PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
EXAMEN PARCIAL

Fecha: 18 de octubre de 2014
Clave del curso: EST241
Horario: 522
Duración: 2 horas y media.
Profesor: José Flores Delgado

Ejercicio 1. (6 puntos)

Considere el modelo de regresión lineal definido por

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + \beta_2 z_j + \epsilon_j\,, \text{ para } j = 1, \ldots, n,$$

donde $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n$ son constantes conocidas, β_0, β_1 y β_2 son parámetros (constantes) por estimar y los errores $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ son variables aleatorias independientes con $E(\epsilon_j) = 0$ y $V(\epsilon_j) = \sigma^2$, para $j = 1, \ldots, n$. Los estimadores usuales de los parámetros β_0, β_1 y β_2 son, respectivamente,

$$\hat{\beta}_0 = \sum_{j=1}^{n} a_j Y_j\,,\ \hat{\beta}_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j \text{ y } \hat{\beta}_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j Y_j\,,$$

donde

$b_j = d(S_Z^2(x_j - \bar{X}) - S_{X,Z}(z_j - \bar{Z}))$, $c_j = d(S_X^2(z_j - \bar{Z}) - S_{X,Z}(x_j - \bar{X}))$, y $a_j = \frac{1}{n} - b_j\bar{X} - c_j\bar{Z}$, para $j = 1, \ldots, n$, y $d = (S_X^2 S_Z^2 - S_{X,Z}^2)^{-1}$

a) Determine $E(Y_j)$ y $V(Y_j)$, $j = 1, \ldots, n$. (0,5 punto)

b) Demuestre que $E(\hat{\beta}_i) = \beta_i$, $i = 0, 1, 2$. (1,5 puntos)

c) Para cada $k = 1, \ldots, n$, se define $\hat{Y}_k := \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_k + \hat{\beta}_2 z_k$ (el valor ajustado de Y_k o estimación del valor promedio de Y_k). Halle $E(\hat{Y}_k)$, $k = 1, \ldots, n$. (1,5 puntos)

d) Determine $V(\hat{\beta}_i)$, $i = 1, 2$. (1 punto)

e) Halle la covarianza entre $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$. (1,5 puntos)

Observe que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 1,\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0,\ \sum_{j=1}^{n} a_j z_j = 0,$$
$$\sum_{j=1}^{n} b_j = 0,\ \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 1,\ \sum_{j=1}^{n} b_j z_j = 0,\ \sum_{j=1}^{n} b_j^2 = d\,S_Z^2,\ \sum_{j=1}^{n} b_j c_j = -d\,S_{X,Z}$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j = 0,\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0,\ \sum_{j=1}^{n} c_j z_j = 1,\ \sum_{j=1}^{n} c_j^2 = d\,S_X^2.$$

Ejercicio 2. (5 puntos)

Sean X e Y tales que $Y \sim G(4; 2)$ y $X|Y = y \sim P(y)$, $\forall y > 0$.

a) Halle $E(XY|Y)$. (1 punto)

b) Halle $E(XY)$. (1 punto)

c) Halle el modelo condicional $Y|X = x$, $\forall x > 0$. (3 puntos)

Ejercicio 3. (5 puntos)

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E(X_1) = 0$, $E(X_1^2) = m_2$, $E(X_1^3) = m_3$, $E(X_1^4) = m_4$ y $E(X_1^6) = m_6$.

Determine expresiones simplificadas para

a) $Cov(X_i^2, \sum_{j=1}^{n} X_j^2)$, donde $i \in \{1, \ldots, n\}$. (1,5 puntos)

b) $V(\sum_{j=1}^{n} X_i^2 X_j^2)$, donde $i \in \{1, \ldots, n\}$. (2 puntos)

c) $Cov(\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \sum_{j=1}^{n} X_j^3)$. (1,5 puntos)

Ejercicio 4. (4 puntos)

Sea $X_{n\times 1} = (X_1, \ldots, X_n)^t \sim N_n(\mu_X; \Sigma_X)$. Considere las matrices C y D de la descomposición espectral de Σ_X: $C\Sigma_X C^t = D$, donde C es ortogonal (esto es $C^{-1} = C^t$) y

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

a) Determine la distribución de del vector aleatorio $Y := CX$ y demuestre que los vectores que lo componen son independientes. (2 puntos)

b) Determine la distribución del vector aleatorio $Z = D^{-1/2}C(X - \mu_X)$, donde

$$D^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$ (2 puntos)

Recordatorio

i) Sean $X_{n\times 1}$ un vector aleatorio, $A_{m\times 1}$ y $B_{m\times n}$, matrices, e $Y = A + BX$; entonces,
$$\mu_Y = A + B\mu_X \text{ y } \Sigma_Y = B\Sigma_X B^t.$$

ii) $X = (X_1 \ldots X_n)^t \sim N_n(\mu; \Sigma) \Rightarrow Y = A_{m\times 1} + B_{m\times n}X \sim N_m(\mu_Y; \Sigma_Y)$, $m \leq n$.