PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA

PRÁCTICA DIRIGIDA No. 2
CURSO: **EST 241 Estadística Inferencial**
PROFESOR: **Arturo Calderón G.**
HORARIO: **0621**
FECHA: **27 de abril de 2019**
SEMESTRE: **2019-1**

Los problemas del 1 a 4 serán tratados durante la práctica. El resto es para el trabajo personal del alumno.

Problema 1

En un distrito el número X de trabajadores por empresa es una v.a. y el número Y de estos trabajadores que además son eventuales, también es aleatorio, de modo que (X, Y) es v.a. discreto con función de probabilidad conjunta $P_{XY}(x, y) := P[(X = x) \cap (Y = y)] = cx \quad x = 1,2, \dots, 5; y = 0,1, \dots, x$.

a) Hallar la constante c que hace a $P_{XY}(x, y)$ función de probabilidad conjunta.
b) Calcule la probabilidad de que haya trabajadores eventuales en una empresa ¿Diría que ocurrirá este evento?
c) Halle la función de probabilidad marginal $P_X(x)$ de X, donde $P_X(x) := P(X = x)$.
d) Una empresa tiene tres trabajadores: Halle $P_{Y|X}(y, 3)$ y $E(Y|X = 3)$ ¿Cuántas trabajadores eventuales esperaría encontrar en esa empresa? ¿Cuál sería la probabilidad de que hubiera menor cantidad de eventuales de lo esperado?
e) En general halle $P_{Y|X}(y|x)$ y $E(Y|X = x)$ como función de $X = x$ ¿Por cada dos trabajadores adicionales que contrate una empresa ¿Cuántos serían eventuales?

Solución:

a) $1 = \sum_{x=1}^{5} \sum_{y=0}^{x} P_{XY}(x, y) \Leftrightarrow 1 = \sum_{x=1}^{5}\left(\sum_{y=0}^{x} cx\right) = \sum_{x=1}^{5} x\left(\sum_{y=0}^{x} c\right) = \sum_{x=1}^{5} x\big(c(x + 1)\big) =$
$c\sum_{x=1}^{5} x(x + 1) = 70c \Rightarrow c = \frac{1}{70}$ y $P_{XY}(x, y) = \frac{x}{70} \quad x = 1,2, \dots, 5; y = 0,1, \dots, x.$

b) Nos piden $P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0)$ y $P(Y = 0) = \sum_{x=1}^{5} P_{XY}(x, 0) = \frac{1}{70} + \frac{2}{70} + \frac{3}{70} + \frac{4}{70} + \frac{5}{70} = \frac{15}{70} = 0.21 \Rightarrow$
$P(Y > 0) = 1 - 0.21 = 0.79 > 0.5$ Pronosticamos que sí ocurrirá este evento.

c) Nos piden $P_X(x) := P(X = x) = \sum_{y=0}^{x} P[(X = x) \cap (Y = y)] = \sum_{y=0}^{x} P_{XY}(x, y) = \sum_{y=0}^{x} \frac{x}{70} = \frac{x(x+1)}{70} \Rightarrow$
$$P_X(x) = \frac{x(x + 1)}{70}, \qquad x = 1,2, \dots, 5$$

d) $P_{Y|X}(y|3) = \frac{P_{XY}(3,y)}{P_X(3)}$.
Primero $P_X(3) = \frac{3(3+1)}{70} = \frac{12}{70}$, entonces:
$P_{Y|X}(y|3) = \frac{P_{XY}(3,y)}{P_X(3)} = \frac{\frac{3}{70}}{\frac{12}{70}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \; y = 0,1,2,3$ y $E(Y|X = 3) = \sum_{y=0}^{3} y\, P_{Y|X}(y|3) = \sum_{y=0}^{3} y \frac{1}{4} = 1.5$
Se espera alrededor de 1.5 trabajadores eventuales, o sea 1 o 2; finalmente:
$$P(Y < 1.5|X = 3) = P(Y \leq 1|X = 3) = P_{Y|X}(0|3) + P_{Y|X}(1|3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

e) $P_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P[(X=x)\cap(Y=y)]}{P[(X=x)]} = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)} = \frac{\frac{x}{70}}{\frac{x(x+1)}{70}} = \frac{1}{x+1} \quad y = 0,1, \dots, x$. Que es una función de probabilidad para Y y habrá un valor esperado: $E(Y|X = x) = \sum_{y=0}^{x} y\, P_{Y|X}(y|x) = \sum_{y=0}^{x} y \frac{1}{x+1} =$
$\frac{1}{x+1}\sum_{y=0}^{x} y = \frac{1}{x+1}\frac{x(x+1)}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow E(Y|X = x) = \frac{x}{2} \quad x = 1,2, \dots, 5$
En general se espera que más o menos la mitad de los X trabajadores que haya en un empresa, sean eventuales. Podemos interpretar de cada dos trabajadores adicionales que contrate una empresa, 1 de ellos será eventual. Esto se puede ver, forzando algo las cosas, observando que $\frac{d}{dx}E(Y|X = x) = \frac{1}{2}$

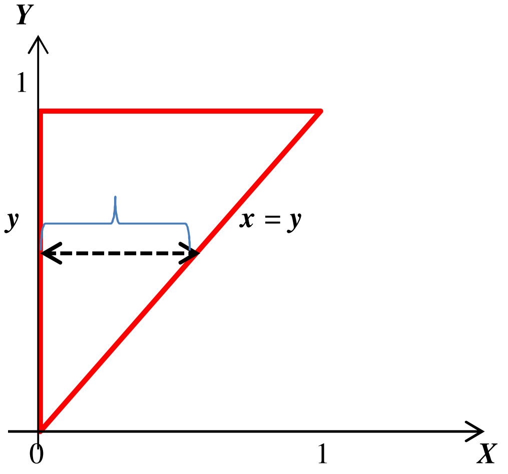
Problema 2

Por cada unidad monetaria de ingreso, las empresas de un país dedican una parte Y al ahorro y de esta parte, una parte X se pasa a dólares. Si (X,Y) es un v. a. continuo con f. de densidad conjunta $f_{XY}(x,y) = cx \quad 0 < x < y < 1$

a) Halle el valor de c y las funciones de densidad marginales de X e Y ¿Son independientes los tipos de ahorro de las empresas?
b) ¿Qué probabilidad existe de que una empresa tenga más de un tercio de sus ahorros en soles?
c) Calcule la distribución condicional $f_{X|Y}(x|y)$ y la media condicional $E(X|Y)$, interprete esta media condicional
d) Una empresa decide ahorrar 60 céntimos por cada sol de ingreso: ¿Cuántos céntimos espera Ud. que pase a dólares? ¿Cuál es la probabilidad de que se pase a dólares más de lo esperado?

Solución:

a) Mejor grafiquemos el rango R_{XY} del v.a. para identificar bien la región de integración y definir los límites de integración más convenientes:



$$1 = \int_0^1 \left[\int_0^y cx\,dx\right] dy = c\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y dy =$$

$$= c\int_0^1 \frac{y^2}{2} dy = c\left[\frac{y^3}{6}\right]_0^1 = \frac{c}{6} \Rightarrow c = 6 \text{ y}$$

$$f_{XY}(x,y) = 6x \quad 0 < x < y < 1 \Rightarrow$$

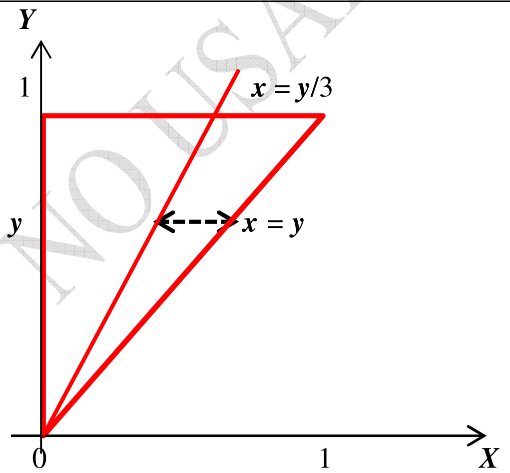
$$f_X(x) = \int_x^1 6x\,dy = 6x[y]_x^1 = 6x(1-x) \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 6x\,dx = [3x^2]_0^y = 3y^2 \quad 0 < y < 1$$

