Prueba de Optimalidad

La prueba de optimalidad estándar del método símplex para el problema de transporte, se puede reducir de la siguiente manera:

> Una solución básica factible es óptima si y sólo si $c_{ij}-u_i-v_j \geq 0$ para toda (i,j) tal que x_{ij} es no básica.

Así, lo único que hay que hacer para realizar esta prueba es obtener los valores de u_i y v_j para la solución básica factible actual y después calcular los valores $c_{ij}-u_i-v_j$ según se describe enseguida.

Como el valor de $c_{ij}-u_i-v_j$ debe ser cero si x_{ij} es una variable básica, u_i y v_j satisfacen el conjunto de ecuaciones:

$$c_{ij} = u_i + v_j \qquad \text{para cada (i,j) tal que } x_{ij} \text{ es básica.}$$

Existen m+n–1 variables básicas y por tanto hay m+n–1 ecuaciones de este tipo. Como el número de incógnitas (las u_i y v_j) es m+n, se puede asignar un valor arbitrario a cualquiera de estas variables sin violar las ecuaciones. La elección de esta variable y su valor no afecta el valor de ningún $c_{ij}-u_i-v_j$, aun cuando x_{ij} sea no básica, por lo que la única diferencia (menor) estriba en la facilidad para resolver estas ecuaciones. Una elección conveniente para lograr esto es seleccionar la u_i que tiene el *mayor número de asignaciones en su renglón* (los empates se rompen de manera arbitraria) y asignarle un valor de cero. Gracias a la sencilla estructura de estas ecuaciones, resulta muy fácil obtener algebraicamente los valores del resto de las variables.

Para ejemplificar la prueba de optimalidad, consideremos la *solución inicial básica factible* obtenida por la regla de la esquina noroeste para nuestro ejemplo en cuestión:

	v_1	v_2	v_3	v_4	Recursos	u_i
u_1	[3] 3	[7] 2	[6]	[4]	5	
u_2	[2]	[4] 2	[3]	[2]	2	
u_3	[4]	[3] 0	[8] 2	[5] 1	3	
Demanda	3	4	2	1	***Costo=52***	
v_j						

Para este problema, existen m+n–1=3+4–1=6 variables básicas, que dan origen al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$3 = u_1+v_1$$
$$7 = u_1+v_2$$
$$4 = u_2+v_2$$
$$3 = u_3+v_2$$

$$8 = u_3+v_3$$
$$5 = u_3+v_4$$

Observemos que resultaron ser 6 ecuaciones que involucran 7 incógnitas (tres de las u_i y cuatro de las v_j), por lo que este sistema de ecuaciones no es cuadrado. La forma de resolverlo es dando un valor arbitrario a una de las incógnitas, para que, a partir de él encontremos el valor de las demás. La regla para hacer esta asignación arbitraria nos dice que sea para la u_i (ó renglón) que haya tenido el mayor número de asignaciones. En nuestro ejemplo, el renglón 1 tuvo dos asignaciones, el renglón 2 tuvo una asignación y por último el tercer renglón tuvo tres asignaciones, por lo que asignamos el valor de cero a la incógnita u_3. De esta asignación resulta lo siguiente:

$$\begin{array}{ll}
3 = u_1+v_1 & \\
7 = u_1+v_2 & \\
4 = u_2+v_2 & \\
3 = \cancel{u_3}+v_2 & \rightarrow v_2 = 3 \\
8 = \cancel{u_3}+v_3 & \rightarrow v_3 = 8 \\
5 = \cancel{u_3}+v_4 & \rightarrow v_4 = 5
\end{array}$$

Hemos obtenido el valor de tres incógnitas más, v_2, v_3 y v_4, los cuales nos ayudarán para hallar el valor de las incógnitas restantes:

$$\begin{array}{ll}
3 = u_1+v_1 & \text{si } u_1=4,\text{ entonces } v_1= -1 \\
7 = u_1+v_2 & \text{si } v_2=3,\text{ entonces } u_1= 4 \\
4 = u_2+v_2 & \text{si } v_2=3,\text{ entonces } u_2= 1 \\
3 = \cancel{u_3}+v_2 & \rightarrow v_2 = 3 \\
8 = \cancel{u_3}+v_3 & \rightarrow v_3 = 8 \\
5 = \cancel{u_3}+v_4 & \rightarrow v_4 = 5
\end{array}$$

De esta forma hemos obtenido el valor de todas las incógnitas y procedemos a colocarlos en la tabla como sigue:

	v_1	v_2	v_3	v_4	Recursos	u_i
u_1	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{7}$ 2	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	5	**4**
u_2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	2	**1**
u_3	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{8}$ 2	$\boxed{5}$ 1	3	**0**
					Costo=52	
Demanda	3	4	2	1		
v_j	**–1**	**3**	**8**	**5**		

