PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

ESTADÍSTICA INFERENCIAL

EXAMEN FINAL

CÓDIGO: EST-241

PROFESOR: José Flores Delgado

HORARIO: 522

FECHA: 11 de julio de 2015

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 horas y 30 minutos.

Ejercicio 1 (6 puntos)

El tiempo, en meses, hasta que un empleado de cierto sector vuelve a emplearse se considera una variable aleatoria $X \sim W(2;\,\theta)$, es decir, $f_X(x) = 2\theta\, x\, e^{-\theta x^2}$, $x > 0$, donde $\theta > 0$. Para hacer inferencias se tomará una muestra aleatoria de X de tamaño $n = 100$.

a) Deducir el estimador de máxima verosimilitud de θ y determine si este es consistente (fuertemente). (2 puntos)

b) Use la distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud de θ, en su versión de la información de Fisher observada, para deducir un intervalo del 95 % de confianza para estimar a θ y, a partir de este, deduzca uno para estimar el tiempo promedio para volver a emplearse este sector. (2,5 puntos)

c) Registrada la muestra se obtuvieron $\sum_{j=1}^{100} X_j = 494{,}48$ y $\sum_{j=1}^{100} X_j^2 = 3243{,}1$. Concluya respecto al tiempo promedio para volver a emplearse en este sector, a partir del resultado correspondiente a la parte anterior. (1,5 puntos)

Ejercicio 2 (7 puntos)

Sobre la rentabilidad, X, de cierta operación financiera, se sabe que tiene distribución normal, que su promedio vale cero, pero se desconoce su desviación estándar (σ), es decir, se sabe que $X \sim N(0, \sigma^2)$. Se desea contrastar las hipótesis $H_0 : \sigma = 5$ y $H_1 : \sigma > 5$, a partir de una muestra aleatoria de 20 observaciones de X y un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

a) Deducir la regla de decisión U.M.P. (3 puntos)

b) Si $\sigma = \overset{5}{\cancel{4}},4$ determine la probabilidad de que cometer un error de tipo II al usar la regla de decisión anteriormente deducida. (1,5 puntos)

c) Al tomar la muestra aleatoria se obtuvieron los valores siguientes de la rentabilidad: $\sum_{j=1}^{20} X_j = 9{,}01$, $\sum_{j=1}^{20} X_j^2 = 749{,}9427$. Determine si la estimación de máxima verosimilitud de $\sigma = \sqrt{\sum_{j=1}^{20} X_j^2/20}$, correspondiente a esta muestra, proporciona una evidencia a favor de la hipótesis H_1. ¿Qué se concluye según el resultado que obtuvo en la parte a? Comente sobre estas dos conclusiones. (2,5 puntos)

10 12:30

Ejercicio 3 (7 puntos)

El ingreso, en miles de soles, de cierto sector laboral se considera una variable aleatoria continua $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Para las inferencias se tomará una muestra aleatoria de tamaño 25.

a) Deducir los estimadores de μ y σ^2, por máxima verosimilitud. (1,5 puntos)

b) Determine si los estimadores anteriores son consistentes (fuertemente). (1,5 puntos)

Recuerde que $\frac{\sum_{j=1}^{25}(X_j-\bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{25}X_j^2}{n} - \bar{X}^2$.

c) Si fuera $\mu = 2{,}5$ miles de soles, determine el estimador de máxima verosimilitud de σ^2 en este caso. (1 punto)

d) Deducir la regla de decisión para contrastar las hipótesis $H_0 : \mu = 2{,}5$ y $H_1 : \mu \neq 2{,}5$, a partir de una muestra aleatoria de tamaño 25 y un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, según el método de la razón de verosimilitud. (3 puntos)

Puede ser de utilidad la identidad $\sum_{j=1}^{25}(X_j - c)^2 = \sum_{j=1}^{25}(X_j - \bar{X})^2 + 25(\bar{X} - c)^2, \forall c \in \mathbb{R}$.

