

Investigación Operativa

Contenido:

Solución de Modelos de Programación Lineal

Método Gráfico

Introducción

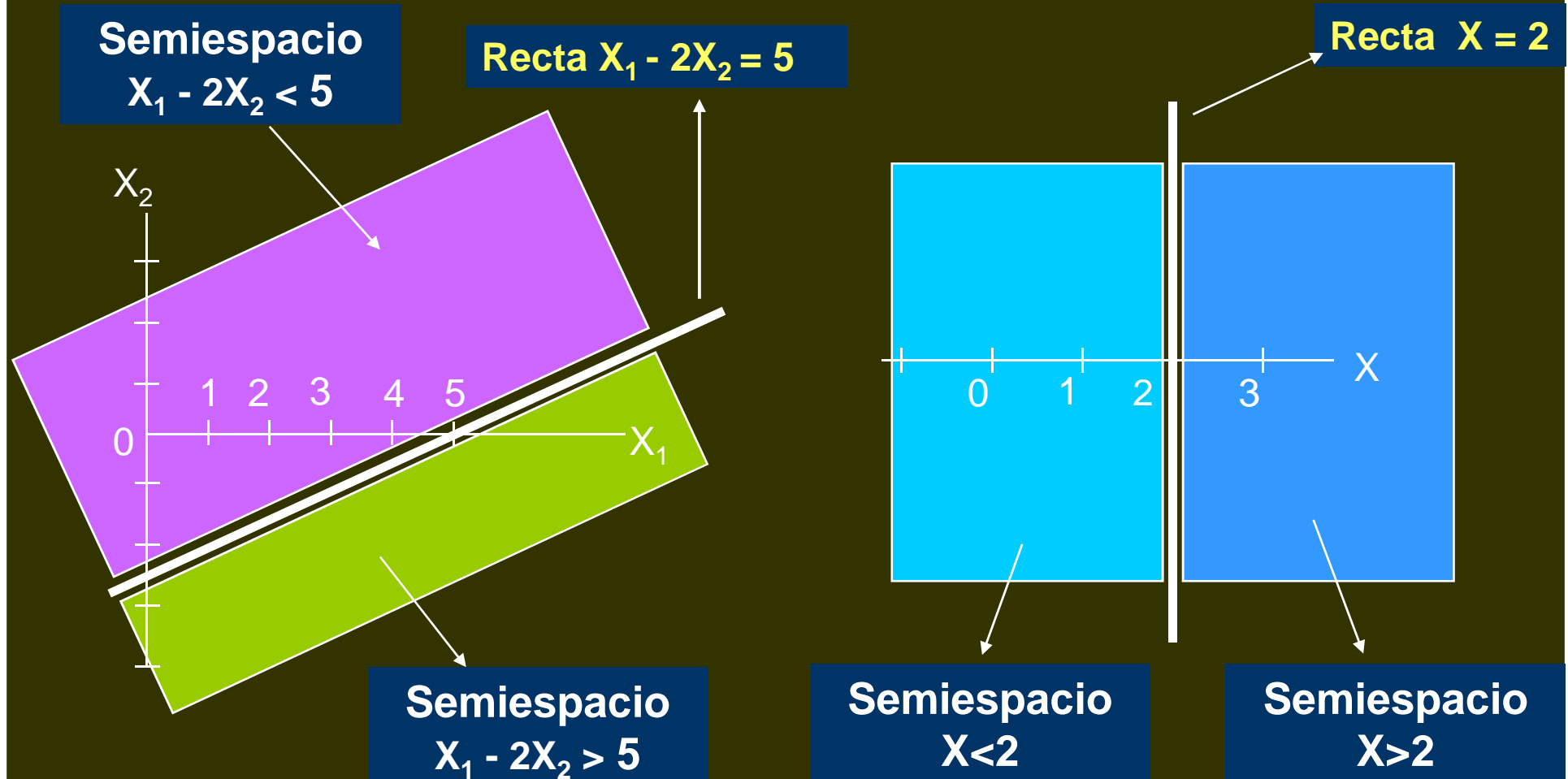
En el presente capítulo se muestra la solución de varios tipos de problemas de programación lineal que solamente tienen en su formulación **dos** variables, empleando el método gráfico. Se trabajará entonces en el *Plano Cartesiano*.

Los pasos a seguir son:

1. Representar en el plano cartesiano cada una de las restricciones
2. **Determinar** el Espacio de Soluciones Factibles ó **REGION FACTIBLE**, definido por el conjunto de restricciones.
3. **Encontrar la solución óptima** que permita *maximizar ó minimizar* cierta **Función Objetivo**.

