PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

PRÁCTICA CALIFICADA 5
CURSO: EST 241 Estadística Inferencial. HORARIO: 0621. PROFESOR: Arturo Calderón G.
FECHA: 22 de junio de 2019. SEMESTRE: 2019-1. DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 horas.

Salvo formulario y calculadora, no está permitido el uso de otro material de consulta durante el desarrollo de la prueba, ni el uso de otros dispositivos electrónicos (celulares, tablets, laptops, iPods, etc.). Cualquier material <u>relativo al curso, así como celulares y dispositivos electrónicos, deben permanecer guardados durante la prueba.</u>

Problema 1 (8 puntos)

a) Si $X \sim N(0,2)$ e $Y \sim N(0,4)$ son independientes, halle valores a y c tal que $P(aX^2 + Y^2 \leq c) = 0.95$ (2p.)

b) Si $X \sim N(0,\sigma^2)$ e $Y \sim N(0,\sigma^2)$ son independientes, use la función generatriz de momentos y pruebe que $D = (X - Y)$ tiene distribución normal. Si definimos $U = c(X-Y)^2$, halle c tal que U tenga distribución $\chi^2(k)$ e indique el valor de k (2p.)

c) Si $X \sim N(0,16)$ y se toma una m.a. de tamaño 12. Halle b de modo que $F = b\frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{S^2}$ tenga distribución F de Fisher, si la primera sumatoria se hace sobre las 4 primeras observaciones y S^2 es la varianza del resto. (2p.)

d) Si $X \sim N(0,16)$ y se toma una m.a. de tamaño 12, halle c tal que $U = c\bar{X}/S$ tenga distribución t-Student. (2p.)

Solución:

a) Estandarizando primero, tenemos: $\boldsymbol{Z_1 = X/\sqrt{2} \sim N(0,1)}$) y $Z_2 = Y/2 \sim N(0,1)$. Sean ahora, $W_1 \coloneqq Z_1^2 = X^2/2$ y $W_2 \coloneqq Z_2^2 = Y^2/4$. Se deduce que $W_1 \sim \chi^2(1)$ y que $W_2 \sim \chi^2(1)$ también. Por tanto, con toda seguridad, $(W_1 + W_2) = (X^2/2) + (Y^2/4) \sim \chi^2(2)$. Aplicando lo anterior a los datos:
$\boldsymbol{0.95 = P(aX^2 + Y^2 \leq c) = P((aX^2/4) + (Y^2/4)) \leq c/4) = P(\frac{a}{2}W_1 + W_2 \leq c/4)}$. Si tomamos $a = 2$ llegamos a $\boldsymbol{0.95 = P(W_1 + W_2 \leq c/4)}$ y de la tabla Ji-Cuadrado, con $k = 2$ grados de libertad, tenemos $c/4 = \chi^2_{0.95} = 5.99$. Por tanto $a = 2\ y\ c = 4 \times 5.99 = 23.96$ es la respuesta.

b) $M_D(t) = E(e^{tD}) = E\left(e^{t(X-Y)}\right) = E(e^{tX} \times e^{-tY}) \overset{(1)}{=} E(e^{tX}) \times E(e^{-tY}) = M_X(t) \times M_Y(-t) \overset{(2)}{=}$ $\left(e^{t0+\frac{t^2}{2}\sigma^2}\right)\left(e^{t(-0)+\frac{t^2}{2}\sigma^2}\right) = \left(e^{t0+\frac{t^2}{2}(2\sigma^2)}\right) \Rightarrow M_D(t) = e^{t0+\frac{t^2}{2}(2\sigma^2)}$ corresponde a la F.G.M. de una distribución $N(0,2\sigma^2) \Rightarrow D \sim N(0,2\sigma^2)$

(1) $X\ e\ Y$ son independientes; (2) $\forall\ v.a. W: W \sim N(\mu,\sigma^2) \Leftrightarrow M_W(l) = e^{l\mu+\frac{l^2}{2}\sigma^2}$

c) $X \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 16); n = 12$ y $F = b\frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{S^2}$. Para que sea una variable F debe ser el cociente de dos χ^2 divididas entre sus grados de libertad, demos a F ese tipo de estructura:

$Z_j = \frac{X_j}{4} \sim N(0,1) \Rightarrow {Z_j}^2 = \frac{X_j^2}{16} \sim \chi^2(k=1)$ y sumando: $\sum_{j=1}^4 \left(\frac{X_j^2}{16}\right) = \left(\frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{16}\right) \sim \chi^2(k=4)$.

