Capítulo 2

Distribuciones importantes

La aplicación a situaciones reales de los conceptos hasta ahora estudiados, requiere modelos mediana o profundamente complejos para que sean útiles. Sin embargo, por complejo que pueda ser un modelo, siempre cabe la posibilidad de trabajar con él, descomponiéndolo en partes más simples.

Por ejemplo, si quisiéramos describir el comportamiento del precio de un determinado bien a lo largo del tiempo, bajo condiciones de competencia pura, pero con fluctuaciones aleatorias, podríamos expresar dicho precio mediante:

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \quad t = 1,2,3,\cdots$$

Donde:

- X_t representa el precio de equilibrio en el periodo t (a partir de un equilibrio inicial X_0);
- X_{t-1} representa el precio de equilibrio en el periodo inmediato anterior;
- ε_t es el efecto de un ligero desequilibrio aleatorio.
- $\rho > 0$ es una constante ("parámetro") que refleja una cierta "proporcionalidad" en la respuesta del precio en el periodo t al precio del periodo anterior.

Razonablemente, **podemos asumir además que:**

- $E[\varepsilon_t] = 0$**,** que es la manera formal de decir que el azar no tiene favoritos, esto es, a veces los desequilibrios transitorios y fortuitos sobrevalúan el equilibrio, otras veces lo subvalúan; pero "a la larga" o "en promedio", respetan las fuerzas del mercado.
- $V[\varepsilon_t] = \sigma^2$. **El segundo supuesto** se puede ver como la contrapartida formal de la idea de que la variabilidad de los desequilibrios fortuitos y transitorios no tiene por que ser constante; que el azar, aunque justo, es "voluble" en sus restricciones y excesos, pudiendo variar éstos de periodo en periodo, lo que implica una varianza no constante, o sea una "volatilidad" cambiante.

En el modelo anterior, las propiedades básicas residen en la variable ε_t**,** pues reemplazando sucesivamente en la ecuación se llega a:

$$X_t = \rho^t X_0 + \rho^{t-1}\varepsilon_1 + \rho^{t-2}\varepsilon_2 + \rho^{t-3}\varepsilon_3 + \cdots + \rho\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

esto es, **conocer la distribución de ε_t nos pone en capacidad de explicar y predecir -en términos probabilísticos- el comportamiento del precio X_t.**

Nótese que, en lo que a Estadística se refiere, la complejidad del modelo se atenúa bastante si hallamos la distribución del error aleatorio ε_t.

Una manera de facilitar el trabajo futuro, es dedicar algo de tiempo a recolectar información acerca de "variables aleatorias tipo" –mejor dicho, de "distribuciones tipo"- que sirvan como "ladrillos" en la construcción de modelos complejos. Estas distribuciones, que por otra parte, no por simples menos realistas, tienen fundamentos racionales bien claros y entenderlos provee herramientas para análisis más profundos.

En las secciones que siguen pasaremos revista a un conjunto mínimo de distribuciones tipo, estudiando sus orígenes y parámetros característicos.

Para unificar términos, si X representa una variable aleatoria con función $f_X(x)$ de probabilidad o de densidad, llamaremos **'Distribución de X ' al conjunto $\{(x, f_X(x)) \mid x \in R_X\}$ y escribiremos $X \sim f_X(x)$ para resaltar el hecho de ser $f_X(x)$ la función de distribución de X .**

2.1 Distribución Binomial

2.1.1 Uso

Esta es la distribución que se presenta cuando contamos el número X de veces que ocurre un determinado evento A sobre un total fijo de n repeticiones u observaciones independientes de un experimento.

Ejemplos:

(1) Se envía $n = 60$ cuestionarios a empresas para que los llenen con datos sobre empleo y se cuenta el número X de cuestionarios devueltos llenos.

(2) Una persona contesta totalmente al azar una prueba con $n = 20$ preguntas de opción mútiple y registramos el número X de aciertos obtenidos por la persona.

2.1.2 Orígenes y Parámetros

Formalmente esta distribución se presenta cuando hay un cierto evento A, que puede presentarse o no, como resultado de un experimento aleatorio ε, y cuando este experimento se repite independientemente, una cantidad fija de veces (digamos n veces) de modo que la probabilidad de $p = P(A)$ se mantiene constante, **contándose el número de veces que ocurre A en el total de n repeticiones.**

Proposición

Sea A un evento que puede ocurrir con probabilidad p (o sea $p = P(A)$) o puede no ocurrir con probabilidad $q = 1 - p$ (esto es $q = P(A^C)$). Si se repite n veces de forma independiente, el experimento de cuyo espacio muestral es A un evento, y se define la variable aleatoria X = Número de veces que ocurre A en las n repeticiones, entonces la función de probabilidad de X es:

$$P_X(x) = P(X = x) = C_x^n p^x q^{n-x} \text{ donde } x = 0,1,2,\cdots,n$$

Demostración:

$R_X = \{0,1,2,\cdots,n\}$, ya que puede ocurrir que nunca se presente A, en cuyo caso X será 0, o puede ocurrir A una sola vez, y así hasta el otro caso extremo en que A se presenta siempre, en cuyo caso X será n .

Ahora bien, que el evento A se presente en x veces **específicas** y que A^C ocurra en las $(n-x)$ veces **restantes**, tiene probabilidad:

$$\overbrace{(p.p.\cdots.p)}^{x \ \ veces}\overbrace{(q.q.\cdots q)}^{(n-x) \ \ veces} = p^x q^{n-x};$$

y en total hay C_x^n casos de este tipo, por lo que podemos escribir: $P(X = x) = C_x^n p^x q^{n-x}$, donde x es cualquier valor de $R_X = \{0,1,2,\cdots,n\}$

Observaciones:

Recordando el Binomio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} C_j^n a^j b^{n-j}$ y aplicándolo a $P_X(x)$**:**

$\sum_{x=0}^{n} P_X(x) = \sum_{x=0}^{n} C_x^n p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1^n = 1$. **Como obviamente $P_X(x) > 0$, hemos probado que $P_X(x)$ es una función de probabilidad.**

Parámetros

Esta distribución está totalmente determinada si se conocen n y p, por lo que estas cantidades se consideran sus "parámetros" (estructurales) característicos.

Se puede probar que:

$E(X) = \mu_X = np$ y $V(X) = \sigma_X^2 = npq$ pues la función generatriz de momentos $M_X(t)$ es:

$$M_X(t) = (pe^t + q)^n \quad -\infty < t < \infty$$

Probemos la última afirmación:

Aplicando la definición de Función Generatriz:

$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C_x^n p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_x^n e^{tx} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_x^n (pe^t)^x q^{n-x}$; Si aplicamos ahora el Binomio de Newton a $\sum_{x=0}^{n} C_x^n (pe^t)^x q^{n-x}$ obtenemos:

$M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} C_x^n (pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n$ que se cumple para todo t real. Es decir:

$$M_X(t) = (pe^t + q)^n \quad -\infty < t < \infty$$

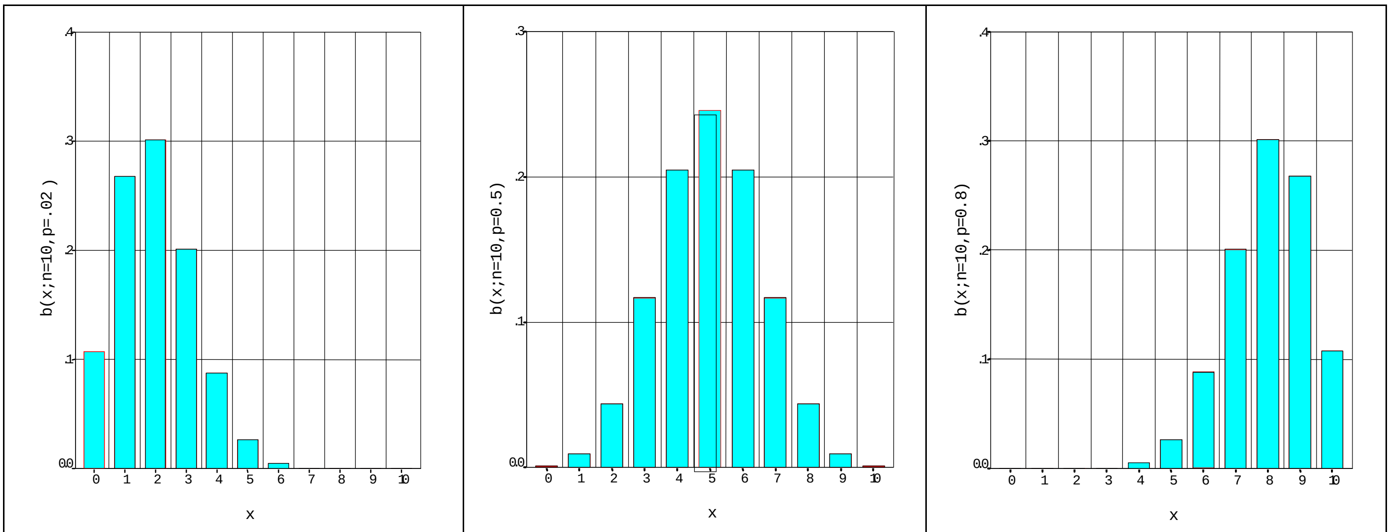
Observaciones:

(1) Derivando $M_X(t)$ **y evaluando en** $t = 0$ **obtenemos** $E(X) = np$. **Derivando por segunda vez y evaluando en cero obtenemos** $E(X^2) = np(q + np)$, **que nos conduce a** $V(X) = npq$

(2) La variable aleatoria X es llamada variable binomial, y su distribución de probabilidades la llamaremos Distribución Binomial.

(3) El que la distribución de X sea una binomial de parámetros n y p, se denota así: $X \sim B(x;n,p)$

(4) El parámetro n determina la extensión del rango y p la forma de la distribución: si $p = 0.5$ la distribución es simétrica, y conforme p se aleja de 0.5 la distribución se hace asimétrica. Un gráfico donde representamos mediante barras centradas en los distintos valores de X, las probabilidades que asigna $B(x;n,p)$ ilustra lo que decimos:



p = 0.2 **p = 0.5** **p = 0.8**

Ejemplo 2.1

Una petrolera efectúa perforaciones en una concesión del gobierno, en donde, según sus cálculos, tiene un 25% de probabilidad de dar con un pozo rentable al hacer una perforación.

a) Si la compañía asigna un presupuesto de 12 millones de unidades monetarias (u.m.) para exploraciones, sabiendo que necesita un mínimo de 4 cuatro pozos en explotación para tener “retorno positivo en la inversión” (ganancias), y calcula un gasto de 2 millones de u.m. por perforación. ¿Con qué probabilidad tendrá ganancias?

b) En a) asuma que cada pozo rentable hace que las acciones de la compañía suban en 100r%. Si al inicio del período un título de esta compañía se cotizaba en M u.m. ¿Cuál es la Cotización Esperada después de las perforaciones? Considere que no hay baja en la cotización, por ningún concepto.

