ANALISIS DE SENSIBILIDAD

3.1 Por inspección del tablero óptimo genere las respuestas a los numerales dados.

X_1 = Cantidad de tarjetas de invitación a producir semanalmente en Kimberly Colpapel y
X_2 = Cantidad de tarjetas de grado a producir semanalmente en Kimberly Colpapel

Max (z) = $X_1 + 5X_2$

Sujeto a
$5X_1 + 6X_2 \leq 30$ Hojas de papel Kimberly
$3X_1 + 2X_2 \leq 15$ Tintas de color
$-X_1 + 2X_2 \leq 10$ Plantillas de letras
$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

Solución óptima:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	(-z)	b_i
X_1	1	0	1/8	0	-3/8	0	0
X_4	0	0	-½	1	½	0	5
X_2	0	1	1/16	0	5/16	0	5
(-z)	0	0	7/16	0	19/16	(-1)	25

1. Lectura de las variables que no están en solución y sus vectores asociados

Las variables que no están en solución son X_3 y X_5, cuyos vectores asociados son

Para X_3 es el vector columna $\begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/2 \\ 1/16 \end{pmatrix}$

Para X_5 es el vector columna $\begin{pmatrix} -3/8 \\ 1/2 \\ 5/16 \end{pmatrix}$

2. Identifique en el tablero óptimo primal la solución óptima al problema dual.

La matriz inversa óptima es:

$$\begin{pmatrix} 1/8 & 0 & -3/8 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/16 & 0 & 5/16 \end{pmatrix}$$

El orden en que aparece las variables es X1, X4, x2, por tanto los coeficientes objetivo originales son

$(1 \quad 0 \quad 5)$

Por tanto La solución óptima del problema dual es:

$$(1 \quad 0 \quad 5)\begin{pmatrix} 1/8 & 0 & -3/8 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/16 & 0 & 5/16 \end{pmatrix} = (7/16 \quad 0 \quad 19/16)$$

$(y_1 \quad y_2 \quad y_3) = \left({}^{7}\!/_{16} \quad 0 \quad {}^{19}\!/_{16}\right)$

3. Verificar si las soluciones óptimas: primal y dual son degeneradas.

Para el primal se tiene una solución degenerada porque $X_1 = 0$, y X_1 es una variable básica.

Para el dual $y_2 = 0$ lo que implica que también en el dual se presenta la degeneración

4. Si dejo de utilizar una hoja de papel Kimberly, se disminuye en un 1/16 la producción de X_2. ¿Qué cantidad de cada uno de los recursos que participan en la elaboración de un producto X_2 se liberan? Determínelos y justifique su respuesta.

Al disminuir 1/6 la producción de X_2, Ya no se producen 5 sino 29/6.
En el tablero simplex final se parecía que las tintas de color no se usan completamente (X_4=5). En este caso se liberan $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ de tinta adicional. Lo mismo sucede con las plantillas de letras, se liberan $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

5. Me adicionan una hoja de papel Kimberly, ¿Cuál es el valor de la función objetivo?

Al adicionar una hoja Kimberly

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{1}\!/_{8} & 0 & -{}^{3}\!/_{8} \\ -{}^{1}\!/_{2} & 1 & {}^{1}\!/_{2} \\ {}^{1}\!/_{16} & 0 & {}^{5}\!/_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{1}\!/_{8} \\ {}^{9}\!/_{2} \\ {}^{81}\!/_{16} \end{pmatrix}$$

El valor de la función objetivo es $X_1 + 5X_2 = {}^{1}\!/_{8} + 5 \cdot {}^{81}\!/_{16} = 24.4375$

6. Si dejo de utilizar una hoja de papel Kimberly, se disminuye en 1/8 la producción de X_1. ¿Qué cantidad de cada uno de los recursos que participan en la elaboración de un producto X_1 se liberan? Determínelos y justifique su respuesta.

