PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

PRÁCTICA CALIFICADA 2
CURSO: EST 241 Estadística Inferencial. HORARIO: 0621. PROFESOR: Arturo Calderón G.
FECHA: 04 de mayo de 2019. SEMESTRE: 2019-1. DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 horas.

Salvo formulario y calculadora, no está permitido el uso de otro material de consulta durante el desarrollo de la prueba, ni el uso de otros dispositivos electrónicos (celulares, tablets, laptops, iPods, etc.). Cualquier material relativo al curso, así como celulares y dispositivos electrónicos, deben permanecer guardados durante la prueba.

Problema 1 (10 puntos)
Sea (X,Y) vector aleatorio discreto donde X=# de veces que una persona usa su tarjeta de crédito VUSA durante el mes e Y=# de veces que la persona usa su tarjeta de crédito MasterClick durante el mes.

a) Si (X,Y) tienen función de probabilidad conjunta $P_{XY}(x,y)=c\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}\ x=0,1,2,\ldots;\ y=0,1,2,\ldots$, donde $c>0$ es constante.
(1) Halle c y la probabilidad de que haga uso efectivo de las dos tarjetas con la misma frecuencia durante el mes. (2p.)
(2) Halle $P_X(x)$, $P_Y(y)$ y $E(Y|X)$ ¿Se podría explicar y predecir la frecuencia de uso de Masterclick a partir del uso de VUSA? Justifique. (4p.)

En (1): Tenemos que recordar algunas fórmulas relativas a la suma y a la serie geométrica, vistas en clase:
(i) $\sum_{k=1}^{\infty} r^k=\frac{r}{1-r}$; $(ii)\ \sum_{k=0}^{\infty} r^k=\frac{1}{1-r}$; $(iii)\ \sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}=\left(\frac{1}{1-r}\right)^2$.

$$1=\sum_{(x,y)} P_{XY}(x,y)=\sum_{x=0}^{\infty}\left[\sum_{y=0}^{\infty} c\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}\right]=c\overbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}}^{\frac{3}{2}}\overbrace{\left[\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}\right]}^{\frac{3}{2}}=c\frac{9}{4}\Rightarrow c=\frac{4}{9}$$

Sea A = "Hace uso <u>efectivo</u> ($\neq 0$) de las tarjetas con la misma frecuencia" $=\{(x,y)|x=y=1,2,3,\ldots\}\Rightarrow$
$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k,y=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+k}=\frac{4}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}=\frac{4}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{k}=\frac{4}{9}\frac{1}{8}=\frac{1}{18}$

En (2):

$$P_X(x)=\sum_{y} P_{XY}(x,y)=\sum_{y=0}^{\infty}\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\quad x=0,1,2,\ldots$$

$$P_Y(y)=\sum_{x} P_{XY}(x,y)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}\quad y=0,1,2,\ldots$$

Para $E(Y|X)$, podemos notar que $P_{XY}(x,y)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\times\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}=P_X(x)\times P_Y(y)\ \forall(x,y)\in R_{XY}$, luego X e Y son independientes y $P_{Y|X}(y|x)=P_Y(y)\Rightarrow E(Y|X)=\sum_{y=0}^{\infty} yP_{Y|X}(y|x)=\sum_{y=0}^{\infty} yP_Y(y)=$ $E(Y)=\sum_{y=0}^{\infty} y\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}=\frac{2}{3}\frac{1}{3}\sum_{y=0}^{\infty} y\left(\frac{1}{3}\right)^{y-1}=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^{2}=\frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow E(Y|X)=\frac{1}{2}$ que es una constante, o sea $E(Y|X)$ no depende de X, por tanto <u>no</u> se puede explicar ni predecir Y a partir de X.

Otra manera de contestar, más ortodoxa, es:

$$P_{Y|X}(y|x)=\frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}=\frac{\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}\quad y=0,1,2,\ldots;x=0,1,2,\ldots\ x=valor\ dado.\Rightarrow$$

$E(Y|X)=\sum_{y=0}^{\infty} y\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}=\frac{2}{3}\frac{1}{3}\sum_{y=0}^{\infty} y\left(\frac{1}{3}\right)^{y-1}=\frac{1}{2}$ y la conclusión es la que ya escribimos antes.