Solución:
Sea **ε** el experimento consistente en realizar la perforación de un pozo y sea A el evento 'La perforación resulta en un pozo rentable'. Entonces $p = P(A) = 0.25$ y $q = 1 - p = 0.75$

Si la compañía hace n perforaciones y definimos la v.a.d. X = # de pozos rentables encontrados en las n perforaciones, asumiendo independencia entre las perforaciones, tenemos que X se ajusta al modelo binomial, esto es:

$$X \sim B(x;n,p = 0.25) \Leftrightarrow P_X(x) = P(X = x) = C_x^n (0.25)^x (0.75)^{n-x} \quad x = 0,1,2,\cdots,n$$

a) En esta parte y dados los costos, la compañía puede realizar $n = \frac{12}{2} = 6$ perforaciones y para que haya ganancias, se necesita que $X \geq 4$. Evaluando esta probabilidad:

$$P(Ganancia) = \sum_{x=4}^{6} C_x^6 (0.25)^x (0.75)^{6-x} = C_4^6 (0.25)^4 (0.75)^2 + C_5^6 (0.25)^5 (0.75)^1 + C_6^6 (0.25)^6 (0.75)^0 = 0.033$$

y se puede decir que con 3.3% de probabilidad, la compañía tendrá ganancias. Se deduce que casi con seguridad, no se logrará la rentabilidad suficiente.

b) Sea V el valor de la acción después de las 6 perforaciones. Se cumple que $V = M(1+r)^x \Rightarrow$

$$E(V) = E\left(M(1+r)^x\right) = ME\left((1+r)^x\right).$$

Aplicando la definición de valor esperado:

$$ME\left((1+r)^x\right) = \sum_{x=0}^{6} (1+r)^x C_x^6 (0.25)^x (0.75)^{6-x} = \sum_{x=0}^{6} C_x^6 [(1+r)(0.25)]^x (0.75)^{6-x} = ([(1+r)(0.25)] + 0.75)^6$$

$= (1 + 0.25r)^6$ y por tanto $E(V) = M\left(1 + 0.25r\right)^6$

Ejemplo 2.2
Una prueba de aptitud tiene $n = 20$ preguntas de opción múltiple, siendo cinco las opciones (una correcta y el resto no) por pregunta. Si una persona marca todo al azar y se define X = # total de aciertos, calcule la probabilidad de que la persona acierte en :

a) Dos preguntas
b) Al menos en una pregunta
c) Entre 4 y 5 preguntas

Solución:
Identificando datos, tenemos:

A = "La persona acierta en la pregunta"; $p = P(A) = 1/5$; $n = 20$. Entonces, asumiendo independencia entre preguntas, se está en el contexto de la proposición y se puede decir que X tiene distribución binomial, i.e.

$$X \sim B(x;n = 20,p = 0.20) \text{ y } P_X(x) = P(X = x) = C_x^{20} (0.20)^x (0.80)^{20-x} \quad x = 0,1,2,...,20.$$

a) $P(X = 2) = C_2^{20} 0.2^2 0.8^{18} = 0.1369$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_0^{20} 0.2^0 0.8^{20} = 1 - 0.0115 = 0.9884$

c) $P(4 \leq X \leq 5) = C_4^{20} 0.2^4 0.8^{16} + C_5^{20} 0.2^5 0.8^{15} = 0.1145$

Observación:
Como $E(X) = \mu_X = np = 20(0.2) = 4$ y $V(X) = \sigma_X^2 = npq = 20(0.2)(0.8) = 3.2$ (por tanto $\sigma_X = 1.78$), podemos decir que si una persona contesta las 20 preguntas al azar, entonces ella puede tener entre 2 y 6 aciertos.

Ejemplo 2.3
En el ejemplo anterior, si cada acierto vale 4 puntos y cada error cuesta N puntos y se quiere que las personas que contesten al azar, en promedio reciban puntaje 0 ¿Cuánto debe descontarse por cada error?

Solución:
Si T es el puntaje total, entonces $T = 4X - (20 - X)N$ y deseamos hallar N tal que $E(T) = 0$.

Aplicando propiedades del valor esperado:

$E(T) = E\big(4X - (20 - X)N\big) = E\big((4 + N)X - 20N\big) = (4 + N)E(X) - 20N$. Pero $E(X) = np = 4$, de modo que $E(T) = (4 + N) \times 4 - 20N = 16 - 16N$. Igualando a 0 resulta $N = 1$, esto es, se debe descontar un punto por cada error.

2.2 Distribución Geométrica

2.2.1 Definición y Parámetros

Definición.
Sea X v.a. discreta, con rango $R_X = \{1,2,\cdots\}$. Sean $p \in]0,1[$ y $q = 1 - p$ de valores dados. Diremos que X tiene distribución geométrica de parámetro p, si su función de probabilidad es:

$$P_X(x) = P(X = x) = pq^{x-1} \qquad x = 1,2,3,\cdots$$

Notación.
Denotaremos el hecho de tener X distribución geométrica, escribiendo $X \sim G(x; p)$

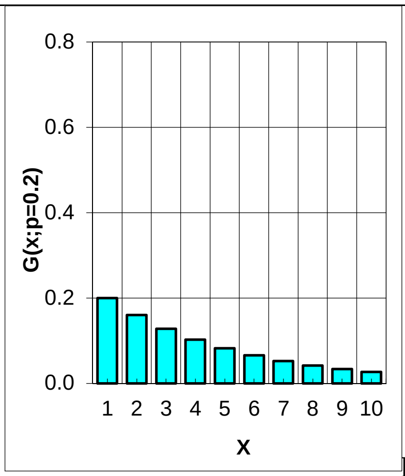
Parámetro.
El único parámetro es p.

Observación:
$\sum_{x=1}^{\infty} G(x;p) = \sum_{x=1}^{\infty} pq^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = pq^{-1}\sum_{x=1}^{\infty} q^x = pq^{-1}(\frac{q}{1-q}) = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$. Es decir, en efecto, $G(x; p)$ es una función de probabilidad.

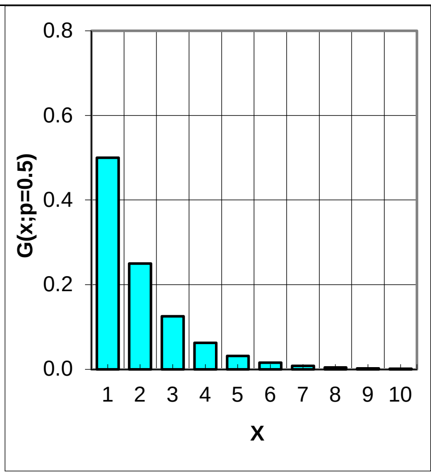
Valores Esperados y Función Generatriz de Momentos
Se puede verificar que:
$E(X) = \mu_X = 1/p$ y $V(X) = \sigma_X^2 = q/p^2$**.** Lo anterior se obtiene a partir de la función generatriz respectiva, que es $M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$ $\quad t < -\ln q$. En efecto:

$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} pq^{x-1} = pq^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}(e^t q)^x = pq^{-1}(\frac{qe^t}{1-qe^t}) = (\frac{pe^t}{1-qe^t})$ si tomamos $t < -\ln q$.

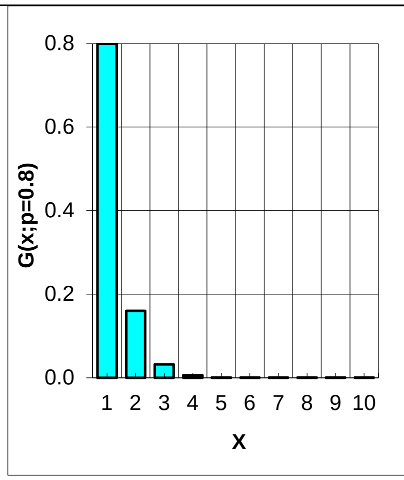
Como en la Binomial, en la Geométrica la gráfica depende de p :



p = 0.2



p = 0.5



p = 0.8

2.2.2 Origen

Origen.
La Distribución Geométrica aparece como resultado de contar cuántas veces se debe repetir un experimento hasta lograr que ocurra un determinado suceso A por primera vez.

Proposición
Sea A un evento con probabilidad $p = P(A) > 0$. Supongamos que el experimento **ε** asociado al evento, se repite sucesivas veces hasta que ocurra A por primera vez. Sea X := # total de repeticiones de **ε**. Entonces $X \sim G(x; p)$.

Demostración
Es claro que $R_X = \{1,2,\cdots\}$. Sea x un elemento dado de R_X :
$(X = x)$ ocurre si y sólo si en las $(x-1)$ primeras repeticiones ocurre A^C y en la repetición x-ésima ocurre A.

Sean los eventos A_i = "En la repetición i ocurre A", i=1,2,3,... entonces tenemos: $P(X = x) = P(\overbrace{A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \ldots \cap A_{x-1}^C}^{(x-1)veces} \cap A_x) = \overbrace{q.q.q\ldots.q}^{(x-1)veces}\,p = q^{x-1}p$ que se obtiene aplicando la regla del producto. Luego $X \sim G(x; p)$.

Observación: (Distribución de Pascal o Binomial Negativa)

Es una generalización de la Geométrica, que surge cuando se repite el experimento **ε** hasta que ocurre A por r-ésima vez, donde r es un entero positivo de valor fijo.

En este contexto, si X = # total de repeticiones, la f. de probabilidad de X es:

$$P_X(x) = P(X = x) = C_{r-1}^{x-1} p^r q^{x-r} \qquad x = r, r+1, r+2, \cdots$$

y sus valores esperados son $E(X) = \mu_X = r/p$ y $V(X) = \sigma_X^2 = rq/p^2$.

Ejemplo 2.4
Si la compañía del Ejemplo 2.1 de la sección 2.1.2 anterior asigna seis millones de u.m. para exploraciones y calcula un gasto 2 millones de u.m. por perforación, pero decide operar solamente un pozo. ¿Con qué probabilidad empezará a operar sin antes ver agotado su presupuesto?

Solución:
En este caso la compañía hará perforaciones hasta dar con el primer pozo y además sólo puede perforar hasta tres pozos.

Sea X = # de perforaciones hasta dar con el primer pozo rentable; se ve que X se ajusta al modelo Geométrico, i.e. $X \sim G(x; p = 0.25)$ y tenemos que hallar $P(X < 3) = P(X \leq 2) = 0.25 + 0.25 * 0.75 = 0.4375$.
Finalmente, si se decide operar dos pozos y X es el número de perforaciones hasta dar con el segundo pozo, entonces X tiene distribución de Pascal de parámetros $p = 0.25$ y $r = 2$.

Ejemplo 2.5
Un consumidor está en un mercado con infinitos productores del mismo bien que le ofrecen el producto a similar precio pero con distintas modalidades de propaganda y trato al cliente, de modo que la elección del consumidor no es inmediata sino aleatoria, con una probabilidad p de que se decida por el productor al cual está consultando sobre el bien. Sea X el número de productores visitados por el consumidor. ¿Cuántas consultas se espera que haga esta persona? ¿Con qué probabilidad hará más consultas de lo esperado?

Solución:
Sea **ε** el experimento "El consumidor consulta acerca del bien con un productor del mercado" y sea A el evento "El consumidor decide comprar el producto al hacer la consulta con el productor". Por dato, $p = P(A) > 0$ es la misma en cualquier consulta y así tenemos que X puede verse como # total de repeticiones de **ε** hasta que ocurre A por primera vez, y se ve que la v.a. se ajusta al modelo Geométrico, esto es $X \sim G(x; p)$ sería un modelo de datos apropiado.

En el contexto anterior tenemos que $E(X) = \mu_X = 1/p$ y por tanto:

$P(X > E(X)) = P(X > \mu_X) = P(X > \frac{1}{p}) = P(X \geq [|\frac{1}{p}|] + 1) = q^{[|\frac{1}{p}|]}$, donde $[|\frac{1}{p}|]$ denota el máximo entero no mayor que $\frac{1}{p}$. Por ejemplo, si $p = 0.3$, entonces $\frac{1}{p} = 3.3$ y así

$$P(X > \frac{1}{p}) = P(X > 3.3) = P(X \geq 4) = 0.7^3 = 0.343$$

2.3 Distribución Hipergeométrica

2.3.1 Definición y Parámetros

Definición
Sea X v.a. discreta, con rango $R_X = \{1, 2, \cdots, n\}$. Sean N y M enteros positivos de valores dados, tales que $M < N$. Diremos que X tiene Distribución Hipergeométrica de parámetros N, M y n si su función de probabilidad es:

$$P_X(x) = P(X = x) = \frac{C_x^M C_{n-x}^{N-M}}{C_n^N} \quad x = 1, 2, \cdots, n$$

Notación.
Denotaremos el hecho de tener X distribución Hipergeométrica escribiendo $X \sim H(x; N, M, n)$. Además asumimos que $n < M$ y $n < N - M$.

Parámetros.
Los parámetros son N, M y n.

Valores Esperados y Función Generatriz de Momentos.

