$\frac{\alpha}{\alpha+1} = \bar{X}$

$\alpha = \bar{X}\alpha + \bar{X}$

$\alpha - \bar{X}\alpha = \bar{X}$

$\alpha(1-\bar{X}) = \bar{X}$ $\quad \hat{\alpha} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMIA

EXAMEN FINAL
CURSO: Estadística Inferencial
CÓDIGO: EST 241
PROFESORA: Zaida Quiroz Cornejo
HORARIO: 0622

Salvo su calculadora de uso personal, no está permitido el uso de otro material de consulta durante el desarrollo de la prueba.
No está permitido el uso de ningún dispositivo electrónico (celulares, tablets, laptops, iPods, etc.).
Los celulares y las cartucheras deben permanecer guardados durante la prueba.

---

1. (4 puntos)

   a) Sea X v.a. continua con función de densidad $f_X(x) = \frac{2x}{\theta^2}$; $0 < x < \theta$ y m.a. de esta distribución. Halle el EMV de θ. Sea la estadística $Y = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Si usara Y como aproximación o estimación de θ, ¿es cierto que dicha estimación tendería a sobrevaluar θ? (1.5 puntos)

   b) Para el precio X que pagaría un consumidor por un nuevo producto, se asume como modelo de datos una distribución uniforme $X \sim U(\alpha, \beta)$ y se registra una m.a. de precios $X_1, \ldots, X_n$ relativos a n consumidores con el objetivo de aproximar el valor del parámetro β usando la estadística $W = 2\bar{X}$. Si usara un tamaño de muestra n grande. ¿qué tamaño de muestra garantizaría que, con 95% de probabilidad, W diferirá de β (en valor absoluto) en menos de un 11% de β? (1 punto) $\quad V(\xi) = S^2$

   c) Sea $X \sim N(0, \sigma^2)$, halle el estimador de momentos de σ^2 y compárelo con S^2 como estimador de σ^2 en cuanto a insesgamiento y eficiencia. (1.5 puntos)

2. (4 puntos) Un gran banco comercial pretende analizar la precisión con la que sus cajeros bancarios procesan transacciones en efectivo. En particular, desea una estimación de la proporción esperada de las transacciones diarias en efectivo que la los cajeros bancarios procesan correctamente. Se planea analizar 200 observaciones pasadas sobre la proporción diaria de transacciones en efectivo correctamente realizadas por los cajeros, y especificar el modelo estadístico subyacente a las observaciones diarias como: $f(z; \alpha) = \alpha z^{\alpha-1}, 0 < z < 1$.

   $m_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1}$
   $M_1 = \bar{X}$

   a) Calcule el estimador por el método de momentos para α. (1 punto)

   b) Calcule el estimador por máxima verosimilitud (EMV) para α. (1 punto)

   c) Se puede mostrar que $E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} ln(Z_i)\right)^{-1}\right] = -\frac{\alpha}{n-1}$. ¿El EMV de α es insesgado o asintóticamente insesgado? (1 punto)

   d) Defina el EMV de $q(\alpha) = \alpha/(\alpha+1)$, que es la proporción esperada del número de transacciones correctamente realizadas. ¿Es un estimador consistente? Si $\sum_{i=1}^{n} ln(Z_i) = -9.725$, calcule un valor estimado de la proporción esperada del número de transacciones correctamente realizadas. (0.5 puntos)

   e) Usando los resultados previos, estime la probabilidad de que haya 97% o más transacciones realizadas correctamente en un día dado. (0.5 puntos)

   $\bar{X} = \frac{\alpha}{\alpha+1}$
   $\bar{X}\alpha + \bar{X} = \alpha$
   $\bar{X} = \alpha - \bar{X}\alpha$
   $\bar{X} = \alpha(1-\bar{X})$
   $\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} = \hat{\alpha}_{MOM}$