1. Representación de las Restricciones en el Plano Cartesiano

Una recta (Hiperplano en \mathbb{R}^2), divide al plano en dos semi-espacios



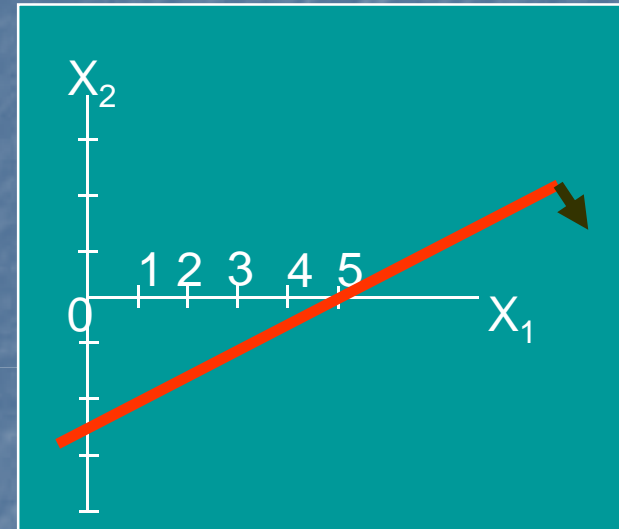
1. Representación de las Restricciones en el Plano Cartesiano

Podemos decir entonces que:

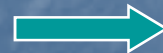
Restricción: $X_1 - 2X_2 > 5$



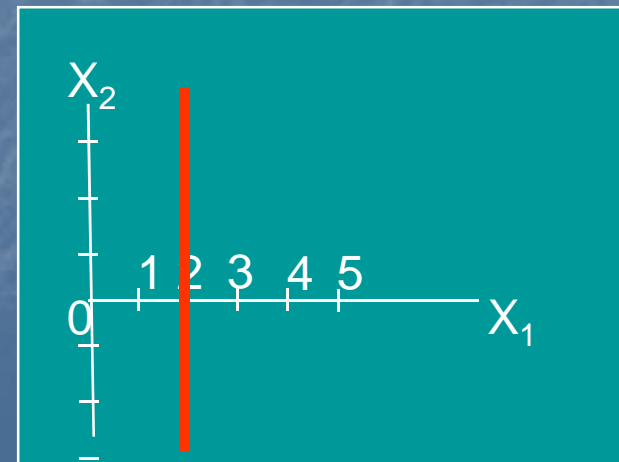
El semi-espacio de puntos representados por la restricción, se suele mostrar con una flecha tal como lo muestra el gráfico. Usualmente, para verificar cual es el semi-espacio de puntos que la restricción representa, se suele probar con un punto para poder concluir. Aquí podemos probar fácilmente con el punto $(0,0)$, dándonos cuenta que la restricción NO representa los puntos del SEMI-ESPACIO SUPERIOR.



Restricción: $X_1 = 2$



Esta restricción representa exactamente los puntos **sobre** la recta $X_1 = 2$.



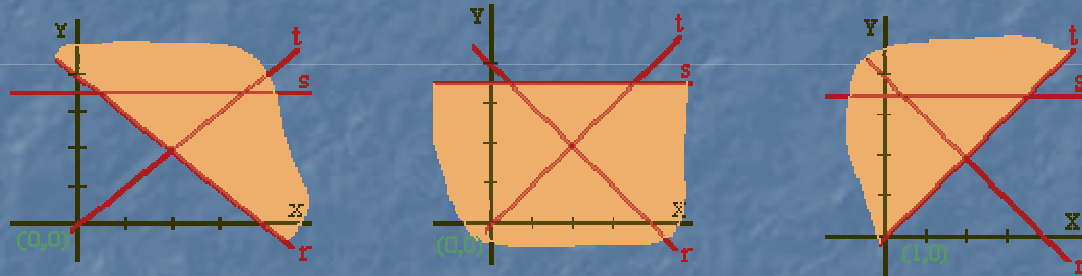
2. Determinación de la REGION FACTIBLE

Para encontrar la **REGION FACTIBLE** deben graficarse todas las restricciones en un mismo plano cartesiano y posteriormente determinar los puntos de **intersección de TODOS** los semi-espacios.

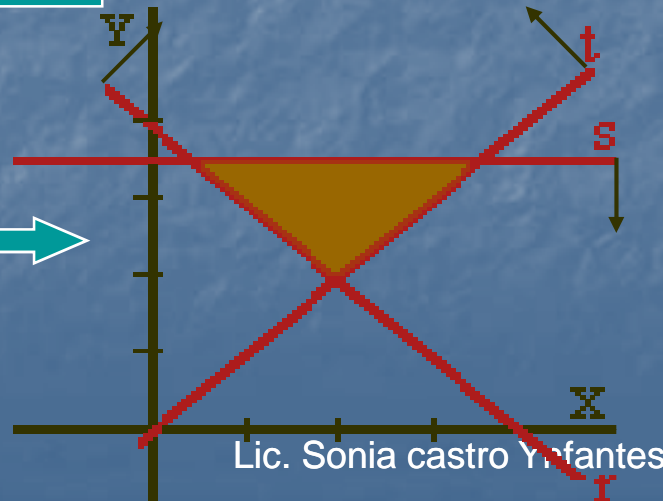
EJEMPLO:

Dibujar la región factible asociada a las siguientes 3 restricciones:

| | | |
|----------|---|----------------|
| r | → | $x + y \geq 4$ |
| s | → | $y \leq 4$ |
| t | → | $y \geq x$ |



