PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
PRÁCTICA CALIFICADA 5

27 de junio de 2015
Horario 522

Ejercicio 1. (6 puntos)

Sea $X \sim N(\mu; 1)$. Se desea contrastar las hipótesis $H_0 : \mu = 0$ y $H_1 : \mu = 1$, a partir de una muestra aleatoria de tamaño 16, $X_1, \ldots, X_{16}$, y que tenga un nivel de significación $\alpha = 0,05$.

a) Determine la regla de decisión que tiene la menor probabilidad de cometer un error tipo II. (3 puntos)

b) Determine la probabilidad de cometer un error tipo II, según la regla deducida anteriormente. (1,5 puntos)

c) Al tomar la muestra se registraron los valores siguientes: (1,5 puntos)

-0,3	-1,28	0,24	1,28	1,2	1,73	-2,18	-0,23
1,1	-1,09	-0,69	-1,69	-1,85	-0,98	-0,77	-2,12

Concluya según la regla de decisión deducida. No olvide cuantificar el riesgo asociado.

Ejercicio 2. (7 puntos)

Si $X \sim G(2;\ \theta)$, es decir, $f_X(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}$, $x > 0$, donde $\theta > 0$. Se desea contrastar las hipótesis $H_0 : \theta = 9$ y $H_1 : \theta > 9$, basada en una muestra aleatoria de X de tamaño $n = 49$ y un nivel de significación $\alpha = 0,05$.

a) Determine la regla de decisión UMP. (3 puntos)

Considere la distribución aproximada de $\bar{X}$ que se obtiene por ser el tamaño de muestra grande. Note que $E(X) = 2/\theta$ y $V(X) = 2/\theta^2$.

b) Si $\theta = 10$, determine la probabilidad de obtener una conclusión equivocada si se usa la regla de decisión UMP. Use la distribución aproximada de $\bar{X}$ que corresponde a este caso. (2 puntos)

c) Determine una expresión para $\beta(\theta)$ la probabilidad de cometer un error de tipo II al usar la regla de decisión UMP y bosqueje la gráfica de esta función. Use la distribución aproximada de $\bar{X}$. (2 puntos)

$\beta = P($ ~~A~~ Aceptar H_0 siendo falsa$)$, $\mu =$?

Ejercicio 3. (7 puntos)

Sea $X \sim exp(\theta)$, es decir, $f_X(x) = \theta\, e^{-\theta x}$, $x > 0$, con $\theta > 0$. Se desea contrastar las hipótesis $H_0 : \theta = 0,2$ y $H_1 : \theta > 0,2$, a partir de una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$ y un nivel de significación $\alpha = 0,05$.

a) Deduzca la región crítica UMP. (3 puntos)

Recuerde que $T = \sum_{j=1}^{10} X_j \sim G(10;\ \theta)$. Además, para $\theta = 0,2$, $F_T(27,127) = 0,05$.

b) Con la región crítica UMP, encuentre una expresión para $\beta(\theta)$ (la probabilidad de cometer un error de tipo II) y bosqueje su gráfica a partir de de los valores de la tabla siguiente que previamente deberá completar: (2 puntos)

θ	0,20	0,22	0,25	0,28	0,33	0,36	0.40	0,50	0,66	1
$\beta(\theta)$										

Tenga en cuenta la tabulación de la distribución acumulada de $T \sim G(10;\ \theta)$ siguiente:

θ	0,22	0,25	0,28	0,33	0,36	0,4	0,5	0,66	1
$F_T(27{,}127)$	0,0817	0,1481	0,2346	0,4063	0,5124	0,6431	0,8683	0,9838	0,9999

c) Al tomar la muestra aleatoria de diez valores de X se registraron los valores siguientes: $2,41$; $0,53$; $4,54$; $11,47$; $10,80$; $15,91$; $0,07$; $2,62$; $9,95$; $0,75$. Cuantifique el riesgo asociado para las decisiones como la que se debe tomar en este caso, si se considera valores de θ entre 0,36 y 0,66. (2 puntos)

$\sum x_j = 59,05$

Recordatorio

- $\alpha = P(Rechazar\ H_0)$, siendo H_0 verdadera. $\beta = P(Aceptar\ H_0)$, siendo H_0 falsa.
- **Lema de Neyman-Pearson**

  $X_j \sim f_{X_j}(x; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta$, donde $\Theta = \{\, \boldsymbol{\theta}_0,\ \boldsymbol{\theta}_1 \,\} \subset \mathbb{R}^k$.