$\frac{\alpha}{\alpha+1} = 7$

3. (4 puntos) El número de minutos que pasan después de la salida programada que los aviones sin problemas mecánicos hasta que se vayan del terminal en un aeropuerto superpoblado son resultados iid de una distribución uniforme de una población de la fòrma $f(z;\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < z < \theta$. Una muestra aleatoria de de 1,000 salidas es usada para estimar el parámetro θ y el número esperado de minutos para salir del aeropuerto. Un resumen de estadísticas del resultado de la m.a. incluye $\min(x_1, \ldots, x_n) = 0.1$, $\max(x_1, \ldots, x_n) = 13.8$, $\bar{x} = 6.8$, $s^2 = 15.9$.

   a) Defina el estimador por el método de momentos para θ. ¿es MELI? (1 punto)
   b) Defina el EMV para θ y el número de minutos esperado que espera un avión para salir del aeropuerto. (1 punto)
   c) Use los estimadores que definió para generar estimaciones puntuales de máxima verosimilitud de las respectivas cantidades de interés definidas en a) y b). (0.5 puntos)
   d) Los EMV hallados en b) ¿son insesgados? ¿son consistentes? ¿son MELI? (2 puntos)

4. (5 puntos) El Departamento de Personal de la ACME Textile Co. administra una prueba de aptitud para todo posible empleados de linea de confección de prendas. El número medio de prendas por hora que un empleado puede producir es aproximadamente proporcional a su puntuación obtenida en el test de aptitud. En particular, la relación está representada por

$$Y_i = X_i\beta + \epsilon_i$$

donde
Y_i = promedio de prendas / hora producidas por empleado
X_i = puntuación del empleado i en la prueba de aptitud
β = factor de proporcionalidad
ϵ_i = término del error Suponga que $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$, es una muestra aleatoria de tasas de producción promedio para n empleados, así como sus puntuaciones asociadas, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, en la prueba de aptitud.

   a) Derive el estimador de mínimos cuadrados del factor de proporcionalidad, β. Pruebe que el estimador de mínimos cuadrados ordinarios de β es MELI. (1.5 puntos)
   b) Suponiendo que los errores ϵ_i se distribuyen normalmente, entonces la distribución de $Y_i \sim N(X_i\beta, \sigma^2)$, usela para hallar los estimadores de máxima verosimilitud de β y σ^2. (1.5 puntos)
   c) Pruebe las propiedades que tiene el EMV de β. (1 punto)
   d) De una muestra de tamaño n = 100, el resultado de la muestra resultó en $\sum_{i=1}^{100} X_iY_i = 92.017$, $\sum_{i=1}^{100} X_i^2 = 897.235$ Use los estimadores de beta calculados en b) para generar una estimación puntual de β. Interprete el valor del estimador puntual de β en el modelo. (1 punto)

5. (3 puntos) Dada una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una v.a. $X \sim Exp(\beta)$, que denota al tiempo en dias que un inversionista demora en obtener una licencia de funcionamiento.

   a) Si la v.a. $Y = 2n\beta\bar{X}$ sigue una distribución chi-cuadrado con 2n grados de libertad. ¿Se puede usar Y como una cantidad pivotal para β? Justifique su respuesta. Si se toma una muestra de 25 inversionistas, y el promedio en días que les tomó a ellos en conseguir su licencia de funcionamiento fue de 90 días. Defina el intervalo de confianza al 95% para β. (1.5 puntos)
   Nota: Si $W \sim \chi^2_{(n)}$ entonces $P(W < \chi^2_{(n,\alpha)}) = \alpha$.
   b) Contrastar a un nivel de significancia $\alpha = 0.05$

$$H_0 : \beta = 0.02 \text{ vs } H_1 : \beta = 0.03$$

   ¿Qué es lo que concluiría, según esta prueba, si al tomar una muestra de 30 inversionistas, el promedio en días que les tomó a ellos en conseguir su licencia de funcionamiento fue de 90 días? (1.5 puntos)

Pando, 13 de julio de 2019

$$\int_0^1 \alpha z^\alpha \quad \frac{\alpha z^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 \quad \frac{\alpha}{\alpha+1} = F(z)$$