PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
EXAMEN FINAL

2018-1 Valdivieso

Resuelva sólo 4 de los 5 problemas siguientes. Sólo se permite el uso de formularios, tablas y calculadoras.

1.- Suponga que el precio en soles X de venta de un bien es una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$. Si se toma una muestra aleatoria de tamaño 9 de los precios de este bien

a) Halle la probabilidad de que la media $\bar{X}$ de estos precios supere a μ en más de un sol. (1.0 punto)

b) Halle el valor de C tal que la v.a $Y = C(\bar{X} - \mu)^2$ tenga distribución Chi-cuadrado. (1.0 punto)

c) ¿Para que valor de a el intervalo $[\bar{X} - aS, \bar{X} + aS]$, donde S es la desviación estándar de la muestra, contendrá a la media μ con una probabilidad de 0.99? (1.5 puntos)

d) ¿Con qué probabilidad el menor de los precios en esta muestra estará por debajo de μ en más de dos soles? (1.5 puntos)

2.- Un modelo relaciona el gasto mensual en reinversión en miles de soles, Y, en términos del ingreso mensual en miles de soles, x, que una empresa obtiene en cierto sector, según el modelo:

$$Y_i = \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

donde se asume que los errores son independientes y tienen distribución $\epsilon_i \sim N(0, x_i)$, siendo x_i el ingreso mensual en miles de soles de la empresa i. Se asumen que los x_i son conocidos y fijos.

a) Halle el MELI de β. (1.0 punto)

b) Muestre que si dividimos la ecuación de regresión anterior entre $\sqrt{x_i}$, obteniéndose el modelo ponderado $\tilde{Y}_i = \beta\tilde{x}_i + \tilde{\epsilon}_i$, entonces:

b1) Los errores $\tilde{\epsilon}_i$ satisfacen los supuestos clásicos.

b2) El estimador de mínimos cuadrados de la ecuación de regresión ponderada coincide con el MELI de β. (2.0 puntos)

c) Halle, si existe, una prueba UMP a nivel $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \beta = \beta_0$ vs $H_1 : \beta < \beta_0$ (1.0 punto)

d) Un reporte manifiesta que por cada mil soles adicionales que aumente el ingreso mensual de una empresa del sector, sus gastos en reinversión se incrementarán en promedio en 420 soles. El gerente piensa que este reporte exagera el incremento, por lo que le pide a usted indagar ello. Si para esto usted selecciona al azar 9 empresas del sector que en promedio tenían 30,310 soles mensuales de ingresos, encontrando para estas un gasto promedio de reinversión de 10,384 soles, que es lo que concluiría a un nivel de significación de $\alpha = 0.05$. Use el contraste UMP anterior. (1.0 punto)

$P(Z < \frac{1}{\sqrt{100}}$ (.40)

$P(Z < \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{101}})$

3.- La proporción de asistencia a cierto campeonato, en un estadio con capacidad para un total de $N = 80{,}000$ espectadores, se asume que es una v.a X continua con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} & , \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle el estimador de máxima verosimilitud de θ y analice su consistencia. (2.0 puntos)

b) Obtenga, basado en el estimador de máxima verosimilitud de θ y el teorema del límite central, un intervalo de confianza al 95% para el número medio de espectadores que asisten por partido a este campeonato y evalúelo si en una muestra aleatoria de $n = 36$ partidos del campeonato en este estadio se observo que $\sum_{i=1}^{36} \log(x_i) = -18.73$, siendo x_i la proporción observada de asistencia al $i-$ésimo de estos partidos. (3.0 puntos)

SUG: Muestre que la v.a $Y = -\log(X)$ tiene distribución exponencial de media θ.

4.- Un centro comercial posee $\theta \in \mathbf{N}^+$ entradas, que usted desconoce. Suponga que asume que la cantidad de entradas a este centro comercial es una v.a X con la siguiente función de probabilidad

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & , \text{ si } x = 1, 2, \ldots, \theta. \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle el estimador de momentos de θ. (1.0 punto)

b) Muestre que el estimador de máxima verosimilitud de θ viene dado por $\hat{\theta}_{MV} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. (1.0 punto)

Pagar

c) Halle la función de distribución (acumulada) del estimador de máxima verosimilitud. (1.0 punto)

Pagar

d) ¿Con qué probabilidad $\hat{\theta}_{MV}$ diferirá de θ en más de una unidad? (1.0 punto)

e) Suponga que al entrevistar a 10 personas seleccionadas al azar, que acudieron al centro comercial, estos manifestaron que ingresaron por las puertas: 3, 5, 7, 3, 10, 4, 4, 4, 1, 9. Asumiendo que todas las puertas del centro comercial están habilitadas y numeradas, de las estimaciones de momentos y de máxima verosimilitud de θ. (1.0 punto)

5.- Suponga que el precio de un bien en soles es una v.a X con distribución normal de media $\mu = 380$ y varianza σ^2, donde 380 soles es el precio sugerido por el fabricante.

a) Tomada una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de X, muestre que la v.a $Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - 380)^2}{\sigma^2}$ tiene distribución chi-cuadrado indicando sus grados de libertad. (1.0 punto)

b) Obtenga, usando como variable pivote a Y, un intervalo de confianza al 98% para σ^2. (2.0 puntos)

c) Suponga que desea contrastar a nivel $\alpha = 0.05$, $H_0 : \sigma^2 = 100$ vs $H_1 : \sigma^2 > 100$ y al tomar una m.a de tamaño $n = 30$ de X encuentra que el valor de la estadística Y cuando H_0 es verdadera es de 48.94. Utilice esta información, construyendo una prueba UMP para el contraste, a fin de decidir si se tiene que rechazar o no H_0. (2.0 puntos)

Pando, 7 de Julio de 2018

Prof. Luis Valdivieso

2. .

10-159

$\sum_{x=1}^{\theta} x = \frac{\theta(\theta}{2}$