$E(X)=\mu_X=n\dfrac{M}{N}$ y $V(X)=\sigma_X^2=n(\dfrac{M}{N})(\dfrac{N-M}{N})(\dfrac{N-n}{N-1})$. En cuanto a $M_X(t)$, existe pero su expresión es muy complicada y resulta poco útil.

2.3.2 Origen
Es la distribución natural del muestreo simple de poblaciones finitas, cuando mediante una muestra aleatoria de casos, pretendemos inferir el valor de alguna constante poblacional (una proporción o una media). Los modelos más complejos de encuestas por muestreo usan, como unidad de base, este modelo.

Proposición
Sea una población compuesta de N elementos, M de los cuales poseen una cierta característica A. Si se toma una muestra al azar y sin reemplazo de n de los N elementos, y se cuenta el número X de casos en la muestra, que tienen la característica A, entonces X es variable aleatoria con distribución $H(x;N,M,n)$.

Demostración
Se ve que $R_X=\{0,1,2,\cdots,n\}$ (asumiendo que $n<M$ y $n<N-M$, pues de lo contrario, X no podría ser 0 o n).

Sea x un elemento cualquiera de R_X, entonces $(X=x)$ ocurre si y sólo si en la muestra x elementos poseen A y $n-x$ poseen A^C. Apliquemos la definición clásica de probabilidad:

$n(S)=C_n^N$ (pues una muestra equivale a subconjunto). Por otra parte:
$n(X=x)=C_x^M C_{n-x}^{N-M}$ (pues en la muestra, debemos tener x de los M elementos que tienen A y $n-x$ de los $N-M$ que tienen A^C). Luego es inmediato que $P(X=x)=\dfrac{C_x^M C_{n-x}^{N-M}}{C_n^N}$, con lo que termina nuestra deducción.

Observación
Si el muestreo es con reemplazo, cambian tanto el numerador como el denominador, y la distribución de X ya no es hipergeométrica, sino binomial $B(x;n,p=M/N)$. Es por esto que si n es pequeña en relación a N (y M) se puede aproximar $H(x;N,M,n)$ mediante $B(x;n,p=M/N)$. Esta aproximación suele usarse cuando $n<0.1N$. En cualquier caso, la gráfica de $H(x;N,M,n)$ es similar a la de la distribución binomial.

Ejemplo 2.6
En una encuesta en el sector informal, la población consta de N empresas, de las cuales M de ellas son Unipersonales. Se toma una muestra aleatoria de n empresas, y se cuenta el número X de empresas unipersonales en la muestra, optándose por aproximar la proporción M/N poblacional y desconocida, mediante la proporción muestral X/n, denotada π (i.e. π:=X/n). Asumiendo muestreo sin reposición, calcule el valor esperado de π.

Solución:
Es claro que X se ajusta bien al modelo hipergeométrico, i.e. $X\sim H(x;N,M,n)$ y por tanto
$E(\pi)=E(\dfrac{X}{n})=\dfrac{1}{n}E(X)=\dfrac{1}{n}\times n\dfrac{M}{N}=\dfrac{M}{N}$. Es decir, aunque la proporción π variará de muestra en muestra, la tendencia es a coincidir con la verdadera proporción poblacional $\dfrac{M}{N}$.

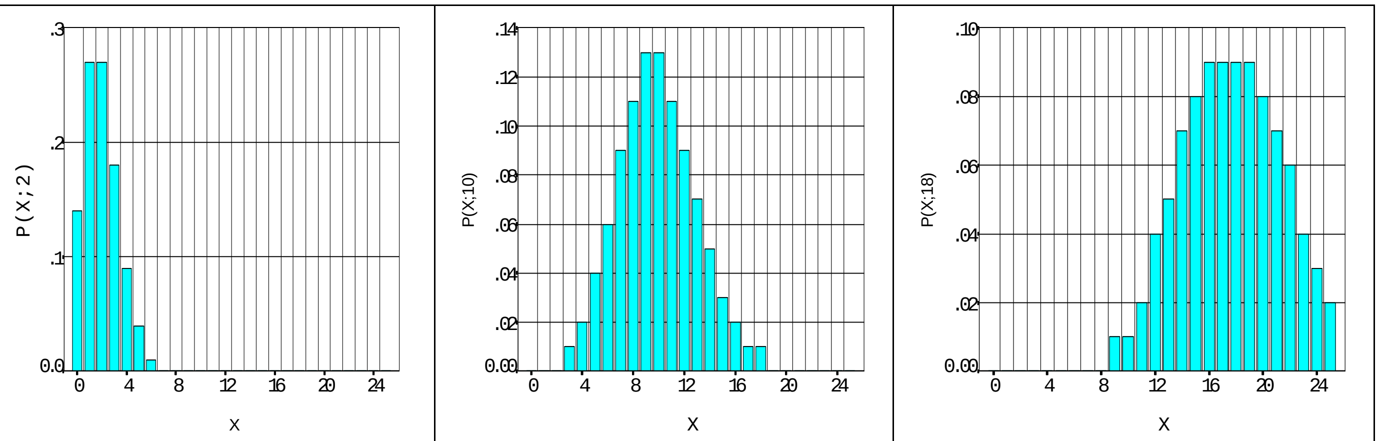
2.4.1 Definición y Parámetro

Definición.
Sea X v.a. discreta, con rango $R_X = \{0,1,2,3,\cdots\}$. Sea $\lambda > 0$ una constante conocida. Diremos que X tiene distribución de Poisson de parámetro λ, lo que se denotará $X \sim \mathrm{P}(\mathrm{x};\lambda)$, si su función de probabilidad es:

$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}!} \quad x = 0,1,2,3,\cdots$$

Notación.
Como ya se dijo, la distribución se denotará $P(x;\lambda)$.

Parámetros:
El único parámetro es λ que determina la posición de la distribución y su forma: conforme λ crece la gráfica se desplaza a la derecha y se va haciendo simétrica con un máximo alrededor de λ



λ = 2 **λ = 10** **λ = 18**

Observaciones:

(1) Recordemos que una definición alternativa de la función exponencial o una propiedad de ella (aplicando desarrollo de Taylor-McLauren) es $e^Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{k!}$ que se cumple para todo número real z

(2) Aplicando lo anterior a $P(x;\lambda)$, $\sum_{x=0}^{\infty} P(x;\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\mathrm{x}}}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$. Es decir, $P(x;\lambda)$ es una función de probabilidad.

Valores Esperados y Función Generatriz de Momentos.

$E(X) = \mu_X = \lambda$ y $V(X) = \sigma_X^2 = \lambda$. Los esperados anteriores salen de $M_X(t)$, que es $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$ $-\infty < t < \infty$

Veamos:

$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$, que se cumple para todo t real.

2.4.2 Orígenes

$P(x;\lambda)$ tiene dos orígenes, ambos relacionados, aunque uno de ellos es poco actual. La distribución surge como aproximación a la distribución binomial (cuando n es grande y p tiende a 0) y también como modelo de un proceso aleatorio.

Proposición 1 (Aproximación de la Binomial a la Poisson)
Sea una v.a. $X \sim B(x;n,p)$, sean n y p tales que n tiende a ∞, p tiende a 0, de modo que el producto np tiende a un valor fijo λ. Entonces se cumple que:

$$B(x;n,p) \cong P(x;\lambda)$$

Nota:
Aunque se dice que la aproximación es válida si n es "grande" y p es "pequeño", no hay regla fija (todo depende del grado de aproximación que se desee); una muy usada es considerar que n es grande y p pequeño si ocurre $np < 5$.

Este uso de la distribución fue importante antiguamente, cuando no se tenía a mano calculadoras, pero sí tablas de la función exponencial.

Proposición 2 (Proceso de Poisson)
Sea E un evento que se presenta en puntos aleatorios del tiempo (o del espacio), de modo que son satisfechos los siguientes supuestos:

(1) Para todo intervalo de longitud dt suficientemente pequeña, la probabilidad de observar una vez E es proporcional a dt, i.e.:
$P(E \quad ocurre \quad una \quad vez \quad en \quad [t,t+dt[) = wdt \ \ \forall \ t$ real ($w > 0$)

(2) Para todo intervalo de longitud dt suficientemente pequeña, la probabilidad de observar más de una vez E es nula i.e.: $P(E \quad ocurre \quad más \quad de \quad una \quad vez \quad en \quad [t,t+dt[) = 0$

(3) Intervalos disjuntos son independientes en relación a la ocurrencia de E.

Si $t > 0$ es un valor dado y definimos X = # de veces que ocurre E en el intervalo $[0,t[$.

Entonces X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = wt$, esto es $X \sim P(x;\lambda = wt)$

Nota:
Como $E(X) = wt$, entonces $w = \dfrac{E[X]}{t} = E[\dfrac{X}{t}]$, de modo que podemos considerar a w como el "Número promedio de veces que ocurre E por unidad de tiempo".

El proceso descrito en el enunciado anterior, se conoce como "Proceso Aleatorio de Poisson" y aunque se ha enunciado en el tiempo, puede presentarse en el espacio. Como ejemplos de procesos que se pueden modelar con el de Poisson, tenemos: La llegada de aviones a un aeropuerto; la llegada de clientes a una ventanilla en un banco; La presencia de partículas de polvo en el aire; La presencia de burbujas en una superficie recién pulida o barnizada; etc. Es el modelo más simple de un conjunto mucho más general de modelos que describen ingresos y salidas de elementos a un sistema (pagos y órdenes de pago, solicitudes y prestaciones) en el tiempo.

Ejemplo 2.7
Suponga que la cantidad de buques-tanque que llega a un puerto por día, se presenta de acuerdo a un Proceso de Poisson, a una tasa de 2 buques-tanque, en promedio, por día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día, el número de buques-tanque que llega al puerto sea menor de lo esperado?

b) El puerto sólo puede atender a 2 buques-tanque por día, y cualquier otro buque excedente, se envía a un puerto vecino: ¿Qué porcentaje de los días, se enviarán buques al puerto vecino?

c) ¿Cuál sería la probabilidad de que Ud. llegue al puerto a medio día y encuentre que ya se llenó el puerto?

d) Si N es el número de buques atendidos por día en el puerto, halle $E(N)$

Solución:

De las condiciones dadas, tenemos que la tasa de llegada es $w = 2$. Sea $t > 0$ valor dado y definamos E =Llegada de un buque-tanque al puerto. En este contexto, la v.a. X = Número de buques tanque que llegan entre **0** y t tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = wt = 2t$. Entonces:

a) En este caso $t = 1$ y $\lambda = wt = 2$, luego $X \sim P(x;\lambda = wt = 2)$ y $E(X) = 2$, así que la probabilidad pedida es

$$P(X < 2) = P(X \le 1) = P_X(0) + P_X(1) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} + e^{-2}\frac{2^1}{1!} = 3e^{-2} = 0.41$$

b) Nos piden $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2)$ y como $P(X \le 2) = P_X(0) + P_X(1) + P_X(2)$, sólo necesitamos calcular $P_X(2) = e^{-2}\frac{2^2}{2!} = 2e^{-2}$. Por tanto $P(X \le 2) = 3e^{-2} + 2e^{-2} = 5e^{-2} = 0.68$ y entonces $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 0.32$: El 32% de los días se enviará buques al puerto vecino.

c) Si llegamos en $t = 1/2$ día, para que ya esté lleno el puerto, debe de haber ocurrido que en el intervalo $]0,1/2]$ (o sea la primera mitad del día) llegaron dos o más buques tanque. En este caso $t = 1/2 \Rightarrow X \sim P(x;\lambda = wt = 1)$ y nos piden $P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - \{P_X(0) + P_X(1)\} = 1 - 2e^{-1} = 0.26$

d) Es claro que $N = 2 - X$ si $X = 0,1$ y $N = 2$ si $X \ge 2$, donde X = Número de buques tanque que llegan en $t = 1$ día. Luego $E(N) = 0 \times P_X(0) + 1 \times P_X(1) + 2 \times P(X \ge 2) =$
$0 \times e^{-2} + 1 \times 2e^{-2} + 2 \times (1 - 3e^{-2}) = 2 - 4e^{-2} = 1.46$ buques.

