PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

PRÁCTICA CALIFICADA 1
CURSO: EST 241 Estadística Inferencial. HORARIO: 0621. PROFESOR: Arturo Calderón G.
FECHA: 13 de abril de 2019. SEMESTRE: 2019-1. DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 horas.

Salvo formulario y calculadora, no está permitido el uso de otro material de consulta durante el desarrollo de la prueba, ni el uso de otros dispositivos electrónicos (celulares, tablets, laptops, iPods, etc.). Cualquier material <u>relativo al curso, así como celulares y dispositivos electrónicos, deben permanecer guardados durante la prueba.</u>

Problema 1 (8 puntos)

a) Un analista bursátil asigna probabilidades subjetivas a los eventos A y B, donde A = "La bolsa caerá mañana" y B = "La bolsa caerá pasado mañana", de modo que $P(A)$=1/2; $P(B)$=1/5 y $P(A \cap B)$=1/16. Halle la probabilidad de que la bolsa caiga sólo una vez. De que caiga mañana, si se supone que caerá sólo una vez.

Solución:

Se pregunta por $P(Bolsa\ caiga\ sólo\ una\ vez) = P\big((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)\big) = P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B)$ y $P(Bolsa\ caiga\ mañana | Caerá\ sólo\ una\ vez) = P\big(A | (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)\big)$

Ordenando información en una Tabla de contingencia:

S	A	A^C	Total
B	0.0625	0.1375	0.20
B^C	0.4375		0.80
Total	0.50	0.50	1

Completando la tabla: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) \Rightarrow 0.5 = 0.0625 + P(A \cap B^C)$ $\Rightarrow P(A \cap B^C) = 0.5 - 0.0625 = 0.4375$; análogamente $P(A^C \cap B) = 0.2 - 0.0625$ $= 0.1375 \Rightarrow P(Bolsa\ caiga\ sólo\ una\ vez) = 0.4375 + 0.1375 += 0.575$ y $P(Bolsa\ caiga\ mañana | Caerá\ sólo\ una\ vez) = P\big(A | (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)\big) =$

$$\frac{P\big(A \cap (A \cap B^C) \cup A \cap (A^C \cap B)\big)}{P\big((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)\big)} = \frac{P\big(A \cap (A \cap B^C)\big)}{0.575} = \frac{P(A \cap B^C)}{0.575} = \frac{0.4375}{0.575} = 0.7608$$

b) En una región el Ingreso Familiar X en la región es una v.a.c. con distribución normal $N(\mu,\sigma^2)$ con μ = 500 unidades monetarias. En esta región el costo de una canasta alimentaria mínima es 460 unidades monetarias y el 21.19% está "en condición de pobreza". Si hay dos alternativas de inversión estatal para la región: Con la primera el ingreso de cada familia subirá en 10 unidades monetarias mientras que con la segunda habrá un incremento de 3% en el ingreso de cada familia ¿Cuál alternativa es más conveniente para reducir la pobreza en la región? Justifique.

Solución:

La alternativa más conveniente es la que reduce el porcentaje de familias en pobreza, o sea aquella donde hay menor probabilidad de que el ingreso (nuevo) sea inferior al costo de la canasta que es 460:

Si $Y = Nuevo\ ingreso\ con\ alternativa\ 1 \Rightarrow Y = X + 10$ y $P(Pobreza) = P(Y < 460) = P(X + 10 < 460) =$ $P(X < 450) = P(Z < \frac{450-500}{\sigma}) = P(Z < -\frac{50}{\sigma})$.

Si $W = Nuevo\ ingreso\ con\ alternativa\ 2 \Rightarrow W = 1.03X$ y $P(Pobreza) = P(W < 460) = P(1.03X < 460) =$ $P(X < 446.6) = P\left(Z < \frac{446.6-500}{\sigma}\right) = P\left(Z < -\frac{53.4}{\sigma}\right)$. Nos faltaría σ para tener las probabilidades exactas, pero no es necesario en este caso, pues como $\sigma > 0$ es la misma, entonces: $-\frac{53.4}{\sigma} < -\frac{50}{\sigma} \Rightarrow F_Z\left(-\frac{53.4}{\sigma}\right) < F_Z\left(-\frac{50}{\sigma}\right) \forall\, \sigma \Rightarrow$ $P(Pobreza\ con\ alt.2) = P(W < 460) = F_Z\left(-\frac{53.4}{\sigma}\right) < F_Z\left(-\frac{50}{\sigma}\right) = P(Y < 460) = P(Pobreza\ con\ alt.1)$

La alternativa 2 es más conveniente para reducir la pobreza en la región.