También es válido decir que como X e Y son independientes y por tanto $E(Y|X)=E(Y)=$ una

constante que no depende de X, entonces no se puede explicar ni predecir Y a partir de X. Pero es respuesta parcial, porque no se calcula el valor de $E(Y|X)$ por el cual también se pregunta en el enunciado.

b) Si (X, Y) tienen función de probabilidad conjunta $P_{XY}(x, y) = b\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}$ $x = 1,2,3,4; y = 0,1,2, \dots, x$, donde $b > 0$ es constante.
(1) Halle b y la probabilidad de use las dos tarjetas con la misma frecuencia durante el mes. (2p.)
(2) Halle $P_X(x)$ y $E(Y|X)$ ¿Se podría explicar y predecir la frecuencia de uso de Masterclick a partir del uso de VUSA? Justifique. (2p.)

En (1): Para hallar b, usamos la condición $1 = \sum_{(x,y)} P_{XY}(x, y)$. Como X tiene sólo cuatro valores, lo más sencillo es tabular, para evitar más cálculos de lo necesario. Primero tabulemos 3^{x+y}, luego tabularemos $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}$, siempre con (x, y) dentro del rango R_{XY}, el total es igual a $b\sum_{(x,y)}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}$

Tabla 1				
3^{x+y}	x			
y	1	2	3	4
0	3	9	27	81
1	9	27	81	243
2	0	81	243	729
3	0	0	729	2187
4	0	0	0	6561

Tabla 2				
$1/3^{(x+y)}$				
y	1	2	3	4
0	0.3333	0.1111	0.0370	0.0123
1	0.1111	0.0370	0.0123	0.0041
2		0.0123	0.0041	0.0014
3			0.0014	0.0005
4				0.0002

Total = 0.6783 ⇒

$b\sum_{(x,y)}\frac{1}{3^{(x+y)}} = b \times 0.6783 = 1$

$\Rightarrow b = \frac{1}{0.6783}$

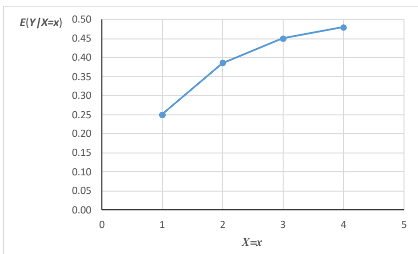
$b = \frac{1}{0.6783} = 1.4743$ y multiplicando por b la tabla 2, obtenemos $P_{XY}(x, y)$:

$P_{XY}(x,y)$	x				
y	1	2	3	4	$P_Y(y)$
0	0.4915	0.1638	0.0546	0.0182	0.7281
1	0.1638	0.0546	0.0182	0.0061	0.2427
2		0.0182	0.0061	0.0020	0.0263
3			0.0020	0.0007	0.0027
4				0.0002	0.0002
$P_X(x)$	0.6553	0.2366	0.0809	0.0272	1.0000

Sea U = "Usa las tarjetas con la misma frecuencia" ⇒ $P(U) = P(X = Y) = P_{XY}(1,1) + P_{XY}(2,2) + P_{XY}(3,3) + P_{XY}(4,4)$ =0.1843

En (2): $P_X(x)$ ya figura en el margen inferior de la tabla anterior de la función de probabilidad conjunta.
Para $E(Y|X)$ tenemos que tabular cada $P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)}, y = 1,2, \dots, x;\ x = 1,2,3,4$ y calcular el valor esperado $E(Y|X)$ correspondiente:

$P_{XY}(x,y)$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
y	$P_{Y\|X}(y\|1)$	$P_{Y\|X}(y\|2)$	$P_{Y\|X}(y\|3)$	$P_{Y\|X}(y\|4)$
0	0.7500	0.6923	0.6750	0.6694
1	0.2500	0.2308	0.2250	0.2231
2		0.0769	0.0750	0.0744
3			0.0250	0.0248
4				0.0083
$E_{Y\|X}(Y\|X = x)$	0.2500	0.3846	0.4500	0.4793