Si se disminuye en 1/8 la producción de X_1 quiere decir que pasa de 0 a -1/8. Esto se puede ver en

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{1}\!/_{8} & 0 & -{}^{3}\!/_{8} \\ -{}^{1}\!/_{2} & 1 & {}^{1}\!/_{2} \\ {}^{1}\!/_{16} & 0 & {}^{5}\!/_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^{1}\!/_{8} \\ {}^{11}\!/_{2} \\ {}^{79}\!/_{16} \end{pmatrix}$$

Aquí ya no se tiene una solución factible
Trabajando con el simplex dual se encuentra una solución óptima factible

$X_1 = 0$; X_2= 29/6; X_3=0 X_4= 16/3; X_5=1/3.

De tintas de color se dejaron de usar 16/3, respecto a 5, implica que se liberaron 1/3.
De plantillas de letras se liberaron 1/3

7. La utilidad del producto 1 se aumenta en \$3.oo Cuál es el nuevo valor de (-z)?

No se afecta en nada, ya que el valor óptimo del producto 1 es 0. (-z) = 25

8. La utilidad del producto 2 se aumenta en \$5.00 Cuál es el nuevo valor de (-z)?

La solución óptima se encuentra en el mismo punto, X1=0 y X2=5. Eso quiere decir que si cambiamos un coeficiente de la función objetivo su valor cambiará…

(-z)= $X_1 + 5X_2$ (-z) = 10*5 = 50

9. Un producto nuevo tiene la siguiente información 2,2,1 y $4.00. ¿Puede ingresar a la base? Justifique

La adición de una nueva actividad en un modelo de programación lineal equivale a agregar una nueva variable. Esta nueva actividad es deseable si es rentable, es decir, si mejora el valor óptimo de la función objetivo.

Iniciando, la nueva variable no hace parte de la solución, por tanto, no está en la base, y se considera como una variable no básica. Pero la idea es que luego de incorporarla dentro del tablero simplex óptimo, se pueda seguir desarrollando los cálculos para optimizar el nuevo tablero y así encontrar una base que debería contener a la nueva variable si el proceso es rentable.

Para el caso en cuestión:

La nueva restricción dual sería, sabiendo que $(y_1 \quad y_2 \quad y_3) = (7/_{16} \quad 0 \quad 19/_{16})$

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 - C_i = 2 \cdot 7/_{16} + 2 \cdot 0 + 19/_{16} - 4 = 33/_{16} - 4 = -15/_{16}$$

En este caso la actividad nueva es rentable. Se adiciona al tablero simplex. Se determina la columna de esta variable en el tablero simplex

$$\begin{pmatrix} 1/_8 & 0 & -3/_8 \\ -1/_2 & 1 & 1/_2 \\ 1/_{16} & 0 & 5/_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/_8 \\ 3/_2 \\ 7/_{16} \end{pmatrix}$$

	X_1	X_2	X_6	X_3	X_4	X_5	(-z)	b_i
X_1	1	0	-1/8	1/8	0	-3/8	0	0
X_4	0	0	3/2	-½	1	½	0	5
X_2	0	1	7/16	1/16	0	5/16	0	5
(-z)	0	0	-15/16	7/16	0	19/16	(-1)	25

Al continuar con el simplex se obtiene que:

X_1=0; X_2= 5/2; X_6 = 5, (-Z) = 65/2

La función mejora de 25 a 32.5 y la nueva actividad termina en la base.

10. Si la utilidad del producto 2 disminuyera en $5.00 se mantendría la base óptima?

Si la utilidad del producto 2, que inicialmente es de $5.00, disminuye en $5.00 querría decir que no existe utilidad del producto 2 (5 – 5=0). Por tanto no se mantiene la base óptima, ya que todo dependería del producto 1.

3.2. Solucionar el ejercicio con el método simplex, aplicando análisis de sensibilidad, analizar su comportamiento e inferir resultados.

