PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

PRÁCTICA DIRIGIDA No. 1
CURSO: **EST 241 Estadística Inferencial**
PROFESOR: **Arturo Calderón G.**
HORARIO: **0621**
FECHA: **06 de abril de 2019**
SEMESTRE: **2019-1**

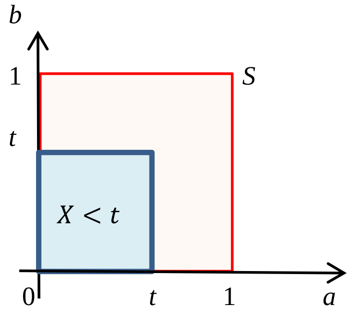
Los problemas del 1 a 4 serán tratados durante la práctica. El resto es para el trabajo personal del alumno.

Problema 1

a) Dos proveedores de insumos se presentan a un concurso, ofreciendo precios unitarios a y b respectivamente, de los cuáles sólo se sabe que son menores que 1 u.m. Sin más información, halle una fórmula general para $P(X<t)$ donde X es el valor del precio perdedor y t es un valor cualquiera en el rango de posibles ofertas de precios presentados en el concurso. Halle la función de densidad $f_X(x)$ de X y $P(X>\mu_x)$ ¿Ocurriría este evento?

Solución:

El experimento aleatorio ε es abrir los sobres con las ofertas de precios de precios y registralos. Eso equivale a



"Tomar un punto al azar del cuadrado de lado 1 y vértice en (0,0)" de modo que el espacio muestral S puede ser $S=\{(a,b)|0<a\leq 1, 0<b\leq 1\}$ que tiene área y podemos aplicar probabilidad geométrica.
Como $X=Precio\ perdedor \Rightarrow X=Máx\{a,b\}$ pues se está comprando el producto. Es claro que $R_X=]0,1]$ y si $t\in R_X$ es un punto fijo del rango de X: $P(X<t)=P(Máx\{a,b\}<t)=P[(a<t)\cap(b<t)]=t\times t=t^2$ ⇒es la probabilidad pedida ya que $Área(S)=1$ y $Área(X<t)=t\times t=t^2 \Rightarrow F_X(t)=P(X\leq t)=t^2$ (en este caso $(X\leq t)$ o $(X<t)$ tienen la misma probabilidad pues se diferencian en un punto de probabilidad cero. Luego $f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=2x\ \ 0<x\leq 1$ es una función de densidad para X y $\mu_x=\int_0^1 xf_X(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\left[2\frac{x^3}{3}\right]_0^1=0.67 \Rightarrow P(X>\mu_x)=1-F_X(\mu_x)=1-0.67^2=0.5511>0.5 \Rightarrow$ Sí ocurrirá el evento.

b) En un estudio se aplicó una encuesta a una muestra de 150 empresarios participantes de un congreso anual de ejecutivos, registrando su opinión acerca de ciertos aspectos de la economía y sus perspectivas de inversión. Una de las tablas de resultados de la encuesta fue:

	Seguirá invirtiendo		Detendrá sus inversiones		
	Tipo de empresa		Tipo de empresa		
¿Cambiará el ministro de economía?	PYME	No PYME	PYME	No PYME	Total
No	47	67	3	8	125
Sí	4	5	3	13	25
Total	51	72	6	21	150

Usando las frecuencias anteriores para calcular probabilidades, conteste las siguientes preguntas:
(1) ¿Dónde hay mayor probabilidad de detención de inversiones: en PYMES o en No PYMES?
(2) Dado que un empresario No PYME le manifiesta su convicción de que cambiarán al ministro de economía ¿Qué probabilidad le asigna de detener sus inversiones?
(3) ¿Cuál tipo de empresario tiene decisiones de inversión más sensibles al posible cambio de ministro?

Solución:

(1) Si D = "Detiene inversiones", se pide comparar $P(D|PYME)\ vs\ P(D|No\ PYME)$. En este caso es más sencillo calcular probabilidades condicionales "reduciendo" el espacio muestral, o sea quitando los elementos que no están en el respectivo "evento condicionante": En el caso de *PYME*: $P(D|PYME)=\frac{n(D\cap PYME)}{n(PYME)}=\frac{6}{(51+6)}=0.11$; con *No PYME* se procede análogamente: $P(D|No\ PYME)=\frac{n(D\cap No\ PYME)}{n(No\ PYME)}=\frac{21}{(72+21)}=0.23$
En general las probabilidades de detención de inversiones son bajas, aunque ésta es mayor dentro de los empresarios *No PYME*

(2) Si C = "Cree que sí cambiará el ministro de economía", se pregunta por $(D|NoPYME\cap C)=\frac{13}{5+13}=0.72$

(3) Hay que hacer cálculo de probabilidades condicionales de detención de inversiones por separado en cada grupo, PYMES y No PYMES según la creencia de cambio de ministro: cuánto más cercana a uno, más "sensibilidad" al posible cambio de ministro.

$P(D|NoPYME \cap C) = 0.72$ ya se calculó antes, falta $P(D|PYME \cap C)$ que es $P(D|PYME \cap C) = \frac{3}{4+3} = 0.43$;

Los empresarios *No PYME* son más "sensibles" a la posibilidad de cambio de ministro de economía, en ellos es casi seguro que detendrán sus inversiones (la probabilidad es $0.72 > 0.5$) en cambio, en los PYME podemos pronosticar que no detendrán sus inversiones (probabilidad de $0.43 < 0.5$).

Problema 2

a) En una etapa de un muestreo se desea seleccionar dos viviendas para una encuesta y se tiene dos cuadras: En la cuadra #1 hay treinta viviendas y en la #2 hay diez. Un muestrista selecciona una cuadra al azar y ya dentro de ella, selecciona al azar dos viviendas. ¿Qué probabilidad de integrar la muestra tiene una vivienda cualquiera?

Solución:

Sea v una vivienda específica del conjunto de viviendas y definamos B = "v es parte de la muestra" y A = "Se selecciona la cuadra #1 para tomar la muestra de viviendas". Entonces $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C) = P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)$. Del enunciado $P(A) = P(A^C) = \frac{1}{2}$, mientras que $P(B|A) = \frac{C_1^{29}}{C_2^{30}} = \frac{1}{15}$; $P(B|A^C) = \frac{C_1^{9}}{C_2^{10}} = \frac{1}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = 0.13$

b) Un agente de AFP visita sucesivos trabajadores hasta que logra su segundo afiliado. El agente estima que en una visita cualquiera tiene el triple de probabilidades de ver rechazada su propuesta de afiliación a que ésta sea aceptada y cuenta el número X de visitas hasta que alcanza su meta. Halle la probabilidad de que en una visita cualquiera logre afiliar a un trabajador. Halle la función de probabilidad $P_X(x)$ de X.

Solución:

$p = P(Acepta\ afiliación) \Rightarrow 1 - p = 3p \Rightarrow p = \dfrac{1}{4}$

$X = \#\ de\ intentos\ hasta\ la\ segunda\ afiliación \Rightarrow R_X = \{2,3,4, \ldots\}$. Sea $x \in R_X \Rightarrow$ Sean los eventos:

$A =$ "$Entre\ los\ (x-1)\ primeros\ intentos\ logra\ sólo\ una\ afiliación$" y

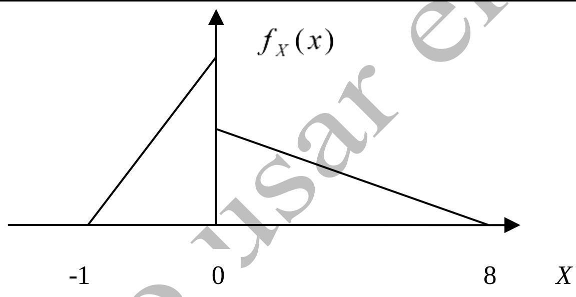
$B =$ "$En\ el\ intento\ \#x\ logra\ una\ afiliación$", entonces $P_X(x) = P(X = x) = P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$

$P(B|A) = p = \frac{1}{4}$ y $P(A) = C_1^{x-1} \times p \times (1-p)^{(x-1)-1} = C_1^{x-1} p (1-p)^{(x-2)} \Rightarrow$

$P_X(x) = p \times C_1^{x-1} p (1-p)^{(x-2)} = p^2 C_1^{x-1} (1-p)^{(x-2)} \quad x = 2,3,4, \ldots$

Problema 3

Asuma que la rentabilidad mensual X de una acción en la bolsa de valores es una v.a.c. con rango $R_X = [-1, 8]$ y función de densidad cuya gráfica es:



a) Halle $f_X(x)$ si se sabe que con 60% de probabilidad la rentabilidad puede ser negativa.
b) Halle $E(X)$. A largo plazo ¿vale la pena invertir en esta acción?

