PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMIA

ESTADISTICA INFERENCIAL
PRACTICA CALIFICADA 4

Problema 1 (7 puntos)
Si X es v.a. discreta con función de probabilidad $P_X(x;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$ $x = 0{,}1$. Donde $0 < \theta < 1$
Halle el MELI de θ y verifique que se trata de un estimador consistente.

Solución:
Sea $\tilde{\theta}$ el MELI de θ, entonces:

(1) $\tilde{\theta}$ debe ser lineal, es decir $\tilde{\theta} = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$
(2) $\tilde{\theta}$ debe ser insesgado, luego $\tilde{\theta} = \theta \Rightarrow E(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X)$. Necesitamos $E(X)$:
$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x\, P_X(x;\theta) = 0P_X(0;\theta) + 1P_X(1;\theta) = P_X(1;\theta) = \theta^1(1-\theta)^{1-1} = \theta$, entonces
$\sum_{i=1}^{n} c_i E(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i \theta = \theta \Rightarrow \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} c_i = 1}$ **es la restricción que debe cumplirse**.
(3) $V(\tilde{\theta}) = Mín$; y $V(\tilde{\theta}) = V(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2\, V(X)$. Ahora necesitamos $V(X)$:
Como $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = E(X^2) - \theta^2$ y $E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2\, P_X(x;\theta) = 0^2 P_X(0;\theta) + 1^2 P_X(1;\theta) = P_X(1;\theta) = \theta \Rightarrow V(X) = \theta - \theta^2 = \theta(1-\theta)$.
Regresando a $V(\tilde{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2\, V(X) = \theta(1-\theta)\sum_{i=1}^{n} c_i^2$, **tenemos que minimizar** $V(\tilde{\theta}) = \theta(1-\theta)\sum_{i=1}^{n} c_i^2$**, lo que equivale a minimizar** $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$ **pues** $\boldsymbol{\theta(1-\theta) = V(X) > 0}$**.**

Hallar el MELI $\tilde{\theta}$ equivale, entonces, a resolver el problema $Mín(\sum_{i=1}^{n} c_i^2)\ s.a.\ \sum_{i=1}^{n} c_i = 1$.
Aplicando Lagrange:

$$L(c_1, c_2, \dots, c_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_i\right)$$

Condiciones de primer orden $\boldsymbol{\nabla L = 0}$:

$$\frac{\partial L}{\partial c_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial c_k}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} c_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial c_k} c_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial c_k} c_i = 0 \Leftrightarrow 2c_k - \lambda = 0\ \ k = 1,2,\dots,n.$$

$\Rightarrow c_k = \frac{\lambda}{2}$ $k = 1,2,\dots,n$ (Note que $\frac{\partial}{\partial c_k} c_i^2 = 2c_k\ si\ i = k\ y\ \frac{\partial}{\partial c_k} c_i^2 = 0\ si\ i \neq k$ y análogamente $\frac{\partial}{\partial c_k} c_i = 1\ si\ i = k$ o 0 en caso contrario)

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 1 - \sum_{i=1}^{n} c_i = 0$ y como $c_k = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow\ c_k = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{2} = 0 \Rightarrow\ n\frac{\lambda}{2} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{n} \Rightarrow c_i = \frac{1}{n}$.

Asumiendo que se cumplen las **Condiciones de segundo orden** para un mínimo, tenemos que el MELI de θ sería $\tilde{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i = \bar{X}$ el cual resulta estimador consistente, pues aplicando límite en probabilidad $Plim$ a $\tilde{\theta} = \bar{X}$: $Plim(\tilde{\theta}) = Plim(\bar{X}) = \mu_X = \theta \Rightarrow$ El MELI $\tilde{\theta}$ es estimador consistente de θ.

