PLANTEAMIENTO DE PROBLEMA DE (PL)

Problema ①

Un frutero necesita 16 cajas de naranjas, 5 de plátanos y 20 de manzanas. Dos mayoristas pueden suministrarle para satisfacer sus necesidades, pero solo venden la fruta en contenedores completos. El mayorista A, envía en cada contenedor 8 cajas de naranjas, 1 de plátanos y 2 de manzanas. El mayorista B, envía en cada contenedor 2 cajas de naranjas 1 de plátano y 7 manzanas. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 kms de distancia y el mayorista B a 300 kms, ¿calcular cuántos contenedores habrá de comprar a cada mayorista, con el objeto de ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia de lo solicitado?

Solución:

1° Objetivo: Minimizar.
2° Variables de decisión: 2 variables
X_1 # de contenedores del A
X_2 # " " " B

1) FUNCION OBJETIVO

$$\text{Min } Z = 150X_1 + 300X_2$$

2) RESTRICCION

X_1 (A)	8N	1P	2M	oferta
X_2 (B)	2N	1P	7M	
	16N	5P	20M	→ demanda

$$8X_1 + 2X_2 \geq 16$$
$$X_1 + X_2 \geq 5$$
$$2X_1 + 7X_2 \geq 20$$

3) RANGOS DE EXISTENCIA

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

Problema ②

Una compañía tiene 2 minas, la mina A produce diariamente una tonelada de carbón de antracita de alta calidad, 2 toneladas de carbón de calidad media y 4 toneladas de carbón de baja calidad; la mina B produce 2 toneladas de cada una de las tres clases. La compañía necesita 70 toneladas de carbón de alta calidad, 130 de toneladas de calidad media y 150 de baja calidad. Los gastos diarios de la mina A ascienden a 150 dólares y los de la mina B a 200 dólares. ¿Cuántos días deberá trabajar en cada mina para que los costos sean mínimos?

Solución:

1° OBJ.: Minimizar
2° Variables de decisión: dos variables
X_1 # de días trabajados en la mina A
X_2 # " " " " " " B

1) FUNCION OBJETIVO:

$\min Z = 150X_1 + 200X_2$

2) RESTRICCIONES

	ALTA	MED	BAS	
A	1	2	4	$\rightarrow X_1$
B	2	2	2	$\rightarrow X_2$
	70	130	150	

$X_1 + 2X_2 \geq 70$

$2X_1 + 2X_2 \geq 130$

$4X_1 + 2X_2 \geq 150$

3) RANGOS DE EXISTENCIA.

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

PROBLEMA 3

Una Compañía de seguros está introduciendo dos nuevas líneas de productos: seguro de riesgos especiales e hipotecas. La ganancia esperada es 5 por unidad sobre el seguro de riesgos especiales y 2 por unidad sobre hipotecas.

La administración quiere establecer las cuotas de venta para las nuevas líneas de productos con el fin de maximizar la ganancia esperada. Los requerimientos de trabajo son las siguientes:

Departamento	Horas de trabajo por unidad		Horas de trabajo disponibles
	Riesgos especiales	Hipotecas	
Procesamiento	3	2	2400
Administración	0	1	800
Reclamaciones	2	0	1200

SOLUCION:

1° OBJETIVO: maximización

2° Variables de decisión: 2 variables

X_1: # de seguros de riesgos especiales

X_2: # de Hipotecas.

1) FUNCION OBJETIVO

$\max Z = 5X_1 + 2X_2$

2) RESTRICCIONES

$3X_1 + 2X_2 \leq 2400$

$X_2 \leq 800$

$2X_1 \leq 1200$

3) RANGOS DE EXISTENCIA

$X_1, X_2 \geq 0$

PROBLEMA ④

Una compañía automotriz produce automóviles y camiones. Cada vehículo tiene que pasar por un taller de pintura y por un taller de montaje de la carrocería. Si el taller de pintura pintara solamente camiones, se podría pintar 40 camiones al día. Si el taller de pintura solamente pintara automóviles, se podría pintar 60 automóviles diariamente. Si el taller de carrocería produjera solamente automóviles, podría fabricar 50 automóviles al día. Si el taller de carrocería produjera solamente camiones, podría fabricar 50 camiones al día. Cada camión aporta 300 dólares a la utilidad, y cada automóvil, 200. Además supóngase que los distribuidores de automóviles requieren que la compañía automotriz produzca por lo menos 30 camiones y 20 automóviles. Utilice la programación lineal para determinar la producción diaria que maximizará la ganancia de la compañía.

Solución:

1º OBJETIVO: maximización

2º variables de decisión: 2 variables

X_1: producción diaria de Automoviles

X_2: " " " camiones

1) FUNCION OBJETIVO:

$$\max Z = 200X_1 + 300X_2$$

2) RESTRICCIONES

$$\begin{array}{ll} \text{Pint.} \rightarrow & 60X_1 + 40X_2 \leq 2400 \\ \text{Carro.} \rightarrow & 50X_1 + 50X_2 \leq 2500 \\ & X_1 \geq 20 \\ & X_2 \geq 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6X_1 + 4X_2 \leq 240 \\ X_1 + X_2 \leq 50 \\ X_1 \geq 20 \\ X_2 \geq 30 \end{array}$$

3) RANGOS DE EXISTENCIA

$$X_1, X_2 \geq 0$$

SOLUCION DE PPLC

① SOLUCION GRAFICA.

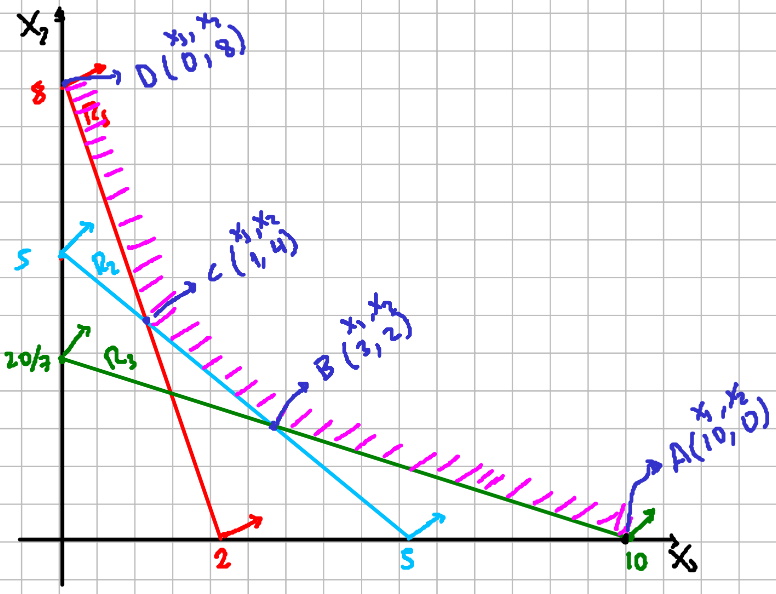
Ejemplo ⑤

$$\text{Min } Z = 150X_1 + 300X_2$$

s.a

$$\begin{array}{l} 8X_1 + 2X_2 \geq 16 \\ X_1 + X_2 \geq 5 \\ 2X_1 + 7X_2 \geq 20 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8X_1 + 2X_2 = 16 \rightarrow X_2 = 8 - 4X_1 \longrightarrow R_1 \\ X_1 + X_2 = 5 \rightarrow X_2 = 5 - X_1 \longrightarrow R_2 \\ 2X_1 + 7X_2 = 20 \rightarrow X_2 = \frac{20}{7} - \frac{2}{7}X_1 \rightarrow R_3 \end{array}$$



$R_2 = R_3$

$5 - x_1 = \frac{20}{7} - \frac{2}{7}x_1$

$-x_1 + \frac{2}{7}x_2 = \frac{20}{7} - 5$

$\frac{-7x_1 + 2x_2}{7} = \frac{20-35}{7}$

$-5x_1 = -15$

$x_1 = 3$

$x_2 = 5 - x_1$

$x_2 = 2$

$R_1 = R_2$

$8 - 4x_1 = 5 - x_1$

$3x_1 = 3$

$x_1 = 1$

$x_2 = 4$

$Z_A = 1500$
$Z_B = 1050$
$Z_C = 1350$
$Z_D = 2400$

$\Rightarrow \boxed{Z^{opt.} = 1050, \quad x_1^* = 3, \quad x_2^* = 2}$

Ejemplo 2

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$$

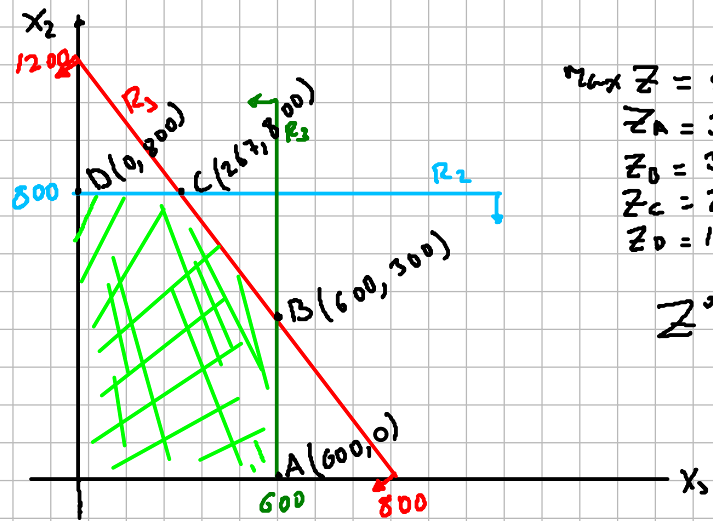
s.a

$3x_1 + 2x_2 \leq 2400 \longrightarrow 3x_1 + 2x_2 = 2400 \rightarrow x_2 = 1200 - \frac{3}{2}x_1 \rightarrow R_1$

