotación del anillo

$y$ : gradiente de temperatura

$z$ : desviación de la temperatura respecto a su valor de equilibrio

### ***Puntos de equilibrio***

Calculando los puntos de equilibrio se tiene:

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ rx - y - xz = 0 \\ xy = bz \end{cases}$$

Por lo tanto

$(x, y, z) = (0, 0, 0)$  es un punto de equilibrio

Si  $x = y \neq 0$  se obtiene

$$z = \frac{x^2}{b}$$

Entonces

$$rx - x - x \cdot \frac{x^2}{b} = 0$$

$$(r - 1) - \frac{x^2}{b} = 0$$

$$x^2 = b(r - 1)$$

Luego, si  $r > 1$

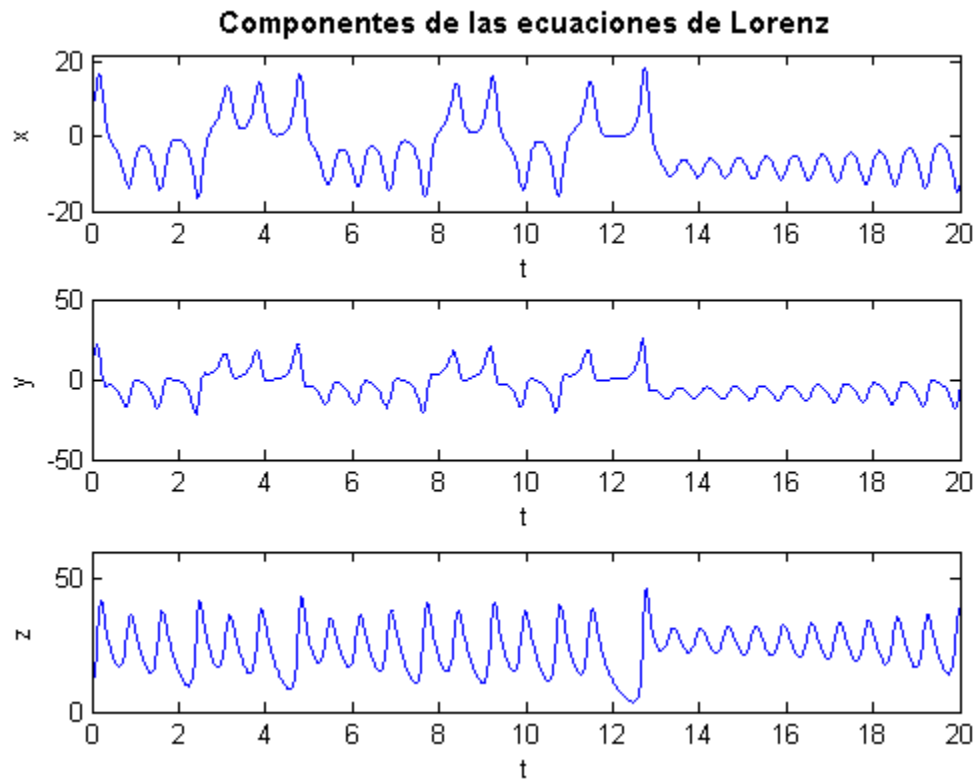
$$x = \pm \sqrt{b(r - 1)}$$

Se tiene entonces, que el sistema presenta múltiples puntos de equilibrio.

## Simulaciones

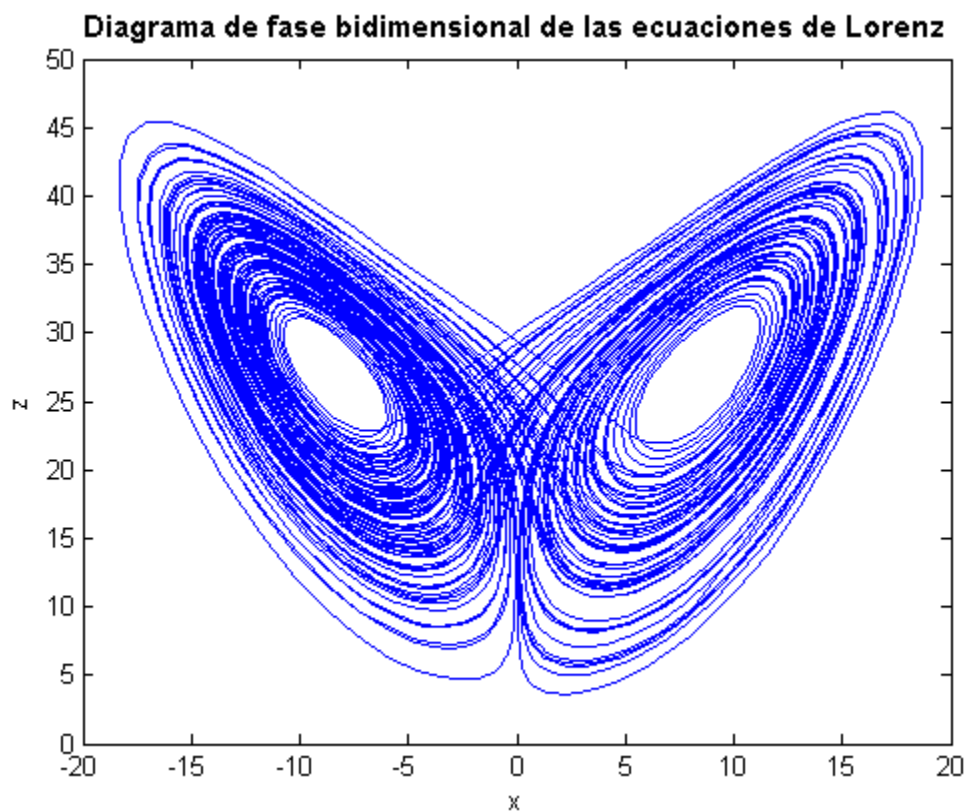
### 1. Evolución en el tiempo y diagramas de fase

La integración de las ecuaciones de Lorenz (*lorenz.m* y *lorenz\_phase.m*) para  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  y  $b = 8/3$  con condición inicial  $(x, y, z) = \left(8, 9, \frac{19}{2}\right)$ , resulta en los movimientos aperiódicos de la figura 9 y los diagramas de fase de las figuras 10 y 11.

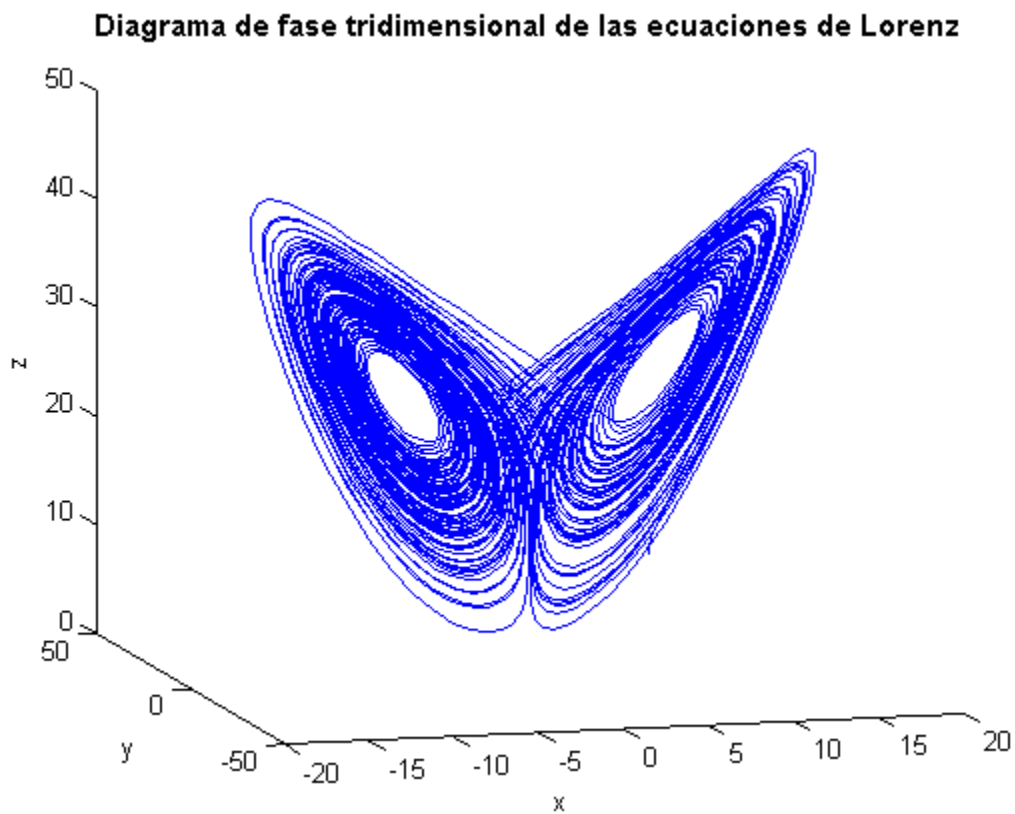


**Figura 9.** Evolución en el tiempo de las ecuaciones de Lorenz





**Figura 10.** Diagrama de fase para los estados  $x - z$



**Figura 11.** Diagrama de fase para los estados  $x - y - z$

Estas trayectorias se asemejan a un par de alas de mariposa. A este tipo de conjuntos se les llama atractor extraño, es el conjunto límite de volumen cero que atrae todas las trayectorias.

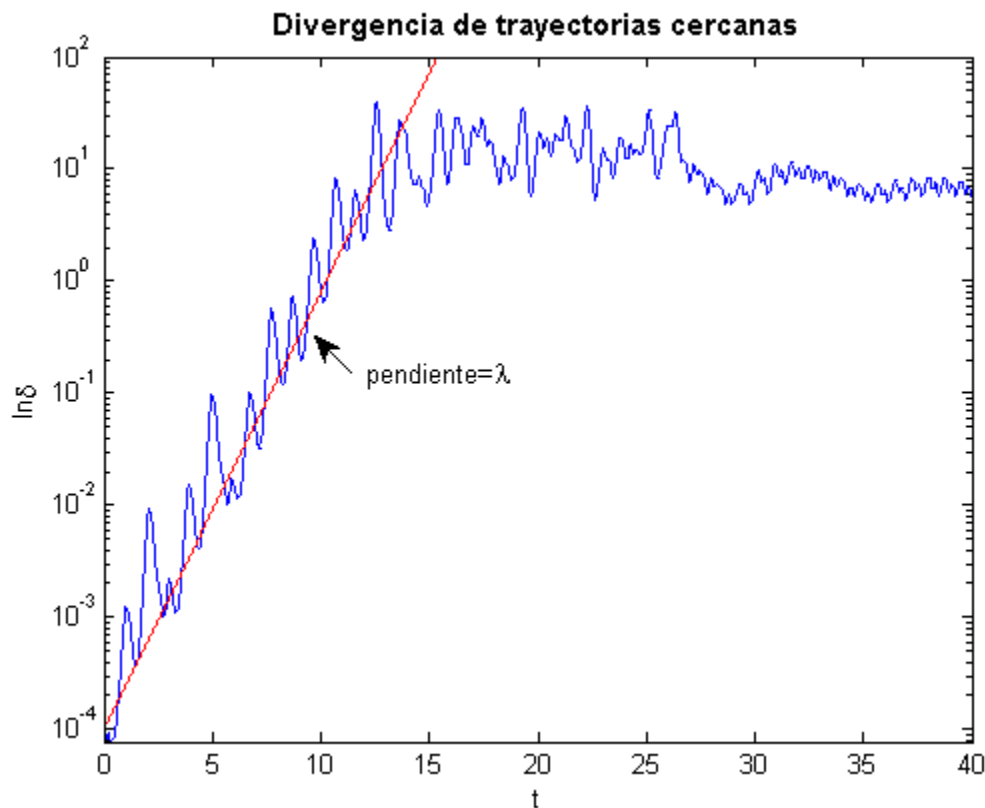
## 2. Divergencia exponencial de trayectorias cercanas

La noción clave es que el sistema exhibe sensibilidad respecto las condiciones iniciales. Pequeñas incertidumbres se amplifican rápidamente.

Si se compara una solución  $x(t)$  con otra  $x(t) + \delta(t)$ , en estudios numéricos del atractor se encuentra que  $\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| e^{\lambda t}$ ; esto es, las trayectorias se separan exponencialmente rápido (*lyapunov\_lorenz.m*).

La curva nunca es una recta exacta (la divergencia varía de punto a punto del atractor). La divergencia satura cuando se alcanza el tamaño del atractor (figura 12).

El número  $\lambda$  se suele llamar exponente de Liapunov de la trayectoria, pero debe tenerse atención porque en realidad hay  $n$  exponentes de Liapunov diferentes y en general cambia de trayectoria a trayectoria. Así que para calcularlo hay que realizar un promedio.



**Figura 12.** Divergencia exponencial de trayectorias cercanas

### 3. Mapa de Lorenz

El mapa de Lorenz es una manera inteligente de analizar la dinámica de un atractor extraño. Consiste en calcular  $z(t)$  y definir la sucesión  $z_n$  como la sucesión de máximos locales de  $z(t)$ . La idea es predecir  $z_{n+1}$  a partir de  $z_n$  (*lorenz\_map.m*).

Lo asombroso es que se encuentra que los datos de la serie temporal caótica caen aparentemente en una curva sencilla, por lo que de cierta manera se puede extraer orden a partir del caos. La función  $z_{n+1} = f(z_n)$  define el mapa de Lorenz (figura 13). Proporciona mucha información sobre la dinámica en el atractor. En realidad  $f(z)$  no es curva perfecta, tiene algún grosor, pero este es muy pequeño, así que la información que se obtenga a partir del mapa no será rigurosa pero si plausible.

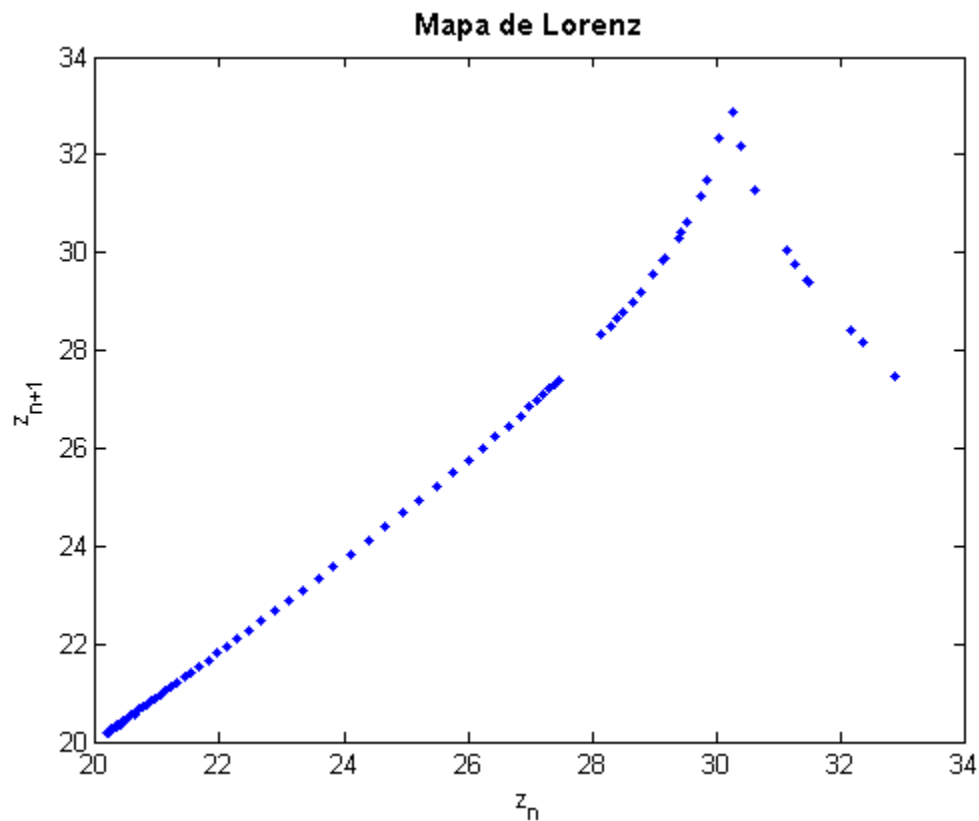


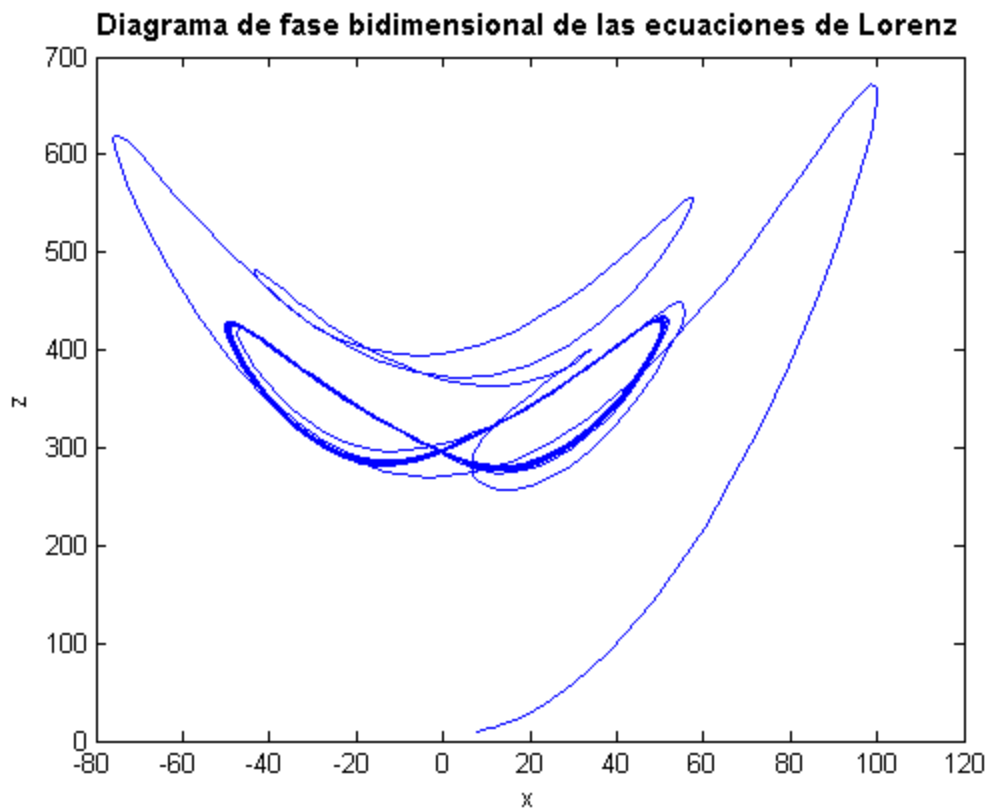
Figura 13. Mapa de Lorenz

#### 4. Exploración por el espacio de parámetros

Conforme se varían los parámetros  $\sigma$ ,  $b$  y  $r$  del modelo se encuentran multitud de soluciones posibles: exóticos ciclos límites agrupados en nudos, pares de ciclos límites unidos, caos intermitente, periodicidad ruidosa y atractores extraños.