  Sean $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = f_{X_1}(X_1;\ \boldsymbol{\theta}) \ldots f_{X_n}(X_n;\ \boldsymbol{\theta})$ y las hipótesis: $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ y $H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$, la región crítica óptima, RC, entre todas las que tienen una probabilidad de cometer el error tipo I igual a α, RC : Rechazar H_0, si $\dfrac{\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_1)}{\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_0)} > c$.
- Dadas las hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ y $H_1 : \theta \in \Theta_1$, decimos que la región crítica RC o (regla de decisión) es uniformemente óptima o uniformemente más poderosa si para cada $\theta_1 \in \Theta_1$ (que se fije), RC es la región óptima para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ y $H_1 : \theta = \theta_1$, entre todas aquellas reglas cuya probabilidad de cometer el error tipo I es $\alpha > 0$.
- $X \sim N(\mu; \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu;\ \sigma^2/n)$.
- Si n es grande $\bar{X} \overset{aprox.}{\sim} N(\mu;\ \sigma^2/n)$, donde $\mu = E(X)$ y $\sigma^2 = V(X)$.

J.F. San Miguel, 27 de junio de 2015.

PC5 2015-1

① $X \sim N(\mu, 1)$

Hipótesis $\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu = 1 \end{cases}$ muestra aleatoria tamaño 16, $\alpha = 0{,}05$

a) Determinar regla decisión con menor prob de cometer error tipo II

$$\mathcal{L}(\mu) = (2\pi)^{-1/2} (\sigma)^{-1} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x_1-\mu)^2} \times \dots \times (2\pi)^{-1/2} (\sigma)^{-1} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x_{16}-\mu)^2}$$

$$\mathcal{L}(\mu) = (2\pi)^{-16/2} (\sigma)^{-16} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\mu)^2}$$

$$\boxed{\frac{\mathcal{L}(1)}{\mathcal{L}(0)} > C} \rightarrow \frac{\cancel{(2\pi)^{-16/2} (1)^{-16}}\, e^{\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{16}(x_i-1)^2}}{\cancel{(2\pi)^{-16/2} (1)^{-16}}\, e^{\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{16}(x_i)^2}} > C$$

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{16}(x_i-1)^2} > C$$

Tomando logaritmo ya que es función creciente no afecta desigualdad

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - \sum_{i=1}^{16}(x_i-1)^2\right] > C$$

$$\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{16} x_i + 1\right] > C$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{16} x_i^2} - \cancel{\sum_{i=1}^{16} x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{16} x_i - 1 > C$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{16} x_i > C}$$

Ahora: $\alpha = 0{,}05 = P\left(\sum_{i=1}^{16} x_i > C \; ; \; \mu = 0\right)$

$$0{,}05 = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{16} x_i}{16} > \frac{C}{16} \; ; \; \mu = 0\right)$$

$$0{,}05 = P(\bar{x} > c/16 \; ; \; \mu = 0)$$

Dado $\mu = 0$: $\quad X \sim N(0; 1) \rightarrow \bar{x} \sim N(0; 1/16)$

$$Z = \frac{\bar{x}}{\sqrt{1/16}} \sim N(0; 1)$$

$$0{,}05 = P\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{1/16}} > \frac{c/16}{\sqrt{1/16}}\right)$$

$$0{,}05 = P\left(Z > \frac{c}{4}\right)$$

$$0{,}05 = 1 - P(Z \leq c/4)$$

$$P(Z \leq c/4) = 0{,}95 \rightarrow \frac{c}{4} = 1{,}645$$

$$c = 6{,}58$$

regla decisión: $\boxed{\sum_{j=1}^{16} x_j > 6{,}58}$

b) Determinar prob cometer error tipo 2

$$\beta = P(\text{aceptar } H_0 \text{ siendo falsa})$$

$$\beta = P\left(\sum_{T=1}^{16} X_T \leq 6{,}58; \; \mu = 1\right)$$

$$\beta = P\left(\frac{\sum^{16} X_T}{16} \leq 6{,}58/16 \; ; \; \mu = 1\right)$$

$$\beta = P(\bar{x} \leq 0{,}41125; \; \mu = 1)$$

$X \sim N(1, 1)$

$\bar{X} \sim N(1; 1/16)$

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - 1}{\sqrt{1/16}} \sim N(0; 1)}$$

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x} - 1}{\sqrt{1/16}} \leq \frac{0{,}41125 - 1}{\sqrt{1/16}}\right)$$

$$\beta = P(Z \leq -2{,}355)$$

$$\boxed{\beta = 0{,}0094}$$

c) Al tomar muestra se registraron valores tal que:

$$\sum_{j=1}^{16} x_j = -7,63 < 6,58$$

Se acepta H_0 con riesgo de $\beta = 0,0094$

② $X \sim G(2;\theta)$ es decir $f(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}$; $x>0$; $\theta>0$