Ahora calculemos los valores $c_{ij}–u_i–v_j$ para las variables no básicas, ya que para las básicas, este valor es cero (por la forma de las ecuaciones con que se hallaron los valores de las incógnitas u_i y v_j), y coloquemos estos valores en la esquina inferior izquierda de cada celda:

Para la celda (1,3): 6 – 4 – 8 = –6

Para la celda (1,4): 4 – 4 – 5 = –5
Para la celda (2,1): 2 – 1 – (–1) = 2
Para la celda (2,3): 3 – 1 – 8 = –6
Para la celda (2,4): 2 – 1 – 5 = –4
Para la celda (3,1): 4 – 0 – (–1) = 5

	v_1	v_2	v_3	v_4	Recursos	u_i
u_1	3 3 0	7 2 0	6 –6	4 –5	5	**4**
u_2	2 2	4 2 0	3 –6	2 –4	2	**1**
u_3	4 5	3 0 0	8 2 0	5 1 0	3	**0**
Demanda	3	4	2	1	***Costo=52***	
v_j	**–1**	**3**	**8**	**5**		

En este momento se puede aplicar la prueba de optimalidad para verificar los valores de $c_{ij}–u_i–v_j$ obtenidos. Como cuatro de estos valores ($c_{13}–u_1–v_3= –6$, $c_{14}–u_1–v_4= –5$, $c_{23}–u_2–v_3= –6$, $c_{24}–u_2–v_4= –4$), son negativos, se concluye que la solución básica factible actual no es óptima. Entonces, el método símplex de transporte debe proceder a hacer una iteración para encontrar una mejor solución básica factible.

Una iteración.

Igual que para método símplex estándar, una iteración del método símplex de transporte debe determinar una variable básica entrante (paso 1), una variable básica que sale (paso 2) y después identificar la nueva solución básica factible que resulta (paso 3).

Paso 1: como $c_{ij}–u_i–v_j$ representa la tasa a la que cambia la función objetivo si se incrementa la variable no básica x_{ij}, la variable que entra debe tener un valor de $c_{ij}–u_i–v_j$ *negativo*, para que el costo total Z disminuya. Entonces, los candidatos en la tabla anterior son x_{13}, x_{14}, x_{23} y x_{24}. Entre ellos se elige el valor negativo más grande (en términos absolutos) de $c_{ij}–u_i–v_j$ como la variable básica entrante, que en este caso corresponde a x_{13} y x_{23}. En los casos en que haya empate para la elección de la variable básica entrante, este empate se rompe de manera arbitraria, ya que tarde o temprano llegaremos a la misma solución independientemente de la elección de la variable. Pero, observemos lo siguiente: ya que debemos elegir la variable básica “entrante, es decir, aquella que comenzará a tener un valor (ya que antes no lo tenía porque era variable no básica), entonces, es conveniente que elijamos aquella que tenga el costo menor, ya que el valor de la variable entrante multiplicado por su respectivo costo será la contribución al costo total. En nuestro caso, el costo asociado a x_{13} es 6 y el costo asociado a x_{23} es 3, por lo que la variable que debemos elegir como entrante es x_{23}.

Paso 2: si se incrementa el valor de la variable básica entrante, se establece una ***reacción en cadena*** de cambios compensatorios en otras variables básicas (asignaciones) para seguir satisfaciendo las restricciones de recursos y demanda. La primera variable básica que disminuya su valor hasta cero será la *variable básica que sale*. En general, siempre existe sólo *una* reacción en cadena (en cualquier dirección) que se puede completar con éxito para conservar la factibilidad, cuando la variable básica entrante aumenta su valor. Esta reacción en cadena se puede identificar si se hace una selección entre las celdas que tienen variables básicas: primero, la **celda donadora** en la *columna* que tiene la variable básica; después, la **celda receptora** en el *renglón* que corresponde a la celda donadora; luego, la celda donadora en la columna en que se encuentra esta celda receptora, y así sucesivamente, hasta que la reacción en cadena conduce a una celda donadora en el *renglón* que tiene a la variable básica entrante. Cuando una columna o renglón tiene más de una celda adicional con variable básica, puede ser necesario explorar el camino que se va a seguir para averiguar cuál debe seleccionarse como celda donadora o receptora. (Todas las demás menos la adecuada llegarán tarde o temprano a un camino sin salida en un renglón o columna que no tiene otra celda con una variable básica). Después de identificar la reacción en cadena. La celda donadora que tiene la asignación *menor* proporciona en forma automática la variable básica que sale. (En caso de un empate para la celda donadora, se puede elegir cualquiera para proporcionar la variable básica que sale).