Dado
Max (z) = $X_1 + 3X_2 + 2X_3$

Sujeto a
$3X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 7$ Recurso A
$X_1 + 2X_2 \leq 6$ Recurso B
$4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$ Recurso C
$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_2 \geq 0$

Modelo estándar
Maximizar
$Z - X_1 - 3X_2 - 2X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$
Sujeto a
$3X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 7$
$X_1 + 2X_2 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 = 6$
$4X_1 + 3X_2 + 8X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 = 10$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	(-z)	b_i
X_4	3	1	2	1	0	0	0	7
X_5	1	2	0	0	1	0	0	6
X_6	4	3	8	0	0	1	0	10
(-z)	-1	-3	-2	0	0	0	(-1)	0

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	(-z)	b_i
X_4	5/2	0	2	1	-1/2	0	0	4
X_2	½	1	0	0	½	0	0	3
X_6	5/2	0	8	0	-3/2	1	0	1
(-z)	1/2	0	-2	0	3/2	0	(-1)	9

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	(-z)	b_i
X_4	15/8	0	0	1	-1/8	-1/4	0	15/4
X_2	½	1	0	0	½	0	0	3
X_3	5/16	0	1	0	-3/16	1/8	0	1/8
(-z)	9/8	0	0	0	9/8	1/4	(-1)	37/4

El tablero es óptimo.

1.1 ¿ ≤ b_1 ≤ ¿

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -{}^{1}/_{8} & -{}^{1}/_{4} \\ 0 & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & -{}^{3}/_{16} & {}^{1}/_{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7+D \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{15}/_{4} + D \\ 3 \\ {}^{1}/_{8} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso

$${}^{15}/_{4} + D \geq 0$$

$$D \geq -{}^{15}/_{4}$$

Por tanto la solución básica actual permanece factible cuando

$$7 - {}^{15}/_{4} \leq b_1$$
$${}^{7}/_{2} \leq b_1$$

1.2 ¿ ≤ b_2 ≤ ¿

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -{}^{1}/_{8} & -{}^{1}/_{4} \\ 0 & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & -{}^{3}/_{16} & {}^{1}/_{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6+D \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{15}/_{4} - {}^{1}/_{8}D \\ 3 + {}^{1}/_{2}D \\ {}^{1}/_{8} - {}^{3}/_{16}D \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solucionando las ecuaciones se encuentra que

$$-6 \leq D \leq {}^{2}/_{3}$$

Por tanto

$$0 \leq b_2 \leq {}^{20}/_{3}$$

1.3 ¿ ≤ b_3 ≤ ¿

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -{}^{1}/_{8} & -{}^{1}/_{4} \\ 0 & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & -{}^{3}/_{16} & {}^{1}/_{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 10+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{15}/_{4} - {}^{1}/_{4}D \\ 3 \\ {}^{1}/_{8} + {}^{1}/_{8}D \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solucionando las ecuaciones se encuentra que

$$-1 \leq D \leq 15$$

Por tanto

$$9 \leq b_2 \leq 25$$

1.4 ¿ ≤ C_1 ≤ ¿

El orden en que aparece las variables es X_4, X_2, X_3, por tanto los coeficientes objetivo originales son

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto La solución óptima del problema dual es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -{}^{1}/_{8} & -{}^{1}/_{4} \\ 0 & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & -{}^{3}/_{16} & {}^{1}/_{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^{9}/_{8} & {}^{1}/_{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^{9}/_{8} & {}^{1}/_{4} \end{pmatrix}$$

La función objetivo cambia a:
Maximizar (z) = $(1+d_1)X_1 + 3X_2 + 2\,X_3$

$$3y_1 + y_2 + 4y_3 - (1 + d_1) = 3 \cdot 0 + {}^{9}/_{8} + 4 \cdot {}^{1}/_{4} - 1 - d_1 = {}^{9}/_{8} - d_1 \geq 0$$
$$d_1 \leq {}^{9}/_{8}$$

Por tanto

$$c_1 \leq {}^{17}/_{8}$$

1.5 ¿ ≤ C_2 ≤ ¿

La función objetivo cambia a:
Maximizar (z) = $X_1 + (3+d_1)X_2 + 2X_3$
Como X_2 es una variable básica debemos recalcular los valores duales

$$(0 \quad 3+d_1 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/16 & 1/8 \end{pmatrix} = (0 \quad 9/8 \quad 1/4)$$

