PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
EXAMEN PARCIAL

Fecha: 17 de octubre de 2015
Clave del curso: EST241
Horario: 522
Duración: 2 h y 30 min.
Profesor: José Flores Delgado

Ejercicio 1. (3 puntos)

Sea $(X, Y)^t$ un vector aleatorio que tiene distribución conjunta normal bivariable, cuyas matrices de medias y de varianzas-covarianzas son, respectivamente, $\mu_Y = A + B\mu_X$

$$\mu = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 225 & 24 \\ 24 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\mu_Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -105 \\ 4 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\mu_Y = \begin{pmatrix} -2030 \\ -335 \end{pmatrix}$

Sean $U = 10 + 4X - 105Y$ y $V = 5 + 4X - 20Y$. $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -105 \\ 4 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

a) Halle el vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas del vector $(U, V)^t$. Emplee propiedades matriciales. (2 puntos)

$E(10 + 4X - 105Y) = 10 + 4E(X) - 105E(Y) \to 10 + 4(15) - 105(20) = -2030$
$E(5 + 4X - 20Y) = 5 + 4E(X) - 20E(Y) \to 5 + 4(15) - 20(20) = -335$

b) X e Y no son independientes, ¿lo son U y V? Justifique debidamente. (1 punto)

Ejercicio 2. (4 puntos)

Sean X e Y tales que $Y \sim B(2; 1)$ y $\forall y \in (0; 1) : X|Y = y \sim U(0; y)$.

a) Halle $E(X)$ y $E(XY)$, sin usar el modelo conjunto ni el marginal de X. (2,5 puntos)

b) Determine $Cov(5 + X - 2Y; 1 + Y)$. (1,5 puntos)

Ejercicio 3. (4 puntos)

Sean las variables aleatorias X e Y tales que su modelo probabilístico conjunto está dado por la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{e^5 - 1} \frac{xye^{-xy^2}5^x}{x!}, & y > 0,\ x = 1; 2; \ldots \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine $E(X)$. (2 puntos)

b) Determine el modelo condicional de $Y|X = x$, $x = 1; 2; \ldots$ (2 puntos)

$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

$f_Y(y) = \int^{\infty}$

Ejercicio 4. **(4 puntos)**

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Ji-cuadrado, cuyo parámetro es ν, si $X \sim G(\nu/2;\ 1/2)$, donde $\nu \in \mathbb{N}^+$; se denota esto por $X \sim \chi^2(\nu)$.

Por otra parte, la distribución t de student corresponde a la función de densidad

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu}\ \Gamma(\frac{\nu}{2})(1+\frac{x^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}}\ ,\ -\infty < x < \infty,$$

donde $\nu > 0$, es el parámetro de la distribución. Si X tiene esta densidad se dice que X tiene distribución t de student con ν grados de libertad, se denota esto por $X \sim t(\nu)$.

Dadas X e Y dos variables aleatorias independientes, $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2(\nu)$, se define la variable W :

$$W = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}.$$

$W = \frac{X}{\sqrt{\frac{Z}{\nu}}}$ $X = W\sqrt{\frac{Z}{\nu}}$

a) Determine la función de densidad conjunta de W y Z, donde $Z = Y$, a partir de la correspondiente a X e Y. (2 puntos)

$Y = Z$

b) Halle e identifique el modelo probabilístico de W. (2 puntos)

Ejercicio 5. **(5 puntos)**

Considere el modelo de regresión lineal dado por $Y_j = \alpha + \beta x_j + \epsilon_j$, para $j = 1, \ldots, n$, donde $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ son variables aleatorias tales que $E(\epsilon_j) = 0$ y $V(\epsilon_j) = \sigma^2$ (para $j = 1, \ldots, n$), α y β son parámetros para estimar y $x_1, \ldots, x_n$ son constantes conocidas. ϵ_j son independientes

Los estimadores usuales de estos parámetros son:

$$\hat{\beta} = \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\ ,\ \text{donde } b_j = \frac{x_j - \bar{X}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}\ ,\ \text{para } j = 1, \ldots, n.$$

$$\hat{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} a_j Y_j\ ,\ \text{donde } a_j = \frac{1}{n} - b_j \bar{X}\ ,\text{para } j = 1, \ldots, n.$$

Obtenga expresiones simplificadas para

a) $V(\hat{\beta})$ y $V(\hat{\alpha})$; (2 puntos)

b) $Cov(\hat{\alpha};\ \hat{\beta})$; (2 puntos)

c) $V(\hat{\alpha} + \hat{\beta}\,x)$, donde x es una constante. (1 punto)