Introducción

Hasta este momento se han presentado los detalles del método símplex asumiendo de que el problema es un problema de maximizar una función Z sujeto a restricciones funcionales de la forma <= con términos independientes en las restricciones no negativas y restricciones de no negatividad sobre todas las variables. En esta sección se establecerá cómo hacer los ajustes requeridos a otras formas legítimas de modelos de programación lineal (caso de mínimo por ejemplo). Se verá que todos estos ajustes se pueden hacer en el paso inicial, de manera que el resto del método símplex se aplica exactamente como se aprendió.

El problema que introducen las otras formas de restricciones funcionales (= ó >=) es obtener una solución básica posible inicial. Antes, al plantear el problema de programación lineal en su forma normal de máximo, esta solución básica posible inicial se encontraba en forma muy conveniente al ser las variables de holgura las variables básicas posibles iniciales, donde cada una era igual a la constante no negativa del lado derecho de la ecuación correspondiente. Ahora, si el problema no se encuentra en la forma conveniente aludida, es necesario utilizar la técnica de variables artificiales. Ésta técnica nos sugiere construir a partir del problema original un problema "artificial" o "ampliado" más conveniente introduciendo variables ficticias (o artificiales) en cada restricción que lo requiera. Esta nueva variable se introduce sólo con el fin de que constituya la variable básica posible inicial para esa ecuación. Las restricciones usuales de no negatividad también se aplican sobre estas variables y la función objetivo se modifica para que imponga una penalización exorbitante en el caso de que adquieran valores mayores que cero. Las iteraciones del método símplex automáticamente fuerzan a las variables artificiales a desaparecer (a volverse cero) una a una, hasta que todas quedan fuera de la solución; después de esto se resuelve el problema real.

Esta técnica de variables artificiales, para encontrar soluciones iniciales de modo que sea posible, tiene dos variantes los cuales son denominados:

a) Método de dos fases
b) Método de coeficientes de castigo

Método de dos fases

Este método resuelve el problema de programación lineal en dos fases. En la fase I se utiliza el algoritmo simplex para suministrar a la fase II una forma factible de partida. Es decir, el producto final de la Fase I es una solución básica posible (en caso de que exista), en forma típica, para iniciar la Fase II del método. El procedimiento a seguir es:

FASE 1:

$\Rightarrow$ **Plantear el problema en su forma normal de máximo**

Una vez puesto el problema en su forma normal de máximo, habiendo introducido las variables de holgura y/o excedentes correspondientes, el problema queda como sigue:

Max $Z = CX$

$\overline{P}_i X = b_i \qquad i \in M$

$X \geq 0$

$\Rightarrow$ **Plantear el problema de programación lineal "artificial"**

Se plantea un nuevo problema de programación lineal denominado artificial. Este nuevo problema de programación lineal debe incluir ciertas variables "U_i" denominadas artificiales. En tal sentido, la nueva función objetivo artificial será la siguiente:

Max $W = -\sum U_i$

Donde la función objetivo artificial es la suma de las variables artificiales "U_i" afectadas todas por el signo negativo.

Y las nuevas restricciones correspondientes serán:

$\overline{P}_i X \pm U_i = \pm b_i \qquad i \in M$

Donde en las restricciones las variables artificiales"U_i" tiene signo negativo o positivo según que b_i sea negativo o positivo.

Finalmente, los rangos de existencia quedarán expresadas como:

$X \geq 0 \qquad U_i \geq 0$

$\Rightarrow$ **Utilizar el algoritmo simplex para obtener la solución optima del problema de programación lineal "artificial"**

Siendo:

$\overline{U} = [\pm \overline{U}_i] = \pm b_i$

Y además,

$\overline{\overline{W}} = C^B \overline{\overline{U}}$

Según la estructura de la función artificial se pueden presentar los siguientes casos:

a) Que $\overline{\overline{W}}_{opt} = 0$ (Lo que implica que $\overline{\overline{U}} = 0$)

Siendo no básicas todas las variables artificiales. En este caso la base óptima para la función artificial está formado por las columnas de la matriz A y se puede utilizar dicha base para la resolución de la función objetivo real. (Se pasa a la segunda fase por lo que se le denomina método de dos fases).

b) Que $\overline{\overline{W}}_{opt} < 0$ (Lo que implica que $\overline{\overline{U}} > 0$)

En este caso no es posible que $\overline{\overline{W}}_{opt} = 0$ lo que significa que el problema no tiene base posible inicial.

FASE 2:

Utilizar la solución óptima de problema de programación lineal "artificial" obtenida en la Fase I como punto de partida para obtener la solución óptima del problema original, reemplazando la función objetivo original $\overline{Z}$ por la de $\overline{W}$ y sus correspondiente valores de la fila cero. Como es de esperar, la función objetivo original debe estar expresada en función de las variables básicas. Si al final de la Fase I las variables artificiales son no básicas, estas se eliminan de la Fase II. Si alguna variable artificial es básica, pero cero, esta variable se mantiene en el conjunto de variables básicas, pero debe garantizarse que su valor nunca será mayor que cero durante la ejecución de la Fase II.

Método de coeficientes de castigo

Este método también utiliza el algoritmo simplex para resolver el problema de programación lineal denominado "ampliado". El procedimiento a seguir es el siguiente:

$\Rightarrow$ **Plantear el problema en su forma normal de máximo**

Una vez puesto el problema en su forma normal de máximo, habiendo introducido las variables de holgura y/o excedentes correspondientes, el problema queda como sigue:

Max $Z = CX$

$\overline{P}_i X = b_i \qquad i \in M$

$X \geq 0$

$\Rightarrow$ **Plantear el problema de programación lineal "ampliado"**

Se plantea un nuevo problema de programación lineal denominado ampliado. Este nuevo problema de programación lineal debe incluir algunas variables "U_i"

denominadas artificiales tanto en la función objetivo como en las restricciones del problema original. En tal sentido, el problema de programación lineal ampliado será el siguiente:

Max $V = CX - M\sum U_i$

Sujeto a:

$\overline{P}_i X \pm U_i = \pm b_i \qquad i \in M$

Donde:

$X \geq 0 \qquad U_i \geq 0$

Es decir, la función objetivo del problema de programación lineal "ampliado" es formada por la función objetivo original más algunas variables artificiales afectadas por un coeficiente "-M". "M" tiene que ser un valor grande indeterminado para lograr que las variables artificiales salgan de la base al buscar el óptimo de la función objetivo. Adicionalmente, es necesario que en las restricciones se introduzcan las variables artificiales"U_i" con signo negativos o positivos según que b_i sea negativo o positivo.

$\Rightarrow$ Utilizar el algoritmo simplex para obtener la solución optima del problema de programación lineal "ampliado"

Siendo:

$\overline{U} = [\pm \overline{U}_i] = \pm b_i$

Y además,

$\overline{V} = C^B \overline{U}$

Según la estructura de la función artificial se pueden presentar los siguientes casos:

a) La solución óptima no incluye ninguna variable artificial. En cuyo caso se habrá logrado la solución del problema de programación lineal original.
b) La solución óptima incluye una o algunas variables artificiales. En este caso significa que el problema no tiene base posible inicial.