PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMIA

PUCP

PRÁCTICA CALIFICADA No. 4
CURSO: Estadística Inferencial
CÓDIGO: EST 241
PROFESORA: Zaida Quiroz Cornejo
HORARIO: 0622

Salvo su calculadora de uso personal, no está permitido el uso de otro material de consulta durante el desarrollo de la prueba.
No está permitido el uso de ningún dispositivo electrónico (celulares, tablets, laptops, iPods, etc.).
Los celulares y las cartucheras deben permanecer guardados durante la prueba.

---

1. (4 puntos) El tiempo de realización en minutos de una determinada tarea dentro de un proceso industrial es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{x}{\theta^2}\exp\left(-x/\theta\right);\ \text{si } x > 0$$

donde $\theta > 0$, $E(X) = 2\theta$ y $E(X^2) = 6\theta^2$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de tamaño n. Sea $\hat{\theta} = \bar{X}/2$

   a) ¿El estimador de θ es insesgado? (1 punto)
   b) ¿El estimador de θ es consistente? (1 punto)
   c) Pruebe que $\hat{\theta}$ es el MELI de θ. (2 puntos)

   ¿Qué propiedades cumple el estimador $\hat{\theta}$? Jusitfique su respuesta probando sus afirmaciones.

2. (6 puntos) Asuma que el gasto mensual X en cabinas de internet, es una v.a. con distribución $U(0,\theta)$ y se piensa tomar una m.a. de n usuarios de cabinas para estimar el valor de θ. Si $\hat{\theta_1} = \frac{4\sum_{i=1}^{n} iX_i}{n(n+1)}$ y $\hat{\theta_2} = máx\{X_1, \ldots, X_n\}$

   a) Pruebe si $\hat{\theta_1}$ y $\hat{\theta_2}$ son estimadores insesgados de θ. (1.5 puntos)
   b) Pruebe si $\hat{\theta_1}$ y $\hat{\theta_2}$ son estimadores consistentes de θ. (1.5 puntos)
   c) Halle el MELI de θ. (1.5 puntos)
   d) ¿Qué tamaño de muestra garantizaría que con 95% de probabilidad, θ_{MELI} de la muestra diferirá de θ en menos de un 20% de θ? (1.5 puntos)

3. (4 puntos)

   a) Suponga un modelo de regresión de la forma $Y_j = 1 + \beta X_j + \epsilon_j$ y una m.a. $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$. Asuma que $E(\epsilon_j) = 0$, $V(\epsilon_j) = \sigma^2$ y $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$. Un estimador de β es

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_j X_j - \sum_{j=1}^{n} X_j}{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}$$

   Pruebe que $\hat{\beta}$ es un estimador insesgado. (2 puntos)

b) El siguiente modelo estadístico postula que para representar la relación entre ingresos reales agregados y gastos reales agregados de bienes no duraderos:

$$Z_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \epsilon_i,$$

donde
Z_i = Logaritmo de los gastos reales agregados en bienes no duraderos en el periodo i, medidos en miles de millones de dólares. Es una variable aleatoria, al igual que el error aleatorio ϵ_i.
X_i = Ingreso disponible real agregado en el periodo i, medido en miles de millones de dólares. Conocemos los valores de esta variable. X_i no es una variable aleatoria.
Además β_1 y β_2 son parámetros. Tome en cuenta que $Z_1, \ldots, Z_n$ es una m.a. de la variable aleatoria Z (logaritmo de los gastos reales), y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, también es una m.a. del error aleatorio ϵ, es decir, $cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$. Además $f(\epsilon_i + ab) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \epsilon_i^{a-1} e^{-\epsilon_i / b}; \epsilon_i \in (0, \infty)$. Asuma que a y b son constantes conocidas.
Bajo estas especificaciones del modelo se define los siguientes estimadores de β_1 y β_2:

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Z} - \hat{\beta}_2 \bar{X};$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i - n\bar{Z}\bar{X}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}.$$

Halle el valor esperado, varianza y covarianza de los errores aleatorios. Halle el valor esperado de Z_i y $\bar{Z}$. Asuma que el estimador $\hat{\beta}_2$ de β_2, es insesgado. Usando esta información pruebe que $\hat{\beta}_1$ es un estimador insesgado de β_1. (2 puntos)
Nota: Asuma que para $W \sim gamma(a, b)$ entonces $E(W) = ab$ y $Var(W) = ab^2$.

4. (6 puntos)

a) Si X es la rentabilidad de una inversión con distribución lognormal; $X \sim LogN(\mu, \sigma^2)$. Si σ^2 es conocido. Un estimador de μ es $\frac{\sum_{i=1}^{n} ln x_i}{n}$. Pruebe si dicho estimador es un estimador consistente de μ. (2 puntos)

b) Sea X una muestra aleatoria de tamaño n de una población con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, que representa los pesos, en onzas, de cereal colocado en cajas de cereal para una marca determinada y tipo de desayuno. Sea n = 25. ¿Cuál es la probabilidad de que el intervalo $[\bar{X} - 2.06\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2.06\frac{S}{\sqrt{n}}]$ contenga el valor de μ? (Este intervalo es un ejemplo de un intervalo de confianza en este caso para la media poblacional μ.) (2 puntos)

c) Sea X una muestra aleatoria de tamaño n de una población con distribución $N(\mu, \sigma^2)$,que representa el rendimiento por acre, en libras, de una nueva variedad de lúpulos utilizados en la producción de una bebida alchólica premium. Supongamos que S=9 y n = 20. Defina un intervalo de confianza $[\frac{nS^2}{\chi^2_\alpha}, \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\alpha}}]$ que está diseñado para contener el valor de la varianza poblacional de los rendimientos de lúpulo, σ^2, con una probabilidad de $\cancel{1-}2\alpha = 0.95$. P(1 - 2α) = 0,99 (2 puntos)

5. (**Pregunta Bonus:**) (2 puntos) Responda Verdadero o falso:

a) Si $\hat{\theta}$ es un estimador no es asintóticamente eficiente para θ entonces no es un estimador insesgado de $\hat{\theta}$. (0.5 puntos)

b) Si $\hat{\theta}$ es un estimador consistente para θ entonces es un estimador insesgado de $\hat{\theta}$. (0.5 puntos)

c) El estimador $\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$ es un estimador asintóticamente eficiente de la varianza poblacional.(0.5 puntos)

d) La desviación estándar muestral es un estimador consistente de la varianza poblacional. (0.5 puntos)

P

Pando, 8 de junio de 2019

P(< μ <)