Solución:

a) $f_X(x)$ es de la forma $f_X(x) = \begin{cases} a + bx & -1 \le x < 0 \\ c + dx & 0 \le x \le 8 \end{cases}$

Como $0 = f_X(-1) = a - b \Rightarrow a = b$; también $0 = f_X(8) = c + 8d \Rightarrow c = -8d$, de modo que

$f_X(x) = \begin{cases} a(1+x) & -1 \le x < 0 \\ d(x-8) & 0 \le x \le 8 \end{cases}$.

De "se sabe que con 60% de probabilidad la rentabilidad puede ser negativa" tenemos

$$0.6 = P(-1 \le X < 0) = \int_{-1}^{0} a(1+x)dx = a\int_{-1}^{0}(1+x)dx = a\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = a\left(\left[0 - \frac{0}{2}\right] - \left[-1 + \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$a = 1.2$

Como $1 = P(-1 \le X \le 8) = P(-1 \le X < 0) + P(0 \le X \le 8) = 0.6 + P(0 \le X \le 8) \Rightarrow P(0 \le X \le 8) = 0.4 \Rightarrow$

$0.4=\int_0^8 d(x-8)dx=d\int_0^8 (x-8)dx=d\left[\frac{x^2}{2}-8x\right]_0^8=d\left[\frac{64}{2}-64\right]=-32d\Rightarrow d=-\frac{0.4}{32}=-\frac{1}{80}$

$\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}1.2(1+x) & -1\le x<0\\ \frac{1}{80}(8-x) & 0\le x\le 8\end{cases}$ es la función de densidad de *X*.

b) $E(X)=\int_{-1}^8 xf_X(x)dx=\int_{-1}^0 xf_X(x)dx+\int_0^8 xf_X(x)dx=\int_{-1}^0 x1.2(1+x)dx+\int_0^8 x\frac{1}{80}(8-x)dx=-0.2+1.0667=0.8667$ que es positivo, salvo alternativas con mayor esperado, sí vale la pena invertir en esta acción, dará rentabilidad positiva a largo plazo.

Problema 4

a) **(Distribución normal y uso de la tabla normal)** Si una máquina de una imprenta se malogra, ésta puede destinarse a uno de dos talleres A o B para su reparación. El tiempo de reparación, en horas, en el taller A es una v.a. $X\sim N(5,9)$ y el tiempo de reparación en el taller B es una v.a. $Y\sim N(7,0.81)$.

(1) Si usted debe elegir un taller para que rutinariamente proporcione el servicio de mantenimiento a sus máquinas (que son todas del tipo mencionado en el enunciado) ¿Cuál taller seleccionaría?¿Por qué?

(2) Si se malogra una máquina específica y usted necesita tener esa máquina reparada lo antes posible dentro del plazo de ocho horas ¿Cuál taller escogería? ¿Por qué?

Solución:

En el caso (1), se requiere que "en promedio" o " a la larga" el tiempo de reparación sea el menor, se trata de una decisión "de largo plazo" y esto implica elegir el taller con menor tiempo esperado de reparación, que es el taller A con tiempo medio de 5 horas.

En el caso (2), ya no importa si "a la larga" el taller A es más rápido, lo que se requiere es que el tiempo de reparación caiga debajo de ocho horas *con la mayor probabilidad* pues estamos ante un caso específico, una situación específica, no "una situación promedio" o "de largo plazo": Debemos comparar $P(X<8)$ con $P(Y<8)$, el taller con mayor probabilidad de cumplir será el elegido:

$P(X<8)=P\left(Z<\frac{8-5}{3}\right)=P(Z<1)=0.8413;$

$P(Y<8)=P\left(Z<\frac{8-7}{0.9}\right)=P(Z<1.11)=0.8665$ por tanto el taller B debiera ser elegido.

b) Un intermediario suele comprar un bien de temporada a 3 soles por unidad de volumen para revenderlo luego a 5 soles la unidad, durante la temporada de ventas, pero pasada ésta remata el sobrante a 2 soles la unidad. Si la cantidad de producto que le pueden demandar es una v.a.c. $X\sim N(\mu=250,\sigma^2=30^2)$ y el comerciante tiene la política de comprar, antes de la temporada, un stock de $\boldsymbol{S}$ unidades: Halle el valor de $\boldsymbol{S}$ que maximiza la utilidad esperada del comerciante.

Solución:

Sea $\boldsymbol{U}$ la utilidad, entonces $\boldsymbol{U}$ depende de $\boldsymbol{S}$ y de $\boldsymbol{X}$, pues:

Si $\boldsymbol{X\le S}\Rightarrow$ durante la temporada vende sólo $\boldsymbol{X}$ unidades de las $\boldsymbol{S}$ que tiene para vender a 5 soles y el sobrante $(\boldsymbol{S-X})$ lo remata a 2 soles la unidad, en este caso $\boldsymbol{U=U(X,S)=5X+2(S-X)-3S}$

Si $\boldsymbol{X>S}\Rightarrow$ durante la temporada vende todo su stock y genera todo su ingreso posible, con una utilidad $\boldsymbol{U=U(X,S)=5S-3S=2S}$.

En resumen $\boldsymbol{U=U(X,S)=\begin{cases}3X-S & si\ X\le S\\ 2S & si\ X>S\end{cases}}$.

Vemos que $\boldsymbol{U}$ tiene una componente aleatoria $\boldsymbol{X}$ y otra no aleatoria $\boldsymbol{S}$. Desde el punto de vista económico lo racional es maximizar utilidades, pero la componente aleatoria $\boldsymbol{X}$ impide una maximización clásica, pues por definición $\boldsymbol{X}$ no es controlable. Tenemos que imponer un control 'indirecto': En el valor esperado de $\boldsymbol{E[U(X,S)]}$, $\boldsymbol{X}$ "ya no figura", porque se promedia sobre todos sus valores ponderados por sus probabilidades asociadas y lo que queda es una función que depende sólo de $\boldsymbol{S}$, digamos $\boldsymbol{\varphi(S)\coloneqq E[U(X,S)]}$. Por tanto, si luego calculamos $\boldsymbol{S}$ de modo que se maximice $\boldsymbol{\varphi(S)}$, lo que estamos haciendo es determinar una 'tendencia óptima' para la utilidad $\boldsymbol{U}$. Esto es el stock $\boldsymbol{S}$ óptimo debe maximizar la utilidad esperada $\boldsymbol{E[U(X,S)]}$:

$$\boldsymbol{\varphi(S)=E[U(X,S)]=\int_{-\infty}^{+\infty}U(x,S)f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{S}U(x,S)f_X(x)dx+\int_{S}^{+\infty}U(x,S)f_X(x)dx=}$$

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{S}(3x-S)f_X(x)dx+\int_S^{\infty}2Sf_X(x)dx=\int_{-\infty}^{S}3xf_X(x)dx-S\underbrace{\int_{-\infty}^{S}f_X(x)dx}_{F_X(S)}+2S\underbrace{\int_S^{\infty}f_X(x)dx}_{1-F_X(S)}=}$$

$$\boldsymbol{3\int_{-\infty}^{S}xf_X(x)dx-SF_X(S)+2S\big(1-F_X(S)\big)=3\int_{-\infty}^{S}xf_X(x)dx-3SF_X(S)+2S\Rightarrow\varphi(S)=3\int_{-\infty}^{S}xf_X(x)dx-3SF_X(S)+2S}$$

Como $\boldsymbol{\varphi(S)=E[U(X,S)]=3\int_{-\infty}^{S}xf_X(x)dx-3SF_X(S)+2S}$ es explícitamente una función diferenciable de *S* podemos maximizarla mediante derivación:

$\boldsymbol{\varphi'(S) = \frac{d\varphi(S)}{ds} = 3Sf_X(S) - 3F_X(S) - 3S\underbrace{F'_X(S)}_{f_X(S)} + 2 = 3Sf_X(S) - 3F_X(S) - 3Sf_X(S) + 2 = -3F_X(S) + 2}$ y así

$\boldsymbol{\varphi'(S) = \frac{d\varphi(S)}{ds} = 0}$ equivale a $\boldsymbol{F_X(S) = \frac{2}{3}}$ (y como $\boldsymbol{\varphi''(S) = -3f_X(S) > 0}$, se trata de un máximo).