$x_2 \leq 800 \longrightarrow x_2 = 800 \rightarrow R_2$

$2x_1 \leq 1200 \longrightarrow x_1 = 600 \rightarrow R_3$

$x_1, x_2 \geq 0$



$\text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2$

$Z_A = 3000$

$Z_B = 3600$ ✓

$Z_C = 2935$

$Z_D = 1600$

$Z^{opt} = 3600$

$x_1^* = 600$ ✓

$x_2^* = 300$ ✓

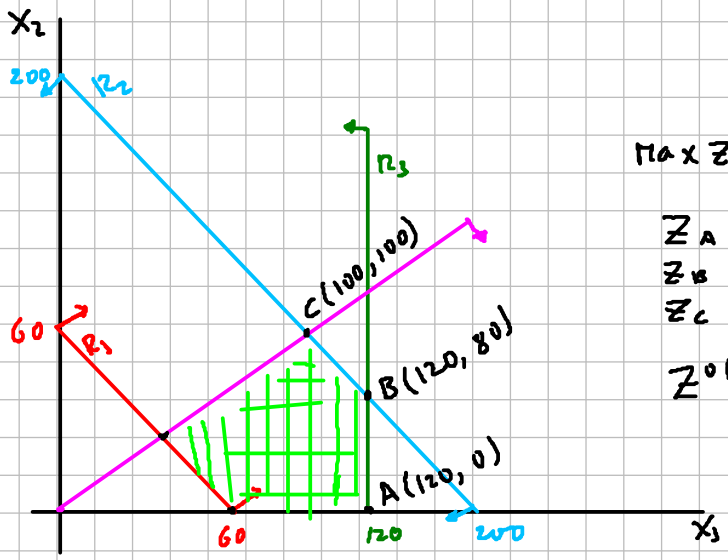
Problema 3

$$\text{Max } Z = 900x_1 + 700x_2$$

s.a

$60 \leq x_1 + x_2 \leq 200$	$x_1 + x_2 \geq 60 \ \wedge \ x_1 + x_2 \leq 200$
$x_1 \leq 120$	$x_1 \leq 120$
$x_1 \geq x_2$	$x_1 - x_2 \geq 0$
$x_1, x_2 \geq 0$	

$x_1 + x_2 = 60 \rightarrow x_2 = 60 - x_1$ R1
$x_1 + x_2 = 200 \rightarrow x_2 = 200 - x_1$ R2
$x_1 = 120$ R3
$x_1 - x_2 = 0$ $\quad x_2 = x_1$ R4



$\max Z = 900x_1 + 700x_2$

$Z_A = 108000$
$Z_B = 168{,}000$
$Z_C = 160{,}000$

$Z^{opt} = 168{,}000$

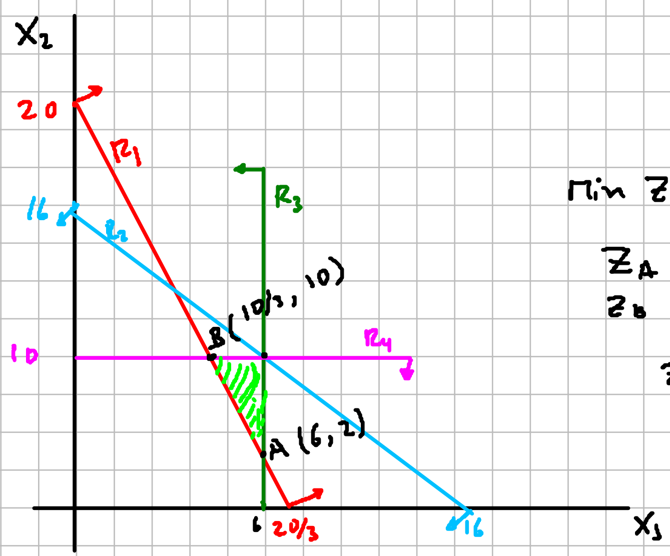
$x_1^* = 120$
$x_2^* = 80$

Ejemplo ④

$\min Z = 400x_1 + 300x_2$

s.a

$15x_1 + 5x_2 \geq 100 \rightarrow 15x_1 + 5x_2 = 100 \rightarrow x_2 = 20 - 3x_1$ R1
$x_1 + x_2 \leq 16 \rightarrow x_1 + x_2 = 16 \rightarrow x_2 = 16 - x_1$ R2
$x_1 \leq 6$ $\quad x_1 = 6$ R3
$x_2 \leq 10$ $\quad x_2 = 10$ R4
$x_1, x_2 \geq 0$



$\min Z = 400x_1 + 300x_2$

$Z_A = 3000$
$Z_B = 4333.33$

$Z^{opt.} = 3000$

$x_1^* = 6, \quad x_2^* = 2$

Ejemplo ⑤

$\max Z = -x_1 + x_2 + 2x_3$

s.a

$x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 20$
$-2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 50$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

FORMA GENERAL DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL.

$$\text{Max (min) } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n$$

s.a

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1n} x_n \; [\leq = \geq] \; b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \cdots + a_{2n} x_n \; [\leq = \geq] \; b_2$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \cdots + a_{3n} x_n \; [\leq = \geq] \; b_3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \cdots + a_{mn} x_n \; [\leq = \geq] \; b_m$$

$j = 1, 2, \ldots, n$
$i = 1, 2, \ldots, m$

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0$$

Z :
x_j :
c_j :
b_i :
a_{ij} :

FORMA CANÓNICA DE UN PPL

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$i = 1, 2, \ldots, m$
$j = 1, 2, \ldots, n$

FORMA NORMAL ESTANDAR DE UN PPL

$$\text{max } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

s.a

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$- - - - - - -$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m$$
$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0$$

Tambien cómo:

$$\text{max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$i = 1, 2, \ldots, m$
$j = 1, 2, \ldots, n$

s.a

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i$$

$$x_j \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad [c_1 \;\; c_2 \;\; \cdots c_n]_{1\times n}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

O ALTERNATIVAMENTE;

$$\text{Max } Z = CX$$

s.a

$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

$$[A]_{m\times n}$$

EL SISTEMA EXPLICITO DE UN PPL

$$\text{Max } Z = CX \qquad \text{Max } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

s.a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Separando variables en variables básicas y no básicas:

$$\text{Max } Z = C^B X^B + C^R X^R \quad \ldots \quad (1)$$

s.a

$$B X^B + R X^R = b \quad \ldots \quad (2)$$

$$X^B \geq 0,\ X^R \geq 0 \quad \ldots \quad (3)$$

Pre-multiplicando (2) por B^{-1} obtenemos:

$$B^{-1} B X^B + B^{-1} R X^R = B^{-1} b$$

$$I X^B + Y X^R = \bar{\bar{X}}^B \longrightarrow X^B + Y X^R = \bar{\bar{X}}^B \quad \ldots \quad (4)$$

donde:

$$Y = B^{-1} R$$

$$\bar{\bar{X}}^B = B^{-1} b$$

Pre-multiplicando (4) por C^B

$$C^B X^B + C^B Y X^R = C^B \bar{\bar{X}}^B$$

$$C^B X^B + Z^R X^R = \bar{\bar{Z}}$$

Donde:

$$Z^R = C^B Y, \quad \bar{\bar{Z}} = C^B \bar{\bar{X}}^B$$

ordenando:

$$\bar{\bar{Z}} = C^B X^B + Z^R X^R \quad \ldots \quad (5)$$

Restando (1) menos (5) miembro a miembro se obtiene:

$$Z = C^B X^B + C^R X^R \quad \ldots \quad (1) \quad -$$

$$\bar{\bar{Z}} = C^B X^B + Z^R X^R \quad \ldots \quad (5)$$

$$Z - \bar{\bar{Z}} = 0 X^B + [C^R - Z^R] X^R$$

$$Z - \bar{\bar{Z}} = [C^R - Z^R] X^R \quad \ldots \quad (6)$$

En resumen:

a) Hallar una solución básica.

$$\bar{\bar{X}}^B = B^{-1} b$$

b) Calcular el valor de la función objetivo asociada a la solución básica anterior.

$$\bar{\bar{Z}} = C^B \bar{\bar{X}}^B$$

c) Calcular

$$Z^R = C^B Y$$

$$C^R - Z^R = ?$$

d) Reemplazar en (4) y (6)

Ejemplo ①

$$\text{Max } Z = -X_1 + X_2 + 2X_3$$

s.a:

$$X_1 + 4X_2 - X_3 \leq 20$$
$$-2X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 60$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 50$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$15 < 20$

$15 + 5 = 20$

FORMA NORMAL DE MÁXIMO (FNM)

$$\text{Max } Z = -X_1 + X_2 + 2X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$$

s.a: → V. Holgura

$$X_1 + 4X_2 - X_3 + X_4 = 20$$
$$-2X_1 + 4X_2 + 2X_3 + X_5 = 60$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 + X_6 = 50$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

a) Base posible inicial:

$I = \{4, 5, 6\}$ → variables básicas

$J = \{1, 2, 3\}$ → " no básicas.

$$\bar{\bar{X}}^B = \begin{bmatrix} \bar{\bar{X}}_4 \\ \bar{\bar{X}}_5 \\ \bar{\bar{X}}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I$$

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{\bar{X}}^B = B^{-1} b$$

$$\bar{\bar{X}}^B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 20 \\ 60 \\ 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 60 \\ 50 \end{vmatrix}$$

3) Calcular $\bar{\bar{Z}}$:

$$\bar{\bar{Z}} = C^B \bar{\bar{X}}^B = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix} = 0$$

$$Y = B^{-1} R$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Z^R = C^B Y$$

$$C^R - Z^R$$

$$Y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Z^R = C^B Y = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$C^R - Z^R = [-1 \quad 1 \quad 2] - [0 \quad 0 \quad 0] = [-1 \quad 1 \quad 2]$$

DISPONIENDO EN UN TABLERO SIMPLEX

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
$-\bar{\bar{Z}} = 0$	-1	1	2	0	0	0	
$\bar{\bar{X}}_4 = 20$	1	4	-1	1	0	0	
$\bar{\bar{X}}_5 = 60$	-2	4	2	0	1	0	60/2 = 30
$\bar{\bar{X}}_6 = 50$	2	3	1	0	0	1	50/1 = 50

PRIMERA ITERACION

0	-1	1	2	0	0	0
20	1	4	-1	1	0	0
60	-2	4	2 PIVOT	0	1	0 ← × 1/2
50	2	3	1	0	0	1

0	-1	1	2	0	0	0
20	1	4	-1	1	0	0
30	-1	2	1	0	1/2	0
50	2	3	1	0	0	1

× (-2) × (1) × (-1)

-60	1	-3	0	0	-1	0
50	0	6	0	1	1/2	0
30	-1	2	1	0	1/2	0
20	3	1	0	0	-1/2	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-\bar{\bar{Z}} = -60$	1	-3	0	0	-1	0	
$\bar{\bar{X}}_4 = 50$	0	6	0	1	1/2	0	50/0 ∞
$\bar{\bar{X}}_3 = 30$	-1	2	1	0	1/2	0	
$\bar{\bar{X}}_6 = 20$	3 PIVOT	1	0	0	-1/2	1	