Recordatorio de propiedades y fórmulas

R_1) $X \sim W(\alpha; \beta)$: $E(X^t) = \frac{\Gamma(1+\frac{t}{\alpha})}{\beta^{t/\alpha}}, \forall t > 0$. $\Gamma(1{,}5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $n \in \mathbb{N}^+ : \Gamma(n) = (n-1)!$

R_2) $X \sim N(\mu; \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}; -\infty < x < \infty; \ -\infty < \mu < \infty; \ \sigma > 0$.

R_3) $X \sim N(\mu; \sigma^2)$: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0; 1)$; $F_X(x) = F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

R_4) $X \sim N(\mu; \sigma^2)$: $W = \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$; $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$. $S^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar{X})^2}{n-1}$.

R_5) Método de la Variable Base:

i) Determinar una variable base $W = W(X_1, \ldots, X_n; \theta)$.

ii) Encontrar los valores a y b, tales que $F_W(a) = \frac{\alpha}{2}$ y $F_W(b) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

iii) Hallar L_1 y L_2, tales que $a \leq W \leq b \Leftrightarrow L_1 \leq \theta \leq L_2$.

R_6) Información de Fisher observada: $H(\hat{\theta})$, $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ, $H(\theta) = -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} Ln(\mathcal{L}(\theta, X_1, \ldots, X_n))$ y $\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}(\theta, X_1, \ldots, X_n) = f_{X_1}(X_1) \cdots f_{X_n}(X_n)$.

$\sqrt{H(\widehat{\theta})}\ (\widehat{\theta} - \theta) \overset{aprox.}{\sim} N(0{,}1)$ (versión con la información de Fisher observada).

R_7) Lema de Neyman-Pearson $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1$.

Se rechaza H_0, si $\frac{\mathcal{L}(\theta_1)}{\mathcal{L}(\theta_0)} > c$, c es tal que P(rechazar H_0, siendo verdadera) $= \alpha$.

R_8) Método de la razón de verosimilitud $H_0 : \theta \in \Theta_0$, $H_1 : \theta \in \Theta_1$, $\Theta = \Theta_0 \uplus \Theta_1$.

Se rechaza H_0 si $\frac{\mathcal{L}(\hat{\theta}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\theta}_{mv})} < c$, donde $\hat{\theta}_{mv} = \underset{\theta \in \Theta}{\text{Máximo}}\, \mathcal{L}(\theta)$, $\hat{\theta}_0 = \underset{\theta \in \Theta_0}{\text{Máximo}}\, \mathcal{L}(\theta)$ y c es tal que P(rechazar H_0, siendo verdadera) $= \alpha$.

J.F. San Miguel, 11 de julio de 2015.

2015-1

Ex. Final

(1) X: tiempo en meses que un empleado vuelve a emplearse

$X \sim W(2,\theta) \rightarrow f_X(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} \quad ; \quad x > 0 \; ; \; \theta > 0$

Se toma muestra aleatoria $n = 100$

a) Deducir estimador máx verosimilitud y ver si es consistente. (fuertemente)

$$\mathcal{L}(\theta) = f_{X_1}(x_1) \times \cdots \times f_{X_{100}}(x_{100})$$

$$\mathcal{L}(\theta) = 2\theta (x_1) e^{-\theta (x_1)^2} \times \cdots \times 2\theta (x_{100}) e^{-\theta (x_{100})^2}$$

$$\mathcal{L}(\theta) = (2)^{100} (\theta)^{100} \left[\prod_{T=1}^{100} x_T\right] e^{-\theta \sum_{T=1}^{100} x_T^2}$$

tomando logaritmo:

$$l(\theta) = \ln(\mathcal{L}(\theta)) = 100 \ln(2) + 100 \ln(\theta) + \sum_{T=1}^{100} \ln(x_T) - \theta \sum_{T=1}^{100} x_T^2$$

derivando respecto a θ:

$$\frac{d\, l(\theta)}{d\theta} = \frac{100}{\theta} - \sum_{T=1}^{100} x_T^2 = 0$$

$$\frac{100}{\theta} = \sum_{T=1}^{100} x_T^2$$

$$\frac{100}{\sum_{T=1}^{100} x_T^2} = \theta$$

Estimador de máxima verosimilitud:

$$\boxed{\frac{1}{\overline{x^2}} = \hat{\theta}_{MV}}$$

Ver si es fuertemente consistente:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_{MV} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\overline{X^2}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \overline{X^2}} \xRightarrow{\text{por ley Fuerte grandes numeros}} = \frac{1}{E(X^2)}$$

$$= \frac{1}{\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{2}\right)}{\theta^{2/2}}} = \frac{\theta}{\Gamma(2)} = \frac{\theta}{1!} = \theta$$ casi seguramente.

