PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMIA

PRÁCTICA CALIFICADA No. 3
CURSO: Estadística Inferencial
CÓDIGO: EST 241
PROFESORA: Zaida Quiroz Cornejo
HORARIO: 0622

Salvo su calculadora de uso personal, no está permitido el uso de otro material de consulta durante el desarrollo de la prueba.
No está permitido el uso de ningún dispositivo electrónico (celulares, tablets, laptops, iPods, etc.).
Los celulares y las cartucheras deben permanecer guardados durante la prueba.

---

1. (5 puntos) Los salarios (en u.m.) de una ciudad A y una ciudad B son representados por las variables aleatorias X e Y, respectivamente. Sea $X_1, \ldots, X_{n_1}$ y $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ dos muestras aleatorias tomadas de poblaciones de las variables aleatorias X e Y normales independientes, tal que $X \sim N(\mu_1, 200^2)$ y $Y \sim N(\mu_2, 100^2)$, respectivamente. Sea $\bar{X}$ la media muestral de X y $\bar{Y}$ la media muestral de Y.

   a) Si se quiere estimar el salario medio μ_1 usando la estadística $\bar{X}$ de modo que con 95% de probabilidad o confiabilidad el error de aproximación $|\bar{X} - \mu_1|$ no pase de 60 u.m. ¿Qué tamaño de muestra debiera usar? (2 puntos)

   b) Si $\mu_2 = 1200$ y $n_2 = 43$. ¿Qué tan probable es que el salario del que gane más en la muestra de la ciudad B sea inferior a 1180 u.m.? (1 punto)

   c) Si $n_1 = n_2 = 43$, $\mu_1 = 1400$ y $\mu_2 = 1200$. ¿Cuál es la probabilidad de que el salario medio en la muestra de la ciudad A sea superior que el salario medio de la ciudad B en al menos 160 u.m.? (2 puntos)

2. (4 puntos) Considere el siguiente modelo simple para cambios diarios X en el precio (en u.m.) de un capital de valores. Supongamos que cada día: el precio sube 1 u.m. con probabilidad 0.52, o baja 1 u.m. con probabilidad 0.48. Defina las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_{30}$ como una m.a. que representa el aumento o reducción de 1 u.m. en el i-ésimo día.

   a) Determine el valor esperado y la varianza del cambio diario, es decir, $E[X_i]$ y $Var(X_i)$. (1 punto)

   b) ¿Cuál es la distribución del cambio medio en los 30 días? Usela para hallar la probabilidad de que el cambio medio muestral difiera del cambio media poblacional en menos de 0.2 u.m. (1 punto)

   c) Supongamos que el precio el primer día es 20 u.m. y sea T el precio al final del dia 30. Entonces:

   $$T = 200 + \sum_{i=1}^{30} X_i$$

   ¿Cuál es la probabilidad que el precio final sea superior a 210 u.m.? (2 puntos)

3. (3 puntos) Suponga que el precio que estaría dispuesto a pagar un consumidor cualquiera por un nuevo modelo de "celular inteligente" se puede considerar aleatorio. Bajo este supuesto, un economista selecciona una muestra de n hogares al azar, de un distrito emergente y entrevista a cada jefe de hogar, mostrando el celular y registrando el precio que el entrevistado dice que pagaría por el celular. El economista asume que el precio X_i mencionado por el i-ésimo jefe de hogar de su m.a. tomada de una

$\bar{X} = \frac{\sum_{1}^{30} X_i}{30}$

$E(\sum X_i) = \sum E(X) = \boxed{n.E(X)}$

$V(T) = V(200 + \sum X_i) = 0 + V(\sum X_i) = 0 + \sum V(X_i) = n.V(X)$

$P\left(\frac{200 + \sum X}{n} > \frac{210}{n}\right)$

población de la v.a. con distribución uniforme: $X \sim U(0,\theta)$, i = 1,2,...n, donde θ es el máximo precio que se obtendría por el producto, y también asume independencia entre los entrevistados. Sea $X \in R^n$ vector aleatorio que tiene los precios registrados por el economista en su muestreo.

a) Si se define la v.a. Y como el precio máximo que un entrevistado está dispuesto a pagar por un celular, es decir, $Y = Max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Calcule la función de distribución acumulada de Y, y su función de densidad. (2 puntos)

b) El economista piensa usar el valor de Y, obtenido en su muestra, como aproximación del máximo precio θ obtenible por el producto. Halle el valor esperado de Y y diga si con este procedimiento esperaría acertar en su aproximación o estimación de θ. (1 punto)

4. (3 puntos) El tiempo de servicio para un tipo de transacción bancaria es una variable aleatoria con distribución exponencial y parámetro λ. Suponga la m.a. de X, $X_1 y X_2$, los cuales son tiempos de servicio para dos clientes diferentes, supuestos independientes entre sí. Considere el tiempo de servicio total $T = X_1 + X_2$ para los dos clientes.

a) Calcule la función acumulativa de T, es decir P(T < t) y su función de densidad. (1.5 puntos)

b) Calcule la función de densidad de la media muestral. ¿Cuál es el valor esperado y la varianza de la media muestral? (1.5 puntos)

Nota: Si $X \sim Exponencial(\lambda)$ la f.d.p es $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$; la f.g.m es $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$
Si $Y \sim Gamma(\alpha, \beta)$ la f.g.m. es $M_Y(t) = (\frac{1}{1-\frac{t}{\beta}})^\alpha$; $E(Y) = \frac{\alpha}{\beta}$, $V(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

5. (5 puntos) En los siguientes ejercicios, justificando sus pasos responda:

a) Si Y es la rentabilidad diaria de otra acción, independiente de X y se tiene que $X \sim N(0,16)$ y que $Y \sim N(3,9)$. Halle el valor de c tal que $P(9X^2 + 16(Y-3)^2 \leq c) = 0.90$. (1 punto)

b) Debido a factores fortuitos, el precio de un bien A puede sufrir una variación aleatoria X que está alrededor del precio de equilibrio, y para la cual se asume una distribución normal $X \sim N(0,4)$. De forma análoga, otro bien B experimenta una variación aleatoria $Y \sim N(0,4)$, que es independiente de lo que pase con A. Para un estudio de la estabilidad de estos bienes se ha pensado tomar muestras aleatorias de tamaños 6 y 8 respectivamente. ¿Existen constantes a y b tales que $W = a\left(\sum_{j=1}^{6} X_j^2\right) + b\bar{Y}^2$ tiene distribución Ji-cuadrado? (1.5 puntos) 2

c) Suponga que el precio en soles X de un bien A es una v.a. con distribución normal de media μ y varianza σ^2. Si se toma una m.a. de tamaño n de los precios de este bien. Halle ϵ (en función de n y σ) tal que el intervalo $|\bar{X} - \mu| < \epsilon$ contenga a la media μ con probabilidad de 0.95. Dicho ϵ es el error de aproximación o estimación que se comete al aproximar μ por $\bar{X}$. Si $\sigma = 1$, ¿Qué pasa con dicho error cuando se aumenta el tamaño de muestra? (1.5 puntos) 2

Pando, 25 de mayo de 2019

16-9 | 3

144

$$P(|\bar{x} - \mu| < \varepsilon) = 0,95$$

$\varepsilon - \mu$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$$

$\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$\frac{dF}{dn} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$$