2017 - II
Valdivieso.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
EXÁMEN FINAL

Problema 1 (4 puntos) Suponga que la diferencia entre el precio de venta en miles de dólares de una propiedad y el precio en que tasa un perito del banco esta misma propiedad, X, es una variable aleatoria normal con media 0 y varianza σ^2. Para estimar σ^2 suponga que se toma una muestra aleatoria de tamaño 2 de X y se proponen como estimadores de σ^2 a:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2}, \quad \hat{\sigma}_2^2 = C\bar{X}^2 \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}_3^2 = \hat{\sigma}_{MV}^2,$$

donde $\hat{\sigma}_{MV}^2$ es el estimador de máxima verosimilitud de σ^2.

a) ¿Para que valor de C será $\hat{\sigma}_2^2$ un estimador insesgado? (1.0 punto)

b) Halle de manera explícita el estimador de máxima verosimilitud de σ^2. (1.0 punto)

c) Suponga que al seleccionarse 2 propiedades al azar con precios de venta de 250,000 dólares y 312,000 sólares, el perito del banco los taso en 235,000 dólares y 320,000 dólares, respectivamente ¿cuál sería la mejor estimación de σ^2 con base en los estimadores anteriormente propuestos? (2.0 puntos)

Problema 2 (4 puntos) Sea X una v.a continua con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3} & \text{, si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

4 ptos

a) Halle el MELI de θ. (1.0 punto)

b) Muestre que el estimador de máxima verosimilitud de θ vienen dado por: (1.5 puntos)

$$\hat{\theta}_{MV} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

c) Halle C tal que $\hat{\theta} = C\hat{\theta}_{MV}$ sea un estimador insesgado de θ. (1.5 puntos)

Problema 3 (4 puntos) El tiempo en horas que tarda una persona, que ha de pasar por una arteria principal, en llegar a su trabajo de un distrito financiero se asume que es una v.a continua $X \sim \Gamma(2, \beta)$. Puesto que se van a realizar obras en tal arteria, usted es contratado para hacer un estudio de impacto ambiental en base a una encuesta que debera aplicar a los trabajadores de ese distrito que hacen uso de esta arteria.

1.5

a) Halle el estimador de máxima verosimilitud de β y analice su consistencia. (1.5 puntos)

Pgtar

b) Un cuestión central de su estudio es determinar el número mínimo de personas n que deberá encuestar a fin de estimar el tiempo medio que se tarda un trabajador, que usa la arteria, en llegar a su centro laboral del distrito. Si se desea estimar esta cantidad con un margen de error no mayor a los 12 minutos y una confianza del 95% y se dispone de los siguientes tiempos en horas de traslado de una muestra piloto tomada al azar a 7 trabajadores de este distrito financiero que usan la arteria: 0.45, 1.88, 0.44, 1.82, 0.47, 0.64, 0.76 ¿cuál sería el valor de n? Sugerencia: Use el TLC. 0.92 n=7 (2.5 puntos)

15/60

Problema 4 (4 puntos) Supónga que X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ. **Para contrastar:**

$$H_0 : \lambda = 0.2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda > 0.2$$

se toma una muestra aleatoria (m.a) de tamaño n de X y se decide rechazar H_0 si $\bar{X} > C$.

a) Muestre que la suma de las variables que conforman los elementos de la m.a anterior tiene también una distribución de Poisson. (1.0 punto)

b) Si $n = 10$ y C =0.4 ¿ cuál es el nivel de significación del contraste? No nere Q'rer con la dist (1.0 punto)

c) Si $n = 50$ y se fija un nivel de significación de α =0.05, halle (utilizando el teorema del límite central) el valor de C y determine luego que decisión debería tomarse si se observa que la media muestral dió un valor de 0.315. (2.0 puntos)

Problema 5 (4 puntos) Un modelo relaciona el salario en miles de u.m Y de una persona en cierta ciudad en términos del número de años de estudio de esta, X, mediante el modelo

$$Y_j = \alpha_0 + \beta X_j + \epsilon_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

donde se asume que α_0 es conocido, los errores $\epsilon_j \sim N(0,1)$ son independientes y los X_j son fijos.

a) Halle la prueba UMP a nivel $\alpha = 0.05$ para contrastar

$$H_0 : \beta = \beta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta < \beta_0$$

(2.0 puntos)

b) En un medio local un economista manifestó que por cada año adicional que una persona estudia en esta ciudad, sus salarios se incrementan en promedio en 500 u.m. A usted sin embargo ello le parece una exageración, por lo que entrevistó a 9 sujetos seleccionados al azar de esta ciudad, a las que se les conocia sus años de estudio y encontró los siguiente pares de años de estudio y salarios en miles de u.m. siguientes:

$$(12, 1.663); (25, 5.070); (20, 5.133); (32, 7.539); (8, 4.015); (12, 2.919); (35, 10.185); (30, 7.454); (10; 2.218),$$

Si $\alpha_0 = 0.2$ ¿podría afirmar a un nivel de significación de $\alpha = 0.05$ que el economista ha exagerado? (2.0 puntos)

Profesor del curso: Luis Valdivieso

San Miguel, 9 de Diciembre de 2017