Tarea No. 1

1. Determinar la expresión para Po de una cola M/M/1.

M/M/1 hace referencia a:
Distribución de tiempo de llegadas = Exponencial
Distribución de tiempo de servicio = Exponencial
Número de servidores = 1

Definimos
$n =$ Cantidad de clientes en el sistema (haciendo cola, además de los que están siendo atendidos)
$\lambda_n =$ Tasa de llegadas, si n clientes están en el sistema
$\mu_n =$ Tasa de salidas, si n clientes están en el sistema
$p_n =$ Probabilidad de estado estable de que n clientes estén en el sistema

En condiciones de estado estable, para $n > 0$, las tasas de flujo esperadas de entrada y salida del estado n deben ser iguales. Con base en el hecho de que el estado n puede cambiar sólo a los estados $n-1$ y $n+1$, se tiene

$$Tasa\ de\ entrada\ esperada\ al\ estado\ n = \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}$$
$$Tasa\ de\ salida\ esperada\ del\ estado\ n = (\lambda_n + \mu_n)p_n$$

Asumiendo que la tasa de entrada es igual a la tasa de salida se tiene

$$\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)p_n$$

Para $n = 0$ se tiene:

$$\mu_1 p_1 = \lambda_0 P_0$$

De donde

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$$

Para $n = 1$ se tiene

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1)p_1$$
$$\mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1)p_1 - \lambda_0 p_0$$
$$\mu_2 p_2 = \lambda_1 p_1 + \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0$$
$$\mu_2 p_2 = \lambda_1 p_1 + (\mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0)$$

Como

$$\mu_1 p_1 = \lambda_0 P_0$$

Se tiene

$$\mu_2 p_2 = \lambda_1 p_1 + (0)$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}p_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$$

Para $n = 2$ se tiene

$$\lambda_1 p_1 + \mu_3 p_3 = (\lambda_2 + \mu_2)p_2$$
$$\mu_3 p_3 = \lambda_2 p_2 + \mu_2 p_2 - \lambda_1 p_1$$

Como $\mu_2 p_2 = \lambda_1 p_1$ se tiene

$$\mu_3 p_3 = \lambda_2 p_2$$
$$p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}p_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0$$

Si se continúa con este análisis se tiene

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}}\frac{\lambda_{n-3}}{\mu_{n-2}} \dots \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

El valor de p_0 se determina aplicando

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

Si λ_n y μ_n son constantes se tiene

$$\lambda_n = \lambda$$
$$\mu_n = \mu$$
$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

Por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = 1$$
$$p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$
$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

En done $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ es una serie geométrica que converge si $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Por tanto

$$p_0 = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Obtener una expresión para Pn.

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \qquad para\ n = 0,1,2,3 \dots$$

3. Determinar una expresión para E[n]

$$E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$$
$$E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$
$$E(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Asumiendo $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$E(n) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n(\rho)^n$$

Ahora

$$\rho\frac{d}{d\rho}\rho^n = \rho(n\rho^{n-1}) = n\rho^n$$

Por tanto

$$E(n) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho\frac{d}{d\rho}\rho^n$$

$$E(n) = (1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^n$$

$$E(n) = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n = \frac{1}{1-\rho}$

$$E(n) = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$E(n) = (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$E(n) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$