REGION
FACTIBLE

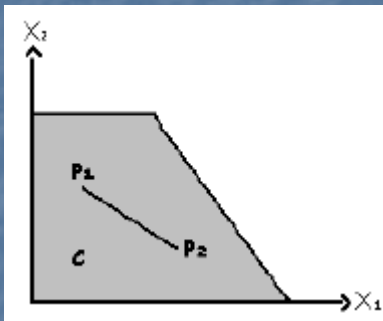


Lic. Sonia castro Ynfantes

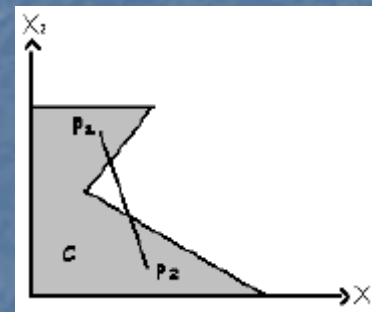
2. Determinación de la REGION FACTIBLE

Al determinar la REGION FACTIBLE de un modelo de PL, la figura geométrica resultante se le conoce como **poliedro convexo**, y por tanto se dice que un conjunto de restricciones forman un conjunto poliédrico. La **convexidad** es un concepto de gran importancia en optimización.

Un conjunto C es un conjunto convexo si el segmento rectilíneo que une cualquier par de puntos de C se encuentra completamente en C .



Conjunto Convexo

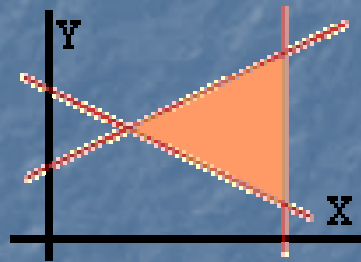


Conjunto No - Convexo

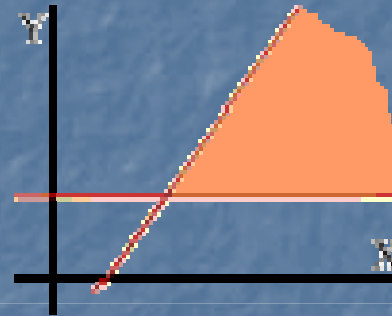
Si la Región Factible es Convexa, la solución optima del problema de PL se encontrará en uno de los vértices.

2. Determinación de la REGION FACTIBLE

La región factible puede ser acotada ó no acotada.



Región factible acotada
(politopo)



Región factible no acotada

La importancia de la REGION FACTIBLE se centra en los vértices, ya que en alguno (s) de ellos estará la solución óptima del problema.

2. Determinación de la REGION FACTIBLE

Tenga en cuenta que si al graficar las restricciones ocurre que no existe una región de intersección, cuyos puntos sean comunes a TODAS las restricciones, esto indica que el problema no tiene región factible y por tanto no tiene solución.

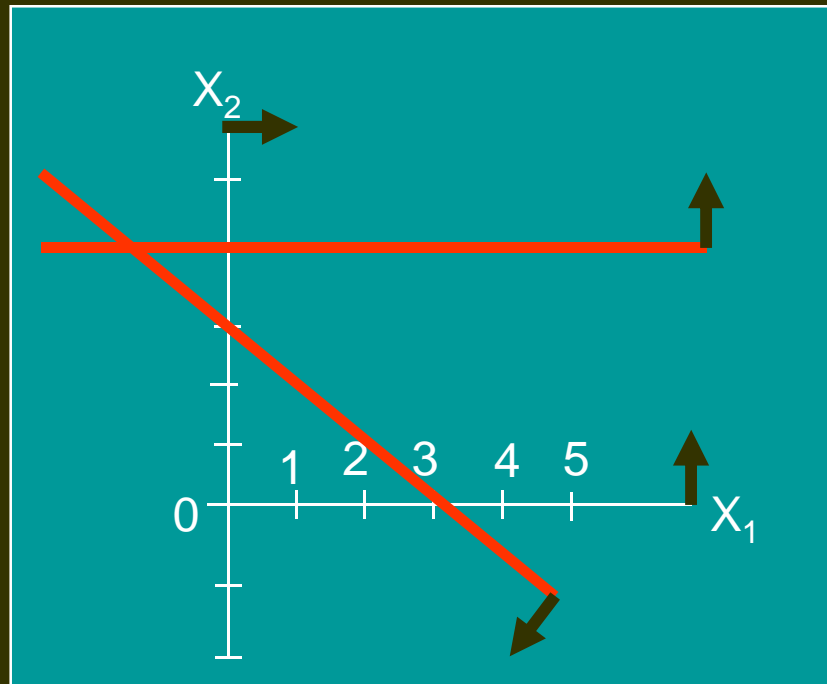
EJEMPLO: Determine la Región Factible de un problema de optimización lineal con las siguientes restricciones:

$$R1 \rightarrow X_1 + X_2 \leq 3$$

$$R2 \rightarrow X_2 \geq 4$$

$$\text{Obvias} \rightarrow X_1, X_2 \geq 0$$

No hay
REGION
FACTIBLE



3. Búsqueda de la SOLUCION OPTIMA

Estudiemos el siguiente **EJEMPLO**:

Maximizar $Z = 2X_1 + X_2$

Sujeta a: $2X_1 - X_2 \leq 8$

$X_1 - X_2 \leq 3$

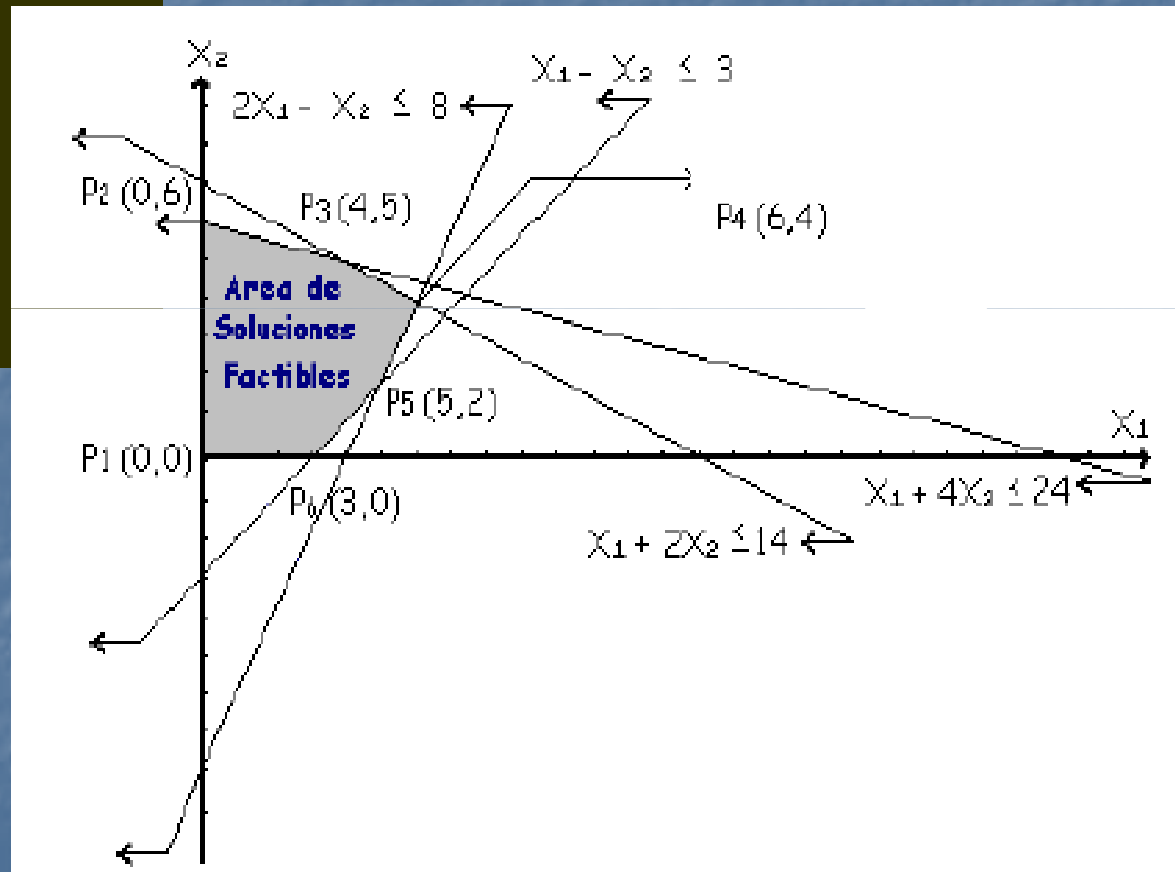
$X_1 + 2X_2 \leq 14$

$X_1 + 4X_2 \leq 24$

$X_j \geq 0 ; j = 1, 2$

Existen dos métodos para hallar el vértice óptimo:

- A) Evaluar el valor de Z en cada vértice, y escoger aquel vértice que maximice Z .
- B) Utilizar la recta de la función Objetivo para hallar el óptimo.



3. Búsqueda de la SOLUCION OPTIMA

Método A

El valor de la función objetivo en cada una de las esquinas del área de soluciones factible es:

$$Z(0,0) = 2(0) + 0 = 0$$

$$Z(0,6) = 2(0) + 6 = 6$$

$$Z(4,5) = 2(4) + 5 = 13$$

$$\mathbf{Z(6,4) = 2(6) + 4 = 16} \rightarrow \text{Punto OPTIMO}$$

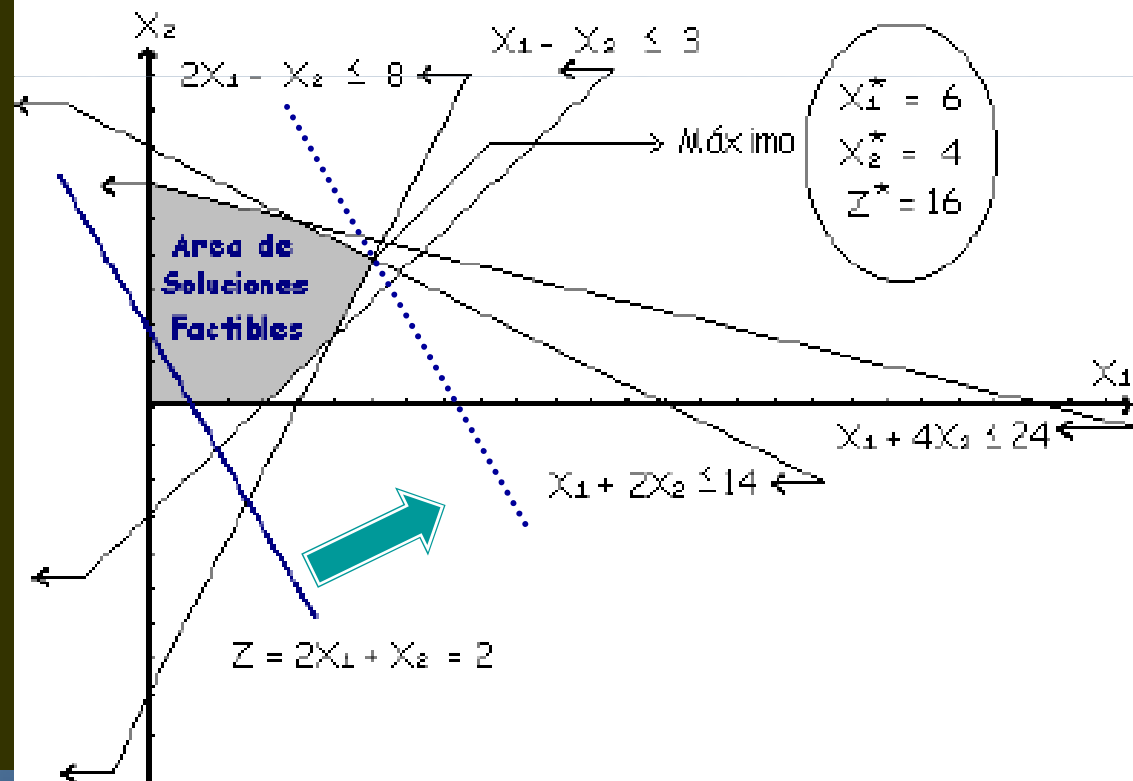
$$Z(5,2) = 2(5) + 2 = 12$$

$$Z(3,0) = 2(3) + 0 = 6$$

Método B

Se dibuja la recta $Z = 2X_1 + X_2$ viéndola de la forma $y = mx + b$, así: $X_2 = -2X_1 + Z$

Aquí se graficó para $Z = 2$ por conveniencia para observar la recta dentro de la Región Factible. Para obtener el Z máximo, debe obtenerse el máximo intercepto de esta recta con el eje X_2 , sin salirse de la región factible.



EJEMPLO 2: Problema de dieta.

Un comprador está tratando de seleccionar la combinación más barata de dos alimentos, que debe cumplir con ciertas necesidades diarias de vitaminas. Los requerimientos vitamínicos son por lo menos 40 unidades de vitamina W, 50 unidades de vitamina X y 49 unidades de vitamina Y. Cada kilo del alimento A proporciona 4 unidades de vitamina W, 10 unidades de vitamina X y 7 unidades de vitamina Y; cada kilo del alimento B proporciona 10 unidades de W, 5 unidades de X y 7 unidades de Y. El alimento A cuesta 5 pesos/kilogramo y el alimento B cuesta 8 pesos/kilogramo.

$$\text{Minimizar } Z = 5A + 8B$$

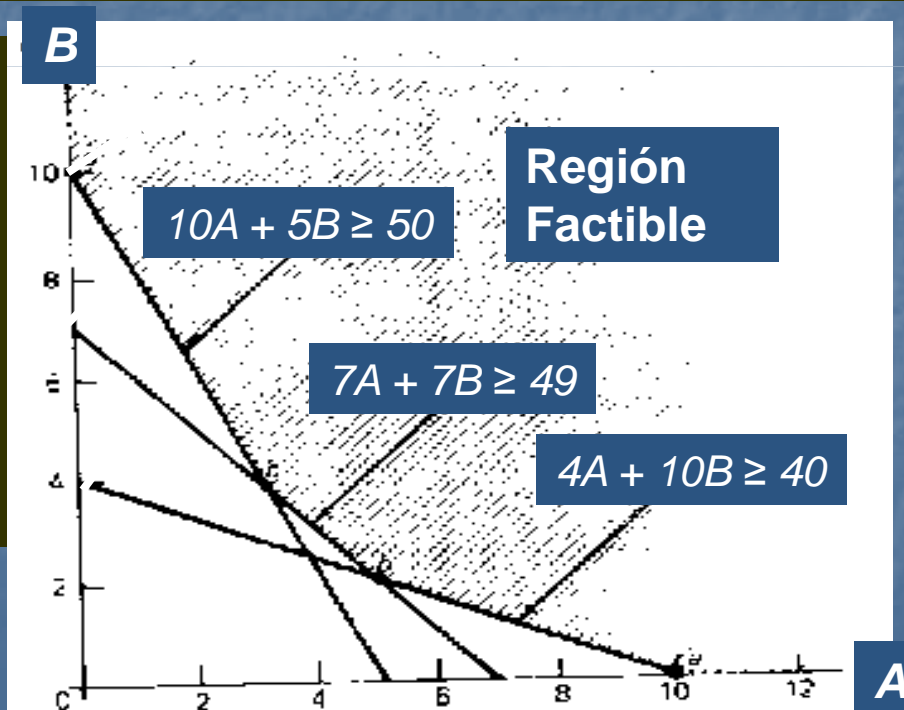
Restricciones:

$$4A + 10B \geq 40 \text{ vitamina W}$$

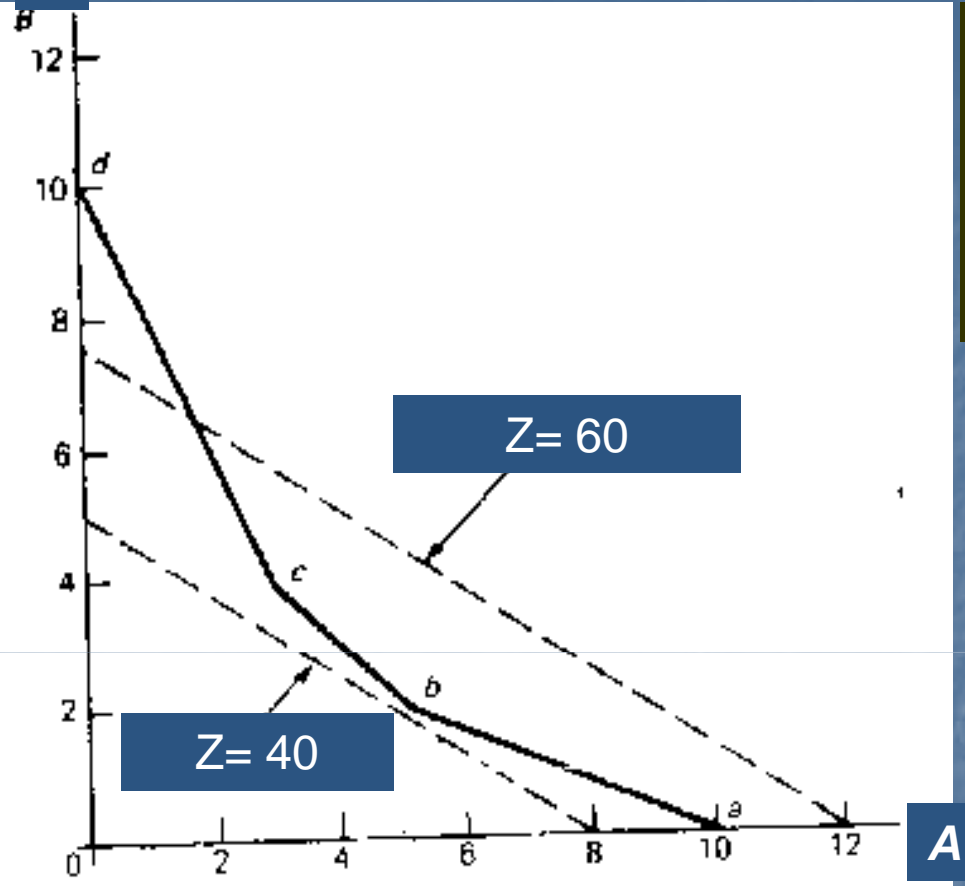
$$10A + 5B \geq 50 \text{ vitamina X}$$

$$7A + 7B \geq 49 \text{ vitamina Y}$$

$$A \geq 0, B \geq 0$$



Lic. Sonia castro Ynfantes

B

Observando la Minimización de Z , a través del análisis de la recta $Z = 5A + 8B$, el vertice b de la región factible es entonces el que logra ese mínimo valor de Z .

La solución menos costosa es 5 kilogramos de alimento A y 2 kilogramos de alimento B. El costo total de esta combinación es:
 $Z = 41$ pesos

Resultados de prueba y error

| Punto | Coordenadas | $Z = 5A + 8B$ |
|-------|-----------------|--------------------|
| a | $A = 10, B = 0$ | 50 |
| b | $A = 5, B = 2$ | 41 → Optimo |
| c | $A = 3, B = 4$ | 47 |
| d | $A = 0, B = 10$ | 80 |

Observemos que en general:

Minimizar Z = Maximizar $(-Z)$ [y viceversa]

Minimizar $Z = 5A + 8B$

Restricciones:

$$4A + 10B \geq 40$$

$$10A + 5B \geq 50$$

$$7A + 7B \geq 49$$

$$A \geq 0, B \geq 0$$

=

Maximizar $(-Z) = -5A - 8B$

Restricciones:

$$4A + 10B \geq 40$$

$$10A + 5B \geq 50$$

$$7A + 7B \geq 49$$

$$A \geq 0, B \geq 0$$

Verificación de los Vertices

| Punto | Coordenadas | Min $Z = 5A + 8B$ |
|-------|-----------------|-------------------|
| a | $A = 10, B = 0$ | 50 |
| b | $A = 5, B = 2$ | 41 Optimo |
| c | $A = 3, B = 4$ | 47 |
| d | $A = 0, B = 10$ | 80 |