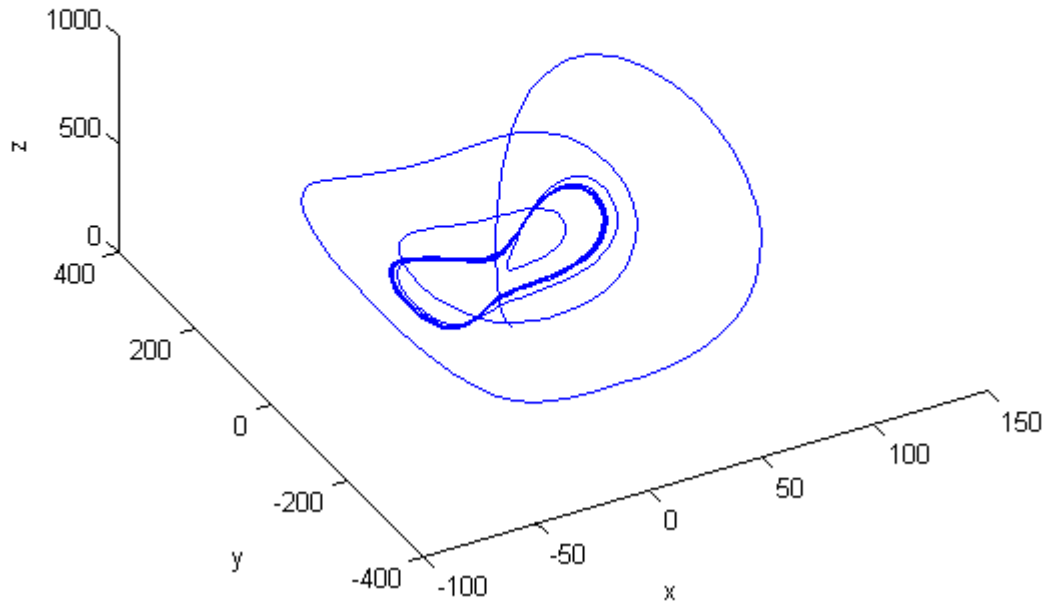
Es interesante ver que para  $r$  suficientemente grande (según simulaciones numéricas  $r > 313$ ), la dinámica puede volver a ser simple.

Una simulación para  $r = 350$  muestra que el sistema tiene un atractor global, que es un ciclo límite (figuras 14 y 15).



**Figura 14.** Diagrama de fase para los estados  $x - z$

### Diagrama de fase tridimensional de las ecuaciones de Lorenz



**Figura 15.** Diagrama de fase para los estados  $x - y - z$

Aunque parezca extraño el caos puede ser útil y explotado para hacer cosas prácticas. Un ejemplo es la realización de comunicaciones privadas. Esta aplicación se base en la existencia de caos sincronizado.

Es posible diseñar un circuito eléctrico que simule las ecuaciones de Lorenz. Un primer circuito de este tipo actuará como transmisor de la señal, el receptor es un segundo circuito idéntico forzado de alguna manera por el transmisor. El hecho es que entonces los sistemas muestran un caos sincronizado casi perfecto (evolucionan caóticamente pero sincronizados). Esto puede usarse para transmitir un mensaje enmascarado por una señal caótica que será recuperado al sustraer adecuadamente la componente caótica de la señal.

## **Problema 2**

Un generador sincrónico conectado a un bus infinito puede representarse por las ecuaciones

$$M\ddot{\delta} = P - D\dot{\delta} - \eta_1 E_q \sin\delta$$

$$\tau\dot{E}_q = -\eta_2 E_q + \eta_3 \cos\delta + E$$

Donde  $\delta$  es un ángulo en radianes,  $E_q$  es tensión,  $P$  es potencia mecánica,  $E$  es tensión de entrada,  $D$  es un coeficiente de amortiguamiento,  $M$  es un coeficiente de inercia,  $\tau$  es una constante de tiempo, y  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  y  $\eta_3$  son parámetros constantes.

- i) Usando  $\delta$ ,  $\dot{\delta}$  y  $E_q$  como variables de estado, obtener las ecuaciones de estado.
- ii) Encontrar todos los puntos de equilibrio correspondientes a los valores

$P = 0.815$	$E = 1.22$	$\eta_1 = 2$	$\eta_2 = 2.7$
$\eta_3 = 1.7$	$\tau = 6.6$	$M = 0.0147$	$D/M = 4$

- iii) Suponiendo que  $\tau$  es suficientemente grande como para tomar  $\dot{E}_q \approx 0$ , mostrar que el modelo del sistema se reduce a la ecuación del péndulo.

## **Respuesta**

- i) Sean los estados

$$x_1 = \delta \qquad x_2 = \dot{\delta} \qquad x_3 = E_q$$

El modelo del generador sincrónico en ecuaciones de estado es el siguiente:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{P}{M} - \frac{D}{M}x_2 - \frac{\eta_1}{M}x_3 \sin x_1 \quad , \quad M > 0$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{\eta_2}{\tau}x_3 + \frac{\eta_3}{\tau} \cos x_1 + \frac{E}{\tau} \quad , \quad \tau > 0$$

ii) Para hallar los puntos de equilibrio se requiere que  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$  y se resuelve para  $x_1, x_2$  y  $x_3$ :

$$0 = x_2$$

$$0 = \frac{P}{M} - \frac{D}{M}x_2 - \frac{\eta_1}{M}x_3 \text{sen}x_1 \quad , \quad M > 0$$

$$0 = -\frac{\eta_2}{\tau}x_3 + \frac{\eta_3}{\tau}\text{cos}x_1 + \frac{E}{\tau} \quad , \quad \tau > 0$$

Por tanto, se debe resolver el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\eta_1 x_3 \text{sen}x_1 = P \quad (1)$$

$$\eta_2 x_3 - \eta_3 \text{cos}x_1 = E \quad (2)$$

De (1) se tiene que

$$x_3 = \frac{P}{\eta_1 \text{sen}x_1} \quad , \quad x_1 \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$\eta_2 \frac{P}{\eta_1 \text{sen}x_1} - \eta_3 \text{cos}x_1 = E \quad / \cdot \eta_1 \text{sen}x_1$$

$$\eta_2 P - \eta_1 \eta_3 \text{sen}x_1 \text{cos}x_1 = E \eta_1 \text{sen}x_1$$

Considerando que  $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\text{cos}(x)$

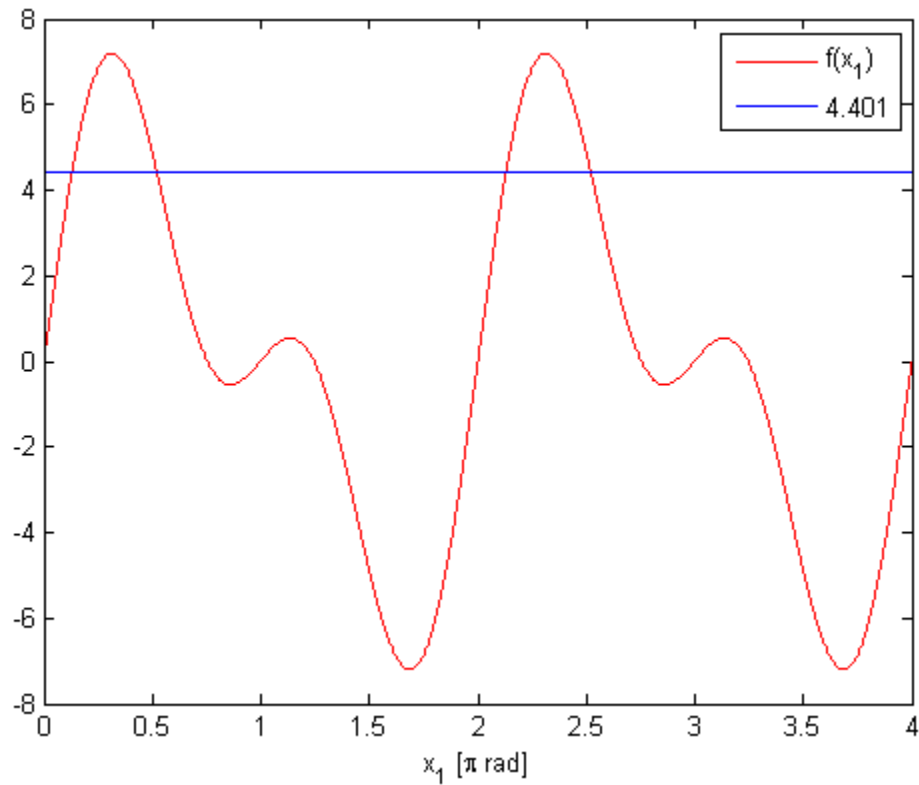
$$\eta_2 P - \frac{\eta_1 \eta_3}{2} \text{sen}(2x_1) = E \eta_1 \text{sen}x_1 \quad / \cdot 2$$

$$2E\eta_1 \text{sen}x_1 + \eta_1 \eta_3 \text{sen}(2x_1) = 2\eta_2 P$$

Reemplazando lo valores dados

$$4.88 \text{sen}x_1 + 3.4 \text{sen}(2x_1) = 4.401 \quad (4)$$

Resolviendo esta ecuación gráficamente con ayuda de MATLAB, para una función  $f$  definida por  $f(x_1) = 4.88\text{sen}x_1 + 3.4\text{sen}(2x_1)$ , se tiene la figura 16.



**Figura 16.** Gráfico para resolución de la ecuación (4)

Del gráfico se tiene que las soluciones de la ecuación son

$$x_1 = 0.4067 + 2n\pi \wedge x_1 = 0.5219 + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto

$$x_3 = \frac{P}{\eta_1 \text{sen}x_1} = \frac{0.4075}{\text{sen}(0.4067 + 2n\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

y

$$x_3 = \frac{0.4075}{\text{sen}(0.5219 + 2n\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$



Finalmente los puntos de equilibrio del sistema son:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( 0.4067 + 2n\pi, 0, \frac{0.4075}{\text{sen}(0.4067 + 2n\pi)} \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( 0.5219 + 2n\pi, 0, \frac{0.4075}{\text{sen}(0.5219 + 2n\pi)} \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

iii) Suponiendo  $\tau$  suficientemente grande, el modelo del sistema

$$\ddot{\delta} = \frac{P}{M} - \frac{D}{M} \dot{\delta} - \frac{\eta_1 E_q}{M} \text{sen} \delta$$

$$\dot{E}_q = -\frac{\eta_2 E_q}{\tau} + \frac{\eta_3}{\tau} \cos \delta + \frac{E}{\tau}$$

se reduce a:

$$\ddot{\delta} = \frac{P}{M} - \frac{D}{M} \dot{\delta} - \frac{\eta_1 E_q}{M} \text{sen} \delta$$

$$\dot{E}_q \approx 0$$

Donde la segunda expresión es innecesaria, así el modelo queda

$$\ddot{\delta} = \frac{P}{M} - \frac{D}{M} \dot{\delta} - \frac{\eta_1 E_q}{M} \text{sen} \delta$$

Que tiene la forma de la ecuación de un péndulo con torque aplicado  $T$  (entrada del sistema) cuya ecuación es:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{ml^2} T - \frac{k}{m} \dot{\theta} - \frac{g}{l} \text{sen} \theta$$

### **Problema 3**

Sea  $f(x)$  una función continuamente diferenciable. Mostrar que el punto de equilibrio  $x^*$  de  $\dot{x} = f(x)$  es aislado si la matriz Jacobiana  $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x^*)$  es no singular.

### **Respuesta**

Sea el sistema lineal  $\dot{x} = Ax$  y definiendo  $\dot{x} = f(x)$ , todo punto de equilibrio  $x^*$  debe satisfacer la ecuación

$$f(x) = 0$$

Es decir debe cumplirse que

$$f(x^*) = 0$$

O bien escrito en forma matricial

$$Ax^* = 0$$

donde  $A = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x^*)$ . Si la matriz  $A$  es no singular, significa que admite matriz inversa  $A^{-1}$  y por lo tanto

$$Ax^* = 0 \quad / \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1}Ax^* = A^{-1} \cdot 0$$

$$x^* = 0$$

Por lo que el punto de equilibrio  $x^*$  es único y es igual al origen.

Ahora bien, si la matriz  $A$  es singular entonces  $\det(A) = 0$  o, equivalentemente, es posible afirmar que  $A$  tiene al menos un autovalor  $\lambda_i$  igual a cero.

Supongamos que la matriz  $A$  tiene autovalores  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 \neq 0$ . Suponiendo que  $V_1$  es un autovector para  $\lambda_1$  y  $V_2$  es un autovector para  $\lambda_2$ . Se tienen así dos autovalores reales distintos y por lo tanto la solución general del sistema es:

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

Pero  $\lambda_1 = 0$ , por lo que  $e^{\lambda_1 t} = e^{0t} = 1$  para todo  $t$ . Se tiene entonces que

$$x(t) = k_1 V_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

Se debe notar que  $k_1 V_1$  es constante y por lo tanto todas las soluciones con  $k_2 = 0$  son puntos de equilibrio. En otras palabras, cada punto en la línea de los autovectores para el autovalor  $\lambda_1 = 0$  es un punto de equilibrio.

Si  $\lambda_2 < 0$ , entonces el segundo término de la solución general tiende a cero a medida que  $t$  aumenta, por lo tanto la solución

$$x(t) = k_1 V_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

Tiende al punto de equilibrio  $k_1 V_1$  a lo largo de una línea paralela a  $V_2$ .

Si  $\lambda_2 > 0$ , entonces la solución se aleja de los puntos de equilibrio a medida que  $t$  aumenta

## Apéndice. Códigos MATLAB

### *preypredator\_eq.m*

```
function dx = preypredator_eq(t,x)
a = 0.6;
b = 1;
c = 0.8;
d = 0.9;
dx = [a*x(1)-b*x(1)*x(2); c*x(1)*x(2)-d*x(2)];
```

### *preypredator\_time.m*

```
x1start = 0.1; %población inicial de presas
x2start = 0.9; %población inicial de depredadores

figure
hold on

for i=1:40
    tspan = 0:0.005:i;
    [t,x] = ode23(@predprey,tspan,[x1start; x2start]);
    plot(t,x(:,1), 'b');
    hold on
    plot(t,x(:,2), 'r');
end

xlabel('Tiempo');
ylabel('Tamaño de la población');
title('Evolución en el tiempo del modelo presa-
depredador','FontSize',11,'FontWeight','bold');
text(10,4,'Depredador','Color','r')
text(10,4.3,'Presa','Color','b')
```

### *preypredator\_phase.m*

```
x1start = 0.1; %población inicial de presas
x2start = 0.9; %población inicial de depredadores
a = 1;
b = 1;
c = 1;
d = 1;

figure
hold on

[x1grid,x2grid] = meshgrid(0:0.05:5);
K=c*x1grid+b*x2grid-d*log(x1grid)-a*log(x2grid); %solución del sistema de
ecuaciones diferenciales

v = -5:0.2:5;
contour(x1grid,x2grid,K,v, '-'); %gráfico del diagrama de fase
```

```

[x1, x2] = meshgrid(0:0.2:5, 0:0.2:5);
x1dot=x1-x1.*x2;
x2dot=x1.*x2-x2;
quiver(x1,x2,x1dot,x2dot) %gráfico del campo vectorial

plot(0,0,'ro')
plot(d/c,a/b,'ro')
axis([0 5 0 5])

xlabel('x_{1}')
ylabel('x_{2}')
title('Diagrama de fase del modelo presa-
depredador','FontSize',11,'FontWeight','bold')

```

### ***traffic.m***

```

function deriv = traffic(t, Y, A, D, T, vper, k, N, L)

x = Y(1:N);
v = Y((N+1):(2*N));
vshift = circshift(v,-1);
xshift = circshift(x,-1);
dx = zfunc(xshift - x).*(xshift - x);
dx(N) = zfunc(xshift(N)-xshift(1)+L).*(xshift(N)-xshift(1)+L);
dv = vshift - v;
dvper = v - vper;
mdv = -1*dv;
Zv = zfunc(mdv);
Zper = zfunc(dvper);
deriv = [v; A* (1 - (v*T + D) ./ dx) - Zv.*(mdv.^2)./(2*(dx-D))-
k*Zper.*dvper];

```

### ***traffic1.m***

```

A = 3;
D = 5;
T = 3;
vper = 25;
k = 1/2;
N = 15;
L = 20;
p = N/L;
tend = 1500;
narr = 1:N;
a = [A, D, T, vper, k];
x0(1) = 0;
v0(1) = 15;

for i=2:N
    v0(i) = 15;
    x0(i) = x0(i-1) + rand*2/p ;
end
Y0 = [x0';v0'];

```

```

tspan=[0,tend];

figure
hold on
ode = @(t,Y)traffic(t, Y, A, D, T, vper, k,N, L);
[t, Y] = ode45(ode, tspan, Y0);

x(:,1:N) = Y(:,1:N);
v(:,1:N) = Y(:,(N+1):(2*N));
figure(1)
plot(t,x)
title('Gráfico posición-tiempo','FontSize',11,'FontWeight','bold')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Posición [m]')

figure(2)
plot(t,v)
title('Gráfico velocidad-tiempo','FontSize',11,'FontWeight','bold')
xlabel('Tiempo [s]')
ylabel('Velocidad [m/s]')