Problema 2 (6 puntos)

a) Suponga que el capital inicial de una microempresa es una v.a. continua $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 9)$ y se toma una m.a. de tamaño $n = 30$, use la distribución χ^2 y halle c tal que $P(2S^2 \le c) = 0.90$ (2 puntos)

b) Si $X \sim N(0, \sigma^2)$ y se toma una muestra de $n = 9$ casos, usando la distribución t-Student, calcule *c* tal que $P(-cS \le \bar{X} \le cS) = 0.95$ (2 puntos)

c) En b), halle el estimador de momentos de σ^2 (1 punto)

d) Si $X \sim N(0, \sigma^2)$ e $Y \sim N(0, 2\sigma^2)$ son independientes y de la primera distribución se toma una muestra de tamaño $n_1 = 7$ mientras que de la segunda se toma una muestra de tamaño $n_2 = 9$, halle c tal que $U = c\frac{S_X^2}{S_Y^2}$ tenga distribución F de Fisher. (1 punto)

Solución:

a) $0.90 = P(2S^2 \leq c) = P\left(S^2 \leq \frac{c}{2}\right) = P\left(\frac{29S^2}{9} \leq \frac{29}{9}\frac{c}{2}\right) = P\left(W \leq \frac{29c}{18}\right)$ y como $W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{29S^2}{9} \sim \chi^2(k = n-1 = 29)$, de la tabla $\chi^2(29)$ se tiene $\frac{29c}{18} = 39.087 \Rightarrow c = 24.2612$

b) $0.95 = P(-cS \leq \bar{X} \leq cS) = P\left(-c \leq \frac{\bar{X}}{S} \leq c\right) = P\left(-3c \leq \frac{3\bar{X}}{S} \leq 3c\right)$ y como $t = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{S} \sim t(k = n-1)$, en este caso $\sqrt{9}\frac{\bar{X}}{S} = \frac{3\bar{X}}{S} \sim t(k = 8)$ así que:

$$0.95 = P\left(-3c \leq \frac{3\bar{X}}{S} \leq 3c\right) \Rightarrow 0.975 = P\left(\frac{3\bar{X}}{S} \leq 3c\right) = P(t \leq 3c) \Rightarrow 3c = 2.3060 \Rightarrow c = 0.769$$

c) $X \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow m_1 = E(X) = 0$: El primer momento no sirve, pasamos al segundo momento

$m_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = \sigma^2$ es la ecuación estructural, por tanto, la ecuación de estimación es $M_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} = \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$ es el estimador de momentos de σ^2.

d) Si $X \sim N(0, \sigma^2)$ e $Y \sim N(0, 2\sigma^2)$ son independientes, sabemos que $W_1 = \frac{(n_1-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(k_1 = n_1 - 1)$ que en este caso equivale a $W_1 = \frac{6S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(k_1 = 6)$ y análogamente $W_2 = \frac{8S_Y^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(k_2 = 8)$ de mod que la variable que sabemos tiene "estructura" de una variable F de Fisher, es $F = \frac{\frac{W_1}{k_1}}{\frac{W_2}{k_2}} = \frac{\frac{W_1}{6}}{\frac{W_2}{8}} = \frac{\frac{S_X^2}{\sigma^2}}{\frac{8S_Y^2}{2\sigma^2}} = \frac{S_X^2}{4S_Y^2} \sim F(k_1 = 6, k_2 = 8)$ y comparando con $U = c\frac{S_X^2}{S_Y^2}$ vemos que $c = \frac{1}{4}$ hace que $U = c\frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{S_X^2}{4S_Y^2}$ tenga distribución $F(6,8)$

Problema 3 (7 puntos)

Sea X con distribución uniforme $X \sim U(x; \alpha, \beta)$.

a) Si $\alpha = \alpha_0$ es conocido, halle el estimador de β mediante el método de momentos y pruebe que se trata de un estimador consistente. (3 puntos)

b) Si los dos parámetros son de valor desconocido, halle sus estimadores mediante el método de momentos. Pruebe que son estimadores consistentes. (4 puntos)

Solución:

a) Si $\alpha = \alpha_0$ entonces sólo tenemos *p* = 1 parámetro por estimar.

