PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

PRÁCTICA DIRIGIDA No. 3
CURSO: **EST 241 Estadística Inferencial**
PROFESOR: **Arturo Calderón G.**
HORARIO: **0621**
FECHA: **11 de mayo de 2019**
SEMESTRE: **2019-1**

Los problemas del 1 a 4 serán tratados durante la práctica. El resto es para el trabajo personal del alumno.

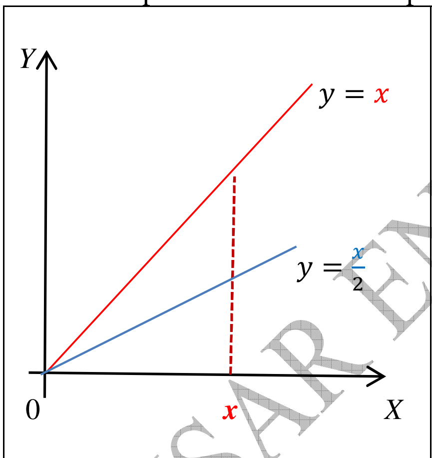
Problema 1

Sea (X,Y) vector aleatorio continuo donde X = PBI de una región e Y = PBI Minero de la región, ambos en millones de unidades monetarias, con f. de densidad conjunta: $f_{XY}(x,y) = ye^{-x} \quad 0 < y < x < \infty$.

a) Verifique que $f_{XY}(x,y)$ es función de densidad conjunta y hallar la probabilidad de que el PBI minero sea mayor al 50% del PBI.
b) Calcule $E(Y|X)$ y diga en cuánto esperaría que haya subido el PBI minero si el PBI regional subió un millón.
c) Halle las distribuciones marginales de X y de Y ¿Son distribuciones conocidas? Halle las medias y desviaciones estándar de X y de Y.
d) Se define la matriz de varianza covarianza de (X,Y) denotada Σ_{XY} mediante $\Sigma_{XY} := \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$. Halle Σ_{XY}. Diga si habría relación lineal entre X e Y, indicando si se trata de relación directa o inversa.
e) Halle el coeficiente de correlación de Pearson ρ_{XY} entre X e Y ¿Habría relación lineal débil o nula entre X e Y?

Solución:

a) Graficando previamente las correspondientes regiones de integración:



$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dydx = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{x} ye^{-x}dy\right]dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x} dx$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{x^2}{2}e^{-x}dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx}_{\Gamma(3)=2!} = 1 \text{ y para } P\left(Y > \frac{X}{2}\right):$$

$$P\left(Y > \frac{X}{2}\right) = \int_0^{\infty}\left[\int_{\frac{x}{2}}^{x} ye^{-x}dy\right]dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\left[\int_{\frac{x}{2}}^{x} ydy\right]dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^{x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\frac{3x^2}{8}dx = \frac{3}{8}\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = \frac{3}{8}2 = \frac{3}{4}$$

b) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$; como $f_X(x) = \int_0^x ye^{-x}dy = e^{-x}\int_0^x ydy = e^{-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2e^{-x}}{2} \quad 0 < x < \infty \Rightarrow$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{ye^{-x}}{\frac{x^2e^{-x}}{2}} = \frac{2y}{x^2} \quad 0 < y < x; \;\; x = valor\ dado \;\Rightarrow\; E(Y|X) = \int_0^x y\frac{2y}{x^2}dy = \frac{2x^3}{3x^2} =$$

$= \frac{2}{3}x$. Como $\frac{dE(Y|X)}{dx} = \frac{2}{3}$, si X sube en una unidad (un millón), entonces en promedio Y debe haber subido 0.67 millones.

c) Las distribuciones marginales de X y de Y:

$f_X(x) = \frac{x^2e^{-x}}{2} \quad 0 < x < \infty \Rightarrow X \sim \Gamma(x; \alpha = 3, \beta = 1) \Rightarrow \mu_X = \alpha\beta = 3$ y $\sigma_X^2 = \alpha\beta^2 = 3; \sigma_X = \sqrt{3}$