Como $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, entonces X e Y **no** son independientes

Como se habla "por unidad monetaria de ingreso" (asumido en soles), tanto ***Y*** como ***X*** en verdad son proporciones, por ejemplo si ***Y*** = 0.8 entonces 80 centavos de cada unidad de ingreso se ahorran y de estos 80 centavos, una parte, digamos 60 centavos se pasan a dólares, generando así un valor ***X*** = 0.6
Otra manera de verlo es:
Y =Ahorro en total (S/. + $); ***X*** = Ahorro en $ (inicialmente en soles y luego se pasa a dólares, pero contabilizado en soles para hacerlo equiparable con Y)

b) Hay que identificar la región donde se cumple que hay "más de un tercio de sus ahorros en dólares" e integrar



"*más de un tercio de sus ahorros en dólares*" $\Leftrightarrow X > \frac{Y}{3} \Rightarrow$

$$P\left(X > \frac{Y}{3}\right) = P\left(\frac{Y}{3} < X < Y\right) = \int_0^1 \left[\int_{\frac{y}{3}}^y 6x\,dx\right] dy =$$

$$= \int_0^1 [3x^2]_{y/3}^y\,dy = \int_0^1 \frac{8y^2}{3} dy = \left[\frac{8y^3}{9}\right]_0^1 = \frac{8}{9}$$

c) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{6x}{3y^2} = \frac{2x}{y^2} \quad 0 < x < y; y = valor\ dado.$

$$E(X|Y) = \int_0^y x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^y x\frac{2x}{y^2}dx = \frac{2}{y^2}\int_0^y x^2 dx = \frac{2}{y^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^y = \frac{2}{3}y \quad 0 < y < 1$$

"En promedio 2/3 del ahorro de las empresas se pasan a dólares".

d) De $E(X|Y) = \frac{2}{3}y \quad 0 < y < 1$, si hacemos $y = 0.6$ tenemos $E(X|Y = 0.6) = \frac{2}{3}\,0.6 = 0.4$; esperamos que pase unos 40 céntimos a dólares. Como $f_{X|Y}(x|0.6) = \frac{2x}{(0.6)^2} = \frac{x}{0.18} \quad 0 < x < 0.6$

$$P(X > 0.4|Y = 0.6) = \int_{0.4}^{0.6} \frac{x}{0.18}dx = \left[\frac{x^2}{0.36}\right]_{0.4}^{0.6} = \frac{0.36}{0.36} - \frac{0.16}{0.36} = 0.56$$

Problema 3

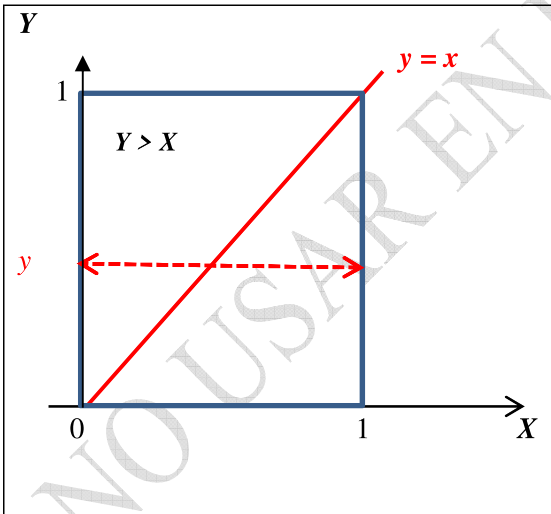
Sea (X, Y) v.a. continuo que mide la inversión que hacen los pequeños empresarios para una primera ampliación de su negocio, en cada caso la inversión está medida en miles de unidades monetarias según: X = Inversión con recursos propios e Y= Inversión con recursos prestados. Si (X, Y) tiene f. de densidad:

$f_{XY}(x, y) = c(x + y) \; 0 < x < 1; 0 < y < 1$

a) Halle la constante c y la probabilidad de el empresario se financie más con préstamos que con su dinero. Una primera ampliación ¿Costará más de mil unidades monetarias?
b) Halle la distribución marginal de X y la distribución condicional de Y dado X: $f_{Y|X}(y|x)$: ¿Si un pequeño empresario invierte de su dinero lo que se espera de él ¿Con qué probabilidad se prestará más de esa cantidad?
c) Halle $\mu_{Y|X} \coloneqq E(Y|X)$, grafique $E(Y|X)$ como función de X . Interprete el comportamiento de $\mu_{Y|X}$ y $\frac{\partial \mu_{Y|X}}{\partial x}$.
d) Use $E(Y|X)$ para estimar el monto de préstamo de alguien que pone de su dinero 0.3 miles de u.m. para una ampliación.

Solución:

El rango del vector aleatorio es un cuadrado en R^2, $R_{XY} = \{(x, y) |\, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.



a) Cálculo de la constante c, fijemos y e integremos primero (en la integral interna) con respecto a x:

$$1 = \iint_{R_{XY}} f_{XY}(x, y) = \int_0^1 \left[\int_0^1 c(x + y)\,dx\right] dy$$

$$= c\int_0^1 \left[\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\right]_0^1 dy = c\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = c\left(\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}\right)_0^1 = c$$

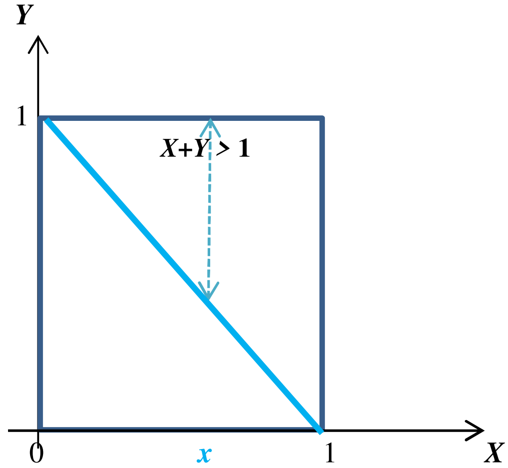
$\Rightarrow \boldsymbol{c = 1}$

Para: "Se financia más con préstamos que con su dinero" $\Leftrightarrow \; Y > X$

fijemos y e integremos primero con respecto a $\boldsymbol{x}$:

$$\Rightarrow P(Y > X) = \int_0^1 \left[\int_0^y (x + y)dx\right] dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^y dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + y^2\right) dy = \int_0^1 \frac{3y^2}{2} dy = \left[\frac{y^3}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

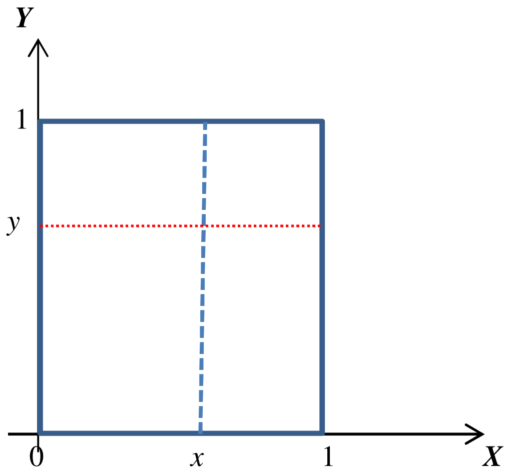


Para: "una primera ampliación ¿Costará más de mil unidades? $\Leftrightarrow\ X+Y>1$; fijemos x e integremos primero con respecto a y

$$\Rightarrow P(X+Y>1)=\int_0^1\left[\int_{1-x}^1 (x+y)dy\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^1 dx=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(x+\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]_0^1=\frac{2}{3}=0.67>0.5\Rightarrow$$ La primera ampliación sí costará más de mil u.m.



b)

$$f_X(x)=\int_0^1 (x+y)\,dy=\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^1=x+\frac{1}{2},\quad 0<x<1$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=$$

$$\frac{(x+y)}{x+\frac{1}{2}}=\frac{2(x+y)}{2x+1}\quad \begin{matrix}0<y<1,\\ 0<x<1, x=valor\ dado\end{matrix}$$

Lo que "se espera que invierta de su dinero un empresario" es μ_X:

$$\mu_X=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx=\int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_0^1=\frac{7}{12}=0.58$$