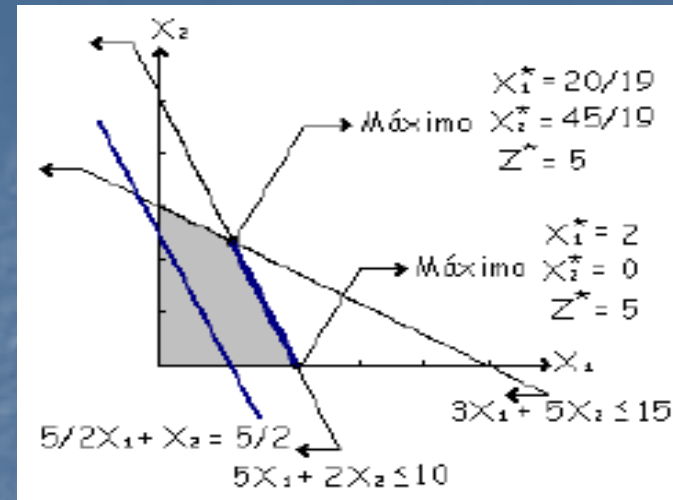
Verificación de los Vertices

| Punto | Coordenadas | Max $(-Z) = -5A - 8B$ |
|-------|-----------------|-----------------------|
| a | $A = 10, B = 0$ | -50 |
| b | $A = 5, B = 2$ | -41 Optimo |
| c | $A = 3, B = 4$ | -47 |
| d | $A = 0, B = 10$ | -80 |

CASOS ESPECIALES

Problema de múltiples soluciones

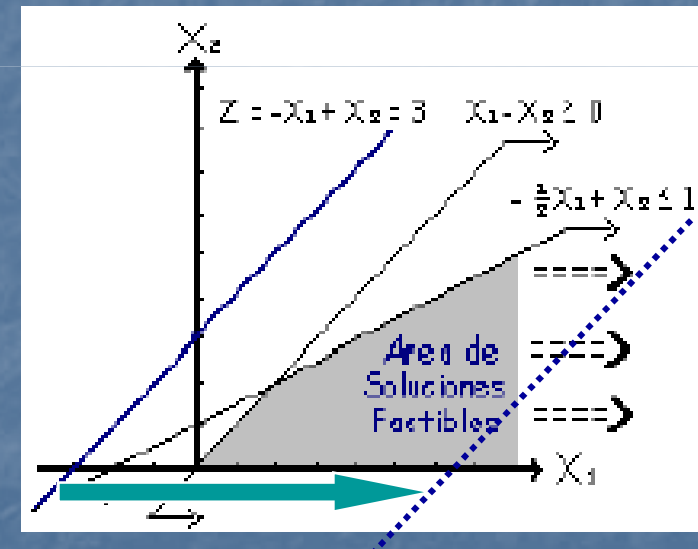
Maximice $Z = (5/2)X_1 + X_2$
 Sujeto a:
 $3X_1 + 5X_2 \leq 15$
 $5X_1 + 2X_2 \leq 10$
 $X_j \geq 0 ; j = 1, 2$



Problema de solución infinita

Minimice $Z = -X_1 + X_2$

Sujeto a:
 $X_1 - X_2 \geq 0$
 $-0,5X_1 + X_2 \leq 1$
 $X_j \geq 0 ; j = 1, 2$



Problema sin solución

Ocurre cuando NO HAY REGION FACTIBLE

EJEMPLO 3: Problema de mezcla de productos.

Un fabricante está tratando de decidir sobre las cantidades de producción para dos artículos: mesas y sillas. Se cuenta con 96 unidades de material y con 72 horas de mano de obra. Cada mesa requiere 12 unidades de material y 6 horas de mano de obra. Por otra parte, las sillas usan 8 unidades de material cada una y requieren 12 horas de mano de obra por silla. El margen de contribución es el mismo para las mesas que para las sillas: \$5.00 por unidad. El fabricante prometió construir por lo menos dos mesas.

x_1 = número de mesas producidas

x_2 = número de sillas producidas

Maximizar $Z = 5x_1 + 5x_2$

Restricciones:

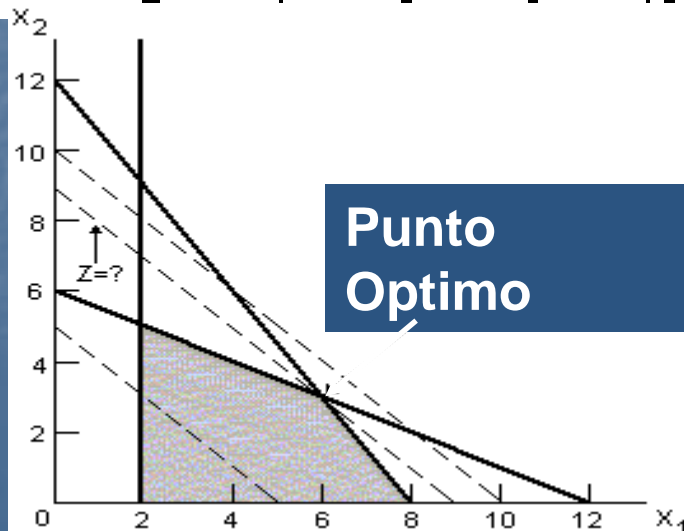
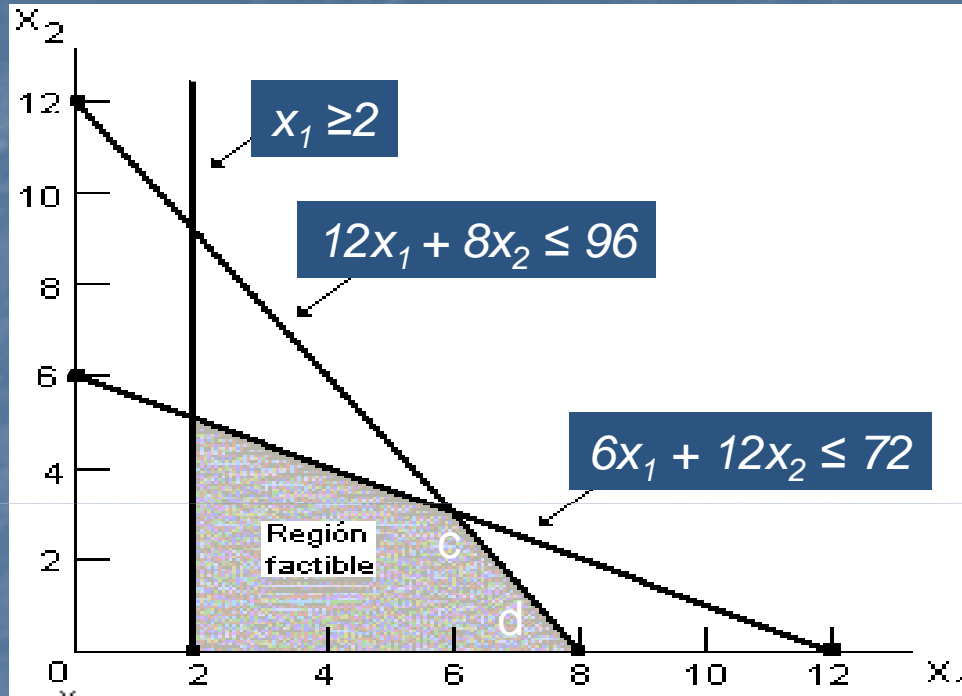
$$12x_1 + 8x_2 \leq 96$$

$$6x_1 + 12x_2 \leq 72$$

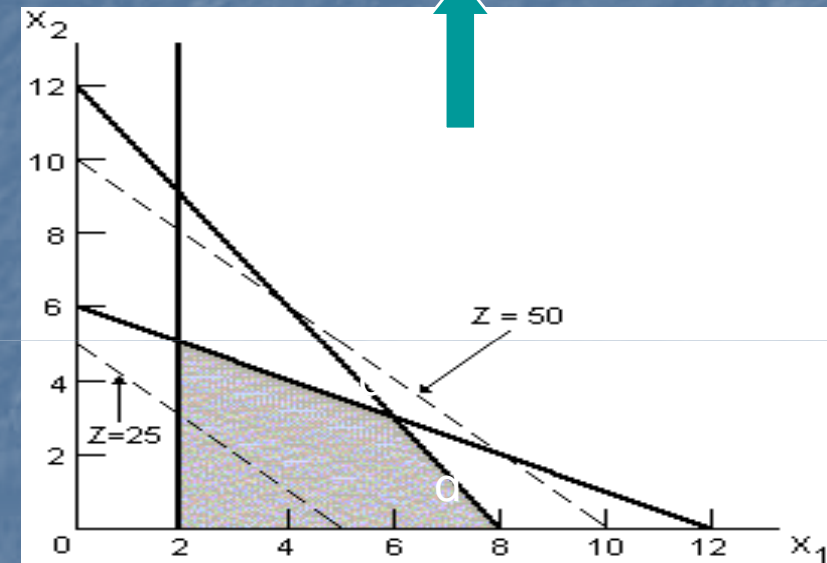
$$x_1 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \text{ENTEROS}$$

SOLUCION EJEMPLO 3



Análisis de la Maximización de la Función Objetivo:
 $Z = 5x_1 + 5x_2$



El punto que maximiza la Función Objetivo es el **punto c**.

Calculando el punto c como el punto de intersección de las dos rectas se obtiene que $x_1=6$, $x_2=3$, $Z= 45$

c. Sonia castro Ynfantes

Problemas Propuestos

En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se han de tener almacenados un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje es el mismo para los dos tipos de aceite (1 unidad monetaria) . ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea máximo?

Problema Propuesto 2:

Resuelva el siguiente modelo de programación lineal:

$$\begin{array}{llllll} \text{Maximizar} & Z & = & 3x_1 & + & 2x_2 \\ \text{sujeta a} & & & 1/40x_1 & + & 1/60x_2 & \leq & 1 \\ & & & 1/50x_1 & + & 1/50x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_1 & & & \geq & 30 \\ & & & & & x_2 & \geq & 20 \\ & & & x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Problema Propuesto 3:

Resuelva el siguiente modelo de programación lineal:

$$\begin{array}{llllll} \text{Maximizar} & Z & = & 2x_1 & - & x_2 \\ \text{sujeta a} & & & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\ & & & x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 & & \end{array}$$