2.5.1 Definición y Parámetro

Definición

Sea X v.a.c. con rango $R_X =]0,\infty[$ y sea $\beta > 0$ una constante de valor dado. Diremos que X tiene distribución exponencial de parámetro β si la función de densidad de X es:

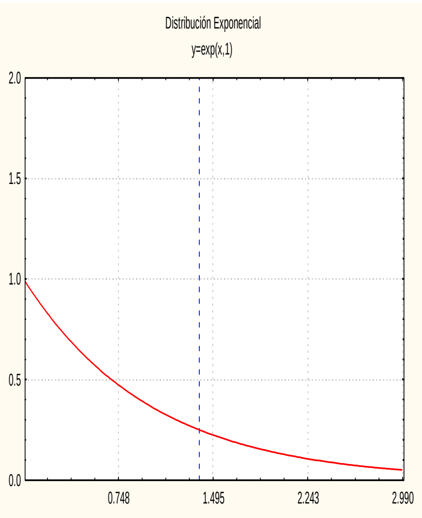
$$f_X(x) = \beta e^{-\beta X} \quad x > 0$$

Observación

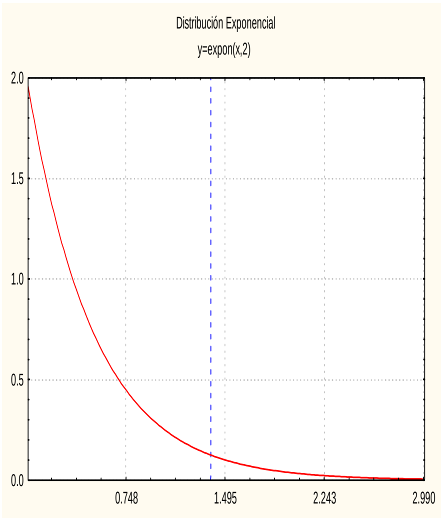
$\int_0^\infty f_X(x)dx = \int_0^\infty \beta e^{-\beta x}dx = \left[-e^{-\beta x}\right]_0^\infty = 1$, de modo que se verifica que $Exp(x;\beta)$ es función de densidad.

Parámetro.

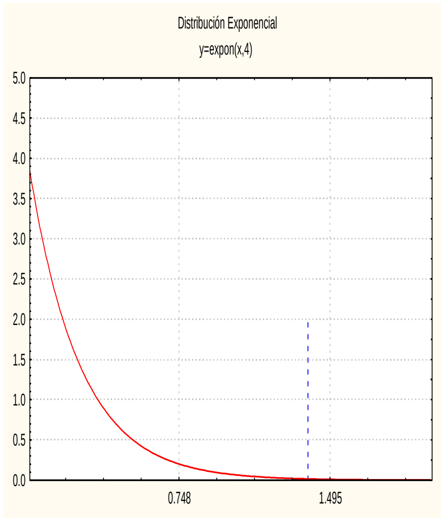
El único parámetro es β, que determina la gráfica de la distribución y escribiremos $X \sim Exp(x;\beta)$ para denotar el hecho que X tiene distribución exponencial.



β=1



β=2



β=4

Valores Esperados y Función Generatriz de Momentos.

$E(X) = \mu_X = 1/\beta$ y $V(X) = \sigma_X^2 = 1/\beta^2$, pues $M_X(t) = (\dfrac{\beta}{\beta - t}) \quad t < \beta$. Calculemos $M_X(t)$:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\beta e^{-\beta x}dx = \beta\int_0^\infty e^{-(\beta-t)x}dx = \beta\left[-\frac{e^{-(\beta-t)x}}{(\beta-t)}\right]_0^\infty = (\frac{\beta}{\beta-t}) \text{ si } t < \beta.$$

Derivando $M_X(t)$ con respecto a t sucesivas veces y evaluando en $t = 0$, se obtiene $E(X)$, $E(X^2)$ y de ahí μ_X y σ_X^2.

Ejemplo 2.8

Si el ingreso empresarial en un país, es una v.a. X con distribución exponencial de parámetro β y se dispone un tributo nuevo de 15% para los ingresos superiores al promedio poblacional ¿Qué % de la población pagará el impuesto?

Solución:

En este caso, se nos pide hallar $P(X > 1/\beta)$), donde X es el ingreso de una empresa y $X \sim Exp(x;\beta)$.
Integrando directamente obtenemos:

$$P(X > 1/\beta) = \int_{\frac{1}{\beta}}^{\infty} \beta e^{-\beta x} dx = \left[-e^{-\beta x}\right]_{\frac{1}{\beta}}^{\infty} = e^{-1} = 0.38$$

1.5.2 Orígenes

La distribución Exponencial aparece de modo muy natural en un proceso de Poisson, como la distribución de un "Tiempo de Espera".

Proposición

Si en un proceso de Poisson, definimos $T :=$ Tiempo que transcurre hasta que ocurre E por primera vez, entonces $T \sim Exp(t; \beta = w)$, donde w es la tasa de ocurrencias de E por unidad.

Demostración

Es claro que $R_T = [0, \infty[$. Sea t valor dado aunque arbitrario de R_T y sea $G_T(t) = P(T \leq t)$ la distribución acumulativa de T, evaluada en t.

Como el evento $(T \leq t)$ equivale a "En $[0, t[$, E ocurre 1 o más veces", si definimos $X =$ # de ocurrencias de E en $[0, t[$, ya sabemos que $X \sim P(x; \lambda = wt)$.

Por tanto: $G_T(t) = P(T \leq t) = P(X > 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-wt}$ y derivando tenemos:

$g_T(t) = G_T^{'}(t) = we^{-wt}$, es decir $T \sim Exp(t; \beta = w)$

Observaciones:

(1) Como el punto cero es arbitrario, también podemos ver a T como el tiempo que transcurre entre dos ocurrencias sucesivas de E.

(2) Por la deducción hecha antes, se entiende que la distribución exponencial sea muy usada como modelo para los tiempos de espera o tiempos de vida. Generalizando la distribución exponencial obtenemos la Distribución Gamma.

Por lo anterior, esta distribución es muy usada para construir modelos relativos a Tiempos de Espera o también Tiempos de Vida, y puede generalizarse y en ese caso se tiene la "Distribución Gamma".

2.6 Distribución Gamma

2.6.1 Función Gamma

Denotada $\Gamma(p)$, la función matemática Gamma (evaluada en *p*), se define mediante:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} y^{p-1} e^{-y} dy \quad p > 0$$

Se puede probar que la integral anterior existe para todo *p* positivo.

Propiedades

(1) Γ(p) = (p-1) Γ(p-1) para p > 1. (Usando integración por partes)

(2) Γ(k) = (k-1)! si k es entero positivo. (Aplicando (1))

(3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (aplicando cambio de variable y sustitución trigonométrica)

2.6.2 Función de Densidad Gamma y Parámetros

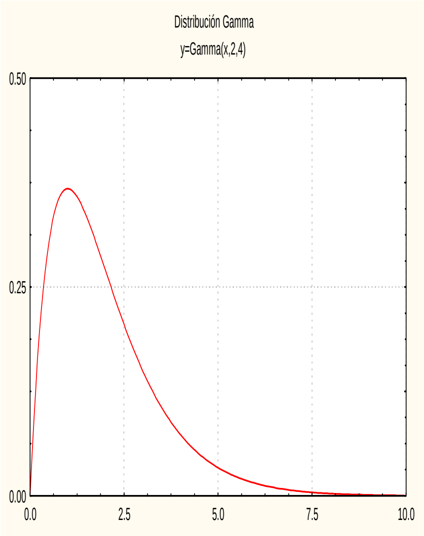
Definición

Sea X v.a.c. con $R_X = [0, \infty[$ y sean $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, constantes de valores dados. Diremos que X tiene distribución Gamma, de parámetros α y β, lo que se denotará $X \sim \Gamma(x; \alpha, \beta)$, si su función de densidad es:

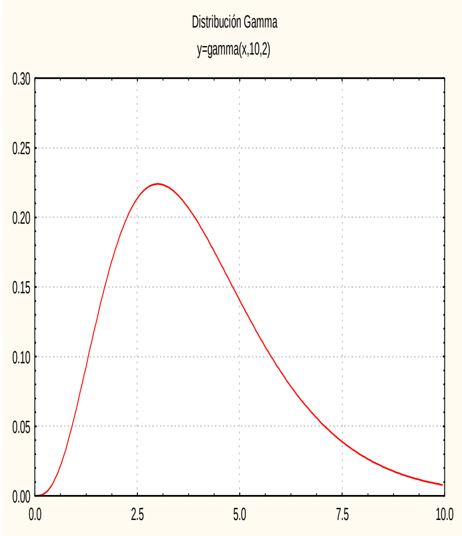
$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \qquad x > 0$$

Parámetros

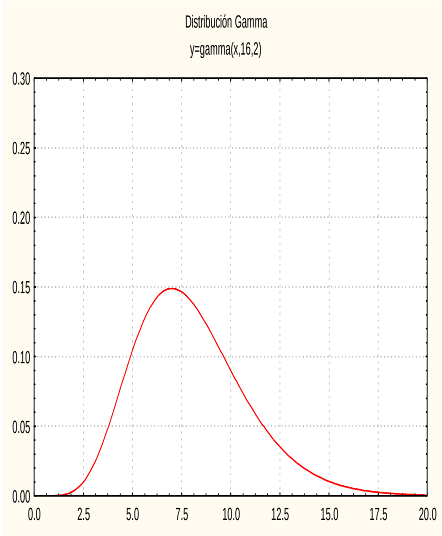
Los parámetros son α y β. La gráfica es asimétrica a la derecha, pero conforme crece α, la asimetría se atenúa:



α=2,β=2



α=10,β=2



α=16,β=2

Valores Esperados y Función Generatriz de Momentos.

$E(X) = \mu_X = \alpha\beta$ y $V(X) = \sigma_X^2 = \alpha\beta^2$, que se deducen de $M_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$ si $t < \frac{1}{\alpha}$

Observaciones:

(1) La distribución exponencial es un caso particular de la Gamma.

(2) Otro caso particular e importante de la Gamma ocurre cuando β=2 y α=k/2, donde k es entero positivo dado. Esta distribución se presenta cuando medimos la varianza en muestras aleatorias y se conoce como **Distribución Ji-Cuadrado,** denotándose mediante $\boldsymbol{\chi^2(k)}$. El único parámetro de esta distribución es **k** y es llamado "Grados de Libertad". En esta distribución se cumple que $\mu_X = k$; $\sigma^2_X = 2k$; $Mx(t)=(1-2t)^{-k/2}$ si $t < 1/2$.

(3) Tanto la distribución Exponencial como la Gamma se usan como modelos teóricos para distribuciones asimétricas como Ingresos, Tiempos de Vida, Edades, etc.

2.6.3 Origen

La Gamma se presenta de modo natural en un proceso de Poisson, cuando medimos el tiempo entre varias ocurrencias del evento E. Formalmente:

Proposición.