$f_Y(y) = \int_y^{\infty} ye^{-x}dx = y\int_y^{\infty} e^{-x}dx = ye^{-y} \quad 0 < y < \infty < \infty \Rightarrow Y \sim \Gamma(Y; \alpha = 2, \beta = 1) \Rightarrow \mu_Y = \alpha\beta = 2$ y $\sigma_Y^2 = \alpha\beta^2 = 2; \sigma_Y = \sqrt{2}$.

d) Para hallar $\Sigma_{XY} := \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$ sólo necesitamos $\Sigma_{XY} := \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$, pues lo demás ya se tiene:

$Cov(x,y) \equiv \sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y$; como μ_X y μ_Y ya son conocidas, sólo falta $E(XY)$ para poder calcular la covarianza.

$E(XY) = \int_0^\infty \left[\left[\int_0^x xyye^{-x}\,dy\right]dx = \int_0^\infty \left[xe^{-x}\int_0^x y^2\,dy\right]dx = \int_0^\infty xe^{-x}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx = \int_0^\infty \frac{x^4}{3}e^{-x}dx = \right.$ $\frac{1}{3}\int_0^\infty x^4e^{-x}dx = \frac{1}{3}\Gamma(5) = 8$; entonces $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y = 8 - 3\times 2 = 2 > 0$: Sí habría relación lineal y sería directa.

e) El coeficiente de correlación de Pearson es $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$ y ya tenemos todos sus elementos, basta reemplazar valores: $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = 0.82>0.8$ La relación es lineal y es fuerte

Nota:

$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{ye^{-x}}{ye^{-y}} = e^{y-x}\ \ 0 < y < x < \infty;\ y = valor\ dado. \Rightarrow$

$E(X|Y) = \int_{x=y}^{x=\infty} xe^{y-x}dx \underset{\substack{u=x-y\\ du=dx}}{=} \int_{u=0}^{u=\infty}(u+y)e^{-u}\,du = \underbrace{\int_0^\infty ue^{-u}\,du}_{\Gamma(2)=1!=1} + y\underbrace{\int_0^\infty e^{-u}\,du}_{1} = 1 + y \Rightarrow$

$E(X|Y) = 1 + y\,, 0 < y < x < \infty,\ y = valor\ dado \Rightarrow \frac{dE(X|Y)}{dy} = 1$: Cuando el PBI minero sube en un millón, el PBI total sube en un millón…lo que debiera ser obvio, no necesita demostración matemática!

Otra manera de obtener $E(X|Y)$, más ortodoxa y larga, pero correcta es:

$E(X|Y) = \int_{x=y}^{x=\infty} xe^{y-x}dx = e^y\int_{x=y}^{x=\infty} xe^{-x}\,dx.$

En $\int xe^{-x}dx$ aplicamos "integración por partes": $\int udv = uv - \int vdu \Rightarrow$ en $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-x}dx}_{dv}$, tomamos $u = x$ y $dv = e^{-x}dx \Rightarrow$ $du = dx$ y $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \Rightarrow uv = -xe^{-x}$; falta $\int vdu = \int(-e^{-x})dx = e^{-x} \Rightarrow$ $\int xe^{-x}dx \equiv \int udv = uv - \int vdu = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1) \Rightarrow \int_{x=y}^{x=\infty} xe^{-x}\,dx = [-e^{-x}(x+1)]_y^\infty = e^{-y}(y+1) \Rightarrow$ $E(X|Y) = e^y\int_{x=y}^{x=\infty} xe^{-x}\,dx = e^ye^{-y}(y+1) = (y+1)$: $E(X|Y) = (y+1)\,, 0 < y < x < \infty,\ y = valor\ dado$ y lo demás, incluyendo la interpretación se mantiene.