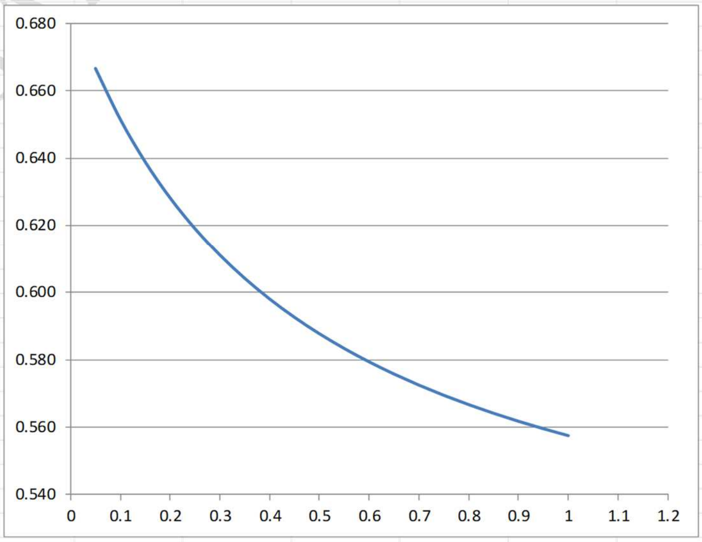
y se pregunta por $P(Y>0.58|X=0.58)=\int_{0.58}^1 f_{Y|X}(y|0.58)dy=$

$$\int_{0.58}^1 \frac{2\left(\frac{7}{12}+y\right)}{2\frac{7}{12}+1}dy=\int_{0.58}^1\frac{14+2y}{15}dy=0.43$$

c) $\mu_{Y|X}=E(Y|X)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy=\int_0^1 y\frac{2(x+y)}{2x+1}dy=\frac{2}{2x+1}\int_0^1 y(x+y)\,dy=\frac{2}{2x+1}\left[x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^1=$ $\frac{x+\frac{2}{3}}{2x+1}\quad 0<x<1\Rightarrow \mu_{Y|X}=E(Y|X)=\frac{x+\frac{2}{3}}{2x+1}\quad 0<x<1,\ x=valor\ dado$, cuya gráfica es:

$$E(Y|X)=\frac{x+\frac{2}{3}}{2x+1}\quad 0<x<1$$

x	E(Y|X)
0	0.667
0.05	0.652
0.1	0.639
0.15	0.628
0.2	0.619
0.25	0.611
0.3	0.604
0.35	0.598
0.4	0.593
0.45	0.588
0.5	0.583
0.55	0.579
0.6	0.576
0.65	0.572
0.7	0.569
0.75	0.567
0.8	0.564
0.85	0.562
0.9	0.560
0.95	0.557
1	0.556



Para una ampliación del negocio, conforme aumenta la inversión con recursos propios, se espera que la inversión con capital prestado disminuya.

$$\frac{\partial\mu_{Y|X}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+\frac{2}{3}}{2x+1}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x+\frac{2}{3}\right)(2x+1)^{-1}=(2x+1)^{-1}+\left(x+\frac{2}{3}\right)\times -1(2x+1)^{-2}\times 2=-\frac{1}{(2x+1)^2}$$

$\Rightarrow \frac{\partial\mu_{Y|X}}{\partial x}=-\frac{1}{(2x+1)^2}$ $\quad 0<x<1,$ $\frac{\partial\mu_{Y|X}}{\partial x}$ es negativa: **al aumentar la inversión con recursos propios, la inversión proveniente de préstamos tiende a disminuir. Este resultado ya se veía en el gráfico.**

d) $E(Y|X=0.3)=\frac{0.3+\frac{2}{3}}{2\times 0.3+1}=0.604$ miles de unidades monetarias: Si el empresario pone 300 u.m., pedirá prestados unas 604 u.m. para hacer la ampliación de negocio.

Problema 4

Los valores X e Y de dos acciones pueden bajar 1 punto porcentual, permanecer igual, o subir 1 punto porcentual durante cada día. Un economista tiene dos modelos distintos para la función de probabilidad conjunta de (X,Y), que figuran en la tabla de abajo:

a) Halle c y b.
b) ¿En algún modelo hay más probabilidad de que las acciones no muestren cambios?
c) Halle las distribuciones marginales $P_X(x)$ y $P_Y(y)$
d) Si X subirá de todos modos ¿Qué pronosticaría para Y en cada modelo? Use probabilidades para responder.
e) Halle $E[Y\mid X=-1]$ en cada modelo y diga cuál sería el valor esperado final de una inversión que se dividió en 100 unidades monetarias en Y y 100 unidades en X, para cada modelo.

Modelo A

$P_{XY}(x,y)$	X		
Y	-1	0	1
-1	c	3c	5c
0	c	3c	c
1	3c	2c	c+b

Modelo B

$P_{XY}(x,y)$	X		
Y	-1	0	1
-1	0.2	0.05	0.01
0	b	0.05	b
1	0.05	0.05	0.27

Solución:

a) Se debe cumplir $\sum_{(x,y)} P_{XY}(x,y)=1$ en cada modelo:

En A: $\sum_{(x,y)} P_{XY}(x,y)=1 \Leftrightarrow 20c+b=1$ y en B: $\sum_{(x,y)} P_{XY}(x,y)=1 \Leftrightarrow 0.68+2b=1$ $\Rightarrow b=0.16$ y $c=0.042$

b) Sea E = "Acciones no muestran cambios" $\Rightarrow$ E = {(0,0)} y P(E) = $P_{XY}(0,0)$ que vale 3c=0.126 en A y 0.05 en B. En el modelo A hay más probabilidad de que las acciones no muestren cambios.

c) Más sencillo es trabajar con las tablas y sumar para tener las distribuciones marginales:

Modelo A				
$P_{XY}(x,y)$	X			
Y	-1	0	1	$P_Y(y)$
-1	0.042	0.126	0.210	0.378
0	0.042	0.126	0.042	0.210
1	0.126	0.084	0.202	0.412
$P_X(x)$	0.210	0.336	0.454	1

Modelo B				
$P_{XY}(x,y)$	X			
Y	-1	0	1	$P_Y(y)$
-1	0.20	0.05	0.01	0.260
0	0.16	0.05	0.16	0.370
1	0.05	0.05	0.27	0.370
$P_X(x)$	0.410	0.150	0.440	1

d) "X subirá de todos modos" $\Leftrightarrow X = 1$ y necesitamos hallar $P_{Y|X}(y \mid X=1) = P_{Y|X}(y \mid 1)$ en cada modelo para identificar el caso o valor de Y de probabilidad condicional más alta.

Modelo A			
Y	$P_{XY}(1,y)$	$\frac{P_{XY}(1,y)}{P_X(1)}$	$P_{Y\|X}(y\|1)$
-1	0.210	0.210/0.454	0.463
0	0.042	0.042/0.454	0.093
1	0.202	0.202/0.454	0.445
Total	0.454	1	1

Modelo B			
Y	$P_{XY}(1,y)$	$\frac{P_{XY}(1,y)}{P_X(1)}$	$P_{Y\|X}(y\|1)$
-1	0.01	0.01/0.44	0.023
0	0.16	0.16/0.44	0.364
1	0.27	0.27/0.44	0.614
Total	0.440	1	1

e) Ahora necesitamos $P_{Y|X}(y \mid X=-1) = P_{Y|X}(y \mid -1)$, para hallar luego $E[Y \mid X=-1] = \sum_{y=-1}^{1} y P_{Y|X}(y \mid -1)$

Procediendo como en d) llegamos a

Modelo A		
Y	$P_{Y\|X}(y\|-1)$	$yP_{Y\|X}(y\|-1)$
-1	0.20	-0.20
0	0.20	0.00
1	0.60	0.60
Total	1	0.40
$E[Y \| X=-1] = 0.40$		

Modelo B		
Y	$P_{Y\|X}(y\|-1)$	$yP_{Y\|X}(y\|-1)$
-1	0.49	-0.49
0	0.39	0.00
1	0.12	0.12
Total	1	-0.37
$E[Y \| X=-1] = -0.37$		

El valor final es VF=100+100(X/100) + 100+100(Y/100) = 200+(X+Y) y como X= -1 de todos modos, entonces

$$E[VF \mid X=-1] = E[200 + (X+Y) \mid X=-1] = 200 + (-1 + E[Y \mid X=-1]) = 199 + E[Y \mid X=-1]$$

$$= \begin{cases} 199 + 0.4 & en\ A \\ 199 - 0.37 & en\ B \end{cases} = \begin{cases} 199.40 & en\ A \\ 198.63 & en\ B \end{cases}$$

Problema 5

Sea (X, Y) vector aleatorio discreto con función de probabilidad conjunta $P_{XY}(x, y) = c\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^y$ $x = 1,2, \ldots; y = 1,2 \ldots$, donde c es constante. Hallar c, $P(X = Y)$, las distribuciones marginales de X y de Y. *Dos variables aleatorias discretas se dicen independientes si* $P_{XY}(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$ ¿Son independientes X e Y?