Nuevo $(y_1 \quad y_2 \quad y_3) = (0 \quad 9/8 + 1/2\, d \quad 1/4)$

Se pueden calcular los coeficientes de las variables no básicas en el renglón de z

Para X_1

$$3y_1 + y_2 + 4y_3 - 1 = 3 \cdot 0 + 9/8 + 1/2\, d + 4 \cdot 1/4 - 1 \geq 0$$
$$9/4 + d \geq 0$$
$$d \geq -9/4$$

Para X_5

$$y_2 = 9/8 + 1/2\, d \geq 0$$
$$d \geq -9/4$$

Para X_6

$$y_3 = 1/4 \geq 0$$

Por tanto

$$d \geq -9/4$$

Es decir,

$$c_2 \geq 3 - 9/4$$
$$c_2 \geq 3/4$$

1.6 ¿ ≤ C_3 ≤ ¿

La función objetivo cambia a:
Maximizar (z) = $X_1 + 3X_2 + (2+d_3)X_3$
Como X_3 es una variable básica debemos recalcular los valores duales

$$(0 \quad 3 \quad 2+d_3)\begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/16 & 1/8 \end{pmatrix} = (0 \quad 9/8 - 3/16\, d \quad 1/4 + 1/8\, d)$$

Nuevo $(y_1 \quad y_2 \quad y_3) = (0 \quad 9/8 - 3/16\, d \quad 1/4 + 1/8\, d)$

Se pueden calcular los coeficientes de las variables no básicas en el renglón de z

Para X_1

$$3y_1 + y_2 + 4y_3 - 1 = 3 \cdot 0 + 9/8 - 3/16\, d + 1/4 + 1/8\, d - 1 \geq 0$$
$$11/8 - 1/16\, d \geq 0$$
$$d \leq 22$$

Para X_5

$$y_2 = {}^9/_8 - {}^3/_{16}\, d \geq 0$$
$$d \leq 6$$

Para X_6

$$y_3 = {}^1/_4 + {}^1/_8\, d \geq 0$$
$$d \geq -2$$

Combinando los intervalos solución se tiene

$$-2 \leq d \leq 6$$

Por tanto

$$0 \leq c_2 \leq 8$$

2. Los siguientes cambios se hacen en referencia al problema original

2.1 Supóngase que el vector de disponibilidad debe cambiarse a (5,4,6) ¿Cómo afecta este cambio la actual solución óptima. Muestre el nuevo tablero óptimo

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	(-z)	b_i
X_4	15/8	0	0	1	-1/8	-1/4	0	3
X_2	½	1	0	0	½	0	0	2
X_3	5/16	0	1	0	-3/16	1/8	0	0
(-z)	9/8	0	0	0	9/8	1/4	(-1)	6

Ahora la función óptima vale 6, y X_2=2; X_3=0; X_4=3.

2.2 El vector de los precios se cambia a (2,3,4). ¿Cómo afecta este cambio la actual solución óptima? Muestre el nuevo tablero óptimo

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	(-z)	b_i
X_4	15/8	0	0	1	-1/8	-1/4	0	15/4
X_2	½	1	0	0	½	0	0	3
X_3	5/16	0	1	0	-3/16	1/8	0	1/8
(-z)	3/4	0	0	0	3/4	1/2	(-1)	19/2

El punto no cambia pero si lo hace el valor de la función objetivo z= 19/2

2.3 El vector de coeficientes tecnológicos correspondientes a la actividad X_3 se cambia a (2,3,4). ¿Cómo afecta este cambio la actual solución óptima? Muestre el nuevo tablero.