(1) $m_1 = E(X) = \mu_X = \frac{\alpha_0 + \beta}{2}$ sería la "ecuación estructural" inicial. Reemplazando parámetros por estimadores tenemos

(2) $\bar{X} = \frac{\alpha_0 + \hat{\beta}}{2}$ sería la "ecuación de estimación" y resolviendo tenemos $\boldsymbol{\hat{\beta} = 2\bar{X} - \alpha_0}$ como el estimador de momentos de β. Y como $Plim(\hat{\beta}) = Plim(2\bar{X} - \alpha_0) = Plim(2\bar{X}) - Plim(\alpha_0) = 2Plim(\bar{X}) - \alpha_0 = 2\mu_X - \alpha_0 = 2\frac{\alpha_0 + \beta}{2} - \alpha_0 = \beta$, es claro que $\hat{\beta}$ es estimador consistente de β.

b) En este caso tenemos *p* = 2 parámetros por estimar, necesitamos dos ecuaciones:

(1) $\begin{cases} m_1 = E(X) = \mu_X \\ m_2 = E(X^2) = \sigma_X^2 + (\mu_X)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = E(X) = h_1(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ m_2 = E(X^2) = h_2(\alpha,\beta) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12} + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \end{cases}$ son las e. estructurales reemplazando parámetros por estimadores, tenemos las e. de estimación por resolver:

(2) $\begin{cases} \bar{X} = h_1(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{2} & (I) \\ M_2 = h_2(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \frac{(\hat{\beta}-\hat{\alpha})^2}{12} + \left(\frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{2}\right)^2 & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{X} = \frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{2} & (I) \\ \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} = \frac{(\hat{\beta}-\hat{\alpha})^2}{12} + \left(\frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{2}\right)^2 & (II) \end{cases} \Rightarrow$

de (I) $\hat{\alpha} = 2\bar{X} - \hat{\beta}$ y en (II):

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} = \frac{\left(\hat{\beta} - 2\bar{X} + \hat{\beta}\right)^2}{12} + \bar{X}^2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} = \frac{\left(2\hat{\beta} - 2\bar{X}\right)^2}{12} + \bar{X}^2 = \frac{4\left(\hat{\beta} - \bar{X}\right)^2}{12} + \bar{X}^2$$
$$= \frac{\left(\hat{\beta} - \bar{X}\right)^2}{3} + \bar{X}^2 \Rightarrow$$
$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} = \frac{\left(\hat{\beta} - \bar{X}\right)^2}{3} + \bar{X}^2 \Rightarrow \left(\hat{\beta} - \bar{X}\right)^2 = 3\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2\right) \Rightarrow \left|\hat{\beta} - \bar{X}\right| = \pm\sqrt{3\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2\right)}$$

$\Rightarrow \hat{\beta} = \bar{X} \pm \sqrt{3\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2\right)}$ y en $\hat{\alpha} = 2\bar{X} - \hat{\beta} = 2\bar{X} - \left(\bar{X} \pm \sqrt{3\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2\right)}\right) \Rightarrow$

$\hat{\alpha} = \bar{X} \mp \sqrt{3\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2\right)}$.

Como por definición en la distribución uniforme $\alpha < \beta$, entonces optamos por

$\hat{\alpha} = \bar{X} - \sqrt{3\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2\right)}$ y $\hat{\beta} = \bar{X} + \sqrt{3\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2\right)}$, que son los estimadores de α y β por el método de momentos.

Para la consistencia sólo se puede usar el *Plim*, tomando en cuenta que ya sabemos que $Plim(M_k) = m_k = E(X^k)$, donde $M_k := \frac{\sum_{i=1}^n X_i^k}{n}$, por tanto, en particular, $Plim(\bar{X}) = \mu_X$ y $Plim(M_2) = Plim\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right) = m_2 = E(X^2)$

17 de noviembre de 2018.

ACG./SAMP.