PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMIA

2015-2 calderón

ESTADISTICA INFERENCIAL
PRIMER EXAMEN

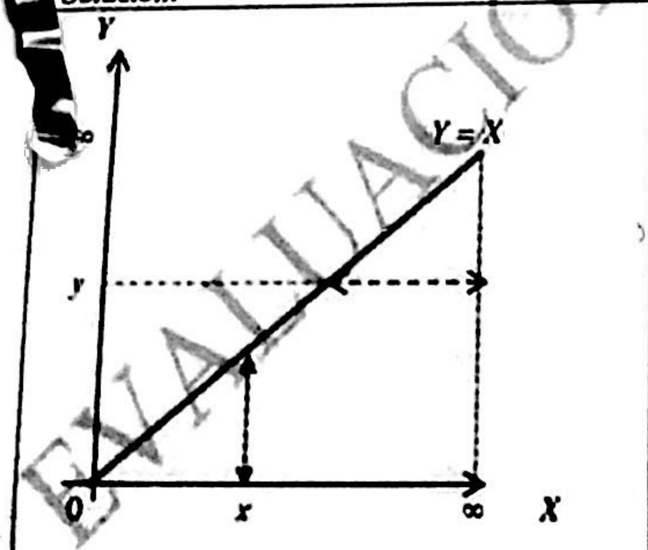
Problema 1 (5 puntos)
En una región el Ingreso Familiar X es una v.a.c. con distribución normal $N(\mu,\sigma^2)$ con $\mu = 400$ y $\sigma^2 = 50^2$ y el costo de una canasta alimentaria mínima es 425. Hay dos alternativas de inversión estatal para la región: con la primera el ingreso de todas las familias subirá en 50 unidades monetarias mientras que con la segunda habrá un incremento de 3% en el ingreso de cada familia ¿Con cuál alternativa habrá menos porcentaje de familias pobres en la región? Asuma que no cambia el costo de la canasta.

Solución:
Con la primera alternativa, si Y = Nuevo ingreso, entonces $Y=X+50$ y la proporción de familias pobres sería igual a $P(Y \le 425) = P(X+50 \le 425) = P(X \le 375) = P\left(Z \le \frac{(375-400)}{50}\right) = P(Z \le -0.5)) = 0.3085$
Con la segunda alternativa, si W = Nuevo ingreso, entonces $W=X+0.03X=1.03X$ y la proporción de familias pobres sería igual a $P(W \le 425) = P(1.03X \le 425) = P(X \le 412.6) = P\left(Z \le \frac{(412.6-400)}{50}\right) = P(Z \le 0.25) =$ 0.5987
Con la primera alternativa habrá menos porcentaje de familias en condición de pobreza.

Problema 2 (7 puntos)
Sea (X,Y) vector aleatorio donde X = Ingreso e Y = Consumo, con f. de densidad conjunta:
$f_{XY}(x,y) = cy^3e^{-x} \quad 0 < y < x,\ 0 < x < \infty, c > 0$ constante.

a) Hallar el valor de c. (1 punto)
b) Hallar las distribuciones marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. (1 punto)
c) Hallar el vector de medias y la matriz de varianza covarianza del vector ¿Cuán fuerte es la relación entre Consumo e Ingreso según este modelo? (2 puntos)
d) ¿Por cada unidad monetaria adicional de ingreso, en promedio ¿Cuánto se destina al consumo? (2 puntos)
e) Si se quiere estimar el consumo Y usando $\hat{Y} = E(Y|X)$. Calcule $Cov(Y,\hat{Y})$. (1 punto)