Nota:

Si nos tomamos el trabajo de hallar σ, partiendo de $0.2119 = P(X < 460) = P\left(Z < \frac{460-500}{\sigma}\right) = P(Z < \frac{-40}{\sigma}) \Rightarrow$ $\frac{-40}{\sigma} = -0.8 \Rightarrow \sigma = 50$ y así tenemos, explícitamente:

$P(Pobreza\ con\ alt.2) = F_Z\left(-\frac{53.4}{50}\right) = F_Z(-1.07) = 0.1424$ o 14.24% de familias pobres

$P(Pobreza\ con\ alt.1) = F_Z\left(-\frac{50}{50}\right) = F_Z(-1.0) = 0.1587$ o 15.87% de familias pobres.

c) Si el número de trabajadores que tiene una pequeña empresa del sector metal-mecánica es una variable aleatoria X con $P_X(x) = a(7\text{-}x)$ x = 1,2,3,4,5,6; siendo a una constante. Halle el valor de a. Un economista toma al azar dos empresas de este sector. Él asume que las empresas son independientes en cuanto al número de trabajadores y para su estudio se plantea el objetivo de entrevistar a 4 trabajadores en total ¿Logrará su objetivo?

Solución:

$1 = \sum_{x=1}^{6} P_X(x) = 6a + 5a + 4a + 3a + 2a + a \Rightarrow 21a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{21}$ y $P_X(x) = \frac{(7-x)}{21}$ $x = 1,2,\dots,6.$

Si $P(Lograr\ objetivo) = P(4\ trabajadores\ en\ total) = P(X=1)P(X=3) + P(X=3)P(X=1) + P(X=2)P(X=2) = 2 \times \frac{6}{21} \times \frac{4}{21} + \frac{5}{21} \times \frac{5}{21} = 0.1655 < 0.5$: No logrará su objetivo.

d) Se toman tres números al azar del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y se define Y= Máximo de los tres números. Halle el rango R_Y y la función de probabilidades $P_Y(y)$ de Y.

Solución:

$R_Y = \{3,4,\dots,n\}$ pues son tres números y el caso más simple es $\{1,2,3\}$, en cuyo caso el máximo es 3; el caso de valor extremo es $\{n-2, n-1, n\}$ en que el máximo es n.

$$P_Y(y) = P(Y=y) = \frac{n(Y=y)}{n(S)} = \frac{n(Un\ número\ es\ y\ y\ los\ otros\ dos\ menores\ que\ y)}{C_3^n} = \frac{\overbrace{1 \times C_2^{y-1}}^{\substack{Selecciono\ a\ y\ y\ dos \\ números\ debajo\ de\ y}}}{C_3^n} = \frac{C_2^{y-1}}{C_3^n}\quad y = 3,2,\dots,n$$

Problema 2 (6 puntos)

En el diseño de un muestreo de viviendas en una zona, hay tres cuadras A_1, A_2, y A_3 que tienen 10, 20 y 30 viviendas respectivamente. Se hace un sorteo de las cuadras y se elige una de ellas, luego, dentro de esa cuadra, se selecciona 3 viviendas al azar.

a) Si la cuadra se elige al azar, calcule la probabilidad que tiene una vivienda de A_1 de ser parte de la muestra.

Solución:

Sea ***v*** una vivienda específica de A_1, y sean los eventos:

A_1 = "La cuadra A_1 es seleccionada"; B = "La vivienda ***v*** es parte de la muestra". Entonces, como se elige al azar una de las tres cuadras, tenemos $P(A_1) = \frac{1}{3}$. Por otra parte $P(B) = P(B \cap A_1) + P\left(\overbrace{B \cap A_1^c}^{\emptyset}\right) = P(B \cap A_1) = P(B|A_1)P(A_1)$

y $P(B|A_1) = \dfrac{\overbrace{1 \times C_2^9}^{\substack{Selecciono\ v\ y\ luego\ selecciono \\ otras\ 2\ viviendas\ de\ las\ 9\ restantes}}}{\underbrace{C_3^{10}}_{\substack{Selecciono\ 3\ viviendas \\ dentro\ de\ las\ 10\ de\ A_1}}} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} \Rightarrow \boldsymbol{P(B) = P(B \cap A_1) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10} = 0.1}$

b) Si la cuadra se elige al azar, calcule la probabilidad que tiene una vivienda cualquiera de la zona de ser parte de la muestra.