2da Iteración

-60	1	-3	0	0	-1	0
50	0	6	0	1	1/2	0
30	-1	2	1	0	1/2	0
20	3	1	0	0	-1/2	1 ← × 1/3

-60	1	-3	0	0	-1	0		
50	0	6	0	1	1/2	0		
30	-1	2	1	0	1/2	0		
20/3	1	1/3	0	0	-1/6	1/3	×(-1)	×(1)

-200/3	0	-10/3	0	0	-5/6	-1/3
50	0	6	0	1	1/2	0
110/3	0	7/3	1	0	1/3	1/3
20/3	1	1/3	0	0	-1/6	1/3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\bar{\bar{Z}} = -200/3$	0	-10/3	0	0	-5/6	-1/3
$\bar{\bar{X}}_4 = 50$	0	6	0	1	1/2	0
$\bar{\bar{X}}_3 = 110/3$	0	7/3	1	0	1/3	1/3
$\bar{\bar{X}}_1 = 20/3$	1	1/3	0	0	-1/6	1/3

$$Z^{opt.} = 200/3$$

$$x_1^* = 20/3, \quad x_3^* = 110/3, \quad x_2^* = 0$$

Ejemplo 2

$$\text{Min } Z = 16x_1 + 12x_2$$

s.a:

$$4x_1 + 4x_2 \geq 2$$
$$8x_1 + 4x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

FORMA NORMAL DE MAXIMO

$$\text{Max } Z = -16x_1 - 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

s.a:

$$4x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$
$$8x_1 + 4x_2 - x_4 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$n - m = 4 - 2 = 2 > 0$

n-m

m

Solución: Metodo de dos fases.

I. PRIMERA FASE

a) Formular el problema artificial:

$$\text{Max } W = -\sum U_i = -U_1 - U_2$$

s.a:

$$4x_1 + 4x_2 - x_3 + 0x_4 + U_1 + 0U_2 = 2$$
$$8x_1 + 4x_2 + 0x_3 - x_4 + 0U_1 + U_2 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, U_1, U_2 \geq 0$$

b) seleccionar una base posible inicial

$I = \{1^{o}, 2^{o}\}$; $J = \{1, 2, 3, 4\}$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ; \text{ por cuanto, } \bar{\bar{X}}^B = \begin{bmatrix} \bar{\bar{U}}_1 \\ \bar{\bar{U}}_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \geq 0$$

c) calcular la matriz: Y, Z^R, $C^R - Z^R$, $\bar{\bar{Z}}$

$$Y = B^{-1}R = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$Z^R = C^B Y = [-1 \ \ -1] \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [-12 \ \ -8 \ \ 1 \ \ 1]$$

$$C^R - Z^R = [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0] - [-12 \ \ -8 \ \ 1 \ \ 1] = [12 \ \ 8 \ \ -1 \ \ -1]$$

$$\bar{\bar{Z}} = \bar{\bar{W}} = C^B \bar{\bar{X}}^B = [-1 \ \ -1] \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} = -5$$

Disponemos en el tablero simplex.

	X_1	X_2	X_3	X_4	U_1	U_2	θ
$-\bar{\bar{W}} = 5$	12	8	-1	-1	0	0	
$\bar{\bar{U}}_1 = 2$	4	4	-1	0	1	0	2/4
$\bar{\bar{U}}_2 = 3$	8	4	0	-1	0	1	3/8

1ra iteración:

5	12	8	-1	-1	0	0	
2	4	4	-1	0	1	0	
3	8	4	0	-1	0	1	× 1/8

5	12	8	-1	-1	0	0	
2	4	4	-1	0	1	0	
3/8	1	1/2	0	-1/8	0	1/8	×(-12) ×(-4)

1/2	0	2	-1	1/2	0	-3/2
1/2	0	2	-1	1/2	1	-1/2
3/8	1	1/2	0	-1/8	0	1/8

	X_1	X_2	X_3	X_4	U_1	U_2	θ
$-\bar{\bar{W}} = 1/2$	0	2	-1	1/2	0	-3/2	
$\bar{\bar{U}}_1 = 1/2$	0	2	-1	1/2	1	-1/2	1/4
$\bar{\bar{X}}_1 = 3/8$	1	1/2	0	-1/8	0	1/8	3/4

2da Iteración.

$1/2$	0	2	-1	$1/2$	0	$-3/2$	
$1/2$	0	2 pivot	-1	$1/2$	1	$-1/2$	$\leftarrow \times 1/2$
$3/8$	1	$1/2$	0	$-1/8$	0	$1/8$	

$1/2$	0	2	-1	$1/2$	0	$-3/2$	$\times(-2)$
$1/4$	0	1	$-1/2$	$1/4$	$1/2$	$-1/4$	
$3/8$	1	$1/2$	0	$-1/8$	0	$1/8$	$\times(-1/2)$

0	0	0	0	0	-1	-1
$1/4$	0	1	$-1/2$	$1/4$	$1/2$	$-1/4$
$1/4$	1	0	$1/4$	$-1/4$	$-1/4$	$1/4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
$-\bar{\bar{W}} = 0$	0	0	0	0	-1	-1
$\bar{\bar{X}}_2 = 1/4$	0	1	$-1/2$	$1/4$	$1/2$	$-1/4$
$\bar{\bar{X}}_1 = 1/4$	1	0	$1/4$	$-1/4$	$-1/4$	$1/4$

II. SEGUNDA FASE

a) Identificar el conjunto de subíndices de las variables básicas óptimas del problema artificial a utilizar en el problema real.

$$I = \{2, 1\} \; ; \; J = \{3, 4\}$$

b) Utilizar la base posible inicial óptima del problema artificial y calcular la matriz: Y, Z^R, $C^R - Z^R$, $\bar{X}^B$, $\bar{\bar{Z}}$

$$\text{Max } Z = -16x_1 - 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

s.a

$$4x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$
$$8x_1 + 4x_2 - x_4 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$Y = B^{-1}R = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{vmatrix}$$

$$Z^R = C^B Y = [-12 \quad -16] \begin{vmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{vmatrix} = [2 \quad 1]$$

$$C^R - Z^R = [0 \quad 0] - [2 \quad 1] = [-2 \quad -1]$$

$$\bar{\bar{X}}^B = \begin{vmatrix} \bar{\bar{X}}_2 \\ \bar{\bar{X}}_1 \end{vmatrix} = B^{-1}b = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{vmatrix}$$

$$\bar{\bar{Z}} = C^B \bar{\bar{X}}^B = [-12 \quad -16] \begin{vmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{vmatrix} = -7$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
$-\bar{\bar{Z}} = 7$	0	0	-2	-1
$\bar{\bar{x}}_2 = 1/4$	0	1	-1/2	1/4
$\bar{\bar{x}}_1 = 1/4$	1	0	1/4	-1/4

$$Z^{opt.} = -7 \quad , \quad x_1^* = 1/4 \quad , \quad x_2^* = 1/4$$

$$Z = -16x_1 - 12x_2$$

$$Z = -16(1/4) - 12(1/4)$$

$$Z = -7$$

$$\boxed{Z^* = 7}$$

$$\min Z = 16x_1 + 12x_2$$

s.a:

$$4x_1 + 4x_2 \geq 2$$
$$8x_1 + 4x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

FNM:

$$\max Z = -16x_1 - 12x_2$$

s.a

$$4x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$
$$8x_1 + 4x_2 - x_4 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

SOLución: METODO DE COEFICIENTE DE CASTIGO

a) FORMULAR EL PROBLEMA ARTIFICIAL CON UNA FUNCION OBJETIVO AMPLIADA.

$$\max W = -16x_1 - 12x_2 - MU_1 - MU_2$$

s.a:

$$4x_1 + 4x_2 - x_3 + 0x_4 + U_1 + 0U_2 = 2$$
$$8x_1 + 4x_2 + 0x_3 - x_4 + 0U_1 + U_2 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, U_1, U_2 \geq 0$$

b) Seleccionar una base posible inicial.

$$I = \{1^U, 2^U\} \quad , \quad J = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{\bar{X}}^B = B^{-1} b$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ; \quad \bar{\bar{X}}^B = \begin{vmatrix} \bar{\bar{U}}_1 \\ \bar{\bar{U}}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

c) calcular la matriz: Y, Z^R, $C^R - Z^R$, $\bar{\bar{Z}}$

$$Y = B^{-1} R = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$Z^R = C^B Y = [-M \quad -M] \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [-12M \quad -8M \quad M \quad M]$$

$C^R - Z^R = [-16 \quad -12 \quad 0 \quad 0] - [-12M \quad -8M \quad M \quad M]$

$C^R - Z^R = [-16+12M \quad -12+8M \quad -M \quad -M]$

$\bar{\bar{Z}} = C^B \bar{\bar{X}}^B = [-M \quad -M] \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} = -5M$

	x_1	x_2	x_3	x_4	U_1	U_2	θ
$-\bar{\bar{Z}} = 5M$	$-16+12M$	$-12+8M$	$-M$	$-M$	0	0	
$\bar{\bar{U}}_1 = 2$	4	4	-1	0	1	0	1/2
$\bar{\bar{U}}_2 = 3$	8	4	0	-1	0	1	3/8

1ra Iteración

$5M$	$-16+12M$	$-12+8M$	$-M$	$-M$	0	0	
2	4	4	-1	0	1	0	
3	8	4	0	-1	0	1	$\times 1/8$

$5M$	$-16+12M$	$-12+8M$	$-M$	$-M$	0	0		
2	4	4	-1	0	1	0		
3/8	1	1/2	0	$-1/8$	0	1/8	$\times(16-12M)$	$\times(-4)$

$6+\frac{1}{2}M$	0	$-4+2M$	$-M$	$-2+\frac{1}{2}M$	0	$2-\frac{3}{2}M$
1/2	0	2	-1	1/2	1	$-1/2$
3/8	1	1/2	0	$-1/8$	0	1/8

	x_1	x_2	x_3	x_4	U_1	U_2	θ
$-\bar{\bar{Z}} = 6+\frac{1}{2}M$	0	$-4+2M$	$-M$	$-2+\frac{1}{2}M$	0	$2-\frac{3}{2}M$	
$\bar{\bar{U}}_1 = 1/2$	0	2	-1	1/2	1	$-1/2$	1/4
$\bar{\bar{X}}_1 = 3/8$	1	1/2	0	$-1/8$	0	1/8	3/4

2da Iteración.

