PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

PRÁCTICA CALIFICADA 3
CURSO: EST 241 Estadística Inferencial. HORARIO: 0621. PROFESOR: Arturo Calderón G.
FECHA: 25 de mayo de 2019. SEMESTRE: 2019-1. DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 horas.

Salvo formulario y calculadora, no está permitido el uso de otro material de consulta durante el desarrollo de la prueba, ni el uso de otros dispositivos electrónicos (celulares, tablets, laptops, iPods, etc.). Cualquier material relativo al curso, así como celulares y dispositivos electrónicos, deben permanecer guardados durante la prueba.

Problema 1 (10 puntos)

a) Sea $X \in R^3$ v.a. con vector de medias $\mu_X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y matriz de varianza-covarianza $\Sigma_X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Sean las variables aleatorias $Y_1 = X_1 - X_3$; $Y_2 = X_2 - X_3$; $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$. Si definimos $Y \in R^3$ como $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^T$, halle μ_Y y Σ_Y. ¿Cómo se relacionan las componentes Y_1 e Y_3 de Y? ¿Cuán grande o fuerte es la relación? Justifique su respuesta. (6p.)

Solución:
Escribiendo las componentes de $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ como un sistema de ecuaciones lineales:

$$Y_{3\times1} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1X_1 + 0X_2 - 1X_3 \\ 0X_1 + 1X_2 - 1X_3 \\ 1X_1 + 1X_2 + 1X_3 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A_{3\times3}} \overbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}}^{X_{3\times1}} = A_{3\times3}X_{3\times1} \Rightarrow \mu_Y = A\mu_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma_Y = A\Sigma_X A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 11 \\ 4 & 11 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma_Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 11 \\ 4 & 11 & 18 \end{pmatrix}$$

Para la relación entre Y_1 e Y_3 basta ver que $Cov(Y_1, Y_3) \equiv \sigma_{Y_1Y_3} = 4 > 0$, hay una relación lineal directa entre Y_1 e Y_3.
Y para medir la fuerza o grado de la relación, hay que ver la "magnitud" de la correlación $|\rho_{Y_1Y_3}| = |\frac{\sigma_{Y_1Y_3}}{\sigma_{Y_3}\sigma_{Y_3}}| = \frac{4}{\sqrt{7}\sqrt{18}} = 0.35 < 0.8$; hay relación lineal directa pero no es "fuerte"

b) Sea $X = (X_1, X_2)$ v.a. con vector de medias $\mu_X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y matriz de varianza-covarianza $\Sigma_X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Si definimos $W = a_1X_1 + a_2X_2$, donde a_1 y a_2 son constantes por determinar, halle a_1 y a_2 tales que $E(W) = 2$ y la varianza $V(W)$ sea mínima. (4p.)

Solución:
Primero aplicamos la propiedad general:
$W = a_1X_1 + a_2X_2 \Rightarrow E(W) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2)$ y $V(W) = a_1^2V(X_1) + a_2^2V(X_2) + 2a_1a_2Cov(X_1, X_2)$.

$W = a_1X_1 + a_2X_2 \Rightarrow E(W) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) = 2a_1 + 2a_2 = 2 \Rightarrow a_1 + a_2 = 1$
y
$V(W) = a_1^2V(X_1) + a_2^2V(X_2) + 2a_1a_2Cov(X_1, X_2) = 4a_1^2 + 4a_2^2$, pues $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{X_1X_2} = 0$.

Tenemos que resolver el problema de optimización:
$Mín\ 4a_1^2 + 4a_2^2\ \ s.a.\ a_1 + a_2 = 1$ y como $4a_1^2 + 4a_2^2 = 4(a_1^2 + a_2^2)$, minimizar el producto $4(a_1^2 + a_2^2)$ equivale a minimizar $(a_1^2 + a_2^2)$ así que nuestro problema es $Mín\ a_1^2 + a_2^2\ \ s.a.\ a_1 + a_2 = 1$, que se puede resolver aplicando Multiplicadores de Lagrange: $L(a_1, a_2, \lambda) = a_1^2 + a_2^2 + \lambda(1 - a_1 - a_2)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a_1} = \ \ 2a_1 - \lambda \quad = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial a_2} = \ \ 2a_2 - \lambda \quad = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda/2 \\ a_2 = \lambda/2 \\ 1 - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \Rightarrow \\ a_1 = a_2 = 1/2 \end{cases}$$ son los valores críticos. Asumiendo el mínimo (para no usar el Hessiano orlado), los valores óptimos son $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ y $W = \frac{X_1+X_2}{2}$.

