PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMIA

ESTADISTICA INFERENCIAL
PRACTICA CALIFICADA 5

Problema 1 (7 puntos)

En el sector de pequeñas empresas de mecánica automotriz, un economista distingue dos sub sectores: las dedicadas a pintar automóviles y las dedicadas a reparar automóviles (sin incluir pintado). El capital inicial en el primer caso es una v.a. $X \sim N(\mu_X, \sigma^2 = 4)$ y en el segundo es una v.a. $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2 = 4)$, siendo ambas v.a. independientes.

Una m.a de 9 microempresarios del primer sub sector dio los capitales iniciales (en miles de US$) (2, 4, 3, 3, 9, 9, 3, 4, 7) y una m.a. de 4 microempresarios del segundo sub sector fue (8, 7, 10, 9).

a) Use la independencia de las m.a. para hallar los estimadores MV de μ_X y μ_Y y calcule los errores estándar *e.e.* correspondientes. Recuerde que en general, si $\hat{\theta}$ es estimador de θ, entonces su error estándar de estimación es $e.e.(\hat{\theta}) := \sqrt{V(\hat{\theta})}$. (2p.)

b) Construya intervalos de confianza de 95% para μ_X y μ_Y y úselos para estudiar la afirmación: “Es más barato iniciarse en el sector de pintado de automóviles que en el de reparación de automóviles”. (2p.)

c) Suponga ahora que la varianza común σ^2 es desconocida. Dada la independencia, se sabe que $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Con esta información estime los tres parámetros mediante máxima verosimilitud y vea si el estimador de σ^2 resulta insesgado. (3p.)

Solución:

a) **El estimador MV de μ_X** es simplemente el estimador usual de μ en una distribución normal, cosa que ya se vio en clase y en los apuntes de clase y que repetimos brevemente aquí:

$$f_X(x;\mu_X,\sigma_X^2 = 4) = \frac{e^{-\frac{(X-\mu_X)^2}{8}}}{\sqrt{2\pi}2} \Rightarrow L(\mu_X) = \prod_{j=1}^{n_X} f_{X_j}(x_j;\mu_X) = f_{X_1}(x_1;\mu_X) \times f_{X_2}(x_2;\mu_X) \times \dots \times f_{X_{n_X}}(x_{n_X};\mu_X)$$

$$= \frac{e^{-\frac{(x_1-\mu_X)^2}{8}}}{\sqrt{2\pi}2} \times \frac{e^{-\frac{(x_2-\mu_X)^2}{8}}}{\sqrt{2\pi}2} \times \dots \frac{e^{-\frac{(x_{n_X}-\mu_X)^2}{8}}}{\sqrt{2\pi}2} = \frac{e^{-\sum_{j=1}^{n_X}\frac{(x_j-\mu_X)^2}{8}}}{(\sqrt{2\pi}2)^{n_X}}$$

es la función de verosimilitud de μ_X, es diferenciable y para maximizarla, es más sencillo trabajar con la log-verosimilitud $l(\mu_X) = ln(L(\mu_X))$:

$$l(\mu_X) = ln\left(\frac{e^{-\sum_{j=1}^{n_X}\frac{(x_j-\mu_X)^2}{8}}}{(\sqrt{2\pi}2)^{n_X}}\right) = -\sum_{j=1}^{n_X}\frac{(x_j-\mu_X)^2}{8} - ln\left((\sqrt{2\pi}2)^{n_X}\right) \Rightarrow \frac{\partial l(\mu_X)}{\partial \mu_X} = -\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{n_X}\frac{\partial (x_j-\mu_X)^2}{\partial \mu_X} =$$

$-\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{n_X} 2(x_j-\mu_X) \times -1 = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n_X} x_j - n_X\mu_X = 0 \Rightarrow n_X\bar{X} - n_X\mu_X = 0$, de donde el estimador Máximo verosímil de μ_X es $\hat{\mu}_X = \bar{X}$, asumiendo las condiciones de segundo orden para el máximo.

análogamente, el estimador M.V. de μ_Y es $\hat{\mu}_Y = \bar{Y}$; además $e.e.(\bar{X}) = \sqrt{V(\bar{X})} = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0.67$ y $e.e.(\bar{Y}) = \sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$.

b) Aquí hay que construir respectivos I.C. de 95% de confianza para μ_X y para μ_Y y ver si el I.C. de μ_X cae totalmente debajo o a la izquierda del I.C. para μ_Y; de ser así, sí sería aceptable la afirmación, en caso contrario, sería al revés o en todo caso no se podría decir nada.

