PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
PRÁCTICA CALIFICADA 4

7 de noviembre de 2015
Horario 522
Clave del curso: EST241

Ejercicio 1. (10 puntos)

Sea X una variable aleatoria continua positiva cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \theta\, e^{-x}(1 - e^{-x})^{\theta-1}\,,\; x > 0,$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro para estimar por el método de máxima verosimilitud y a partir de una muestra aleatoria de tamaño 100.

a) Deducir el estimador de máxima verosimilitud de θ. (2 puntos)

b) Estudie si el estimador hallado anteriormente es consistente (fuertemente). (2 puntos) Tenga presente que $Y = -Ln(1 - e^{-X}) \sim exp(\theta)$.

c) Si $p = P(X > 1)$, deducir el estimador de máxima verosimilitud de p y estudie su consistencia. Tenga presente que $F(x) = (1 - e^{-x})^{\theta}$. (2 puntos)

d) Determine, aproximadamente, la probabilidad de que el error de estimación sea como máximo un décimo de la estimación correspondiente. Use la distribución asintótica del estimador asociada a la Información de Fisher Observada. (2 puntos)

e) Determine, aproximadamente, la probabilidad de que el error de estimación sea como máximo un décimo del valor del parámetro. Use la distribución asintótica del estimador asociada a la Información de Fisher. (2 puntos)

Ejercicio 2. (6 puntos)

Si $X \sim N(0;\sigma^2)$ se proponen los estimadores de σ^2 siguientes:

$$\hat{\sigma_1^2} = S^2;\;\; \hat{\sigma_2^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 \;\text{ y }\; \hat{\sigma_3^2} = n(\bar{X})^2.$$

a) Determine cuáles de los 3 estimadores son insesgados y, entre los que resulten insesgados, el más eficiente. (3 puntos)

b) Estudie la propiedad de consistencia (fuerte) para estos estimadores. (2 puntos)

c) Si $\hat{\sigma^2}$ es el mejor de los estimadores anteriores y se desea que $P(\sigma^2 \leq 2\hat{\sigma^2}) \approx 0{,}95$, ¿será suficiente un tamaño de muestra $n = 16$? (1 punto)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}}{n-1}$$

Ejercicio 3. (4 puntos)

Considere el modelo de regresión lineal sin intercepto:

$$Y_j = \beta x_j + \epsilon_j\,, \text{ para } j = 1, \ldots, n,$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son constantes conocidas, β es un parámetro desconocido y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ son variables aleatorias independientes, cada una tiene distribución normal de media cero y varianza σ^2.

a) Determine $l(\beta, \sigma^2)$: la función log-verosimilitud de β, σ^2 asociada al registro siguiente de las variables aleatorias independientes $Y_1, \ldots, Y_n$: $Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n$. (1 punto)

Previamente determine $f_{Y_j}(y_j)$ a partir de que $Y_j \sim N(\beta x_j;\, \sigma^2)$, $j = 1, \ldots, n$.

b) Determine los estimadores de β y de σ^2, por máxima verosimilitud. (3 puntos)

Recordatorio

$\mathcal{L}(\theta) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$: la función log- verosimilitud de θ.

$l(\theta) = Ln(\mathcal{L}(\theta)) = Ln(f_{X_1}(x_1)) + \cdots + Ln(f_{X_n}(x_n))$: la función de log-verosimilitud de θ.

Información de Fisher: $I(\theta) = -\,E\big(\frac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}\,Ln(f(X;\,\theta))\big)$, donde $f(x;\theta) = f_X(x)$.

Información de Fisher observada: $-l''(\hat{\theta})$, donde $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ.

Distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud:

$\sqrt{n\,I(\theta)}\;(\hat{\theta} - \theta) \overset{aprox.}{\sim} N(0{,}1)$ (a partir de la información de Fisher).

Distribución asintótica del estimador de máxima verosimilitud:

$\dfrac{(\widehat{\theta} - \theta)}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}} \overset{aprox.}{\sim} N(0{,}1)$ donde $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = \sqrt{-1/l''(\hat{\theta})}$ (a partir de la Información de Fisher obervada).

Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de X y $X \sim N(\mu;\, \sigma^2)$; entonces,

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \qquad \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

Si $X \sim exp(\beta)$: $f(x) = \beta\, e^{-\beta\, x}, x > 0$; $E(X) = 1/\beta$, donde $\beta > 0$.

J.F. San Miguel, 7 de noviembre de 2015.