Solución:



a)
$$1 = \int_0^\infty \left[\int_0^x cy^3e^{-x}dy\right]dx = c\int_0^\infty e^{-x}\left[\int_0^x y^3dy\right]dx$$
$$= c\int_0^\infty \frac{x^4}{4}e^{-x}dx = c\frac{1}{4}\underbrace{\int_0^\infty x^4e^{-x}dx}_{\Gamma(5)} \Rightarrow c\frac{\Gamma(5)}{4} = 1 \Rightarrow$$
$$c\frac{4!}{4} = 1 \Rightarrow 6c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{6}.$$

b) $f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{6}y^3e^{-x}dy = \frac{1}{6}e^{-x}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^x = \frac{x^4e^{-x}}{24} \quad 0 < x < \infty$
$f_Y(y) = \int_y^\infty \frac{1}{6}y^3e^{-x}dx = \frac{1}{6}y^3[-e^{-x}]_y^\infty = \frac{y^3e^{-y}}{6} \quad 0 < y < \infty$
$X \sim \Gamma(x;\alpha=5,\beta=1)$ y $Y \sim \Gamma(y;\alpha=4,\beta=1)$.

c) Como las distribuciones de X e Y son conocidas (ambas Gamma) identificamos directamente las medias y varianzas:
$\mu = \binom{5}{4}$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 4 \end{pmatrix}$. Sólo falta hallar $E(XY)$:

$E(XY) = \int_0^\infty\left[\int_0^x xy\frac{1}{6}y^3e^{-x}dy\right]dx = \frac{1}{6}\int_0^\infty xe^{-x}\left[\int_0^x y^4dy\right]dx = \frac{1}{6}\int_0^\infty xe^{-x}\left[\frac{x^5}{5}\right]dx = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{x^6e^{-x}}{5}dx = \frac{\Gamma(7)}{30} =$ $24 \Rightarrow$ en $\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = 24 - 5\times 4 = 4 \Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ y de $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{4}} = 0.894 > 0.8$ concluimos que la relación entre X e Y es "fuerte y directa".

EVALUACIONES NO USAR EN LAS E

Scanned with CamScanner

Se pregunta por $\frac{d}{dx}E(Y|X)$. Necesitamos hallar primero $f_{Y|X}(y|x)$:

$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \ldots = \frac{4y^3}{x^4}$ $\quad 0 < y < x$, x = valor dado y entonces $E(Y|X) = \int_0^x y\frac{4y^3}{x^4}dy =$

$\frac{4}{x^4}\int_0^x y^4 dy = \frac{4}{x^4}\frac{x^5}{5} = \frac{4}{5}x \Rightarrow \frac{d}{dx}E(Y|X) = \frac{4}{5} = 0.8$, es decir "por cada unidad monetaria de ingreso adicional, en promedio, se destinan al consumo 0.8 unidades monetarias o 80 centavos"

e) $Cov(Y,\hat{Y}) = E(Y\hat{Y}) - E(Y)E(\hat{Y})$ donde $\hat{Y} = E(Y|X) = \frac{4}{5}X$. Entonces:

$E(Y\hat{Y}) = E\left(Y\frac{4}{5}X\right) = \frac{4}{5}E(YX) = \frac{4}{5}\times 24 = 19.2$; $E(\hat{Y}) = E\left(\frac{4}{5}X\right) = \frac{4}{5}E(X) = \frac{4}{5}\times 5 = 4 \Rightarrow$

$Cov(Y,\hat{Y}) = E(Y\hat{Y}) - E(Y)E(\hat{Y}) = 19.2 - 4\times 4 = 3.2$

Problema 3 (4 puntos)

En un sector industrial, el número X de trabajadores en la empresa es una v.a. discreta cuya distribución de probabilidades depende de si la empresa es formal o informal:

Si la empresa es formal, X tiene distribución geométrica $X \sim G(x; p = \frac{1}{3})$. En cambio, dado que la empresa es informal, la función de probabilidad de X es $P_X(x) = c\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1}$ $\quad x = 1,2,3,\ldots$

Un economista genera una variable indicadora de informalidad Y que toma valor 1 si la empresa es informal y 0 si la empresa es formal, de modo que $P_Y(y) = \left(\frac{9}{10}\right)^y\left(\frac{1}{10}\right)^{1-y}$ $\quad y = 0,1$.

a) Hallar el valor de c.

b) Halle la probabilidad de que una empresa del sector tenga 4 trabajadores.

c) ¿Es cierto que, en promedio, una empresa informal genera tres veces más empleo que una empresa formal en este sector?

d) En promedio ¿Cuántos trabajadores tiene una empresa de este sector?

