1

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
PRÁCTICA CALIFICADA 3

30 de mayo de 2015
Horario 522

Ejercicio 1. **(6 puntos)**

Sea $X \sim G(2;\, \theta)$, donde $\theta > 0$.

a) Halle el estimador de θ por el método de máxima verosimilitud. (2 puntos)

b) Determine si el estimador hallado en la parte anterior es consistente. (1 punto)

c) Halle la información de Fisher: $I(\theta)$. Ver recordatorio en la hoja siguiente. (1 punto)

d) Halle la información de Fisher observada: $-H(\hat{\theta})$.

También verifique si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-H(\hat{\theta})}{n} = I(\theta)$, c.s. (2 puntos)

Ejercicio 2. **(8 puntos)**

Para el ingreso mensual, X (en miles de soles), de los trabajadores en cierto sector, se propone el modelo probabilístico de Pareto siguiente:

$$f_X(x) = \frac{\theta\,(0,75)^{\theta}}{x^{\theta+1}},\ x > 0,75,$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro por estimar a partir de una muestra aleatoria de tamaño n de X.

a) Halle el estimador de θ por el método de máxima verosimilitud. (2 puntos)

b) Determine si el estimador hallado en la parte anterior es consistente. (2 puntos)

Nota: puede verificarse que $E(Ln(X)) = \frac{1}{\theta} + \mathrm{Ln}(0{,}75)$.

c) Encuentre el estimador, por el método de máxima verosimilitud, de p: la proporción de trabajadores del sector que tienen ingresos mayores que 4 veces la remuneración mínima vital. (1 punto)

Note que $p = P(X > 3)$.

d) Para estimar a θ se usará el estimador de máxima verosimilitud, $\hat{\theta}$. Determine el tamaño de muestra apropiado para que el error de estimación correspondiente sea a lo suma dos décimos del valor del parámetro θ, con una probabilidad de 0,95 aproximadamente. Use la distribución asintótica de $\hat{\theta}$. Ver recordatorio en la hoja siguiente. (3 puntos)

Recuerde que si $Z \sim N(0;\, 1):\ F_Z(-z) = 1 - F_Z(z),\ -\infty < z < \infty$.

$|\hat{\theta} - \theta| = \frac{2}{10}\theta$

Ejercicio 3. (6 puntos)

Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim G(4;\, \beta)$. Determine cuáles de los estimadores siguientes, de β, son consistentes (fuertemente):

$$\hat\beta_1 = \frac{\bar X}{M_2 - \overline{X}^2}, \quad \hat\beta_2 = \frac{2}{S}, \quad \hat\beta_3 = \frac{1}{M_4} \text{ y } \hat\beta_4 = \sqrt{\frac{20}{M_2}},$$

donde $M_k = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} X_j^k}{n}$, $k \in \mathbb{N}^+$, y $S^2 = \dfrac{n}{n-1}(M_2 - \overline{X}^2)$.

Recuerde que en este modelo: $E(X^t) = \dfrac{\Gamma(4+t)}{6\,\beta^t}, \forall t > 0.$

Recordatorio

- Información de Fisher: $I(\theta) = -\,E\left(\frac{\partial^2}{\partial\,\theta^2} Ln(f(X;\,\theta))\right)$, donde $f(x;\theta) = f_X(x)$.
- Información de Fisher observada: $-H(\hat\theta)$, $\hat\theta$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ y $H(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\,\theta^2} Ln(\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n;\, \theta))$, donde $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n;\, \theta) = \mathcal{L}(\theta) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_1}(x_n)$: la función de verosimilitud de θ correspondiente a la muestra registrada $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.
- Distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud:

$\sqrt{n\,I(\theta)}\,(\hat\theta - \theta) \overset{aprox.}{\sim} N(0,1)$ (versión con la información de Fisher).

$\sqrt{-H(\widehat\theta)}\,(\widehat\theta - \theta) \overset{aprox.}{\sim} N(0,1)$ (versión con la información de Fisher observada).