```

### ***zfunc.m***

```

function y=zfunc(x)
if x~=0
    y=heaviside(x);
else
    y=0;
end

```

### ***lorenz.m***

```

function dydt = lorenz(t,y);
sigma = 10;
r = 28;
b = 8/3;
dydt = [sigma*(y(2)-y(1)); r*y(1) - y(2) - y(1)*y(3); y(1)*y(2) - b*y(3)];

```

### ***lorenz\_phase.m***

```

% condiciones iniciales
y0 = [8 9 9.5];
ystart = y0;

tspan=[0,100];
[t,y] = ode45(@lorenz,tspan,ystart);
figure(1)
plot(y(:,1),y(:,3))
title('Diagrama de fase bidimensional de las ecuaciones de Lorenz','FontSize',11,'FontWeight','bold')

```

```

xlabel('x')
ylabel('z')

figure(2)
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3))
title('Diagrama de fase tridimensional de las ecuaciones de Lorenz','FontSize',11,'FontWeight','bold')
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')

figure(3)
subplot(3,1,1)
plot(t,y(:,1));axis([0 20 -20 22])
xlabel('t')
ylabel('x')

subplot(3,1,2)
plot(t,y(:,2));axis([0 20 -50 50])
xlabel('t')
ylabel('y')

subplot(3,1,3)
plot(t,y(:,3)); axis([0 20 0 60])
xlabel('t')
ylabel('z')

```

### ***lyapunov\_lorenz.m***

```

y0 = [8 9 9.5];
z0 = [8 9 9.5001];

tspan = 0:0.004:40;

[t y]=ode45(@lorenz,tspan,y0);
[t z]=ode45(@lorenz,tspan,z0);

d = ((y(:,1)-z(:,1)).^2 + (y(:,2)-z(:,2)).^2 + (y(:,3)-z(:,3)).^2).^0.5;

semilogy(t,d);
xlabel('t')
ylabel('ln\delta')
title('Divergencia de trayectorias cercanas','FontSize',11,'FontWeight','bold')
hold on

test = d(1).*exp(0.9.*t);
plot(t,test,'r');
axis([0 40 0 100])

```

### ***lorenz\_map.m***

```
y0 = [8 9 9.5];
tspan = 0:0.005:200;
[t,y] = ode45(@lorenz,tspan,y0);

dzdt = diff(y(:,3));
count = 1;

for i=1:20000-1
    if( dzdt(i)*dzdt(i+1) < 0 & dzdt(i)>0 )
        z(count) = y(i,3);
        count = count+1;
    end
end

for j=1:count-2
    plot(z(j),z(j+1),'.');
    hold on
end

title('Mapa de Lorenz','FontSize',11,'FontWeight','bold')
xlabel('z_{n}')
ylabel('z_{n+1}')
```



# Sistemas No Lineales, Tarea 1

Pablo Coelho Caro  
Universidad de Concepción

October 20, 2010

## 1 Problema 1

Investigue y describa sistemas dinámicos que evidencien múltiples puntos de equilibrio, ciclos límites y caos. De un ejemplo de cada uno de ellos y realice las simulaciones respectivas y comente.

### 1.1 Solución

Se describen dos sistemas que presentan lo pedido en la tarea.

#### 1.1.1 Sistema de Lorentz, 1963.

Edward Lorenz en 1963 construyó un modelo muy simplificado de un fluido de convección [1]. Este modelo muestra una gran variedad de comportamientos y para algunos valores de los parámetros, su ciclo límite es caótico.

El sistema está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

donde  $x$  mide la tasa de convección,  $y$  las medidas horizontales de la variación de temperatura,  $z$  mide la variación de la temperatura vertical,  $\sigma$  es el número de Prandtl,  $r$  es el número de Rayleigh, y  $b$  es un factor de escala. Los valores utilizados para por Lorentz fueron  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  y  $b = 8/3$ .

El sistema puede ser considerado como un modelo muy simplificado para el clima, pero lo sorprendente fue la conclusión derivada de Lorenz que ahora es llamada efecto mariposa.

Dado que el sistema es sensible a las condiciones iniciales, pequeños cambios en velocidad del viento, por ejemplo, generada por el aleteo de una mariposa, puede cambiar los resultados considerablemente.

Por ejemplo, una mariposa que bate sus alas en Chile podría causar o provocar un huracán que se produzcan en las Bahamas en un futuro no muy lejano,

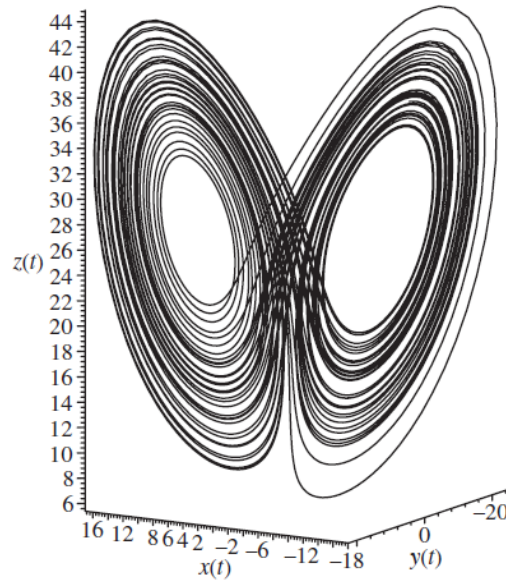


Figure 1: Fig. 1:Atractor de Lorentz.  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  y  $b = 8/3$ .

por supuesto, hay muchas más variables que deben ser considerados cuando se trata de modelar los sistemas climáticos, pero este modelo simplificado ilustra algunos de los problemas con que los meteorólogos tienen que lidiar.

*Simulación Atractor de Lorentz.*

```
Lorentz:=
diff(x(t),t)= $\sigma*(y(t)-x(t))$ ,
diff(y(t),t)= $r*x(t)-y(t)+x(t)*z(t)$ ,
diff(z(t),t)= $x(t)*y(t)-b*z(t)$ :
p1:=DEplot3d({Lorentz},
{x(t),y(t),z(t)},t=0..80,[[x(0)=1.6,y(0)=0,z(0)
=-1.6],[x(0)=-1.6,y(0)=0,z(0)=1.6]],
scene=[x(t),y(t),z(t)],stepsize
=0.05,thickness=1,linecolor=blue):
display(p1,font=[TIMES,ROMAN,15]);
```

Figura de la simulación del Atractor de Lorentz.

Otro efecto de comportamiento del modelo ocurre cuando alteramos los parámetros de esta forma:  $\sigma = 35$ ,  $r = 28$  y  $b = 3$ , ver figura.

**Comentario** Este es un sistema que cumple con lo requerido, pero el hecho de tener Caos, resulta el tema central en que los artículos se enfocan. Y esto es esperable ya que es justamente este sistema el que llamo poderosamente la atención por dicha propiedad.

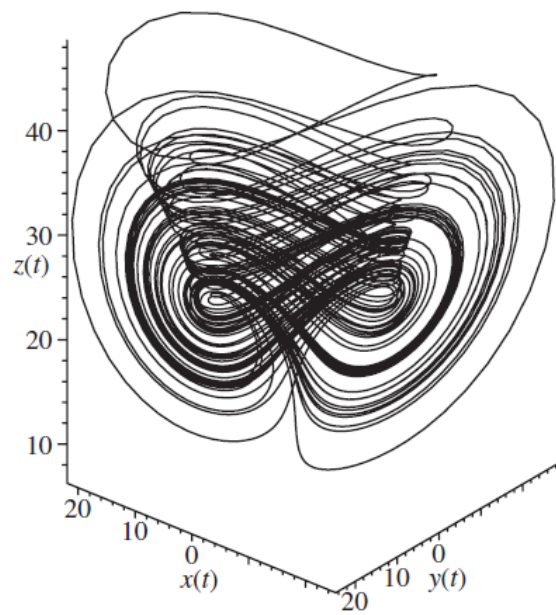


Figure 2: Fig. 2: Atractor de Lorentz,  $\sigma = 35$ ,  $r = 28$  y  $b = 3$ .

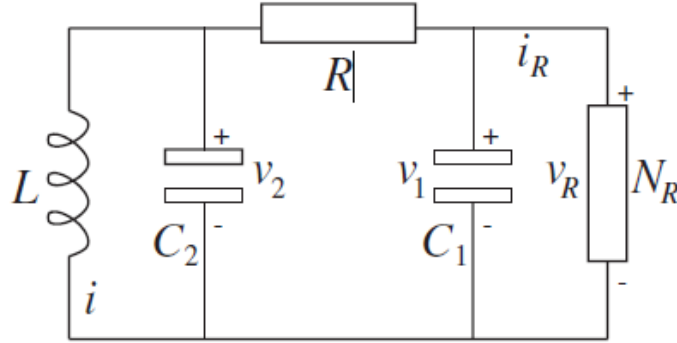


Figure 3: Fig. 3: Circuito de Chua

### 1.1.2 Circuito de Leon O. Chua.

A mediados de la década de 1980 Leon O. Chua modeló un circuito simple de un oscilador electrónico, el que terminó exhibiendo una variedad de bifurcaciones y fenómenos caóticos. El diagrama del circuito se puede apreciar en la figura siguiente.

Las ecuaciones del circuito son las siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \frac{G(v_2 - v_1) - f(v_1)}{C_1} \\ \dot{v}_2 &= \frac{G(v_1 - v_2) + i}{C_2} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{v_2}{L}\end{aligned}$$

Donde  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$  son los voltajes a través de  $C_1$ ,  $C_2$  y la corriente en  $L$  respectivamente.

La función no lineal del resistor  $N_R$  es

$$f(v_1) = G_b v_1 + 0.5(G_a - G_b)(|v_1 + B_p| - |v_1 - B_p|)$$

donde  $G = \frac{1}{R}$ . Los valores típicos para este circuito son:

$$\begin{aligned}C_1 &= 10.1 \text{ nF} \\ C_2 &= 101 \text{ nF} \\ L &= 20.8 \text{ mH} \\ R &= 1420 \text{ } \Omega\end{aligned}$$

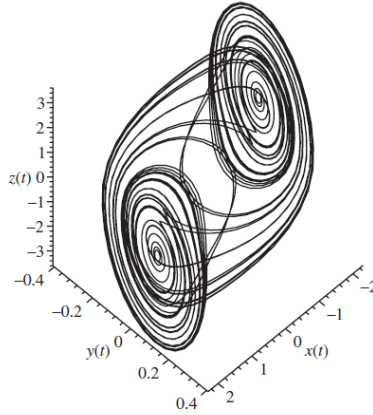


Figure 4: Fig. 4: Simulación de Chua

El circuito de Chua ha sido estudiado en detalle [2] y exhibe muchos interesantes fenómenos como: intermitencia, incluyendo cascadas dobles del período de caos,

rutas al caos, y las rutas cuasiperiódicos al caos. Otra notable propiedad de este circuito es que ha demostrado ser un tema muy adecuado para el estudio de experimentos de laboratorio, pues producen resultados que coinciden muy bien con los valores del modelo matemático.

Aquí presentamos la simulación en Maple del circuito de Chua.

*Simulación del Circuito de Chua.*

```
Chua:=
diff(x(t),t)=a*(y(t)-x(t)-(c*x(t)+0.5*(d-c)*
(abs(x(t)+1)-abs(x(t)-1)))),
diff(y(t),t)=x(t)-y(t)+z(t),
diff(z(t),t)=-b*y(t):
p1:=DEplot3d({Chua},
{x(t),y(t),z(t)},t=0..80,[[x(0)=1.6,y(0)=0,z(0)
=-1.6],[x(0)=-1.6,y(0)=0,z(0)=1.6]],
scene=[x(t),y(t),z(t)],stepsize
=0.05,thickness=1,linecolor=blue):
display(p1,font=[TIMES,ROMAN,15]);
```

Figura de la simulación del circuito de Chua.

**Comentario** Un tema mucho más abordable que el anterior, pues noto el mismo interés por el caos, pero presenta la propiedad de ser realizable experimentalmente a un costo completamente asequible, y es justamente a mi entender el hecho de ser tan popular.

## 2 Problema 2

Encontrar todos los puntos de equilibrio del siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= bx_1^2 - cx_2\end{aligned}$$

para todos los valores positivos de a,b,c y determine el tipo de cada punto de equilibrio.

### 2.1 Solución

El sistema en su forma general es:

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x)$$

donde los puntos de equilibrio tienen que cumplir con la condición

$$\mathbf{f}(x^*) = 0$$

en nuestro caso tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= bx_1^2 - cx_2\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}ax_1 - x_1x_2 &= 0 \\ bx_1^2 - cx_2 &= 0\end{aligned}$$

en la primera ecuación tenemos

$$\begin{aligned}ax_1 - x_1x_2 &= 0 \\ x_1(a - x_2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \wedge x_2 = a\end{aligned}$$

ahora de  $x_1 = 0$  evaluamos la segunda ecuación

$$\begin{aligned}bx_1^2 - cx_2 &= 0 \\ -cx_2 &= 0 \\ x_2 &= 0\end{aligned}$$

entonces obtenemos el primer punto de equilibrio  $PE1 = (0, 0)$ .

ahora de  $x_2 = a$  evaluamos la segunda ecuación

$$\begin{aligned} bx_1^2 - cx_2 &= 0 \\ bx_1^2 - ca &= 0 \\ x_1 &= \pm \sqrt{\frac{ac}{b}} \end{aligned}$$

obteniendo los dos puntos de equilibrio restantes,  $PE2 = (\sqrt{\frac{ac}{b}}, a)$  y  $PE3 = (-\sqrt{\frac{ac}{b}}, a)$ .

En resumen los puntos de equilibrio son:

$$\begin{aligned} PE1 &= (0, 0) \\ PE2 &= \left( \sqrt{\frac{ac}{b}}, a \right) \\ PE3 &= \left( -\sqrt{\frac{ac}{b}}, a \right) \end{aligned}$$

Realicemos el análisis de estos puntos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} &= \begin{bmatrix} a - x_2 & -x_1 \\ 2bx_1 & -c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para el  $PE1$  tenemos

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right|_{x=(0,0)} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

y sus autovalores son  $\lambda_1 = a$  y  $\lambda_2 = -c$ , recordemos que  $a, b, c > 0$  por lo cual  $\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0$  esto implica que el punto  $PE1$  es un punto de silla.

Para  $PE2$  tenemos

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right|_{x=(\sqrt{\frac{ac}{b}}, a)} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{ac/b} \\ 2\sqrt{abc} & -c \end{bmatrix}$$

calculemos sus autovalores

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} -\lambda & -\sqrt{ac/b} \\ 2\sqrt{abc} & -c - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ -\lambda(-c - \lambda) - (-\sqrt{ac/b})(2\sqrt{abc}) &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda c + 2ac &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 8ac}}{2} \end{aligned}$$

así los valores propios son  $\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 8ac}}{2}$  y estos serán reales si se cumple  $c^2 - 8ac > 0$  es decir  $c > 8a$ . Definiendo  $d$  como:

$$d = \frac{\sqrt{c^2 - 8ac}}{2}$$

y manteniendo la condición  $c > 8a$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-c}{2} + d \\ \lambda_2 &= \frac{-c}{2} - d\end{aligned}$$

ocurre que  $\lambda_2$  se mantendrá negativo y  $\lambda_1$  también lo será si  $\frac{-c}{2} > d$  lo que daría como resultado un nodo estable y si no se cumple la condición anterior tendríamos un punto de silla.

En el caso que de números complejos, tenemos que  $c^2 - 8ac < 0$  lo que implica que  $c < 8a$ .

Manteniendo la condición  $c < 8a$  tenemos,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-c}{2} + id \\ \lambda_2 &= \frac{-c}{2} - id\end{aligned}$$

así obtendremos un foco estable.

Para el último punto *PE3* tenemos

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right|_{x=(-\sqrt{\frac{ac}{b}}, a)} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{ac/b} \\ -2\sqrt{abc} & -c \end{bmatrix}$$

calculemos sus autovalores

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} -\lambda & \sqrt{ac/b} \\ -2\sqrt{abc} & -c - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ -\lambda(-c - \lambda) - \left(\sqrt{ac/b}\right)(-2\sqrt{abc}) &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda c + 2ac &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 8ac}}{2}\end{aligned}$$

que son exactamente los mismos autovalores que el *PE2*, por lo tanto su análisis es el mismo que *PE2*.

### 3 Problema 3

Sea  $D_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ , para cada uno de los siguientes sistemas representados como  $\dot{x}_1 = \mathbf{f}(x, t)$  y vistos en clase determinar si  $\mathbf{f}$  es:



- a Localmente Lipschitz en  $x \in D_r$  para  $\mathbf{r}$  suficientemente pequeño.
- b Localmente Lipschitz en  $x \in D_r$  para cualquier  $\mathbf{r} > \mathbf{0}$  finito.
- c Globalmente Lipschitz en  $x$ .

Los sistemas son:

- i El sistema de Masa-Resorte con resorte lineal, amortiguamiento viscoso, fricción estática y fuerza externa nula.
- ii El Oscilador de Van der Pol.

### 3.0.1 Salución: Oscilador de Van de Pol

En el caso del Oscilador de Van de Pol las ecuaciones son

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2\end{aligned}$$

y el Jacobiano del sistema es

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\epsilon x_1 x_2 & \epsilon - \epsilon x_1^2 \end{bmatrix},$$

Ahora recordemos que necesitamos para que sea localmente Lipschitz este sistema.

Sea  $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua,  $D$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\partial f / \partial x$  existe y es continua en  $[a, b] \times D$  entonces  $f$  es localmente Lipschitz en  $x$  en  $[a, b] \times D$ .

Como las derivadas son continuas en todo  $\mathbb{R}^n$  esto implica que el sistema es Localmente Lipschietz en cualquier dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ , es decir para cualquier  $r$  que tomemos dentro del conjunto el sistema será localmente Lipschietz.