$6+\frac{1}{2}M$	0	$-4+2M$	$-M$	$-2+\frac{1}{2}M$	0	$2-\frac{3}{2}M$	
1/2	0	2	-1	1/2	1	$-1/2$	$\times(1/2)$
3/8	1	1/2	0	$-1/8$	0	1/8	

$6+\frac{1}{2}M$	0	$-4+2M$	$-M$	$-2+\frac{1}{2}M$	0	$2-\frac{3}{2}M$		
1/4	0	1	$-1/2$	1/4	1/2	$-1/4$	$\times(4-2M)$	$\times(-1/2)$
3/8	1	1/2	0	$-1/8$	0	1/8		

7	0	0	-2	-1	2-M	1-M
1/4	0	1	-1/2	1/4	1/2	-1/4
1/4	1	0	1/4	-1/4	-1/4	1/4

	x_1	x_2	x_3	x_4	U_1	U_2
$-\bar{\bar{Z}} = 7$	0	0	-2	-1	2-M	1-M
$\bar{\bar{x}}_2 = 1/4$	0	1	-1/2	1/4	1/2	-1/4
$\bar{\bar{x}}_1 = 1/4$	1	0	1/4	-1/4	-1/4	1/4

$Z^{opt} = -7$, $x_1^* = 1/4$ $x_2^* = 1/4$

$\min Z = 16x_1 + 12x_2$

$$Z^{opt.} = 16(1/4) + 12(1/4) = 7$$

CASOS ESPECIALES:

Carlos es un estudiante emprendedor de primer año en la UNSCH. Tiene la teoría de que solo estudiar y nada de diversión acabarán por estresarlo. Para evitarlo quiere distribuir su tiempo disponible, a lo sumo 10 horas al día, entre el estudio y la diversión. Calcula que divertirse es dos veces más interesante que estudiar, pero cree que para poder cumplir con las tareas diarias de la universidad la diferencia entre las horas que dedica a divertirse y las que dedica a estudiar debe ser a lo sumo de 1 hora. Además, debe tener en cuenta que sus padres le permiten dedicar como máximo 4 horas a actividades de diversión ¿Cómo debe distribuir Carlos su tiempo para conseguir que sea lo más interesante posible? [Solución óptima finita]

Solución:

1ro objetivo: maximizar
2do variables de decisión: x_1, x_2
x_1: # de horas dedicadas al estudio
x_2: # " " " a la diversión

a) FUNCION OBJETIVO

$\max Z = x_1 + 2x_2$

s.a:

$x_1 + x_2 \leq 10$	$x_1 + x_2 \leq 10$
$x_2 - x_1 \leq 1$	$-x_1 + x_2 \leq 1$
$x_2 \leq 4$	$x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

$Z^{opt} = 14$ $x_1^* = 6$, $x_2^* = 4$

$Z = 6 + 2(4) = 14$

Supongamos ahora que Carlos valora exactamente igual las horas dedicadas a estudiar que las dedicadas a divertirse. ¿Cuál sería ahora la solución óptima?
[Solución múltiple: Infinitas soluciones]

Solución :

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$
s.a
$$x_1 + x_2 \le 10$$
$$-x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$Z^{opt} = 10$ $\quad (x_1, x_2) = (6,4)$

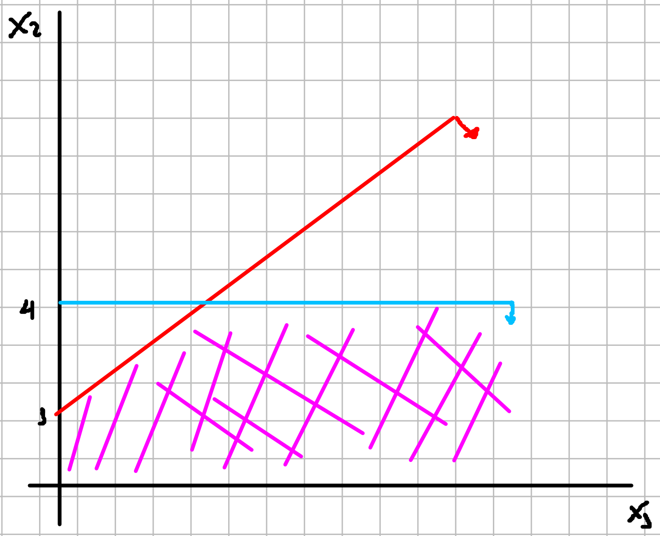
$(x_1, x_2) = (10,0)$

$Z^{op} = x_1 + x_2 = 10$

$Z^{op} = 10$

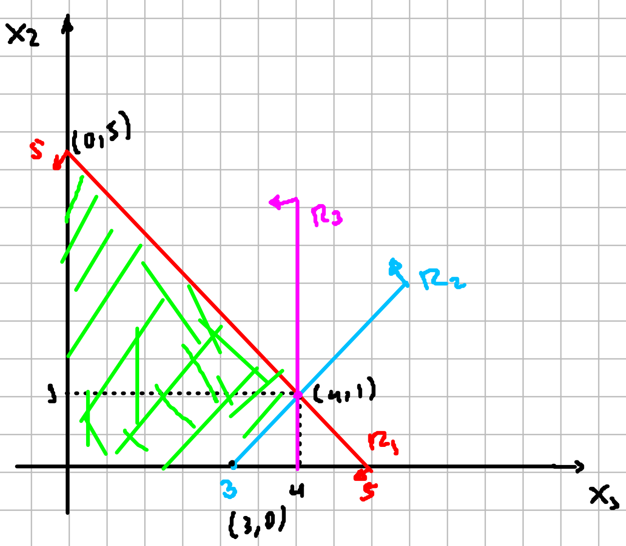
Si eliminamos la restricción de que el número máximo de horas disponibles es de 10 horas ¿cuál sería la solución óptima del problema? [Solución no acotada (ausencia de solución), cuando la función objetivo no tiene valores extremos, pues la región factible es no acotada]

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$
s.a:
$$-x_1 + x_2 \le 3 \rightarrow R_1$$
$$x_2 \le 4 \rightarrow R_2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



[Solución no factible, cuando no existe región factible por falta de puntos comunes en el sistema de inecuaciones]
[Solución degenerada, si en un solo punto (que se dice degenerado) coinciden tres o más de las rectas que limitan la región factible]

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 5 \rightarrow R_1$$
$$x_1 - x_2 \le 3 \rightarrow R_2$$
$$x_1 \le 4 \rightarrow R_3$$



DUALIDAD:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \longrightarrow \text{Problema primal}$$
s.a:
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \rightarrow y_1$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \rightarrow y_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

PROBLEMA DUAL

$$\text{Min } W = 10Y_1 + 8Y_2$$

s.a

$$Y_1 + 2Y_2 \geq 5 \longrightarrow x_1$$
$$2Y_1 - Y_2 \geq 12 \longrightarrow x_2$$
$$Y_1 + 3Y_2 \geq 4 \longrightarrow x_3$$

$Y_1 \geq 0$ Y_2 no restringida (Libre)

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

s.a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

FNM

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

s.a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$C^4_2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6 \text{ soluciones}$$

$n - m = 2 > 0$

$$\text{Max } R = -U_1$$
$$\text{Max } W = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MU_1$$

s.a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + U_1 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, U_1 \geq 0$$

$$I = \{4, 1^u\} \quad J = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{Min } W = 10Y_1 + 8Y_2$$

s.a

$$Y_1 + 2Y_2 \geq 5$$
$$2Y_1 - Y_2 \geq 12$$
$$Y_1 + 3Y_2 \geq 4$$
$$Y_1 \geq 0, Y_2 \text{ Libre}$$

ANALISIS DE SENSIBILIDAD:

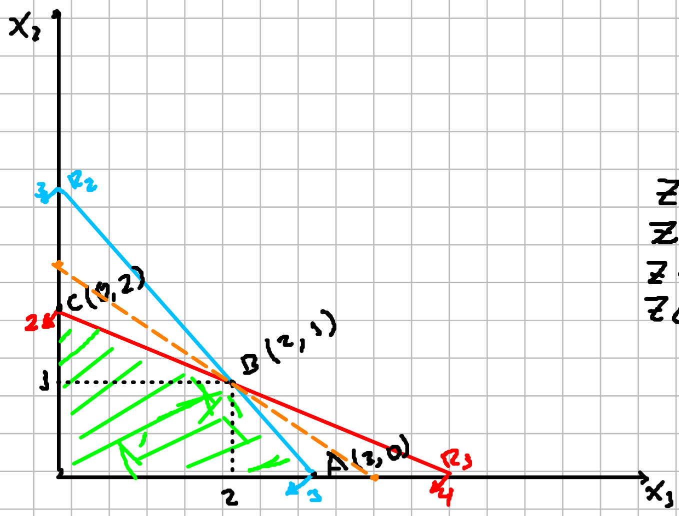
$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a:

$4x_1 + 8x_2 \leq 16 \longrightarrow R_1$ $\quad 4x_1 + 8x_2 = 16 \rightarrow x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_1 \rightarrow R_1$

$4x_1 + 4x_2 \leq 12 \longrightarrow R_2$ $\quad 4x_1 + 4x_2 = 12 \rightarrow x_2 = 3 - x_1 \rightarrow R_2$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$Z = 2X_1 + 3X_2$

$Z_A = 6$

$Z_B = 7$

$Z_C = 6$

$Z^{OPT} = 7, \quad X_1^* = 2, \quad X_2^* = 1$

COEFICIENTES DE LA FUNCION OBJETIVO

$$Z = 2X_1 + 3X_2$$

Isobeneficio

$$X_2 = \frac{Z}{3} - \frac{2}{3}X_1 \longrightarrow X_2 = 7/3 - 2/3\, X_1$$

$$X_2 = Z/C_2 - C_1/C_2\, X_1$$

- Si C_1 aumenta, permaneciendo constante C_2, la pendiente aumenta
- Si C_1 disminuye, " " C_2, " " disminuye

RANGO DE OPTIMIZACION:

Si $C_1 = 2$ y $C_2 = 3$ siendo la pendiente del isobeneficio 2/3 la solución optima encontrada es $X_1 = 2$, $X_2 = 1$ $Z = 7$. ¿Que ocurre con esta solucion óptima si los coeficientes de las variables de decisión de la función objetivo cambian?

