PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

$\frac{X}{\sigma} \sim N(0,1)$

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
PRÁCTICA CALIFICADA 5

$\left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

$\frac{20\,\overline{X}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(20)$

21 de noviembre de 2015

Horario 522

Clave del curso: EST241

Ejercicio 1. **(12 puntos)**

Sea $X \sim N(0;\, \sigma^2)$. Para construir un intervalo del 95 % de confianza, para estimar a σ^2, se considerará una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$ y como variable base a $W = \frac{10}{\sigma^2}\overline{X}^2$.

a) Determine la distribución de W y concluya que, efectivamente, esta es una variable base. (2 puntos)

b) Deduzca el intervalo de confianza. (3 puntos)

c) Como se sabe, el intervalo usual del 95 % de confianza para estimar a σ^2 está dado por

$$\left[\frac{19}{32{,}8523}S^2\ ;\ \frac{19}{8{,}9065}S^2\right].$$

0,5783   2,13327

Deduzca cuál de los dos intervalos es mejor, mediante el criterio del valor esperado de la longitud del intervalo. (3 puntos)

d) Registrada la muestra se obtuvieron los valores:

2,44	-1,83	4,47	1,09	5,62	4,82	7,36	-5,12	0,88	5,11
-4,55	11,82	8,36	-1,5	-6,8	-2,5	0,93	-1,26	-5,07	2,27

$\sum_{j=1}^{20} X_j = 26{,}54;\ \sum_{j=1}^{20} X_j^2 = 510{,}9136.$

Evalúe e interprete el intervalo de confianza deducido en la parte b. (2 puntos)

e) Según el intervalo de confianza deducido en la parte b, determine entre qué valores se encuentra el valor de $p = P(X > 1) = F_Z(\frac{1}{\sigma})$, donde $Z \sim N(0;\, 1)$. (2 puntos)

Tenga en cuenta

Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de X y $X \sim N(\mu;\, \sigma^2)$; entonces,

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \ \text{ y } \ \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Ejercicio 2. **(8 puntos)**

El ingreso X (en miles de soles) en cierto sector se considera una variable aleatoria continua positiva cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \theta\, e^{-x}(1 - e^{-x})^{\theta - 1}\,,\ x > 0,$$

donde $\theta > 0$.

Se desea contrastar las hipótesis $H_0 : \theta = 1$ y $H_1 : \theta = 2$, a partir de una muestra aleatoria de tamaño $n = \cancel{10}$ 15 y un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

a) Deducir la regla de decisión óptima. (4 puntos)

Tenga en cuenta que si $T = -\sum\limits_{j=1}^{15} Ln(1 - e^{-X_j})$:

$T \sim G(15;\, \theta)$ y, por lo tanto, $2\theta\, T \sim \chi^2(30)$.

b) Determine la probabilidad de cometer un error de Tipo II. (2 puntos)

c) Registrada la muestra aleatoria se obtuvieron los valores: (2 puntos)

1,33; 1,55; 1,49; 1,50; 1,73; 1,09; 0,21; 0,12; 2,21; 7,13.

Concluya. No olvide incluir una medida del riesgo de que la conclusión anterior esté equivocada.

Recordatorio

Lema de Neyman Pearson.

Dadas las hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1$.

Sean $\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}(\theta, X_1, \ldots, X_n) = f_{X_1}(X_1) \cdots f_{X_n}(X_n)$

y $l(\theta) = Ln(\mathcal{L}(\theta)) = Ln(f_{X_1}(X_1)) + \cdots + Ln(f_{X_n}(X_n))$.

Fijados el tamaño de muestra n y el valor de α, la regla de decisión que minimiza β es, necesariamente, de la forma

Se rechaza H_0, si $\frac{\mathcal{L}(\theta_1)}{\mathcal{L}(\theta_0)} > c$, donde c es tal que $P(\text{rechazar } H_0, \text{ siendo verdadera}) = \alpha$.

En términos de la función log-verosimilitud (l), la regla anterior es equivalente a

se rechaza H_0, si $l(\theta_1) - l(\theta_0) > c$.

J.F. San Miguel, 21 de noviembre de 2015.