$\lim \bar X = E(X)$

Ejercicio 3. (6 puntos)

Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim G(4;\, \beta)$. Determine cuáles de los estimadores siguientes, de β, son consistentes (fuertemente):

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\bar{X}}{M_2 - \overline{X}^2}\,,\ \hat{\beta}_2 = \frac{2}{S},\ \hat{\beta}_3 = \frac{1}{M_4} \text{ y } \hat{\beta}_4 = \sqrt{\frac{20}{M_2}}\,,$$

donde $M_k = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} X_j^k}{n}$, $k \in \mathbb{N}^+$, y $S^2 = \dfrac{n}{n-1}\,(M_2 - \overline{X}^2)$.

Recuerde que en este modelo: $E(X^t) = \dfrac{\Gamma(4+t)}{6\,\beta^t}$, $\forall t > 0$.

Recordatorio

- Información de Fisher: $I(\theta) = -\,E\big(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Ln(f(X;\,\theta))\big)$, donde $f(x;\theta) = f_X(x)$.
- Información de Fisher observada: $-H(\hat{\theta})$, $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ y $H(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Ln\big(\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n;\, \theta)\big)$, donde $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n;\, \theta) = \mathcal{L}(\theta) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_1}(x_n)$: la función de verosimilitud de θ correspondiente a la muestra registrada $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.
- Distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud:

  $\sqrt{n\,I(\theta)}\,(\hat{\theta} - \theta) \overset{aprox.}{\sim} N(0,1)$ (versión con la información de Fisher).

  $\sqrt{-H(\widehat{\theta})}\,(\widehat{\theta} - \theta) \overset{aprox.}{\sim} N(0,1)$ (versión con la información de Fisher observada).

① a) $\mathcal{L}(\theta) = f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\theta^2}{\Gamma(2)} x_1^{2-1} \cdot e^{-\theta x_1} \cdot \frac{\theta^2}{\Gamma(2)} \cdot x_2^{2-1} \cdot e^{-\theta x_2} \cdots \frac{\theta^2}{\Gamma(2)} \cdot x_n^{2-1} e^{-\theta x_n}$

$= f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$

$\mathcal{L}(\theta) = \left[\frac{\theta^2}{\Gamma(2)}\right]^n \cdot [x_1 \cdot x_2 \cdots x_n] \; e^{-\theta(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}, \quad x_n > 0$

$\ell(\theta) = \ln(\mathcal{L}(\theta)) = n \ln\left[\frac{\theta^2}{\Gamma(2)}\right] + \ln[x_1 \cdots x_n] - \theta(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

$\ell(\theta) = 2n \ln\theta - n \ln\Gamma(2) + \sum_{j=1}^{n} \ln x_j - \theta \sum_{j=1}^{n} x_j$

$\ell'(\theta) = \frac{2n}{\theta} - \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \longrightarrow \theta^{max} = \frac{2n}{\sum_{j=1}^{n} x_j} = \frac{2}{\bar{x}}$

$\rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{\bar{x}}$

2,0

b) $\lim_{n \to \infty} \hat{\theta} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\bar{x}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2}{\lim_{n\to\infty} \bar{X}} = \frac{2}{E(X)}$ c.s

$= \frac{2}{\frac{2}{\theta}} = \theta$

∴ $\hat{\theta}$ es un estimador consistente

1,0

c) $I(\theta) = -E\left(\frac{d^2 \ln f_X(x,\theta)}{d\theta^2}\right)$

▷ ~~$f_X(x,\theta) = \frac{\theta^2}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-\theta x} = \theta^2 x \cdot e^{-\theta x}$~~

▷ ~~$\frac{d}{d\theta} f_X(x,\theta) = x\left[2\theta \cdot e^{-\theta x} + \theta^2 e^{-\theta x}(-\theta x)\right] = x \cdot e^{-\theta x}\left[2\theta - \theta^2 x\right]$~~