S^2 es la varianza de las $n - 4 = (12-4) = 8$ observaciones restantes $\Rightarrow W = \frac{(8-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{7S^2}{16} \sim \chi^2(k=7)$.

Con toda seguridad $F = \frac{\frac{\left(\frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{16}\right)}{4}}{\frac{\frac{7S^2}{16}}{7}} = \frac{\frac{\frac{1}{16}\left(\sum_{j=1}^4 X_j^2\right)}{4}}{\frac{S^2}{16}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{S^2}\right) \sim F(k_1 = 4, k_2 = 7)$ y comparando con $b\frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{S^2}$ se tiene que $b = \frac{1}{4}$.

d) Si $X \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 16); n = 12$ y sabemos por teoría que en general, para una m.a. de tamaño n $t \coloneqq \frac{(\bar{X}-\mu)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(k = n-1)$ que en este caso es $t \coloneqq \frac{\bar{X}}{\frac{S}{\sqrt{12}}} \sim t(k=11)$ y comparando con $U = c\bar{X}/S$ vemos que $c = \sqrt{12}$ es la constante que hace que $U = c\bar{X}/S$ tenga distribución t-Student.

Problema 2 (12 puntos)

a) Si $X \sim U(x;\ \theta - p, \theta + p)$, halle los estimadores de momentos de θ y p. ¿Es insesgado $\hat{\theta}$? Estudie la consistencia de $\hat{\theta}$ y $\hat{p}$. (4p.)

b) Sea $X \sim N(0, \sigma^2)$, halle el estimador de momentos de σ^2y compárelo con S^2 como estimador de σ^2 en cuanto a insesgamiento y eficiencia. Recuerde que en el muestreo de una distribución normal $S^2 \sim \Gamma(\alpha = \frac{n-1}{2}, \beta = \frac{2\sigma^2}{n-1})$ y que en general $Z^2 = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$. (4p.)

c) En un modelo econométrico se escribe el consumo mensual $\boldsymbol{C_i}$ de la i-ésima familia de una muestra aleatoria de n familias, como función de su ingreso mensual disponible y_i, que es dado y fijo, en un modelo de datos de la forma $\boldsymbol{C_i} \sim N(\boldsymbol{\beta_1} y_i, \sigma^2 = y_i)$; $\boldsymbol{\beta_1 > 0}$, generando la m.a. de n parejas (C_1, y_1), (C_2, y_2),…, (C_n, y_n). En este contexto, halle el MELI del parámetro $\boldsymbol{\beta_1}$ y compárelo con otro estimador de $\boldsymbol{\beta_1}$ dado por $\widetilde{\boldsymbol{\beta_1}} = \frac{C_n - C_1}{y_n - y_1}$**.** (4p.)

Solución:

a) $X \sim U(x;\ \theta - p, \theta + p)$, son dos parámetros por estimar, necesitamos dos ecuaciones. Empezamos con los dos primeros momentos poblacionales. Como se trata de una distribución uniforme $U(x; \alpha = \theta - p, \beta = \theta - p)$, podemos escribir las ecuaciones estructurales:

$$m_1 = E(X) = \frac{(\theta - p) + (\theta + p)}{2} = \theta$$

$$m_2 = E(X^2) = \sigma^2 + (\mu)^2 = \frac{\left((\theta + p) - (\theta - p)\right)^2}{12} + \theta^2 = \frac{(2p)^2}{12} + \theta^2 = \frac{p^2}{3} + \theta^2$$

$$\begin{cases} m_1 = E(X) = \theta \\ m_2 = E(X^2) = \dfrac{p^2}{3} + \theta^2 \end{cases}$$

Pasamos a las ecuaciones de estimación reemplazando parámetros por estimadores, donde $\widehat{m_1} = M_1 = \bar{X}$ y $\widehat{m_2} = M_2 = \frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n}$:

$$\begin{cases} \widehat{m_1} = M_1 \\ \widehat{m_2} = M_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{X} = \hat{\theta} \\ \frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n} = \frac{\hat{p}^2}{3} + \hat{\theta}^2 \end{cases}$$ Resolviendo el sistema tenemos los estimadores de momentos:

$$\hat{\theta} = \bar{X} \text{ y } \hat{p} = \sqrt{3\left(\frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n} - \hat{\theta}^2\right)} = \sqrt{3\left(\frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n} - \bar{X}^2\right)}$$

Insesgadez de $\hat{\theta}$: $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X}) = \mu = \theta$; en efecto $\hat{\theta}$ es estimador insesgado de θ.