Solución:

Recordando la "Serie geométrica" $si\ |r| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r}$:

$$1 = \underbrace{\sum_{x}}_{\substack{Serie\ geométrica \\ con\ r=1/2}} \left[\sum_{y} P_{XY}(x, y)\right] = \sum_{x=1}^{\infty}\left[\sum_{y=1}^{\infty} c\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^y\right] = c\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x \overbrace{\left[\sum_{y=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^y\right]}^{\substack{Serie\ geométrica \\ con\ r=\frac{1}{4}}} = c\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left[\frac{1}{3}\right] =$$

$$\frac{c}{3} \times \overbrace{\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x} = \frac{c}{3} \times 1 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow P_{XY}(x, y) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^y \quad x = 1,2, \ldots; y = 1,2 \ldots$$

También $P(X = Y) = P_{XY}(1,1) + P_{XY}(2,2) + \cdots P_{XY}(n, n) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n = 3\frac{1}{8} = 0.375$

$$P_X(x) = \sum_{y} P_{XY}(x, y) = \sum_{y=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x \sum_{y=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x \times \left[\frac{1}{3}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad x = 1,2,3, \ldots$$

$$P_Y(y) = \sum_{x} P_{XY}(x, y) = \sum_{x=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^y \sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3\left(\frac{1}{4}\right)^y \times 1 = 3\left(\frac{1}{4}\right)^y \quad y = 1,2,3, \ldots$$

$P_{XY}(x, y) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^x 3\left(\frac{1}{4}\right)^y = P_X(x)P_Y(y)$ $x = 1,2, \ldots; y = 1,2 \ldots \Rightarrow X$ e Y son independientes.

Problema 6

Sean X e Y v.a. independientes, ambas con distribución geométrica $G(p = \frac{1}{2})$: Halle $P(X + Y = n)$.

Solución:

X e Y son independientes ambas con la misma distribución geométrica, entonces y en general (recordando la distribución Geométrica de parámetro p, ver Cap. 2), se cumple que:
$P_{XY}(x, y) = P_X(x)P(y) = p(1-p)^{x-1} \times p(1-p)^{y-1}$ $x = 1,2,3, \ldots; y = 1,2,3, \ldots$ Luego, en general:

$$P(X + Y = n) = P\big((X = 1) \cap (Y = n-1)\big) + P\big((X = 2) \cap (Y = n-2)\big) + \cdots + P\big((X = n-1) \cap (Y = 1)\big) =$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} P\big((X = k) \cap (Y = n-k)\big) = \sum_{k=1}^{n-1} P_{XY}(k, n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} P_X(k) \times P_Y(n-k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1} \times p(1-p)^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = p^2\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

La respuesta final se obtiene del dato inicial $X \sim G(x; p = 0.5)$ e $Y \sim G(y; p = 0.5)$, reemplazando el valor de p.

Problema 7

En la producción de una fruta, el 60% es de calidad "Premio" y el 30% es de calidad "Aceptable". En una muestra de 12 unidades de esta fruta, muestra tomada al azar de la producción total, definimos el v.a.d. (X, Y) donde $X = \#$ de unidades Premio en la muestra e $Y = \#$ de unidades Aceptables.

a) Halle $P((X = 0) \cap (Y = 0))$; $P((X = 2) \cap (Y = 5))$ y $P_{XY}(x, y) = P[(X = x) \cap (Y = y)]$

b) Halle $P(\mathrm{X}=2)$; $P_X(x) = P(X = x)$ ¿Reconoce la distribución $P_X(x)$ de X?
c) Halle $P(\mathrm{Y}=12|\mathrm{X}=2)$; $P(Y=2|X=8)$; $P_{Y|X}(y|x) = P[(Y=y)|(X=x)]$ ¿Reconoce la distribución $P_{Y|X}(y|x)$? ¿Cuál sería la función de regresión de *Y* sobre *X*: $E(Y|X=x)$ en este caso? Según $E(Y|X=x)$ y "en promedio" ¿habría una relación directa o creciente de *Y* con *X*?

Solución:

a) Es claro que hay un 10% de frutas de calidad, digamos, "Baja" o sea ni Premio ni Aceptable. En este contexto aplicando combinatoria y probabilidad directamente: $P((X=0)\cap(Y=0)) =$
$P(12\ unidades\ de\ calidad\ \text{"Baja"}) = 0.1^{12}$;
$P((X=2)\cap(Y=5)) = [C_2^{12}0.6^2]\times[C_5^{10}0.3^2]\times[C_5^5 0.1^2]$, pues de las 12 unidades tomamos 2 (lo que se puede hacer de C_2^{12} maneras y hacemos que ambas sean Premio, lo que ocurre con probabilidad $0.6\times 0.6 = 0.6^2$, y todo esto tiene probabilidad $[C_2^{12}0.6^2]$; luego de las 10 unidades restantes tomamos 5 y hacemos que sean Aceptables, lo que tiene probabilidad $[C_5^{10}0.3^2]$; finalmente de las 5 unidades que quedan, tomamos las 5 y hacemos que sean de calidad Baja, esto tiene probabilidad $[C_5^5 0.1^2]$. Entonces, la ocurrencia de estos tres eventos genera el evento $(X=2)\cap(Y=5)$ con probabilidad $[C_2^{12}0.6^2]\times[C_5^{10}0.3^2]\times[C_5^5 0.1^2]$.

Extendiendo el razonamiento anterior: $P[(X=x)\cap(Y=y)] = [C_x^{12}0.6^x]\times[C_y^{12-x}0.3^y]\times[C_{12-x-y}^{12-x-y}0.1^{12-x-y}] = \frac{12!}{x!y!(12-x-y)!}0.6^x0.3^y0.1^{12-x-y}$ así que $P_{XY}(x,y) = \frac{12!}{x!y!(12-x-y)!}0.6^x0.3^y0.1^{12-x-y}$ $x=0,1,2,\dots 12;\ y=0,1,2,\dots,12;\ 0\le x+y\le 12$ es la función de probabilidad conjunta de (X,Y).

b) Por analogía con a) $P(\mathrm{X}=2) = [C_2^{12}0.6^2]\times[C_{10}^{10}0.4^{10}] = C_2^{12}0.6^20.4^{10}$, pues se toman dos unidades para que sean Premio, se hace que ambas sen Premio y luego, el resto o sea las otras diez, pueden ser lo que sea pero <u>no</u> Premio.
Para $P_X(x) = P(X=x) = [C_x^{12}0.6^x]\times[C_{12-x}^{12-x}0.4^{12-x}] = C_x^{12}0.6^x0.4^{12-x}$ $x=0,1,2,\dots,12$. Y vemos que se trata de una distribución binomial, esto es $X\sim B(n=12,p=0.6)$.

c) $P(\mathrm{Y}=12|\mathrm{X}=2) = \frac{P[(\mathrm{Y}=12)\cap(\mathrm{X}=2]}{P(\mathrm{X}=2)} = \frac{P[\emptyset]}{P(\mathrm{X}=2)} = 0.$

$$P_{Y|X}(y|x) = P[(Y=y)|(X=x)] = \frac{P[(\mathrm{Y}=y)\cap(\mathrm{X}=x)]}{P(\mathrm{X}=x)} = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)} =$$

$$= \frac{\frac{12!}{x!\,y!\,(12-x-y)!}0.6^x0.3^y0.1^{12-x-y}}{C_x^{12}0.6^x0.4^{12-x}} = \frac{\frac{12!}{x!\,y!\,(12-x-y)!}0.6^x0.3^y0.1^{12-x-y}}{\frac{12!}{x!\,(12-x)!}0.6^x0.4^{12-x}}$$

