PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
PRÁCTICA CALIFICADA 3

3 de octubre de 2015
Horario 522
Clave del curso: EST241

Ejercicio 1. (4 puntos)

El modelo probabilístico de Pareto se caracteriza por la función de densidad de la forma siguiente:

$F_{X_n}(x) = F_{X_i}^n(x)$

$$f(x) = \frac{\theta\, x_0^\theta}{x^{\theta+1}}\,,\ x > x_0,$$

donde $\theta > 0$ y $x_0 > 0$ son los parámetros del modelo. Si X tiene este modelo probabilístico, denotamos esto por $X \sim Pa(x_0;\, \theta)$.

$F_{X_1}(x) = 1-[1-F_{X_i}(x)]^n$
$= 1-\left[1-\left(1-\frac{X_0^\theta}{X^\theta}\right)\right]^n$
$= 1-\left(\frac{X_0^\theta}{X^\theta}\right)^n \rightarrow f(x) = -\frac{n\theta X_0^{\theta-1}}{X^\theta}$

Observe que la función de distribución acumulada está dada por

$$F(x) = 1 - \frac{x_0^\theta}{x^\theta}\,,\ x > x_0.$$

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Determine y, de ser posible, identifique el modelo probabilístico de $X_{(1)}$, si $X_1 \sim Pa(x_0;\, \theta)$.

Ejercicio 2. (4 puntos)

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes, $X \sim exp(\alpha)$ e $Y \sim exp(\beta)$. Determine y, de ser posible, identifique la distribución de $V := \frac{X}{X+Y}$. Primero use el método del jacobiano para hallar la función de densidad conjunta de V y W, donde $W = X$.

$VX + VY = X$
$VW + VY = W$

Ejercicio 3. (5 puntos)

La distribución conjunta del vector $(X,\, Y,\, Z)^t$ es normal tri-variada con vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas:

$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

$$\mu = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$\mu_Y = B\mu_X \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times3}\begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}_{3\times1} = \begin{pmatrix} 40+60+80 \\ 80-60-80 \\ 60-80 \end{pmatrix}$

respectivamente. Considere las variables $U = X + Y + Z$, $V = 2X - Y - Z$ y $W = Y - Z$

a) Exprese en términos de matrices el vector aleatorio $(U,\, V,\, W)^t$ en función de $(X,\, Y,\, Z)^t$. A partir de dicha expresión determine el vector de medias, la matriz de varianza covarianza y la distribución de $(U,\, V,\, W)^t$. (3,5 puntos) $\Sigma_Y = B\Sigma_X B^t$

b) Las variables originales X, Y y Z no son independientes, ¿lo son las variables U, V y W? Justifique. (1,5 puntos)

Ejercicio 4. (7 puntos)

Considere el modelo de regresión lineal sin intercepto: $Y_j = \beta_1 + \beta_2 x_j + \epsilon_j$, para $j = 1, \ldots, n$, donde $x_1, \ldots, x_n$ son constantes conocidas, β_1 y β_2 son parámetros para estimar y los errores $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ son variables aleatorias independientes, distribuidas normalmente, $E(\epsilon_j) = 0$ y $V(\epsilon_j) = \sigma^2$, para $j = 1, \ldots, n$.

a) Determine el vector de medias y la matriz de varianza-covarianza del vector aleatorio $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$. (2 puntos)

b) Considere los estimadores

$$\hat{\beta}_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j Y_j \text{ y } \hat{\beta}_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j,$$

$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}_{2\times n}$

donde $b_j = \dfrac{x_j - \bar{X}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}$ y $a_j = \dfrac{1}{n} - b_j \bar{X}$, $j = 1, \ldots, n$.

Determine el vector de medias, la matriz de varianza-covarianza y la distribución del vector aleatorio $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^t$, mediante propiedades matriciales del valor esperado y de la varianza. Para esto exprese $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^t$ en la forma BY, donde $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$. Obtenga expresiones simplificadas. (4 puntos)

c) Determine la esperanza de $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$, donde x es una constante. Para esto debe considerar que $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x = (1\ x)(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^t$ y resultados de la parte anterior. (1 punto)

$E(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X) = E(\hat{\beta}_1) + X E(\hat{\beta}_2)$

$E\left(x \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} E\hat{\beta}_1 \\ E\hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$

Recordatorio

$Y_{m\times 1} = \mathrm{A} + \mathrm{B}X \Rightarrow \mu_Y = \mathrm{A} + \mathrm{B}\mu_X$ y $\Sigma_Y = \mathrm{B}\Sigma_X \mathrm{B}^t$.

$X_{n\times 1} \sim N_n(\mu; \Sigma) \Rightarrow Y = A_{m\times 1} + B_{m\times n}X \sim N_m(\mu_Y; \Sigma_Y)$, $m \le n$.

Sean X e Y variables aleatorias continuas. Si W y Z son tales que $X = h_1(W, Z)$ e $Y = h_2(W, Z)$; entonces, $f_{W,Z}(w, z) = f_{X,Y}(h_1(w, z), h_2(w, z))\,|\det(J)|$, $\forall (w, z) \in \mathbb{R}^2$, donde $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(w,z)}{\partial w} & \frac{\partial h_1(w,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial h_2(w,z)}{\partial w} & \frac{\partial h_2(w,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$.

Si $X_1, \ldots, X_n$ son idénticamente distribuidas; entonces, $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - F_{X_1}(x)]^n$.

Si $X \sim exp(\beta)$: $f(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x > 0$; $E(X) = 1/\beta$, donde $\beta > 0$.

J.F. San Miguel, 3 de octubre de 2015.