Solución:

a) $1 = \sum_{x=1}^{\infty} c\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} = c\frac{1}{9}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^x = c\frac{1}{9}\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = c9\frac{1}{8} = c\frac{9}{8} \Rightarrow c = \frac{8}{9}$

b) $P(X=4) = P[(X=4)\cap(Y=0)] + P[(X=4)\cap(Y=1)]$

$P[(X=4)\cap(Y=0)] = P(X=4|Y=0)P(Y=0) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{4-1}\times\left(\frac{9}{10}\right)^0\left(\frac{1}{10}\right)^{1-0} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{10}\right) = 0.010$

$P[(X=4)\cap(Y=1)] = P(X=4|Y=1)P(Y=1) = \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{4-1}\times\left(\frac{9}{10}\right)^1\left(\frac{1}{10}\right)^{1-1} = \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^3\times\left(\frac{9}{10}\right) = 0.001$

$\Rightarrow P(X=4) = 0.010 + 0.001 = 0.011$

c) "En promedio" significa en valor esperado, es decir, se pregunta si es cierto que $E[X|Y=1] = 3E[X|Y=0]$.

En el caso de las empresas formales ($Y=0$): $X \sim G(x; p = \frac{1}{3})$ cuya media es $\frac{1}{p} = 3 \Rightarrow E[X|Y=0] = 3$.

En el caso de las empresas informales ($Y=1$): se reconoce que la distribución de X corresponde a una distribución geométrica $X \sim G(x; p = \frac{8}{9})$ cuya media es $\frac{1}{p} = \frac{9}{8} \Rightarrow E[X|Y=1] = 1.125$: No es cierta la afirmación.

d) Se pregunta por $E(X)$. Como sabemos $E(X) = E(E(X|Y)) = \sum_{y=0}^{1}E(X|Y=y)P_Y(y)$ y como ya tenemos $E[X|Y=0]$ y $E[X|Y=1] \Rightarrow E(X) = E(E(X|Y)) = E(X|Y=0)P_Y(0) + E(X|Y=1)P_Y(1) = 3\times\frac{1}{10} + \frac{9}{8}\times\frac{9}{10} = 1.3125$

Problema 4 (4 puntos)

a) Sea (X,Y) vector aleatorio. Si $U = a + bX$ $\quad b > 0$, pruebe que $\sigma_{UY} = b\sigma_{XY}$

b) Sea X v.a. continua con rango $R_X =]-\infty,+\infty[$ y función de densidad $f_X(x)$ tal que $f_X(x) = f_X(-x)$

Pruebe que $E(X) = 0$.

Solución:

a) Sabemos que si $U = a + bX \Rightarrow E(U) = a + bE(X)$ y $V(U) = b^2V(X)$. Con lo primero en mente:

$\sigma_{UY} = E[(U - E(U))(Y - E(Y))] = E[(a + bX - a - bE(X))(Y - E(Y))] = E[(bX - bE(X))(Y - E(Y))]$

$= E[b(X - E(X))(Y - E(Y))] = bE[(X - E(X))(Y - E(Y))] = b\sigma_{XY}$.

Scanned with CamScanner

b) Hay que probar que $E(X) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = 0$. El dato que tenemos es $f_X(x) = f_X(-x)$ y tendremos que usarlo en la integral:

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)dx + \int_{0}^{\infty} x f_X(x)dx$ y en la primera integral si hacemos el cambio de variable $u = -x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)dx = \int_{\infty}^{0}(-u) f_X(-u)(-du) = \int_{\infty}^{0} u f_X(u)du = -\int_{0}^{\infty} u f_X(u)du$

y regresando al valor esperado:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)dx + \int_{0}^{\infty} x f_X(x)dx = -\int_{0}^{\infty} u f_X(u)du + \int_{0}^{\infty} x f_X(x)dx = 0$$

17 de Octubre de 2015

ACG./SAMP.

CIONES NO USAR EN LAS

Scanned with CamScanner