Problema 3

Aplicando propiedades del valor esperado:

a) Pruebe que $Cov(X, aZ + bY) = aCov(X,Z) + bCov(X,Y)$.

b) Pruebe que en general $E(a + bY|X) = a + bE(Y|X)$

Solución:

a) $Cov(X, aZ + bY) = E\big[(X - \mu_X)\big(aZ + bY - E(aZ + bY)\big)\big] = E\big[(X - \mu_X)\big(aZ + bY - aE(Z) - bE(Y)\big)\big] =$ $E\big[(X - \mu_X)\big(aZ - aE(Z) + bY - bE(Y)\big)\big] = E\left[(X - \mu_X)\left(a\big(Z - E(Z)\big) + b\big(Y - E(Y)\big)\right)\right] =$ $E\big[(X - \mu_X)\big(a(Z - \mu_Z) + b(Y - \mu_Y)\big)\big] = E[(X - \mu_X)a(Z - \mu_Z) + (X - \mu_X)b(Y - \mu_Y)] =$ $aE[(X - \mu_X)(Z - \mu_Z)] + bE[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = aCov(X,Z) + bCov(X,Y).$

b) Veamos el caso (X,Y) continuo:

$$E(a + bY|X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(a + bY)f_{Y|X}(y|x)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} af_{Y|X}(y|x)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} byf_{Y|X}(y|x)dy$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)dy + b\int_{-\infty}^{+\infty} yf_{Y|X}(y|x)dy = a + bE(Y|X)$$

Problema 4

Sea (X, Y) v.a. continuo con vector de medias $\mu = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ y matriz de varianza covarianza $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & -\frac{\sigma^2}{2} \\ -\frac{\sigma^2}{2} & 4\sigma^2 \end{pmatrix}$.

Asuma que las variables miden las rentabilidades de dos acciones A y B respectivamente y que se desea invertir α soles en A y β soles en B de modo que la ganancia G con esta inversión, tenga valor esperado de 10 soles pero con el menor riesgo posible, esto es con la menor varianza posible. ¿Existen α y β que satisfagan este deseo?

Solución:

Si G es la ganancia con la inversión e interpretando "ganancia" como la cantidad de dinero adicional obtenido con la inversión, entonces $G = \alpha X + \beta Y$ y se desea determinar α y β tales que $E(G) = E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y) = 10$ y $V(G) = V(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y) + 2\alpha\beta Cov(X, Y)$ sea mínima.

La primera condición equivale a $0.1\alpha + 0.2\beta = 10 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = 100$, mientras que reemplazando valores en $V(G)$, tenemos

$$V(G) = \alpha^2\sigma_X^2 + \beta^2\sigma_Y^2 + 2\alpha\beta\sigma_{XY} = \alpha^2\sigma^2 + \beta^2 4\sigma^2 + 2\alpha\beta\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) = \sigma^2(\alpha^2 + 4\beta^2 - \alpha\beta)$$

Entonces, debemos minimizar, con respecto a α y β, a $V(G) = \sigma^2(\alpha^2 + 4\beta^2 - \alpha\beta)$ sujetos a $\alpha + 2\beta = 100$.
Como en general $\sigma^2 > 0$ es constante, minimizar $\sigma^2(\alpha^2 + 4\beta^2 - \alpha\beta)$ equivale a minimizar $\alpha^2 + 4\beta^2 - \alpha\beta$.

El problema es entonces uno de minimización con una restricción:
Minimizar $\alpha^2 + 4\beta^2 - \alpha\beta$ sujeto a la restricción $\alpha + 2\beta = 100$, que se puede resolver para α y β aplicando multiplicadores de Lagrange tomando como lagrangiano a $L(\alpha, \beta, \lambda) = \alpha^2 + 4\beta^2 - \alpha\beta + \lambda(100 - \alpha - 2\beta)$ y aplicando las condiciones usuales de derivadas parciales nulas.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 2\alpha - \beta - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta} = 8\beta - \alpha - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = \lambda \\ \frac{8\beta - \alpha}{2} = \lambda \\ 100 - \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 8\beta - \alpha \Rightarrow \alpha = 2\beta \\ 100 - \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow 100 - 2\alpha = 0 \Rightarrow$$

$\begin{cases} \alpha = 50 \\ \beta = 25 \end{cases}$ son los valores críticos. Asumiendo el mínimo (para no usar el Hessiano orlado), los valores óptimos (o valores de la "cartera óptima") son 50 soles en A y 25 en B.