Para hallar el valor de *S*: De $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 250, \sigma^2 = 30^2)} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{2}{3} = 0.67 = F_X(S) = P(X \le S) =}$

$\boldsymbol{P\left(\frac{(X-250)}{30} \le \frac{(S-250)}{30}\right) = P\left(Z \le \frac{(S-250)}{30}\right)}$ y de la tabla Z tenemos $\boldsymbol{\frac{(S-250)}{30} = 0.44}$ y por tanto $\boldsymbol{S = 263.2}$ es el valor "óptimo" del stock S (o "stock óptimo"), el stock que maximiza la utilidad esperada del comerciante.

Problema 5

a) Un dado está construido de manera que a partir del #2 inclusive, la probabilidad de cada número es igual a la del que lo antecede más una cantidad constante $\boldsymbol{r}$ y se estima que la probabilidad de que al lanzar este dado ocurra el 1 o el 2, es 7/60. Si se lanza el dado, halle la distribución de probabilidades en el espacio muestral resultante Si se lanza este dado y luego, independientemente del primer lanzamiento, se lanza otro dado normal, halle la probabilidad de que los números obtenidos sumen 11.

Solución:

$S = \{1,2,\dots,6\}$ y tenemos la relación de recurrencia $P(\{k\}) = P(\{k-1\}) + r$ o en una tabla:

Evento $\{k\}$	1	2	3	4	5	6	Total
$P(\{k\})$	p	$p+r$	$p+2r$	$p+3r$	$p+4r$	$p+5r$	$6p+15r=1$

Además, se sabe que $P(\{1\} \cup \{2\}) = \frac{7}{60} \Rightarrow p + p + r = \frac{7}{60} \Rightarrow 2p + r = \frac{7}{60}$, con lo cual se tienen las dos ecuaciones necesarias para hallar p, r y luego $P(\{k\})$ $k = 1,2,\dots,6$. Resulta $r = 0.0542$ y $p = 0.03123$

Si se lanza otro dado "normal" con resultados posibles $\{1,2,\dots,6\}$, donde aquí, naturalmente $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$, tenemos que el espacio muestral compuesto para el lanzamiento de los dos dados, sería:

$S = \{(k,i) | k = 1,2,\dots,6; i = 1,2,\dots,6\}$, donde por la independencia mencionada, se cumple que

$P\{(k,i)\} = P\{k\} \times P\{i\} = \frac{1}{6}P\{k\}$, $k = 1,2,\dots,6; i = 1,2,\dots,6$. Si *A* = "La suma de puntos es 11", entonces

$A = \{(5,6),(6,5)\}$ y $P(A) = P\{(5,6)\} + P\{(6,5)\} = \frac{1}{6}(p + 4r + p + 5r) = \frac{1}{6}(2p + 9r) = 0.09171$

b) Un mensaje especial, que no permite identificar al remitente, le ha llegado exclusivamente a su cuenta de Whatsapp. Usted desea enviarlo a dos participantes cualesquiera de un grupo de Whatsapp conformado por usted y 9 personas más y para ello selecciona al azar a dos participantes del grupo; suponga ahora que éstos a su vez envían el mensaje a otros dos del mismo grupo, también eligiéndolos al azar. El espacio muestral que representa todas las maneras en que pueden hacerse los envíos tiene muchos elementos, por ejemplo y sólo como una ilustración, uno de esos elementos podría ser M7M10M9M1M3M5 que denota a que su primer y segundo envío lo recibieron respectivamente M7 y M10; que el primer y segundo mensaje que envío M7 los recibieron respectivamente M9 y usted (M1) y que el primer y segundo mensaje que envío M10 lo recibieron respectivamente M3 y M5. De manera análoga pueden representarse otros resultados posibles. Halle el número de elementos que tiene este espacio muestral y la probabilidad de que el primero que reciba su mensaje no se lo reenvíe.

Solución:

Si representamos el espacio muestral mediante $S = \{(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)\}$ donde e_1 y e_2 representan los miembros del grupo a los que usted envió el mensaje anónimo, e_3, e_4 representan los miembros a los cuales reenvió el mensaje e_1 y e_5, e_6 los miembros a los cuales reenvió el mensaje e_2, aplicando la regla de multiplicación: $n(S) = n(e_1, e_2) \times n(e_3, e_4) \times n(e_5, e_6)$. Trabajando por partes y teniendo en cuenta que nadie se reenvía el mensaje a sí mismo, desconoce quién se lo envió y no tendría sentido alguien reenvíe el mensaje dos veces a la misma persona:

$n(e_1, e_2) = n(e_1) \times n(e_2) = 9 \times 8$ pues usted sólo tiene 9 personas distintas para el primer reenvío enviar, ya que no se reenvía a sí mismo, y como no envía el mensaje dos veces a la misma persona, le quedan 8 para el segundo reenvío.

$n(e_3, e_4) = n(e_3) \times n(e_4) = 9 \times 8$ porque dado el anonimato e_1 podría reenviar el mensaje a usted también y por tanto tiene 9 personas para escoger en su primer envío y 8 para el segundo. Análogamente $n(e_5, e_6) = 9 \times 8$ y finalmente $n(S) = (9 \times 8)^3 = 373\,248$. Si *A* = "El primero que recibe su mensaje no se lo reenvía o devuelve", entonces $n(A) = (9 \times 8) \times (8 \times 7) \times (9 \times 8)$, pues en este caso si su primer remitente e_3 no lo escoge, entonces tiene sólo 8 personas para su primer envío y 7 para su segundo. Por tanto $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(9\times8)\times(8\times7)\times(9\times8)}{(9\times8)^3} = \frac{8\times7}{9\times8} = \frac{7}{9} = 0.78$

c) Una aseguradora de autos clasifica a sus clientes en dos grupos de edad. En el grupo de los más jóvenes, está el 30% de los clientes, mientras que el 70% restante se encuentra en el grupo de los mayores. Los contratos con la compañía tienen una vigencia anual. La probabilidad de que un asegurado del grupo de jóvenes tenga un accidente es del 75%, mientras que esa probabilidad para un asegurado en el grupo de los mayores se reduce a un 32%. La probabilidad de que un cliente joven de la compañía tenga un segundo accidente es independiente de que tenga un primer accidente a lo largo del año. Esta independencia se presenta también en el grupo de clientes mayores. Si elegimos a un cliente al azar de la compañía, calcule la probabilidad de que tenga exactamente un accidente y también, dado que el asegurado ha tenido un accidente, calcule la probabilidad de que pertenezca al grupo de jóvenes.

Solución:

Sean eventos J = “El cliente es joven”, M = “El cliente es mayor”, A = “El cliente sufre un accidente”. Como puede haber más de un accidente, vale la pena definir el evento A_i =“El cliente sufre el i-ésimo accidente”.

Tenemos como datos iniciales:

$P(J) = 0.30;\ P(M) = 0.70;\ P(A|J) = 0.75;\ P(A|M) = 0.32;$

$P(A_2|A_1) = P(A_2)$ dentro de Jóvenes $\Leftrightarrow P(A_2|J \cap A_1) = P(A_2)$ dentro de Jóvenes $\Leftrightarrow$

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$ dentro de Jóvenes.

$P(A_2|A_1) = P(A_2)$ dentro de Mayores $\Leftrightarrow P(A_2|M \cap A_1) = P(A_2)$ dentro de Mayores $\Leftrightarrow$

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$ dentro de Mayores.