Si x_{23} es la variable básica entrante, la reacción en cadena de la tabla anterior se resume enseguida. (Siempre se indicará la variable básica entrante colocando un signo + encuadrado dentro de su celda):

	v_1	v_2	v_3	v_4	Recursos	u_i
u_1	3 3 0	7 2 0	6 –6	4 –5	5	**4**
u_2	2 2	4 2 0	3 + –6	2 –4	2	**1**
u_3	4 5	3 + 0 0	8 – 2 0	5 1 0	3	**0**
Demanda	3	4	2	1	***Costo=52***	
v_j	**–1**	**3**	**8**	**5**		

Al aumentar x_{23} debe disminuir x_{33} en la misma cantidad para conservar la demanda de 2 en la columna 3; esto a su vez requiere que se aumente x_{32} en esa cantidad para mantener la oferta de 3 en el renglón 3 y esto a su vez exige una disminución en el valor de x_{22} para conservar la demanda de 4 en la columna 2. Esta disminución en x_{22} completa con éxito la reacción en cadena ya que también conserva la oferta del renglón 2.

El resultado final es que las celdas (2,3) y (3,2) se convierten en **celdas receptoras**, cada una con su asignación adicional proveniente de las **celdas donadoras** (2,2) y (3,3). Estas celdas están indicadas en la tabla anterior por medio de los signos + y –). Observe que tuvo que elegirse la celda (3,2) como celda receptora para el renglón 3 y no la (3,4), ya que esta última no hubiera tenido celda donadora en la columna 4 para continuar la reacción en cadena. Note además que, a excepción de la variable básica entrante, *todas* las celdas receptoras y donadoras en la reacción en cadena deben corresponder a variables *básicas* en la solución básica factible actual.

Cada celda donadora disminuye su asignación en una cantidad exactamente igual al aumento que tiene la variable básica entrante (y las otras celdas receptoras). Entonces, la celda donadora que comienza con la asignación más pequeña –en este caso las celdas (2,2) y (3,3)– debe ser la primera en llegar a una asignación de cero conforme se incrementa la variable entrante x_{23}. Así, x_{22} ó x_{33} se pueden convertir en la variable básica que sale. Cuando existe empate para la variable básica que sale, éste puede romperse de manera arbitraria, es decir, eligiendo cualquiera de las variables donadoras con la asignación más pequeña como variable básica saliente. Como una regla empírica, podemos seleccionar como variable básica saliente aquélla que tenga asociado el mayor costo unitario, ya que como esta variable perderá completamente su valor (es decir, se convertirá de variable básica a variable no básica), esperaríamos que el costo total de transporte disminuya. Así, escogeríamos a x_{33} como variable básica saliente.

Paso 3: la *nueva solución básica factible* se identifica sumando el valor (antes de los cambios) de la variable básica que sale a las asignaciones de cada celda receptora y restando *esta misma cantidad* de las asignaciones de cada celda donadora. En la tabla anterior se observa que el valor de la variable básica que sale x_{33} es 2, por lo que esta porción de la tabla símplex de transporte cambia, como se ilustra en la siguiente tabla para la nueva solución. (Como x_{33} es no básica en la nueva solución, su nueva asignación es cero y ya no se muestra en la tabla).

	v_1	v_2	v_3	v_4	Recursos	u_i
u_1	3 3 0	7 2 0	6 –6	4 –5	5	
u_2	2 2	4 **0** 0	3 2 –6	2 –4	2	
u_3	4 5	3 **2** 0	8 0	5 1 0	3	
					Costo=40	
Demanda	3	4	2	1		
V_j						

En este momento se puede señalar una interpretación útil de las cantidades $c_{ij}-u_i-v_j$ que se obtienen en la prueba de optimalidad. Debido al cambio de 2 unidades en las asignaciones de las celdas donadoras a las receptoras, el costo total cambia en:

$$\Delta Z = 2(3-8+3-4) = 2(-6) = -12 = 2(c_{23}-u_2-v_3)$$

Es decir, el costo total de transporte se decrementa en 12 unidades con respecto al costo anterior que era de 52 unidades. Notemos que hemos obtenido una nueva política de transporte, la cual podemos resumir así:

La ***nueva solución básica factible*** es $x_{11}=3$, $x_{12}=2$, $x_{22}=0$ (variable básica degenerada), $x_{23}=2$, $x_{32}=2$ y $x_{34}=1$ y el costo total de transporte asociado es de:

$$\text{Costo} = \overset{x_{11}}{3}\ \overset{c_{11}}{(3)} + \overset{x_{12}}{2}\ \overset{c_{12}}{(7)} + \overset{x_{22}}{0}\ \overset{c_{22}}{(4)} + \overset{x_{23}}{2}\ \overset{c_{23}}{(3)} + \overset{x_{32}}{2}\ \overset{c_{32}}{(3)} + \overset{x_{34}}{1}\ \overset{c_{34}}{(5)} = 40\ \textit{unidades}$$

Antes de completar la solución del problema ejemplo, se hará un resumen de las reglas del método símplex de transporte.

Resumen del método símplex de transporte

Inicialización: Se construye una solución inicial básica factible. Se realiza la prueba de optimalidad.

Prueba de optimalidad: Se obtiene u_i y v_j eligiendo el renglón con el mayor número de asignaciones y estableciendo su $u_i = 0$, y después resolviendo el sistema de ecuaciones $c_{ij} = u_i+v_j$ para cada (i,j) tal que x_{ij} es básica. Si $c_{ij}-u_i-v_j \geq 0$ para toda (i,j) tal que x_{ij} es *no básica*, entonces la solución actual es óptima por lo que el proceso se detiene. De lo contrario, se regresa a una iteración.

***Iteración*:**

1. Se determina la variable básica entrante: se elige la variable no básica x_{ij} que tiene el valor *negativo más grande* (en términos absolutos) para $c_{ij}-u_i-v_j$.
2. Se determina la variable básica que sale identificando la reacción en cadena (*encontrar un circuito*) que se necesita para conservar la factibilidad cuando se aumenta el valor de la variable básica entrante. Entre las celdas donadoras se selecciona la variable básica que tiene el *menor* valor.
3. Se determina la nueva solución básica factible: se suma el valor de la variable básica que sale a las asignaciones de las celdas receptoras y se resta este valor a las asignaciones de las celdas donadoras.

Continuando con la aplicación de este procedimiento a nuestro problema, tenemos que calcular los nuevos valores de las u_i y v_j y después los valores $c_{ij}-u_i-v_j$ correspondientes a las variables no básicas para determinar si todos cumplen con la prueba de optimalidad: Nuevamente existen m+n–1=3+4–1=6 variables básicas, que dan origen al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
3 &= u_1+v_1\\
7 &= u_1+v_2\\
4 &= u_2+v_2\\
3 &= u_2+v_3\\
3 &= u_3+v_2\\
5 &= u_3+v_4
\end{aligned}
$$

Observemos que nuevamente resultaron ser 6 ecuaciones que involucran 7 incógnitas (tres de las u_i y cuatro de las v_j). Ya que hay empate en el número de asignaciones que tiene cada renglón (2 asignaciones en cada renglón), asignemos el valor de cero a la incógnita u_1. De esta asignación resulta lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
3 &= \cancel{u_1}+v_1 && \rightarrow v_1=3\\
7 &= \cancel{u_1}+v_2 && \rightarrow v_2=7\\
4 &= u_2+v_2\\
3 &= u_2+v_3\\
3 &= u_3+v_2\\
5 &= u_3+v_4
\end{aligned}
$$

Hemos obtenido el valor de dos incógnitas más, v_1, y v_2, los cuales nos ayudarán para hallar el valor de las incógnitas restantes:

$$
\begin{aligned}
3 &= \cancel{u_1}+v_1 && \rightarrow v_1=3\\
7 &= \cancel{u_1}+v_2 && \rightarrow v_2=7\\
4 &= u_2+v_2 && \text{si } v_2=7\text{, entonces } u_2= -3\\
3 &= u_2+v_3 && \text{si } u_2= -3\text{, entonces } v_3=6\\
3 &= u_3+v_2 && \text{si } v_2=7\text{, entonces } u_3= -4\\
5 &= u_3+v_4 && \text{si } u_3= -4\text{, entonces } v_4=9
\end{aligned}
$$

De esta forma hemos obtenido el valor de todas las incógnitas y procedemos a colocarlos en la tabla como sigue:

	v_1	v_2	v_3	v_4	Recursos	u_i
u_1	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{7}$ 2	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	5	**0**
u_2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{3}$ 2	$\boxed{2}$	2	**–3**
u_3	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 2	$\boxed{8}$	$\boxed{5}$ 1	3	**–4**
Demanda	3	4	2	1	***Costo=40***	
v_j	**3**	**7**	**6**	**9**		

