

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
EXÁMEN 1

Sólo está permitido el uso de calculadora, formulario oficial y tablas de distribuciones. Desarrolle sólo 4 de las siguientes 5 problemas, indicando en la contracarátula de su cuadernillo la pregunta que no ha contestado.

Problema 1. Una empresa manufacturera produce cada mes X unidades defectuosas, donde se asume que X tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 10e^{-2K}$, siendo K el monto mensual en miles de soles que la empresa invierte en mejorar la producción. Si cada unidad defectuosa genera una pérdida de 200 soles.

- Halle la probabilidad de que en un mes se produzcan 8 unidades defectuosas, si en este mes no se invirtió nada en mejorar la producción. (1.0 punto)
- Si durante un mes no hubo inversión para mejorar la producción ¿con qué probabilidad la segunda unidad defectuosa que se presente en este mes, se producirá después de 3 días de iniciado el mes? Asuma que este mes tiene 30 días. (1.0 punto)
- ¿Cuál sería el costo esperado (por producción defectuosa e inversión), si durante un mes se invirtieran 1,000 soles en mejorar la producción? (1.0 punto)
- Halle el valor óptimo de K ; es decir, aquel que minimice el costo esperado mensual (por producción defectuosa e inversión). (2.0 puntos)

Problema 2. Sea X el número de tarjetas distintas de crédito que mensualmente utiliza una persona para realizar sus compras y sea Y el número de tarjetas de crédito que la persona posee, donde se asume que Y tiene la siguiente función de probabilidad:

$$P_Y(y) = \begin{cases} 0.2 + 0.02(4 - (y - 2)^2), & \text{si } y = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si la función de probabilidad condicional de X , dado que $Y = y$, se asume viene dada por:

$$P_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \text{ e } y = 0 \\ 0.1, & \text{si } x = 0 \text{ e } y \neq 0 \\ \frac{C}{y}, & \text{si } x = 1, 2, \dots, y \text{ e } y \neq 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Halle el valor de C . (1.0 punto)
- Halle la función de probabilidad conjunta del vector (X, Y) . (1.5 puntos)
- Halle e interprete la función de probabilidad marginal de X . (1.5 puntos)
- ¿Con qué probabilidad una persona poseerá 3 tarjetas de crédito, si se sabe que durante un mes utilizó dos distintas tarjetas de crédito? (1.0 punto)

2 veces letra cu
3 ultima letra de
Boletín de
votaciones

Problema 3. Un modelo asume que el ingreso mensual de los clientes de un banco, en miles de soles, es una v.a. continua X con distribución lognormal de parámetros $\mu = 2$ y $\sigma^2 = 1$. Estos clientes, dependiendo si sus ingresos son menores a 3,000 soles, están entre 3,000 y 5,000 soles o son superiores a los 5,000 soles son clasificados por el banco en tres grupos C, B y A; respectivamente.

- a) ¿Cuál es el ingreso medio de un cliente en el banco? (1.0 punto)
- b) ¿Con qué probabilidad un cliente tendrá ingresos superiores a los 3,000 soles? (1.0 punto)
- c) Si le asignan al azar 10 clientes ¿con qué probabilidad la mayoría de ellos serán del grupo C? (1.5 puntos)
- d) Suponga que darán un bono de S/. 500 por manejar la cartera de un cliente del grupo A y un bono de S/. 100 por manejar la cartera de un cliente del grupo B. Si le asignan al azar a 10 clientes del banco ¿cuál sería el valor esperado y la desviación estándar del monto por bonos que percibiría por manejar la cartera de estos 10 clientes? (1.5 puntos)

Problema 4. Suponga que antes de la realización de los últimos comicios para elegir gobernadores de una región, se asumía que la proporción de votos que alcanzarían dos candidatos A y B, eran respectivamente dos v.a's continuas X e Y con la siguiente función de densidad

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 420x^3y^2, & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \text{ e } 0 < x + y < 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En esta elección sólo pasarán a segunda vuelta los dos candidatos que alcancen las mayores votaciones, siempre y cuando la proporción de votantes por ellos supere al resto. En caso contrario se realizará la segunda vuelta con todos y ganará el que obtenga la mayoría simple.

- a) Halle la probabilidad de que A y B pasen a la segunda vuelta. (1.5 puntos)
- b) Halle la función de densidad marginal de X y la proporción esperada de votos que lograría el candidato A en la primera vuelta. (2.0 puntos)
- c) Halle la regresión de Y sobre X e interprete esta en términos de lo que se esperaría cambie el porcentaje de votos por A, si el porcentaje de votos por B subiera en un 1%. (1.5 puntos)

Problema 5. Un economista plantea para los negocios de restaurantes de una ciudad, que los montos de inversión inicial para abrir un restaurante, X , y los montos de utilidades, Y , que este genera durante su primer año (ambos en miles de dólares) son v.a's con distribución normal bivariada

de vector de medias $\mu = [2.3, 4.5]^T$ y matriz de varianza-covarianza $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & \frac{49}{4} \end{bmatrix}$. Según esto:

- a) ¿Con qué probabilidad un nuevo negocio de restaurante en la ciudad obtendrá utilidades superiores a los 5,000 dólares durante su primer año? (1.0 punto)
- b) ¿Con qué probabilidad el abrir un restaurante en esta ciudad no resultará rentable al término del primer año? (2.0 puntos)
- c) Juan y Paco han abierto simultáneamente un restaurante en esta ciudad, invirtiendo cada uno de ellos 2,000 y 3,000 dólares, respectivamente ¿qué diferencia en utilidades se esperará obtengan ellos para sus negocios durante el primer año? (2.0 puntos)