¿Cómo cambia la solución óptima de un problema de programación lineal continua cuando cambia los parámetros del modelo? Para responder esta interrogante es necesario abordar la teoría de la dualidad.

Hasta aquí el modelo de programación lineal desarrollado se conoce como el problema primal. El problema dual se deriva directamente del problema primal con el que está estrechamente relacionado. Así por ejemplo, de la solución óptima del problema dual se obtiene directamente la solución óptima del problema primal.

¿Por qué nos debe interesar obtener la solución del problema primal resolviendo el problema dual? La respuesta es que puede ser más provechoso en términos de cálculo resolver el problema dual en vez del problema primal. Tómese en cuenta que el grado de dificultad en obtener la solución óptima de un determinado problema de programación lineal depende positivamente del número de restricciones más que del número de variables. Entonces, si sucede que el problema dual tiene un número menor de restricciones que el problema primal, por lo general será más eficiente resolver el problema dual, del cual se puede obtener después la solución óptima del problema primal.

FORMA CANÓNICA DE DUALIDAD

Sea el siguiente problema de programación lineal denominado Primal:

Maximizar $Z=CX$

Sujeto a:

$AX \leq b$

$X \geq 0$

El problema Dual se define como:

Minimizar $R=Wb$

Sujeto a:

$WA \geq C$

$W \geq 0$

Donde W es un vector fila con tantas variables duales como restricciones tenga el problema primal.

Ejemplo:

Dado el siguiente problema de programación lineal primal:

Max $Z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$

Sujeto a:

$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 10$
$2X_1 - X_2 + 3X_3 \leq 8$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Que términos matriciales lo podemos escribir como:

$$\text{Max } Z = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Sujeto a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Su correspondiente problema dual será:

Min $R = 10Y_1 + 8Y_2$

Sujeto a:

$Y_1 + 2Y_2 \geq 5$
$2Y_1 - Y_2 \geq 12$
$Y_1 + 3Y_2 \geq 4$

$Y_1, Y_2 \geq 0$

Que en términos matriciales corresponde a:

$$\text{Min } R = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Sujeto a:

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 5 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

Problema Primal:

Max Z = $5X_1 + 4X_2$

Sujeto a:

$6X_1 + 4X_2 \leq 24$
$1X_1 + 2X_2 \leq 6$
$-1X_1 + 1X_2 \leq 1$
$0X_1 + 1X_2 \leq 2$

$X_{1,} X_2 \geq 0$

Problema Dual:

Min W = $24Y_1 + 6Y_2 + 1Y_3 + 2Y_4$

Sujeto a:

$6X_1 + 1X_2 - 1Y_3 + 0Y_4 \geq 5$
$4X_1 + 2X_2 + 1Y_3 + 1Y_4 \geq 4$

$Y_{1,} Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$

Ejemplo 3:

Problema Primal:

Max W = $60X_1 + 30X_2 + 20X_3$

$8X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 60$
$4X_1 + 2X_2 + 1.5X_3 \leq 30$
$2X_1 + 1.5X_2 + 0.5X_3 \leq 20$

$X_{1,} X_2, X_3 \geq 0$

Problema Dual:

$$\text{Min } W = 60Y_1 + 30Y_2 + 20Y_3$$

$$8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \geq 60$$
$$6Y_1 + 2Y_2 + 1.5Y_3 \geq 30$$
$$2Y_1 + 1.5Y_2 + 0.5Y_3 \geq 20$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Ejemplo 4:

Problema Primal:

$$\text{Max } W = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$1X_1 + 2X_2 + 1X_3 \leq 430$$
$$3X_1 + 0X_2 + 2X_3 \leq 460$$
$$1X_1 + 4X_2 + 0X_3 \leq 420$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Problema Dual:

$$\text{Min } W = 430Y_1 + 460Y_2 + 420Y_3$$

$$1Y_1 + 3Y_2 + 1Y_3 \geq 3$$
$$2Y_1 + 0Y_2 + 4Y_3 \geq 2$$
$$1Y_1 + 2Y_2 + 0Y_3 \geq 5$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Nótese que las variables y las restricciones del problema dual se pueden construir simétricamente a partir del problema primal tomando en consideración lo siguiente:

- A todo problema primal cuya función objetivo es de máximo (mínimo) le corresponde un problema dual cuya función objetivo es de mínimo (máximo)
- Una variable dual se define para cada una de las "m" restricciones del primal
- Los coeficientes de la función objetivo del problema dual son iguales al valor del lado derecho de las ecuaciones de las restricciones del primal.
- Una restricción dual se define para cada una de las "n" variables primales.
- Los coeficientes de las variables del lado izquierdo de la restricción dual son iguales a los coeficientes de la restricción (columna) de la variable primal asociada. El lado derecho de las restricciones del problema dual es igual a los coeficientes de las variables de la función objetivo primal.