Consistencia de $\hat{\theta}$ y $\hat{p}$: Aquí es más práctico usar el operador Límite en probabilidad $Plim$ y el Teorema de Slutsky, recordando además que, en general, $Plim(M_k) = m_k = E(X^k)$, según se vió en la teoría del curso:

$Plim(\hat{\theta}) = Plim(\bar{X}) = \mu = \theta \Rightarrow \hat{\theta}$ es estimador consistente de θ.

$$Plim(\hat{p}) = Plim\sqrt{3\left(\frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n} - \bar{X}^2\right)} = \sqrt{3\left(Plim\left(\frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n}\right) - Plim\bar{X}^2\right)} = \sqrt{3(Plim(M_2) - Plim(\bar{X})^2)} =$$

$\sqrt{3(m_2 - (Plim\bar{X})^2)} = \sqrt{3(m_2 - \theta^2)} = \sqrt{3\left(\frac{p^2}{3} + \theta^2 - \theta^2\right)} = \sqrt{3\left(\frac{p^2}{3}\right)} = p \Rightarrow \hat{p}$ es estimador consistente de p

b) $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow m_1 = E(X) = 0$, esta ecuación no sirve, pasamos a $m_2 = E(X^2) = \sigma^2 + (\mu)^2 = \sigma^2$ que sí es útil $\widehat{m_2} = M_2 = \frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n} = \widehat{\sigma^2} \Rightarrow \widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n}$ es el estimador de momentos buscado.

Pasamos a comparar con S^2, del cual ya sabemos, por la teoría del curso, que $E(S^2) = \sigma^2$ y $V(S^2) = \frac{2\sigma^2}{n-1}$

$E(\widehat{\sigma^2}) = E\left(\frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)E(\sum_{j=1}^n X_j^2) = \left(\frac{1}{n}\right)(\sum_{j=1}^n E(X_j^2)) = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^n \sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\right)n\sigma^2 = \sigma^2$. El estimador de momentos también es insesgado. Pasamos a estudiar la eficiencia, comparando varianzas:

$$V(\widehat{\sigma^2}) = V\left(\frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^2}\right)V\left(\sum_{j=1}^n X_j^2\right) = \left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{j=1}^n V(X_j^2)\right) = \left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_{j=1}^n V(X^2) = \left(\frac{1}{n^2}\right)nV(X^2) = \frac{V(X^2)}{n}$$

Falta hallar $V(X^2)$. Para ello aplicaremos la distribución Chi[2]:

$X \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 = \frac{X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(k=1)$. Por teoría sabemos que $\chi^2(k)$ es un caso particular de la distribución Gamma, esto es, $\chi^2(k) \equiv \Gamma\left(w; \alpha = \frac{k}{2}, \beta = 2\right) \Rightarrow E(W) = k, V(W) = 2k$ y en este caso $k = 1$ de modo que $V(Z^2) = 2$ y como $Z^2 = \frac{X^2}{\sigma^2} \Rightarrow 2 = V(Z^2) = V\left(\frac{X^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^4}V\left(X^2\right) \Rightarrow V\left(X^2\right) = 2\sigma^4 \Rightarrow V\left(\widehat{\sigma^2}\right) = \frac{2\sigma^4}{n}$.
Regresando a la eficiencia:

$V(\widehat{\sigma^2}) = \frac{2\sigma^4}{n} < \frac{2\sigma^2}{n-1} =$ y $V(S^2)$, de modo que el estimador de momentos $\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n}$, en este caso, es más eficiente que S^2 como estimador de σ^2.

c) La muestra de *n* observaciones es una muestra de *n* parejas donde los ingresos y_i no son aleatorios $(C_1, y_1), (C_2, y_2), \ldots, (C_n, y_n)$ pero los consumos $\boldsymbol{C_i} \sim N(\boldsymbol{\beta_1} y_i, \sigma^2 = y_i)$ sí lo son, siendo v.a. independientes aunque ya no con distribución idéntica, en particular del dato $\boldsymbol{C_i} \sim N(\boldsymbol{\beta_1} y_i, \sigma^2 = y_i)$ se tiene que $E(\boldsymbol{C_i}) = \boldsymbol{\beta_1} y_i$ y también que $V(\boldsymbol{C_i}) = y_i$.

