PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
PRÁCTICA CALIFICADA 2

25 de abril de 2015
Horario 522

Ejercicio 1. (5 puntos)

Sean X e Y tales que $Y \sim G(4;\, 2)$ y $X|\,Y = y \sim G(y;\, 2)$, $\forall y > 0$.

a) Halle $E(X\,|Y)$ y $E(XY\,|Y)$. Use la definición de esperanza condicional. (2,5 puntos)

b) Determine $E(X)$ y $E(XY)$. Use una propiedad básica de la esperanza condicional.

Ejercicio 2. (5 puntos)

Considere el modelo de regresión lineal dado por $Y_j = \alpha + \beta x_j + \epsilon_j$, para $j = 1, \ldots, n$; donde α y β son constantes desconocidas para estimar, $x_1, \ldots, x_n$ son constantes conocidas y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ variables aleatorias independientes y todas con media cero y varianza σ^2.

Los estimadores usuales son

$\hat{\beta} = \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j$ y $\hat{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} a_j Y_j$, donde $b_j = \dfrac{x_j - \bar{X}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}$ y $a_j = \dfrac{1}{n} - b_j \bar{X}$, para $j = 1, \ldots, n$.

Determine expresiones simplificadas para la covarianza entre $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ y para la varianza de $\hat{\beta}$.

Ejercicio 3. (3 puntos)

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas tienen la misma esperanza, μ, y la misma varianza σ^2.

a) Determine la varianza de $\bar{X}$. (1,5 puntos)

b) Determine la covarianza entre X_1 y $\sum_{i=1}^{n} X_i$. (1,5 puntos)

Ejercicio 4. (4 puntos)

Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $E(X) = 20$, $V(X) = 9$, $E(Y) = 10$, $V(Y) = 1$ y $Cov(X, Y) = 3$. La utilidad de venta 1 está dado por $4X - 2Y$, mientras que la de la venta 2 está dado por $7 + 3X + 5Y$.

a) Halle varianza de la utilidad de la venta 1. $V(3X+5X) = 9V(X) + 25V(Y) + 30\,Cov(X,Y)$ (2 puntos)

b) Halle la covarianza de estas utilidades. (2 puntos)

Ejercicio 5. (3 puntos)

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes. Se define la variable aleatoria $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$ Demuestre que $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - F_{X_1}(x)] \ldots [1 - F_{X_n}(x)]$.

J.F. San Miguel, 4 de abril de 2015.

1

2015-1

PC2

25 abril 2015

(1) $Y \sim G(4,2)$

$X/Y=y \sim G(y,2)$

a) ⊙ $E(X/Y) = E(X/Y=y) = \frac{y}{2}$

$$\boxed{E(X/Y) = \frac{Y}{2}}$$

pasando de variable integración a variable aleatoria

⊙ $E(XY/Y) = E(XY/Y=y) = y\,\underline{E(X/Y=y)}$

$y \cdot \frac{y}{2} = \frac{y^2}{2}$

$$\boxed{E(XY/Y) = \frac{Y^2}{2}}$$

pasando variable integración a variable aleatoria

5

b) ⊙ $E(X) = E(E(X/Y)) = E(Y/2) = \frac{1}{2}\underbrace{E(Y)}$

$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$$\boxed{E(X) = 1}$$

⊙ $E(XY) = E(E(XY/Y)) = E(Y^2/2) = (1/2)\underbrace{E(Y^2)}$

$= 1/2\,[V(Y) + E^2(Y)]$

$= 1/2\,[1 + 4] = 5/2$

$$\boxed{E(XY) = 5/2}$$

(2) $y_j = \alpha + \beta x_j + \varepsilon_j$; α, β : constantes por estimar
$x_1, \dots, x_n$: constantes conocidas.
$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$: variables aleatorias independientes
$\to E(\varepsilon_j) = 0$
$V(\varepsilon_j) = \sigma^2$

$$\text{cov}(\hat{\alpha}; \hat{\beta}) = \text{cov}\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{(x_j - \bar{x})\bar{x}}{\left(\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2\right)} \right)(\alpha + \beta x_j + \varepsilon_j) \; ; \; \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2} \right)(\alpha + \beta x_j + \varepsilon_j) \right)$$

$$\to = \text{cov}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j \; ; \; \sum_{j=1}^{n} b_j y_j \right)$$

Cambiamos "j" por "i" en la notación $\sum_{j=1}^{n} a_j y_j \to \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$

$$= \text{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \; ; \; \sum_{j=1}^{n} b_j y_j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \, \text{cov}(y_i \; ; \; y_j)$$

