

Disponible a un clic de distancia y sin publicidad

**Sí este material te es útil,
ayúdanos a mantenerlo online**



Que no se apague



Suscríbete

Comparte



Comenta

**Este material está en línea porque creo que a alguien le puede ayudar.
Lo desarrollo y sostengo con recursos propios.
Ayúdame a continuar en mi locura de compartir el conocimiento.**

Tarea No. 1

1. Determinar la expresión para P_0 de una cola M/M/1.

M/M/1 hace referencia a:

Distribución de tiempo de llegadas = Exponencial

Distribución de tiempo de servicio = Exponencial

Número de servidores = 1

Definimos

n = Cantidad de clientes en el sistema (haciendo cola, además de los que están siendo atendidos)

λ_n = Tasa de llegadas, si n clientes están en el sistema

μ_n = Tasa de salidas, si n clientes están en el sistema

p_n = Probabilidad de estado estable de que n clientes estén en el sistema

En condiciones de estado estable, para $n > 0$, las tasas de flujo esperadas de entrada y salida del estado n deben ser iguales. Con base en el hecho de que el estado n puede cambiar sólo a los estados $n - 1$ y $n + 1$, se tiene

$$\text{Tasa de entrada esperada al estado } n = \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}$$

$$\text{Tasa de salida esperada del estado } n = (\lambda_n + \mu_n)p_n$$

Asumiendo que la tasa de entrada es igual a la tasa de salida se tiene

$$\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)p_n$$

Para $n = 0$ se tiene:

$$\mu_1p_1 = \lambda_0P_0$$

De donde

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$$

Para $n = 1$ se tiene

$$\lambda_0p_0 + \mu_2p_2 = (\lambda_1 + \mu_1)p_1$$

$$\mu_2p_2 = (\lambda_1 + \mu_1)p_1 - \lambda_0p_0$$

$$\mu_2p_2 = \lambda_1p_1 + \mu_1p_1 - \lambda_0p_0$$

$$\mu_2p_2 = \lambda_1p_1 + (\mu_1p_1 - \lambda_0p_0)$$

Como

$$\mu_1p_1 = \lambda_0P_0$$

Se tiene

$$\mu_2p_2 = \lambda_1p_1 + (0)$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}p_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$$

Para $n = 2$ se tiene

$$\lambda_1p_1 + \mu_3p_3 = (\lambda_2 + \mu_2)p_2$$

$$\mu_3p_3 = \lambda_2p_2 + \mu_2p_2 - \lambda_1p_1$$

Como $\mu_2p_2 = \lambda_1p_1$ se tiene

$$p_3 = \frac{\mu_3p_3}{\mu_3} = \frac{\lambda_2p_2}{\mu_3} = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$$

Si se continúa con este análisis se tiene

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} \frac{\lambda_{n-3}}{\mu_{n-2}} \dots \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

El valor de p_0 se determina aplicando

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

Si λ_n y μ_n son constantes se tiene

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda \\ \mu_n &= \mu \\ p_n &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = 1 \\ p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n &= 1 \\ p_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}\end{aligned}$$

En donde $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ es una serie geométrica que converge si $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}p_0 &= \frac{1}{\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \\ p_0 &= 1 - \frac{\lambda}{\mu}\end{aligned}$$

2. Obtener una expresión para P_n .

$$\begin{aligned}p_n &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \\ p_n &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \dots\end{aligned}$$

3. Determinar una expresión para $E[n]$

$$\begin{aligned}E(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \\ E(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \\ E(n) &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\end{aligned}$$

Asumiendo $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$E(n) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n(\rho)^n$$

Ahora

$$\rho \frac{d}{d\rho} \rho^n = \rho(n\rho^{n-1}) = n\rho^n$$

Por tanto

$$E(n) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho \frac{d}{d\rho} \rho^n$$

$$E(n) = (1 - \rho) \rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^n$$

$$E(n) = (1 - \rho) \rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right)$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$

$$E(n) = (1 - \rho) \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right)$$

$$E(n) = (1 - \rho) \rho \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$E(n) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$