Forma general de un problema de Programación lineal

Los Ejemplos considerados muestran que los problemas de programación lineal pueden ser de optimización de máximo o de mínimo; las restricciones pueden ser de igualdad, o desigualdad del tipo $\leq$ ó $\geq$; y, las variables pueden ser no negativas o irrestrictas en signo (libres). Por tanto, un problema de programación lineal, en su forma general, puede ser representado como:

Max (Min) $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_nX_n$

Sujeto a:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \quad [\leq = \geq] \quad b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ... + a_{2n}X_n \quad [\leq = \geq] \quad b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + ... + a_{3n}X_n \quad [\leq = \geq] \quad b_3$$

………………..

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + ... + a_{mn}X_n \quad [\leq = \geq] \quad b_m$$

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_n \geq 0$$

Donde:

Z	Es el valor de la función objetivo.
X_j	Es el nivel de actividad j (una variable de decisión).
c_j	Es el incremento que resulta en **Z** por cada incremento unitario en X_j
b_i	Es la cantidad disponible del recurso i
a_{ij}	Es la cantidad de recurso i que consume cada unidad de la actividad j

Después de plantear un problema de programación lineal el siguiente paso es determinar cuales son los valores de las variables de decisión que optimizan la función objetivo. Pero debido a que los problemas planteado se presentan en variedad de formas en cuanto a la función objetivo, el tipo de restricciones y rangos de existencia, es necesario modificar estas formas de presentación para que se ajusten al procedimiento de solución ha utilizar. Todo problema de programación lineal puede plantearse en dos formas: Canónica y normal estándar

Forma Canónica de un PPL

Un problema está planteado en su forma canónica si la función objetivo es de máximo, sus restricciones son de desigualdad del tipo “menor o igual que” y sus variables de decisión son no negativas. Formalmente,

Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \qquad i = 1,2,3,..,m$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = 1,2,3,..,n$$

Forma normal estándar de un PPL

Max $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_nX_n$

Sujeto a:

$$\begin{array}{lcl}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n & = & b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ... + a_{2n}X_n & = & b_2 \\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + ... + a_{3n}X_n & = & b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + ... + a_{mn}X_n & = & b_m
\end{array}$$

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_n \geq 0$$

El cual puede escribirse también como,

Maximizar $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_j = b_i \qquad i = 1,2,3,..,m$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = 1,2,3,..,n$$

O alternativamente,

Maximizar $Z = CX$

Sujeto a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Definiciones Básicas

Solución del Sistema

Una vez verificada la indeterminación (m<n) el siguiente paso es resolver el sistema AX=b que tiene más variables que ecuaciones (restricciones). Como el sistema tiene "n" variables y "m" ecuaciones para poder encontrar alguna solución habrá que asignar un

valor arbitrario a (n-m) variables de modo que el sistema quede con un número de variables y ecuaciones tal que sea resoluble por cualquier método.

Solución Básica

Se dice que una solución es básica cuando resulta de anular (n-m) variables cualesquiera del sistema y resolver el sistema restante. Una solución básica consta, entonces, de (n-m) valores nulos y de "m" valores deducidos del sistema restante.

Variables no básicas

Las (n-m) variables a las que se asigna previamente el valor cero reciben el nombre de variables no básicas. Sea J el conjunto de subíndices j de las variables no básicas X_j, $j \in J$. Si designamos por X^R al vector columna que agrupa a las variables no básicas se puede escribir:

$$X^R = [X_j]; \; j \in J$$

Variables Básicas

Las "m" variables a las que no se asignan previamente el valor cero reciben el nombre de variables básicas. Sea I el conjunto de subíndices asociados a las variables básicas los que a partir de ahora se designaran por el subíndice genérico s. Designando por X^B el vector que agrupa a las variables básicas se puede escribir:

$$X^B = [X_s]; \; s \in I$$

Base del Sistema

Dentro de la matriz A es posible distinguir (n-m) vectores columna asociado a las variables no básicas las que se designan por a_j; $j \in J$ y en forma análoga es posible distinguir los "m" vectores columna asociadas a las variables básicas: a_s, $s \in I$.

A la submatriz cuadrada de orden "m" formado por vectores columna a_s se llama base B del sistema:

$$B = [a_j]; \; s \in I$$

A la submatriz restante se le llama matriz R formado por las columnas $\bar{a}_j$.

$$R = [\bar{a}_j]; \; j \in J$$

Luego, el sistema AX = b se puede escribir:

$$[B \quad R]\begin{bmatrix} X^B \\ X^R \end{bmatrix} = b \qquad \begin{bmatrix} X^B \\ X^R \end{bmatrix} \geq 0$$

$B\ X^{B} + R\ X^{R} = b$

Cálculo de Soluciones Básicas

Una solución básica de acuerdo a las definiciones anteriores será de la forma:

$B\ X^B + R\ X^R = b$

$X^R = 0$

Siendo:

$R\ X^R = 0$

El sistema se reduce a:

$B\ X^B = b$

Donde:

$X^B = B^{-1}b$

Si B^{-1} esta definida, existe solución y el valor de la función objetivo será:

$Z = C^B\ X^B$

Solución Posible

Se dice que una solución es posible cuando cumple con los rangos de existencia (Solución Básica Posible).

$X^R = 0$

$X^B > 0$

Solución Básica Degenerada

Se dice que una solución básica es degenerada cuando una o más variables dentro de las básicas tienen valor cero.

Solución Básica Óptima

Se dice que una solución básica es óptima cuando siendo posible optimiza la función objetivo.

Base B Regular

Se dice que una base es regular cuando su determinante es diferente de cero.