También se puede resolver sin Lagrange: De la restricción se despeja $\alpha = 100 - 2\beta$ y se reemplaza en $h(\alpha, \beta) \equiv \alpha^2 + 4\beta^2 - \alpha\beta$ como función objetivo; se llega a $(100 - 2\beta)^2 + 4\beta^2 - (100 - 2\beta)\beta := \varphi(\beta)$ que es una función de una variable β que se puede minimizar con la técnica usual de derivar e igualar a cero. Con cualquier método resulta $\beta = 25$ y $\alpha = 50$

Problema 11

Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto, que refleja la siguiente información: X= 1 si se da un shock positivo de oferta en la economía (por ejemplo, el precio del petróleo baja por debajo de los 35-30$/barril), X= 0 si la economía no sufre ningún shock (por ejemplo, el precio del petróleo se mantiene en torno a los 35$/barril) y X=-1 si el shock es negativo (por ejemplo, el precio del petróleo se coloca por encima de los 35-40$/barril); Y= 1 si el nivel de empleo aumenta, Y= 0 si se mantiene e Y=-1 si disminuye. La distribución de probabilidades conjunta $P_{XY}(x, y)$ es dada por siguiente tabla:

X\Y	-1	0	1
-1	5/24	3/24	0
0	2/24	6/24	2/24
1	1/24	2/24	3/24

a) Sin tener información acerca del shock económico ¿Qué es más probable, que aumente o que disminuya el nivel de empleo?
b) Si el shock ha sido negativo ¿cambiaría la respuesta en a)? ¿Cuál sería ahora la probabilidad de que el empleo caiga, que se mantenga o que suba?
c) Sin tener información acerca del shock de la economía, ¿Cuál es el valor esperado de la variable que describe la evolución del empleo?
d) ¿Cuál sería el valor esperado de la variable que representa el movimiento del empleo si el shock ha sido negativo? ¿Y su varianza?
e) Comparando las respuestas de los apartados anteriores, ¿Podría decir algo acerca de la existencia o no de dependencia de las variables? De una medida del grado de relación lineal entre las variables. ¿Qué signo tiene?

Solución:

a) Se pide comparar $P(Y=1)$ con $P(Y=-1)$. Necesitamos la distribución marginal $P_Y(y)$. De una vez calculemos las dos distribuciones marginales:

$X\backslash Y$	-1	0	1	$P_X(x)$
-1	5/24	3/24	0	8/24
0	2/24	6/24	2/24	10/24
1	1/24	2/24	3/24	6/24
$P_Y(y)$	8/24	11/24	5/24	1

$P(Y=1) = P_Y(1) = 5/24$ mientras que $P(Y=-1) = P_Y(-1) = 8/24$
Lo más probable es que disminuya el nivel de empleo.

b) Si el shock fue negativo, entonces ocurrió $X=-1 \Rightarrow P(Y=1|X=-1) = \frac{P_{XY}(-1,1)}{P_X(-1)} = \frac{0}{\frac{8}{24}} = 0$ y análogamente $P(Y=-1|X=-1) = \frac{P_{XY}(-1,-1)}{P_X(-1)} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{8}{24}} = \frac{5}{8} = 0.625$ y sí cambia el resultado, la probabilidad de que disminuya el empleo es más del doble ahora. Para la otra pregunta, como ya tenemos $P_{Y|X}(-1|-1) = \frac{5}{8}$ y $P_{Y|X}(1|-1) = 0$, por diferencia a 1, tenemos $P_{Y|X}(0|-1) = \frac{3}{8}$.

c) Se pregunta por $E(Y) = \sum_{y=-1}^{1} y P_Y(y) = -1 \times \frac{8}{24} + 0 \times \frac{11}{24} + 1 \times \frac{5}{24} = -\frac{3}{24} = -0.125$: Hay una "ligera" tendencia a que baje el empleo en la economía.