$= \frac{(12-x)!}{(12-x-y)!y!}\frac{0.3^y0.1^{12-x-y}}{0.4^{12-x}} = C_y^{12-x}\frac{0.3^y0.1^{12-x-y}}{0.4^y0.4^{12-x-y}} = C_y^{12-x}\left(\frac{3}{4}\right)^y\left(\frac{1}{4}\right)^{12-x-y}$ es decir $P_{Y|X}(y|x) =$
$C_y^{12-x}\left(\frac{3}{4}\right)^y\left(\frac{1}{4}\right)^{12-x-y}$ $y=0,1,2,\dots 12-x;\ x=0,1,\dots,12, x = valor\ dado.$

Se reconoce que dado $X=x \Rightarrow Y\sim B(n=12-x, p=\frac{3}{4})$ lo que se puede escribir $Y|X\sim B(n=12-x,p=\frac{3}{4})$: La distribución condicional de Y dado $X=x$ es una distribución Binomial con valor esperado $E(Y|X=x) = np = (12-x)\frac{3}{4} = 9-\frac{3}{4}x$ $x=0,1,2,\dots 12$. La relación de *Y* con *X* sería más bien decreciente y no creciente o directa.

Problema 8

Un economista que labora como consultor puede trabajar *X* proyectos, donde *X* es v.a. discreta con función de probabilidad $P_X(x) = \frac{c}{x}$, $x = 1,2,3.$, siendo *c* constante por hallar. Por otra parte, dado que asume $X=x$ proyectos, puede que incumpla los plazos en *Y* de ellos según $P_{Y|X}(y|x) = b(x)y,\ y=0,1,\dots x$, donde $b(x)$ es función de *x*.

a) Calcule el valor de *c* y la función de probabilidad conjunta de (*X*,*Y*) (puede ser una tabla si le parece)
b) ¿Con qué probabilidad el economista incumplirá todos los proyectos asumidos?
c) Halle $E(Y|X)$ para los diversos valores de *X* grafíquelos en un plano *XY* y diga si habría relación entre *X* e *Y*. ¿El gráfico permite decir si la relación sería directa o inversa?

Solución:

a) Como se debe cumplir: $\sum_{x=1}^{3}\frac{c}{x}=1$, pues $P_X(x)=\frac{c}{x}$ $x=1{,}2{,}3$. es una función de probabilidad y debe sumar 1, o sea $\frac{c}{1}+\frac{c}{2}+\frac{c}{3}=1$ de donde se obtiene $c=6/11$.
   También, como dado $X=x$, $P_{Y|X}(y|x)$ es una función de probabilidad, entonces debe cumplir:
   $\sum_{y=0}^{x}P_{Y|X}(y|x)=1$ $x=valor\ fijo \Leftrightarrow \sum_{y=0}^{x}by=1$ $\Rightarrow b\sum_{y=0}^{x}y=1\Rightarrow b\sum_{y=1}^{x}y=1$ $\Rightarrow b\sum_{y=1}^{x}y=1\Rightarrow$ $\frac{bx(x+1)}{2}=1\Rightarrow b=\frac{2}{x(x+1)}$. Y así tenemos:
   $P_{Y|X}(y|x)=\frac{2y}{x(x+1)}$ $y=0,1,\dots,x;$ $x=valor\ dado$ y por tanto la función de probabilidad conjunta es:
   $P_{XY}(x,y)=P_{Y|X}(y|x)P_X(x)=\frac{2y}{x(x+1)}\frac{c}{x}=\frac{12y}{11x^2(x+1)}$ $y=0,1,2,\dots,x;$ $x=1{,}2{,}3$.

b) Se debe hallar $P(Y=X)=P_{XY}(1{,}1)+P_{XY}(2{,}2)+P_{XY}(3{,}3)$. Basta evaluar y sumar.

c) Hallar sucesivamente $E(Y|X=x)$ cuando $X=1$, cuando $X=2$ y cuando $X=3$:
   $X=1\Rightarrow P_{Y|X}(y|1)=\frac{2y}{1(1+1)}=y;\ y=0{,}1$

y	0	1	Total
$P_{Y\|X}(y\|1)$	0	1	1
$yP_{Y\|X}(y\|x)$	0	1	$1=E(Y\|X=x)$

$X=2\Rightarrow P_{Y|X}(y|1)=\frac{y}{3}=y;\ \ y=0{,}1{,}2$

y	0	1	2	Total
$P_{Y\|X}(y\|1)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$yP_{Y\|X}(y\|x)$	0	1/3	4/3	$\frac{5}{3}=E(Y\|X=x)$

$X=3\Rightarrow P_{Y|X}(y|1)=\frac{y}{6}=y;\ \ y=0{,}1{,}2{,}3$

y	0	1	2	3	Total
$P_{Y\|X}(y\|1)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1
$yP_{Y\|X}(y\|x)$	0	1/6	4/6	9/6	$\frac{7}{3}=E(Y\|X=x)$

Conforme *X* crece, *Y* también lo hace: la relación entre *X* e Y es directa o creciente (sólo falta el gráfico)

Problema 9

El número X de consumidores de un bien que acuden por día al mercado de ese bien, es una v.a.d. con distribución de Poisson $P(x;\lambda)$. Cada consumidor puede elegir comprar el bien, independientemente de los otros consumidores, con una probabilidad $\boldsymbol{p}$. Sea *Y* el número de consumidores que adquiere el bien en un día cualquiera.

a) En general explicite el rango de *Y* dado que $X=x$, halle $P_{Y|X}(y|x)$ e interprete $E(Y|X=x)$

b) Si formamos el v.a.d. (X,Y), explicite el rango R_{XY} y la función de probabilidad conjunta $P_{XY}(x,y)$. Justifique. Halle $P_Y(y)$ y vea si es distribución conocida.

Solución:

a) Dadas las definiciones de *X* y de *Y*, es claro que $Y\le X$, es decir $y=0,1,2,\dots,x$: Dado que han ido $\boldsymbol{x}$ clientes ($\boldsymbol{x}$ fijo en este caso), entonces el número *Y* de estos $\boldsymbol{x}$ clientes, que además compran el bien, se ajusta a una variable binomial, con distribución Binomial $B(y;n=x,p)$ (revisar Cap. 2) y como *esta función de probabilidad depende de* $\boldsymbol{x}$, se trata de una distribución *condicional*, esto es:
   $P_{Y|X}(y|x)=B(y;n=x,p)=C_y^x p^y(1-p)^{x-y}$ $y=0,1,2,\dots,x$ $\ \ x=valor\ dado$
   Además $E(Y|X=x)=np=xp$.

b) Naturalmente el rango del v.a.d. es $R_{XY}=\{(x,y)|y=0,1,2,\dots,x;x=0,1,2,3,\dots.\}$.
   Como por dato $X\sim P(x;\lambda)\Leftrightarrow P_X(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ $x=0,1,2,\dots$, entonces $P_{XY}(x,y)=P_{Y|X}(y|x)P_X(x)\Rightarrow$

$P_{XY}(x,y) = C_y^x p^y (1-p)^{x-y} \times e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \;= e^{-\lambda}\lambda^x \frac{1}{(x-y)!y!} p^y (1-p)^{x-y} \quad y = 0,1,2,\dots,x;\, x = 0,1,2,\dots.$

Finalmente $P_Y(y) = \sum_x P_{XY}(x,y) = \sum_{x=y}^{\infty} P_{XY}(x,y) = \sum_{x=y}^{\infty} e^{-\lambda}\lambda^x \frac{1}{(x-y)!y!} p^y (1-p)^{x-y} =$

$$e^{-\lambda}\frac{p^y}{y!}\sum_{x=y}^{\infty}\lambda^x\frac{(1-p)^{x-y}}{(x-y)!} = e^{-\lambda}\frac{p^y}{y!}\sum_{x=y}^{\infty}\lambda^{x-y}\frac{(1-p)^{x-y}}{(x-y)!}\lambda^y = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^y}{y!}\sum_{x=y}^{\infty}\lambda^{x-y}\frac{(1-p)^{x-y}}{(x-y)!} =$$

$$\underbrace{=}_{k=x-y} e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^y}{y!}\sum_{x=0}^{\infty}\lambda^k\frac{(1-p)^k}{(k)!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^y}{y!}\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^k}{(k)!}}_{e^{\lambda(1-p)}} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^y}{y!}e^{\lambda(1-p)} = e^{-(\lambda p)}\frac{(\lambda p)^y}{y!} \Rightarrow$$