I.C. de 95% para μ_X:

Como $\bar{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n_X} = \frac{4}{9}\right) \Rightarrow Z = \frac{(\bar{X}-\mu_X)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}}} = \frac{3}{2}(\bar{X}-\mu_X) \sim N(0,1)$ es una buena variable base.

NO USAR EN EVALUACIONES

Planteamos valores a y b tales que $P(a \leq Z \leq b) = P\left(a \leq \frac{3}{2}(\bar{X} - \mu_X) \leq b\right) = 0.95$ con $P(Z \leq a) = P(Z \geq b) = 0.025$, de donde resulta $a = -1.96; b = 1.96$

$0.95 = P\left(-1.96 \leq \dfrac{3}{2}(\bar{X} - \mu_X) \leq 1.96\right) = P\left(-1.96 \times \dfrac{2}{3} \leq (\bar{X} - \mu_X) \leq 1.96 \times \dfrac{2}{3}\right) =$
$P\left(-\bar{X} - 1.96 \times \frac{2}{3} \leq -\mu_X \leq -\bar{X} + 1.96 \times \frac{2}{3}\right) = P\left(\bar{X} - 1.96 \times \frac{2}{3} \leq \mu_X \leq \bar{X} + 1.96 \times \frac{2}{3}\right)$. El I.C. de 95% para μ_X es $\bar{X} - 1.31 \leq \mu_X \leq \bar{X} + 1.31$; como la muestra es (2, 4, 3, 3, 9, 9, 3, 4, 7), calculamos $\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n} = \frac{44}{9} = 4.89$ y el I.C. calculado es $4.89 - 1.31 \leq \mu_X \leq 4.89 + 1.31 \Rightarrow \mathbf{3.58 \leq \mu_X \leq 6.20}$ **con 95% de confianza**.

I.C. de 95% para μ_Y: En este caso $\bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n_Y} = \frac{4}{4} = 1\right); Z = \frac{(\bar{Y} - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} = (\bar{Y} - \mu_Y) \sim N(0,1)$ y I.C. de 95%

para μ_Y es $\bar{Y} - 1.96 \leq \mu_Y \leq \bar{Y} + 1.96$; dada la m.a. (8, 7, 10, 9), resulta $\bar{Y} = 8.5$ y el I.C. calculado es $8.5 - 1.96 \leq \mu_Y \leq 8.5 + 1.96 \Rightarrow \mathbf{6.54 \leq \mu_Y \leq 10.46}$ **con 95% de confianza**.

De los intervalos de confianza, tenemos que el capital de inicio en el sub sector del pintado de automóviles está entre 3.58 y 6.20 miles de dólares mientras que en el sub sector de reparaciones el capital inicial está entre 6.54 y 10.46 miles de dólares, entonces: $\boldsymbol{\mu_X \leq 6.20 < 6.54 \leq \mu_Y}$ en promedio y con 95% de confianza, podemos decir que, en efecto, es más barato iniciarse en el pintado de automóviles que en la reparación de automóviles.

c) $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{e^{-\frac{(X-\mu_X)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \frac{e^{-\frac{(Y-\mu_Y)^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \Rightarrow L(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) = \left(\prod_{j=1}^{n_X} \frac{e^{-\frac{(X_j-\mu_X)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)\left(\prod_{i=1}^{n_Y} \frac{e^{-\frac{(Y_i-\mu_Y)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) =$