Se ve que $E_{Y|X}(Y|X = x)$ va creciendo conforme crece X, o sea la frecuencia esperada de uso de Masterclick $E(Y|X)$ depende de la frecuencia de uso X de la tarjeta VUSA, en una relación creciente, es decir:
Sí se puede explicar y predecir la frecuencia promedio de uso de Masterclick a partir de la frecuencia de uso de VUSA

Otra manera de resolver esta parte, más analítica aunque trabajosa, sería:
En (1): Ahora tenemos que recordar la suma geométrica, también vista en clase:
(iv) $\sum_{k=0}^{N} r^k = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$; (v) $\sum_{k=0}^{N} kr^k = \frac{r(Nr^{N+1}-(N+1)r^N+1)}{(1-r)^2}$

Nota:
(iv) resulta de $\sum_{k=1}^{N} r^k = \frac{r-r^{N+1}}{1-r} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} r^k = r^0 + \sum_{k=1}^{N} r^k = 1 + \frac{r-r^{N+1}}{1-r} = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$
(v) sale de $\frac{d}{dr}\left(\sum_{k=0}^{N} r^k\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1-r^{N+1}}{1-r}\right) \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} kr^{k-1} = r^{-1}\sum_{k=0}^{N} kr^k = \frac{d}{dr}\left((1-r^{N+1})(1-r)^{-1}\right) =$

$$-(N+1)r^N(1-r)^{-1} + (1-r^{N+1})(1-r)^{-2} = \frac{-(N+1)r^N}{(1-r)} + \frac{(1-r^{N+1})}{(1-r)^2} =$$

$$\frac{-(N+1)r^N(1-r)+1-r^{N+1}}{(1-r)^2} = \frac{-(N+1)r^N+(N+1)r^{N+1}+1-r^{N+1}}{(1-r)^2} =$$

$$\frac{-Nr^N - r^N + Nr^{N+1} + r^{N+1} + 1 - r^{N+1}}{(1-r)^2} = \frac{-Nr^N - r^N + Nr^{N+1} + 1}{(1-r)^2} = \frac{Nr^{N+1}-(N+1)r^N+1}{(1-r)^2} \Rightarrow$$

$$r^{-1}\sum_{k=0}^{N} kr^k = \frac{(Nr^{N+1}-(N+1)r^N+1)}{(1-r)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} kr^k = \frac{r(Nr^{N+1}-(N+1)r^N+1)}{(1-r)^2}$$

Aplicando lo anterior:

$$1 = \sum_{(x,y)} P_{XY}(x,y) \Rightarrow 1 = \sum_{x=1}^{4}\left[\sum_{y=0}^{x} b\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}\right] = b\sum_{x=1}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left[\sum_{y=0}^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^y\right] = b\sum_{x=1}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right] =$$

$$b\left(\frac{3}{2}\right)\sum_{x=1}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\right] = b\left(\frac{3}{2}\right)\left[\sum_{x=1}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^x - \sum_{x=1}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}\right] = b\left(\frac{3}{2}\right)\left[\sum_{x=1}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)\sum_{x=1}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}\right] =$$

$$b\left(\frac{3}{2}\right)\left[\sum_{x=1}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)\sum_{x=1}^{4}\left(\frac{1}{9}\right)^x\right] = b\left(\frac{3}{2}\right)\left[\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\left(\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{9}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{9}\right)}\right)\right] =$$

$$b\left(\frac{3}{2}\right)\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{8}\right)\left(\left(\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{9}\right)^5\right)\right] =$$

$$b\left(\frac{3}{2}\right)\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right) - \left(\frac{3}{8}\right)\left(\left(\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{9}\right)^5\right)\right] = b\left(\frac{3}{2}\right)\left[\left(\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4\right) - \left(\left(\frac{1}{24}\right)-\left(\frac{1}{24}\right)\left(\frac{1}{9}\right)^4\right)\right]$$