Sea $\widehat{\boldsymbol{\beta_1}}$ el tal MELI de $\boldsymbol{\beta_1}$, entonces:

(1) $\widehat{\boldsymbol{\beta_1}}$ debe ser función lineal de la muestra (en verdad, función de la "parte aleatoria" C_i de la muestra de parejas $(C_i, y_i)) \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{\beta_1}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$ donde los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las incógnitas por hallar.

(2) $\widehat{\boldsymbol{\beta_1}}$ debe ser estimador *insesgado* del parámetro $\Rightarrow E(\widehat{\boldsymbol{\beta_1}}) = \boldsymbol{\beta_1} \Rightarrow E(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(C_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{\beta_1} y_i = \boldsymbol{\beta_1} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = \boldsymbol{\beta_1} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 1$ es la restricción con "condición de insesgamiento" que deben satisfacer los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ del MELI.

(3) $\widehat{\boldsymbol{\beta_1}}$ debe ser más eficiente que cualquier otro estimador que sea *lineal e insesgado*, o sea que debe tener varianza mínima dentro del conjunto de estimadores *lineales e insesgados*. Esto se consigue tomando los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de modo que minimicen $V(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i)$ *sujetos* a la restricción $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 1$.

Como $V(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 V(C_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 y_i$, entonces la función objetivo (por minimizar) genera el problema:

$\underset{\alpha_i}{\text{Mín}} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 y_i$ $s.a.$ $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 1$; que se puede resolver aplicando Lagrange:

$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \lambda) = \underset{\alpha_i}{\text{Min}} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 y_i + \lambda(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = 2\alpha_k y_k - \lambda y_k = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \end{cases}$ y resolviendo estas $(n+1)$ ecuaciones:

$2\alpha_k y_k - \lambda y_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = \frac{\lambda}{2}$ $k = 1,2,\ldots,n$ y en la última ecuación
$1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\lambda}{2} y_i = 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^n y_i = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\sum_{i=1}^n y_i} \Rightarrow \alpha_i = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n y_i}$ y

resulta $\widehat{\boldsymbol{\beta_1}}_{MELI} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n y_i}\right) C_i = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\sum_{i=1}^n C_i = \frac{\sum_{i=1}^n C_i}{\sum_{i=1}^n y_i}$.
Para comparar con $\widetilde{\boldsymbol{\beta_1}} = \frac{C_n - C_1}{y_n - y_1}$, primero veamos el insesgamiento: $\widehat{\boldsymbol{\beta_1}}_{MELI} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i}{\sum_{i=1}^n y_i}$ es insesgado por construcción;
$E(\widetilde{\boldsymbol{\beta_1}}) = E\left(\frac{C_n - C_1}{y_n - y_1}\right) = \frac{1}{y_n - y_1}E(C_n - C_1) = \frac{1}{y_n - y_1}(\boldsymbol{\beta_1} y_n - \boldsymbol{\beta_1} y_1) = \boldsymbol{\beta_1}$, pues según el enunciado, el ingreso y_i es dado y fijo para cada familia y $E(\boldsymbol{C_i}) = \boldsymbol{\beta_1} y_i$, o sea $\widetilde{\boldsymbol{\beta_1}}$ también es insesgado. Como ambos estimadores

son insesgados, pasamos a estudiar la eficiencia, o sea a comparar varianzas. Como$\widetilde{\boldsymbol{\beta_1}} = \frac{C_n - C_1}{y_n - y_1}$ también es estimador lineal, pues $\widetilde{\boldsymbol{\beta_1}} = \left(\frac{1}{y_n - y_1}\right) C_n - \left(\frac{1}{y_n - y_1}\right) C_1$, y es insesgado según ya probamos, entonces, por <u>construcción, tiene mayor varianza</u> que $\widehat{\boldsymbol{\beta_1}}_{MELI}$. Por tanto $\widehat{\boldsymbol{\beta_1}}_{MELI}$ es más eficiente, es mejor estimador.