$\left(\frac{e^{-\sum_{j=1}^{n_X} \frac{(X_j-\mu_X)^2}{2\sigma^2}}}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n_X}}\right)\left(\frac{e^{-\sum_{i=1}^{n_Y} \frac{(Y_i-\mu_Y)^2}{2\sigma^2}}}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n_Y}}\right) \Rightarrow$

$$l(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) = -\sum_{j=1}^{n_X} \frac{(X_j - \mu_X)^2}{2\sigma^2} - n_X ln(\sqrt{2\pi}) - n_X ln(\sigma) - \sum_{i=1}^{n_Y} \frac{(Y_i - \mu_Y)^2}{2\sigma^2} - n_Y ln(\sqrt{2\pi}) - n_Y ln(\sigma)$$

Maximizando $l(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2)$:

$$\frac{\partial l(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2)}{\partial \mu_X} = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_X} \frac{\partial (X_j - \mu_X)^2}{\partial \mu_X} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_X} 2(X_j - \mu_X) \times -1 = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n_X} (X_j - \mu_X) = 0 \Rightarrow$$
$\mu_X = \bar{X} \Rightarrow \hat{\mu}_X = \bar{X}$

Análogamente $\frac{\partial l(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2)}{\partial \mu_Y} = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_Y} \frac{\partial (Y_i - \mu_Y)^2}{\partial \mu_Y} = 0 \Rightarrow \mu_Y = \bar{Y} \Rightarrow \hat{\mu}_Y = \bar{Y}$; finalmente:

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(-\sum_{j=1}^{n_X} \frac{(X_j - \mu_X)^2}{2\sigma^2} - n_X ln(\sqrt{2\pi}) - n_X ln(\sigma) - \sum_{i=1}^{n_Y} \frac{(Y_i - \mu_Y)^2}{2\sigma^2} - n_Y ln(\sqrt{2\pi}) - n_Y ln(\sigma)\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(-\sum_{j=1}^{n_X} \frac{(X_j - \mu_X)^2}{2\sigma^2} - n_X ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{n_X}{\mathbf{2}} ln(\boldsymbol{\sigma^2}) - \sum_{i=1}^{n_Y} \frac{(Y_i - \mu_Y)^2}{2\sigma^2} - n_Y ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{n_Y}{\mathbf{2}} ln(\boldsymbol{\sigma^2})\right) =$$

$$-\sum_{j=1}^{n_X} \frac{(X_j - \mu_X)^2}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma^2} (\sigma^2)^{-1} - \frac{n_X}{\mathbf{2}} \frac{\partial}{\partial \sigma^2} ln(\boldsymbol{\sigma^2}) - \sum_{i=1}^{n_Y} \frac{(Y_i - \mu_Y)^2}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma^2} (\sigma^2)^{-1} - \frac{n_Y}{\mathbf{2}} \frac{\partial}{\partial \sigma^2} ln(\boldsymbol{\sigma^2}) =$$

$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_X} (X_j - \mu_X)^2 (\sigma^2)^{-2} - \frac{n_X}{\mathbf{2}} \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_Y} (Y_i - \mu_Y)^2 (\sigma^2)^{-2} - \frac{n_Y}{\mathbf{2}} \frac{1}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow$

$\sum_{j=1}^{n_X} (X_j - \mu_X)^2 (\sigma^2)^{-2} - \frac{n_X}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^{n_Y} (Y_i - \mu_Y)^2 (\sigma^2)^{-2} - \frac{n_Y}{\sigma^2} = 0$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n_X} (X_j - \mu_X)^2 - n_X \sigma^2 - \sum_{i=1}^{n_Y} (Y_i - \mu_Y)^2 - n_Y \sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_X} (X_j - \mu_X)^2 + \sum_{i=1}^{n_Y} (Y_i - \mu_Y)^2}{n_X + n_Y}$ y como $\hat{\mu}_X = \bar{X}$; $\hat{\mu}_Y = \bar{Y}$, tenemos $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_X} (X_j - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_Y} (Y_i - \bar{Y})^2}{n_X + n_Y}$.

NO USAR EN EVALUACIONES

Sobre el insesgamiento: $E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{\sum_{j=1}^{n_X}(X_j-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{n_X+n_Y}\right) = \frac{1}{n_X+n_Y}E\left(\sum_{j=1}^{n_X}\left(X_j-\bar{X}\right)^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2\right)$

$$= \frac{1}{n_X+n_Y}E((n_X-1)S_X^2+(n_Y-1)S_Y^2) = \frac{1}{n_X+n_Y}\left((n_X-1)\underbrace{E(S_X^2)}_{\sigma^2}+(n_Y-1)\underbrace{E(S_Y^2)}_{\sigma^2}\right) = \frac{n_X+n_Y-2}{n_X+n_Y}\sigma^2$$

$\neq \sigma^2$, es estimador no es insesgado.