Si C_1 disminuye o alternativamente C_2 aumenta y la pendiente del isobeneficio es menor o igual que 1/2 (pendiente de la restricción $4X_1 + 8X_2 \leq 16$) la solución optima cambia a $X_1 = 0$, $X_2 = 2$ $Z = 6$

Si C_1 aumenta o alternativamente C_2 disminuye y la pendiente del isobeneficio es mayor o igual que 1 (pendiente de la restriccion $4X_1 + 4X_2 \leq 12$) la solución óptima cambiaría y sería $X_1 = 3$, $X_2 = 0$ $Z = 6$

Por tanto, la solución óptima no cambia si su pendiente se encuentra entre el intervalo de:

$$1/2 < C_1/C_2 < 1$$

considerando que $C_2 = 3$, entonces:

$$1/2 < C_1/3 < 1$$

$$1.5 < C_1 < 3$$

Considerando que $C_1 = 2$

$$1/2 < 2/C_2 < 1$$

$$2 < C_2 < 4$$

* SENSIBILIDAD DEL COEFICIENTE

Si $C_1 = 2$ ¿cuál es la sensibilidad del coeficiente?

Respuesta: $1.5 - 2 = -0.5$

$C_2 = 3$

resp.: $2 - 3 = -1$

$4 - 3 = 1$

$\text{Max } Z = 34X_1 + 40X_2$

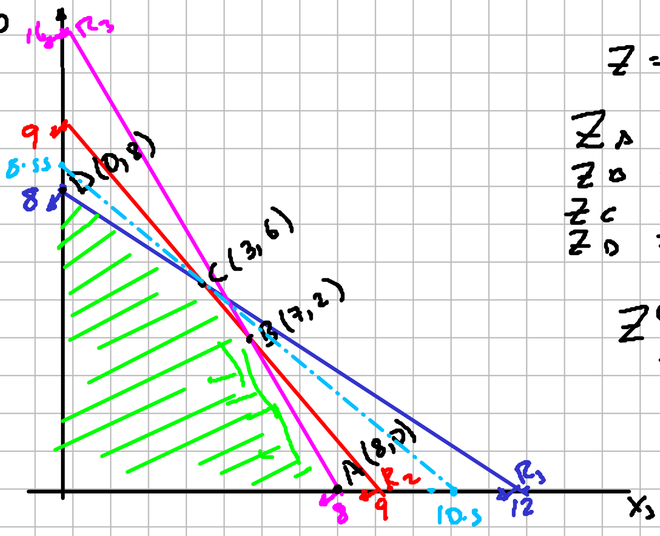
s.a:

$4X_1 + 6X_2 \leq 48 \rightarrow R_1 \quad 4X_1 + 6X_2 = 48 \rightarrow X_2 = 8 - 2/3X_1 \rightarrow R_1$

$2X_1 + 2X_2 \leq 18 \rightarrow R_2 \quad 2X_1 + 2X_2 = 18 \rightarrow X_2 = 9 - X_1 \rightarrow R_2$

$2X_1 + X_2 \leq 16 \rightarrow R_3 \quad 2X_1 + X_2 = 16 \rightarrow X_2 = 16 - 2X_1 \rightarrow R_3$

$X_1, X_2 \geq 0$



$Z = 34X_1 + 40X_2$

$Z_A = 34(8) + 40(0) = 278$

$Z_B = 34(7) + 40(2) = 318$

$Z_C = 34(3) + 40(6) = 342$

$Z_D = 34(0) + 40(8) = 320$

$Z^{OPT} = 342$

$X_1^* = 3, \quad X_2^* = 6$

Coeficientes de la función objetivo.

$Z = 34X_1 + 40X_2$

$40X_2 = Z - 34X_1$

$X_2 = Z/40 - 34/40X_1$

$X_2 = Z/40 - 0.85X_1 \xrightarrow{\text{isobeneficio}} X_2 = 342/40 - 0.85X_1$

$X_2 = Z/C_2 - C_1/C_2X_1$

Si C_1 aumenta, permaneciendo constante C_2, la pendiente aumenta

Si C_1 disminuye, permaneciendo constante C_2, la pendiente disminuye

RANGO DE OPTIMIZACION:

Si $C_1 = 34$ y $C_2 = 40$ siendo la pendiente del isobeneficio 0.85 la solución óptima encontrada es $X_1 = 3$, $X_2 = 6$. ¿Qué ocurre con esta solución óptima si los coeficientes de las variables de decisión de la función objetivo cambian?

Si C_1 disminuye o alternativamente C_2 aumenta y la pendiente del isobeneficio es menor o igual que $2/3$ (0.67) (pendiente de la restricción R_1) la solución óptima cambiaría y sería $X_1 = 0$ y $X_2 = 8$ $Z = 320$

Si C_1 aumenta o alternativamente C_2 disminuye y la pendiente del isobeneficio es mayor o igual que 1 (pendiente de R_2) la solución óptima cambiaría y sería $X_1 = 7$, $X_2 = 2$, $Z = 318$

Por tanto, la solución óptima no cambia (mejora) si su pendiente se encuentra entre el intervalo de:

$2/3 < C_1/C_2 < 1$

considerando que $C_2 = 40$, entonces:

$2/3 < C_1/40 < 1$

$26.67 < C_1 < 40$

considerando que $C_1 = 34$, entonces:

$2/3 < 34/C_2 < 1$

$34 < C_2 < 51$

* SENSIBILIDAD DEL COEFICIENTE

si $c_1 = 20$: ¿cual es la sensibilidad del coeficiente c_1?

Respuesta: $26.67 - 20 = 6.67$

$c_2 = 20$

PROBLEMA DE ASIGNACION

Ejemplo ①

	T_1	T_2	T_3
m_1	1	2	3
m_2	2	4	6
m_3	3	6	9

0	1	2
0	2	4
0	3	6

0	0	0
0	1	2
0	2	4

1	0	0
0	0	1
0	1	3

	T_1	T_2	T_3
m_1	1	0	0
m_2	0	0	1
m_3	0	1	3

1

1

1

$C = 1(3) + 1(4) + 1(3) = 10$

Ejemplo ②

En el terreno de una universidad cuatro contratistas diferentes 1, 2, 3 y 4 se proponen construir cuatro edificios diferentes A, B, C y D. Debido a que los contratistas contribuye generosamente al fondo de los alumnos, cada uno construirá un edificio. Cada contratista ha remitido propuestas para la construcción de los cuatro edificios. En la tabla siguiente se muestran las propuestas. ¿Qué edificio deben adjudicarse a cada contratista para lograr un mínimo costo de construcción de los cuatro edificios?

Propuesta de construcción

Edificio	Contratista			
	1	2	3	4
A	48	48	50	44
B	56	60	60	68
C	96	94	90	85
D	42	44	54	46

4	4	6	0
0	4	4	12
11	9	5	0
0	2	12	4

4	2	2	0
0	2	0	12
11	7	1	0
0	0	8	4

3	1	1	0
0	2	0	13
10	6	0	0
0	0	8	5

3	1	1	0
0	2	0	13
10	6	0	0
0	0	8	5

	1	2	3	4
A				1
B	1			
C			1	
D		1		

$C = 56 + 44 + 90 + 44 = 234$

Ejemplo ③

Una compañía transportadora dispone de 5 camiones situados en las ciudades A, B, C, D y E. Se requiere un camión en las ciudades 1, 2, 3, 4, 5, y 6. En la tabla siguiente se muestra el kilometraje entre las ciudades. ¿Cuál es la asignación de camiones que minimiza el kilometraje recorrido por todos los camiones?

Kilometraje

Desde Las Ciudades	Hasta las ciudades					
	1	2	3	4	5	6
A	20	15	26	40	32	12
B	15	32	46	26	28	20
C	18	15	2	12	6	14
D	8	24	12	22	22	20
E	12	20	18	10	22	15

	1	2	3	4	5	6
A	20	15	26	40	32	12
B	15	32	46	26	28	20
C	18	15	2	12	6	14
D	8	24	12	22	22	20
E	12	20	18	10	22	15
F	0	0	0	0	0	0

8	3	14	28	20	0
0	17	31	11	13	5
16	13	0	10	4	12
0	16	4	14	14	12
2	10	8	0	12	5
0	0	0	0	0	0

8	3	14	28	20	0
0	17	31	11	13	5
16	13	0	10	4	12
0	16	4	14	14	12
2	10	8	0	12	5
0	0	0	0	0	0

8	0	14	28	17	0
0	14	31	11	10	5
16	10	0	10	1	12
0	13	4	14	11	12
2	7	8	0	9	5
3	0	3	3	0	3

9	0	15	29	17	0
0	13	31	11	9	4
16	9	0	10	0	11
0	12	4	14	10	11
2	6	8	0	8	4
4	0	4	4	0	3

13	0	15	33	17	0
0	9	27	11	5	0
20	9	0	14	0	11
0	8	0	14	6	7
2	2	4	0	4	0
8	0	4	8	0	3

	1	2	3	4	5	6
A	13	0	15	33	17	0
B	0	9	27	11	5	0
C	20	9	0	14	0	11
D	0	8	0	14	6	7
E	2	2	4	0	4	0
F	8	0	4	8	0	3

	1				
					1
		1			
1					
			1		
				1	

$$C = 8 + 15 + 2 + 10 + 20 + 0 = 55$$

PROBLEMA DE TRANSPORTE:

Ejemplo ①

	D_1	D_2	D_3	D_4	Suministro (oferta)
F_1	10	5	3	8	100
F_2	6	8	12	7	200
F_3	11	7	6	3	100
Demanda	70	130	120	80	

Sea x_{ij}: el número de unidades que se envían desde el punto O_i al punto D_j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$

El problema de programación lineal correspondiente es:

$$\text{Min } C = 10x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 8x_{14} + 6x_{21} + 8x_{22} + 12x_{23} + 7x_{24} + 11x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} + 3x_{34}$$

s.a:

$$\begin{array}{lr}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100 & F_1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200 & F_2 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 & F_3 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} = 70 & D_1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} = 130 & D_2 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120 & D_3 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80 & D_4
\end{array}$$

y todo los $x_{ij} \geq 0$

PROBLEMA DE TRANSPORTE BALANCEADO

$S = D$:

donde S = suma de suministros s_i

D = " " Demandas d_j

$S = 400 = 100 + 200 + 100$

$D = 400 = 70 + 130 + 120 + 80$

* si no está balanceado:

- si $S < D$, se agrega una fuente ficticia con suministro $D - S$
- si $S > D$, se agrega un destino ficticio con demanda $S - D$

Ejemplo: ②

	D_1	D_2	D_3	Sum.
F_1	10	5	3	100
F_2	6	8	12	50
Dda.	40	60	80	

$S < D$

Las cantidades que no se envíen a los destinos tienen una multa de 4, 3 y 5 por unidad, respectivamente.