Solución:

Sea ***v*** una vivienda específica de la zona, y sean los eventos:

A_1 = "La cuadra A_1 es seleccionada"; A_2 = "La cuadra A_2 es seleccionada"; A_3 = "La cuadra A_3 es seleccionada"; V = "La vivienda ***v*** es parte de la muestra". Entonces, como se elige al azar una de las tres cuadras, tenemos $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$. Por otra parte $P(V) = P(V \cap A_1) + P(V \cap A_2) + P(V \cap A_3)$ pues $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ siendo los eventos excluyentes, pues es claro que ***v*** sólo puede estar en una de las cuadras. Aplicando Probabilidad Total: $P(V) = P(V|A_1)P(A_1) + P(V|A_2)P(A_2) + P(V|A_3)P(A_3)$. Trabajando dentro de cada cuadra, como en a):

$P(V|A_1) = \frac{3}{10} \Rightarrow \boldsymbol{P(V \cap A_1) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}}$;

$P(V|A_2) = \frac{C_2^{19}}{C_3^{20}} = \frac{3}{20} \Rightarrow \boldsymbol{P(V \cap A_2) = \frac{3}{20} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{20}}$;

$P(V|A_3) = \frac{C_2^{29}}{C_3^{30}} = \frac{1}{10} \Rightarrow \boldsymbol{P(V \cap A_3) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{30}}$.

$P(V) = P(V \cap A_1) + P(V \cap A_2) + P(V \cap A_3) = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{11}{60} = 0.183$ es la probabilidad pedida.

c) Si en el sorteo de las cuadras, cada cuadra se elige con probabilidad proporcional a la cantidad de viviendas que tiene, calcule la probabilidad que tiene una vivienda cualquiera de la zona de ser parte de la muestra. ¿Es cierto que todas las viviendas de la zona tienen igual probabilidad de ser parte de la muestra?

Solución:

Definamos, como en b) los eventos: A_1, A_2, A_3 y V. Ahora el nuevo dato es que "cada cuadra se elige con probabilidad proporcional a la cantidad de viviendas que tiene", esto es: $P(A_1) = 10\alpha;\ P(A_2) = 20\alpha$ y $P(A_3) = 30\alpha$, donde se sigue cumpliendo $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \Rightarrow 1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 10\alpha + 20\alpha + 30\alpha = 60\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{60}$ y

$P(V) = P(V \cap A_1) + P(V \cap A_2) + P(V \cap A_3)$.

$P(V|A_1) = \frac{3}{10};\ P(A_1) = \frac{10}{60} \Rightarrow P(V \cap A_1) = \frac{3}{10} \times \frac{10}{60} = \frac{3}{60};$

$P(V|A_2) = \frac{3}{20};\ P(A_2) = \frac{20}{60} \Rightarrow P(V \cap A_2) = \frac{3}{20} \times \frac{20}{60} = \frac{3}{60};$

$P(V|A_3) = \frac{1}{10};\ P(A_3) = \frac{30}{60} \Rightarrow P(V \cap A_3) = \frac{1}{10} \times \frac{30}{60} = \frac{3}{60};$

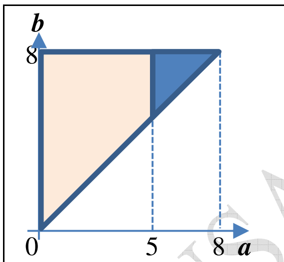
Luego $P(V) = \frac{9}{60}$ y es claro que todas las viviendas de la zona tienen la misma probabilidad de integrar la muestra, en cambio en b) no es así, la probabilidad va cambiando según la cuadra.