En un proceso de Poisson, sea T_k el tiempo que transcurre hasta que ocurre E por k-ésima vez. Entonces T_k tiene distribución Gamma de parámetros $\alpha = k$ y $\beta = 1/w$

Demostración:

La demostración es similar a la del origen de la distribución exponencial:

Lo principal es darse cuenta que los eventos $(T_k \le t)$ y $(X \ge k)$, donde X es el número de ocurrencias de E en el intervalo $]0,t]$, son equivalentes y por tanto:

$$G_{T_K}(t) = P[T_k \le t] = P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} e^{-(\omega t)} \frac{(\omega t)^x}{x!}$$

Derivando con respecto a t, se obtiene:

$$g_{T_K}(t) = \omega \frac{e^{-(\omega t)}(\omega t)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{(\omega)^k t^{k-1} e^{-(\omega t)}}{(k-1)!} = \frac{t^{k-1} e^{-t/(\frac{1}{\omega})}}{(\frac{1}{\omega})^k (k-1)!} = \frac{t^{k-1} e^{-t/(\frac{1}{\omega})}}{(\frac{1}{\omega})^k \Gamma(k)} \quad t>0$$

que corresponde a una distribución Gamma de parámetros $\alpha = k$ y $\beta = 1/w$

Ejemplo 2.9

El número de unidades de transporte que circula por una avenida de la ciudad se presenta a razón de W vehículos/cuadra aproximadamente. Un economista de transporte está formulando un modelo al respecto y en un muestreo, encuentra sobre 10 cuadras consecutivas, un total de 50 unidades.

a) ¿Cuál es el valor de w?
b) ¿Con qué probabilidad encontraríamos que entre dos unidades de transporte median menos de 0.25 cuadras?
c) Un micro entra a la avenida y le informan que dos unidades de la misma línea le preceden. ¿Qué distancia esperaría que medie entre el micro entrante y el más cercano de los que lo preceden? ¿Del más alejado? ¿Con qué probabilidad serán las distancias mayores que lo esperado? Mida la distancia en cuadras y asuma que el número de vehículos de esta línea en la avenida tiene una tasa igual a la cuarta parte de la general

Solución:

a) Si $X = \#\quad de \quad vehículos \quad en \quad t = 10 \quad cuadras$ (tomamos como unidad la cuadra), entonces $X \sim P(x; \lambda = wt = 10w)$. Sabemos que $E(X) = wt$ y $w = \frac{E[X]}{t} = E[\frac{X}{t}]$ que define a w como el "Número promedio de veces que ocurre E por unidad" y de los datos tenemos $10w = 50 \Rightarrow w = 5 \quad vehículos/cuadra$.

b) Sea T=Distancia entre dos vehículos, entonces $T \sim Exp(t; \beta = 5)$ de acuerdo a la proposición demostrada líneas arriba.

Luego $P(T \le 0.25) = \int_0^{0.25} 5e^{5t} dt = 1 - e^{-1.25} = 1 - 0.29 = 0.71$

c) En este caso la tasa $w = 5/4 = 1.25$ y podemos aplicar sucesivamente las proposiciones relativas al origen de las distribuciones exponencial y gamma.

Si definimos $T_1 =$ ***Distancia entre el micro que entra a la avenida y el más cercano de los que lo preceden***, podemos ver que $T_1 \sim Exp(t; \beta = 5/4)$ y además $E(T_1) = 1/\beta = 4/5 = 0.8$

Análogamente si $T_2 =$ ***Distancia hasta el micro más alejado***, podemos ver que $T_2 \sim \Gamma(t; \alpha = 2, \beta = 4/5)$ (no confundir este parámetro β con el de la exponencial). De lo anterior resulta $E(T_2) = \alpha\beta = 8/5 = 1.6$

Finalmente $P(T_1 > 0.8) = \int_{0.8}^{\infty} 1.25e^{-1.25t} dt = e^{-1} = 0.37$ y $P(T_2 > 1.6) = \int_{1.6}^{\infty} \frac{te^{-t/(0.8)}}{(0.8)^2} dt = 0.41$

2.7 Distribución Normal

Es el modelo más usado de variable continua. Se presenta de modo natural cuando se trabaja con la distribución de variables que son ellas mismas, sumas de un número muy grande de variables aleatorias, como es el caso de muchas variables económicas que son "agregados", como la demanda global por ejemplo.

2.7.1 Definición y Parámetros

Sea X v.a. continua y sean μ y $\sigma > 0$ constantes reales de valor conocido. Diremos que X tiene distribución normal de media μ y varianza σ^2, si la función de densidad de X es de la forma:

$$f_X(x;\mu,o^2)=\frac{e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Parámetros

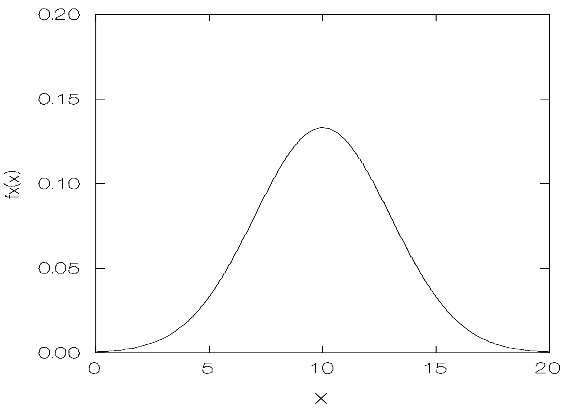
Los parámetros característicos de esta función de densidad son μ y σ^2, pues se puede demostrar que $E(X)=\mu_X=\mu$ y $V(X)=\sigma_X^2=\sigma^2$

Observaciones

La distribución normal de parámetros μ y σ^2 se denota $N(\mu,\sigma^2)$ y el que X tenga o siga esta función de densidad, se denota mediante $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Aunque el rango teórico es $-\infty < x < +\infty$, en la práctica se observa que el intervalo $\mu-3\sigma \le x \le \mu+3\sigma$ contiene al 99.9% de los casos.

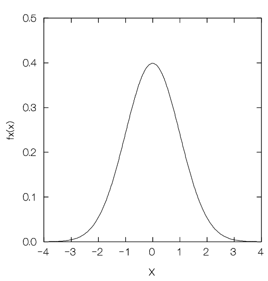
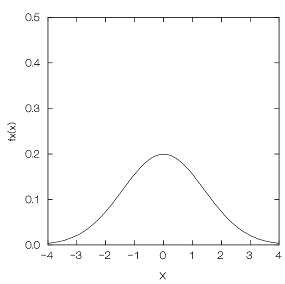
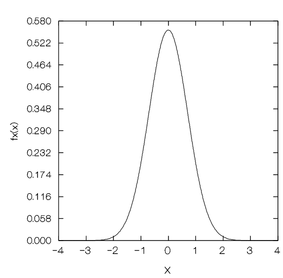
La Gráfica de la distribución es simétrica con respecto a μ, con puntos de inflexión en $\mu \pm \sigma$ y asintóticamente se "pega" al eje X.



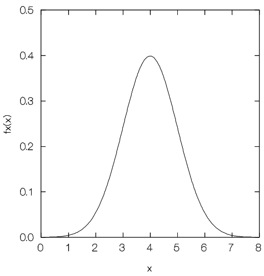
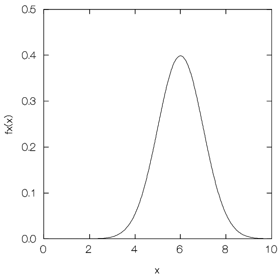
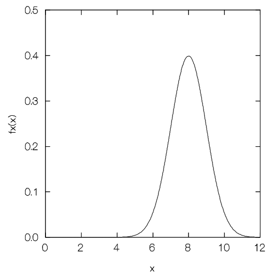
$X \sim N(10,9)$

Relación de la gráfica de $f_X(x)$ con μ y σ^2

- Si μ se mantiene fija y σ^2 crece, la distribución se "aplana"; en cambio si σ^2 disminuye, la distribución se "angosta". Esto se debe a que σ^2 mide la dispersión o variabilidad de X alrededor de la media μ.

Cambios en la forma de $f_X(x)$ cuando σ^2 varía, manteniéndose constante μ		
 $\mu=0 \quad \sigma^2=1$	 $\mu=0 \quad \sigma^2=4$	 $\mu=0 \quad \sigma^2=1/4$

- Si σ^2 se mantiene fija y μ cambia, la distribución se "traslada" en la misma dirección que μ. Esto se debe a que μ indica la posición promedio de X, es el valor más frecuente y representativo de la distribución.

Cambios en la posición de $f_X(x)$ cuando μ varía, manteniéndose constante σ^2		
 $\mu = 4 \quad \sigma^2 = 9$	 $\mu = 6 \quad \sigma^2 = 9$	 $\mu = 8 \quad \sigma^2 = 9$

Valores Esperados y Función Generatriz de Momentos.

Como ya se dijo, se cumple que $E(X) = \mu_X = \mu$ y $V(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$, que se deducen de $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2}{2}\sigma^2}$ $-\infty < t < \infty$

El cálculo de probabilidades con distribuciones normales, se simplifica gracias a una propiedad interesante de la distribución normal y su corolario. Esta propiedad dice que '*funciones lineales de variables normales también tienen distribución normal*'. Esta propiedad es una de las llamadas Propiedades reproductivas, aplicables a funciones lineales.

2.7.2 Distribución Normal Estándar

Propiedad

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y se define $Y = a + bX$, donde a y $b \neq 0$ son constantes o no aleatorias, entonces se cumple $Y \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$.

Esta propiedad nos dice que funciones lineales de variables normales, también tienen distribución normal

Demostración

Basta aplicar la técnica de cambio de variable en la distribución acumulativa de Y. Veamos, supongamos que $b > 0$, entonces:

$$G_Y(y) = P(Y \leq y) = P(a + bX) \leq y) = P(X \leq (y-a)/b) = F_X((y-a)/b) \text{ y } g_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X((y-a)/b))$$

$$= f_X(\frac{(y-a)}{b}) \times \frac{1}{b} = \frac{e^{-(\frac{y-a}{b}-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \frac{1}{b} = \frac{e^{-(\frac{y-a-b\mu}{b})^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}b\sigma} = \frac{e^{-(y-a-b\mu)^2/2(b\sigma)^2}}{\sqrt{2\pi}(b\sigma)}$$ que corresponde a una función de densidad normal de media $\mu_Y = a + b\mu$ y varianza $\sigma_Y^2 = b^2\sigma^2$. El caso en que $b < 0$ se resuelve de manera análoga.

Corolario

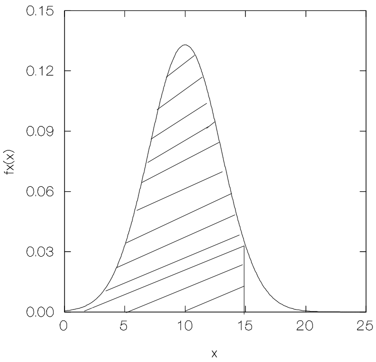
En el contexto anterior, si definimos $Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$, entonces se cumple que $Z \sim N(0,1)$.

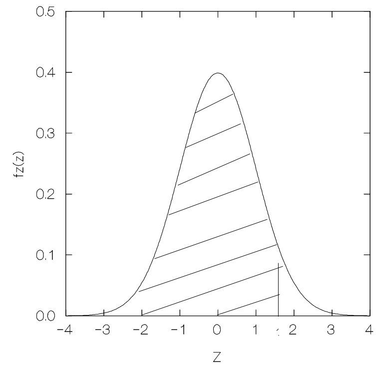
Este corolario permite reducir el cálculo de una probabilidad en una distribución general, al calculo equivalente en una distribución $N(0,1)$.