La condición para que sea globalmente acotada es:

Sea  $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua. Si  $\partial f / \partial x$  existe y es continua en  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ , entonces  $f$  es globalmente Lipschitz en  $x$  en  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  si y solo si  $\partial f / \partial x$  está uniformemente acotada en  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ .

Y como vemos en nuestro caso el jacobiano de la función no está uniformemente acotado, por lo tanto podemos concluir que este sistema no es globalmente Lipschietz.

### 3.0.2 Salución: Sistema Masa-Resorte

Sistema Masa-Resorte con características: Resorte lineal con amortiguamiento viscoso, fricción estática y fuerza externa nula.

La dinámica es expresada en la ecuación de Newton siguiente

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} - f(x, \dot{x})$$

donde la función de roce estático es,

$$f(x, \dot{x}) = \begin{cases} \mu_k mg \text{sign}(\dot{x}), & \text{para } |\dot{x}| > 0 \\ -kx, & \text{para } \dot{x} = 0 \text{ e } |x| \leq \mu_k mg/k \\ -\mu_k mg \text{sign}(x), & \text{para } \dot{x} = 0 \text{ e } |x| > \mu_k mg/k \end{cases}$$

La misma dinámica se puede expresar por las ecuaciones siguientes, tomando en cuenta que  $x_1 = x$  y  $x_2 = \dot{x}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \frac{1}{m}f(x, \dot{x}) \end{aligned}$$

esto nos dice que la función es continua por tramos con respecto a la velocidad, por lo tanto toma dos formas esta función, para  $x_2 > 0$  y para  $x_2 < 0$ . Debido a lo anterior el sistema no puede ser globalmente Lipschitz. (Lema 2.6. Khalil). Ahora para el caso que sea localmente lipschitz, analicemos la forma que tiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \frac{1}{m}\mu_k mg \text{sign}(x_2) \end{aligned}$$

donde vemos que hay una dependencia de la velocidad lo que implica un cambio de signo en la función  $\text{sign}(x_2)$ , la que como sabemos no es continua en 0, con ello el sistema se vuelve de la forma lineal solo cambiando el signo.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 \pm \frac{1}{m}\mu_k mg \end{aligned}$$

por lo tanto el sistema si tiene la propiedad de localidad de algun dominio compacto de  $\mathbb{R}^2$ .

## 4 Referencia

- [1].- E. N. Lorenz, Deterministic non-periodic flow, J. Atmos. Sci., 20 (1963)
- [2].- R. N. Madan, Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos, World Scientific, Singapore, 1993.
- [3].- Hassan K. Khalil, Nonlinear Systems, 1996.
- [4].- Nicholas Minorsky, Nonlinear oscillations, 1962.
- [5].- María Marta Seron, apuntes sistemas no lineales, Universidad Nacional de Rosario, Argentina.

# Introducción a los Sistemas No Lineales

## Tarea 1

Carlos Toro Navarrete  
krltoro@gmail.com

### Problema 1. Ejemplos de sistemas no lineales con:

1. Múltiples puntos de equilibrio
2. Ciclos límites
3. Comportamiento Caótico

#### 1. Sistema no lineal con múltiples puntos de equilibrio y ciclos límites

##### Modelo de FitzHugh-Nagumo (FHN) para una Neurona

###### 1.1 Introducción.

En el siglo pasado esfuerzos por modelar el comportamiento dinámico de los potenciales de acción de las células nerviosas llevaron a Alan Lloyd Hodgkin y Andrew Fielding Huxley a presentar un modelo con cuatro ecuaciones diferenciales no lineales, estas describían el comportamiento de la dinámica del curso temporal del voltaje en el axón de una neurona (basados en experimentos con células de calamar), ellos observaron que el voltaje en la membrana se debe a la permeabilidad iónica, selectiva y dependiente, a su vez, del mismo voltaje, a través de la membrana de la célula nerviosa. Debido a la complejidad para el estudio de estos modelos investigadores buscaron el modo de simplificarlo para hacer mas fácil su entendimiento cualitativo, entre ellos Richard FitzHugh y el Jin-Chi Nagumo propusieron en forma separada un modelo consistente de dos ecuaciones diferenciales, una cúbica y otra lineal, semejantes a las de van der Pol. Este modelo análogo simplificado propuesto por estos autores se conoce como el modelo de FitzHugh-Nagumo (FHN), en este primer problema se presenta el modelo del sistema de ecuaciones FHN apoyado por simulaciones en Mathcad™ para su comprensión.

###### 1.2 Estructura de una neurona y potencial de acción.

Esta compuesta por tres partes principales, el cuerpo celular o soma donde se encuentra el núcleo y el resto de los organelos, el axón y las dendritas, Fig.1.

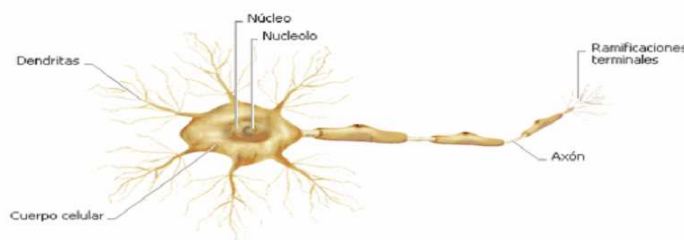
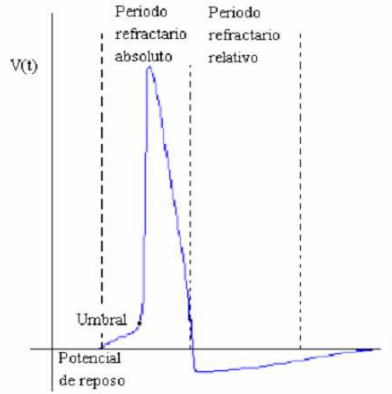


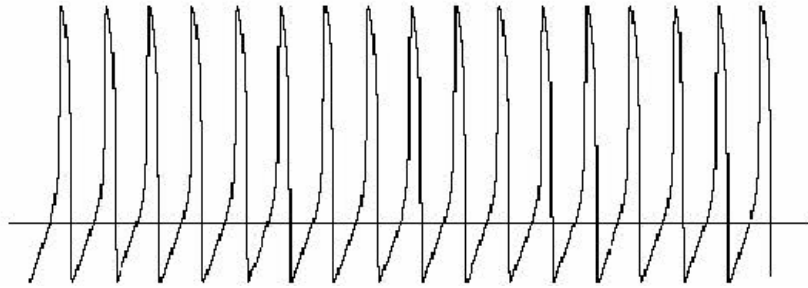
Figura 1. Estructura de una neurona típica.

El impulso nervioso se desarrolla como respuesta a una estimulación eléctrica de cierta magnitud mínima, llamada **umbral**, Fig.2, también se le conoce como potencial de acción. Suele originarse en el cuerpo celular en respuesta a la actividad de las sinapsis dendríticas. Hay diferentes formas de potenciales de acción, pero todos tienen en común el efecto **todo o nada** en la polarización de su membrana. Es decir, si el voltaje no excede un valor particular denominado umbral, no se iniciará ninguna respuesta y el potencial regresará a su nivel de reposo. Si el umbral es excedido, la membrana realizará una trayectoria del voltaje que reflejará las propiedades de la membrana, pero no las del impulso.



**Figura 2. Potencial de acción de la neurona.**

Las neuronas también son capaces de generar potenciales de acción con frecuencias muy diversas, desde menos de uno hasta varios cientos de disparos por segundo. Esto es muy relevante porque todos los impulsos tienen la misma amplitud y, por lo tanto, la información que transmite una neurona está representada por el número de señales por segundo que produce. En respuesta a una corriente constante aplicada, las células nerviosas pueden responder con un tren de potenciales de acción que se repite periódicamente Fig.3.



**Figura 3. Tren de potenciales de acción originados por una excitación constante.**

## 1.2 Modelo de FitzHugh-Nagumo.

El modelo se presenta de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= f_1(v, w) = I - h(v) - w, \\ \frac{dw}{dt} &= f_2(v, w) = b(v - gw), \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde  $h(v) = v(v-a)(v-1)$  los parámetros son:  $I, g \geq 0$ ,  $b > 0$  y  $0 < a < 1$ . En la interpretación biofísica de la dinámica, se considera que la variable de estado  $v$ , es el voltaje a través de la membrana, el parámetro  $I$  representa la corriente externa aplicada a la célula nerviosa y  $w$  representa una variable de recuperación del sistema sin significado biofísico específico.

En la interpretación matemática el modelo (1.1) describe la dinámica de las variables  $v, w$ , con una respuesta autónoma si  $I = 0$  o de forma forzada si se aplica una corriente externa. En forma matricial el modelo se puede escribir como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

con:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(v, w) \\ f_2(v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - h(v) - w \\ b(v - gw) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

### 1.3 Análisis y simulaciones.

Para encontrar los puntos de equilibrio se acude a una evaluación gráfica de los mismos, primero igualemos las derivadas del modelo a cero, con esto se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= I - V(V - a)(V - 1) - W, \\ 0 &= b(V - gW), \end{aligned} \quad (1.4)$$

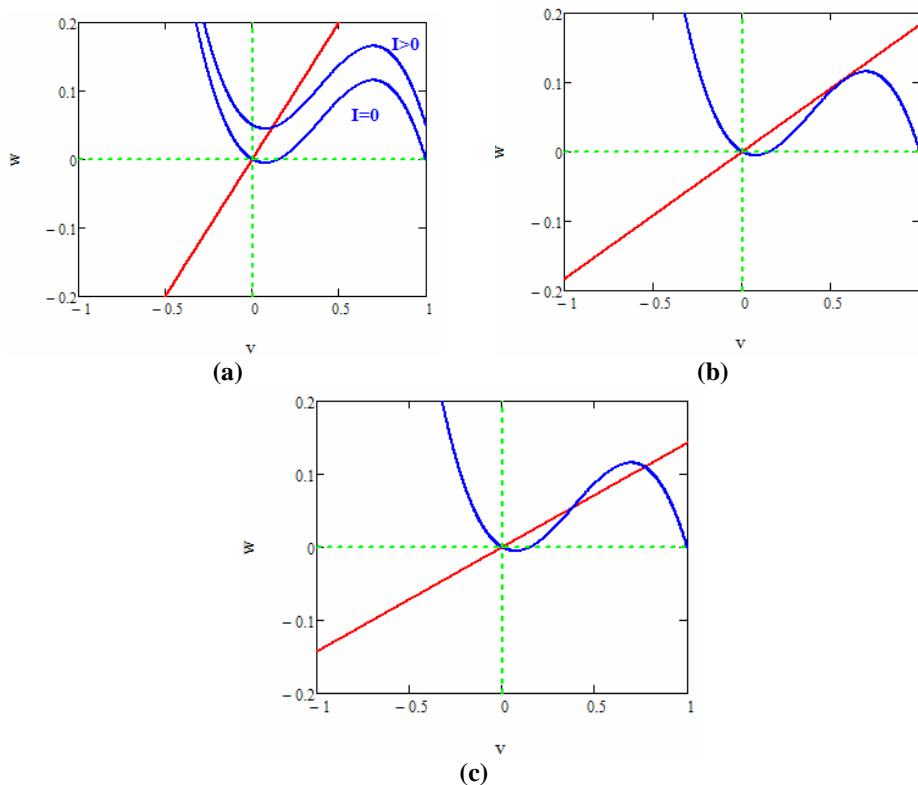
así:

$$\begin{aligned} W &= I - V(V - a)(V - 1), \\ W &= V / g, \end{aligned} \quad (1.5)$$

La primera gráfica corresponde a la gráfica de un polinomio cúbico mientras que la segunda es una recta que pasa por el origen. Los puntos donde estas se intersectan son los puntos de equilibrio del sistema, estas curvas pueden tener uno, dos o tres intersecciones dependiendo del valor de sus parámetros.

La elección de los parámetros no es un tema sencillo pero para ilustrar lo anterior se toman las siguientes combinaciones:

- Un punto de equilibrio:  $a = 0.15$ ,  $b = 0.01$ ,  $g = 2.5$ ,  $I = 0$ ,
- Dos puntos de equilibrio:  $a = 0.15$ ,  $b = 0.01$ ,  $g = 5.45$ ,  $I = 0$ ,
- Tres puntos de equilibrio:  $a = 0.15$ ,  $b = 0.01$ ,  $g = 7$ ,  $I = 0$ .



**Figura 4. Puntos de equilibrio del sistema en función de los parámetros,**  
(a) un punto de equilibrio, (b) dos puntos de equilibrio, (c) tres puntos de equilibrio.

## Linealización del sistema

Para analizar el comportamiento local del sistema en torno a un punto de equilibrio linealizaremos el sistema en función de un punto de equilibrio cualquiera  $p = (v_e, w_e)$ , el sistema (1.2) quedaría dado entonces por:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \quad (1.6)$$

Con la matriz  $\mathbf{A}$ , la matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=p} = \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix} \right|_{\mathbf{x}=p=(v_e, w_e)} = \begin{pmatrix} -3v_e^2 + 2(a+1)v_e - a & -1 \\ b & -bg \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

La estabilidad de los puntos de equilibrio estará relacionada con los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  de este sistema lineal, recordemos de la teoría que para que el sistema sea asintóticamente estable la parte real de todos los valores propios debe ser negativa, además esta claro que los valores propios dependen de los parámetros del sistema.

## Análisis paramétrico del sistema y estabilidad de los puntos de equilibrio

Resultados experimentales indican que las neuronas presentan un solo estado de equilibrio correspondiente al potencial de reposo de la membrana. En este caso los parámetros deben ser tales que garanticen que el sistema FHN tenga un único punto de equilibrio, se dan además dos casos de análisis; para el caso autónomo, cuando no hay estimulación externa ( $I = 0$ ) y el caso “forzado” cuando a la célula se le aplica, externamente, una corriente continua ( $I = \text{constante}$ ).

Observaciones previas:

- El parámetro  $b$  no influye en los puntos de equilibrios.
- Geométricamente si se mantienen fijos  $a$  y  $g$ , la modificación de los valores del parámetro  $I$  traslada la curva cúbica en la dirección del eje  $w$ . Si se mantienen fijos los parámetros  $I$  y  $a$ , modificar  $g$  cambia la pendiente de la curva recta, a partir de esto se puede hacer la siguiente observación:
  - Si se fija  $a$  en el intervalo  $(0,1)$  y se define  $c$  como la pendiente de la curva cúbica en su punto de inflexión. Si la pendiente  $(1/g)$  de la curva recta es mayor o igual a  $c$ , entonces para todo valor del parámetro  $I$ , el sistema FHN tiene un único punto de equilibrio. Bajo desarrollos algebraicos se llega que para cualquier combinación de parámetros,  $(a, I, b, g)$  del sistema FHN. Si se cumple la condición:

$$\frac{1}{g} \geq \frac{a^2 - a + 1}{3} = c \quad (1.8)$$

Entonces hay un único punto de equilibrio.

### Caso 1: $I = 0$ , Caso autónomo.

Bajo esta suposición y teniendo en cuenta la condición (1.8) es fácil ver de la Fig.4 que el único punto de equilibrio del sistema es  $(v_e, w_e) = (0,0)$ , veamos la estabilidad de este punto observando la matriz  $\mathbf{A}$  del sistema linealizado, esta resulta:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ b & -bg \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Y los valores propios están dados por la ecuación característica de  $\mathbf{A}$ ,  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ , donde se obtiene:

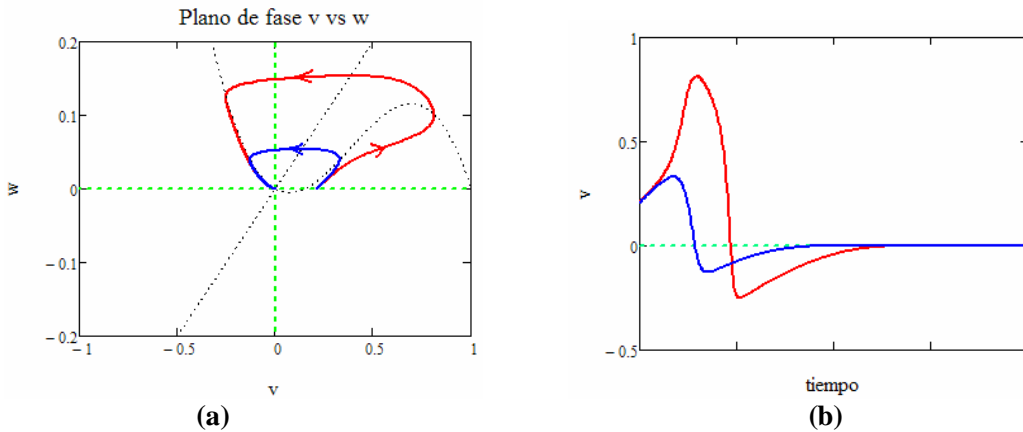
$$\lambda_{1,2} = -\frac{(a+bg)}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-bg)^2 - 4b}}{2} \quad (1.10)$$

Aquí se pueden dar dos casos: valores propios reales o complejos.

- Caso real: para que esto suceda  $(a - bg)^2 - 4b \geq 0$  y para que estos sean a su vez menores que cero y así el origen sea asintóticamente estable, se debe cumplir que  $a + bg > \sqrt{(a - bg)^2 - 4b} \Rightarrow ga > -1$  lo cual se cumple siempre pues la proposición del modelo implica que los parámetros  $g \geq 0$  y  $0 < a < 1$ .
- Caso complejo: si  $(a - bg)^2 - 4b < 0$ , la parte real de los valores propios es negativa si  $a + bg > 0$ . Esto también se cumple siempre ya que  $a, b > 0$  y  $g \geq 0$ .

Así podemos concluir que en este caso en ausencia de estimulación externa ( $I = 0$ ) para todo valor de los parámetros  $a, b > 0$  y  $g \geq 0$ , el punto de equilibrio  $(v_e, w_e) = (0, 0)$  es asintóticamente estable.