Ahora calculemos los valores $c_{ij}–u_i–v_j$ para las variables no básicas y coloquemos estos valores en la esquina inferior izquierda de cada celda:

Para la celda (1,3): 6 – 0 – 6 = 0
Para la celda (1,4): 4 – 0 – 9 = –5
Para la celda (2,1): 2 – (–3) – 3 = 2
Para la celda (2,4): 2 – (–3) – 9 = –4
Para la celda (3,1): 4 – (–4) – 3 = 5
Para la celda (3,3): 8 – (–4) – 6 = 6

	v_1	v_2	v_3	v_4	Recursos	u_i
u_1	$\boxed{3}$ 3 $\boxed{0}$	$\boxed{7}$ 2 $\boxed{0}$	$\boxed{6}$ $\boxed{0}$	$\boxed{4}$ $\boxed{-5}$	5	**0**
u_2	$\boxed{2}$ $\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 0 $\boxed{0}$	$\boxed{3}$ 2 $\boxed{0}$	$\boxed{2}$ $\boxed{-4}$	2	**–3**
u_3	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$	$\boxed{3}$ 2 $\boxed{0}$	$\boxed{8}$ $\boxed{6}$	$\boxed{5}$ 1 $\boxed{0}$	3	**–4**
					Costo=40	
Demanda	3	4	2	1		
v_j	**3**	**7**	**6**	**9**		

Aplicando la prueba de optimalidad para verificar los valores de $c_{ij}–u_i–v_j$ obtenidos, vemos que dos de estos valores ($c_{14}–u_1–v_4$= –5, $c_{24}–u_2–v_4$= –4) son negativos, se concluye que la solución básica factible actual no es óptima. Entonces, el método símplex de transporte debe proceder a hacer una iteración para encontrar una mejor solución básica factible. Aplicando el procedimiento descrito anteriormente, se llega al siguiente conjunto de tablas símplex de transporte que se muestra enseguida y que dan solución al problema planteado:

	v_1	v_2	v_3	v_4	Recursos	u_i
u_1	$\boxed{3}$ 3 $\boxed{0}$	$\boxed{7}$ – 2 $\boxed{0}$	$\boxed{6}$ $\boxed{0}$	$\boxed{4}$ $\boxed{}$ $\boxed{-5}$	5	**0**
u_2	$\boxed{2}$ $\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 0 $\boxed{0}$	$\boxed{3}$ 2 $\boxed{0}$	$\boxed{2}$ $\boxed{-4}$	2	**–3**
u_3	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$	$\boxed{3}$ + 2 $\boxed{0}$	$\boxed{8}$ $\boxed{6}$	$\boxed{5}$ – 1 $\boxed{0}$	3	**–4**
					Costo=40	
Demanda	3	4	2	1		
v_j	**3**	**7**	**6**	**9**		

	v_1	v_2	v_3	v_4	Recursos	u_i
u_1	$\boxed{3}$ **3** $\boxed{0}$	$\boxed{7}$ **1** $\boxed{0}$	$\boxed{6}$ $\boxed{0}$	$\boxed{4}$ **1** $\boxed{-5}$	5	
u_2	$\boxed{2}$ $\boxed{2}$	$\boxed{4}$ **0** $\boxed{0}$	$\boxed{3}$ **2** $\boxed{0}$	$\boxed{2}$ $\boxed{-4}$	2	
u_3	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$	$\boxed{3}$ **3** $\boxed{0}$	$\boxed{8}$ $\boxed{6}$	$\boxed{5}$ $\boxed{0}$	3	
Demanda	3	4	2	1	***Costo=35***	
v_j						

La ***nueva solución básica factible*** es $x_{11}=3$, $x_{12}=1$, $x_{14}=1$, $x_{22}=0$ (variable básica degenerada), $x_{23}=2$ y $x_{32}=3$ y el costo total de transporte asociado es de:

$$\text{Costo} = \overset{x_{11}}{3}\ \overset{c_{11}}{(3)} + \overset{x_{12}}{1}\ \overset{c_{12}}{(7)} + \overset{x_{14}}{1}\ \overset{c_{14}}{(4)} + \overset{x_{22}}{0}\ \overset{c_{22}}{(4)} + \overset{x_{23}}{2}\ \overset{c_{23}}{(3)} + \overset{x_{32}}{3}\ \overset{c_{32}}{(3)} = 35\ \textit{unidades}$$

Como en esta última tabla todas las $c_{ij}-u_i-v_j$ son no negativas (¡comprobarlo!), la prueba de optimalidad identifica este conjunto de asignaciones como óptimo, lo cual concluye el algoritmo.