Problema 2 (10 puntos)

a) Suponga que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es vector de n v.a. independientes, cada una con distribución uniforme: $U(x_i; 0, \theta)$. Sea $Y = Mín\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Halle $P(Y > t)$ donde t es valor fijo en $]0, \theta]$ y luego halle la función de distribución acumulativa $G_Y(y)$ de Y y $E(Y)$. Recuerde que $G_Y(y) = P(Y \le y) \quad 0 < y \le \theta$. (5p.)

Solución:

- $P(Y > t) = P(Mín\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > t) = P[(X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap \ldots \cap (X_n > t)] \overset{\{X_i\}\ indep.}{\hat{=}}$ $P(X_1 > t) \times P(X_2 > t) \times \ldots \times P(X_n > t)$. Como $X_i \sim U(x_i; 0, \theta) \Rightarrow f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\theta} \quad 0 < x_i \le \theta \Rightarrow$ $P(X_i > t) = \int_t^\theta \frac{1}{\theta} dx_i = \frac{\theta - t}{\theta} \Rightarrow P(Y > t) = \left(\frac{\theta-t}{\theta}\right) \times \left(\frac{\theta-t}{\theta}\right) \times \ldots \times \left(\frac{\theta-t}{\theta}\right) = \left(\frac{\theta-t}{\theta}\right)^n$.

- $G_Y(y) = P(Y \le y) = 1 - P(Y > y) = 1 - \left(\frac{\theta-y}{\theta}\right)^n \quad 0 < y \le \theta$

- Para $E(Y) = \int_0^\theta y g_Y(y)$, necesitamos $g_Y(y)$:

$$g_Y(y) = \frac{d}{dy} G_Y(y) = -n\left(\frac{\theta - y}{\theta}\right)^{n-1} \times \frac{1}{\theta} = \frac{n}{\theta^n}(\theta - y)^{n-1} \Rightarrow g_Y(y) = \frac{n}{\theta^n}(\theta - y)^{n-1} \quad 0 < y \le \theta \Rightarrow$$
$$E(Y) = \int_0^\theta y \frac{n}{\theta^n}(\theta - y)^{n-1} dy = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y(\theta - y)^{n-1} dy.$$

Para $\int_0^\theta y(\theta - y)^{n-1} dy$:
sea $w = \theta - y \Rightarrow (y = \theta - w); (dw = -dy); (y = 0 \Rightarrow w = \theta); (\ y = \theta \Rightarrow w = 0) \Rightarrow$

$$\int_0^\theta y(\theta - y)^{n-1} dy = \int_\theta^0 (\theta - w) w^{n-1}(-dw) = \int_\theta^0 (w - \theta) w^{n-1} dw = \int_\theta^0 w^n dw - \theta \int_\theta^0 w^{n-1} dw =$$
$$\left[\frac{w^{n+1}}{n+1}\right]_\theta^0 - \theta\left[\frac{w^n}{n}\right]_\theta^0 = \left(-\frac{\theta^{n+1}}{n+1}\right) - \theta\left(-\frac{\theta^n}{n}\right) = \left(\frac{\theta^{n+1}}{n}\right) - \left(\frac{\theta^{n+1}}{n+1}\right) = \left(\frac{\theta^{n+1}}{n(n+1)}\right) \Rightarrow$$

$$E(Y) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y(\theta - y)^{n-1} dy = \frac{n}{\theta^n}\left(\frac{\theta^{n+1}}{n(n+1)}\right) = \frac{\theta}{n+1}$$

b) Si X, Y, U y V son v. a. aleatorias y a, b, c y d son constantes, use la definición de covarianza y propiedades del valor esperado para demostrar que:
$Cov(aX + bY, cU + dV) = acCov(X, U) + adCov(X, V) + bcCov(Y, U) + bdCov(Y, V)$. (3p.)

