PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

ESTADÍSTICA INFERENCIAL
EXAMEN FINAL

2018-2. Valdivieso.

Resuelva sólo 4 de los 5 problemas siguientes. Sólo se permite el uso de formularios, tablas y calculadoras.

1.- La proporción X de asistencia a un estadio con capacidad para 80,000 espectadores para cierto campeonato se asume que es una v.a X continua con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} & , \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

a) Halle el estimador de momentos de θ y analice su consistencia. (1.5 puntos)

b) Halle el estimador de máxima verosimilitud de θ (1.0 punto)

c) Estime por máxima verosimilitud la probabilidad de que la asistencia a un partido del campeonato en este estadio supere los 50,000 espectadores, si en una muestra de 5 partidos de este campeonato se observaron las siguientes asistencias: 35,800 62,130 39,678 40,823 17,324. (1.5 puntos)

d) ¿Es cierto que el estimador de máxima verosimilitud tiene distribución Gamma? Sea afirmativa o negativa su respuesta justifique esta aseveración. SUG: Encuentre la distribución de $Y = -log(X)$ y use luego la función generadora de momentos. (1.0 punto)

2.- El nivel de ingresos de los trabajadores en miles de soles de una gran coorporación se asume que es una v.a continua con la siguiente función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp(-\frac{(x-a)}{\theta}) & , \text{ si } x \geq a \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

donde $\theta > 0$ y $a \geq 0$ son parámetros del modelo.

a) Halle los estimadores de momentos de θ y a (1.5 puntos)

b) Si a es conocido, ¿coinciden los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud de θ? (1.5 puntos)

c) Obtenga las estimaciones de máxima verosimilitud y de momentos para los parámetros de θ y a, si una muestra aleatoria de X arrojó los siguientes valores: 1.5, 2, 3.3, 0.75 y 2.25. (2.0 puntos)

3.- Dada una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una v.a. $X \sim Exp(\beta)$ que denota al tiempo en días que un inversionista demora en obtener una licencia de funcionamiento.

a) Muestre que la v.a $Y = 2n\beta\bar{X}$ tiene una distribución chi-cuadrado con $2n$ grados de libertad. (1.5 puntos)

b) Si para $n = 10$, se encontró una media de 100 días en los tiempos que demoran estos inversionistas para obtener su licencia, obtenga en base a a) un intervalo de confianza al 95% para β. (1.5 puntos)

c) Halle, si existe, la prueba UMP que le permita contrastar a nivel $\alpha = 0.05$

$$H_0 : \beta = 0.01 \text{ vs } H_1 : \beta < 0.01$$

¿Qué es lo que concluiría, según esta prueba, si al tomarse una muestra de 25 inversionistas, el promedio en días que les tómo a ellos conseguir su licencia de funcionamiento fué de 120 días? (2.0 puntos)

4.- Un modelo de regresión lineal simple sin intercepto y con x_j's constantes asume que:

$$Y_j = \beta x_j + \epsilon_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n \ ,$$

donde los errores son independientes, tienen media 0 y varianza:

$$V(\epsilon_j) = \begin{cases} \sigma^2 & ,\text{si } j = 1, 2, \ldots, n \\ 2\sigma^2 & ,\text{si } j = n+1, n+2, \ldots, 2n \end{cases}$$

(1.5 puntos)

h

a) Halle el estimador de mínimos cuadrados de β y analice su insesgamiento.

b) Suponga que se plantea el modelo anterior para estimar el ingreso medio anual real Y que una persona natural posee, en función del monto en miles de soles que este paga mensualmente por su impuesto a la renta. Para ello se seleccionaron al azar a 4 personas con ingresos de sólo quinta categoría y pagos por impuestos de 2.5, 2.9, 3.8 y 4 mil soles y otras 4 personas con los mismos pagos; pero con ingresos de cuarta y quinta categoría, los cuales se asumen tiene ingresos de mayor variabilidad. Si los errores tienen distribución normal, ¿con qué probabilidad el estimador en a) diferirá del verdadero valor β en no más de 0.1σ? (1.5 puntos)

Oste falta

(2.0 puntos)

c) Halle el MELI de β.

8.5

5.- Un organismo de protección del medio ambiente plantea, por quejas de los pobladores, el siguiente contraste

$$H_0 : \mu = 0.08 \text{ vs } H_1 : \mu > 0.08$$

donde μ es el nivel medio de concentración de un insecticida en un rio en ppm (partes por millón) y donde se puede asumir, por estudios previos, que la concentración X de este insecticida en el rio es una v.a con distribución normal de media μ y desviación estándar 0.05 ppm.

Hice pero está mal

a) Observada una m.a de tamaño 25 de X, suponga que le proponen para este contraste utilizar la región crítica $R = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{25}) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} ix_i > 1.2845\}$. ¿Cuál sería el nivel de significación de este contraste? (1.5 puntos)

b) Halle, si existe, la prueba UMP a nivel $\alpha = 0.05$ para este contraste. Considere $n = 25$. (2.0 puntos)

c) Si la verdadera concentración media μ fuera de 0.1 ppm, ¿cuál sería la potencia de esta prueba para cada una de las regiones críticas definidas en a) y b)? ¿Concuerda esto con que en b) se ha hallado la prueba UMP? (1.5 puntos)

Profesor del curso: Luis Valdivieso

San Miguel, 15 de Diciembre de 2018

4 ps. →

$$\frac{\hat{\beta}_{MELI} - \beta}{\sigma} \le 0.1\sigma$$

$P(Z$