PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMIA

ESTADISTICA INFERENCIAL
PRÁCTICA CALIFICADA 4

Clave: EST241
Horario: 0622
Profesora: Zaida Quiroz Cornejo

---

1. (8 puntos) El tiempo de realización en minutos de una determinada tarea dentro de un proceso industrial es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{x}{\theta^2}\exp(-x/\theta); \text{ si } x > 0$$

donde $\theta > 0$, $E(X) = 2\theta$ y $E(X^2) = 6\theta^2$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de tamaño n.

a) Calcule el estimador de θ por el método de momentos. (2 puntos)

b) Calcule el estimador máxima verosimilitud (EMV) de θ. (2 puntos)

c) ¿Qué propiedades cumple el EMV hallado? Jusitfique su respuesta probando sus afirmaciones. (2 puntos)

d) Calcule el EMV de E(X). (Sugerencia: Use la propiedad de invarianza) (1 punto)

e) Mediante un muestreo aleatorio simple se han recogido los siguientes 15 tiempos de realización de la tarea:

5.56; 2.23; 0.58; 1.37; 0.21; 1.98; 2.44; 2.71; 10.12; 4.69; 3.47; 1.73; 3.51; 1.19; 0.97.

Obtener la estimación por máxima verosimilitud del tiempo medio de realización del proceso. (Sugerencia: Use el resultado en d)) (1 punto)

2. (6 puntos) Una fábrica de chocolates encargo a dos empresas de estudios de mercado FRIC y FRAC que estimen el consumo promedio mensual μ de chocolate per cápita en la población peruana. La empresa FRIC obtiene los consumos mensuales de chocolate per cápita sobre una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ y la empresa FRAC una m.a.s. $Y_1, \ldots, Y_m$. Como las estimaciones de μ, $\bar{X}$ e $\bar{Y}$, dadas respectivamente por FRIC y FRAC no son iguales, la fábrica decide combinar las dos estimaciones, así proponen los estimadores de μ:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}; \quad \hat{\mu}_2 = \frac{n\bar{X} + m\bar{Y}}{n + m}$$

2.735333
2.3506

a) Pruebe si los estimadores son insegados. (2 puntos)

b) Pruebe la consistencia de los estimadores. (2 puntos)

c) ¿Qué estimador es más eficiente? (2 puntos)
(Sugerencia: Use el siguiente resultado $\frac{n+m}{4nm} > \frac{1}{n+m}$.)

d) La fábrica ahora propone tres estimadores de la varianza σ^2:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{S^2 + T^2}{2}; \; \hat{\sigma}_2^2 = \frac{nS^2 + mT^2}{n+m}; \; \hat{\sigma}_3^2 = \frac{nS^2 + mT^2}{n+m-2};$$

donde $S^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2$ y $T^2 = \frac{1}{m}\sum(Y_i - \bar{Y})^2$. ¿Qué estimador $\hat{\sigma}_i^2$ es insesgado o asintóticamente insesgado? (2 puntos)

Nota: $E(X_i) = E(Y_i) = \mu$, $V(X_i) = V(Y_i) = \sigma^2$, $E(S_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$, $E(T_m^2) = \frac{m-1}{m}\sigma^2$.

3. (6 puntos) Suponga que la diferencia (X) en soles del precio de venta de un bien menos el precio de venta de este mismo bien en una cadena de supermercados ABC (suponiendo que todos los supermercados de esta cadena venden el bien al mismo precio) se asume que es una v.a continua con la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2\theta^3} & \text{si } -\theta \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

siendo $\theta > 0$ un parámetro del modelo Si se toma una m.a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de las diferencias de precios del bien en n mercados menos el del precio del bien para la cadena de supermercados ABC

a) Halle el estimador de momentos de θ $\quad m_1 = E(x) = \frac{3x^2}{2\theta^3}$ (2 puntos)

b) Demuestre que el estimador de máxima verosimilitud de θ viene dado por:
$\hat{\theta}_{EMV} = \{|X_1|, \ldots, |X_n|\}$. $\quad E(x^2) =$ (2 puntos)

c) Si una muestra de las diferencias (X_i) de precios del bien menos el precio del bien en la cadena de supermercados ABC para 10 mercados arrojó los siguientes valores en soles:

$$1.25, -0.82, -1.2, 1.08, -0.92, 0.01, -1.5, -1.3, 1.18, -1.32$$

obtenga las estimaciones de momentos y de máxima verosimilitud para θ.
(2 puntos)

Pregunta Bonus

4. (2 puntos) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una m.a. de X, tal que $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$. Se define $W = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ como estimador de μ. Halle los valores de las constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que W sea MELI de μ.

Pando, 9 de Junio de 2018

$\alpha_1 \; n\bar{X}$