Primero se pide $\mathrm{P}(A_1)$. El espacio muestral es $S = J \cup M$ y $A_1 = A_1 \cap (J \cup M) = (A_1 \cap J) \cup (A_1 \cap M)$ Aplicando probabilidad total:

$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(\mathrm{J} \cap A_1) + \mathrm{P}(M \cap A_1) = \mathrm{P}(A_1|\mathrm{J})\mathrm{P}(\mathrm{J}) + \mathrm{P}(A_1|M)\mathrm{P}(M) = 0.75 \times 0.30 + 0.32 \times 0.7$

$= 0.449$ o equivalentemente y sin complicarse con notaciones tomando $A = \mathrm{A}_1$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{J} \cap \mathrm{A}) + \mathrm{P}(M \cap \mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{J})\mathrm{P}(\mathrm{J}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}|M)\mathrm{P}(M) = 0.75 \times 0.30 + 0.32 \times 0.7 = 0.449$

Aquí se pregunta por $\mathrm{P}(\mathrm{J}|\mathrm{A}_1)$. Aplicando la definición de probabilidad condicional:

$\mathrm{P}(\mathrm{J}|\mathrm{A}_1) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{J} \cap \mathrm{A}_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{J})\mathrm{P}(\mathrm{J})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)} = \frac{0.75 \times 0.30}{0.449} = \frac{0.225}{0.449} = 0.5011$; aquí también simplificando notaciones se puede resolver como $\mathrm{P}(\mathrm{J}|\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{J} \cap \mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{J})\mathrm{P}(\mathrm{J})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = 0.5011$

La segunda pregunta se refiere a una probabilidad condicional: se pide $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{A}_1)$ pero en general (no dentro de cada grupo, donde por dato A_2 y A_1 son independientes).

Por definición: $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{A}_1) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)}$. De a) $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)$ en general es $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = 0.449$; ahora bien, la independencia entre A_2 y A_1 ocurre dentro de cada grupo de clientes pero de manera diferente, en verdad la independencia está “condicionada” dentro del grupo, así que no podemos simplificar y eliminar $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)$ del denominador. Tenemos que proceder por partes:

$(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1) = (\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{J}) \cup (\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{M}) \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{J}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{M})$

$= \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1|\mathrm{J})\mathrm{P}(\mathrm{J}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1|\mathrm{M})\mathrm{P}(\mathrm{M})$. En esta última expresión sí podemos aplicar la independencia entre A_2 y A_1 pero dentro de cada grupo:

$\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1|\mathrm{J}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{J})\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{J}) = 0.75 \times 0.75 = 0.5625$; pues $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) = 0.75$ dentro de J

$\Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{J}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1|\mathrm{J})\mathrm{P}(\mathrm{J}) = 0.5625 \times 0.30 = 0.16875$

Análogamente $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1|\mathrm{M}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{M})\mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathrm{M}) = 0.32 \times 0.32 = 0.1024$ y

$\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{M}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1|\mathrm{M})\mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0.1024 \times 0.70 = 0.07168$

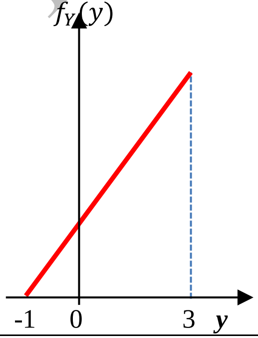
Por tanto $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1) = 0.16875 + 0.07168 = 0.24043$ y así llegamos a la respuesta específica:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathrm{A}_1) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)} = \frac{0.24043}{0.449} = 0.5355$$

Problema 6

a) Una solicitud de crédito pasa por dos etapas. En la primera, la solicitud es revisada de manera independiente por tres funcionarios A, B y C, los cuales pueden dar opinión favorable con probabilidades 0.7, 0.85 y 0.78 respectivamente. Las solicitudes con al menos 2 de 3 opiniones favorables pasan a una segunda etapa en la que el gerente podría aprobarlas con probabilidad 0.9 si obtuvo tres opiniones favorables en la primera etapa y con probabilidad 0.6 si obtuvo sólo dos opiniones favorables. Si Ud. presenta una solicitud ¿Qué probabilidad tiene su solicitud de ser revisada por el gerente? ¿Qué probabilidad tiene su solicitud de ser aprobada?

b) La rentabilidad mensual (en puntos porcentuales) de una inversión es una v.a. continua X con rango $R_X =]0,3]$ y función de densidad como la que figura abajo:

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{6} & si\ \ 0 < x \le 1 \\ \frac{2}{6} & si\ \ 1 < x \le 2 \\ c & si\ \ 2 < x \le 3 \end{cases}$	(b1) Halle c y calcule la probabilidad p de tener una rentabilidad de al menos 1.5 puntos porcentuales con esta inversión. (b2) Se tiene otra inversión cuya rentabilidad mensual Y, en puntos porcentuales, es también aleatoria con rango $R_Y =]-1,3]$ y con función de densidad $f_Y(y)$ como la de abajo.
	De esta segunda inversión se sabe que hay probabilidad de tener pérdida o rentabilidad negativa hasta -1 mensual, pero aparentemente tendría mayor probabilidad de generar rentabilidades altas hasta 3 puntos porcentuales. Halle la fórmula de la función de densidad $f_Y(y)$ de Y. (b3) Si se deseara tener una rentabilidad de 1.5 puntos porcentuales o más ¿Cuál inversión sería recomendable: la de X o de Y? Justifique. (b4) ¿Con cuál inversión esperaría mayor rentabilidad? Justifique.

Solución:

a) Sean los eventos A = "El funcionario A da opinión favorable a la solicitud", B = "El funcionario B da opinión favorable a la solicitud", C = "El funcionario C da opinión favorable a la solicitud", T = "Solicitud recibe tres opiniones favorables", D = "Solicitud recibe dos opiniones favorables" y L = "Solicitud llega al gerente"; entonces $L = T \cup D$ donde $T = A \cap B \cap C$ y $D = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$. Además los eventos A, B y C son independientes.
Finalmente, sean F = "Solicitud es aprobada" y G = "Gerente aprueba la solicitud", entonces $F = L \cap G$ y por tanto $P(F) = P(L \cap G) = P(G|L)P(L) = P(G|T)P(T) + P(G|D)P(D)$. Trabando por partes:
$P(G|T) = 0.9$ y $P(T) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0.7 \times 0.85 \times 0.78 = 0.4641$

$P(G|D) = 0.6$ y $P(D) = P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) = 0.7 \times 0.85 \times 0.22 +$

$0.7 \times 0.15 \times 0.78 + 0.3 \times 0.85 \times 0.78 = 0.4117$; entonces:

$P(L) = P(T \cup D) = P(T) + P(D) = 0.4641 + 0.4117 = 0.8758$ y

$P(F) = P(G|T)P(T) + P(G|D)P(D) = 0.9 \times 0.4641 + 0.6 \times 0.4117 = 0.66471$

b) La probabilidad total (en este caso el área total debajo de $f_X(x)$) debe ser 1, luego:

(b1) $1 = \int_0^2 f_X(x)dx = \int_0^1 f_X(x)dx + \int_1^2 f_X(x)dx + \int_2^3 f_X(x)dx = \int_0^1 \frac{3}{6}dx + \int_1^2 \frac{2}{6}dx + \int_2^3 cdx =$

$\frac{3}{6}[x]_0^1 + \frac{2}{6}[x]_1^2 + c[x]_2^3 = \frac{3}{6} + c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{6}$ y

$P(X \geq 1.5) = \int_{1.5}^3 f_X(x)dx = \int_{1.5}^2 \frac{2}{6}dx + \int_2^3 \frac{1}{6}dx = \frac{2}{6}[x]_{1.5}^2 + \frac{1}{6}[x]_2^3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, esto es $p = \frac{1}{3}$

(b2) Del gráfico tenemos que $f_Y(y)$ es una función lineal o sea es de la forma $f_Y(y) = my + b$ $(m > 0)$. Como

tenemos $0 = f_Y(-1) = -m + b \Rightarrow b = m$ y por tanto $f_Y(y) = m(y+1) \Rightarrow 1 = \int_{-1}^3 m(y+1)dy =$

$m\int_{-1}^3 (y+1)dy = m\left[\frac{y^2}{2} + y\right]_{-1}^3 = m\left(\left[\frac{9}{2} + 3\right] - \left[\frac{1}{2} - 1\right]\right) = m\left(\frac{8}{2} + 4\right) = 8m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{8}$ y la fórmula de la f.

de densidad de *Y* es: $\boldsymbol{f_Y(y) = \frac{1}{8}(y+1) \quad -1 \leq y \leq 3}$

(b3) La inversión más recomendable sería aquella con mayor probabilidad de dar rentabilidad de 1.5 o más:

En el caso de *X*, ya sabemos que $P(X \geq 1.5) = \frac{1}{3} = 0.3333$

En el caso de *Y*, calculemos $P(Y \geq 1.5) = \int_{1.5}^3 \frac{1}{8}(y+1)dy = \frac{1}{8}\int_{1.5}^3 (y+1)dy = \frac{1}{8}\left[\frac{y^2}{2} + y\right]_{1.5}^3 = 0.6094$

La segunda inversión es más conveniente.