$$= b\left(\frac{3}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^4\right) - \left(\frac{1}{24}\right)\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^4\right)\right] =$$

$$= b\left(\frac{3}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{81}\right) - \left(\frac{1}{24}\right)\left(1-\frac{1}{6561}\right)\right] = b\left(\frac{3}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{80}{81}\right) - \left(\frac{1}{24}\right)\left(\frac{6560}{6561}\right)\right] =$$

$$= b\left(\frac{3}{2}\right)\left[\left(\frac{40}{81}\right) - \left(\frac{1}{24}\right)\left(\frac{6560}{6561}\right)\right] = b\left(\frac{4450}{6561}\right) = 1 \Rightarrow b = \frac{6561}{4450} = 1.4743;$$

Sea U = "Usa las tarjetas con la misma frecuencia" $\Rightarrow P(U) = P(X=Y) = P_{XY}(1,1) + P_{XY}(2,2) + P_{XY}(3,3) + P_{XY}(4,4) = b\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \left(\frac{1}{3}\right)^8\right\} = b\frac{3^6+3^4+3^2+3^1}{3^8} = b\frac{822}{6561} = \frac{6561}{4450} \times \frac{822}{6561} = 0.185$

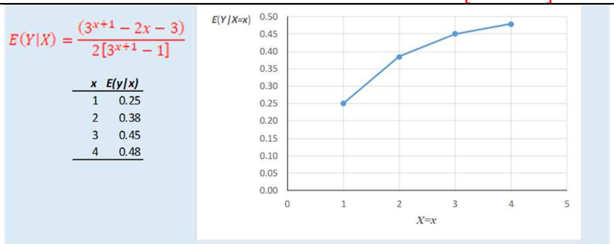
En (2): $P_X(x) = \sum_{y=0}^{x} P_{XY}(x,y) = \sum_{y=0}^{x} b\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y} = b\left(\frac{1}{3}\right)^x\sum_{y=0}^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^y = b\left(\frac{1}{3}\right)^x\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right] = \frac{3}{2}b\left(\frac{1}{3}\right)^x\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\right] =$
$\frac{3}{2}b\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}\right]$ $x = 1,2,3,4.$ *en donde* $b = \frac{6561}{4450}$;

para $E(Y|X)$: $P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)} = \frac{b\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}}{\frac{3}{2}b\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}\right]} = \frac{2}{3}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^y}{\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\right]}$ $\quad y = 0,1,2,\ldots x; x = valor\ dado \Rightarrow$

$$E(Y|X) = \sum_{y=0}^{x} y\frac{2}{3}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^y}{\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\right]} = \frac{2}{3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\right]}\sum_{y=0}^{x} y\left(\frac{1}{3}\right)^y = \frac{2}{3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\right]} \times \frac{\frac{1}{3}\left(x\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - (x+1)\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2} =$$

$$\frac{1}{2\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\right]}\left(x\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-(x+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+1\right)=\frac{3^{x+1}}{2[3^{x+1}-1]}\left(\frac{x-(x+1)3+3^{x+1}}{3^{x+1}}\right)=\frac{1}{2[3^{x+1}-1]}(x-(x+1)3+3^{x+1})=$$

$$=\frac{(-2x-3+3^{x+1})}{2[3^{x+1}-1]}=\frac{(3^{x+1}-2x-3)}{2[3^{x+1}-1]}\Rightarrow E(Y|X)=\frac{(3^{x+1}-2x-3)}{2[3^{x+1}-1]}.$$



En este caso, es claro que la frecuencia esperada de uso de Masterclick $E(Y|X)$ depende de la frecuencia de uso X de la tarjeta VUSA, a través de la fórmula ("forma funcional") escrita líneas arriba; o sea Sí se puede explicar y predecir la frecuencia promedio de uso de Masterclick a partir de la frecuencia de uso de VUSA

Problema 2 (10 puntos)