d) Ya tenemos la tabla con $P_{Y|X}(y|-1)$ y de manera análoga a c), pero ahora con la distribución condicional:

Y	-1	0	1	Total
$P_{Y\|X}(y\|-1)$	5/8	3/8	0	1

$E(Y|X=-1) = -1 \times \frac{5}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times 0 = -\frac{5}{8} = -0.625$;
$V(Y|X=-1) = E(Y^2|X=-1) - \left(-\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{5}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)$

Si hubiera shock negativo, la tendencia a que baje el empleo es mucho más grande.

e) Sí, el shock influye en el nivel de empleo. Lo podemos medir con la correlación $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$. Yendo por partes:
$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)$; $E(XY) = \sum_{x=-1}^{1}\left[\sum_{y=-1}^{1} xy P_{XY}(x,y)\right] = \frac{5}{24} + \frac{-1}{24} + \frac{3}{24} = \frac{7}{24}$
$E(X) = \frac{-8}{24} + \frac{6}{24} = \frac{-2}{24}$; $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left(\frac{8}{24} + \frac{6}{24}\right) - \left(\frac{-2}{24}\right)^2 = 0.583 \Rightarrow \sigma_X = 0.764$
$E(Y) = -\frac{3}{24} =$; $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \left(\frac{8}{24} + \frac{5}{24}\right) - \left(\frac{-3}{24}\right)^2 = 0.526 \Rightarrow \sigma_Y = 0.725$; por tanto
$\sigma_{XY} = \frac{7}{24} - \left(\frac{-2}{24}\right)\left(-\frac{3}{24}\right) = 0.281$ y $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0.281}{0.764 \times 0.725} = 0.51 > 0$: Hay relación directa**,** si ocurre shock, el empleo tiende a bajar.

Problema 5

Sea (X,Y) vector aleatorio discreto con función de probabilidad conjunta $P_{XY}(x,y) = c\left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^y$ $x = 1,2,\ldots$; $y = 1,2 \ldots . x$, donde c es constante. Hallar c, $P(X=Y)$, $E(Y|X=x)$ y $E(E(Y|X=x))$.

Solución:

Similar a uno resuelto en clase, que no figura en los apuntes, pero que sí fue planteado y resuelto en pizarra.

Problema 8

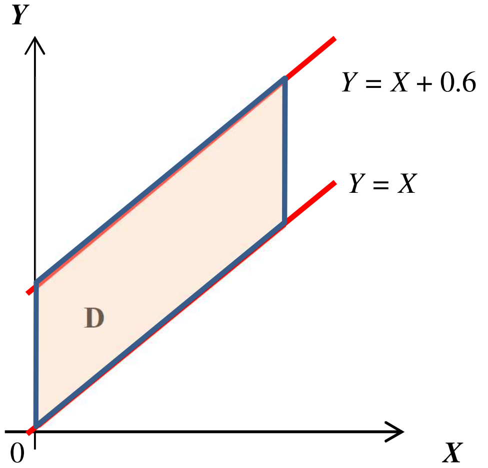
Se propone que el valor X de las Exportaciones y el valor Y de las Importaciones (en miles de millones) de un país, componen un v.a.c. (X,Y) con f. de densidad conjunta $f_{XY}(x,y) = cxe^{-(2x+y)}$ $x>0, y>0$

a) Halle el valor de c y la probabilidad de tener un déficit comercial menor de 600 millones

b) Calcule el vector de medias μ y la matriz de varianza-covarianza Σ ¿Están asociadas linealmente *X* e *Y*?