$P_Y(y) = e^{-(\lambda p)}\frac{(\lambda p)^y}{y!}$; $y = 0,1,2,3,\dots$ y se reconoce que $P_Y(y)$ corresponde a una distribución de Poisson de parámetro (λp)

Nota: Recordar que $\forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$

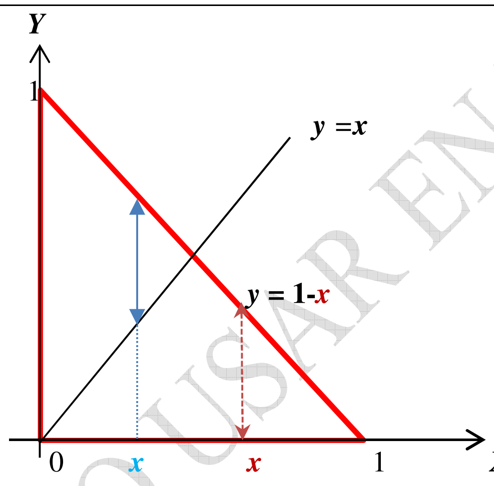
Problema 10

Sea X la demanda de un bien *A* e Y la demanda de un bien *B*, en el mismo mercado. Si (X,Y) es v.a. continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} cx & 0<x<1 \quad 0<y<1 \quad x+y<1 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

a) Calcule el valor de la constante normalizadora *c* y la probabilidad de que *B* se demande más que *A*.
b) Halle las distribuciones marginales de *X* e *Y* ¿Son independientes las demandas de *A* y de *B*?
c) Halle $E(Y \mid X)$ ¿Se podría averiguar si estos bienes son complementarios?

Solución:



a) Es preferible integrar primero con respecto a *y*, después con respecto a *x*:

$$1 = \int_0^1\left[\int_0^{1-x} cx\,dy\right]dx = c\int_0^1 x[y]_0^{1-x}dx =$$

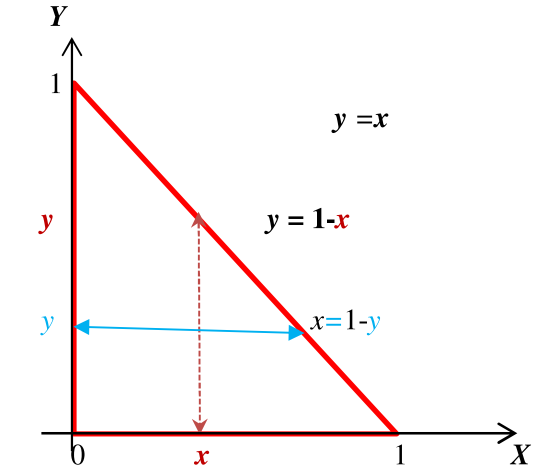
$$c\int_0^1 x(1-x)dx = c\left[x^2 - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2 \text{ y}$$

$$P(B\ se\ demande\ más\ que\ A) = P(Y>X) =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\int_x^{1-x} 2x\,dy\right]dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left[2x\int_x^{1-x}dy\right]dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 2x[y]_x^{1-x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x(1-2x)dx = \left[x^2 - \frac{4x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}$$

$$= 0.083$$



b) $f_{XY}(x,y) = 2x \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x + y < 1 \Rightarrow$

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2x dy = 2x[y]_0^{1-x} = 2x(1-x) \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 2x dx = [x^2]_0^{1-y} = (1-y)^2 \quad 0 < y < 1$$

Como $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, entonces X e Y **no** son independientes, en consecuencia, las demandas de A y de B no son independientes.

c) Para $E(Y|X)$ necesitamos $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2x}{2x(1-x)} = \frac{1}{(1-x)} \quad \begin{cases} 0 < y < 1-x \\ 0 < x < 1, x = valor\ fijo \end{cases} \Rightarrow$

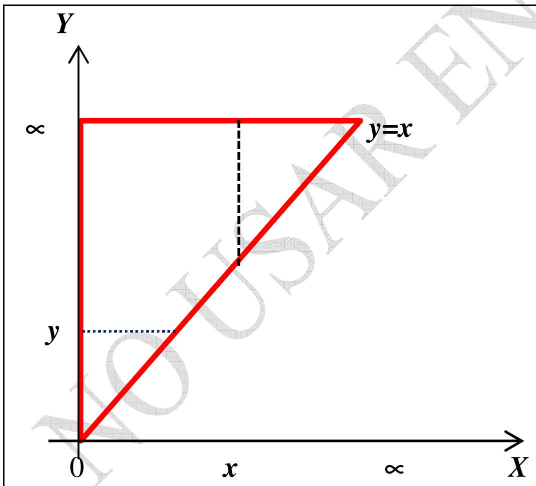
$E(Y|X) = \int_0^{1-x} y \frac{1}{(1-x)} dy = \frac{1}{(1-x)} \int_0^{1-x} y dy = \frac{1}{(1-x)} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{1}{(1-x)} \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{(1-x)}{2} \quad 0 < x < 1$ que es claramente una función decreciente de x, es decir, cuando aumenta la demanda de A, disminuye la de B. Estos bienes no son complementarios, en todo caso serían sustitutos.

Problema 11

En un modelo sobre la Utilidad Y y la Reinversión X de una empresa, se considera a (X,Y) como v.a.c. con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y) = cxe^{-y} \quad 0 < x \leq y$.

a) Calcule $\boldsymbol{c}$ y las distribuciones marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ ¿Son distribuciones conocidas?
b) ¿Es cierto que es más probable que la empresa distribuya más de la mitad de su utilidad a que no haga esto?
c) Halle $\mu_{Y|X} := E(Y|X)$ e interprete $\frac{\partial \mu_{Y|X}}{\partial x}$

Solución:



a)

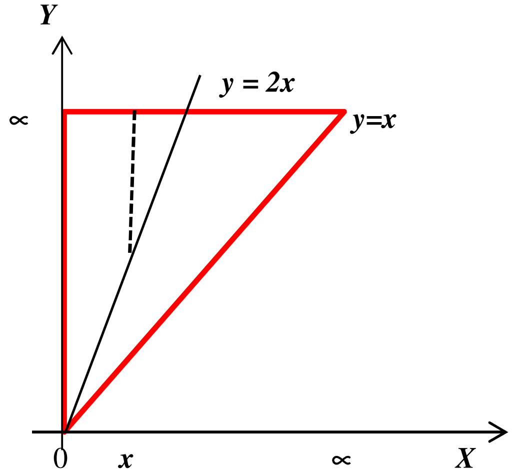
$$1 = \int_0^{\infty} \left[\int_x^{\infty} cxe^{-y}\, dy\right] dx = c\int_0^{\infty} x \left[\int_x^{\infty} e^{-y}\, dy\right] dx$$

$$= c\int_0^{\infty} x[-e^{-y}]_x^{\infty} dx = c \underbrace{\int_0^{\infty} xe^{-x} dx}_{\Gamma(2)=1!} = c \Rightarrow c = 1$$

$$f_X(x) = \left[\int_x^{\infty} xe^{-y}\, dy\right] = xe^{-x} \quad 0 < x < \infty$$

$$f_Y(y) = \int_0^{y} xe^{-y}\, dx = e^{-y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{y} = \frac{y^2}{2}e^{-y} = \frac{y^2 e^{-y}}{2} \quad 0 < y < \infty$$

$X \sim \Gamma(x; \alpha = 2, \beta = 1)$ y $Y \sim \Gamma(y; \alpha = 3, \beta = 1)$



b) "Distribuye más de la mitad de sus utilidades" equivale a $Y - X > \frac{1}{2}Y$ y se pide averiguar si