Por ser la variable X3, una variable básica, lo mejor es recalcular el simplex para encontrar la solución óptima.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	(-z)	b_i
X_4	3	1	2	1	0	0	0	7
X_5	1	2	3	0	1	0	0	6
X_6	4	3	4	0	0	1	0	10
(-z)	-1	-3	-2	0	0	0	(-1)	0

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	(-z)	b_i
X_4	5/2	0	½	1	-1/2	0	0	4
X_2	½	1	3/2	0	½	0	0	3
X_6	5/2	0	-1/2	0	-3/2	1	0	1
(-z)	1/2	0	5/2	0	3/2	0	(-1)	9

Este es el tablero óptimo. Se tiene en la primera iteración
$X_2= 3$, $X_4=4$, $X_6=1$

2.4 Se desean introducir actividades X_7 y X_8 a precios de \$8 y \$15 respectivamente. Los coeficientes tecnológicos asociados a cada actividad son (2,5,1) y (4,1,7). ¿Cómo afecta este cambio la actual solución óptima? Muestre el nuevo tablero óptimo

Como $(y_1 \quad y_2 \quad y_3) = \left(0 \quad {}^9/_8 \quad {}^1/_4\right)$ son los valores duales óptimos, el costo reducido de la actividad X_7 se calcula:

$$2y_1 + 5y_2 + y_3 - 8 = 0 + 5 \cdot {}^9/_8 + {}^1/_4 - 8 = -{}^{17}/_8$$

Por tanto conviene incluir a X_7 en la solución óptima

El costo reducido de la actividad X_8 es:

$$4y_1 + y_2 + 7y_3 - 15 = 0 + {}^9/_8 + 7 \cdot {}^1/_4 - 15 = -{}^{97}/_8$$

También conviene introducir a la actividad X_8 en la solución óptima.

Columna de restricción de X_7 es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -{}^1/_8 & -{}^1/_4 \\ 0 & {}^1/_2 & 0 \\ 0 & -{}^3/_{16} & {}^1/_8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^9/_8 \\ {}^5/_2 \\ -{}^{13}/_{16} \end{pmatrix}$$

Columna de restricción de X_8 es

$$\begin{pmatrix} 1 & -{}^1/_8 & -{}^1/_4 \\ 0 & {}^1/_2 & 0 \\ 0 & -{}^3/_{16} & {}^1/_8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{17}/_8 \\ {}^1/_2 \\ {}^{11}/_{16} \end{pmatrix}$$

En la tabla óptima adicionamos las restricciones y continuamos con el trabajo del simplex

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	(-z)	b_i
X_4	15/8	0	0	1	-1/8	-1/4	9/8	17/8	0	15/4
X_2	½	1	0	0	½	0	5/2	½	0	3
X_3	5/16	0	1	0	-3/16	1/8	-13/16	11/16	0	1/8
(-z)	9/8	0	0	0	9/8	1/4	-17/8	-97/8	(-1)	37/4

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	(-z)	b_i
X_4	10/11	0	-34/11	1	5/11	-7/11	40/11	0	0	37/11
X_2	3/11	1	-8/11	0	7/11	-1/11	34/11	0	0	32/11
X_8	5/11	0	16/11	0	-3/11	2/11	-13/11	1	0	2/11
(-z)	73/11	0	194/11	0	-24/11	27/11	-181/11	0	-1	126/11

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	(-z)	b_i
X_7	¼	0	-17/20	11/40	1/8	-7/40	1	0	0	37/40
X_2	-1/2	1	19/10	-17/20	¼	9/20	0	0	0	1/20
X_8	¾	0	9/20	13/40	-1/8	-1/40	0	1	0	51/50
(-z)	43/4	0	73/20	181/40	-1/8	-17/40	0	0	-1	1067/40

El siguiente es el tablero óptimo

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	(-z)	b_i
X_7	1/18	7/18	-1/9	-1/18	2/9	0	1	0	0	17/18
X_6	-10/9	20/9	38/9	-17/9	5/9	1	0	0	0	1/9
X_8	13/18	1/18	5/9	5/18	-1/9	0	0	1	0	23/18
(-z)	185/18	17/18	49/9	67/18	1/9	0	0	0	-1	481/18

2.6 Dos nuevas restricciones se añaden al sistema original X_1<= 4 y X_2<=3 ¿Cómo afecta este cambio la actual solución óptima?

Como X_2<=3, ya se cumple en la solución óptima, esta restricción vendría a ser redundante. Se puede omitir.

Para X_1<= 4, la solución óptima indica que X_1 = 0, por tanto al incluir esta restricción en el problema aparecería una variable de holgura con valor de 4, para equilibrar el sistema.