∴ Dado que $\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_{MV} = \theta$; casi seguramente, el estimador maximo verosimilitud es fuertemente consistente.

b) Usar distribución asintótica en versión información Fisher observada para hallar intervalo 95% confianza para estimar θ y a partir de este uno para estimar tiempo promedio para volver a emplearse.

Dado que $H(\theta) = \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \ln\left(\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n)\right) \right]$

tenemos que $\ln\left(\mathcal{L}(\theta; x_1, \dots, x_n)\right) = 100 \ln(2) + 100 \ln(\theta) + \sum_{i=1}^{100} \ln(x_i) - \theta \sum x_i^2$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \ln\left(\mathcal{L}(\theta; x_1, \dots, x_n)\right) = \frac{-100}{\theta^2}$$

evaluando en $\hat{\theta}$: $H(\hat{\theta}) = \frac{-100}{(\hat{\theta})^2}$

$$\boxed{\sqrt{-H(\hat{\theta})} = \sqrt{\frac{100}{(\hat{\theta})^2}}}$$

tenemos $W = \sqrt{-H(\hat{\theta})}\,(\hat{\theta}-\theta) = \boxed{\sqrt{100}\cdot\dfrac{(\hat{\theta}-\theta)}{\hat{\theta}} \overset{aprox}{\sim} N(0;1)}$; $\boxed{n=100}$

usando W como variable base para hallar intervalo 95% confianza:

$\hookrightarrow \quad P(a \leq W \leq b) = 0{,}95$

$F_W(a) = 0{,}025$; $F_W(b) = 0{,}975$

$\hookrightarrow a = -1{,}96 \qquad \hookrightarrow b = 1{,}96$

$$P(-1{,}96 \leq W \leq 1{,}96) = 0{,}95$$

$$P\left(-1{,}96 < \sqrt{100}\left(1-\frac{\theta}{\hat{\theta}}\right) < 1{,}96\right) = 0{,}95$$

$$P\left(\frac{-1{,}96}{\sqrt{100}} \leq 1-\frac{\theta}{\hat{\theta}} \leq \frac{1{,}96}{\sqrt{100}}\right) = 0{,}95$$

$$P\left(\frac{-1{,}96}{\sqrt{100}} - 1 \leq -\frac{\theta}{\hat{\theta}} \leq \frac{1{,}96}{\sqrt{100}} - 1\right) = 0{,}95$$

$$P\left(1-\frac{1{,}96}{\sqrt{100}} \leq \frac{\theta}{\hat{\theta}} \leq 1+\frac{1{,}96}{\sqrt{100}}\right) = 0{,}95$$

$$P\left(\hat{\theta}\left(1-\frac{1{,}96}{\sqrt{100}}\right) \leq \theta \leq \hat{\theta}\left(1+\frac{1{,}96}{\sqrt{100}}\right)\right) = 0{,}95$$

tenemos que $\theta \in \left[\hat{\theta}\left(1-\dfrac{1{,}96}{\sqrt{100}}\right) ; \hat{\theta}\left(1+\dfrac{1{,}96}{\sqrt{100}}\right)\right]$ con 95% confianza.