FORMA NORMAL ESTÁNDAR DE DUALIDAD

La formulación del problema Dual para la forma normal estándar se deduce fácilmente pasando a su forma canónica el problema primal. Dado el siguiente problema en forma matricial:

Maximizar $Z=CX$
Sujeto a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

El problema Dual se define como:

Minimizar $R=Wb$
Sujeto a:

$$WA \geq C$$

W Libre o no restringido

Ejemplo:

Dado el siguiente problema primal en su forma normal estándar de máximo:

Maximizar $Z= 2X1 + X2 + X3$

Sujeto a:

$$\begin{array}{l} 3X1 + X2 + X3 - X4 = 60 \\ X1 - X2 + 2X3 + X5 = 10 \\ X1 + X2 - X3 + X6 = 20 \end{array}$$

$X1, X2, X3, X4, X5, X6 \geq 0$

Su correspondiente problema Dual será:

Minimizar $R= 60Y1 +10Y2 + 20Y3$

Sujeto a:

$$\begin{array}{ll} 3Y1 + Y2 + Y3 & \geq 2 \\ Y1 - Y2 + Y3 & \geq 1 \\ Y1 + 2Y2 - Y3 & \geq 1 \\ - Y1 & \geq 0 \\ + Y2 & \geq 0 \\ - Y3 & \geq 0 \end{array}$$

Y1, Y2, Y3 No restringida

FORMA MIXTA DE DUALIDAD

Para escribir el dual de un problema general, podemos escribir éste en forma canónica o estándar y una de las definiciones anteriores. Otra posibilidad es formular el dual utilizando las siguientes reglas:

	Maximización	$\Leftrightarrow$	**Minimización**	
Restricciones	$\geq$ $\leq$ $=$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$\leq$ $\geq$ No restringida	**Variables**
Variables	$\geq$ $\leq$ No restringida	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$\geq$ $\leq$ $=$	**Restricciones**

Ejemplo 1:

Problema Primal:

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$$

Sujeto a:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 10$$
$$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 8$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Problema Dual:

$$\text{Min } W = 10Y_1 + 8Y_2$$

Sujeto a:

$$Y_1 + 2Y_2 \geq 5$$
$$2Y_1 - Y_2 \geq 12$$
$$Y_1 + 3Y_2 \geq 4$$

$Y_1 \geq 0$ Y_2 Libre

Ejemplo 2:

Problema Primal:

$$\text{Min } Z = 15X_1 + 12X_2$$

Sujeto a:

$X_1 + 2X_2 \geq 3$
$2X_1 - 4X_2 \leq 5$

$X_1, X_2 \geq 0$

Problema Dual:

Max $W = 3Y_1 + 5Y_2$

Sujeto a:

$X_1 + 2X_2 \leq 15$
$2X_1 - 4X_2 \leq 12$

$Y_1 \geq 0, Y_2 \leq 0$

Ejemplo 3:

Problema Primal:

Max $Z = 5X_1 + 6X_2$

Sujeto a:

$X_1 + 2X_2 = 5$
$- X_1 + 5X_2 \geq 3$
$4X_1 + 7X_2 \leq 8$

$X_1, X_2 \geq 0$

Problema Dual:

Mix $W = 5Y_1 + 3Y_2 + 8Y_2$

Sujeto a:

$Y_1 - Y_2 + 4Y_3 \geq 5$
$2Y_1 – 5Y_2 + 7Y_3 \geq 6$

Y_1 Libre, $Y_2 \leq 0$, $Y_3 \geq 0$

Ejemplo 4:

Problema Primal:

$\text{Max } Z = 2X_1 + 1X_2$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 &= 2 \\
2X_1 - X_2 &\geq 3 \\
X_1 - 7X_2 &\leq 1
\end{aligned}
$$

$X_1 \geq 0$ X_2 libre

Problema Dual:

$\text{Min } Z = 2Y_1 + 3Y_2 + Y_3$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
1Y_1 + 2Y_2 + 1Y_3 &\geq 2 \\
1Y_1 - 1Y_2 - 7Y_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Y_1 Libre, $Y_2 \leq 0$, $Y_3 \geq 0$

Ejemplo 5:

Problema Primal:

$\text{Min } Z = 2X_1 + 4X_2 + 6X_3$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
X_1 + 2X_2 + X_3 &\geq 2 \\
X_1 \quad - X_3 &\geq 8 \\
X_2 + X_3 &= 1 \\
2X_1 + X_2 + \quad &\leq 3
\end{aligned}
$$

X_1 libre $X_2, X_3 \geq 0$

Problema Dual:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } W &= 2Y_1 + 8Y_2 + 1Y_3 + 3Y_4 \\
1Y_1 + 1Y_2 + 0Y_3 + 2Y_4 &= 2 \\
2Y_1 + 0Y_2 + 1Y_3 + 1Y_4 &\leq 4 \\
1Y_1 - 1Y_2 + 1Y_3 + 0Y_4 &\leq 6
\end{aligned}
$$

$Y_1 \geq 0$, $Y_2 \geq 0$, Y_3 Libre, $Y_4 \leq 0$