Solución:

a) El rango R_{XY} del v.a es un "cuadrado infinito en R^2 : $R_{XY} = \{(x,y) | 0 < x < \infty; 0 < y < \infty\}$



$$1=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}cxe^{-(2x+y)}dy\right]dx$$
$$=c\int_0^{\infty}xe^{-2x}\left[\int_0^{\infty}e^{-y}dy\right]dx$$
$$=c\underbrace{\int_0^{\infty}xe^{-2x}dx}_{1/4}\underbrace{\left[\int_0^{\infty}e^{-y}dy\right]}_{1}\Rightarrow c=4$$

b) Hay déficit comercial menor que 600 millones si ocurre el evento $D=\{(X,Y)\in R_{XY}|(Y>X)\cap(Y-X<0.6)\}=\{(X,Y)\in R_{XY}|X<Y<X+0.6\}$ y

$$P(D)=\int_0^{\infty}\left[\int_x^{x+0.6}4xe^{-(2x+y)}dy\right]dx=0.2005$$

c) $\mu=\binom{1}{1}$ y $\Sigma=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}$; X e Y no están asociadas linealmente

Problema 12

Sean X, Y las proporciones del tiempo en un día de trabajo, que los empleados A y B, respectivamente, se ocupan realmente en hacer sus tareas asignadas. La función de densidad conjunta del vector aleatorio (X, Y) es:
$f_{XY}(x,y)=c(x+y)\ \ donde\ 0<x<1, 0<y<1; c>0$. Calcule:

a) La constante c y la probabilidad que los días trabajados por los dos empleados se caractericen porque A trabaje menos de la mitad del tiempo, mientras que B lo hace durante más de la cuarta parte del tiempo.
b) La probabilidad que el tiempo trabajado por A más el trabajado por B corresponda a menos de día laboral completo.
c) Las funciones de densidad marginales de X e Y.
d) La probabilidad de que el trabajador A labore más de tres cuartas partes del tiempo, dado que B labora más de la mitad del día.
e) La regresión de Y sobre X, interpretando esta cuando $X = 0.3$ y la matriz de varianza-covarianzas Σ.

Sugerencias:

El rango de (X,Y) es un cuadrado de lado 1 y vértice en (0,0).

a) El cálculo de c es directo, sale $c = 1$. Se pide $P\left((X<\frac{1}{2})\cap(Y>\frac{1}{4})\right)$. Graficando la región de integración (tarea del lector) ésta es un rectángulo:
$A=\{(x,y)\in R_{XY}|0<x<\frac{1}{2},\frac{1}{4}<y\leq 1\}$ de modo que $P\left((X<\frac{1}{2})\cap(Y>\frac{1}{4})\right)=P(A)=\iint_A f_{XY}=$
$\int_{1/2}^{1}\left[\int_{1/4}^{1}(x+y)dy\right]dx=etc.$

b) Se pide $P\left(X+Y<\frac{1}{2}\right)$. Graficando la región de integración, ésta es un triángulo
$B=\{(x,y)\in R_{XY}|0<x+y<1\}$ y $P(B)=\iint_B f_{XY}=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(x+y)dy\right]dx=etc.$

c) $f_X(x)=\int_0^1(x+y)dy=x+\frac{1}{2}\quad 0<x<1$ y $f_Y(y)=\int_0^1(x+y)dx=\frac{1}{2}+y\quad 0<y<1$ son las f. de densidad marginales pedidas.

d) Se pregunta por $P\left(X>\frac{3}{4}|Y>\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left((X>\frac{3}{4})\cap(Y>\frac{1}{2})\right)}{P\left(Y>\frac{1}{2}\right)}=\frac{\int_{3/4}^{1}\left[\int_{1/2}^{1}(x+y)dy\right]dx}{\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{2}+y\right)dy}=etc.$

Hallemos $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\quad 0<y<1; x=valor\ dado, 0<x<1$, en este contexto:

$$E(Y|X)=\int_0^1 yf_{Y|X}(y|x)\,dy=\int_0^1 y\left(\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\right)dy=\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{2}}=\frac{3x+2}{6x+3}\quad x=valor\ dado, 0<x<1$$

y si $X=0.3\Rightarrow E(Y|X=0.3)=\frac{3\times0.3+2}{6\times0.3+3}=\frac{2.9}{6.9}=0.42$: Cuando A trabaja por 0.3 de la jornada, B trabaja 0.42 de la misma jornada.