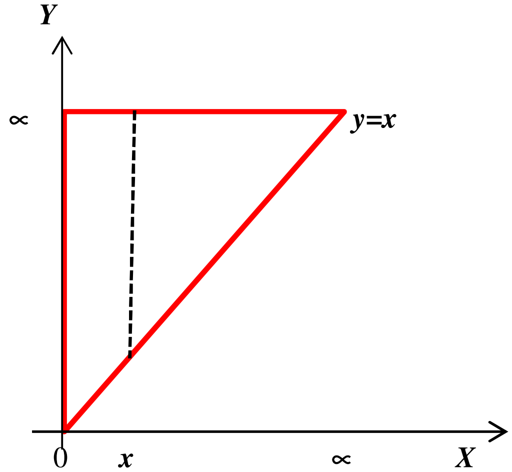
$$P\left(Y - X > \frac{1}{2}Y\right) > 1 - P\left(Y - X > \frac{1}{2}Y\right) \Leftrightarrow$$

$$P\left(Y - X > \frac{1}{2}Y\right) > \frac{1}{2}$$

$$P\left(Y - X > \frac{1}{2}Y\right) = P(Y > 2X) = \int_0^{\infty}\left[\int_{2x}^{\infty} xe^{-y}\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^{\infty} x[-e^{-y}]_{2x}^{\infty}dx = \int_0^{\infty} xe^{-2x}dx = \int_0^{\infty}\frac{ue^{-u}}{4}du$$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} ue^{-u}du = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ (haciendo el cambio de variable $u = 2x$ de modo que $du = 2dx$). No es cierta la afirmación.



c) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{xe^{-y}}{xe^{-x}} = e^{x-y} \quad x \le y < \infty, x = dado$

$E(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy = \int_x^{\infty} ye^{x-y}dy.$

Haciendo cambio de variable $u = y - x$ entonces $du = dy$ y se tiene:

$$E(Y|X) = \int_x^{\infty} ye^{x-y}dy = \int_0^{\infty}(u + x)e^{-u}du$$

$= \int_0^{\infty} ue^{-u}du + \int_0^{\infty} xe^{-u}du = 1 + x$ y $\frac{\partial E(Y|X=x)}{\partial x} = 1$

Por cada unidad monetaria reinvertida, la utilidad Y aumenta en una unidad monetaria

Problema 12

Sea (X, Y) vector aleatorio continuo donde X = PBI de una región e Y = PBI Minero de la región, ambos en millones de unidades monetarias, con f. de densidad conjunta: $f_{XY}(x, y) = ye^{-x} \quad 0 < x < \infty,\ 0 < y \le x$. Hallar la probabilidad de que el PBI minero sea mayor al 50% del PBI. Calcule $E[Y \mid X]$ y diga en cuánto espera que suba el PBI si el PBI Minero sube en 0.5 millones.

Sugerencias:

- Graficar primero el rango R_{XY} del v.a. (X,Y) y luego la región de integración donde "*el PBI minero Y es mayor al 50% del PBI X*". Luego, probabilidad de que el PBI minero sea mayor al 50% del PBI es:

  $\int_0^{\infty}\left[\int_0^x ye^{-x}dy\right]dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^{\infty}\frac{x^2}{2}e^{-x}dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx}_{\Gamma(3)=2!} = 1.$

  $$P\left(Y > \frac{X}{2}\right) = \int_0^{\infty}\left[\int_{\frac{x}{2}}^{x} ye^{-x}dy\right]dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\left[\int_{\frac{x}{2}}^{x} ydy\right]dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^{x}dx =$$

  $= \int_0^{\infty} e^{-x}\frac{3x^2}{8}dx = \frac{3}{8}\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = \frac{3}{8}2 = \frac{3}{4}.$

- $f_X(x) = \int_0^x ye^{-x}dy = e^{-x}\int_0^x ydy = e^{-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2e^{-x}}{2} \quad 0 < x < \infty;\ f_{Y|X}(y|x) = \frac{2y}{x^2} \quad 0 < y < x; \quad x = valor\ dado \Rightarrow \ E(Y|X) = \int_0^x y\frac{2y}{x^2}dy = \frac{2}{3}x.$

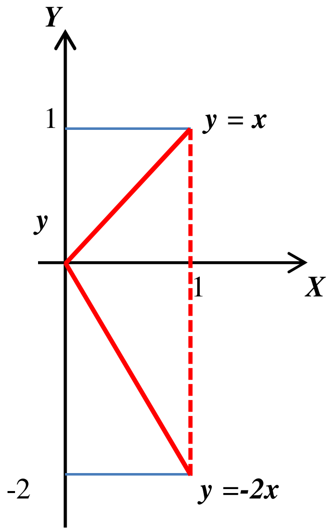
- Hay que encontrar primero $E(X|Y)$: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{ye^{-x}}{ye^{-y}} = e^{y-x}\ \ 0 < y < x < \infty; y = valor\ dado \Rightarrow$
  $E(X|Y) = \int_y^{\infty} xe^{y-x}dx \underset{\substack{u=x-y \\ du=dx}}{=} \int_0^{\infty}(u+y)e^{-u}du = 1 + y$. Como $\frac{dE(X|Y)}{dy} = 1$, se espera que el PBI suba en 0.5 millones si el PBI Minero sube en 0.5 millones.

Problema 13
Sea (X,Y) vector aleatorio donde X = Monto de una inversión e Y = Ganancia o pérdida de la inversión, con f. de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c & si\ \ -2x < y \le 0,\ 0 < x < 1 \\ 2c & si\ \ \ \ 0 < y < x,\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

a) Grafique el rango R_{XY} del vector aleatorio y halle la constante c. Calcule la probabilidad de que tener ganancia con la inversión.
b) Calcule la función de densidad marginal de X y la función de densidad condicional $f_{Y|X}(y|x)$. Halle la media condicional $\mu_{Y|X}$ y determine si esta inversión es conveniente.

Sugerencias:



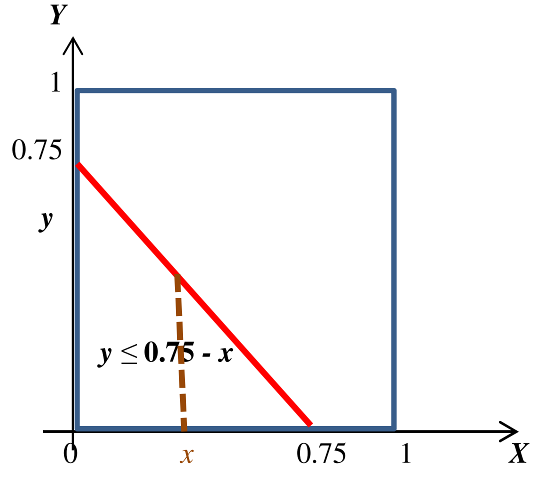
a) $1 = c\int_0^1[\int_{-2x}^{x} f_{XY}(x,y)dy]\,dx = \int_0^1\left[\int_{-2x}^{0} cdy + \int_0^x 2cdy\right]dx =$
$$= c\int_0^1\left[\int_{-2x}^{0} dy + \int_0^x 2dy\right]dx = c\int_0^1 [2x + 2x]\,dx = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$
y luego calcular $P(Y > 0) = \int_0^1[\int_0^x dy]\,dx$

b) $f_X(x) = \int_{-2x}^{0}\frac{1}{2}dy + \int_0^x dy$ =etc. ;
$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2f_X(x)} & -2x < y \le 0 \\ \frac{1}{f_X(x)} & 0 < y < x \end{cases} \quad x = valor\ dado$$
$E(Y|X) = \int_{-2x}^{x} yf_{Y|X}(y|x)dy = \int_{-2x}^{0} y\frac{1}{2f_X(x)}dy + \int_0^x y\frac{1}{f_X(x)}\,dy$. Si $E(Y|X) > 0\ \forall X$ la inversión es conveniente.
Esto último también se puede estudiar viendo si $E(Y) > 0$, donde hay que calcular primero $f_Y(y)$ de acuerdo con

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-y/2}^{1}\frac{1}{2}dx & -2 < y \le 0 \\ \int_x^1 dx & 0 < y < 1 \end{cases}$$ y así $E(Y) = \int_{-2}^{1} yf_Y(y)dy = \int_{-2}^{0} yf_Y(y)dy + \int_0^1 yf_Y(y)dy$

Problema 14
Sean X e Y v.a. independientes, ambas con la misma distribución.
a) Si X e Y tienen distribución uniforme en el intervalo $]0,1[$, halle $P(X+Y < 0.75)$
b) Si X e Y tienen distribución geométrica $G(p = 0.5)$, halle $P(X+Y = n)$

Solución:
a) Como X e Y son independientes y cada una con distribución uniforme: $X \sim U(x; 0,1)$ e $Y \sim U(y; 0,1)$, se tiene $f_X(x) = 1\ \ 0 < x < 1$; $f_Y(y) = 1\ \ 0 < y < 1$ y $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = 1\ \ 0 < x < 1, 0 < y < 1$.