Problema 2 (5 puntos)
Sea X con distribución exponencial $X \sim Exp(x;\beta)$.

a) Halle el estimador máximo verosímil de β y use la propiedad de invarianza para hallar el estimador máximo verosímil $\hat{\gamma}$ de $\gamma = Percentil\ 25$ de la distribución de *X*. Recuerde que si *k* es número entre 0 y 100, el *k*-ésimo percentil de la distribución de una v.a.c. *X* es el valor P_k tal que $P(X \leq P_k) = \frac{k}{100}$. (3p.)

b) Halle la distribución asintótica del estimador máximo verosímil $\hat{\beta}$ y úsela para hallar el tamaño de muestra que permite que la diferencia $\left|\hat{\beta}-\beta\right|$ sea menor al 11% del valor real de β. (2p.)

Solución:

a) $X \sim Exp(x;\beta) \Rightarrow f_X(x;\beta) = \beta e^{-\beta x} \quad x > 0 \Rightarrow L(\beta) = \prod_{i=1}^{n}\beta e^{-\beta x_i} = \beta^n e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i} = \beta^n e^{-\beta n\bar{X}} \quad \beta > 0$
$\Rightarrow l(\beta) = \ln\left(L(\beta)\right) = n ln(\beta) - \beta n\bar{X}$ que es función diferenciable; usamos derivadas para maximizar:
$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta} = \frac{n}{\beta} - n\bar{X} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\bar{X}}$ y verificando el máximo, tenemos $\hat{\beta} = \frac{1}{\bar{X}}$ es el estimador M.V. de β.

Sea $\gamma = Percentil\ 25 \Rightarrow P(X \leq \gamma) = 0.25 \Rightarrow \int_0^{\gamma}\beta e^{-\beta x}dx = 0.25 \Rightarrow 1 - e^{-\beta\gamma} = 0.25 \Rightarrow e^{-\beta\gamma} = 0.75 \Rightarrow$
$\beta\gamma = -ln(0.75) \Rightarrow \gamma = -\frac{ln(0.75)}{\beta} = h(\beta)$ y por "invarianza" del método de máxima verosimilitud, la relación entre los parámetros γ y β también se reproduce entre los estimadores: $\hat{\gamma} = h\left(\hat{\beta}\right) = -\frac{ln(0.75)}{\hat{\beta}} = -ln(0.75)\bar{X}$ es el estimador M.V. de $\gamma =$ *Percentil* 25 de *X*.

b) Sabemos que, bajo las condiciones de regularidad, la distribución asintótica (cuando *n* es "grande") el estimador M.V de un parámetro θ tiene distribución $N\left(\theta, \sigma_{\hat{\theta}}^2 = \frac{1}{nE\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta}ln f_X(x;\theta)\right)^2\right)}\right)$. En este caso:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}ln f_X(x;\beta) = \frac{\partial}{\partial\beta}(n ln(\beta) - \beta X) = \left(\frac{1}{\beta} - X\right) \Rightarrow E\left(\left(\frac{\partial}{\partial\beta}ln f_X(x;\beta)\right)^2\right) = E\left(\left(\frac{1}{\beta} - X\right)^2\right) = E\left(\left(X - \frac{1}{\beta}\right)^2\right)$$

$= V(X) = \frac{1}{\beta^2} \Rightarrow \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{1}{nE\left(\left(\frac{\partial}{\partial\beta}ln f_X(x;\beta)\right)^2\right)} = \frac{\beta^2}{n}$, entonces $n \to \infty \Rightarrow \hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\beta^2}{n})$