Para Σ se calculan las medias y varianzas usando las marginales, lo que es sencillo; sólo faltaría calcular $E(XY) = \int_0^1 \left[\int_0^1 xy(x+y)dy\right] dx = \int_0^1 x \left[\int_0^1 y(x+y)dy\right] dx = etc.$

Problema 13
Un inversor desea saber si podría invertir en bolsa. Este inversor sabe que la función de probabilidad conjunta de las rentabilidades del IBEX35 (*X*) y del tipo de interés de los bonos a un año(*Y*) es $P_{XY}(x,y) = c(1-xy)$ donde $x \in \{-1,0,1\}$ es una variable que toma el valor -1 si la rentabilidad es negativa (pérdidas), 0 si la rentabilidad es nula y 1 si hay rentabilidades positivas; y por otra parte $y \in \{-1,0,1\}$ es una variable que vale -1 si hay baja en los tipos de interés, 0 si los tipos se mantienen y 1 si los tipos suben:

a) Encuentre el valor de c para que $P_{XY}(x,y)$ sea una función de probabilidad conjunta válida.
b) Calcule la rentabilidad esperada independientemente de lo que ocurra con los tipos de interés.
c) Calcule la rentabilidad esperada si el tipo de interés cae.
d) Calcule el coeficiente de correlación entre la rentabilidad y el tipo de interés.
e) Si definimos la prima al riesgo del mercado Z, como el diferencial de rentabilidad respecto a los tipos:
$Z \coloneqq X - Y$, calcule la prima esperada.
f) Responda e); pero en un escenario de bajada de tipos de interés.
g) Calcule el valor de a y b tales que E(Y |X = x) = a + bx

Sugerencias:
a) $\sum_{(x,y)} P_{XY}(x,y) = 1 \Rightarrow$
$[c(1-1)+c(1-0)+c(1+1)] + [c(1-0)+c(1-0)+c(1-0)] + [c(1+1)+c(1+0)+c(1-1)]$
$= 3c + 3c + 3c = 9c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9} \Rightarrow P_{XY}(x,y) = \frac{1}{9}(1-xy) \quad x = -1, 0, 1;\ y = -1, 0, 1$ o en una tabla:

	X			
Y	-1	0	1	$P_Y(y)$
-1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{3}{9}$
$P_X(x)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	1

b) Se pide $E(X) = \sum_{x=-1}^{1} xP_X(x) = \left(-\frac{3}{9}\right) + (0) + \left(\frac{3}{9}\right) = 0$
c) Si $Y = -1$ (el interés cae) $P_{X|Y}(x|y)$ es:

X	-1	0	1	Total	$E(X\|Y=-1) = \sum_{x=-1}^{1} xP_{X\|Y}(x\|-1) = \frac{2}{3} = 0.67$
$P_{X\|Y}(x\|-1)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	

d) Se pide $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$. Las medias y varianzas se hallan usando las marginales, lo que es sencillo y sólo faltaría calcular $E(XY) = \sum_{(x,y)} xyP_{XY}(x,y) = \left(-\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{4}{9}$ y luego el cálculo de ρ_{XY} es directo.
e) $E(Z) \coloneqq E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0 - 0 = 0$
f) Aquí se pregunta por $E(Z|Y=-1) \coloneqq E(X-Y|Y=-1) = E(X-1|Y=-1) = E(X|Y=-1) - 1 = -0.33$
De $E(Y|X) = a + bX$: Sabemos que $E\big(E(Y|X)\big) = E(Y)$ (demostrado en clase) y por otra parte: $E\big(E(Y|X)\big) = E(a+bX) = a + bE(X)$, así tenemos la ecuación: $a + bE(X) = E(Y) \quad (I)$
También $XE(Y|X) = aX + bX^2$ y $E\big(XE(Y|X)\big) = E(XY)$ (Problema 7 b)), luego $XE(Y|X) = E(aX + bX^2) = aE(X) + bE(X^2)$, y llegamos a $aE(X) + bE(X^2) = E(XY) \quad (II)$. Resolviendo el sistema se obtienen *a* y *b*.