Simulemos ahora el sistema bajo este punto de análisis. Considerando los parámetros con los que se obtuvo la gráfica de la Fig.2.a  $a = 0.15$ ,  $b = 0.01$ ,  $g = 2.5$ ,  $I = 0$ , y una condición inicial  $(v_0, w_0) = (v_u \pm \varepsilon, 0)$  donde  $v_u$  es el potencial umbral,  $0.208[\text{V}]$ , y  $\varepsilon$  una pequeña perturbación, la siguiente figura muestra el plano de fase del sistema bajo estas condiciones y la respuesta del voltaje en el tiempo (se suprimió la escala de tiempo por no representar el modelo la variación temporal real del problema físico).

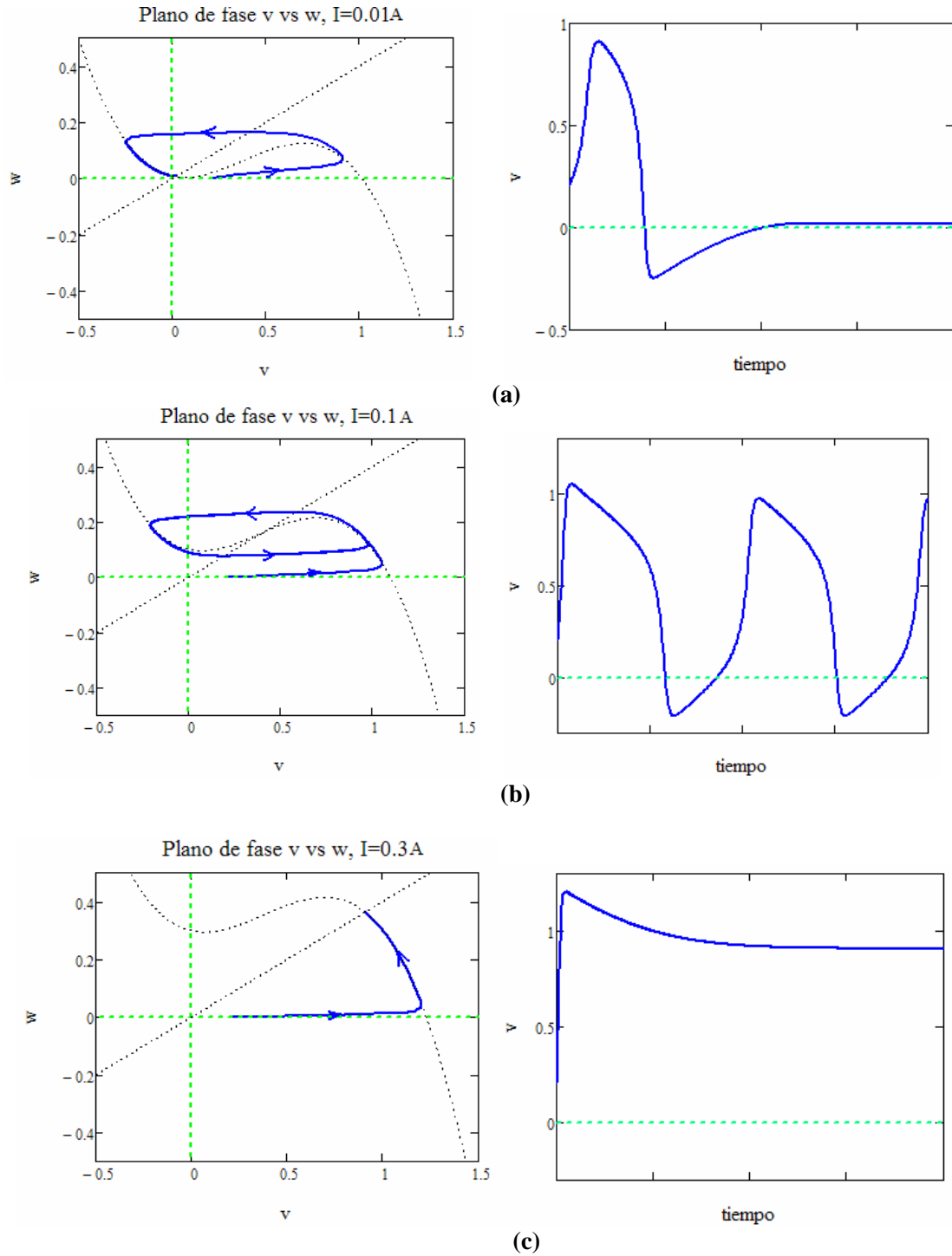


**Figura 5. Simulación sistema FHN caso autónomo.**  
(a) plano de fase, (b) respuesta temporal.

Cualitativamente se puede observar que los potenciales de acción modelados, Fig.5b, representan de buena forma a la respuesta experimental real Fig.2, además se ve que al aplicar pequeñas perturbaciones al voltaje umbral de la membrana de la neurona este potencial alcanza una respuesta mucho mayor que la perturbación aplicada y que la respuesta para un potencial igual al potencial umbral.

#### **Caso 1: $I \neq 0$ , Caso forzado.**

Se analiza a continuación el comportamiento de la membrana al aplicar una corriente  $I$  constante en el tiempo. Como se mencionó, en el modelo FHN, al aumentar el valor de  $I$  aumentamos el valor de la componente  $v$  del estado de equilibrio (Fig.4a), se estudia la estabilidad del nuevo punto de equilibrio ante este cambio. Ya que la linealización del sistema no incluye la información de la corriente aplicada, veamos como esta afecta en la respuesta observando los diagramas de fase, simulemos para corrientes con valores de:  $I_1 = 0.01$ ,  $I_2 = 0.1$ ,  $I_3 = 0.3$ , para valores de los parámetros  $a = 0.15$ ,  $b = 0.01$ ,  $g = 2.5$ , y con condición inicial  $(v_0, w_0) = (v_u, 0)$ , con esto se obtiene:



**Figura 6. Situación caso forzado para distintos valores de corriente,**  
**(a)  $I = 0.01A$ , (b)  $I = 0.1A$ , (c)  $I = 0.3A$ .**

De las figuras anteriores se pueden observar que para determinados valores de corriente la respuesta del potencial de acción pasa de un estado de equilibrio, Fig.6a, a una respuesta oscilatoria, Fig.6b, y que al aumentar más este valor la respuesta se torna nuevamente estacionaria con un potencial de equilibrio mayor al caso autónomo, este nuevo punto de equilibrio es ahora estable, Fig.6c.

Resumiendo, el modelo de FitzHugh-Nagumo presentado representa una buena aproximación al comportamiento real del potencial de acción de una neurona frente a determinadas condiciones, este modelo



en función de sus parámetros presenta un sistema no lineal con uno dos o tres puntos de equilibrios, para el caso analizado, con un punto de equilibrio, se encuentran las condiciones bajo las cuales este es asintóticamente estable, además como se encuentra que para determinados valores de corriente aplicada a la neurona el sistema entra en un ciclo límite, originándose un tren de potenciales de acción de la misma amplitud. El estudio de este modelo es mas complejo de lo presentado en el presente análisis y pasa por analizar cada parámetro en relación a pruebas experimentales que se han venido desarrollando desde el siglo pasado.

## 2. Sistema no lineal con comportamiento caótico.

### Ecuaciones de Lorenz, una forma de modelar el clima

#### 2.1 Introducción

Un sistema caótico es aquel que no alcanza un estado estacionario ni posee un comportamiento periódico para un tiempo grande, además presenta una alta sensibilidad frente a las condiciones iniciales, lo que significa que pequeños cambios en los valores de éstas podrían afectar en gran medida la solución del problema. Un ejemplo de sistemas caóticos son los fenómenos de turbulencia en fluidos, entre los científicos que analizaron el problema se encuentra el meteorólogo del MIT Edgard Lorenz, quién en 1963 simplificó el estudio de la turbulencia de la atmósfera en un sistema de tres ecuaciones diferenciales que exhibe un comportamiento caótico, estas ecuaciones son las llamadas *ecuaciones de Lorenz*, estas ecuaciones determinan la evolución de un sistema descrito por tres variables de estado dependientes del tiempo,  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ . El estado en el modelo de clima idealizado de Lorenz en un tiempo  $t$ , puede estar dado por un único punto,  $(x, y, z)$  en el espacio de fase. Dentro del campo de sus investigaciones Lorenz llegó a la conclusión de que *incluso el insignificante aleteo de las alas de una mariposa puede tener influencia sobre el clima en el otro lado del globo*, este es el conocido *efecto mariposa*, el cual se justifica por el análisis que se realizará a continuación.

#### 2.2 Análisis y Simulaciones

Las ecuaciones de Lorenz se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $\sigma$ ,  $r$  y  $b$  son parámetros reales y positivos. Las variables del problema se interpretan como sigue:

- $x$  es proporcional a la intensidad del movimiento convectivo (positivo para movimiento en el sentido del reloj, y una magnitud grande indica una circulación mayor),
- $y$  es proporcional a la diferencia de temperatura entre las corrientes ascendentes y descendentes (es positiva si el fluido templado mas caliente esta en el fondo),
- $z$  es proporcional a la distorsión de linealidad del perfil de temperatura vertical (un valor de 0 corresponde a un gradiente lineal de temperatura, mientras que un valor positivo indica que la temperatura es mas uniformemente mezclada en la mitad del espacio que contiene el fluido y los gradientes mas grandes ocurren en los bordes).
- $t$  es el tiempo, la variable independiente,
- $\sigma$  es llamado el numero de Prandtl (involucra la viscosidad y conductividad térmica de un fluido),
- $r$  es un parámetro de control, representa la diferencia de temperatura entre el tope y el fondo del espacio analizado (ej. Un tanque), y
- $b$  mide la razón entre ancho y alto de la capa de convección.
- Para la atmósfera terrestre los valores típicos de los parámetros son  $\sigma = 10$  y  $b = 8/3$ , por otro lado estas ecuaciones se estudian bajo distintos valores de  $r$ .

Además es simple ver que el modelo (2.1) es un sistema de ecuaciones no lineal en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , donde las dos no linealidades presentes son los productos  $xy$  y  $xz$ .

Los puntos de equilibrio del sistema (2.1) se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(Y_{eq} - X_{eq}) \\ 0 &= rX_{eq} - Y_{eq} - X_{eq}Z_{eq} \\ 0 &= X_{eq}Y_{eq} - bZ_{eq} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Resolviendo se obtienen tres puntos de equilibrio:

$$(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0), \left( \pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \quad (2.3)$$

Dado que  $r$  es un número real positivo, habrá:

- 1 punto de equilibrio si  $0 \leq r < 1$
- 3 puntos de equilibrio si  $r > 1$

Analicemos la estabilidad del origen a partir del modelo linealizado del sistema (2.1), la matriz  $\mathbf{A}$  de este sistema queda dada por:

$$\mathbf{A}|_{\mathbf{x}^*} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \Big|_{(x^*, y^*, z^*)=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Los valores propios de  $\mathbf{A}$  son entonces:

$$\lambda_1 = -b, \text{ y } \lambda_2, \lambda_3 = \frac{1}{2} \left( -(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-r)} \right) \quad (2.5)$$

Los valores propios 2 y 3 quedan determinados por los valores de los parámetros y en particular para  $0 < r < 1$ , en este caso se prueba que los valores propios son ambos negativos, por ejemplo para  $r = 0.8$  los valores propios son  $\lambda_1 = -8/3$ ,  $\lambda_2 = -0.185$ ,  $\lambda_3 = -10.82$ , por lo tanto el origen es asintóticamente estable.

Para el caso de  $r > 1$  y aplicando el mismo procedimiento de linealización en torno a los otros puntos de operación reales, se tienen 3 valores propios dados por la ecuación característica:

$$\det \left[ \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1-\lambda & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \right] = \lambda^3 + (\sigma+b+1) \cdot \lambda^2 + (\sigma+r)b \cdot \lambda + 2\sigma b(r-1) = 0 \quad (2.6)$$

En la literatura y en especial en [Sparrow] se describe la estabilidad de los puntos de equilibrio en función del parámetro  $r$ , donde además se muestra que para un valor crítico de este el comportamiento del sistema deja de ser estable y se torna caótico, este valor está dado por la relación (siempre considerando los parámetros usados por Lorenz,  $\sigma = 10$  y  $b = 8/3$ ):

$$r_H = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1} \approx 24.74 \quad (2.7)$$

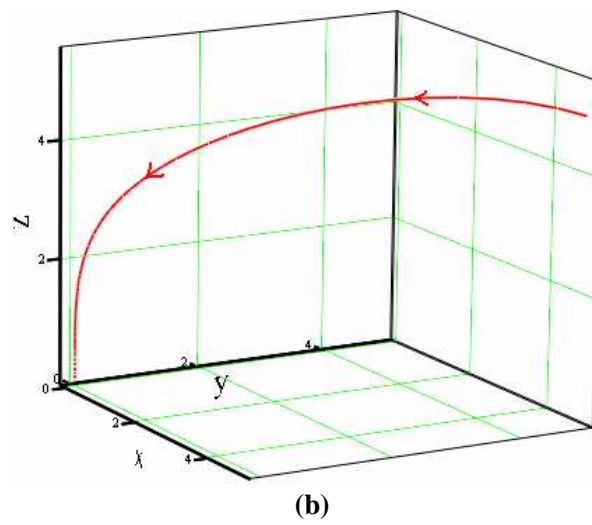
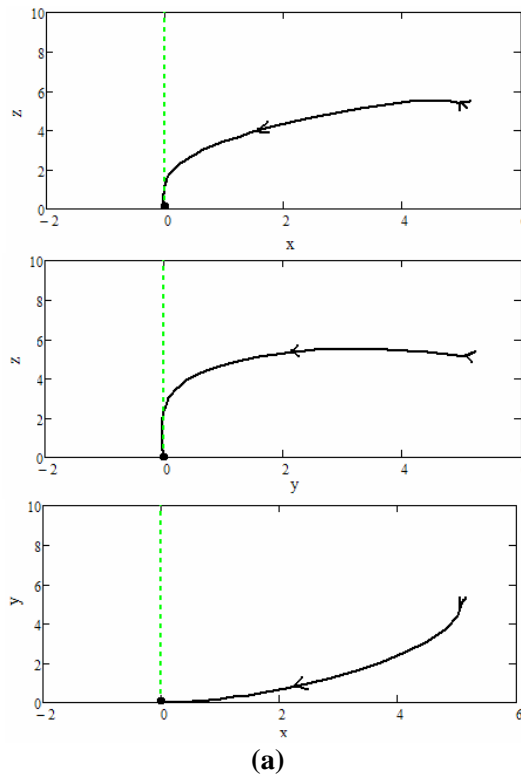
Se demuestra [Sparrow] que para todo valor de  $1 < r < r_H$  implicará que las partes reales de los valores propios dados por la ecuación (2.6) son negativas y por lo tanto los puntos de equilibrio serán estables, en particular, tomando  $r = 9$  se tienen raíces  $\lambda_{1,2} = -0.653 \pm 5.839j$ ,  $\lambda_3 = -12.36$ . En cambio para  $r > r_H$  se tendrán dos valores propios complejos con parte real positiva y uno real negativo por lo que los puntos de equilibrio serán inestables en este caso. Por ejemplo considerando  $r = 28$  se tienen raíces  $\lambda_{1,2} = 0.094 \pm 10.195j$ ,  $\lambda_3 = -13.855$ , en el caso del origen y teniendo en cuenta el resultado (2.5) para valores de  $r$  mayores que 1 siempre habrá un valor propio positivo por lo que el origen será inestable (2.5)

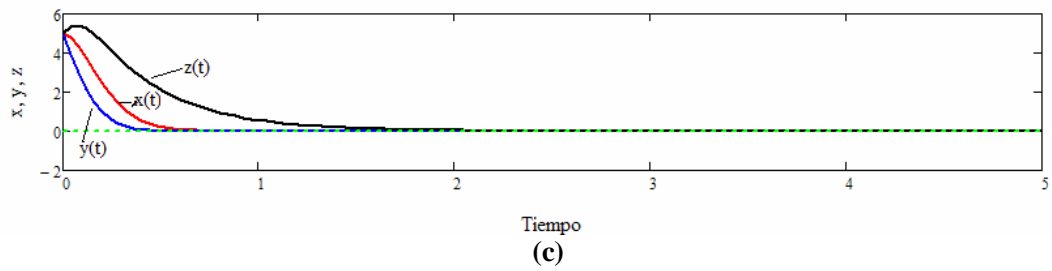
Resumiendo se tiene que:

	$(0,0,0)$	$(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$
$0 < r < 1$	estable	-
$1 < r < r_H$	inestable	estable
$r > r_H$	inestable	inestable

A continuación se simula para los distintos casos:

- **Caso 1:**  $0 < r < 1$ , se escoge  $r = 0.8$  y  $CI = (5, 5, 5)^T$  y  $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ .

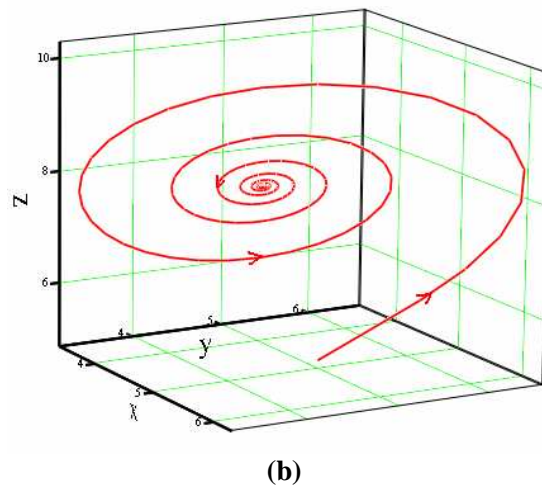
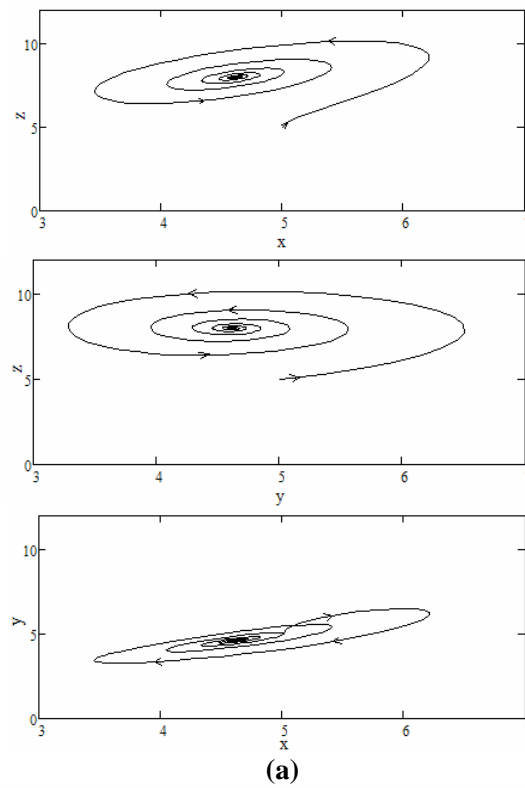


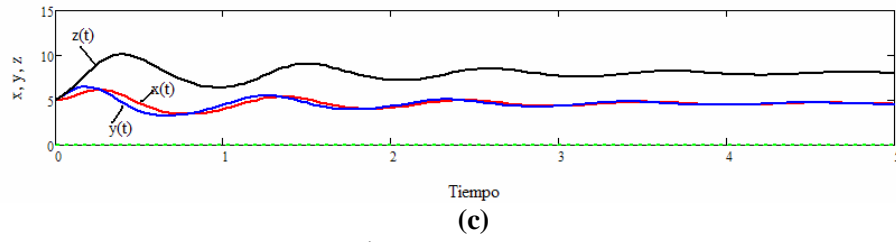


**Figura 7. Simulación ecuaciones de Lorenz con  $r = 0.8$ ,**

(a) plano de fase zx, zy y yx , (b) plano de fases xyz, (c) respuesta temporal.

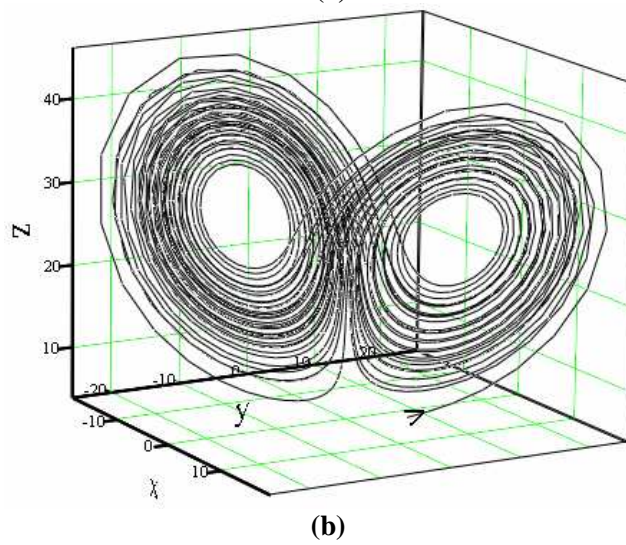
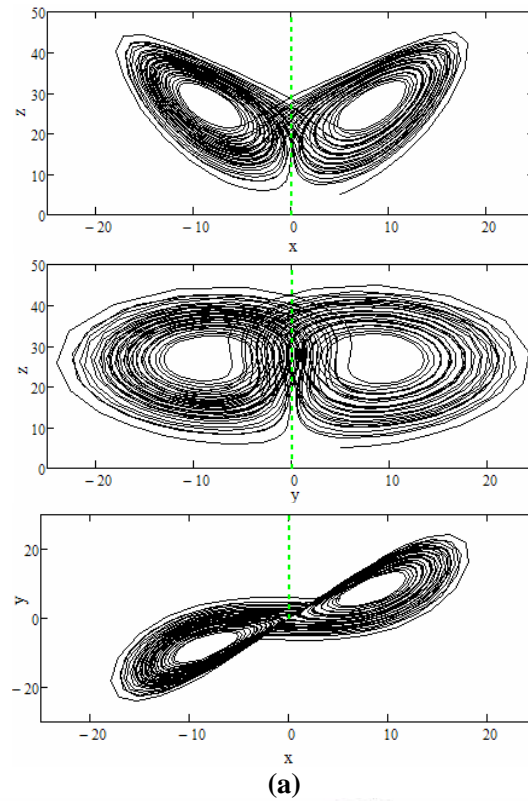
- **Caso 2:**  $1 < r < r_H$ , se escoge  $r = 9$  y  $CI = (5, 5, 5)^T$ , en este caso la trayectoria tiene al punto de equilibrio  $(x^*, y^*, z^*) = (4.62, 4.62, 8)$ .

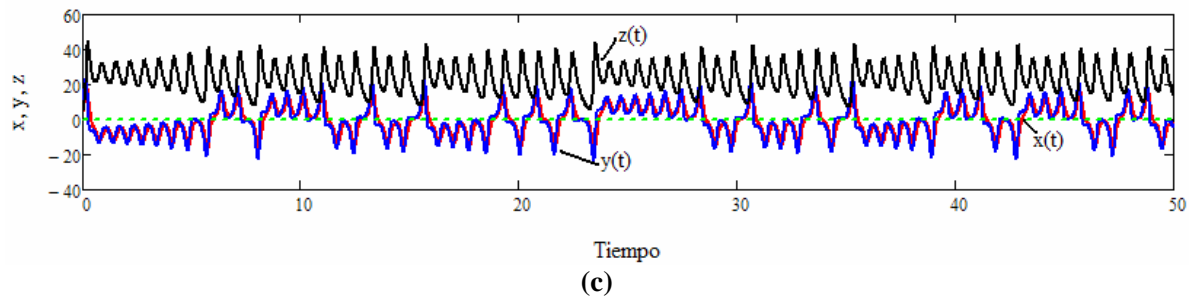




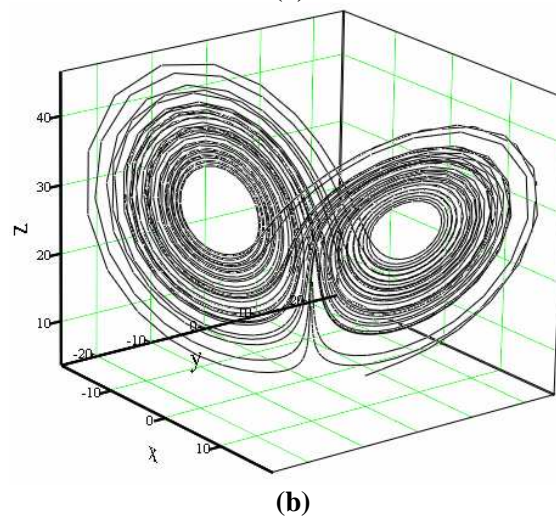
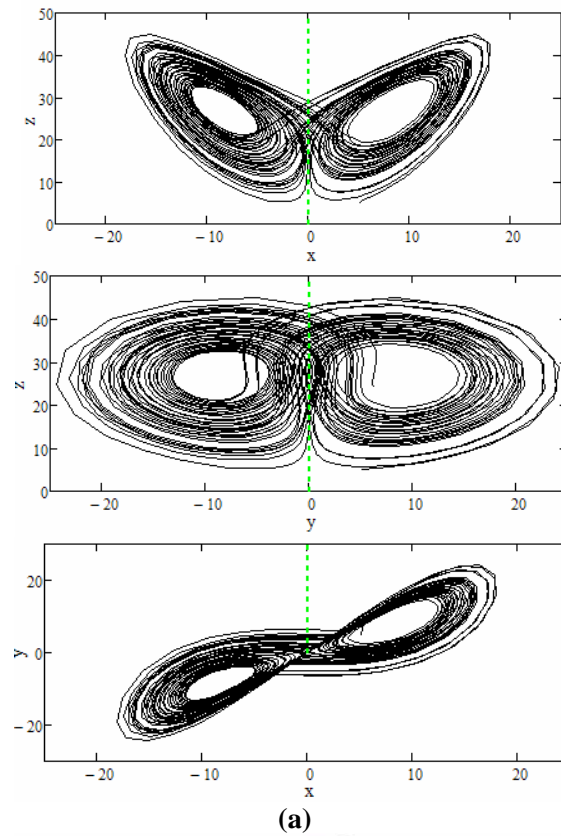
**Figura 8. Simulación ecuaciones de Lorenz con  $r = 9$ ,**  
**(a) plano de fases zx, zy y yx, (b) plano de fases xyz, (c) respuesta temporal.**

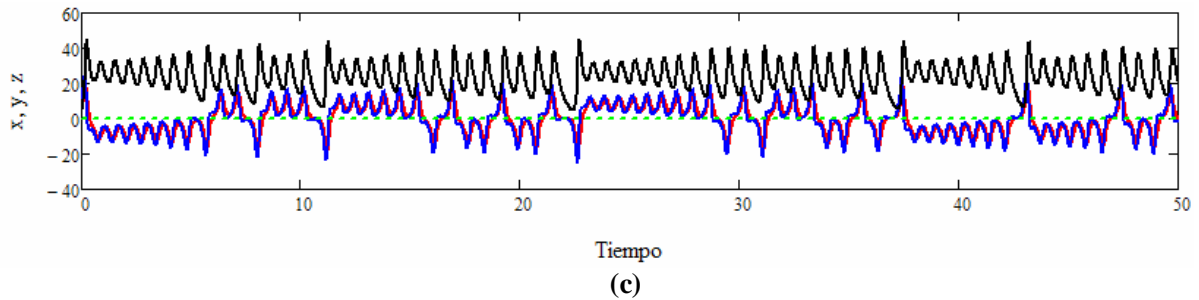
- **Caso 3:**  $r > r_H$ , se escoge  $r = 28$  y  $CI = (5, 5, 5)^T$ ,  $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ ,  $(\pm 8.49, \pm 8.49, 27)$





**Figura 9. Simulación ecuaciones de Lorenz con  $r=28$ ,  $CI = (5, 5, 5)$**   
 (a) plano de fases zx, zy y yx, (b) plano de fases xyz, (c) respuesta temporal.





**Figura 9. Simulación ecuaciones de Lorenz con  $r=28$ ,  $CI = (5.1, 5.1, 5.1)$**   
 (a) plano de fases zx, zy y yx, (b) plano de fases xyz, (c) respuesta temporal.

Observaciones:

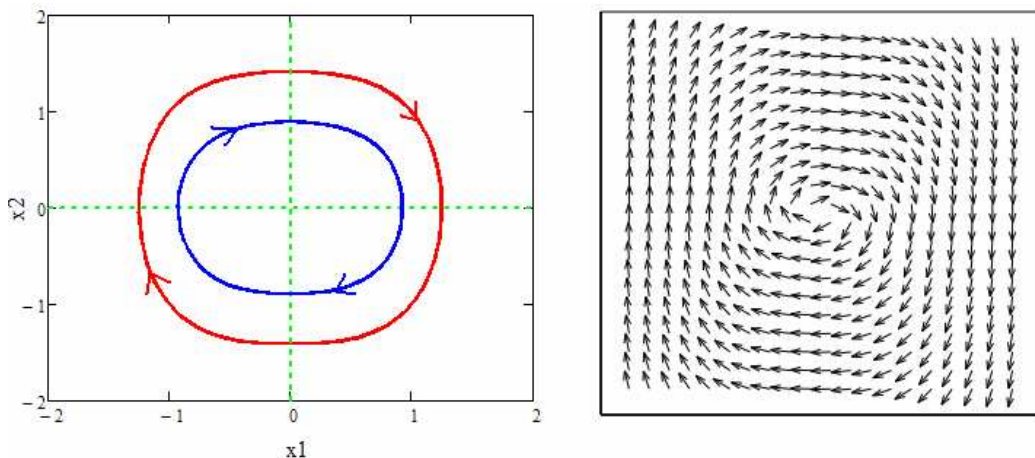
De las simulaciones se ven claramente las condiciones de equilibrio para el sistema dependiendo del valor de  $r$ , en el último caso se aprecia la respuesta caótica del sistema para todas las variables involucradas, se observa de los diagramas de fase en la Fig.9a, como se comportan las trayectorias a medida que aumenta el tiempo, asemejándose el plano zx a las alas de una mariposa (de ahí el nombre dado por Lorenz al llamado *efecto mariposa*), además si en este último caso se utilizan condiciones iniciales levemente diferentes se ve como la respuesta cambia drásticamente, observando que para iguales instantes de tiempo, las respuesta de  $x$  e  $y$  en particular, presentan características totalmente diferentes.

**Problema 2. Para cada uno de los siguientes sistemas construir el retrato de fase y discutir el comportamiento cualitativo del sistema.**

- **Sistema 1.**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_1}{2} - x_1^3\end{aligned}\tag{3.1}$$

El plano de fase para dos condiciones iniciales diferentes y el campo vectorial del sistema se muestran a continuación.



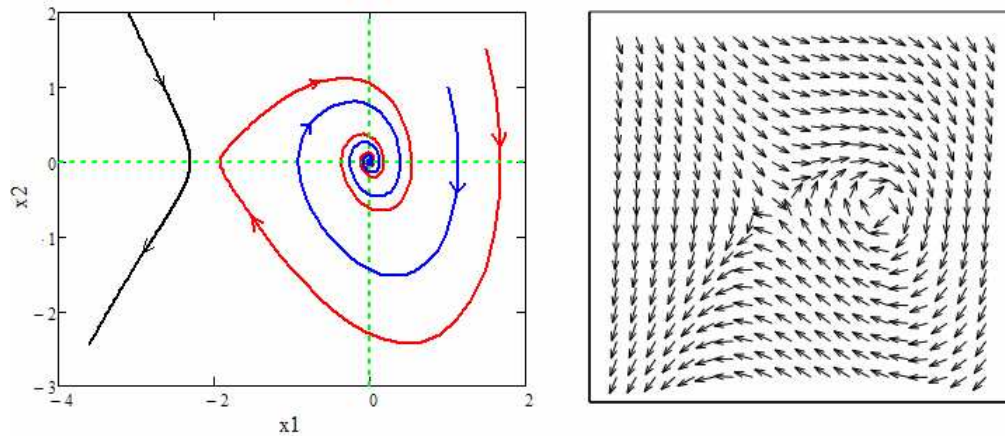
**Figura 10. Diagrama de fase y campo vectorial del sistema (3.1).**

Se aprecia que para cualquier condición inicial el sistema se comporta como un oscilador armónico, o un ciclo límite, lo que indica que el origen se comporta como un centro para las distintas elipses que se generen.



- **Sistema 2.**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_1}{2} - 2x_1 - x_1^2\end{aligned}\tag{3.2}$$

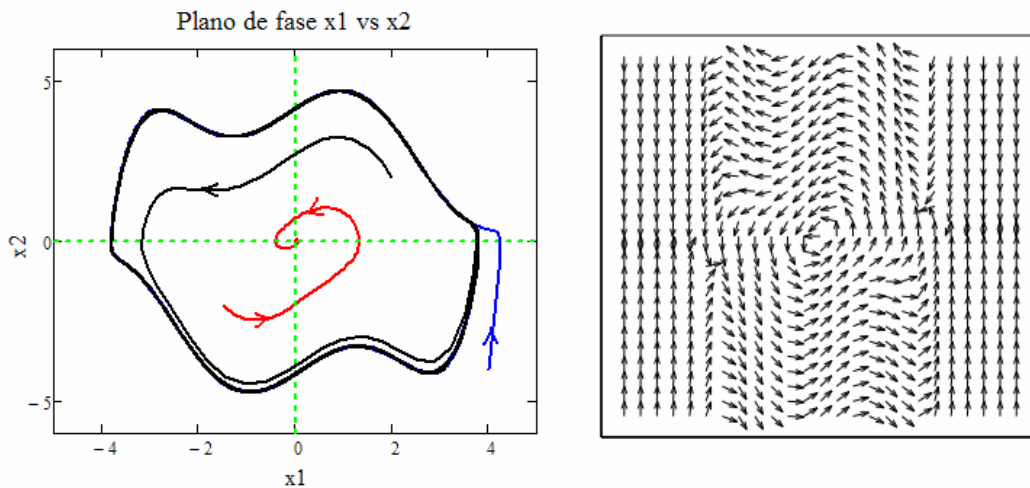


**Figura 11. Diagrama de fase y campo vectorial del sistema (3.2).**

El origen en este sistema se comporta como un foco estable para determinadas condiciones iniciales además hay un punto de silla inestable, donde las trayectorias del sistema tienden a infinito para ciertas condiciones iniciales.

- **Sistema 3.**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(1 - x_1^2 + x_1^4/10)\end{aligned}\tag{3.3}$$



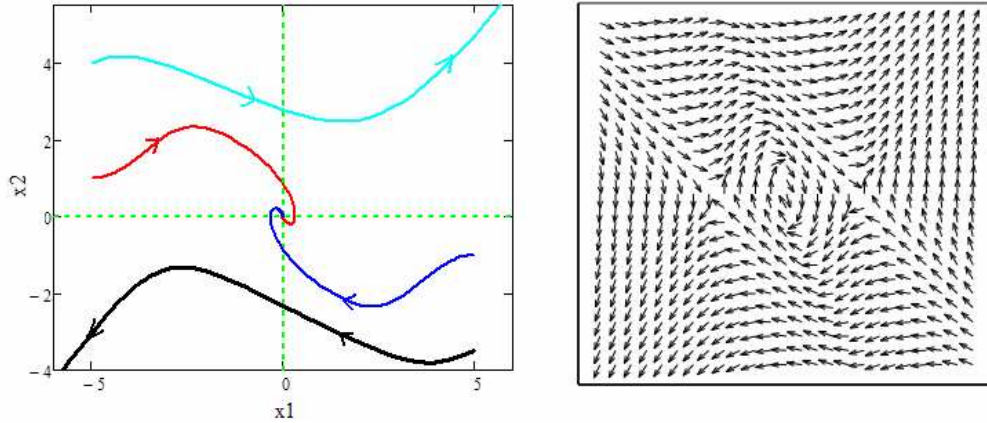
**Figura 12. Diagrama de fase y campo vectorial del sistema (3.3).**

Para algunas condiciones iniciales el origen se comporta como foco estable de la espiral que decae monótonamente, mientras que saliendo de cierta región tomar condiciones iniciales mayores hace que el sistema entre en un ciclo límite.



