INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II
TALLER LÍNEAS DE ESPERA

1. Al banco *"La Tapita Feliz"* llegan clientes de acuerdo con una distribución de Poisson con promedio de 15 por hora. Las transacciones por cliente duran unos 5 minutos con distribución exponencial. Dependiendo del objetivo que el gerente disponga para la gestión del banco, el número de servidores variará. Calcule entonces el número de cajeros que debe tener el banco si el objetivo es alguno de los siguientes. Interprete y compare cada una de las respuestas que encontró en los puntos (a) y (b).

- **a.** Limitar a no más de 30 segundos el tiempo promedio de espera en cola
- **b.** La probabilidad de tener más de 5 clientes en cola debe ser cuando mucho de 0,1

2. En el taller *"La Naranja Mecánica"* se ha asignado a un técnico el mantenimiento de 3 máquinas. Para cada máquina, la distribución de probabilidad del tiempo de operación antes de descomponerse es exponencial con media de 9 horas. El tiempo de reparación también tiene distribución exponencial con media de 2 horas.

- **a.** Calcule la cantidad promedio de máquinas que esperan su restablecimiento
- **b.** Calcule la probabilidad de que todas las máquinas estén trabajando
- **c.** Calcule el tiempo promedio que una máquina está sin trabajar y el tiempo promedio que una máquina está sin trabajar y sin ser atendida
- **d.** Suponga ahora que las entradas son Poisson con una media de 3 cada 9 horas. Con base en los siguientes supuestos calcule nuevamente el punto (c) y realice una comparación exhaustiva de los resultados de los supuestos con los obtenidos en el punto (c):
  - La fuente de entrada es infinita
  - La fuente de entrada es infinita pero la cola es finita con $K = 3$

3. Una tienda de servicio por correo tiene una sola línea telefónica, atendida por una operadora que tiene instrucciones de mantener en espera a un máximo de 3 clientes en la línea mientras toma sus órdenes. Las llamadas llegan según una distribución de Poisson cada 5 minutos. El tiempo necesario para tomar cada orden es exponencial con un promedio de 6 minutos.

- **a.** Explique el motivo por el que a pesar de que $\mu < \lambda$, este sistema en particular no se desborda
- **b.** En promedio, ¿cuánto tiempo espera un cliente antes de ser atendido por la operadora?
- **c.** ¿Opina usted que el tiempo de espera obtenido en el punto (a) es razonable para una tienda de este tipo?
- **d.** Calcule nuevamente el punto ***b*** para varios valores del número máximo de clientes que se pueden mantener en espera y realice una gráfica en la que compare ambas variables. A partir de ella y de sus cálculos, sugiera cuál debería ser esa cantidad de clientes máximos en espera. Para este punto puede apoyarse en hoja de cálculo.

4. Un taller utiliza 10 máquinas idénticas. Cada máquina se descompone en promedio una vez cada 7 horas. Una persona puede reparar una máquina en 4 horas en promedio, pero el tiempo de reparación real varía según una distribución exponencial. Determine lo siguiente, interprete y compare las respuestas:

- **a.** El número mínimo de mecánicos que se necesita para que el número estimado de máquinas descompuestas sea menor que 4
- **b.** El número mínimo de mecánicos que se necesita de manera que la demora esperada hasta que se repare una máquina sea menor que 4 horas

1. $\lambda = 15 \frac{\text{Clientes}}{\text{hora}}$ $\mu = \frac{1 \text{ cliente}}{5 \text{ minutos}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ hora}} = 12 \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$

a) Se espera que el tiempo promedio en cola sea menos de 30 seg.

$W_q < 30 \text{ seg} \times \frac{1 \text{ hora}}{3600 \text{ s}} = 0{,}00833$ horas

Si $s = \#$ de servidores. $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s \cdot \mu}}}$$

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \cdot \rho}{s! (1-\rho)^2} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Si se tienen 2 cajeros $s = 2$.

$$\rho = \frac{15}{2 \cdot 12} = 0{,}625$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{(15/12)^n}{n!} + \frac{(15/12)^2}{2!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{15}{2 \cdot 12}}} = 0{,}2307$$

$$L_q = \frac{0{,}2307 \times (15/12)^2 \times 0{,}625}{2! (1 - 0{,}625)^2} = 0{,}8012$$

$$W_q = \frac{0{,}8012}{15} = 0{,}0534 > 0{,}00833$$

Usamos otro cajero: $s = 3$. Repetimos cálculos

$\rho = 0{,}4166$ $P_0 = 0{,}2786$ $L_q = 0{,}11105$ $W_q = 0{,}007403$

$0{,}007403 < 0{,}0083$

Con 3 cajeros el tiempo de espera en cola es

0,007403 horas = 26,65 seg.

b) $P(n \geq 5) < 0.1 \qquad P(n > 5) = 1 - P(n \leq 5)$

$P(n \leq 5) \geq 0.9 \qquad P(n \leq 5) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$

Con S cajeros

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \qquad 0 \leq n \leq s$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{S!\, S^{n-s}} \cdot P_0 \qquad n \geq s$$

$$\text{Con } P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{1}{1 - \lambda/s \cdot \mu}}$$

Con $\lambda = 15 \quad \mu = 12 \quad s = 2$

$P_0 = 0{,}2307 \qquad P_1 = \frac{(15/12)^1}{1!} P_0 = 0{,}2884 \qquad P_2 = \frac{(15/12)^2}{2!} \times P_0 = 0{,}1802$

$P_3 = \frac{(15/12)^3}{2!\, 2^{3-2}} \cdot P_0 = 0{,}1126 \qquad P_4 = \frac{(15/12)^4}{2!\, 2^{4-2}} \cdot P_0 = 0{,}0704$

$P_5 = \frac{(15/12)^5}{2!\, 2^{5-2}} \cdot P_0 = 0{,}044015$

$P(n \leq 5) = 0{,}2307 + 0{,}2884 + 0{,}1802 + 0{,}1126 + 0{,}0704 + 0{,}0440$

$= 0{,}9266$

$P(n > 5) = 1 - P(n \leq 5) = 0{,}0733$

Con 2 cajeros la probabilidad de tener más de 5 clientes

en sistema es 0,0733

Eso implica 3 clientes en cola

$P_6 = 0{,}0275 \qquad P_7 = 0{,}01719$

$P(n \leq 7) = 0{,}9713 \qquad P(n > 8) = 0{,}0286$

Con 2 cajeros la probabilidad de que existan más de 5 clientes en cola es de 0,0286.