El proceso se puede describir formalmente así:

$$P(X \le t) = P(X - \mu \le t - \mu) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{t-\mu}{\sigma}) = P(Z \le \frac{t-\mu}{\sigma})$$

Por ejemplo, si $X \sim N(10,9) \Rightarrow P(X \le 15) = P(\frac{X-10}{3} \le \frac{15-10}{3}) = P(Z \le 1.67)$





$P(X \le 15) = P(Z \le 1.67)$

Dada esta propiedad, la distribución $N(0,1)$ adquiere singular importancia, así como la variable Z, razón por la cual, **esta distribución recibe el nombre de Distribución Normal Estándar y la variable Z se llama Variable Normal Estándar. La distribución acumulativa de la variable Z ha sido tabulada y permite calcular probabilidades relativas a cualquier variable normal.**

Uso de la Tabla Normal Estándar

La tabla de probabilidades acumuladas de la distribución $N(0,1)$ tiene las áreas acumuladas o probabilidades, para distintos valores de Z definidos hasta el nivel de las centésimas. La lectura de las probabilidades es directa: basta con "entrar" a la tabla con el valor de Z al nivel de las décimas en la línea horizontal correspondiente y en el cruce con la columna de las centésimas correspondientes, ubicar la probabilidad acumulada:

Ejemplo 2.10

1. Si Z ~ N(0,1) hallar

(a) P[Z ≤ 1.96]
(b) P[Z > 1.96]
(c) P[Z ≤ 1.00]
(d) P[1.00< Z ≤ 1.96]

Solución:

(a) P[Z ≤ 1.96] = 0.975

(b) P[Z > 1.96] = 1 - P[Z ≤ 1.96] = 1 - 0.975 = 0.025

(c) P[Z ≤ 1.00] = 0.8413

(d) P[1.00< Z ≤ 1.96] = P[Z ≤ 1.96] - P[Z ≤ 1.00] = 0.975 - 0.8313 = 0.1437

2. Si Z ~ N(0,1) hallar Z_0 tal que:

(a) P[Z ≤ Z_0] = 0.8508
(b) P[0 < Z ≤ Z_0] = 0.40

Solución:

(a) Por lectura "inversa" de la Tabla, esto es entrando con la probabilidad acumulada y después de ubicar ésta, yendo a los bordes, se tiene que: Z_0 = 1.04

(b) Como P[$0 < Z \leq Z_0$] = P[$Z \leq Z_0$] - P[$Z \leq 0$] = P[$Z \leq Z_0$] - 0.5 y esta diferencia vale 0.4 por dato, podemos escribir:

P[$Z \leq Z_0$] = 0.4 + 0.5 = 0.9 Entrando a la Tabla con una probabilidad acumulada 0.9, encontramos que no hay un valor exacto, pero si podemos ubicar las dos probabilidades acumuladas más cercanas (una por defecto y la otra por exceso) que son 0.8997 y 0.9015, cuyos valores Z son 1.28 y 1.29 respectivamente. Por tanto, tomamos como valor aproximado de Z_0, el promedio simple de ambos, esto es $Z_0 \cong (1.28 + 1.29)/2 = 1.285$

Ejemplo 2.11
Si X ~ N(10,9) calcular P[$X \leq 15$] y X_0 tal que P[$X > X_0$] = 0.95

Solución:
Aquí tenemos que μ=10 y σ^2 =9. Es decir σ=3, por tanto, estandarizando

$$P(X \leq 15) = P(Z \leq \frac{15-10}{3}) = P(Z \leq 1.67) = 0.9525.$$

Finalmente $P(X > X_0) = 0.95 \Leftrightarrow P(X \leq X_0) = 0.05 \Leftrightarrow P(X \leq X_0) = 0.05 = P(Z \leq \frac{X_0 - 10}{3})$.

Buscando en la tabla Z con 0.05 de probabilidad acumulada tenemos

$\frac{X_0 - 10}{3} \cong -1.645$ de donde $X_0 \cong 10 - 3 \times 1.645 = 5.065$

Ejemplo 2.12
En una región del país, el ingreso familiar es una v.a.c. X con distribución normal de parámetros μ=300 y σ^2=100^2

a) En la región sólo el 2.5% de las familias se considera de altos ingresos ¿Cuál ingreso X_0 define a una familia como de altos ingresos?
b) Si se considera que el costo de una Canasta Familiar mínima es 350 u.m. y el gobierno asegura que con su plan de reactivación, en cinco años sólo el 30% de las familias estará en Pobreza: ¿Cuánto dinero adicional tendría que ganar cada familia para que lo anterior sucediera?

Solución:

a) Por dato $P(X \geq X_0) = 0.025 \Leftrightarrow P(X \leq X_0) = 0.975 \Leftrightarrow P(Z \leq \frac{X_0 - 300}{100}) = 0.975$ así que

$$\frac{X_0 - 300}{100} = 1.96 \Rightarrow X_0 - 300 = 196 \Rightarrow X_0 = 496$$

b) Sea Y el ingreso luego del plan de reactivación, entonces $Y = X + c$ donde c es el dinero adicional en el ingreso de cada familia. Si el % de pobreza es 30%, entonces se cumpliría $P(Y < 350) = 0.3$ o equivalentemente $P(X + c < 350) = 0.3 \Rightarrow 0.3 = P(X < 350 - c) = P(Z < \frac{350 - c - 300}{100})$ y de la tabla Z tenemos

$$\frac{350 - c - 300}{100} = -0.525 \Rightarrow \frac{50 - c}{100} = -0.525 \Rightarrow c = 102.5$$

Proposición (Teorema del Límite Central)
Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ variables aleatorias **independientes** con medias $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \cdots$ finitas y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2, \cdots$ finitas tales que $\sigma_j^2 > 0\ \forall j$ y $E(|X_j - \mu_j|^3) \equiv \beta_j$ existe $\forall j$. Además supongamos que $B_n = \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j\right)^{1/3}$ y $C_n = \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2\right)^{1/2}$ son tales que $\lim_{n\to\infty}(B_n/C_n) = 0$.

Sea la v.a. $T = \sum_{j=1}^{n} X_j$; entonces si n es suficientemente grande $(n \geq 30)$ se cumple que:

$$Z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} \sim N(0,1) \text{ donde } \mu_T = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \text{ y } \sigma_T^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$$

Observaciones:

Informalmente se escribe $T \sim N(\mu_T, \sigma_T^2)$, donde $\mu_T = \sum_{j=1}^{n} \mu_j$ y $\sigma_T^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$.

Este teorema es el que permite atribuir normalidad de datos cuando la o las variables bajo estudio, se pueden considerar como la suma de un número grande de variables. En Economía, variables como el producto nacional y la demanda agregada se asumen con distribución normal gracias al teorema anterior. La misma razón hace que la distribución normal sea tomada como un patrón para procesos de diversa naturaleza.

Nótese que no es requisito que las variables X_j tengan ellas mismas distribución normal, es suficiente que la cantidad *n* de sumandos sea grande. Bajo condiciones distintas y más exigentes, el teorema es válido incluso si las variables no son independientes.

Un caso muy frecuente ocurre cuando $\mu_j = \mu$ y $\sigma_j^2 = \sigma^2$, de modo que se tiene $T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

La cantidad $(n \geq 30)$ es un promedio; si las variables X_j originales tienen distribución simétrica, es posible que el teorema se cumpla con un n menor; en cambio si las distribuciones son asimétricas, n tendrá que ser bastante mayor que 30 para que tenga vigencia el teorema. Las condiciones expuestas en el en el enunciado se conocen como “condiciones de Liapunov”. Hay otras versiones con otras condiciones que permiten ampliar la validez del teorema, de modo que en verdad hay varios teoremas del límite central.

Proposición (Aproximación de la Distribución Binomial a la Normal)

Si $X \sim B(x;n,p)$ y n es "grande", entonces se cumple que $P(X \leq k) \approx P(Z \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}})$

Esta propiedad es consecuencia del Teorema del Límite Central, si recordamos que $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ donde $X_j = 1$ si ocurre A en la j-ésima repetición del experimento y $X_j = 0$ si A no ocurre en la j-ésima repetición del experimento.

No hay un criterio único para decidir si n es "grande", pero nosotros usaremos el siguiente: **Si** $np > 5$ y $nq > 5$**, consideraremos que n es "grande".**

Ejemplo 2.13
Una prueba tiene 40 preguntas o "items", y se calcula que en promedio, una persona demora una media de μ = 1.5 minutos por ítem, con una desviación estándar de σ = 0.50 minutos. Si se desea poner un tiempo límite para la prueba, de modo que el 90% de personas complete la prueba ¿Cuál sería el tiempo T* que debiera fijarse?

Solución:

Si definimos $T = \sum_{j=1}^{40} T_j$, donde T_j es el tiempo usado en el j-ésimo ítem, como son n=40 ítems, asumiendo independencia entre tiempos, podemos aplicar el Teorema del Límite Central y decir que

$T \sim N(\mu_T = 40\mu = 60, \sigma_T^2 = 40\sigma^2 = 10)$

En este contexto, T^* satisface la condición $P(T \leq T^*) = 0.90$ o equivalentemente

$$0.90 = P(T \leq T^*) = P(\frac{T-60}{\sqrt{10}} \leq \frac{T^*-60}{\sqrt{10}}) = P(Z \leq \frac{T^*-60}{\sqrt{10}})$$

De la Tabla Z obtenemos

$\frac{T^*-60}{\sqrt{10}} = 1.285 \Rightarrow T^* = 60 + 1.285\sqrt{10} = 64.06$ Concluimos que el tiempo para la prueba debiera fijarse en unos 64 minutos.

2.8 Distribucion Lognormal

Esta distribución aparece como una consecuencia del Teorema del Límite Central cuando los efectos del azar no son aditivos sino multiplicativos.

2.8.1 Definición y Parámetros

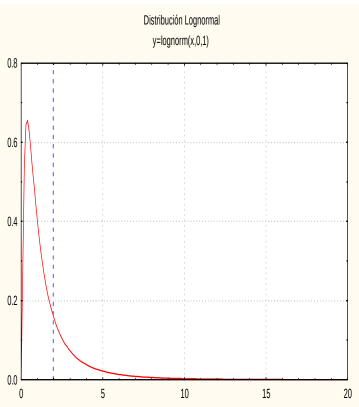
Definición

Sea X variable aleatoria continua con rango $R_X = [0, \infty[$ y sean μ y $\sigma^2 > 0$ constantes reales de valor conocido. Diremos que X tiene distribución Lognormal de parámetros μ y σ^2, si $Y = \ln X$ tiene distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$

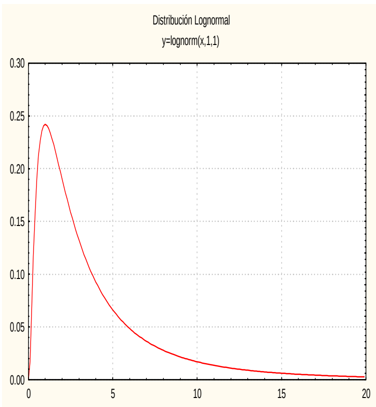
Lo anterior se denota escribiendo $X \sim LogN(\mu, \sigma^2)$.

Parámetros

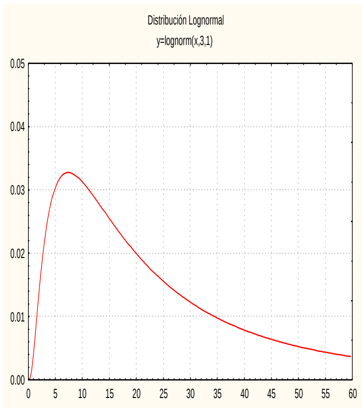
Los parámetros son μ y σ^2. Aunque la gráfica es asimétrica, la forma va cambiando con μ



μ=0, σ^2=1



μ=1, σ^2=1



μ=3, σ^2=1

Observaciones

(1) Sea $F_X(x) = P(X \leq x)$ la distribución acumulativa de X. Entonces se cumple

$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\ln X \leq \ln x) = P(Y \leq \ln x)$, donde $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(2) De lo anterior, al calcular probabilidades de una distribución Lognormal, basta convertir el problema en uno de cálculo de probabilidades en una distribución $N(\mu,\sigma^2)$. En efecto:

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(\ln X \le \ln x) = P(Y \le \ln x) = F_Y(\ln x) = P(Z \le \frac{\ln x - \mu}{\sigma}) = F_Z(\frac{\ln x - \mu}{\sigma})$$

(3) Como $F_X(x) = F_Y(\ln x)$ $\Rightarrow$ Derivando con respecto a x tenemos:

$$f_X(x) = F_Y^{'}(\ln x) = f_Y(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\frac{e^{-(\ln x-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

Proposición
La función de densidad de X es

$$f_X(x) = \frac{e^{-(\ln x-\mu)^2/2\sigma^2}}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \quad x > 0$$

2.8.2 Valores esperados

Como $Y = \ln X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow M_Y(t) = e^{t\mu+\frac{t^2}{2}\sigma^2}$. Pero también sabemos que $M_Y(t) = E(e^{tY})$

$E(e^{t\ln X}) = E(e^{\ln X^t}) = E(X^t)$. Es decir, $E(X^t) = e^{t\mu+\frac{t^2}{2}\sigma^2}$ $\forall \boldsymbol{t}$.