(f) tiempo promedio : $E(X) = \dfrac{\Gamma(1+1/2)}{\theta^{1/2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\theta^{1/2}} = \left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\theta^{1/2}}\right)$

del resultado anterior : $\hat{\theta}\left(1-\dfrac{1{,}96}{\sqrt{100}}\right) \leq \theta \leq \hat{\theta}\left(1+\dfrac{1{,}96}{\sqrt{100}}\right)$

$$0{,}804\,\hat{\theta} \leq \theta \leq 1{,}196\,\hat{\theta}$$

Aplico función raíz cuadrada porque es función creciente no afecta desigualdad

$$(0{,}804\,\hat{\theta})^{1/2} \leq \theta^{1/2} \leq (1{,}196\,\hat{\theta})^{1/2}$$

2

invertimos:

$$\frac{1}{(1{,}196\,\hat{\theta})^{1/2}} \leq \theta^{-1/2} \leq \frac{1}{(0{,}804\,\hat{\theta})^{1/2}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\frac{1}{(1{,}196\,\hat{\theta})^{1/2}}\right) \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\frac{1}{(\theta)^{1/2}}\right) \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\frac{1}{(0{,}804\,\hat{\theta})^{1/2}}\right)$$

$$\underbrace{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\frac{1}{(\theta)^{1/2}}\right)}_{\text{Tiempo promedio}} \in \left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\frac{1}{(1{,}196\,\hat{\theta})^{1/2}}\right) ; \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\frac{1}{(0{,}804\,\hat{\theta})^{1/2}}\right)\right]$$ con 95% confianza.

c) A partir muestra se obtuvo: $\sum_{i=1}^{100} X_i = 494{,}48$; $\sum_{i=1}^{100} X_i^2 = 3243{,}1$

concluir respecto tiempo promedio para volver emplearse en este sector:

primero hallamos: $\hat{\theta}_{MV} = 0{,}03$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\frac{1}{(\theta)^{1/2}}\right) \in [\,4{,}6786 \; ; \; 5{,}7063\,]$$ con 95% confianza

∴ el tiempo promedio en volver emplearse oscila entre 4,6786 y 5,7063 meses con 95% de confianza.

(2) X: rentabilidad operación financiera.

$X \sim N(0;\sigma^2)$

Hipótesis a contrastar: $\begin{cases} H_0 : \sigma = 5 \\ H_1 : \sigma > 5 \end{cases}$

muestra aleatoria $n = 20$; $\alpha = 0{,}05$.

a) Deducción regla UMP.

1º Se busca plantear problema: $\begin{cases} H_0 : \sigma = 5 \\ H_1 : \sigma = \sigma_1 \; ; \; \sigma_1 > 5 \end{cases}$

Usando Neyman - Pearson:

$-\infty < x_j < \infty$

$j = 1;...;20$

$$\mathcal{L}(\sigma) = f_{X_1}(x_1) \times \dots \times f_{X_{20}}(x_{20}) = (2\pi)^{-1/2}(\sigma)^{-1} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x_1^2)} \times \dots \times (2\pi)^{-1/2}(\sigma)^{-1} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x_{20}^2)}$$

$$\mathcal{L}(\sigma) = (2\pi)^{-(20/2)} (\sigma)^{-20} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{20} x_j^2}$$

$$\frac{\mathcal{L}(\sigma_1)}{\mathcal{L}(5)} = \frac{\cancel{(2\pi)^{-(20/2)}} \overset{+}{(\sigma_1)^{-20}} e^{\frac{-1}{2\sigma_1^2}\sum_{j=1}^{20} x_j^2}}{\cancel{(2\pi)^{-(20/2)}} \underbrace{(5)^{-20}}_{+} e^{\frac{-1}{50}\sum_{j=1}^{20} x_j^2}} > C$$

Dado que $(\sigma_1)^{-20}$ y $(5)^{-20}$ son positivos; pasan al otro lado de la desigualdad sin afectar esta

$$e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sum_{j=1}^{20} x_j^2} > C$$

Tomando logaritmos porque es función creciente y no afecta desigualdad.