Hipótesis $\begin{cases} H_0: \theta = 9 \\ H_1: \theta > 9 \end{cases}$ | muestra $n = 49$, $\alpha = 0,05$

a) Hallar Regla decisión UMP

$$\mathcal{L}(\theta) = \theta^2 x_1 e^{-\theta x_1} \times \cdots \times \theta^2 x_{49} e^{-\theta x_{49}}$$

$$\mathcal{L}(\theta) = \theta^{98} \left(\prod_{j=1}^{49} x_j\right) e^{-\theta \sum_{j=1}^{49} x_j}$$

$$\frac{\mathcal{L}(\theta)}{\mathcal{L}(9)} > C \Rightarrow \frac{(\theta)^{98} \cancel{\left(\prod_{j=1}^{49} x_j\right)} e^{-\theta \sum_{j=1}^{49} x_j}}{(9)^{98} \cancel{\left(\prod_{j=1}^{49} x_j\right)} e^{-9 \sum_{j=1}^{49} x_j}} > C$$

$$e^{(9-\theta) \sum_{j=1}^{49} x_j} > C$$

tomando logaritmo porque es función creciente y no afecta desigualdad

$$(9-\theta) \sum_{j=1}^{49} x_j > C$$

Dado $\theta > 9$: $\boxed{\sum_{i=1}^{49} X_i < C}$

$\hookrightarrow \alpha = 0{,}05 = P\left(\sum_{i=1}^{49} X_i < C \; ; \; \theta = 9\right)$

Dado $X \sim G(2;\theta) \rightarrow$

$\bar{X} \sim N(\mu; \sigma^2/n)$ si $\mu = E(X) = \frac{2}{\theta}$; $\sigma^2 = V(X) = \frac{2}{\theta^2}$

$\bar{X} \sim N\left(\frac{2}{\theta} ; \frac{2}{\theta^2 n}\right) \rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \frac{2}{\theta}}{\sqrt{\frac{2}{\theta^2 n}}} \sim N(0;1)$

Dado $n = 49$ y $\theta = 9$

$\hookrightarrow Z = \frac{9\bar{X} - 2}{\frac{\cancel{9}\sqrt{2}}{9 \times 7}} = \frac{63\bar{X} - 14}{\sqrt{2}}$

$0{,}05 = P\left(\sum_{i=1}^{49} X_i / 49 < \frac{C}{49} ; \theta = 9\right)$

$0{,}05 = P(\bar{X} < C/49 ; \theta = 9)$

$0{,}05 = P\left(\frac{63\bar{X} - 14}{\sqrt{2}} < \frac{63/49C - 14}{\sqrt{2}}\right)$

$0{,}05 = P\left(Z < \frac{63C/49 - 14}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow \frac{63C/49 - 14}{\sqrt{2}} = -1{,}645$

$C = 9{,}079$

regla decisión $\boxed{\sum_{i=1}^{49} X_i < 9{,}079}$

b) Si $\theta = 10$; hallar prob obtener conclusión equivocada si se usa UMP

$\beta = \left(\sum_{i=1}^{49} X_i \geq 9{,}079 \; ; \; \theta = 10\right)$

Dado

$\beta = \left(\sum_{i=1}^{49} X_i / 49 \geq 9{,}079/49 \; ; \; \theta = 10\right)$

$\beta = (\bar{X} \geq 9{,}079/49 ; \theta = 10)$

$\bar{X} \sim N\left(\frac{2}{\theta} ; \frac{2}{\theta^2 n}\right) \rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \frac{2}{\theta}}{\sqrt{\frac{2}{\theta^2 n}}} \sim N(0;1) \rightarrow$

Dado $n = 49$ y $\theta = 10$

$Z = \frac{70\bar{X} - 14}{\sqrt{2}}$

$$\beta = P\left(\frac{70\bar{x} - 14}{\sqrt{2}} \geq \left(\frac{9{,}074}{49}\right)70 - 14 / \sqrt{2}\right) \to \beta = P(Z \geq -0{,}72)$$

$$\beta = 1 - P(Z < -0{,}72) = 1 - 0{,}2358 = 0{,}7642$$

c) $\beta(\theta)$: Dado $\beta = P\left(\bar{x} \geq 0{,}185/49\right)$ y $\bar{x} \sim N\left(\frac{2}{\theta}; \frac{2}{\theta^2 n}\right)$