Evaluando en $t=1$ obtenemos $\mu_X = E(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$ y en $t=2$ obtenemos $E(X^2) = e^{2\mu+2\sigma^2}$

Proposición

Si $X \sim LogN(\mu,\sigma^2)$ entonces $\mu_X = E(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$ y $\sigma_X^2 = V(X) = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}$

Observación:
Nótese que $\mu \ne E(X)$ y $\sigma^2 \ne V(X)$ en esta distribución.

Origen (Teorema del Límite Central para productos)
Sean $W_1, W_2, \cdots, W_n, \cdots$ variables aleatorias **positivas** e **independientes** con medias finitas y varianzas positivas finitas. Sea T el producto de estas variables, i.e. $T = \prod_{j=1}^{n} W_j$. Si el número n de factores es grande ($n \ge 30$), entonces se cumple $T \sim \text{Log}N(\mu,\sigma^2)$, donde $\mu = \sum_{j=1}^{n}\mu_j$ y $\sigma^2 = \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2$, siendo $\mu_j = E(LnW_j)$ y $\sigma_j^2 = V(Ln(W_j))$

Ejemplo 2.14
La cotización de una acción en la bolsa, después de cierto tiempo en el mercado de valores, es una v.a.c. X con distribución LogNormal de parámetros μ y σ^2

a) Si μ=5 y σ=1 ¿Con qué probabilidad la cotización será menor que 190 u.m.?
b) Un inversionista espera que el título se cotice a 1,100 u.m. aunque sabe que con 94% de probabilidad el título no pasará de 3,200 u.m. ¿Cuáles son los parámetros de la distribución?

Solución:
a) $P(X < 190) = P(\ln X < \ln 190) = P(\ln X < 5.25) = P(Z < 0.25) = 0.5987$

b) $\mu_X = E(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} = 1{,}100 \Rightarrow \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = 7$ (I) y

$P(X < 3{,}200) = P(\ln X < 8.1) = P(Z < \frac{8.1-\mu}{\sigma}) = 0.94 \Rightarrow \frac{8.1-\mu}{\sigma} = 1.55 \Rightarrow 8.1 - \mu = 1.55\sigma$ (II)

Resolviendo (I) y (II) se obtienen μ y σ^2:

De (I) $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = 7 \Rightarrow \mu = 7 - \frac{1}{2}\sigma^2$ y en (II) $\Rightarrow 8.1 - 7 + \frac{1}{2}\sigma^2 = 1.55\sigma \Rightarrow \sigma^2 - 3.1\sigma + 2.2 = 0 \Rightarrow$

$$\sigma = \frac{3.1 \pm \sqrt{9.61 - 4\times 2.2}}{2} = \sigma = \frac{3.1 \pm 0.9}{2} \Rightarrow \sigma = \begin{cases} 1.1 \\ 2 \end{cases} \text{ y } \mu = \begin{cases} 6.5 \\ 5 \end{cases}$$

Ejemplo 2.15

El Ingreso Familiar X (medido en cientos de unidades monetarias) en una región es una v.a.c. con distribución lognormal de parámetros $\mu = 3$ y $\sigma^2 = 1$

a) Si se considera que el costo de una canasta familiar mínima es 33.2 cientos de u.m. ¿En esta región con qué probabilidad una familia estará en condición de pobreza?

b) Si se considera que el costo de una canasta familiar mínima es 33.2 cientos de u.m. y el gobierno asegura que con su plan de lucha contra la pobreza, en cinco años sólo el 30% de las familias estará en Pobreza. ¿Cuánto dinero adicional tendría que ganar cada familia para que la afirmación del gobierno se realizara?

Solución:

a) "En condición de pobreza" equivale a "Ingreso no cubre el costo de la canasta familiar" $\Leftrightarrow \boldsymbol{X < 33.2}$ y se pide $P(X < 33.2) = P(lnX < ln33.2) = P(lnX < 3.5) = P\left(\frac{(lnX-3)}{1} < \frac{3.5-3}{1}\right) = P(Z < 0.5) = 0.6915$; es decir un 69.15% de la población de esta región está en pobreza.

b) Sea $Y = X + c$ el ingreso luego del plan del gobierno, donde c es el ingreso adicional. En cinco años, c será tal que:

$$P(Y < 33.2) = 0.3 \Leftrightarrow 0.3 = P(X + c < 33.2) = P\big(X < (33.2 - c)\big) = P(lnX < ln(33.2 - c) =$$

$$= P\left(Z < \frac{\big(ln(33.2 - c)\big) - 3}{1}\right) = 0.3 \Rightarrow \frac{\big(ln(33.2 - c)\big) - 3}{1} = -0.525 \Rightarrow ln(33.2 - c) = 2.475$$

$\Rightarrow (33.2 - c) = e^{2.475} = 11.88 \Rightarrow c = 33.2 - 11.88 = 21.32$ cientos de unidades monetarias.

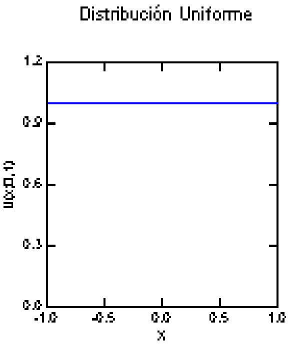
2.9 Distribución Uniforme.

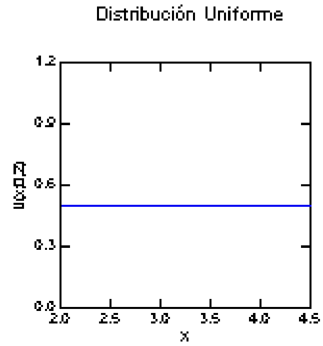
2.9.1 Definición y Parámetros

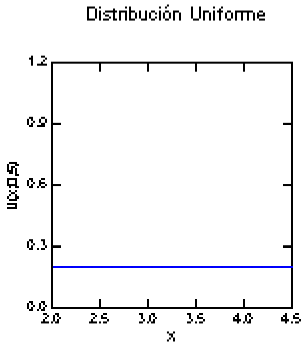
Definición

Sea X v.a. continua, con rango $R_X = [\alpha,\beta]$. Diremos que X tiene distribución uniforme en $[\alpha,\beta]$, que se denota $X \sim U(x;\alpha,\beta)$ si su f. de densidad es $f_X(x) = U(x;\alpha;\alpha) = \dfrac{1}{\beta-\alpha} \quad si \quad \alpha \le x \le \beta$

Parámetros. Los parámetros son α y β







α=0,β=1 **α=0,β=2** **α=0,β=5**

Valores Esperados y Función Generatriz de Momentos.

Aplicando la definición de valor esperado se obtiene que

$\mu = \mu_X = (\alpha+\beta)/2$ y $\sigma^2 = \sigma_X^2 = (\beta-\alpha)^2/12$

En cuanto a $M_X(t)$, aunque existe $M_X(t)$ no es diferenciable en $t=0$ y por lo mismo no es de mayor interés.

2.9.2 Origen

Tiene un origen relativamente simple, en el contexto de probabilidad geométrica, cuando se toma un punto al azar de un intervalo de longitud finita.

Proposición

Sea $[\alpha,\beta]$ un intervalo de extremos dados. Si se toma un punto al azar del intervalo y se define X =Valor obtenido, entonces $X \sim U(x;\alpha,\beta)$.

Demostración

Es claro que $R_X = [\alpha,\beta]$. Sea ahora $x \in R_X$, entonces aplicando probabilidad geométrica tenemos:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$

Derivando $F_X(x)$) con respecto a x se obtiene el resultado.

Observación

Si el intervalo es abierto, el resultado no cambia, salvo que el rango de X es $R_X =]\alpha,\beta[$

Ejemplo 2.15

Sea X v.a.c. tal que $f_X(x) > 0$ para todo x y sea $Y = F_X(x)$. Demuestre que $Y \sim U(y;0,1)$.

Solución:

Es claro que $R_y=]0,1[$. Sea $G_y(y)$ la distribución acumulativa de Y. Por definición $G_Y(y)=P[Y \le y] = P[F_X(X) \le y]$.

Pero como X es continua F_X es no decreciente y siendo $f_X(x) > 0$, podemos decir que F_X es estrictamente creciente.

Luego, existe la inversa F_X^{-1} y aplicándola dentro de $G_y(y)$:

$G_y(y)=P[F_X(X)\leq y] = P[X \leq F_x^{-1}(y)] = F_X [F_X^{-1}(y)] = y \quad \forall\ y \in\ ]0,1[$

Es decir $g_Y(y)= 1 \quad 0 < y < 1$ o equivalentemente $Y \sim U(y;0,1)$

Observación
El ejercicio muestra que en cierto sentido, una variable aleatoria X continua puede transformarse en una variable con distribución uniforme en el intervalo]0,1[, de modo que para cada $x \in R_X$ existe una correspondiente $y \in\ ]0,1[$

La propiedad anterior usar la distribución uniforme en la simulación de variables en modelos econométricos. Por ejemplo, si $X \sim Exp\ (x;1)$, entonces Y=0.7 equivale $1–e^{-X} = 0.7$ de donde obtenemos que X=1.204.

2.10 Ejercicios y distribuciones adicionales

Ejercicio 1

Un comerciante mayorista suele comprar S unidades de un bien a precio unitario de 4 soles, para revenderlo luego a 6 soles la unidad, durante la temporada de ventas. Pasada la época de ventas, el sobrante debe ser desechado. La cantidad de producto que le pueden demandar a este mayorista es una v.a. continua X con función de densidad exponencial $X \sim Exp(\beta = 0.05)$. El comerciante desea saber cuál es el stock óptimo S de producto que debiera comprar para su negocio. ¿Qué valor de S le recomendaría?

Solución:

Sea U la utilidad, entonces U depende de S y de X:

- Si $X \leq S \Rightarrow$ durante la temporada vende sólo X unidades de las S que tiene para vender y el sobrante $(S - X)$ se pierde y así $U = U(X,S) = 6X - 4S$
- Si $X > S \Rightarrow$ durante la temporada vende todo su stock y genera todo su ingreso posible, con una utilidad $U = U(X,S) = 6S - 4S = 2S$

$$U = U(X,S) = \begin{cases} 6X - 4S & si\ X \leq S \\ 2S & si\ X > S \end{cases}$$

U tiene una componente aleatoria X y otra **no** aleatoria S. Desde el punto de vista económico lo racional es maximizar utilidades, pero la componente aleatoria X impide una maximización clásica, pues por definición X no es directamente "controlable". Tenemos que imponer un control 'indirecto': En el valor esperado de $E[U(X,S)]$, X "ya no figura" porque se promedia sobre todos sus valores ponderados por sus probabilidades asociadas, lo que queda es una función $\varphi(S) \coloneqq E[U(X,S)]$ que sólo depende de S. Por tanto, si luego calculamos S de modo que se maximice $\varphi(S)$, lo que estamos haciendo es determinar una 'tendencia óptima' para la utilidad U.

$\varphi(S) = E[U(X,S)] = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x,S)f_X(x)dx = \int_0^S U(x,S)f_X(x)dx + \int_S^{\infty} U(x,S)f_X(x)dx =$ $\int_0^S (6x - 4S)f_X(x)dx + \int_S^{\infty} 2Sf_X(x)dx = \int_0^S 6xf_X(x)dx - 4S\underbrace{\int_0^S f_X(x)dx}_{F_X(S)} + 2S\underbrace{\int_S^{\infty} f_X(x)dx}_{1-F_X(S)} = 6\int_0^S xf_X(x)dx -$

$4SF_X(S) + 2S\big(1 - F_X(S)\big) = 6\int_0^S xf_X(x)dx - 6SF_X(S) + 2S$.

Llegamos a $\varphi(S) \coloneqq E[U(X,S)] = 6\int_0^S xf_X(x)dx - 6SF_X(S) + 2S$ es explícitamente una función diferenciable de S que podemos maximizar mediante derivación: $\varphi'(S) = \frac{d\varphi(S)}{ds} = 6Sf_X(S) - 6F_X(S) - 6S\underbrace{F_X'(S)}_{f_X(S)} + 2 = 6Sf_X(S) - 6F_X(S) - 6Sf_X(S) + 2 = -6F_X(S) + 2$ y $\varphi'(S) = \frac{d\varphi(S)}{ds} = 0$ equivale a $F_X(S) = \frac{2}{6}$ y como $\varphi''(S) = -6f_X(S) > 0$, se trata de un máximo.