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)}_{+} \sum_{j=1}^{20} x_j^2 > C$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{20} X_i^2 > C}$$

$\alpha = 0{,}05 = P($ rechazar Ho ; siendo verdadera $)$

$\alpha = 0{,}05 = P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i^2 > C \; ; \; \sigma = 5 \right)$

(*) Dado $X_i \sim N(0; \sigma^2) \rightarrow Z = \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0;1) \rightarrow Z^2 = \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

$\hookrightarrow \boxed{W = \frac{\sum_{i=1}^{20} X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)}$

Para nuestro caso: $n=20$

$0{,}05 = P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i^2 / (5)^2 > C/(5)^2 \; ; \; \sigma = 5 \right)$

$0{,}05 = P(W > C/25) \quad ; \quad W \sim \chi^2(20)$

$0{,}05 = 1 - P(W \leq C/25)$

$P(W \leq C/25) = 0{,}95$

$\hookrightarrow C/25 = 31{,}4105 \rightarrow C = 78\cancel{5}{,}2625$

$\hookrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{20} X_i^2 > 785{,}2625}$: regla decisión

Como esta regla decisión para rechazar Ho para $\begin{cases} H_0 : \sigma = 5 \\ H_1 : \sigma = \sigma_1 ; \sigma_1 > 5 \end{cases}$

no depende de "σ"; se considera regla decisión uniformemente más poderosa para

$\begin{cases} H_0 : \sigma = 5 \\ H_1 : \sigma > 5 \end{cases}$

(2)

b) Si $\sigma = 5{,}4$; determinar prob. cometer error tipo II al usar regla decisión anteriormente deducida

$$\beta = P(\text{aceptar } H_0 \text{ ; siendo falsa})$$

$$\beta = P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i^2 \leq 785{,}2625 \ ; \ \sigma = 5{,}4 \right)$$

Recordar $X_i \sim N(0;\sigma^2) \Rightarrow Z = \dfrac{X_i}{\sigma} \sim N(0;1) \Rightarrow Z^2 = \dfrac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

$\hookrightarrow W = \sum \dfrac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

Para nuestro caso : $n=20$

$$\beta = P\left(\sum_{i=1}^{20} x_i^2 / \sigma^2 \leq 785{,}2625/\sigma^2 \ ; \ \sigma = 5{,}4 \right)$$

$$\beta = P\left(W \leq (785{,}2625)/(5{,}4)^2 \ ; \ \sigma = 5.4 \right)$$

$$\beta = P(W \leq 26{,}9294) \ ; \quad W \sim \chi^2(20)$$

$$\boxed{\beta = 0{,}9}$$

$\hookrightarrow$ se aceptará H_0 siendo falsa con un riesgo de $\beta = 0{,}9$.

c) Al tomar muestra $\sum_{i=1}^{20} X_i = 9{,}01$; $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 749{,}9427$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} X_i^2}{20}} = 6{,}1234$$

Dado que $\hat{\sigma} = 6{,}1234 > 5$; estimación máx verosimilitud se inclina por H_1 y no por H_0.

Ahora ; Dado $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 749{,}9427 \leq 785{,}2625$; se acepta H_0 siendo falsa con un riesgo $\cancel{0{,}9}$

$\rightarrow$ estimación de máxima verosimilitud se inclina por H_1 ; pero muestra y regla decisión nos inclinan hacia aceptar H_0 con riesgo de ser falsa de $0{,}9$; riesgo muy ALTO.

solo si $\sigma = 5{,}4$

(3) X : ingreso de cierto sector laboral

$X \sim N(\mu ; \sigma^2)$; $n = 25$: muestra.

a) Hallar estimaciones por máx verosimilitud

$$\mathcal{L}(\mu,\sigma^2) = (2\pi)^{-1/2} (\sigma^2)^{-1/2} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x_1-\mu)^2} \times \cdots \times (2\pi)^{-1/2} (\sigma^2)^{-1/2} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x_{25}-\mu)^2}$$

$$\mathcal{L}(\mu,\sigma^2) = (2\pi)^{-25/2} (\sigma^2)^{-25/2} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{25}(x_i-\mu)^2}$$

En logaritmo:
$$l(\mu,\sigma^2) = \ln(\mathcal{L}(\mu;\sigma^2)) = -\frac{25}{2}\ln(2\pi) - \frac{25}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{25}(x_i-\mu)^2$$