- **Sistema 4.**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - 3 \arctan(x_1 + x_2)\end{aligned}\tag{3.4}$$



**Figura 13. Diagrama de fase y campo vectorial del sistema (3.4).**

A simple vista del plano de fase y del campo vectorial del sistema se aprecia que el origen es un punto de equilibrio estable y otros dos puntos de equilibrio se comportan como puntos de silla inestables por donde las trayectorias se van a infinito.

### Problema 3.

Recordar que una función  $\mathbf{f} : S_1 \rightarrow S_2$  se dice continua en un punto  $x \in S_1$  si dada una constante  $\varepsilon > 0$  existe alguna constante  $\delta > 0$  tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)| < \varepsilon$$

Una función  $\mathbf{f}$  es continua en un conjunto  $S$  si es continua en todo punto de  $S$ , y es uniformemente continua en  $S$  si, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  - dependiente de  $\varepsilon > 0$  - tal que la desigualdad vale para todo  $x, y \in S$ .

Mostrar que si  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  es Lipschitz en  $W \subset \mathbf{R}^n$ , entonces  $\mathbf{f}(x)$  es uniformemente continua en  $W$ .

Solución:

Si  $\mathbf{f}(x)$  es Lipschitz en  $W \subset \mathbf{R}^n$  significa que para todo  $x \in W$  satisface la condición de Lipschitz  $\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)\| \leq L \|x - y\|$ , con  $L > 0$  llamada constante de Lipschitz. De la condición de continuidad dado un  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$ , por lo que:

$$\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)\| \leq L \|x - y\| \leq L\delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)\| \leq L\delta = \varepsilon$$

Así,  $\mathbf{f}$  es uniformemente continua en  $W$  si se escoge  $\varepsilon = L\delta$ .

## Referencias

- [1] Eugene M. Izhikevich, “Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability”, The MIT Press, Cambridge, Massachussets, London, England, 2007.
- [2] Gregorio Castllo Quiroz, “Análisis cualitativo del modelo de FitzHugh-Nagumo”. 2006.
- [3] Colin Sparrow, “*The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*”, Springer-Verlag, New York Inc. 1982.
- [4] Matthew Carriuolo, “The Lorenz Atractor, Chaos, and Fluid Flow”, Class Notes, Brown University, May 6, 2005.
- [5] Hassan K. Khalil, “Nonlinear Systems”, Department of Electrical and Computer Engineering Michigan State University, Prentice Hall, 3ed Edition, 2002.



**Universidad de Concepción**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Departamento de Ingeniería Eléctrica**

## **Tarea N° 1**

### **Introducción a los sistemas no lineales**

Profesor : Dr. Daniel Sbarbaro

Alumno : José M. Torres B.

Fecha de Entrega : 20 de Octubre de 2010

# ÍNDICE

<b>1. DESARROLLO .....</b>	<b>1</b>
1.1 PROBLEMA 1 .....	1
1.1.1 <i>Sistema con Múltiples Puntos de Equilibrio</i> .....	1
1.1.2 <i>Sistema con Ciclo Límite</i> .....	2
1.1.3 <i>Sistemas tipo Caos</i> .....	5
1.2 PROBLEMA 2 .....	7
1.3 PROBLEMA 3 .....	12
ANEXOS .....	I

# 1. DESARROLLO

## 1.1 Problema 1

*Investigue y describa sistemas dinámicos que evidencien múltiples puntos de equilibrios, ciclos limites y caos. De un ejemplo de cada uno de ellos y realice las simulaciones respectivas y comente.*

### 1.1.1 Sistema con Múltiples Puntos de Equilibrio

Un sistema biológico con múltiples puntos de equilibrio esta descrito por el modelo de Lotka –Volterra. Este sistema está compuesto por dos especies de animales: *Presa* y *Depredador*. Es un sistema cerrado: contiene sólo estas dos especies en un ambiente aislado. Denominamos  $x_1$  al número de presas y  $x_2$  al número de depredadores.

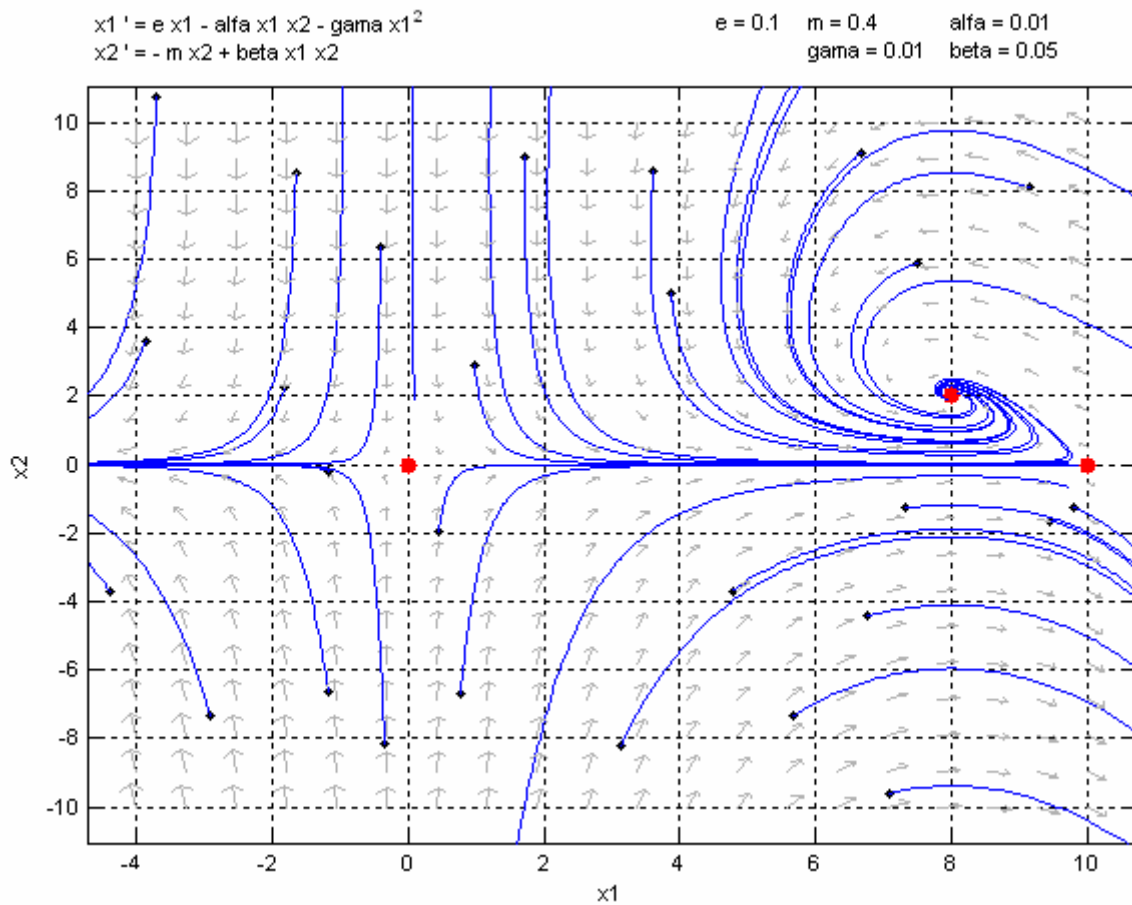
El modelo de Lotka – Volterra es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varepsilon x_1 - \alpha x_1 x_2 - \sigma x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -m x_2 + \beta x_1 x_2\end{aligned}\tag{1.1}$$

Donde:

- $\varepsilon$ :** Tasa neta de aumento de las presas en ausencia de depredadores.
- $m$ :** Tasa neta de disminución de los depredadores en ausencia de las presas.
- $\alpha$ :** Factor de medida del decremento de la población de las presas por la presencia de los depredadores.
- $\beta$ :** Factor de medida del incremento de la población de los depredadores por la presencia de las presas.
- $\sigma$ :** Tiene que ver con factores ambientales.

A través de un código en Matlab™ se obtuvo el retrato de fase para el sistema no lineal, con parámetros  $\varepsilon = 0,1$ ,  $m = 0,4$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\beta = 0,05$  y  $\sigma = 0,01$ .



**Figura 1.1:** Retrato de fase del oscilador modelo de Lotka –Volterra.

En el retrato de fase se puede apreciar el sistema posee múltiples puntos de equilibrios y la convergencia a uno estable depende del estado inicial (puntos negros de la figura anterior). Para este ejemplo el punto dado por (8,2) es un *foco estable*, esto quiere decir que las trayectorias que pasan en la vecindad de este punto de equilibrio son atraídas en forma de espirales logarítmicas, convergiendo en él. En cambio los puntos de equilibrios (0,0) y (10,0) son denominados *puntos de silla*, alejando a las trayectorias que pasan cerca de ellos.

### 1.1.2 Sistema con Ciclo Límite

Un sistema que presenta un ciclo limite es el oscilador de Van der Pol. El oscilador de Van der Pol es un sistema dinámico consistente en un circuito eléctrico no lineal

utilizado a principios del siglo pasado. De hecho, Van der Pol fue precursor de las primeras radios comerciales cuando propuso su modelo en 1920 siendo ingeniero de Philips Company. Este oscilador con amortiguamiento no lineal está gobernado por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden homogénea:

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (1.2)$$

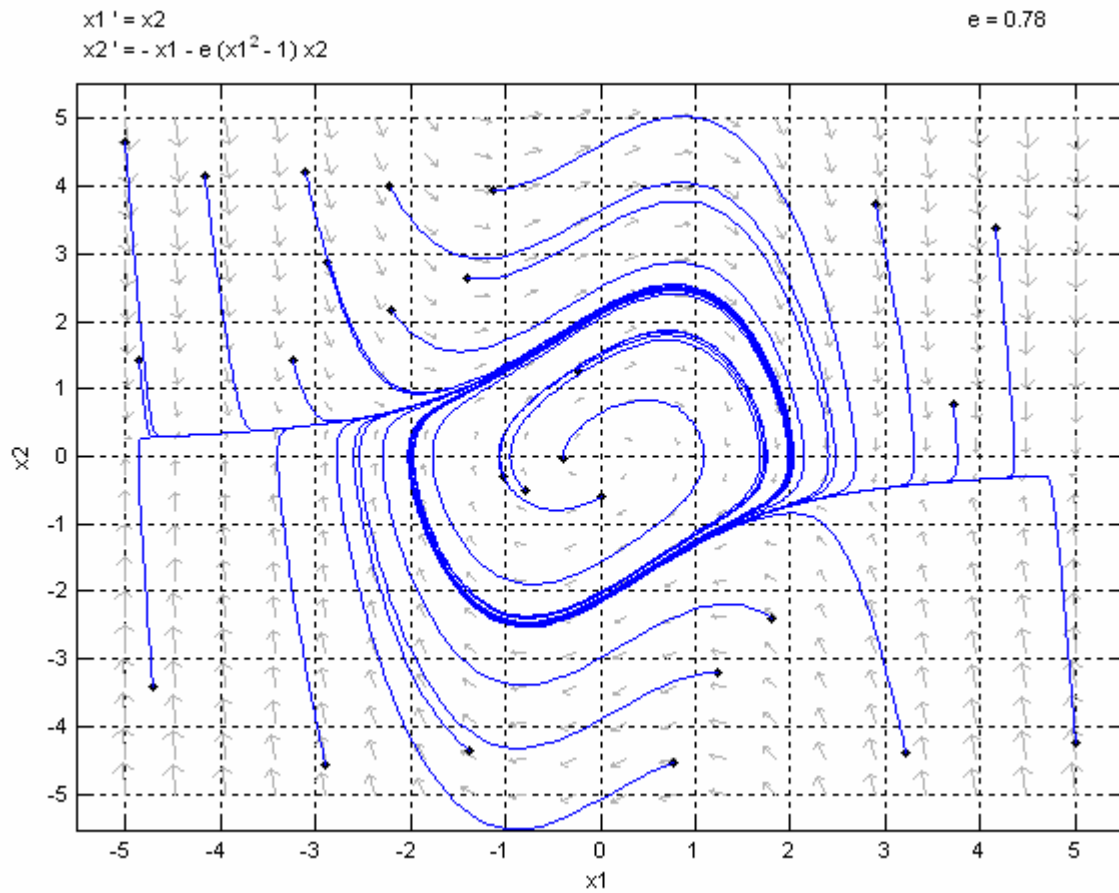
Donde  $x$  es la variable dinámica y el parámetro  $\varepsilon > 0$ , por las características físicas del circuito.

El sistema descrito en ecuaciones de estado queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{x} \\ x_2 &= x \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \varepsilon(x_1^2 - 1)x_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

con  $\varepsilon$  parametro del sistema y para efectos de la simulacion, tendra el valor 0.78.

A través de un código en Matlab™ se obtuvo el retrato de fase para el sistema.



**Figura 1.2:** Retrato de fase del oscilador de Van der Pol

En el retrato de fase se puede apreciar que para múltiples condiciones iniciales (puntos negros de la figura anterior) las trayectorias generadas se agrupan en una trayectoria cerrada, periódica y aislada, llamada también *ciclo límite*, en sentido horario. Como las trayectorias en la vecindad del ciclo límite tienden a él, podemos asegurar que este ciclo límite es estable, esto quiere decir que los valores que toman las variables de estado del sistema permaneces oscilando de acuerdo a lo valores de la trayectoria del ciclo límite.



### 1.1.3 Sistemas tipo Caos

Un ejemplo de un sistema del tipo Caos consiste se basará en un modelo matemático simplificado del dispositivo mecánico. Una varilla de acero tiene un extremo fijado en un soporte rígido mientras el otro puede oscilar entre dos imanes colocados simétricamente. El soporte se halla sometido a una fuerza externa armónica  $F = f \cos \omega t$ .

Este sistema no lineal esta modelado por la ecuación de Duffing:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - \Omega^2 x + \xi x^3 = f \cos \omega t \quad (1.4)$$

Para efectos de la tarea, los parámetros  $\Omega$  y  $\xi$  serán iguales a 1, por lo tanto, el nuevo sistema esta modelado por la ecuación (1.5):

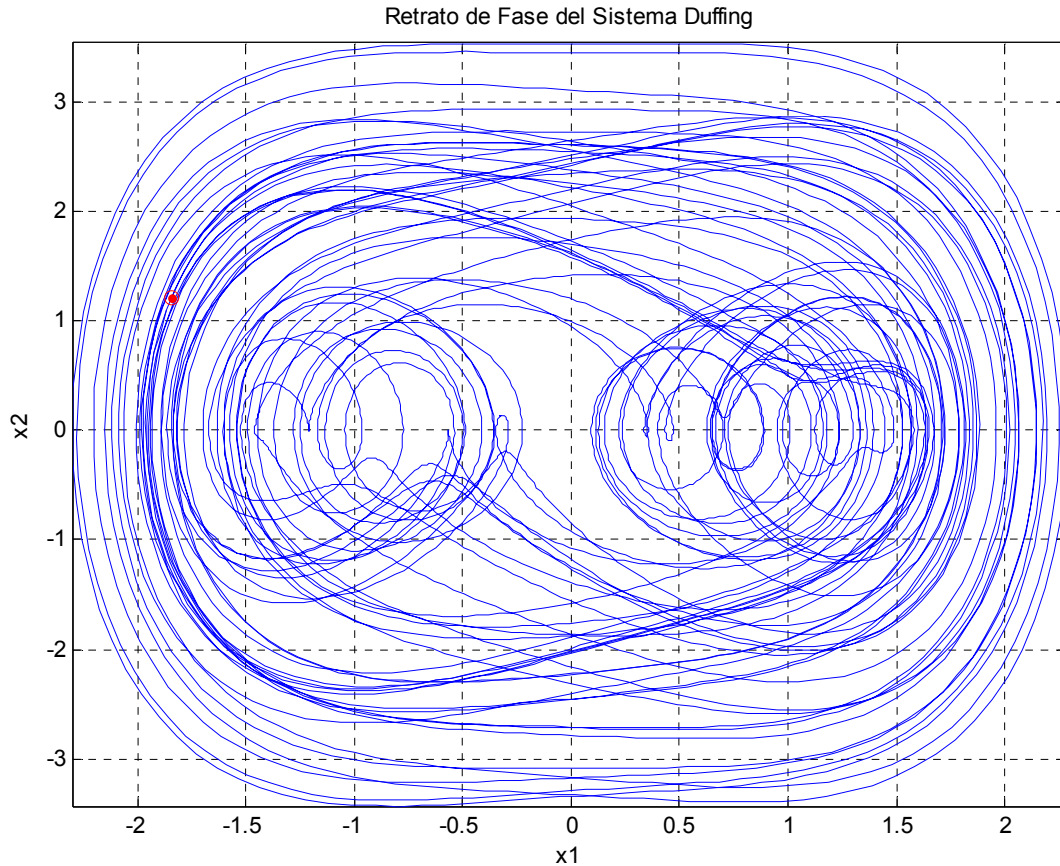
$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - x + x^3 = f \cos \omega t \quad (1.5)$$

El sistema descrito en ecuaciones de estado queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{x} \\ x_2 &= x \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\gamma x_2 + x_2 - x_2^3 + f \cos \omega t \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

con  $\gamma$ ,  $f$  y  $\omega$  parametros del sistema.

A través de un código en Matlab™ se obtuvo el retrato de fase para el sistema no lineal, con parámetros  $\gamma = 0,1$ ,  $f = 1,5$  y  $\omega = 2$ .



**Figura 1.3:** Retrato de fase del sistema Duffing.

En el retrato de fase se puede apreciar que para una condición inicial cualquiera, para este caso  $x_1 = -1,8457$  y  $x_2 = 1,2135$  (en rojo en la Figura 1.3), el sistema presenta una trayectoria periódica en torno a dos de sus puntos de equilibrios, ubicados en  $(\pm 1, 0)$ . Este comportamiento da a entender que en presencia de fuerza externa los puntos de equilibrio son imposibles, pero el carácter periódico de esta fuerza genera estas trayectorias periódicas, originando soluciones que serán oscilaciones aisladas con un período compatible o sincronizado con el de la fuerza externa. Similar al caso lineal en presencia de una entrada periódica: tras un periodo transitorio definido por las condiciones iniciales se pierda la influencia de éstas y la evolución del sistema entra en un régimen periódico permanente.