(b4) Debemos calcular $E(X)$, $E(Y)$ y ver cuál es mayor:

En el caso de *X*:

$$E(X) = \int_0^3 x f_X(x)dx = \int_0^1 x\frac{3}{6}dx + \int_1^2 x\frac{2}{6}dx + \int_2^3 x\frac{1}{6}dx = \frac{3}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{2}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{5}{12} = \frac{14}{12} = 1.167$$

En el caso de *Y*:

$$E(Y) = \int_{-1}^3 y f_Y(y)dy = \int_{-1}^3 y\frac{1}{8}(y+1)dy = \frac{1}{8}\int_{-1}^3 (y^2 + y)dy = \frac{1}{8}\left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_{-1}^3 =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{27}{3} + \frac{9}{2}\right] - \frac{1}{8}\left[\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{5}{3} = 1.667$$

Esperaríamos más rentabilidad en la segunda inversión, la de rentabilidad *Y*.

Problema 7

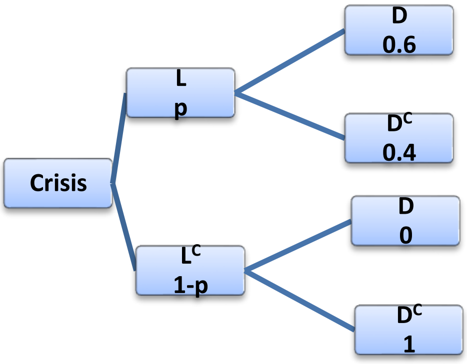
Una crisis en el gabinete de ministros puede encontrar a un agente económico con " liquidez " o sin ella. Si tiene liquidez puede comprar dólares con 60% de probabilidad. La probabilidad de que el agente económico tenga liquidez es *P* y depende del Interés bancario *I* y la Inflación *M* a través de *P* = *M*/(*I* + *M*). Se acaba de producir una crisis.

a) ¿Con qué probabilidad comprará dólares un agente económico si se iguala interés con inflación?

b) Se sabe que al pasar la crisis ministerial, el agente puede retener todos sus dólares o los vende totalmente o vende una parte de ellos. Y se calcula que la probabilidad del primer evento duplica la de cada uno de los otros dos. Ha pasado una crisis ministerial y Ud. observa a un agente ¿Carecerá de dólares? Si carece de dólares ¿Tuvo liquidez antes de la crisis? Asuma que antes de la crisis la inflación era el 80% del interés bancario.

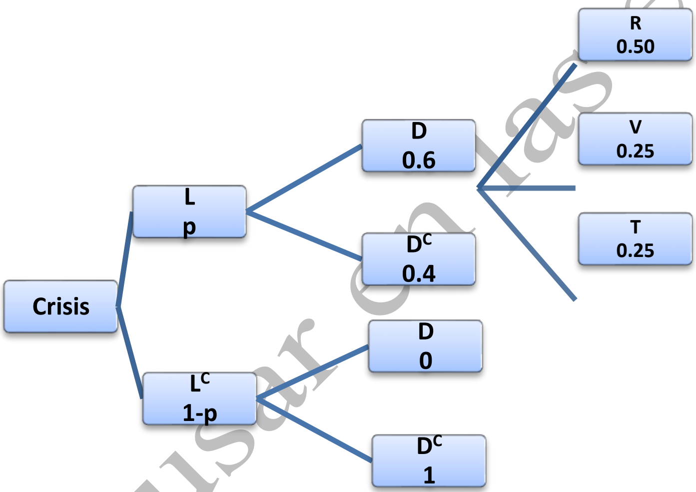
Solución:

a) Sean los eventos L = "Agente tiene liquidez (dinero) y D = "Agente compra dólares", entonces de los datos tenemos $P(L) = p$, $P(L^C) = 1 - p$ y $P(D|L) = 0.6$, $P(D^C|L) = 0.4$; naturalmente $P(D|L^C) = 0$ pues si el agente no tiene dinero no puede comprar nada. Por complemento $P(D^C|L^C) = 1$. Un diagrama de árbol ayuda a ordenar y aclarar la información (las probabilidades figuran debajo de los eventos y son probabilidades condicionales a los eventos que preceden en el diagrama de izquierda a derecha:



En el contexto anterior y de los datos: $p = M/(I+M)$ y si se iguala interés con inflación entonces $p = \frac{M}{M+M} = 0.5$ y $P(D) = P(L \cap D) = P(D|L)P(L) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$

b) En este caso se agregan eventos "post crisis", que son R = "Retiene sus dólares", V="Vende una parte" y T = "Vende totalmente sus dólares". Si x es la probabilidad (condicional) de cada uno de los dos últimos eventos, entonces la probabilidad del primer evento (retener los dólares) es $2x$ y se cumple $2x + x + x = 1$, o $x = 1/4$. En un diagrama de árbol:



En este caso $p = \frac{M}{I+M} = \frac{0.8I}{I+0.8I} = 0.44$; Sea K = "Agente no tiene dólares actualmente", entonces:

$P(K) = P(L^C \cap D^C) + P(L \cap D^C) + P(L \cap D \cap T) =$

$P(D^C|L^C)P(L^C) + P(D^C|L)P(L) + P(T|L \cap D)P(D|L)P(L) = 1 \times (1-p) + 0.4 \times p + 0.25 \times 0.6 \times p$

$= 1 - 0.45p \underbrace{=}_{p=0.44} 0.802$; carecerá de dólares con 80.2% de probabilidad, podemos pronosticar que esto ocurrirá.

Finalmente se pregunta por $P(L|K)$:

$$P(L|K) = \frac{P(L \cap D \cap T) + P(L \cap D^C)}{P(K)} = \frac{0.25 \times 0.6 \times p + 0.4 \times p}{1 - 0.45p} = \frac{0.242}{0.802} = 0.302$$

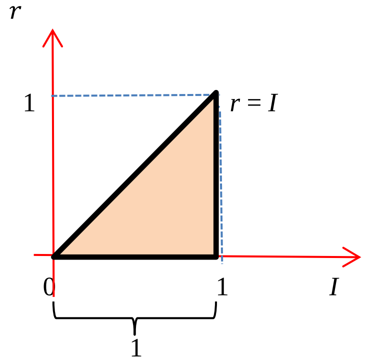
Problema 8

Un economista plantea que en una economía estabilizada el índice de inflación mensual I puede tomar cualquier valor entre 0% y 1% y que la banca fija un interés $\boldsymbol{r}$% pasivo promedio ("pasivo" es el interés que la banca da a los "ahorros a la vista", que se pueden retirar en cualquier momento), que puede tomar cualquier valor por debajo de la inflación. Describa el espacio muestral S asociado al experimento aleatorio consistente en observar inflación y tasa de interés pasivo, grafíquelo y asignando probabilidad geométrica, halle:

a) La probabilidad de que el Interés no supere el 0.12%, si en este mes se espera una inflación inferior al 0.25%.
b) La función de densidad de $X = I - r$ y el valor esperado de X, interprete $E(X)$. ¿Cuál sería su pronóstico para X? ¿Cuál sería la probabilidad de que su cumpla su pronóstico?

Solución:

a) $S=\{(I,r)|\ 0 < I < 1,\ 0 < r < I\}$

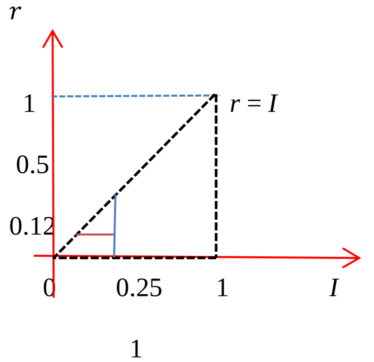


Sea A evento de S, entonces, dado que S tiene área:

$$P(A) = \frac{área(A)}{área(S)} = \frac{área(A)}{\frac{base \times altura}{2}} = \frac{área(A)}{\frac{1}{2}}$$

Se pide

P("La probabilidad de que el Interés no supere el 0.12%, si en este mes se espera una inflación inferior al 0.25%.")=?