(*) $$\frac{d\, l(\mu,\sigma^2)}{d\mu} = \frac{-\cancel{1}}{\cancel{2}\sigma^2}\left[\cancel{2}\sum_{i=1}^{25}(x_i-\mu)(-\cancel{1})\right] = 0$$

$$+\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{25}x_i - 25\mu\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{25}x_i = 25\mu$$

$$\boxed{\hat{\mu}_{mv} = \frac{\sum_{i=1}^{25}x_i}{25} = \bar{X}}$$: estimación máxima verosimilitud de μ. $(n=25)$

(*) $$\frac{d\, l(\mu,\sigma^2)}{d\sigma^2} = \frac{-25}{2\sigma^2} - \left[\sum_{i=1}^{25}(x_i-\mu)^2\right]\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{(\sigma^2)^2}\right) = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{25}(x_i-\mu)^2}{\cancel{2}(\sigma^2)^{\cancel{2}}} = \frac{25}{\cancel{2}\sigma^{\cancel{2}}}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25}(x_i-\mu)^2}{25} \quad ; \ (n=25)$$

Dado que $\boxed{\hat{\mu}_{mv} = \bar{X}}$

reemplazamos:

$$\boxed{\hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}{25}}$$

; estimador maxima verosimilitud para σ^2 dado $n = 25$.

b) Ver si estimadores son consistentes fuertemente

⊙ $\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_{MV} = \lim_{n\to\infty} \bar{x}$

por ley fuerte grandes numeros $= E(x) = \mu$; casi seguramente

$\therefore \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_{MV} = \mu$; casi seguramente : por lo tanto es consistente fuertemente

⊙ $\lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}^2_{MV} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}{25}$; por dato: $\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\sum_{i=1}^{25} x_i^2}{25} - (\bar{x})^2 \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\overline{x^2} - (\bar{x})^2 \right]$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} \overline{x^2} \right] - \left[\lim_{n\to\infty} \bar{x} \right]^2$$

(*) por ley fuerte grandes números

$$= E(x^2) - [E(x)]^2 = V(x) + \cancel{[E(x)]^2} - \cancel{[E(x)]^2} = V(x) = \sigma^2$$

casi seguramente

$\therefore \lim_{n\to\infty} \hat{\sigma}^2_{MV} = \sigma^2$ casi seguramente ; por lo tanto es consistente fuertemente.

c) Si $\mu = 2,5$ miles soles ; determina estimador máx verosimilitud

Planteando $L(\sigma^2)$ ahora con $\mu = 2,5$

$$L(\sigma^2) = (2\pi)^{-25/2} (\sigma^2)^{-25/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{25}(x_i - 2,5)^2}$$

En logaritmo:

$$l(\sigma^2) = \ln(L(\sigma^2)) = \frac{-25}{2}\ln(2\pi) - \frac{25}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum^{25}(x_i - 2,5)^2$$

derivando $l(\sigma^2)$ respecto σ^2:

$$\frac{d\,l(\sigma^2)}{d\sigma^2} = \frac{-25}{2\sigma^2} - \left[\sum_{i=1}^{25}(x_i - 2,5)^2\right]\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{(\sigma^2)^2}\right) = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{25}(x_i - 2,5)^2}{\cancel{2}(\sigma^2)^{\cancel{2}}} = \frac{25}{\cancel{2}\cancel{\sigma^2}}$$

estimador maxima verosimilitud para σ^2 cuando $\mu = 2,5$:

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{25}(x_i - 2,5)^2}{25} = \hat{\sigma}^2_{MV}}$$

d) Deducir regla decisión para contrastar $\begin{cases} H_0 : \mu = 2,5 \\ H_1 : \mu \neq 2,5 \end{cases}$

A partir una muestra tamaño $n = 25$ y $\alpha = 0,05$ según razón verosimilitud.