Problema 16
La tasa de rentabilidad de la operación A es una variable aleatoria continua X, cuya media es 0,06 y su desviación estándar es 0.02, y la tasa de rentabilidad de la operación B es Y, una variable aleatoria cuya media es 0,04 y su desviación estándar es 0.01. Estas tasas son independientes. Hay que recordar que si r es la rentabilidad de una inversión inicial de M_0 unidades monetarias y M_1 es el valor final de la inversión, entonces $M_1 = M_0 + rM_0 = (1 + r)M_0$

a) Se dispone de un capital inicial de 200 unidades monetarias. Determine el valor esperado y la varianza del capital final resultante, en cada uno de los casos siguientes:
(1) Se invertirán 125 en la operación A y el resto, en la B.
(2) Se invertirán las 200 u.m. en A y el capital final que resulte, en la operación B.
b) Determine la covarianza entre los capitales finales anteriores.

Sugerencias:
a) (1) Se invertirán 125 en la operación A y el resto, en la B, o sea 75 en B. Si Cf_A es el capital final en A y Cf_B el capital final en B, entonces $Cf = Cf_A + Cf_B$, y $Cf_A = 125(1 + X)$; $Cf_B = 75(1 + Y)$. Por tanto:
$Cf = 125(1 + X) + 75(1 + Y) = 200 + 125X + 75Y \Rightarrow E(Cf) = E(200 + 125X + 75Y) = 200 + E(125X + 75Y)$. Aplicar luego la propiedad, vista en clase y que figura en apuntes:

* Si $W = \alpha X + \beta Y$, donde α y β son constantes, entonces:
$\mu_W = E[W] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$ y $\sigma_W^2 = V[W] = \alpha^2 V[X] + \beta^2 V[Y] + 2\alpha\beta Cov(X, Y)$

Hay que usar el hecho que, como X e Y son independientes, entonces $Cov(X, Y) = 0$

(2) Se invertirán las 200 u.m. en A y el capital final que resulte, en la operación B. En este caso:
$Cf_A = 200(1 + X)$ y $Cf_B = Cf_A(1 + Y) \Rightarrow Cf = Cf_A + Cf_B = 200(1 + X) + 200(1 + X)(1 + Y) = 200(1 + X)(2 + Y)$, $E(Cf) = E[200(1 + X)(2 + Y)] = 200E[(1 + X)(2 + Y)] = 200E(1 + X)E(2 + Y)$ pues X e Y son independientes.
Para la varianza: $V(Cf) = E[(Cf - E(Cf))^2] = E[Cf^2] - (E(Cf))^2$ donde, dada la independencia se tiene $E[Cf^2] = E[200^2(1 + X)^2(2 + Y)^2] = 200^2 E[(1 + X)^2]E[(2 + Y)^2]$. Aquí es mejor, primero desarrollar los cuadrados dentro de los corchetes, luego aplicar el valor esperado en cada caso, recordando que, en general, para cualquier v.a. U se cumple que $E[U^2] = V(U) + (E(U))^2$.

b) Para la covarianza entre los capitales finales:
En (1) usar la independencia entre X e Y que implica $E(Cf_A Cf_B) = E(Cf_A)E(Cf_B)$
En (2) usar la propiedad general: $Cov(U, V) = E(UV) - E(U)E(V)$ aplicándola a $U = Cf_A$ y $V = Cf_B$

Problema 18
Sean X e Y dos variables aleatorias tales que $E(X) = 20$, $V(X) = 9$, $E(Y) = 10$, $V(Y) = 1$ y $Cov(X,Y) = 3$. La utilidad de una venta 1 es dada por $4X - 2Y$, mientras que la de una venta 2 es dada por $7 + 3X + 5Y$.

a) Halle el valor esperado y la varianza de la utilidad de la venta 1.
b) Halle la covarianza de estas utilidades.

Sugerencias:
En a) aplicar la propiedad * como en el problema 16 a).
En b) proceder como en el problema 16 b) (2)