/ Momentos.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMIA

ESTADISTICA INFERENCIAL

EXAMEN FINAL

Clave: EST241
Horario: 0522
Profesora: Zaida Quiroz Cornejo

5

1. (6 puntos) Se ha utilizado la distribución de Pareto para modelar la distribución de los ingresos en una población de individuos, donde a representa el nivel mínimo de ingresos en la población. En efecto esta distribución es muy usada en economía para modelar distribuciones de datos con colas (extremos) de decaimiento lento. Su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \theta a^{\theta} x^{-\theta-1}; x > a; \theta > 1$$

Asuma que $a > 0$ es una constante conocida, y que se recolecta una muestra aleatoria de tamaño n.

1.5 a) Encuentre el estimador del parámetro θ por el método de los momentos. (1.5 puntos)
Sugerencia: Pruebe que $E(X) = a\theta/(\theta - 1)$

b) Pruebe que el estimador de máxima verosimilitud (EMV) de θ es $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{X_i}{a}\right)}$. De una muestra aleatoria de 250 profesores se anotaron sus salarios, y la media geométrica de las observaciones fue $[\prod_{i=1}^{n} x_i]^{1/n} = 61.147$ donde x_i se miden en miles de dólares. Y por estudios previos se asume que el valor de a = 30. Calcule el estimador puntual por EMV. (1.5 puntos) 5

c) Pruebe que el EMV hallado en b) es un estimador asintóticamente insesgado y consistente de θ. (2 puntos)
Sugerencias: $Y = \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{X_i}{a}\right) \sim Gamma(n, \theta)$
Si $Y \sim Gamma(\alpha, \beta)$ entonces $W = 1/Y \sim GammaInversa(\alpha, \beta)$, $E(W) = \frac{\beta}{\alpha-1}$ y $Var(W) = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

d) Considerando los datos de la m.a. en d, si X sigue una distribución de Pareto con f.d.p $f(x)$, se sabe que $Y = log\left(\frac{X}{a}\right) \sim Exp(\theta)$. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de $g(\theta) = P(Y < 1)$ y su valor estimado con los datos en b). (1 punto)

1

2. (4 puntos) El nivel de ingresos de los trabajadores en miles de soles de una gran coorporación se asume que es una v.a. continua con la siguiente función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{(x-a)}{\theta}\right); \text{ si } x \geq a$$

donde $\theta > 0$ y $a \geq 0$ son parámetros del modelo.

a) Si a fuese conocido, halle el estimador de máxima verosimilitud de θ. (1 punto) 1

θ

b) Halle los estimadores de momentos de θ y a. ¿Coinciden los estimadores de momentos y máxima verosimilitud de θ? (1.5 puntos)

$\int_a^\infty \frac{x}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta})dx = (a+\theta)\exp(-\frac{x}{\theta})$

$\int_a^\infty \frac{x^2}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta})dx = (a+2\theta a+2\theta^2)\exp(-\frac{a}{\theta})$

c) Obtenga los estimadores de máxima verosimilitud de θ y a en función $\bar{X}$ y $\tilde{\sigma}$. (1.5 puntos)

Nota: $\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}$

3. (4 puntos) Dada una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una v.a. $X \sim Exp(\beta)$, que denota al tiempo en dias que un inversionista demora en obtener una licencia de funcionamiento.

a) Si la v.a. $Y = 2n\beta\bar{X}$ sigue una distribución chi-cuadrado con 2n grados de libertad. ¿Se puede usar Y como una cantidad pivotal para β? Justifique su respuesta. (0.5 puntos)

b) Si se toma una muestra de 25 inversionistas, y el promedio en días que les tomó a ellos en conseguir su licencia de funcionamiento fue de 90 días. ¿Cual es el intervalo de confianza al 95% para β. (1.5 puntos)

Nota: Si $W \sim \chi^2_{(n)}$ entonces $P(W < \chi^2_{(n,\alpha)}) = \alpha$.

c) Halle, si existe, la prueba UMP que le permita contrastar a nivel de significancia $\alpha = 0.05$

$$H_0 : \beta = 0.01 \text{ vs } H_1 : \beta < 0.01$$

¿Qué es lo que concluiría, según esta prueba, si al tomar una muestra de 25 inversionistas, el promedio en días que les tomó a ellos en conseguir su licencia de funcionamiento fue de 90 días? (2 puntos)

4. (6 puntos) El siguiente modelo estadístico se postula para representar la relación entre ingresos reales agregados y gastos reales agregados de bienes no duraderos:

$$Z_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \epsilon_i,$$

donde

Z_i = Logaritmo de los gastos reales agregados en bienes no duraderos en el periodo i, medidos en miles de millones de dólares;

x_i = Ingreso disponible real agregado en el periodo i, medido en miles de millones de dólares. Además $cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$, y $f(\epsilon_i + ab) = \frac{1}{b^a\Gamma(a)}\epsilon_i^{a-1}e^{-\epsilon_i/b}; \epsilon_i \in (0, \infty)$. Asuma que a y b son constantes conocidas. Bajo estas especificaciones del modelo:

a) Estime los parámetros β_1 y β_2 usando mínimos cuadrados ordinarios (MCO). (2 puntos)

b) Pruebe los supuestos básicos de MCO para este modelo. Halle el valor esperado de Z_i y $\bar{Z}$. Los estimadores MCO de β_1 y β_2 son insesgados. Usando esta información pruebe que $\hat{\beta}_1$ es un estimador insesgado de β_1. (2 puntos)

Nota: Asuma que para $W \sim gamma(a, b)$ entonces $E(W) = ab$ y $Var(W) = ab^2$.

c) Los estimadores MCO β_1 y β_2 son MELI. Pruebe que el estimador de β_1 es MELI. (2 puntos)

Sugerencia:

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Z} - \hat{\beta}_2\bar{X} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}X_i}{n(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2)}\right] Z_i.$$

Pando, 15 de Diciembre 2018

$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$