$\begin{cases} H_0 : \mu \in \Theta_0 \\ H_1 : \mu \in \Theta_1 \end{cases}$; $\Theta_0 = \{2,5\}$; $\Theta_1 = \mathbb{R} - \{2,5\}$; $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 = \mathbb{R}$

① máximo local:

$$\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}^2_0 \quad \max L(\mu; \sigma^2) \quad \text{s.a. } \mu \in \Theta_0$$

$$\boxed{\hat{\mu}_0 = 2,5 \qquad \hat{\sigma}^2_0 = \frac{\sum_{i=1}^{25}(x_i - 2,5)^2}{25}}$$

Θ máximo global : $\hat{\mu}_{mv}, \hat{\sigma}^2_{mv} = \max_{\mu \in \Theta} \mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$

$$\hookrightarrow \boxed{\hat{\mu}_{mv} = \bar{X} \quad \Big| \quad \hat{\sigma}^2_{mv} = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}{25}}$$

Planteamos :

$$\frac{\mathcal{L}(\hat{\mu}_0)}{\mathcal{L}(\hat{\mu}_{mv})} = \frac{\cancel{(2\pi)^{-25/2}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - 2,5)^2}{\cancel{25}} \right)^{-25/2} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\cancel{\sum_{i=1}^{25} (x_i - 2,5)^2 / \sum (x_i - 2,5)^2}\right) 25}}{\cancel{(2\pi)^{-25/2}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}{\cancel{25}} \right)^{-25/2} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\cancel{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 / \sum (x_i - \bar{x})^2}\right) . 25}} < C$$

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{25} (x_i - 2,5)^2 \right]^{-25/2} \cancel{e^{-25/2}}}{\left[\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 \right]^{-25/2} \cancel{e^{-25/2}}} < C$$

$$\hookrightarrow \frac{\left[\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 \right]^{25/2}}{\left[\sum_{i=1}^{25} (x_i - 2,5)^2 \right]^{25/2}} < C$$

elevando a 2/25 no afectará a la desigualdad :

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 \right]}{\left[\sum_{i=1}^{25} (x_i - 2,5)^2 \right]} < C$$

invierto y cambia desigualdad :

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{25} (x_i - 2,5)^2 \right]}{\left[\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 \right]} > C \quad ;$$

por dato

$$\sum_{i=1}^{25} (x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 + 25 (\bar{x} - c)^2 \quad ; c \in \mathbb{R}$$

Para nuestro caso : $c = 2,5$

$$1 + \frac{\left[25 (\bar{x} - 2,5)^2 \right]}{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2} > C \quad \hookrightarrow \quad \boxed{\frac{25 (\bar{x} - 2,5)^2}{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2} > C}$$

$\alpha = 0{,}05 = P(\text{rechazar } H_0 \text{ siendo verdadera})$

$$\alpha = 0{,}05 = P\left(\frac{25\left[\bar{x} - 2{,}5\right]^2}{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2} > C \quad ; \quad \mu = 2{,}5 \right)$$

$$0{,}05 = P\left(\frac{25\,(\bar{x} - 2{,}5)^2 \cdot (n-1)}{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2} > C(n-1) \quad , \quad \mu = 2{,}5 \right)$$

$$0{,}05 = P\left(\sqrt{\frac{25\,(\bar{x} - 2{,}5)^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)}} > \sqrt{C(n-1)} \quad ; \quad \mu = 2{,}5 \right)$$

$$0{,}05 = P\left(\frac{\sqrt{25}\,(\bar{x} - 2{,}5)}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)}} > \sqrt{C(n-1)} \quad ; \quad \mu = 2{,}5 \right) ;$$

$$0{,}05 = P\left(T > \sqrt{C(n-1)} \right) \quad ; \quad T \sim t(n-1)$$

$$T \sim t(24)$$

$$0{,}05 = 1 - P\left(T \leq \sqrt{24C}\right)$$

$$P\left(T \leq \sqrt{24C}\right) = 0{,}95$$

$$\sqrt{24C} = 1{,}7109$$

$$24\,C = (1{,}7109)^2$$

$$C = (1{,}7109)^2 / 24 = 0{,}121965$$

<u>regla decisión</u> :

rechazar H_0 con riesgo de que sea verdadera de $\alpha = 0{,}05$

$$\boxed{\frac{25\left[\bar{x} - 2{,}5\right]^2}{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2} > 0{,}121965}$$