Queremos n tal que $0.95 = P\left(\left|\hat{\beta}-\beta\right| < 0.11\beta\right) \Rightarrow 0.95 = P\left(\left|\hat{\beta}-\beta\right| < 0.11\beta\right) = P\left(\frac{|\hat{\beta}-\beta|}{\sqrt{\frac{\beta^2}{n}}} < \frac{0.11\beta}{\sqrt{\frac{\beta^2}{n}}}\right) =$

$P\left(|Z| < 0.11\sqrt{n}\right) \Rightarrow P\left(Z < 0.11\sqrt{n}\right) = 0.975 \Rightarrow 0.11\sqrt{n} = 1.96 \Rightarrow n = 17.82^2 = 317.49 \Rightarrow n \cong 318$

Problema 3 (8 puntos)
Sea $Y = \alpha_0 + \beta X + \varepsilon$ un modelo de regresión lineal con intercepto, pero donde el intercepto α_0 es conocido. Dada una m.a. de *n* parejas $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$, y bajo los supuestos clásicos, se desea estimar el parámetro β.

a) Halle el estimador de mínimos cuadrados ordinarios de β y determine si es insesgado. (3p.)

b) Si se asume el supuesto adicional $\varepsilon_j \sim N(0,1)$:
(1) Use la función generatriz de momentos y pruebe que $Y_j = \alpha_0 + \beta X_j + \varepsilon_j$ tiene distribución normal, identificando claramente sus parámetros. (1p.)
(2) Halle es estimador máximo verosímil de β. (2p.)

NO USAR EN EVALUACIONES

(3) ¿Sería consistente el estimador obtenido en (2)? (2p.)

Recuerde que se asume que los $\{X_j\}$ son variables pero no aleatorias. Además, y en general, si $R\ y\ T$ son dos variables aleatorias cualesquiera, entonces $V(\frac{R}{T}) \neq \frac{V(R)}{V(T)}$.

Solución:

a) Para $\hat{\beta}_{MCO}$ el estimador de mínimos cuadrados ordinarios de β: $Q(\beta) = \sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \alpha_0 - \beta X_j\right)^2 \Rightarrow \frac{d}{d\beta}Q(\beta) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\beta}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \alpha_0 - \beta X_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{d\beta}\left(Y_j - \alpha_0 - \beta X_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}2\left(Y_j - \alpha_0 - \beta X_j\right)\left(-X_j\right) = 0$$

$\Rightarrow -2\sum_{j=1}^{n}\left(Y_jX_j - \alpha_0 X_j - \beta X_j^2\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}Y_jX_j - \alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j - \beta\sum_{j=1}^{n}X_j^2 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\sum_{j=1}^{n}Y_jX_j - \alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2}$ y asumiendo el mínimo, tenemos $\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^{n}Y_jX_j - \alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2}$.

$$E\left(\hat{\beta}\right) = E\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}Y_jX_j - \alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2}\right) \overset{X_j\ no\ aleat.}{\triangleq} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2}E\left(\sum_{j=1}^{n}Y_jX_j - \alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j\right) \overset{X_j\ no\ aleat.}{\triangleq}$$

$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2}\left(\sum_{j=1}^{n}X_jE(Y_j) - \alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j\right) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\left(\alpha_0 + \beta X_j\right) - \alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j\right)$, pues

$E\left(Y_j\right) = E\left(\alpha_0 + \beta X_j + \varepsilon_j\right) = \alpha_0 + \beta X_j + E\left(\varepsilon_j\right) = \alpha_0 + \beta X_j$, ya que $E\left(\varepsilon_j\right) = 0 \Rightarrow$

$E\left(\hat{\beta}\right) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2}\left(\alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j + \beta\sum_{j=1}^{n}X_j^2 - \alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j\right) = \beta$, el estimador M.C.O es insesgado.

b) Si $\varepsilon_j \sim N(0,1)$ entonces:

(1) $\varepsilon_j \sim N(0, \sigma^2 = 1)\ \forall j \Rightarrow M_{Y_j}(t) = E\left(e^{tY_j}\right) = E\left(e^{t\left(\alpha_0 + \beta X_j + \varepsilon_j\right)}\right) = E\left(e^{t\left(\alpha_0 + \beta X_j\right)}e^{t\varepsilon_j}\right) = e^{t\left(\alpha_0 + \beta X_j\right)}M_{\varepsilon_j}(t)$

y como en general, si $W \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow M_W(t) = E\left(e^{tW}\right) = e^{t\mu + \frac{t^2}{2}\sigma^2} \Rightarrow M_{\varepsilon_j}(t) = e^{t0 + \frac{t^2}{2}1} = e^{\frac{t^2}{2}}$. así