Cuando $i \neq j$, $\text{cov}(y_i ; y_j) = 0$; cuando $i = j \to \text{cov}(y_i ; y_i) = V(y_i)$

$$= \left[V(y_1) + \dots + V(y_n) \right] \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \quad ; \quad i = j$$

Pero: $V(y_j) = V(\alpha + \beta x_j + \varepsilon_j) = V(\varepsilon_j) = \sigma^2$

$$= \sigma^2 \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

$$\to = \sigma^2 \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{n} - \frac{\bar{x}(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right] \left[\frac{(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2} \right]$$

$$= \sigma^2 \left[\underbrace{\frac{1}{n} \frac{\sum_{j=1} (x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2}}_{0} - \bar{x} \frac{\cancel{\sum_{j=1} (x_j - \bar{x})^2}}{\left[\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2\right]^{\cancel{2}}} \right]$$

$$\boxed{\operatorname{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \sigma^2 \left[\frac{-\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right]}$$

$$\odot \quad V(\hat{\beta}) = V\left(\sum_{j=1}^{n} b_j y_j \right) = V\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2} (\alpha + \beta x_j + \varepsilon_j) \right)$$

$$= V\left(\cancel{\alpha \frac{\sum (x_j - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} + \beta \frac{\sum (x_j)(x_j - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \sum \varepsilon_j \frac{(x_j - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

$$= V\left(\beta + \frac{\sum \varepsilon_j (x_j - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

$$= V\left(\frac{\sum (x_j - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \varepsilon_j \right) = \frac{\sum (x_j - x)^2}{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2 \right]^2} \sigma^2$$

$$\boxed{V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}$$

5

(3) $X_1; \ldots; X_n$ variables aleatorias independientes con media μ y σ^2

a) $V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = V\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)$

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \ldots + X_n)$$

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\left(\sigma^2 + \ldots + \sigma^2\right) = \frac{n\,\sigma^2}{n^2} = \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}$$

b) $Cov\left(X_1; \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = Cov\left(X_1; X_1 + \ldots + X_n\right)$

$$Cov\left(X_1; \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = Cov(X_1; X_1) + \ldots + Cov(X_1; X_n)$$

Como son independientes : $Cov(X_1; X_i) = 0 \;;\; i \neq 1$

$$Cov\left(X_1; \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = V(X_1) = \boxed{\sigma^2}$$

3

(4) $E(X) = 20 \;;\; V(X) = 9 \;;\; E(Y) = 10 \;;\; V(Y) = 1$

$Cov(X,Y) = 3$

utilidad 1: $4X - 2Y$

utilidad 2: $7 + 3X + 5Y$

a) $V(4X - 2Y) = 16\,V(X) + 4\,V(Y) - 16\,Cov(X,Y)$

$$= 16(9) + 4(1) - 16(3)$$

$$= 144 + 4 - 48$$

$$\boxed{V(4X - 2Y) = 100}$$

b) $\mathrm{Cov}(4X-2Y\,;\,7+3X+5Y)$

$= \mathrm{Cov}(4X-2Y\,;\,3X) + \mathrm{Cov}(4X-2Y\,;\,5Y)$

$= \mathrm{Cov}(4X,3X) + \mathrm{Cov}(-2Y\,;3X) + \mathrm{Cov}(4X,5Y) + \mathrm{Cov}(-2Y,5Y)$

$= 12\,\mathrm{Cov}(X,X) - 6\,\mathrm{Cov}(Y,X) + 20\,\mathrm{Cov}(X,Y) - 10\,\mathrm{Cov}(Y,Y)$

$= 12\,V(X) + 14\,\mathrm{Cov}(X,Y) - 10\,V(Y)$

$= 12(9) + 14(3) - 10(1) = 108 + 42 - 10 = 140$

$\boxed{\mathrm{Cov}(4X-2Y\,;\,7+3X+5Y) = 140}$

4

(5) $X_{(1)} = \min\{X_1;\dots;X_n\}$

Demostrar: $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1-F_{X_1}(x)]\dots[1-F_{X_n}(x)]$

$F_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} \le x)$

$= P(X_1 \le x \cup \dots \cup X_n \le x)$

$= 1 - P(X_1 \le x \cup \dots \cup X_n \le x)^c$

$= 1 - P(X_1 > x \cap \dots \cap X_n > x)$

$= 1 - P(X_1 > x) \times \dots \times P(X_n > x)$

$\boxed{F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - F_{X_1}(x)] \times \dots \times [1 - F_{X_n}(x)]}$

2