$D - S = 180 - 150 = 30$

	D_1	D_2	D_3	Sum.
F_1	10	5	3	100
F_2	6	8	12	50
F_3	4	3	5	30 ← Fuente ficticia
Dda.	40	60	80	

Número de variables básicas.

En un problema de transporte balanceado todo conjunto de variables básicas se compone: $m+n-1$ variables, siendo m el número de filas (o fuentes) y n el número de columnas (o destino).

$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ variables básicas.

CÁLCULO DE UN CONJUNTO INICIAL DE VARIABLES BÁSICAS.

① MÉTODO DE LA ESQUINA NOROESTE.

Ejemplo ③

	D_1	D_2	D_3	D_4	Suministro
F_1	3	7	6	4	5
F_2	2	4	3	2	2
F_3	4	3	8	5	3
Demanda	3	4	2	1	10 / 10

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$

$x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$

$x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}$

$m+n-1 = 3+4-1 = 6$

	D_1		D_2		D_3		D_4		
F_1	X_{11}	3 / **3**	X_{12}	7 / **2**	X_{13}	6	X_{14}	4	5 2 0
F_2	X_{21}	2	X_{22}	4 / **2**	X_{23}	3	X_{24}	2	2 0
F_3	X_{31}	4	X_{32}	3 / **0**	X_{33}	8 / **2**	X_{34}	5 / **1**	3 1 0
		3 0		4 2 0		2 0		1 0	

La solucion inicial basica factible es $X_{11}=3$, $X_{12}=2$, $X_{22}=2$, $X_{32}=0$ (variable básica degenerada), $X_{33}=2$ y $X_{34}=1$

$Costo = 3(3) + 7(2) + 4(2) + 3(0) + 8(2) + 5(1) = 52$

② METODO DE LA CELDA DE COSTO MÍNIMO

	D_1	D_2	D_3	D_4	
F_1	10	5	3 100	8	100 0
F_2	6 70	8 130	12 0	7	200 130 0
F_3	11	7	6 20	3 80	100 20 0
	70 0	130 0	120 20 0	80 0	

las celdas de costo minimo 3 son X_{13}, X_{34}

① $X_{13} = \min\{100, 120\} = 100$

② $X_{34} = \min\{100, 80\} = 80$

③ $X_{21} = \min\{200, 70\} = 70$

④ $X_{23} = \min\{20, 20\} = 20$

⑤ $X_{22} = \min\{130, 130\} = 130$

$Costo = 3(100) + 6(70) + 8(130) + 12(0) + 6(20) + 3(80)$

$Costo = 2120$

	V_1	V_2	V_3	V_4	Recursos
U_1	3 / 0 / **3**	7 / 0 / **1**	6 / 0	4 / -5 / **1**	5
U_2	2 / 2	4 / 0 / **0**	3 / 0 / **2**	2 / -4	2
U_3	4 / 5	3 / 0 / **3**	8 / 6	5 / 0	3
Dda	3	4	2	1	$C = 35$

$C_{ij} - U_i - V_j$

$3 = \cancel{U_1} + V_1 \rightarrow V_1 = 3$

$7 = \cancel{U_1} + V_2 \rightarrow V_2 = 7$

$4 = \cancel{U_1} + V_4 \rightarrow V_4 = 4$

$4 = U_2 + V_2 \rightarrow U_2 = -3$

$3 = U_2 + V_3 \rightarrow V_3 = 6$

$3 = U_3 + V_2 \rightarrow U_3 = -4$

$U_1 = 0$

$C_{ij} - U_i - V_j \geq 0$

$(1,3) = 6 - 0 - 6 = 0$

$(2,1) = 2 - (-3) - 3 = 2$

$(2,4) = 2 - (-3) - 4 = 1$

$(3,1) = 4 - (-4) - 3 = 5$

$(3,3) = 8 - (-4) - 6 = 6$

$(3,4) = 5 - (-4) - 4 = 5$

		v_1 D_1	v_2 D_2	v_3 D_3	v_4 D_4	Recurso
u_1	F_1	3_1	7_1	6_2	4_1	5 4 3 1 0
u_2	F_2	2_2	4	3	2	2 0
u_3	F_3	4	3_3	8	5	3 0
	Dda	3 1 0	4 1 0	2 0	1 0	

$X_{21} = \min\{2, 3\} = 2$ $\qquad X_{14} = \{4, 1\} = 1$

$X_{11} = \min\{5, 1\} = 1$ $\qquad X_{13} = \{3, 2\} = 2$

$X_{32} = \min\{3, 4\} = 3$ $\qquad X_{12} = \{1, 1\} = 1$

$C = 3(1) + 7(1) + 6(2) + 4(1) + 2(2) + 3(3)$

$C = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{14}X_{14} + C_{21}X_{21} + C_{32}X_{32}$

$C = 3 + 7 + 12 + 4 + 4 + 9$

$C = 39$

$C_{ij} - u_i - v_j$

$3 = \cancel{u_1} + v_1 \rightarrow v_1 = 3$

$7 = \cancel{u_1} + v_2 \rightarrow v_2 = 7$

$6 = \cancel{u_1} + v_3 \rightarrow v_3 = 6$

$4 = \cancel{u_1} + v_4 \rightarrow v_4 = 4$

$2 = u_2 + v_1 \rightarrow u_2 = -1$

$3 = u_3 + v_2 \rightarrow u_3 = -4$

$C_{ij} - u_i - v_j$

$(2,2) = 4 - (-1) - 7 = -2$

$(2,3) = 3 - (-1) - 6 = -2$

$(2,4) = 2 - (-1) - 4 = -1$

$(3,1) = 4 - (-4) - 3 = 5$

$(3,3) = 8 - (-4) - 6 = 6$

$(3,4) = 5 - (-4) - 4 = 5$

3 + 1 / 0	7 1 / 0	6 2 − / 0	4 1 / 0	5
2 − 2 / 0	4 / −2	3 + / −2	2 / −1	2
4 / 5	3 3 / 0	8 / 6	5 / 5	3
3	4	2	1	

3 3	7 1	6	4 1
2 0	4	3 2	2
4	3 3	8	5

$X_{11}, X_{12}, X_{14}, X_{21}, X_{23}, X_{32}$

$C = 3(3) + 7(1) + 4(1) + 2(0) + 3(2) + 3(3) = 35$

$C_{ij} - u_i - v_j$

$3 = \cancel{u_1} + v_1 \rightarrow v_1 = 3$

$7 = \cancel{u_1} + v_2 \rightarrow v_2 = 7$

$4 = \cancel{u_1} + v_4 \rightarrow v_4 = 4$

$2 = u_2 + v_1 \rightarrow u_2 = -1$

$3 = u_2 + v_3 \rightarrow v_3 = 4$

$3 = u_3 + v_2 \rightarrow u_3 = -4$

$(1,3) = 6 - 0 - 4 = 2$

$(2,2) = 4 - (-1) - 7 = -2$

$(2,4) = 2 - (-1) - 4 = -1$

$(3,1) = 4 - (-4) - 3 = 5$

$(3,3) = 8 - (-4) - 4 = 8$

$(3,4) = 5 - (-4) - 4 = 5$

	+3 3 0	7 1 − 0	6 2	4 1 0	5
	−2 0 0	4 + −2	3 2 0	2 −1	2
	4 5	3 3 0	8 8	5 5	3
	3	4	2	1	

x_{11} 3 3	x_{12} 7 1	x_{13} 6	x_{14} 4 1
x_{21} 2	x_{22} 4 0	x_{23} 3 2	x_{24} 2
x_{31} 4	x_{32} 3 3	x_{33} 8	x_{34} 5

x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{32}

$C = 3(3) + 7(1) + 4(1) + 4(0) + 3(2) + 3(3)$

$C = 35$

METODO DE APROXIMACION DE VOGEL

	D_1	D_2	D_3	D_4	Recursos	DiF
F_1	3	7	6	4	5	1
F_2	2	4	3 2	2	2 0	0
F_3	4	3	8	5	3	1
Dda	3	4	2 0	1		
DiF	1	1	3	2		

	D_1	D_2	D_3	D_4		DiF.
F_1	3 3	7 1	6	4 1	5 2 1	1
F_2	2	4 0	3 2	2	2 0	0
F_3	4	3 3	8	5	3 0	1
	3 0	4 1 0	2 0	1 0		
DiF	1	1	3	2		
	1	4	2	1		

x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{32}

$C = 35$

PROGRAMACION NO LINEAL Y LAS CONDICIONES DE KUHN-TUCKER.