## 1.2 Problema 2

*Para cada uno de los siguientes sistemas construir el retrato de fase y discutir el comportamiento cualitativo del sistema.*

Los distintos gráficos de sistemas presentados en esta sección de la tarea fueron realizados con el programa *pplane8.m*, cuyo autor es John C. Polking. Dicho programa corre bajo Matlab™, y se puede acceder a él desde la página personal de John C. Polking:

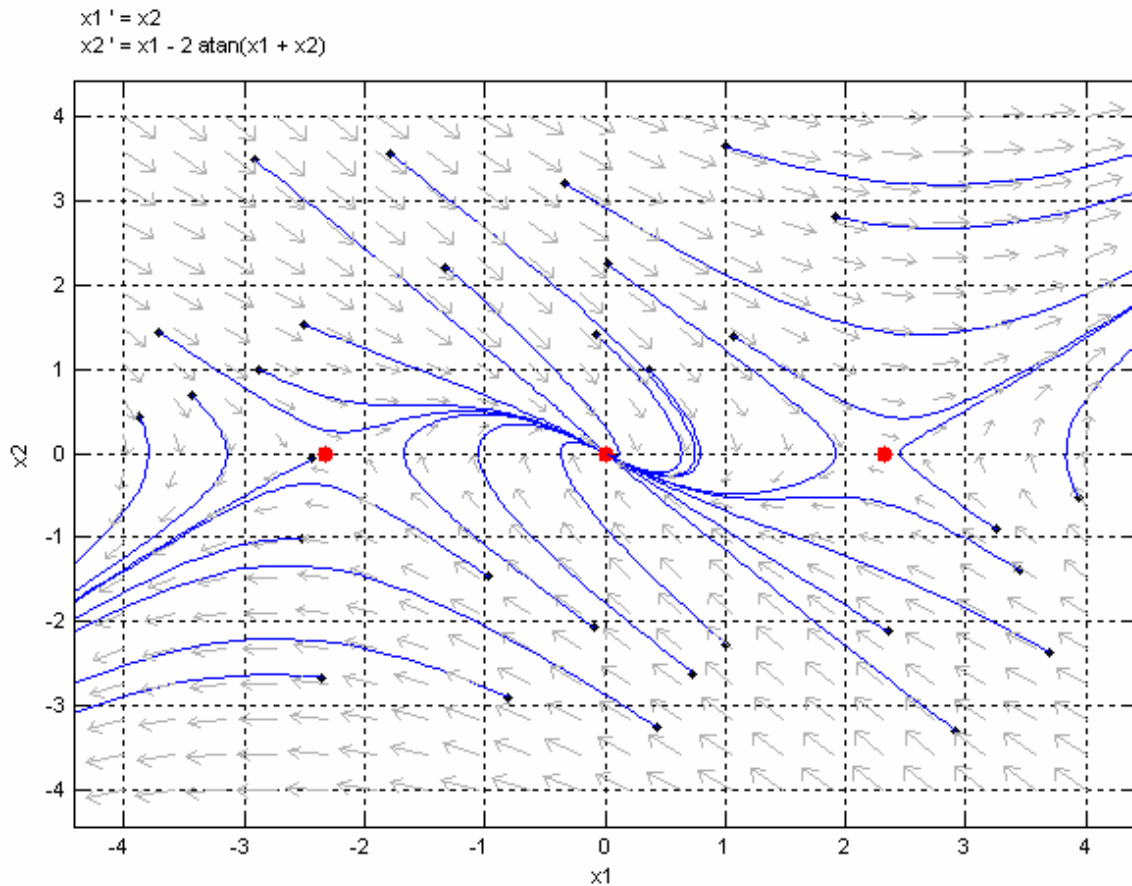
<http://math.rice.edu/~polking/>

A continuación se presentan los retratos de fase y la discusión sobre el comportamiento cualitativo de cada sistema.

### 1.2.1

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2 \arctan(x_1 + x_2)$$



**Figura 1.4:** Retrato de fase del primer sistema.

En el retrato de fase se puede apreciar que presenta tres puntos de equilibrio, el primero ubicado en  $(-2.331, 0)$ , el segundo ubicado en el origen  $(0, 0)$  y el tercer punto de equilibrio esta situado en  $(2.331, 0)$  (en rojo en la Figura 1.4).

El primer punto de equilibrio genera los autovalores en la matriz Jacobiana reales, con signos opuestos, dando origen a un punto de silla.

El segundo punto de equilibrio es un foco estable. En este caso la parte real de los autovalores de la matriz Jacobiana son negativos.

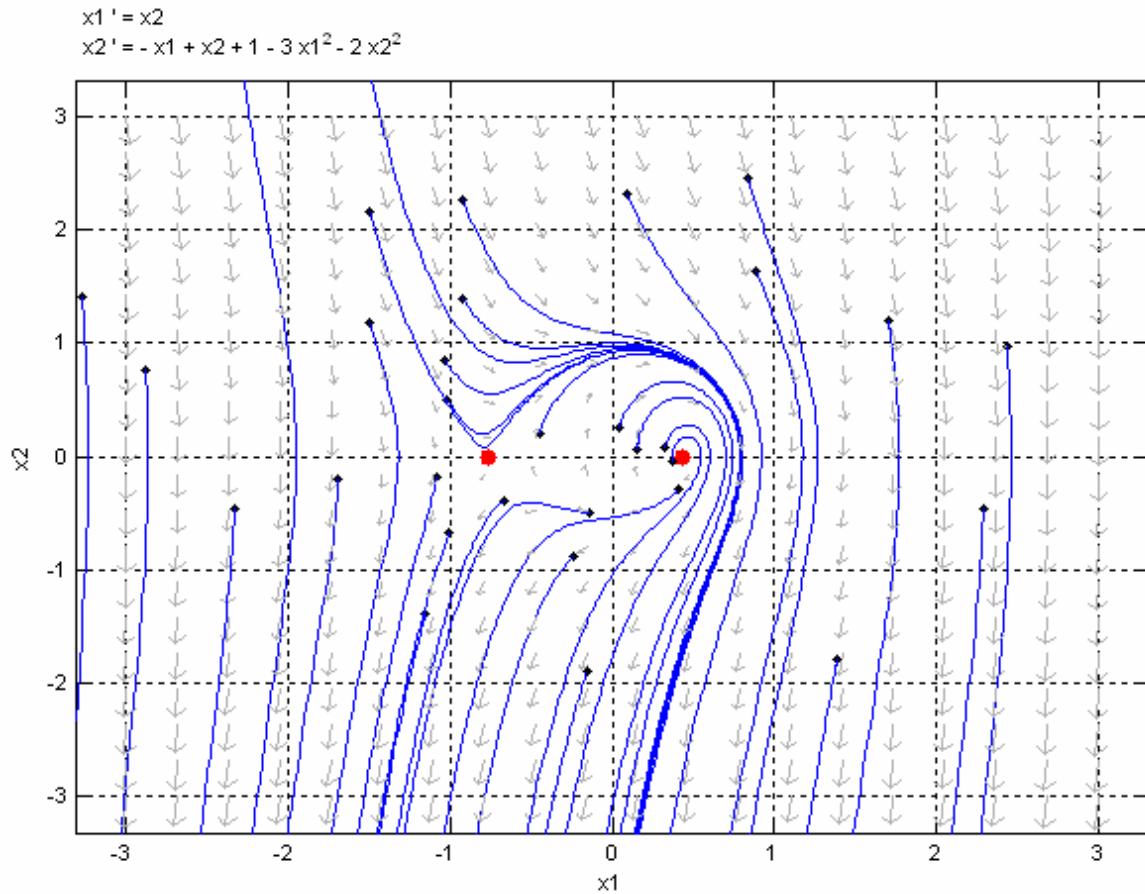
Para el caso del tercer punto de equilibrio los autovalores de la matriz Jacobiana son reales, con signos opuestos, dando origen a un punto de silla.

Para coediciones iniciales en la vecindad del origen, las trayectorias van a divergir al mismo, ya que este es un foco estable.

### 1.2.2

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + 1 - 3x_1^2 - 2x_2^2$$



**Figura 1.5:** Retrato de fase del segundo sistema.

En el retrato de fase se puede apreciar que presenta dos puntos de equilibrio, el primero ubicado en (0.43426,0) y el segundo ubicado en (-0.76759,0) (en rojo en la Figura 1.5).

El primer punto de equilibrio es un foco inestable. En este caso la parte real de los autovalores de la matriz Jacobiana es positiva.

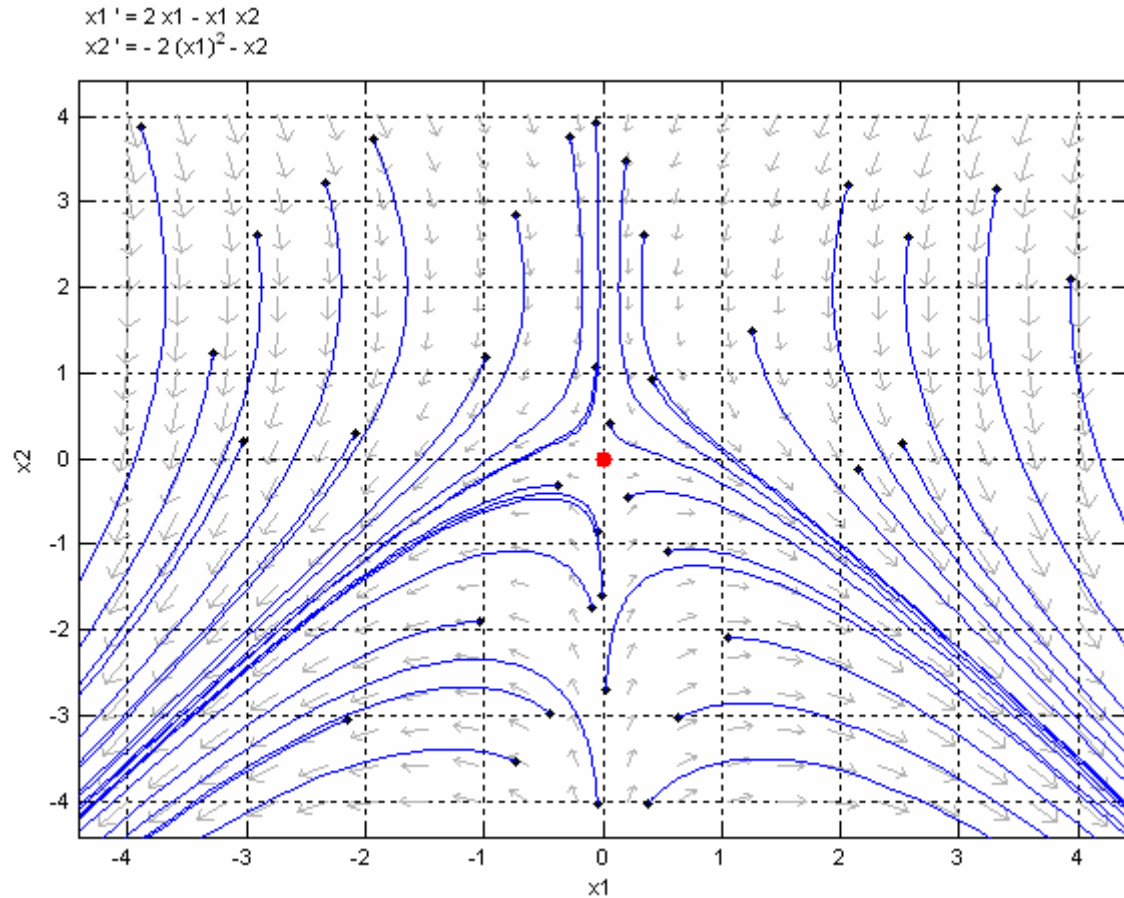
Para el caso del segundo punto los autovalores de la matriz Jacobiana son reales, con signos opuestos, dando origen a un punto de silla.

Para cualquier condición inicial en la vecindad de estos puntos de equilibrios, las trayectorias van a divergir.

### 1.2.3

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_1x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1^2 - x_2$$



**Figura 1.6:** Retrato de fase del tercer sistema.

En el retrato de fase se puede apreciar que presenta un único punto de equilibrio ubicado en el origen  $(0,0)$  (en rojo en la Figura 1.6).

Este punto de equilibrio genera los autovalores en la matriz Jacobiana reales, con signos opuestos, dando origen a un punto de silla.

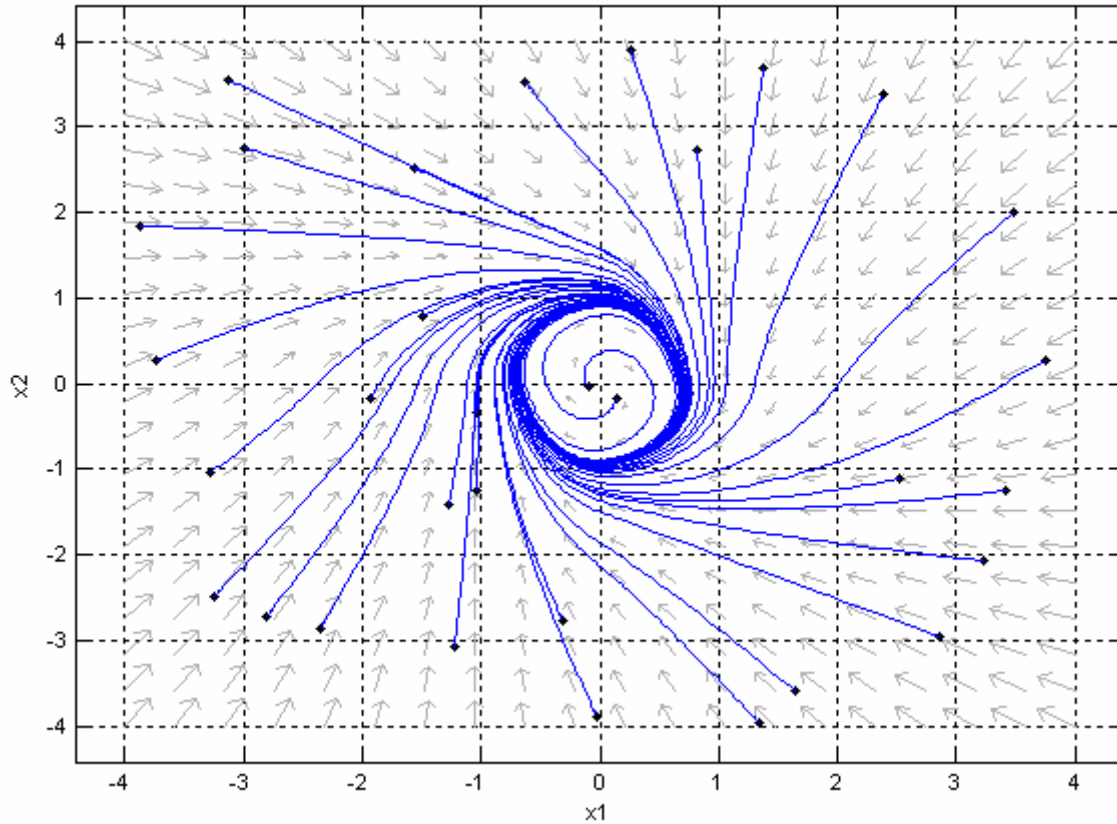
Todas las trayectorias, independientes de su condición inicial, divergen.

### 1.2.4

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - x_1(|x_1| + |x_2|)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 - x_2(|x_1| + |x_2|)$$

$$x1' = x1 + x2 - x1 (\text{abs}(x1) + \text{abs}(x2))$$
$$x2' = -2 x1 + x2 - x2 (\text{abs}(x1) + \text{abs}(x2))$$



*Figura 1.7: Retrato de fase del cuarto sistema.*

En el retrato de fase del cuarto sistema se puede apreciar que presenta un ciclo límite. Todas las trayectorias, independientes de su condición inicial (puntos negros en la Figura 1.7), convergen al mismo, generando un sistema oscilatorio, que en régimen permanente, la amplitud de esta oscilación no depende de la condición inicial del sistema.

### 1.3 Problema 3

*Mostrar que si  $f: R^n \rightarrow R^n$  es Lipschitz en un dominio  $D = \{x \in R^n : |x| < r\}$  y  $f(0) = 0$ , entonces existe una constante  $k > 0$  tal que  $|f(x)| \leq k|x|$  para todo  $x \in D$ .*

Si  $f$  es Lipschitz sobre un dominio  $D$ , significa que existe una hiperesfera de radio  $r$  en la cual parten trayectorias con condiciones iniciales  $x_0$  y sus trayectorias quedan dentro de esta hiperesfera de radio  $r$ , esto implica que  $D$  es un conjunto compacto.

Decimos que  $f: R^n \rightarrow R^n$  es Lipschitz en  $D$  de constante  $k > 0$ , si:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in D \quad (1.7)$$



## ANEXOS

### ○ CODIGOS MATLAB

- **MainDuffing.m**

```
close all
clear
clc

global gamma omega epsilon GAM OMEG

gamma=0.1;
omega=1;
epsilon=1;
OMEG=2;

GAM=1.5;

[t x]=ode45(@duffing,0:2*pi/OMEG/100:4000,[0 1]);

figure(1)
plot(x(2000:10000,2),x(2000:10000,1),'b',x(2000,2),x(2000,1),'r.',x(2000,2),x(2000,1),'ro')
axis tight
grid on
title('Retrato de Fase del Sistema Duffing')
xlabel('x1')
ylabel('x2')
```

- **duffing.m**

```
function xdot=duffing(t,x)

global gamma omega epsilon GAM OMEG

xdot(1)=-gamma*x(1)+omega^2*x(2)-epsilon*x(2)^3+GAM*cos(OMEG*t);
xdot(2)=x(1);

xdot=xdot';

end
```