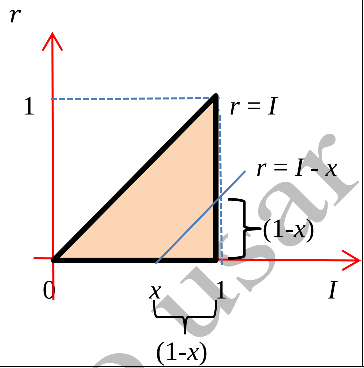
Sean los eventos
B = "Interés no supere el 0.12%" y C = "Inflación inferior al 0.25%"
entonces, se pregunta por $P(B|C)$.

Mejor por complemento:
$P(B|C) = 1 - P(B^c|C)$ y reduciendo S al evento C por tratarse de una probabilidad condicional, obtenemos:

$$P(B^c|C) = \frac{área(B^c \cap C)}{área(C)} = \frac{\frac{(0.25-0.12)\times(0.25-0.12)}{2}}{\frac{0.25\times 0.25}{2}}$$

$= 0.2704 \ \Rightarrow\ P(B|C) = 1 - 0.2704 = 0.7296$

b) Para la función de densidad de $X = I - r$, hallemos primero $F_X(x) = P(X \leq x) \Rightarrow f_X(x) = F_X^{'}(x)$:



$R_X =]0,1[$ y tomando $x \in]0,1] \Rightarrow F_X(x) = P(X \leq x)$

$(X \leq x) \Leftrightarrow (I - r \leq x) \Leftrightarrow (I - x \leq r)$ y $P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$

$P(X > x) = \frac{área(X>x)}{\frac{1}{2}}$ y $área(X > x) = área(r < I - x) =$

$\frac{(1-x)\times(1-x)}{2} = \frac{(1-x)^2}{2} \Rightarrow P(X > x) = (1-x)^2 \Rightarrow$

$F_X(x) = 1 - (1-x)^2 \quad 0 < x < 1$ y derivando:

$f_X(x) = 2(1-x) \quad 0 < x < 1$ es la función de densidad de X y $E(X) = \int_0^1 x2(1-x)dx$
$= 0.33$ o 0.33%.

Problema 9

Si en general el número de unidades de un producto que un cliente puede desear comprar en una tienda minorista durante su visita diaria, es una variable aleatoria discreta X con función de probabilidad $P_X(x)$ dada por:

x	0	1	2	3	4	5	6
$P_X(x)$	0.016	a	0.234	b	0.234	0.094	0.016

donde a y b son constantes positivas y se sabe que con 89% de probabilidad un cliente comprará dos o más unidades del producto.

a) Halle las constantes a y b.
b) En un momento dado la tienda tiene un "stock" de sólo 2 unidades del producto y entra un cliente interesado en este producto ¿No se agotará el stock de la tienda? ¿Se agotará?
c) Si entran dos clientes a la tienda y cada uno hace compras independientemente. En el contexto anterior ¿Con qué probabilidad la tienda venderá en total dos unidades del producto?

d) Halle el número esperado μ_X de unidades de producto que puede comprar un cliente. Si la tienda sabe que en un día cualquiera será visitada por 20 clientes en busca del producto ¿Cuántas unidades del bien debiera tener en stock para que en promedio se pueda satisfacer a todos los clientes?

Solución:

a) Las constantes a y b son "incógnitas", necesitamos dos ecuaciones para hallarlas:
La condición general, en el caso de funciones de probabilidad de v.a. discreta es $\sum_x P_X(x) = 1 = \sum_{x=0}^{6} P_X(x)$
Que genera la ecuación (I): $a + b + 0.594 = 1 \Longrightarrow a + b = 0.406 \quad (I)$.
"Se sabe que con 89% de probabilidad un cliente comprará dos o más unidades del producto" equivale a $P(X \geq 2) = 0.89$ o por complemento $P(X \leq 1) = 0.11 \Longrightarrow 0.016 + a = 0.11 \quad (II)$
De (II) resulta $a = 0.094$ y reemplazando en (I) tenemos $0.094 + b = 0.406 \Longrightarrow b = 0.312$ y la tabla de la función de probabilidad $P_X(x)$ completa es:

x	0	1	2	3	4	5	6	Total
$P_X(x)$	0.016	0.094	0.234	0.312	0.234	0.094	0.016	1

b) No se agota el stock si el cliente compra 0 o 1 unidad y la probabilidad de que esto ocurra es 0.016+0.094=0.11: $P(No\ se\ agota\ el\ Stock) = 0.11$
Por complemento: $P(Sí\ se\ agota\ el\ Stock) = 1 - 0.11 = 0.89 > 0.5$; Conclusión: Sí se agotará el stock. Nota: Si el cliente pide más de 2, sólo podrá comprar 2 unidades pero igual se agotará el stock, aunque el cliente se vaya con menos unidades de las que quería comprar.

c) Se venderán dos unidades en total si un cliente compra 0 unidades y el otro 2, o si cada uno compra 1 unidad, habiendo independencia entre clientes. Si A es el evento "Se venderán dos unidades en total" entonces
$P(A) = P(X = 0)P(X = 2) + P(X = 2)P(X = 0) + P(X = 1)P(X = 1) =$
$2P_X(0) \times P_X(2) + P_X(1) \times P_X(1) = 0.019588$

d) Por definición $\mu_X = E(X) = \sum_{x=0}^{6} xP_X(x)$. Mejor lo hacemos en una tabla para ordenar la información:

x	0	1	2	3	4	5	6	Total
$P_X(x)$	0.016	0.094	0.234	0.312	0.234	0.094	0.016	1
$xP_X(x)$	0	0.094	0.468	0.936	0.936	0.470	0.096	$3 = \mu_X$

La cantidad esperada de unidades que comprará un cliente cualquiera es $\mu_X = 3$. O sea la demanda esperada es de 3 unidades por cliente. Si son 20 los clientes, debiera haber $20 \times 3 = 60$ unidades en stock (por día) para satisfacer toda la demanda.

Problema 10

Haciendo un estudio de productividad en un sector manufacturero, un economista encuentra que el tiempo X (en horas) que le toma a un trabajador producir una unidad de un bien, es una variable aleatoria continua, con función de densidad $f_X(x)$.

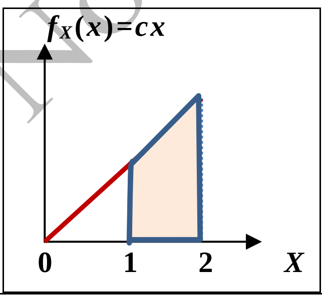
a) Si $f_X(x)=cx \quad 0 < x \leq 2$. Grafique $f_X(x)$, halle la constante c y la probabilidad de que se tarde más de media hora.

b) Si $f_X(x)=dx^2 \quad 0 < x \leq 2$. Grafique $f_X(x)$, halle el valor de la constante d y la probabilidad de que se tarde más de una hora.

c) Se considera a un trabajador como "productivo" si tiene tiempos de producción debajo de la media μ_X. Estime el % de trabajadores "productivos" en a) y en b). Si a) y b) correspondieran a dos procesos de producción para el mismo bien, pero con dos tecnologías distintas ¿Cuál proceso sería preferible? Justifique. Recuerde $\mu_X = \int_{R_X} x f_X(x)dx$ es el "valor promedio o esperado" de la v.a. continua X.