Finalmente, como $f_X(x) = 0.05e^{-0.05x}$ $0 < x < \infty \Rightarrow F_X(S) = \int_0^S 0.05e^{-0.05x}dx = 1 - e^{-0.05S} = \frac{1}{3} \Rightarrow e^{-0.05S} = \frac{1}{3} \Rightarrow S = 21.97$ es el valor "óptimo" del stock S (u "stock óptimo")

Ejercicio 2

a) En una región el valor total Y de la producción de la región es función de la inversión X del gobierno regional vía $Y = 100 + 0.7X + \varepsilon$, donde X e Y están medidas en millones de unidades monetarias y ε es una variación aleatoria con distribución normal $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$. Se sabe que si la inversión es de $X = 300$ millones de unidades monetarias, entonces el valor Y de la producción será inferior a 340 millones con 67% de probabilidad. ¿Cuál es el valor de σ? Para una inversión de 500 millones ¿Cuál sería el valor del percentil Y_{75}?

Solución:

Si $X = 300 \Rightarrow Y = 100 + 0.7 \times 300 + \varepsilon = 310 + \varepsilon$ y como $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$ entonces $Y \sim N\big(E(Y), V(Y)\big)$, pues "funciones lineales de variables normales, también tienen distribución normal" (ver Cap. 2)

$E(Y) = E(310 + \varepsilon) = E(310) + E(\varepsilon) = 310 + 0 = 310$; $\quad V(Y) = E\left(\big(Y - E(Y)\big)^2\right) = E((310 + \varepsilon -$

$310)^2) = E(\varepsilon^2) = \sigma^2$, ya que $\sigma^2 = E(\varepsilon^2) - \left[\underbrace{E(\varepsilon)}_{0}\right]^2 = E(\varepsilon^2)$.

En resumen, $Y \sim N(310, \sigma^2)$ y se tiene el dato que $P(Y < 340) = 0.67 = P\left(Z < \frac{(340-310)}{\sigma}\right) \Rightarrow \frac{30}{\sigma} = 0.44 \Rightarrow \sigma = 68.18$

Finalmente, si $X = 500 \Rightarrow Y = 100 + 0.7 \times 500 + \varepsilon = 450 + \varepsilon \Rightarrow Y \sim N(450, 68.18^2)$ y si $\boldsymbol{y_{75}}$ es el percentil 75, entonces $P(Y < \boldsymbol{y_{75}}) = 0.75 = P\left(Z < \frac{(y_{75}-450)}{68.18}\right) \Rightarrow \frac{(y_{75}-450)}{68.18} \cong 0.675 \Rightarrow \boldsymbol{y_{75}} = 450 + 0.675 \times 68.18 = 496.02$

b) Estudiando inversiones en mercados emergentes, un economista encuentra que la rentabilidad X de una inversión (X medida en porcentaje) es una v.a. con distribución normal $N(\mu, \sigma^2 = 2^2)$ y estima que hay una probabilidad de 15.87% de tener una rentabilidad mayor que 7.
   1. Halle el valor de μ y la probabilidad de tener una rentabilidad inferior a la mitad de lo esperado.
   2. El economista sabe que el ingreso Y (en unidades monetarias) obtenido con la inversión, tiene distribución LogNormal $Y \sim LogN(\mu, \sigma^2)$ donde originalmente μ y σ^2 son los mismos parámetros de a) pero especula que la rentabilidad media μ puede aumentar (aunque no la varianza) y desea saber en cuántos puntos porcentuales tendría que aumentar la rentabilidad media μ para que tener un ingreso que supere las 4,200 unidades monetarias con una probabilidad de 12.1%. Halle este aumento.

Solución:

1. $P(X > 7) = 0.1587 \Leftrightarrow P(X \le 7) = 0.8413 \Leftrightarrow P(X \le 7) = 0.8413 \Leftrightarrow P\left(Z \le \frac{7-\mu}{2}\right) = 0.8413 \Rightarrow \frac{7-\mu}{2} = 1 \Rightarrow \mu = 7 - 2 = 5$.
   Finalmente: $P\left(X < \frac{\mu}{2}\right) = P(X < 2.5) = P(Z < -1.25) = 0.1056$
2. Si μ_N es la nueva media del ingreso Y y $0.121 = P(Y > 4{,}200) \Leftrightarrow P(Y \le 4{,}200) = 0.879 \Leftrightarrow$
   $P(lnY \le ln4{,}200) = 0.879 \Leftrightarrow P(lnY \le 8.34) = 0.879 \Leftrightarrow P\left(Z \le \frac{8.34 - \mu_N}{2}\right) = 0.879 \Leftrightarrow$
   $\frac{8.34 - \mu_N}{2} = 1.17 \Rightarrow \mu_N = 8.34 - 2.34 = 6$, luego el aumento debe ser $(\mu_N - \mu) = 6 - 5 = 1$

Ejercicio 3

a) El número de consumidores que entra a una tienda a comprar un bien, por día, se presenta de acuerdo a un Proceso de Poisson a una tasa de ω = 2/día. Cada consumidor sólo puede comprar una unidad y sólo va una vez a la tienda. La tienda tiene un stock de 3 unidades ¿Con qué probabilidad ocurrirá que en un día se venda una unidad pero al siguiente la tienda deba pedir unidades adicionales a su proveedor para satisfacer la demanda?

Solución:

De ω = 2/día y si $X = \#$ de consumidores que entran a la tienda en t =1 día, entonces $X \sim P(x; \lambda = \omega t = 2)$.
Se pregunta por $(X = 1\ en\ el\ primer\ día) \cap (X > 2\ al\ siguiente\ día)$ y en el contexto de un Proceso de Poisson, estos eventos son independientes, por tanto:

$P\big((X = 1\ en\ el\ primer\ día) \cap (X > 2\ al\ siguiente\ día)\big) = P(X = 1) \times P(X > 2)$;

$P(X = 1) = e^{-2}\frac{2^1}{1!} = 2e^{-2} = 0.271$ y $P(X > 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\} = 1 - \left\{e^{-2} + 2e^{-2} + e^{-2}\frac{2^2}{2!}\right\} = 1 - 5e^{-2} = 0.323$; luego:

$P\big((X = 1\ en\ el\ primer\ día) \cap (X > 2\ al\ siguiente\ día)\big) = P(X = 1) \times P(X > 2) = 0.271 \times 0.32 = 0.087$

b) Un consumidor puede decidirse a comprar un bien a un productor con una probabilidad p = 0.4 y en un momento dado, cinco consumidores van donde el productor en busca del bien. Cada consumidor toma su decisión independientemente. El productor sólo tiene en stock cuatro unidades del bien para la venta. ¿Con qué probabilidad vendería sólo la mitad de su stock? ¿Venderá todo su stock el productor?

Solución:

X =Número de consumidores que deciden comprar el bien, entonces $X \sim B(x; n = 5, p = 0.4)$ y se pregunta por:

$P(X = 2) = C_2^5 0.4^2 0.6^3 = 0.3456$ y P(Vender todo el stock). Si cuatro clientes deciden comprar el producto se venderán las cuatro unidades del stock y si cinco clientes deciden comprar el bien, también se venderá el stock y lo que pasa es que uno de los cinco se queda si poder comprar, es decir:

$P(\text{Vender todo el stock}) = P(X \geq 4) = C_4^5 0.4^4 0.6^1 + C_5^5 0.4^5 0.6^0 = 0.01024 < 0.5$ y pronosticamos que No se venderá todo el stock.

Ejercicio 4
En una región el Ingreso Familiar X es una v.a.c. con distribución normal $N(\mu,\sigma^2)$ con $\mu = 400$ y $\sigma^2 = 50^2$ y el costo de una canasta alimentaria mínima es 425. Hay dos alternativas de inversión estatal para la región: con la primera el ingreso de todas las familias subirá en 50 unidades monetarias mientras que con la segunda habrá un incremento de 3% en el ingreso de cada familia ¿Con cuál alternativa habrá menos porcentaje de familias pobres en la región? Asuma que no cambia el costo de la canasta.

Solución:
Con la primera alternativa, si Y = Nuevo ingreso, entonces Y=X+50 y la proporción de familias pobres sería igual a $P(Y \leq 425) = P(X + 50 \leq 425) = P(X \leq 375) = P\left(Z \leq \frac{(375-400)}{50}\right) = P(Z \leq -0.5)) = 0.3085$
Con la segunda alternativa, si W = Nuevo ingreso, entonces W=X+0.03X=1.03X y la proporción de familias pobres sería igual a $P(W \leq 425) = P(1.03X \leq 425) = P(X \leq 412.6) = P\left(Z \leq \frac{(412.6-400)}{50}\right) = P(Z \leq 0.25) = 0.5987$
Con la primera alternativa habrá menos porcentaje de familias en condición de pobreza.

Ejercicio 5
En un sector industrial, el número X de trabajadores en la empresa es una v.a. discreta cuya distribución de probabilidades depende de si la empresa es formal o informal:
Si la empresa es formal, X tiene distribución geométrica $X \sim G(x; p = \frac{1}{3})$. En cambio, dado que la empresa es informal, la función de probabilidad de X es $P_X(x) = c\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} \quad x = 1,2,3,\ldots$
Un economista genera una variable indicadora de informalidad Y que toma valor 1 si la empresa es informal y 0 si la empresa es formal, de modo que $P_Y(y) = \left(\frac{9}{10}\right)^y \left(\frac{1}{10}\right)^{1-y} \quad y = 0,1$.

a) Hallar el valor de c.
b) Halle la probabilidad de que una empresa del sector tenga 4 trabajadores.
c) ¿Es cierto que, en promedio, una empresa informal genera tres veces más empleo que una empresa formal en este sector?
d) En promedio ¿Cuántos trabajadores tiene una empresa de este sector?

Solución:
a) $1 = \sum_{x=1}^{\infty} c\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} = c\frac{1}{9}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^x = c\frac{1}{9}\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = c9\frac{1}{8} = c\frac{9}{8} \Rightarrow c = \frac{8}{9}$
b) $P(X = 4) = P[(X = 4) \cap (Y = 0)] + P[(X = 4) \cap (Y = 1)]$
$P[(X = 4) \cap (Y = 0)] = P(X = 4|Y = 0)P(Y = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} \times \left(\frac{9}{10}\right)^0 \left(\frac{1}{10}\right)^{1-0} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{10}\right) = 0.010$
$P[(X = 4) \cap (Y = 1)] = P(X = 4|Y = 1)P(Y = 1) = \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^{4-1} \times \left(\frac{9}{10}\right)^1 \left(\frac{1}{10}\right)^{1-1} = \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^3 \times \left(\frac{9}{10}\right) = 0.001$
$\Rightarrow P(X = 4) = 0.010 + 0.001 = 0.011$
c) "En promedio" significa en valor esperado, es decir, se pregunta si es cierto que $E[X|Y = 1] = 3E[X|Y = 0]$.
En el caso de las empresas formales ($Y = 0$): $X \sim G(x; p = \frac{1}{3})$ cuya media es $\frac{1}{p} = 3 \Rightarrow E[X|Y = 0] = 3$.
En el caso de las empresas informales ($Y = 1$): se reconoce que la distribución de X corresponde a una distribución geométrica $X \sim G(x; p = \frac{8}{9})$ cuya media es $\frac{1}{p} = \frac{9}{8} \Rightarrow E[X|Y = 1] = 1.125$: No es cierta la afirmación.
d) Se pregunta por $E(X)$. Como sabemos $E(X) = E\big(E(X|Y)\big) = \sum_{y=0}^{1} E(X|Y = y)P_Y(y)$ y como ya tenemos $E[X|Y = 0]$ y $E[X|Y = 1] \Rightarrow E(X) = E\big(E(X|Y)\big) = E(X|Y = 0)P_Y(0) + E(X|Y = 1)P_Y(1) = 3 \times \frac{1}{10} + \frac{9}{8} \times \frac{9}{10} = 1.3125$