(2)

a) $\mathcal{L}(\theta) = f_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n) = \dfrac{\theta(0{,}75)^\theta}{x_1^{\theta+1}} \ldots \dfrac{\theta(0{,}75)^\theta}{x_n^{\theta+1}}, \; x > 0{,}75$

$\mathcal{L}(\theta) = \dfrac{[\theta(0{,}75)^\theta]^n}{[x_1 \cdot x_2 \cdots x_n]^{\theta+1}} \longrightarrow \ell(\theta) = \ln(\mathcal{L}(\theta)) = n \ln \theta(0{,}75)^\theta - (\theta+1) \ln x_1 \cdots x_n$

$\ell(\theta) = n \ln \theta + n\theta \ln 0{,}75 - (\theta+1)[\ln x_1 + \ldots + \ln x_n]$

$\ell'(\theta) = \dfrac{n}{\theta} + n \cdot \ln 0{,}75 - \sum_{j=1}^{n} \ln x_j = 0 \longrightarrow \dfrac{n}{\theta} = \sum_{j=1}^{n} \ln x_j - n \ln 0{,}75$

$\theta^{MV} = \dfrac{n}{\sum_{j=1}^{n} \ln x_j - n \ln 0{,}75} = \dfrac{1}{\overline{\ln x} - \ln 0{,}75}$

$\hat{\theta} = \dfrac{1}{\overline{\ln X} - \ln 0{,}75}$

b) $\lim_{n \to \infty} \hat{\theta} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{\lim_{n \to \infty} \overline{\ln x} - \lim_{n \to \infty} \ln 0{,}75} = \dfrac{1}{E(\ln x) - \ln 0{,}75} \overset{c.s}{=} \dfrac{1}{\frac{1}{\theta} + \cancel{\ln 0{,}75} - \cancel{\ln 0{,}75}} \; c.s$

$\lim_{n \to \infty} \hat{\theta} = \theta$, el estimador es consistente

c) $p = P(X > 3) = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\theta(0{,}75)^\theta}{x^{\theta+1}} \cdot dx = \theta(0{,}75)^\theta \cdot \int_3^{+\infty} x^{-(\theta+1)} \cdot dx$

$p = [\theta(0{,}75)^\theta] \cdot \dfrac{x^{-\theta}}{-\theta} \Big|_3^{a} = \dfrac{\cancel{\theta}(0{,}75)^\theta \cdot a^{-\theta}}{-\cancel{\theta}} - \dfrac{\cancel{\theta}(0{,}75)^\theta \cdot 3^{-\theta}}{-\cancel{\theta}}$

$P = -(0{,}75)^{\theta} \cdot 2^{-\theta} + (0{,}75)^{\theta} \cdot 3^{-\theta}$, $2 \to \infty$

$\triangleright \lim_{2 \to \infty} -(0{,}75)^{\theta} \cdot 2^{-\theta} = 0$

$\to P = \left(\frac{0{,}75}{3}\right)^{\theta} = g(\theta)$

$\therefore \hat{P} = \widehat{g(\theta)} = g(\hat{\theta})$ por prop. invarianza

$\hat{P} = (0{,}25)^{\hat{\theta}}$

d) Error de estimación: $\theta - \hat{\theta} \leq \frac{2}{10}\theta \to \cancel{\hat{\theta} = \frac{8\theta}{10} = \frac{4}{5}\theta}$

$\cancel{P\left(\hat{\theta} = \frac{4}{5}\theta\right) = 0{,}95}$ $\quad \frac{8}{10}\theta < \hat{\theta}$

$P\left(\hat{\theta} \geq \frac{8}{10}\theta\right) = 0{,}95 \to 1 - P\left(\hat{\theta} < \frac{8}{10}\theta\right) = 0{,}95$

$1 - F_{\hat{\theta}}\left(\frac{8}{10}\theta\right) = 0{,}95 \longrightarrow F_{\hat{\theta}}\left(\frac{8}{10}\theta\right) = 0{,}05 \quad \text{(I)}$