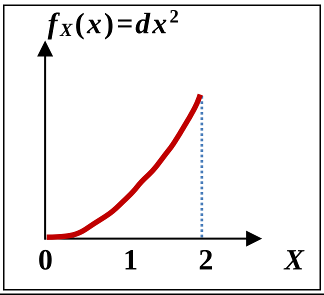
Solución:

a)



$f_X(x) = cx$ es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente positiva (pues en general una función de densidad satisface $0 \leq f_X(x)\ \forall x\ \in R_X$).
La condición de "constante normalizadora" de c implica:1=Área total = Probabilidad total $\Leftrightarrow 1 = \int_0^2 cxdx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = c\frac{4}{2} = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$ y $f_X(x) = \frac{x}{2}\ \ si\ 0 < x \leq 2$ es la función de densidad de X.
$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$ (también sale por geometría)

b)



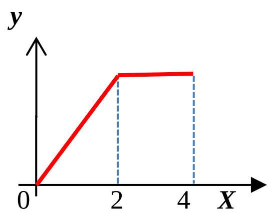
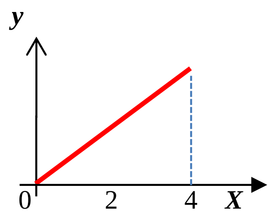
$f_X(x) = dx^2$ es una parábola y d satisface $1 = \int_0^2 dx^2 dx = d\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = d\frac{8}{3} \Rightarrow d = \frac{3}{8}$ y $f_X(x) = \frac{3}{8}x^2 \;\; si\ 0 < x \le 2$ es ahora la función de densidad de X.
$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{3}{8}x^2\, dx = \frac{1}{8}\,[x^3]_1^2 = \frac{7}{8} = 0.875$

c) En a) $\mu_X = \int_0^2 x\left(\frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = 1.33$ y $P(X < \mu_X) = P(X < 1.33) = \int_0^{1.33} \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{1.33} = 0.4422 \Rightarrow$ El 44.2% de trabajadores son "productivos" con la tecnología de a).

En b) $\mu_X = \int_0^2 x\left(\frac{3}{8}x^2\right) dx = \left[\frac{3x^4}{32}\right]_0^2 = \frac{3}{2} = 1.5$ y $P(X < \mu_X) = P(X < 1.5) = \int_0^{1.5} \frac{3}{8}x^2 dx = \left[\frac{x^3}{8}\right]_0^{1.5} = 0.4219 \Rightarrow$ El 42.2% de trabajadores son "productivos" con la tecnología de b). El proceso a) es preferible, hay más trabajadores productivos.

Problema 11

Acerca de la rentabilidad anual X de un fondo mutuo, se sabe que es variable aleatoria continua que puede estar entre 0 y 4% de modo que el rango de X es $R_X = [0,4]$. Un gestor de fondos de inversiones, consultando expertos y revisando literatura financiera, llega a deducir que la función de densidad $f_X(x)$ de X sólo puede ser una de las dos que figuran abajo:

Modelo 1	Modelo 2	Halle $f_X(x)$ en cada modelo y determine en cuál hay mayor probabilidad de que la rentabilidad supere el 3%. Justifique su procedimiento. ¿Cuál sería su predicción para X en cada caso? ¿Cuál sería la probabilidad de que su predicción se cumpla?
		

Sugerencias:

En el modelo 1 y según la gráfica $f_X(2) = 2b = a$, luego $f_X(x) = \begin{cases} bx & 0 \le x \le 2 \\ 2b & 2 < x \le 4 \end{cases}$, sólo falta hallar b y c

En ambos casos aplicar la "condición de normalización" $1 = \int_0^4 f_X(x)dx$, que genera dos ecuaciones:
$1 = \int_0^2 bxdx + \int_2^4 2bdx$ y $1 = \int_0^4 cxdx$.
Luego calcule, en cada caso, la probabilidad del intervalo donde está "la mayoría" $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$ que es la probabilidad de la "predicción": $\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma$. Previamente habrá que calcular μ y σ^2.

Problema 12

a) Sea X v.a. continua y con función de densidad $f_X(x)$. Demuestre que $\psi(t) := E([X - t]^2)$ se hace mínima cuando $t = E(X)$ y demuestre que $\phi(w) := E(|X - w|)$ se hace mínima en el punto donde $F_X(w) = \frac{1}{2}$.
b) Sea X v.a. y sea $U = X/\sigma_X$, pruebe que $\sigma_U^2 = 1$.
c) Sea X v.a. continua con rango $R_X = [a\,, b]$, pruebe que $a \le E(X) \le b$.

Sugerencias:

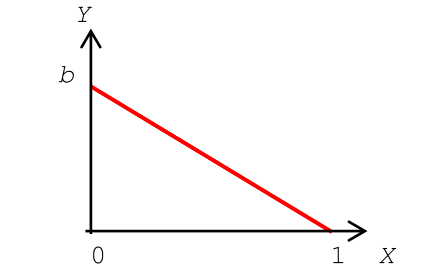
a) $E\left[(X-t)^2\right] = E\left[X^2 - 2Xt + t^2\right] = E\left[X^2\right] - 2tE[X] + t^2 := \psi(t)$ y para minimizar $\varphi'(t) = 0$.
En el caso de $\phi(w) := E(|X - w|)$ tenemos $E(|X - w|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - w|\, f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{w} |x - w|\, f_X(x)dx + \int_w^{+\infty} |x - w|\, f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{w} (w - x)\, f_X(x)dx + \int_w^{+\infty} (x - w)\, f_X(x)dx$ (aplicando la definición de valor absoluto de un número al caso $|x - w|$), entonces después de algo de álgebra, se llega a:
$\phi(w) = 2wF_X(w) - w - \int_{-\infty}^{w} xf_X(x)dx + \int_w^{+\infty} xf_X(x)dx$ y aplicando $\phi'(w) = 0$ se llega al resultado.

b) Aplicando propiedades del valor esperado: $\sigma_U^2 = V\left(\frac{X}{\sigma_X}\right) = \left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2 V(X) = \frac{1}{\sigma_X^2}\sigma_X^2 = 1$

c) $R_X = [a\,, b] \Rightarrow a \le x \le b \Rightarrow af_X(x) \le xf_X(x) \le bf_X(x) \Rightarrow \int_a^b af_X(x)dx \le \int_a^b xf_X(x)dx \le \int_a^b bf_X(x)dx$

Problema 13

Suponga que el ingreso mensual X (en miles de dólares) de las personas en una región es una v.a.c. con función de densidad $f_X(x)$ cuya gráfica es:



a) Halle la fórmula de $f_X(x)$

b) Los ingresos inferiores a US$ 700 no pagan impuesto a la renta, pero los ingresos superiores a 700 pagan 2% de impuesto. Halle el valor esperado del impuesto pagado.

c) En el contexto de b) si se modifica el impuesto poniendo una tasa general de 100r% para todos los ingresos ¿Cuál sería el valor de r que mantiene sin cambiar el rendimiento esperado del impuesto?

Sugerencias:

a) $f_X(x)$ es lineal, es decir es de la forma $f_X(x) = b + ax$ y del gráfico sabemos que $f_X(0) = b$ y $0 = f_X(1) = b + a$. Además $Area\ total = 1 \Rightarrow \int_0^1 f_X(x)dx = 1$, de las tres condiciones se obtienen a, b y por tanto la fórmula de $f_X(x)$

b) Sea I el impuesto, entonces $I = I(X)\begin{cases} 0 & si\ \ X < 0.7 \\ 0.02X & si\ \ 0.7 \le X \end{cases}$ y aplicando la definición de valor esperado (no podemos aplicar la propiedad de linealidad porque *I*(*X*) no es lineal para todo *X*)

$E[I(X)] = \int_0^{0.7} 0 f_X(x)dx + \int_{0.7}^1 0.02x f_X(x)dx$, integrando se obtiene el valor esperado pedido.

c) Si la tasa general es 100*r*% para todos los ingresos, entonces el impuesto modificado sería $I_2 = I_2(X) = rX$ y se quiere que en promedio rinda como el anterior impuesto, es decir, hay que plantear $E[I_2(X)] = rE[X] = E[I(X)]$ y despejar *r* de la ecuación anterior.

Problema 14

En un modelo económico el precio unitario de un bien sufre pequeñas perturbaciones aleatorias de modo que se convierte en una v.a.c X con distribución $N(p, \sigma^2)$ donde p es el "precio de equilibrio" o de "largo plazo" y σ mide "la volatilidad" o sea el margen más probable de variación alrededor de p. Cálculos teóricos indican que con 97.72% de probabilidad el precio se mantendrá debajo de las 12 unidades monetarias y con 15.87% de probabilidad estará debajo de las 9 u.m.

a) Halle el precio de equilibrio p y la volatilidad constante σ.

b) La función de demanda en este mercado es $Q(X) = 8000 - 2X$ unidades del bien. Halle la cantidad esperada de dinero que gastarán los consumidores en el mercado de este bien.