$M_{Y_j}(t) = e^{t\left(\alpha_0 + \beta X_j\right)}e^{\frac{t^2}{2}} = e^{t\left(\alpha_0 + \beta X_j\right) + \frac{t^2}{2}}$ que corresponde a la función generatriz de momentos de una distribución normal $N\left(\alpha_0 + \beta X_j, 1\right)$, es decir $Y_j \sim N\left(\alpha_0 + \beta X_j, 1\right)$.

(2) $Y_j \sim N\left(\alpha_0 + \beta X_j, \sigma^2 = 1\right) \Rightarrow f_{Y_j}\left(Y_j; \mu_j = \alpha_0 + \beta X_j\right) = \frac{e^{-\frac{\left(Y_j - \alpha_0 - \beta X_j\right)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow L(\beta) = \prod_{j=1}^{n}f_{Y_j}\left(Y_j; \beta\right)$ y la log-verosimilitud es:

$$l(\beta) = ln\left(L(\beta)\right) = \sum_{j=1}^{n}ln\, f_{Y_j}\left(Y_j; \beta\right) = \sum_{j=1}^{n}ln\left(\frac{e^{-\frac{\left(Y_j - \alpha_0 - \beta X_j\right)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\left(Y_j - \alpha_0 - \beta X_j\right)^2}{2} - ln\left(\sqrt{2\pi}\right)\right) =$$

$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \alpha_0 - \beta X_j\right)^2 - nln\left(\sqrt{2\pi}\right) \Rightarrow \frac{dl(\beta)}{d\beta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\beta}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \alpha_0 - \beta X_j\right)^2 = 0$ que es la misma ecuación del estimador M.C.O. de modo que $\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^{n}Y_jX_j - \alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2}$ es también el estimador M.V.

(3) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^{n}Y_jX_j - \alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2}$ ya es insesgado (según lo visto en a), por tanto es asintóticamente insesgado:

$\boldsymbol{E\left(\hat{\beta}\right) = \beta \Rightarrow \lim_{n\to\infty}E\left(\hat{\beta}\right) = \beta}$ **(insesgamiento asintótico).**

$$V\left(\hat{\beta}\right) = \mathrm{V}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}Y_jX_j - \alpha_0\sum_{j=1}^{n}X_j}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2}\right) \underbrace{=}_{X_j\ no\ aleat} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}X_j^2\right)^2}\mathrm{V}\left(\sum_{j=1}^{n}Y_jX_j - \alpha_0\underbrace{\sum_{j=1}^{n}X_j}_{no\ aleat}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}X_j^2\right)^2}\mathrm{V}\left(\sum_{j=1}^{n}Y_jX_j\right) = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}X_j^2\right)^2}\sum_{j=1}^{n}X_j^2\,V(Y_j) \text{ y } V(Y_j) = \mathrm{V}\left(\underbrace{\alpha_0 + \beta X_j}_{no\ aleat} + \varepsilon_j\right) = \mathrm{V}\left(\varepsilon_j\right) = 1 \Rightarrow$$

$V\left(\hat{\beta}\right) = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n}X_j^2\right)^2}\sum_{j=1}^{n}X_j^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}V\left(\hat{\beta}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}X_j^2}\right) = 0$ si, como es usual, X_j toma valores

NO USAR EN EVALUACIONES

“grandes” de modo que $\sum_{j=1}^{\infty} X_j^2 = \infty$, esto es : $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{V(\widehat{\beta}) = 0}$ **de modo que $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ es “asintóticamente eficiente”**
Al cumplir $\hat{\beta}$ las dos condiciones, insesgamiento asintótico y eficiencia asintótica, $\hat{\beta}$ es estimador consistente del parámetro β.

01 de diciembre de 2018.

ACG./SAMP.

NO USAR EN EVALUACIONES