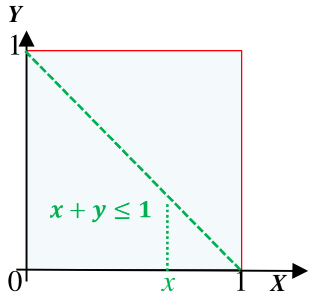
Sea $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ v.a. continuo que mide la inversión que hacen los pequeños empresarios para una primera ampliación de su negocio, en cada caso la inversión está medida en miles de unidades monetarias según: $\boldsymbol{X}$ = Inversión con recursos propios e $\boldsymbol{Y}$= Inversión con recursos prestados. Graficando las regiones de integración, resuelva las siguientes cuestiones:

a) Si (X,Y) tiene f. de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)=c(2x+y)\ 0<x<1; 0<y<1$, donde c es constante.

(1) Halle c. ¿Una primera ampliación costaría más de mil unidades monetarias? (2p.)

(2) Halle $f_X(x)$ y $f_{Y|X}(y|x)$: ¿Si un pequeño empresario invierte de su dinero 500 unidades monetarias ¿Se prestará más de esa cantidad para hacer su primera ampliación del negocio? (2p.)

En (1):



R_{XY} es el cuadrado unitario que figura en el gráfico de la izquierda; no hay restricciones entre x e y, cada variable va de 0 a 1, sin importar el valor de la otra:

$$1=\int_{R_{XY}} f_{XY}=\int_0^1\left[\int_0^1 c(2x+y)\,dy\right]dx=c\int_0^1\left[\int_0^1(2x+y)\,dy\right]dx=$$

$$c\int_0^1\left[\left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)\right]_0^1 dx=c\int_0^1\left(2x+\frac{1}{2}\right)dx=c\left[\left(x^2+\frac{x}{2}\right)\right]_0^1=\frac{3}{2}c=1\Rightarrow c=\frac{2}{3}$$

Sea A = "Primera ampliación costaría más de mil unidades monetarias" $\Rightarrow$

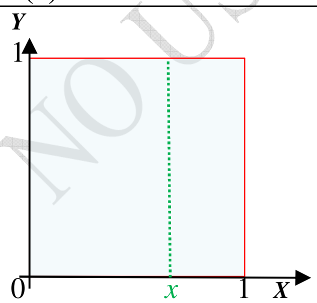
$A=\{(x,y)\in R_{XY}|\ x+y>1\}$; es el triángulo que está arriba de **y=1-x** por complemento:

$$P(A^C)=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\frac{2}{3}(2x+y)\,dy\right]dx=\frac{2}{3}\int_0^1\left[\left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)\right]_0^{1-x}dx=$$

$$\frac{2}{3}\int_0^1\left(2x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)\left(2x+\frac{(1-x)}{2}\right)dx=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{(1-x)(1+3x)}{2}dx=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)(1+3x)dx=$$

$\frac{1}{3}\int_0^1(1-2x+3x^2)dx=\frac{1}{3}[x-x^2+x^3]_0^1=\frac{1}{3}\Rightarrow P(A)=1-P(A^C)=\frac{2}{3}>0.5$: Sí, una primera ampliación costará más de mil u.m.

En (2):



$f_X(x)=\int_0^1\frac{2}{3}(2x+y)\,dy=\frac{2}{3}\int_0^1(2x+y)\,dy=\frac{2}{3}\left[2xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left(2x+\frac{1}{2}\right)\quad 0<x<1$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{2}{3}(2x+y)}{\frac{2}{3}\left(2x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{(2x+y)}{\left(2x+\frac{1}{2}\right)}\quad 0<y<1;\ x=valor\ dado$$

Se pregunta si la probabilidad $P(Y>0.5|X=0.5)$ pasa de 50%:

$$P(Y>0.5|X=0.5)=\int_{0.5}^1 f_{Y|X}(y|0.5)\,dy=\int_{0.5}^1\frac{(1+y)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)}dy=\frac{2}{3}\int_{0.5}^1(1+y)\,dy=$$

$=\frac{2}{3}\left[y+\frac{y^2}{2}\right]_{0.5}^1=\frac{2}{3}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\right]=\frac{7}{12}=0.58>0.5$; Si $X=0.5\Rightarrow Y>0.5$; o sea, este evento sí ocurrirá.

b) Si (X,Y) tiene f. de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)=bye^{-x}\ 0<x<\infty; 0<y<x$, donde b es constante.