Solución:
Es más sencillo probarlo por partes, para ello definamos $T \coloneqq aX + bY$ y $W := cU + dV$. En este contexto es claro que $Cov(aX + bY, cU + dV) = Cov(T, W)$. Veamos:

Primero:
$Cov(T, W) = Cov(T, cU + dV) = E\big[\big(T - E(T)\big)\big(cU + dV - E(cU + dV)\big)\big] =$
$E\big[(T - \mu_T)\big(cU + dV - cE(U) - dE(V)\big)\big] = E\big[(T - \mu_T)\big(cU - cE(U) + dV - dE(V)\big)\big] =$
$E\left[(T - \mu_T)\Big(c\big(U - E(U)\big) + d\big(V - E(V)\big)\Big)\right] = E[c(T - \mu_T)(U - \mu_U) + d(T - \mu_T)(V - \mu_V)] =$
$E[c(T - \mu_T)(U - \mu_U)] + E[d(T - \mu_T)(V - \mu_V)] = cCov(T, U) + dCov(T, V)$.

Por analogía válida:
$Cov(T, U) = Cov(aX + bY, U) = aCov(X, U) + bCov(Y, U)$
$Cov(T, V) = Cov(aX + bY, V) = aCov(X, V) + bCov(Y, V)$

Finalmente:
$Cov(aX + bY, cU + dV) = Cov(T, W) = cCov(T, U) + dCov(T, V) =$
$c\big(aCov(X, U) + bCov(Y, U)\big) + d\big(aCov(X, V) + bCov(Y, V)\big) =$
$acCov(X, U) + bcCov(Y, U) + adCov(X, V) + dbCov(Y, V) \Rightarrow$
$Cov(aX + bY, cU + dV) = acCov(X, U) + adCov(X, V) + bcCov(Y, U) + dbCov(Y, V)$

c) Sea (X, Y) v.a. y sean $Z = aX$ donde a es constante positiva y $T = b + dY$, donde b es constante y d constante negativa. Pruebe que $\rho_{ZT} = -\rho_{XY}$. (2p.) (Puede aplicar libremente la propiedad vista en b), si le resulta útil)

Solución:

$\sigma_{ZT} = Cov(Z, T) = Cov(Z, b + dY) = \overbrace{Cov(Z, b)}^{0} + dCov(Z, Y) = dCov(aX, Y) = adCov(X, Y) = ad\sigma_{XY}$
$\sigma_Z^2 = V(Z) = E\left[\big(Z - E(Z)\big)^2\right] = E\left[\big(aX - E(aX)\big)^2\right] = E\left[\big(aX - aE(X)\big)^2\right] = E\left[a^2\big(X - E(X)\big)^2\right] =$
$a^2 E\left[\big(X - E(X)\big)^2\right] = a^2\sigma_X^2 \Rightarrow \sigma_Z = a\sigma_X$;
$\sigma_T^2 = V(T) = E\left[\big(T - E(T)\big)^2\right] = E\left[\big(b + dY - E(b + dY)\big)^2\right] = E\left[\big(dY - dE(Y)\big)^2\right] = E\left[d^2\big(Y - E(Y)\big)^2\right] =$
$d^2 E\left[\big(Y - E(Y)\big)^2\right] = d^2\sigma_Y^2 \Rightarrow \sigma_T = |d|\sigma_Y = -d\sigma_Y$ $(d < 0 \Rightarrow |d| = -d)$
$\rho_{ZT} = \dfrac{\sigma_{ZT}}{\sigma_Z\sigma_T} = \dfrac{adCov(X, Y)}{a\sigma_X(-d\sigma_Y)} = \dfrac{ad\sigma_{XY}}{a\sigma_X(-d\sigma_Y)} = \dfrac{\sigma_{XY}}{-\sigma_X\sigma_Y} = -\rho_{XY}$

ACG./SAMP.