Sugerencias:

En a) $0.9772 = P(X < 12) = P\left(Z < \frac{12-p}{\sigma}\right) \Rightarrow \frac{12-p}{\sigma} = 2$ y $0.1587 = P(X < 9) = P\left(Z < \frac{9-p}{\sigma}\right) \Rightarrow \frac{9-p}{\sigma} = -1$, ya tenemos las dos ecuaciones para las dos incógnitas p y σ.

En b) $Q(X) = 8000 - 2X$ y $Gasto = XQ(X) = 8000X - 2X^2 \Rightarrow$ y $E(Gasto) = 8000E(X) - 2E(X^2)$. Sabemos que en general $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$, de donde podemos despejar $E(X^2)$ y finalmente, obtener E($Gasto$)

Problema 15

En función de un estudio realizado en varios establecimientos, se conoce que la demanda X de un determinado producto es una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x) = e^{-x}\quad x > 0$. La venta de una cantidad "x" produce una ganancia de ax y el sobrante "y" no vendido produce una pérdida (es decir una ganancia negativa) de by, siendo a y b constantes positivas. Si en stock hay disponibles c unidades de dicho producto, entonces la ganancia obtenida en función de la demanda X y el stock disponible está dada por:

$$H(X) = \begin{cases} ax - b(c - x) & si\ \ 0 \le x \le c \\ ac & si\ \ x > c \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la ganancia esperada?

b) ¿Cuántos productos será necesario tener en stock para que la ganancia esperada fuese máxima?

Solución:

a) En este caso, la palabra "ganancia" es la ganancia neta, o sea la utilidad. Basándonos es esto último, tenemos

$$E(H(X)) = \int_0^\infty H(x)f_X(x)dx = \int_0^c H(x)f_X(x)dx + \int_c^\infty H(x)f_X(x)dx =$$

$$\int_0^c (ax - b(c-x))f_X(x)dx + \int_c^\infty acf_X(x)dx = \int_0^c ((a+b)x - bc)f_X(x)dx + \int_c^\infty acf_X(x)dx =$$

$$= (a+b)\int_0^c x f_X(x)dx - bc\underbrace{\int_0^c f_X(x)dx}_{P(X\geq c)=F_X(c)} + ac\underbrace{\int_c^\infty f_X(x)dx}_{P(X>c)=1-F_X(c)} = (a+b)\int_0^c x f_X(x)dx - bcF_X(c) + ac\left(1-F_X(c)\right)$$

$= (a+b)\int_0^c x f_X(x)dx - (a+b)cF_X(c) + ac$, es la “ganancia esperada”, o sea:

$\boldsymbol{E\left(H(X)\right) = (a+b)\int_0^c x f_X(x)dx - (a+b)cF_X(c) + ac}$**, que es una función de $\boldsymbol{a, b}$ y $\boldsymbol{c}$.**

b) Considerando a y b constantes, la ganancia esperada queda como una función del “stock” c, digamos $G(c)$:
$G(c) \coloneqq (a+b)\int_0^c x f_X(x)dx - (a+b)cF_X(c) + ac$. Maximizamos con derivadas:

$$0 = \frac{dG(c)}{dc} = \frac{d}{dc}\left[(a+b)\int_0^c x f_X(x)dx\right] - \frac{d}{dc}[(a+b)cF_X(c)] + \frac{d}{dc}(ac)$$

$$= (a+b)cf_X(c) - (a+b)[F_X(c) + cf_X(c)] + a = -(a+b)F_X(c) + a = 0 \Rightarrow F_X(c) = \frac{(a+b)}{a} \Rightarrow$$

$c = F_X^{-1}\left(\frac{a+b}{a}\right)$ es la cantidad de unidades necesarias para tener máxima ganancia esperada.

Problema 16

a) En una región el valor total Y de la producción de la región es función de la inversión X del gobierno regional vía $Y = 100 + 0.7X + \varepsilon$, donde X e Y están medidas en millones de unidades monetarias y ε es una variación aleatoria con distribución normal $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Se sabe que si la inversión es de $X = 300$ millones de unidades monetarias, entonces el valor Y de la producción será inferior a 340 millones con 67% de probabilidad. ¿Cuál es el valor de σ? Para una inversión de 500 millones ¿Cuál sería el valor del percentil Y_{75}?

b) El tiempo X (en horas) que le toma a un economista el hacer un reporte de coyuntura, es una variable aleatoria continua, con función de densidad: $f_X(x) = \begin{cases} cx & si\ 0 < x \leq 1 \\ d & si\ 1 < x \leq 1.5 \end{cases}$ y se sabe que el 87.5% de las veces termina su reporte antes de una hora y cuarto. Halle las constantes c y d. Dos economistas empiezan, cada uno por su cuenta, un reporte a las 4 pm. ¿Cuál es la probabilidad de que a las 5:20 pm solo uno esté redactando su reporte? ¿Que a las 5:20 pm ninguno haya terminado?

c) Veinte consumidores eligen, cada uno por su cuenta, un establecimiento de una lista de cinco posibles alternativas para hacer un pedido por delivery; uno de los establecimientos es “Pizzas Hot”. Si X = Número de consumidores que elige “Pizzas Hot”, especifique el rango R_X de X y la función de probabilidad de X: $P_X(x)$.

Sugerencias:

En a): Si $X = 300 \Rightarrow 0.67 = P(Y < 340) = P\left(100 + 0.7\overset{300}{\widetilde{X}} + \varepsilon < 340\right) = P(\varepsilon < 30) = P\left(Z < \frac{30}{\sigma}\right) \Rightarrow \frac{30}{\sigma} =$
$0.44 \Rightarrow \sigma = 68.18$

Por definición, dado $0 \leq k \leq 100$, para una v.a. continua W “el percentil k” es un valor W_k de la variable W tal que $P(W \leq W_k) = \frac{k}{100}$. En el caso de Y se pregunta por Y_{75} (cuando $X = 500$):

$$P(Y \leq Y_{75}) = 0.75 \Rightarrow 0.75 = P\left(100 + 0.7\overset{500}{\widetilde{X}} + \varepsilon \leq Y_{75}\right) = P(\varepsilon \leq Y_{75} - 450) = P\left(Z < \frac{Y_{75} - 450}{68.18}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{Y_{75} - 450}{68.18} \cong 0.675 \Rightarrow Y_{75} = 496.0215$$

En b): c y d salen resolviendo las ecuaciones (I) y (II) obtenidas de

$$1 = \int_0^{1.5} f_X(x)dx = \int_0^1 cxdx + \int_1^{1.5} ddx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + d[x]_1^{1.5} = \frac{c}{2} + \frac{d}{2} \Rightarrow c + d = 2\ \ (I)$$

y de $0.875 = P(X < 1.25) \Rightarrow P(X \geq 1.25) = 0.125 \Rightarrow \int_{1.25}^{1.5} ddx = 0.125 \Rightarrow 0.25d = 0.1265$ (II)

Sea ahora $p = P(X > 1.33) = \int_{1.33}^{1.5} ddx$ la probabilidad de que se empiece un informe a las 4 y a las 5:20 no se haya terminado (o sea se demora más de 1 h y 20 minutos o 1.33 horas en redactar el informe).

$P(A\ las\ 5{:}20\ sólo\ uno\ está\ redactando\ su\ informe) = p \times (1-p) + (1-p) \times p = 2p \times (1-p)$

$P(A\ las\ 5{:}20\ ninguno\ ha\ terminado\ su\ informe) = p \times p = p^2$

En c): $R_X = \{0,1,2, \ldots ,20\}$ y $P_X(x) = P(X = x) = P(x\ de\ los\ 20\ eligen\ Pizza\ Hot\ y\ (20-x)\ no\ lo\ hacen) =$

$$\left[\underbrace{C_x^{20}}_{\substack{Selecciono \\ x\ consumidores}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \ldots \times \frac{1}{5}\right)}_{\substack{Los\ x\ eligen \\ Pizza\ Hot}}\right] \times \left[\underbrace{C_{20-x}^{20-x}}_{\substack{Selecciono \\ el\ resto}} \times \underbrace{\left(\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \ldots \times \frac{4}{5}\right)}_{\substack{No\ eligen \\ Pizza\ Hot}}\right] = C_x^{20}\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{20-x} \quad x = 0,1,2, \ldots ,20.$$

ACG./SAMP.