2) $\lambda = 9$ horas $\longrightarrow$ 1 máquina.

$$\lambda = \frac{1}{9} \qquad \mu = \frac{1}{2} \qquad M = 3.$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\frac{3!}{(3-0)!} \cdot \left(\frac{0.11}{0.5}\right)^0 + \frac{3!}{(3-1)!} * \left(\frac{0.11}{0.5}\right)^1 + \frac{3!}{(3-2)!} * \left(\frac{0.11}{0.5}\right)^2 + \frac{3!}{(3-3)!} * \left(\frac{0.11}{0.5}\right)^3}$$

$$P_0 = 0,4929$$

$$P_n = \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * P_0$$

$$P_1 = \frac{3!}{(3-1)!} * \left(\frac{0.11}{0.5}\right)^1 * 0,4929 = 0,3286$$

$$P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} \left(\frac{0.11}{0.5}\right)^2 * 0,4929 = 0,03245$$

$$P_3 = \frac{3!}{(3-3)!} * \left(\frac{0.11}{0.5}\right)^3 * 0,4929 = 0,718$$

$$L = M - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \cdot (1 - P_0) = 3 - \left(\frac{0.5}{0.11}\right) * (1 - 0,4929)$$

$$L = 0,718$$

a) Cantidad de máquinas en restablecimiento

$L = 0,718$

b) Probabilidad de que todas estén trabajando

$P_0 = 0,4929$

c) $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{0,718}{0,11} = 6,52$ horas. tiempo que está sin trabajar.

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = 6{,}52 - \frac{1}{0{,}5} = 4{,}52$$ tiempo sin ser atendida.

3) $\lambda = \frac{1}{5\ \text{minutos}} = 0{,}2$ llamadas/minuto.

$\mu = \frac{1}{6\ \text{minutos}} = 0.166$ llamadas/minuto

$\mu < \lambda$

Es un sistema $M/M/1/k$

Si tiene capacidad $= 3 + 1 = 4$

3 en espera
1 en atención $K = 4$

Por eso el sistema no desborda, porque su capacidad máximo es 4

b) $P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.2}{0{,}166} = 1{,}2048$

$$P_0 = \frac{1 - 1.2048}{1 - 1.2048^{4+1}} = 0{,}1331$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}$$

$L = \frac{1.2048}{1-1{,}2048} - \frac{(4+1) \times 1{,}2048^5}{1 - 1{,}2048^5} = 2{,}3594$ ~~minutos~~ llamada

$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2{,}3594}{0{,}2} = 11{,}79$ minutos en sistema

$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 11{,}79 - \frac{1}{1/6} = 5{,}79$ minutos en espera.

c) El tiempo en espera de 5,79 minutos es muy alto para la tienda, muy seguramente el cliente abandona la llamada.

4) $\lambda = \dfrac{1 \text{ maq}}{7 \text{ horas}}$ $\mu = \dfrac{1 \text{ maq}}{4 \text{ horas}}$.

Es finita $K = 10$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/7}{1/4} = 0{,}5714$$

$$L = \frac{0{,}5714}{1-0{,}5714} - \frac{(10+1)\,0{,}5714^{10+1}}{1-0{,}5714^{10+1}} = 1{,}3099 \text{ máquinas.}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1{,}3099}{1/7} = 9{,}1696 \text{ horas en sistema.}$$

Con 1 mecánico se tiene 1,31 máquinas en el sistema (descompuestas) es menor 4.

b) $W_q < 4$ horas.

Si es un mecánico

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 9{,}1696 - \frac{1}{1/4} = 5{,}1696$$

Si se usan 2 mecánicos → modelo M/M/s con Población Finita.

$N = 10$ $s = 2$ mecánicos.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s} \frac{N!}{(N-n)!\,n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s+1}^{N} \frac{N!}{(N-n)!\,n!} \cdot \frac{n!}{s!\,s^{n-s}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$s=2 \quad N=10 \quad \lambda = \frac{1}{7} \quad \mu = \frac{1}{4}$

$P_0 = 0.001150$

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!\,n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 \qquad 0 \leq n \leq s.$$

$$\frac{N!}{(N-n)!\,n!} \cdot \frac{n!}{s!\,s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 \qquad n \geq s$$

$L_q = \cancel{\sum} \qquad L = \sum_{n=0}^{N} n P_n$

$P_1 = 0{,}0065 \quad P_2 = 0{,}0169 \quad P_3 = 0{,}0386 \quad P_4 = 0{,}07726$

$P_5 = 0{,}1324 \quad P_6 = 0{,}1892 \quad P_7 = 0{,}2162 \quad P_8 = 0{,}1853$

$P_9 = 0{,}1059 \quad P_{10} = 0{,}0302$

$L = 6{,}5155$ máquinas.

$\lambda_{efec} = \lambda(N - L) = \frac{1}{7}(10 - 6{,}5155) = 0{,}4977$

$W = \frac{L}{\lambda_{ef}} = \frac{6{,}5155}{0{,}4977} = 13{,}09$ horas