Sea $z = \sqrt{n I(\theta)}\,(\hat{\theta} - \theta) \sim N(0,1)$

$\triangleright I(\theta)$: $\ln f_X(x) = \cancel{n}\ln\theta + \cancel{n}\theta \ln 0{,}75 - (\theta+1)\ln x$

la $I(\theta)$ es de una ~~muestra~~ muestra. por tanto $n = 1$

$\frac{d}{d\theta}\ln f_X(x) = \frac{n}{\theta} + n\ln 0{,}75 - \ln x$

$\frac{d^2 \ln f_X(x)}{d\theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} \longrightarrow I(\theta) = -E\left(-\frac{n}{\theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2}$

$\longrightarrow z = \sqrt{\frac{n \cdot n}{\theta^2}}\,(\hat{\theta} - \theta) = \frac{n}{\theta}(\hat{\theta} - \theta)$

En (I): $F_Z\left(\frac{n}{\cancel{\theta}}\left(\frac{8\cancel{\theta}}{10}-\cancel{\theta}\right)\right)=0{,}05 \longrightarrow F_Z(-0{,}2n)=0{,}05$

$1-F_Z(0{,}2n)=0{,}05$

~~$F_Z(-0{,}2n)=0{,}05$~~

$F_Z(0{,}2n)=0{,}95$

~~$1-F_Z(0{,}2n)=0{,}05$~~

$\longrightarrow 0{,}2n=1{,}96 \quad \therefore n=9{,}8$ $\quad 10$

$\circ\ M_2=\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}{n}=\overline{X^2}$, $\circ\ M_4=\overline{X^4}$, $S=\sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\overline{X^2}-\overline{X}^2\right)}$

$\triangleright\ \lim_{n\to\infty}\hat{\beta}_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{X}}{\overline{X^2}-\overline{X}^2}=\frac{\lim_{n\to\infty}\overline{X}}{\lim_{n\to\infty}\overline{X^2}-\lim_{n\to\infty}\overline{X}^2}=\frac{E(X)}{E(X^2)-E^2(X)}=\frac{E(X)}{V(X)}$ c.s

$=\frac{\cancel{\Gamma(4)}}{\cancel{\beta}}\cdot\frac{\beta^2}{\cancel{4}}=\beta$, $\hat{\beta}_1$ es consistente

$\triangleright\ \lim_{n\to\infty}\hat{\beta}_2=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\overline{X^2}-\overline{X}^2\right)}}=\frac{2}{\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n-1}}}_{1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\overline{X^2}-\overline{X}^2\right)}}$

$=\frac{2}{\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\overline{X^2}-\overline{X}^2\right)}}=\frac{2}{\sqrt{\lim_{n\to\infty}\overline{X^2}-\lim_{n\to\infty}\overline{X}^2}}$

$=\frac{2}{\sqrt{E(X^2)-E^2(X)}}=\frac{2}{\sqrt{V(X)}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{4}{\beta^2}}}=\beta$ $\quad\therefore \hat{\beta}_2$ es consistente

$$\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\ \hat{\beta}_3 = \underset{n\to\infty}{\text{plim}} \frac{1}{\overline{X^4}} = \frac{1}{\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\ \overline{X^4}} = \frac{1}{E(X^4)} \quad \text{c.s}$$

$$= \frac{1}{\frac{\Gamma(8)}{6\beta^4}} = \frac{6\beta^4}{7!}$$

$\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\ \hat{\beta}_3 \neq \beta$, $\hat{\beta}_3$ no es consistente

$$\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\ \hat{\beta}_4 = \underset{n\to\infty}{\text{plim}} \sqrt{\frac{20}{\overline{X^2}}} = \frac{\sqrt{20}}{\underset{n\to\infty}{\text{plim}} \sqrt{\overline{X^2}}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\ \overline{X^2}}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{E(X^2)}} \quad \text{c.s}$$

$$= \sqrt{\frac{20}{\frac{\Gamma(6)}{6\beta^2}}} = \sqrt{\frac{6\beta^2 \cdot 20}{5!}} = \beta$$

$\therefore$ $\hat{\beta}_4$ es consistente

1