CASO 1: MAXIMIZACION CON n VARIABLES DE ELECCION Y DOS RESTRICCIONES

$$\text{Max } Z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

s.a

$$g^1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq r_1$$

$$g^2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq r_2$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

$$L = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + \lambda_1[r_1 - g^1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)] + \lambda_2[r_2 - g^2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)]$$

CONDICIONES DE KUHN-TUCKER ≈ C.P.O

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = L_i = f_i - \lambda_1 g_i^1 - \lambda_2 g_i^2 \leq 0 \; ; \; x_i \geq 0, \; x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = L_{\lambda_1} = r_1 - g^1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \geq 0 \, , \; \lambda_1 \geq 0, \; \lambda_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = L_{\lambda_2} = r_2 - g^2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \geq 0, \; \lambda_2 \geq 0, \; \lambda_2 \cdot \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0$$

Caso de n variables y m restricciones.

$$\text{Max } Z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

s.a

$$g^1(x_1, x_2, \ldots x_n) \leq r_1$$

$$g^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq r_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$g^m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq r_m$$

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1[r_1 - g^1(x_1, x_2, \ldots, x_n)] + \lambda_2[r_2 - g^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)] + \cdots + \lambda_m[r_m - g^m(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [r_i - g^i(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

C. DE KUHN-TUCKER

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \leq 0 \; , \; x_j \geq 0 \; , \; x_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{maximización})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \geq 0 \; , \; \lambda_i \geq 0 \; , \; \lambda_i \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right)$$

$$\text{Min } Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

s.a

$$g^1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq r_1$$

$$g^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq r_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$g^m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq r_m$$

COND. DE KUHN-TUCKER

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \geq 0, \; x_j \geq 0 \; , \; x_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \leq 0, \; \lambda_i \geq 0 \; , \; \lambda_i \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$$

Ejemplo:

$$\text{MAX } U = u(X,Y)$$
s.a
$$P_x X + P_y Y \leq R$$
$$X \leq X_0$$
$$X, Y \geq 0$$

$$L = U(X,Y) + \lambda_1 [R - P_x X - P_y Y] + \lambda_2 [X_0 - X]$$

COND DE KUHN-TUCKER

$$\frac{\partial L}{\partial X} = L_x = U_x - P_x\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \,, \quad X \geq 0 \quad y \quad X \cdot L_x = 0$$

$$L_y = U_y - P_y \lambda_1 \leq 0 \,, \quad Y \geq 0 \quad y \quad Y \cdot L_y = 0$$

$$L_{\lambda_1} = R - P_x X - P_y Y \geq 0 \,, \quad \lambda_1 \geq 0 \quad y \quad \lambda_1 \cdot L_{\lambda_1} = 0$$

$$L_{\lambda_2} = X_0 - X \geq 0 \,, \quad \lambda_2 \geq 0 \quad y \quad \lambda_2 \cdot L_{\lambda_2} = 0$$

1° $\lambda_1 L_{\lambda_1} = 0$

$$\underline{\lambda_1} (\underline{R - P_x X - P_y Y}) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad ó \quad R - P_x X - P_y Y = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \checkmark$$

2° $\lambda_2 \cdot L_{\lambda_2} = 0 \longrightarrow \lambda_2 \cdot (X - X_0) = 0$

$$\lambda_2 = 0 \quad ó \quad (X_0 - X) = 0$$

$$\lambda_2 = 0 \checkmark$$

Ejemplo 2:

$$\text{Max } U = XY$$
s.a
$$X + Y \leq 100$$
$$X \leq 40$$
$$X, Y \geq 0$$

$$L = XY + \lambda_1 (100 - X - Y) + \lambda_2 (40 - X)$$

C. DE KUHN-TUCKER

$$L_x = Y - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \,, \quad X \geq 0 \quad y \quad X \cdot L_x = 0$$

$$L_y = X - \lambda_1 \leq 0 \,, \quad Y \geq 0 \quad y \quad Y \cdot L_y = 0$$

$$L_{\lambda_1} = 100 - X - Y \geq 0 \,, \quad \lambda_1 \geq 0 \quad y \quad \lambda_1 \cdot L_{\lambda_1} = 0$$

$$L_{\lambda_2} = 40 - X \geq 0 \,, \quad \lambda_2 \geq 0 \quad y \quad \lambda_2 \cdot L_{\lambda_2} = 0$$

Si $X = 0$ ó $Y = 0$, $U = XY = 0$

$$L_x = L_y = 0$$

$$L_x = y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \rightarrow$$

$$L_y = x - \lambda_1 = 0 \rightarrow \boxed{x = \lambda_1}$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$y - \lambda_1 = 0$$

$$\boxed{y = \lambda} \quad , \quad \boxed{x = y}$$

$$x + y \leq 100 \rightarrow x + y = 100 \rightarrow x = y = 50$$

$$x^* = 40 \quad , \quad y^* = 60$$

$$\lambda_2^* = 20 \quad , \quad \lambda_1^* = 40$$

$$Z^* = 40 \times 60 = 2400$$

$$\text{Min} \quad C = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

s.a

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$-3x_1 - 2x_2 \geq -12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$L = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + \lambda_1(6 - 2x_1 - 3x_2) + \lambda_2(-12 + 3x_1 + 2x_2)$$

C. DE KUHN-TUCKER

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = L_{x_1} = 2(x_1 - 4) - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 0, \quad x_1 \geq 0 \text{ y } x_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$L_{x_2} = 2(x_2 - 4) - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \text{ y } x_2 \cdot \frac{\partial L}{x_2} \quad 0$$

$$L_{\lambda_1} = 6 - 2x_1 - 3x_2 \leq 0, \quad \lambda_1 \geq 0 \text{ y } \lambda_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0$$

$$L_{\lambda_2} = -12 + 3x_1 + 2x_2 \leq 0, \quad \lambda_2 \geq 0 \text{ y } \lambda_2 \cdot \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0$$

$$\lambda_1 > 0 \text{ y } \lambda_2 > 0$$

$$6 - 2x_1 - 3x_2 = 0 \rightarrow 2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$-12 + 3x_1 + 2x_2 = 0 \rightarrow 3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$x_1 = \frac{24}{5} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{6}{5}$$

Si $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$

$$2(x_1 - 4) - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad 2(x_2 - 4) - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$4x_1 - 16 - 4\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad 6x_2 - 24 - 9\lambda_1 + 6\lambda_2$$

$$4x_1 - 16 - 4\lambda_1 + 6\lambda_2 -$$
$$6x_2 - 24 - 9\lambda_1 + 6\lambda_2$$
$$4x_1 - 6x_2 + 5\lambda_1 + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$4x_1 - 6x_2 + 8 = 0$$

$$\lambda_2 \neq 0$$

$$3x_1 + 2x_2 = 12$$
$$4x_1 - 6x_2 = -8$$

$$x_1 = \frac{28}{13} \quad y \quad x_2 = \frac{36}{13}$$

$$4x_1 - 16 - 4\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0$$
$$6x_2 - 24 - 9\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0$$

$$4\left(\frac{28}{13}\right) - 16 - 4\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0$$
$$6\left(\frac{36}{13}\right) - 24 - 9\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad y \quad \lambda_2 = \frac{16}{13} > 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad y \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

Ejemplo aplicativo:

$$\max \ U = (x, y)$$
s.a
$$P_x x + P_y y \leq B$$
$$C_x x + C_y y \leq C$$
$$x, y \geq 0$$

$$L = U(x,y) + \lambda_1 (B - P_x x - P_y y) + \lambda_2 (C - C_x x - C_y y)$$

C. DE KUHN-TUCKER

$$L_x = U_x - \lambda_1 P_x - \lambda_2 C_x \leq 0, \quad x \geq 0 \quad y \quad x.L_x = 0$$

$$L_y = U_y - \lambda_1 P_y - \lambda_2 C_y \leq 0, \quad y \geq 0 \quad y \quad y.L_y = 0$$

$$L_{\lambda_1} = B - P_x x - P_y y \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0 \quad y \quad \lambda_1 . L_{\lambda_1} = 0$$

$$L_{\lambda_2} = C - C_x x - C_y y \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0 \quad y \quad \lambda_2 L_{\lambda_2} = 0$$

$$\max \ U = xy^2, \quad B = 100, \quad P_x = P_y = 1, \quad C = 120 \quad y \quad C_x = 2, \ C_y = 1$$

$$\max \ U = xy^2$$
s.a
$$x + y = 100$$
$$2x + y = 120$$
$$x, y \geq 0$$

PLANTEAMIENTO DE PPNL:

Ejemplo ①

Un joven ingeniero de una compañía a ha sintetizado un nuevo fertilizante hecho a partir de dos materias primas. Al combinar cantidades de las materias primas básicas x_1 y x_2, la cantidad de fertilizante que se obtiene viene dada por $Q = 4x_1 + 2x_2 - 0.5x_1^2 - 0.25x_2^2$
Se requieren 480 dólares por unidad de materia prima 1 y 300 dólares por cada unidad de materia prima 2 que se empleen en la fabricación del fertilizante (en estas cantidades se incluyen los costos de las materias primas y los costos de producción).
Si la compañía dispone de 24000 dólares para la producción de materias primas, plantear el problema para determinar la cantidad de materia prima de forma que se maximice la cantidad de fertilizante.

Solución:

1° variables de decisión.

x_1: cantidad de materia prima 1

x_2: " " " " 2

$$\text{Max } Q = 4x_1 + 2x_2 - 0.5x_1^2 - 0.25x_2^2$$

s.a

$$480x_1 + 300x_2 \leq 24000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ejemplo ②

Una empresa produce frigoríficos y ha firmado un contrato para suministrar al menos 150 unidades en tres meses, 50 unidades al final del primer mes, 50 al final del segundo y 50 al final del tercero. El coste de producir una cantidad de frigoríficos en cualquier mes es su cuadrado. La empresa puede producir si lo desea más frigoríficos de los que necesita en cualquier mes y guardarlos para el siguiente, siendo el coste de almacenaje de 12 dólares por unidad al mes. Suponiendo que no hay inventario inicial, formular el programa adecuado para determinar el número de frigoríficos que deben producirse cada mes, para minimizar el costo total.

Solución:

Las variables de decisión:

x_1: número de frigoríficos a producir en el primer mes

x_2: " " " " " " " segundo "

x_3: " " " " " " " tercer "

Minimizar costos = costo de producción + costo de almacenaje del segundo mes + costo de almacenaje del tercer mes

costo de producción $= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

costo de almacenaje 2do mes $= 12(x_1 - 50)$

" " " 3er mes $= 12(x_1 + x_2 - 50)$

$$\text{Min } Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 12(x_1 - 50) + 12(x_1 + x_2 - 50)$$

s.a

$$x_1 \geq 50$$

$$x_1 - 50 + x_2 \geq 50$$

$$x_1 + x_2 - 100 + x_3 \geq 50$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

PROGRAMACION ENTERA

CLASIFICACION DE LOS PROBLEMAS DE ACUERDO A LAS VARIABLES.

① ENTEROS PUROS:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

s.a:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

② MIXTOS:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

s.a

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \in \mathbb{Z}, \quad x_2 \geq 0$$

③ BINARIOS:

$$\max Z = x_1 - x_2$$

s.a:

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 = \{0, 1\}$$

Problema ①

Una zapatería está analizando la posibilidad de expandir su mercado y está pensando en abrir una fábrica en Ecuador y otra en Brasil, así como construir un sólo almacén, sin embargo, hay una restricción y es si en el almacén tiene que haber fábrica. Se cuenta con un capital de 10 millones de pesos, teniendo en cuenta que:

	Beneficio	Capital requerido
X1= Construir la fábrica en Ecuador:	9 millones	6 millones
X2= Construir la fábrica en Brasil	5 millones	3 millones
X3= Construir almacén en Ecuador	6 millones	5 millones
X4= Construir almacén en Brasil:	4 millones	2 millones

Las variables de decisión puede tomar el valor de 1 si se construye o de 0 si no se construye.