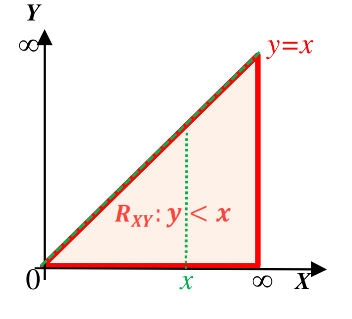
(1) Halle b y la probabilidad de que se preste más de lo que invierte de su propio dinero. (2p.)

(2) Halle la densidad marginal de X, $f_{Y|X}(y|x)$ y el modelo de regresión $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})$ (3p.)

(3) Un economista plantea que, por cada mil unidades monetarias adicionales de recursos propios

invertidos en una primera ampliación, el empresario necesitará al menos 500 unidades monetarias más para completar su ampliación. Evalúe la verdad o falsedad de esta afirmación (1p.)

En (1):



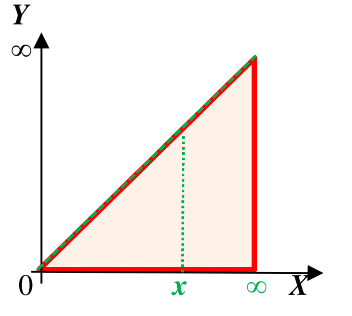
$R_{XY} = \{(x,y)|0 < y < x; 0 < x < \infty\}$ es un triángulo infinito que figura en el gráfico de la izquierda; hay restricciones entre x e y pues $0 < y < x$:

$$1 = \int_{R_{XY}} f_{XY} = \int_0^\infty \left[\int_0^x bye^{-x}\,dy\right]dx = b\int_0^\infty e^{-x}\left[\int_0^x y\,dy\right]dx = b\int_0^\infty e^{-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx$$

$$b\int_0^\infty \frac{x^2e^{-x}}{2}dx = c\int_0^1\left(2x+\frac{1}{2}\right)dx = c\left[\left(x^2+\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{3}{2}c = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

Sea A = "Se presta más de lo que invierte de su propio dinero" $\Rightarrow$
$A = \{(x,y) \in R_{XY} | \; y > x\} = \emptyset$; pues según R_{XY}: $y < x \Rightarrow P(A) = 0$.

En (2):



$$f_X(x) = \int_0^x \frac{2}{3}ye^{-x}\,dy = \frac{2}{3}e^{-x}\left[\int_0^x y\,dy\right] = \frac{2}{3}e^{-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2e^{-x}}{3} \quad 0 < x < \infty$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{2}{3}ye^{-x}}{\frac{x^2e^{-x}}{3}} = \frac{2y}{x^2} \quad 0 < y < x;\; x = valor\ dado$$

El modelo de regresión de Y sobre X: $E(Y|X) = \int_0^x y\frac{2y}{x^2}dy = \int_0^x \frac{2y^2}{x^2}dy =$
$\frac{2}{x^2}\int_0^x y^2dy = \frac{2}{x^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x = \frac{2}{x^2}\frac{x^3}{3} = \frac{2}{3}x \Rightarrow E(Y|X) = \frac{2}{3}x \quad 0 < y < x$ es el modelo pedido

En (3): La afirmación "Por cada mil unidades monetarias adicionales de recursos propios invertidos en una primera ampliación, el empresario necesitará al menos 500 unidades monetarias más para completar su ampliación", estadísticamente equivale a $\frac{d}{dx}E(Y|X) \geq 0.5$; derivando $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{2}{3} \geq 0.5$ y se concluye que la afirmación es cierta.

ACG./SAMP.