Problema 3 (6 puntos)

Apenas empieza una jornada laboral de 8 horas, un operario empieza a ensamblar una máquina y puede terminar en la hora $\boldsymbol{a}$ de ese día, donde $\boldsymbol{a}$ es cualquier hora dentro de la jornada. Inmediatamente recibe una segunda máquina para ensamblar durante el resto de la jornada y puede terminar en cualquier hora $\boldsymbol{b}$ de ese día. El resto del tiempo de la jornada, si le sobra, lo dedica a otras actividades laborales. Sin más información:

a) Describa el espacio muestra asociado a observar las horas $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ de término del trabajo de ensamblaje de las máquinas y halle la probabilidad de que le tome más de 5 horas ensamblar la primera máquina.

Solución:

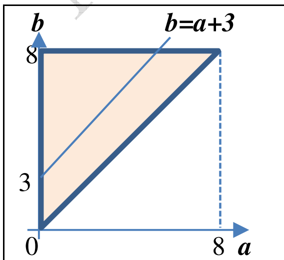


Como $\boldsymbol{a}$ es la hora de término del ensamblaje de la primera máquina y $0 < a < 8$, mientras que $\boldsymbol{b}$ es la hora de término del ensamblaje de la segunda, donde $0 < a < b \leq 8$, entonces el espacio muestral puede ser $S = \{(a,b)|0 < a < b \leq 8\}$ que es un triángulo como el que figura la lado izquierdo.
Si A = "Le toma más de 5 horas ensamblar la primera máquina", entonces $A = \{(a,b) \in S|a > 5\} = \{(a,b) \in S|5 < a < b \leq 8\}$ que es un triángulo como el triángulo azul que figura a la izquierda. Como S tiene área, aplicamos probabilidad geométrica:

$P(A) = \frac{área(A)}{área(S)} = \frac{\frac{3\times3}{2}}{\frac{8\times8}{2}} = \frac{9}{64} = 0.141$ es la probabilidad pedida.

b) Calcule la probabilidad de que demore menos de 3 horas con la segunda máquina.

Solución:



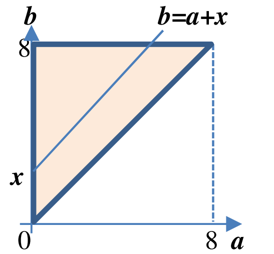
Dado que $\boldsymbol{a}$ es la hora de término del ensamblaje de la primer máquina $\boldsymbol{b}$ es la hora de término del ensamblaje de la segunda, entonces la duración del ensamblaje de la segunda máquina es $d = b - a$ y se pide $P(d < 3) = P(b - a < 3) = P(b < a + 3) =$

$1 - P(b \geq a + 3)$ y $P(b \geq a + 3) = \frac{\frac{5\times5}{2}}{\frac{8\times8}{2}} = \frac{25}{64} \Rightarrow$

$$P(d < 3) = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64} = 0.609$$

c) Sea X= Tiempo que demora en ensamblar la segunda máquina. Halle el rango R_X, la función de densidad f_X y el valor esperado μ_X de X.

Solución:



Como en b), si X = Tiempo que demora en ensamblar la segunda máquina, entonces es $X = b - a$ y de $S = \{(a,b)|0 < a < b \le 8\} = S = \{(a,b)|0 < a < 8, a < b \le 8\} \Rightarrow 0 < b - a < 8 \Rightarrow R_X =]0,8[$. Hallemos primero $F_X(x) = P(X \le x)\ x \in R_X$:

$F_X(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x)$. $P(X > x) = P(b - a > x) = P(b > a + x) = \frac{\frac{(8-x)\times(8-x)}{2}}{\frac{8\times 8}{2}} = \frac{(8-x)^2}{64} \Rightarrow F_X(x) = 1 - \frac{(8-x)^2}{64}$ $\quad 0 < x < 8$. Derivando obtenemos $f_X(x)$:

$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{8-x}{32}$ $\quad 0 < x < 8$ es una función de densidad de X

$\mu_X = E(X) = \int_0^8 x f_X(x)dx = \int_0^8 x\frac{(8-x)}{32}dx = \frac{1}{32}\left[4x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^8 = \frac{1}{32}(256 - \frac{512}{3}) = 2.67$ horas.

ACG./SAMP.