Solución:

Función objetivo:

$$\max Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Restricciones

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 \leq x_1 \\ x_4 \leq x_2 \end{array}\right\} \text{se construye la fábrica sólo si se construye el almacén.}$$

$$6x_1 + 3x_1 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = \{0, 1\}$$

$$\text{Max } Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

s.a:

$$x_3 + x_4 \le 1$$
$$-x_1 + x_3 \le 0$$
$$-x_2 + x_4 \le 0$$
$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 = \{0, 1\}$$

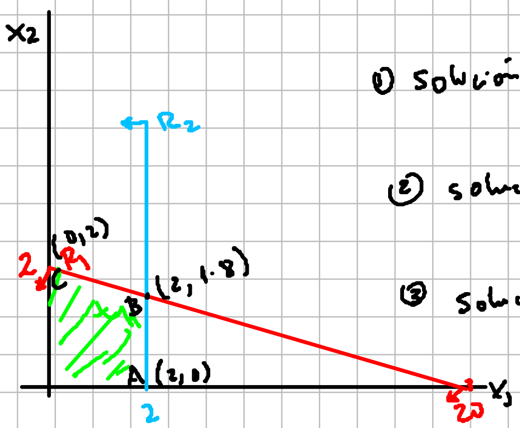
METODOS DE SOLUCION:

① METODO DE REDONDEO DE LA SOLUCION DE PROGRAMACION LINEAL

$$\text{max } Z = x_1 + 5x_2$$

s.a:

$$x_1 + 10x_2 \le 20 \longrightarrow x_1 + 10x_2 = 20 \rightarrow x_2 = 2 - 1/10\, x_1 \rightarrow R_1$$
$$x_1 \le 2 \longrightarrow x_1 = 2 \rightarrow x_1 = 2 \rightarrow R_2$$
$$x_1, x_2 \in Z^+$$



① solución modelo relajado (PL): $x_1 = 2$, $x_2 = 1.8$
$Z = 11$

② solución con redondeo: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$
$Z = 7$

③ solución óptima de PE: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$
$Z = 10$

② METODO DE ENUMERACION COMPLETA:

- Si hay 2 variables binarias, 4 soluciones posibles.
- Si hay 50 " " , 2^{50} " "

Ejemplo:

$$\text{Max } Z = 300x_1 + 90x_2 + 400x_3 + 150x_4$$

s.a:

$$35x_1 + 10x_2 + 25x_3 + 90x_4 \le 120$$
$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 \le 12$$
$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ binarios 0 ó 1} = \{0, 1\}$$

Existen $2^4 = 16$ alternativas de solución:

x_1	x_2	x_3	x_4	Factible?	Z
0	0	0	0	si	0
0	0	0	1	si	150
0	0	1	0	si	400
0	0	1	1	si	550
0	1	0	0	si	90
0	1	0	1	si	240
0	1	1	0	si	490
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~NO~~	~~640~~
1	0	0	0	si	300
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~NO~~	~~450~~
1	0	1	0	si	700 ✓

~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~NO~~	~~850~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~NO~~	~~640~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~NO~~	~~540~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~NO~~	~~740~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~NO~~	~~940~~

∴ La solución óptima es: $x_1 = x_3 = 1$, $x_2 = x_4 = 0$, $Z^* = 700$ ✓

3. Método de ramificación y acotación (Branch and Bound)

El método de ramificación y acotación o también llamado Branch and Bound, resuelve el problema de tal forma que si la solución a este verifica condiciones de integridad, entonces también es la solución al problema entero, de lo contrario se comienza con la ramificación del problema.

La ramificación consiste en dividir cada problema en dos nuevos subproblemas, obtenidos mediante el uso de restricciones excluyentes que dividen el conjunto de oportunidades del problema original en dos partes, pero eliminando en ambas partes la solución no entera del problema original.

Cuando en la solución al problema una variable que es entera xi toma el valor xbi no entero, entonces se generan, a partir de dicho valor, dos restricciones xi ≤ [xbi] y xi ≥ [xbi]+1 (siendo [xbi] la parte entera por defecto de xbi).

Ejemplo 1

$$\max Z = 4x_1 + 5x_2$$

s.a

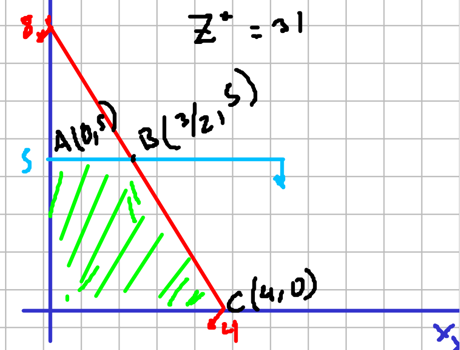
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros}$$

$x_1^* = 3/2$, $x_2 = 5$

$Z^* = 31$

solución:

$$2x_1 + x_2 = 8 \rightarrow x_2 = 8 - 2x_1$$
$$x_2 = 5 \rightarrow x_2 = 5$$



∴ A partir de x_1 que no es entera se generan dos restricciones.

$$x_1 \leq 1 \quad y \quad x_1 \geq 2$$

Escribiendo dos nuevos sub problemas.

$$\max Z = 4x_1 + 5x_2$$

s.a

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros}$$

$$\max Z = 4x_1 + 5x_2$$

s.a

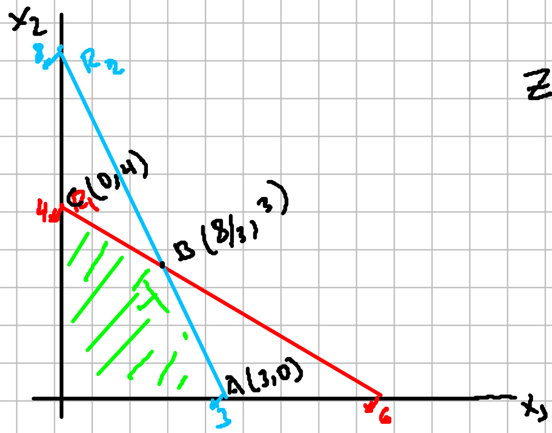
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros}$$

Exemplo ②

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2$$
s.a:
$$4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \in Z^+$$

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2$$
s.a
$$4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$4x_1 + 6x_2 = 24 \rightarrow x_2 = 4 - 2/3\, x_1 \rightarrow R_1$$
$$8x_1 + 3x_2 = 24 \rightarrow x_2 = 8 - 8/3\, x_1 \rightarrow R_2$$



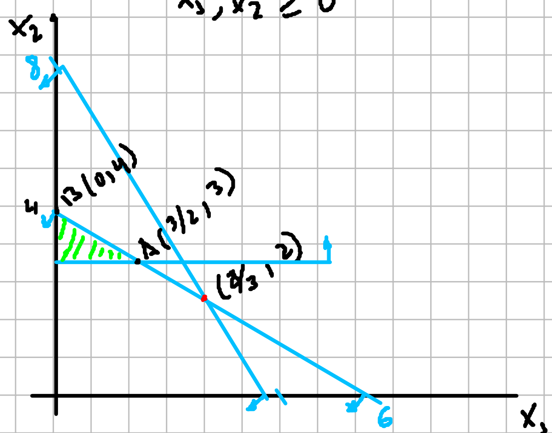
$x_1 = 2$, $x_2 = 8/3$

$Z^* = 128/3$

Gerando subproblemas:

Subpr. 1

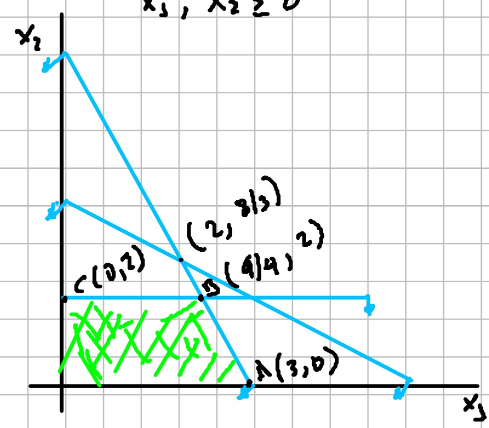
$$\max Z = 8x_1 + 10x_2$$
s.a
$$4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$x_1 = 3/2$, $x_2 = 3$, $Z = 42$

Subpr. 2

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2$$
s.a
$$4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$x_1 = 9/4$, $x_2 = 2$, $Z = 38$

Subpro. 1.1

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2$$
s.a
$$4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$x_2 \geq 3$$
$$x_1 \leq 1$$

Subpro. 1.2

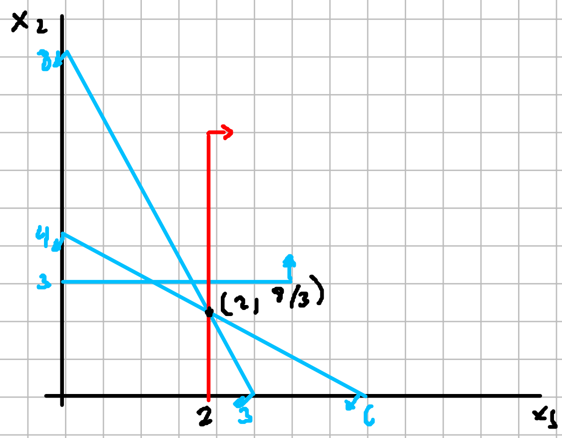
$$\max Z = 8x_1 + 10x_2$$
s.a
$$4x_1 + 6x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$x_2 \geq 3$$
$$x_1 \geq 2$$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 = 1, \; x_2 = 10/3, \; Z = 124/3$

$x_1, x_2 \geq 0$

solución infactible



Sub prob. 1.1.1

$\max Z = 8x_1 + 10x_2$

s.a:

$4x_1 + 6x_2 \leq 24$

$8x_1 + 3x_2 \leq 24$

$x_2 \geq 3$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 = 1, \; x_2 = 3, \; Z = 38$

Subprob. 1.1.2

$\max Z = 8x_1 + 10x_2$

s.a

$4x_1 + 6x_2 \leq 24$

$8x_1 + 3x_2 \leq 24$

$x_2 \geq 3$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 = 0, \; x_2 = 4, \; Z = 40$

$\therefore \quad x_1^* = 0, \; x_2^* = 4, \; Z^{opt} = 40$