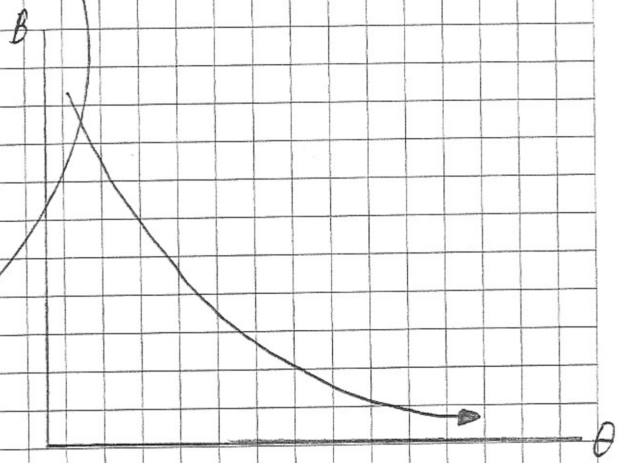
$$Z = \frac{\frac{\theta\bar{x} - 2}{\theta}}{\frac{\sqrt{2}}{\theta\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}\left(\theta\bar{x} - 2\right)}{\sqrt{2}} \sim N(0;1)$$

(*) en el infinito tiende a cero.

$$\beta = P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}\left(\theta \frac{[illegible]}{49} - 2\right)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\beta = 1 - P\left(Z < \sqrt{\frac{n}{2}}\left(\theta \cdot \frac{[illegible]}{49} - 2\right)\right)$$

Dado que $\theta\uparrow$ crecería $P\uparrow$ y así $\beta\downarrow$; β es decreciente respecto θ



③ $X \sim exp(\theta)$; $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ $\theta > 0$

Hipótesis $\begin{cases} H_0 : \theta = 0{,}2 \\ H_1 : \theta > 0{,}2 \end{cases}$ $n = 10$, $\alpha = 0{,}05$

a) deducción UMP

$$\mathcal{L}(\theta) = \theta e^{-\theta x_1} \times \cdots \times \theta e^{-\theta x_n}$$

$$\mathcal{L}(\theta) = (\theta)^{10} e^{-\theta \sum_{i=1}^{10} x_i}$$

$$\frac{\mathcal{L}(\theta)}{\mathcal{L}(0{,}2)} > c \to \frac{(\theta)^{10} e^{-\theta \sum_{i=1}^{10} x_i}}{(0{,}2)^{10} e^{-0{,}2 \sum_{i=1}^{10} x_i}} > c$$

$$e^{(0{,}2 - \theta)\sum_{i=1}^{10} x_i} > c$$

tomando logaritmo por ser función creciente no afecta desigualdad:

$$(0{,}2-\theta)\sum_{i=1}^{10} x_i > C$$

$$\ominus$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{10} x_i < C}$$

$$\alpha = 0{,}05 = P\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < C \; ; \; \theta = 0{,}2\right)$$

$T = \sum_{i=1}^{10} x_i \sim G(10,\theta) \longrightarrow$ $0{,}05 = P(T < C) \rightarrow C = 27{,}127$

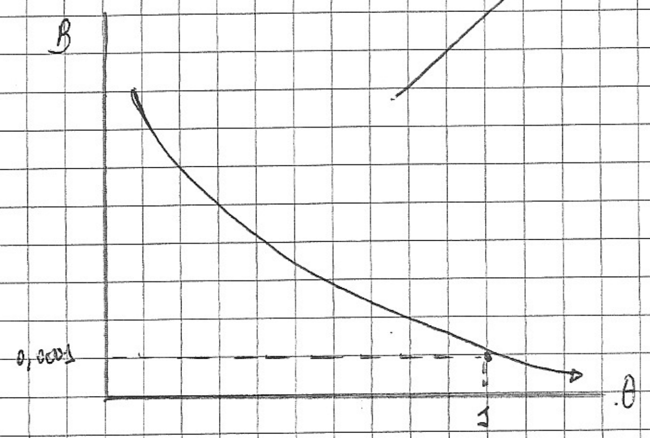
regla decisión UMP $\boxed{\sum_{i=1}^{10} x_i < 27{,}127}$

b) Hallar expresión para $\beta(\theta)$

$$\beta = P\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 27{,}127 ; \; \theta > 0{,}2\right) \rightarrow \beta = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \leq 27{,}127 ; \; \theta > 0{,}2\right)$$

β	θ
0,95	0,20
0,9183	0,22
0,8519	0,25
0,7654	0,28
0,5937	0,33
0,4876	0,36
0,3560	0,4
0,1317	0,5
0,0162	0,66
0,0001	1

β es decreciente respecto θ



c) Al tomar muestra $\sum_{i=1}^{10} x_i = 59{,}05 > 27{,}127$: Acepta Ho con riesgo que va desde 0,0162 hasta 0,4876 dado θ oscila entre 0,36 y 0,66