Luego:

$$P(X+Y<0.75)=\int_0^{0.75}\left[\int_0^{0.75-x}dy\right]dx=\int_0^{0.75}[0.75-x]dx$$

$$=\left[0.75x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{0.75}=\frac{0.75^2}{2}=0.28125$$

b) Es el problema 6 de esta PD.

Problema 15

Sea (X,Y) vector aleatorio continuo donde X = PBI de una región e Y = PBI Minero de la región, ambos en millones de unidades monetarias, con f. de densidad conjunta: $f_{XY}(x,y)=ye^{-x}\quad 0<y<x<\infty$.

a) Verifique que $f_{XY}(x,y)$ es función de densidad conjunta y hallar la probabilidad de que el PBI minero sea mayor al 50% del PBI.

b) Calcule $E(Y|X)$ y diga en cuánto esperaría que haya subido el PBI minero si el PBI regional subió un millón.

c) Halle las distribuciones marginales de X y de Y ¿Son distribuciones conocidas? Halle las medias y desviaciones estándar de X y de Y

d) Calcule la covarianza $Cov(x,y)\equiv\sigma_{XY}=E(XY)-\mu_X\mu_Y$ y según su signo diga si habría relación lineal entre X e Y, indicando si se trata de relación directa o inversa.

e) Halle el coeficiente de correlación de Pearson ρ_{XY} entre X e Y ¿Habría relación lineal débil o nula entre X e Y?

Solución:

a) $\int_0^\infty\left[\int_0^x ye^{-x}dy\right]dx=\int_0^\infty e^{-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx=\int_0^\infty\frac{x^2}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty x^2e^{-x}dx}_{\Gamma(3)=2!}=1$

$$P\left(Y>\frac{X}{2}\right)=\int_0^\infty\left[\int_{\frac{x}{2}}^x ye^{-x}dy\right]dx=\int_0^\infty e^{-x}\left[\int_{\frac{x}{2}}^x ydy\right]dx=\int_0^\infty e^{-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^x dx=$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}\frac{3x^2}{8}dx=\frac{3}{8}\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=\frac{3}{8}2=\frac{3}{4}$$

b) $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$; como $f_X(x)=\int_0^x ye^{-x}dy=e^{-x}\int_0^x ydy=e^{-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2e^{-x}}{2}\quad 0<x<\infty\Rightarrow$

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{ye^{-x}}{\frac{x^2e^{-x}}{2}}=\frac{2y}{x^2}\quad 0<y<x;\ \ x=valor\ dado\ \Rightarrow\ E(Y|X)=\int_0^x y\frac{2y}{x^2}dy=\frac{2x^3}{3x^2}=$

$=\frac{2}{3}x$. Como $\frac{dE(Y|X)}{dx}=\frac{2}{3}$, si X sube en una unidad (un millón), entonces en promedio Y debe haber subido 0.67 millones.

c) $f_X(x)=\frac{x^2e^{-x}}{2}\quad 0<x<\infty\Rightarrow X\sim\Gamma(x;\alpha=3,\beta=1)\Rightarrow\mu_X=\alpha\beta=3$ y $\sigma_X^2=\alpha\beta^2=3;\sigma_X=\sqrt{3}$

$f_Y(y)=\int_y^\infty ye^{-x}dx=y\int_y^\infty e^{-x}dx=ye^{-y}\quad 0<y<\infty<\infty\Rightarrow Y\sim\Gamma(Y;\alpha=2,\beta=1)\Rightarrow\mu_Y=\alpha\beta=2$ y $\sigma_Y^2=\alpha\beta^2=2;\sigma_Y=\sqrt{2}$.

d) $Cov(x,y)\equiv\sigma_{XY}=E(XY)-\mu_X\mu_Y$; como $\mu_X\ y\ \mu_Y$ ya son conocidas, sólo falta $E(XY)$ para poder calcular la covarianza.

$$E(XY)=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{x} xyye^{-x}\,dy\right]dx=\int_0^{\infty}\left[xe^{-x}\int_0^{x} y^2\,dy\right]dx=\int_0^{\infty} xe^{-x}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^4}{3}e^{-x}dx=$$

$\frac{1}{3}\int_0^{\infty} x^4 e^{-x}dx=\frac{1}{3}\Gamma(5)=8$; entonces $\sigma_{XY}=E(XY)-\mu_X\mu_Y=8-3\times 2=2>0$, la relación sería directa.

e) $\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}}=0.82>0.8$ La relación es lineal y es fuerte

Problema 16

Aplicando propiedades del valor esperado:

a) Si $U=\dfrac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ y $V=\dfrac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$, pruebe que $\rho_{UV}=\rho_{XY}$.

b) Pruebe que en general $E(a+bY|X)=a+bE(Y|X)$

Solución:

a) $\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sigma_U\sigma_V}$. Trabajando cada parte del cociente anterior por separado:

$Cov(U,V)=E((U-E(U)(V-E(V))$.

Pero $E(U)=E\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)=\frac{1}{\sigma_X}E\big((X-\mu_X)\big)=\frac{1}{\sigma_X}\big(E(X)-E(\mu_X)\big)=\frac{1}{\sigma_X}(\mu_X-\mu_X)=0$ y análogamente $E(V)=0$.

Luego $Cov(U,V)=E(UV)=E\left(\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right)=\frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}E\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big)=\frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}Cov(X,Y)=\rho_{XY}$

En cuanto al denominador $\sigma_U\sigma_V$, calculando varianzas:

$$\sigma_U^2=E((U-E(U)^2)=E(U^2)=E\left(\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right)=E\left(\frac{1}{\sigma_X^2}(X-\mu_X)^2\right)=\frac{1}{\sigma_X^2}\overbrace{E((X-\mu_X)^2)}^{\sigma_X^2}=\frac{1}{\sigma_X^2}\sigma_X^2=1$$

Análogamente resulta que $\sigma_V^2=1$.

Reemplazando todo lo anterior en $\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sigma_U\sigma_V}$ resulta $\rho_{UV}=\rho_{XY}$.

b) $E(a+bY|X)=E(a|X)+E(bY|X)=a+bE(Y|X)$

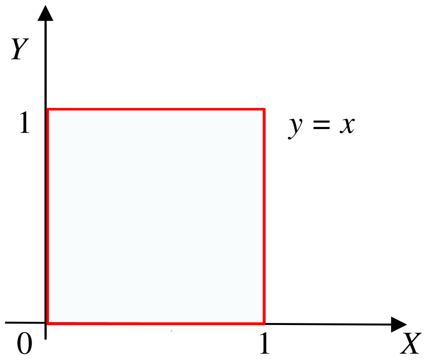
Problema 17

Se tiene dos inversiones que generan intereses a tasas X e Y que forman un v.a.c. (X,Y) con función de densidad conjunta $f_{XY}(x,y)=c(x+2y)\quad 0<x<1; 0<y<1$, donde *c* es constante que hace a $f_{XY}(x,y)$ función de densidad conjunta.

a) Calcule el valor de *c*. Grafique la región de integración doble.
b) Graficando la región de integración correspondiente, calcule la probabilidad de que la segunda inversión resulte más rentable.
c) Halle la función de densidad de X y luego calcule la rentabilidad promedio de X : μ_X e interprete.
d) La función de densidad condicional de Y dado $X=x$, se define mediante $f_{Y|X}(y|x):=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$, con x valor dado de X tal que $f_X(x)>0$. $f_{Y|X}(y|x)$ tiene la propiedad: $P(c<Y\leq d|X=x)=\int_c^d f_{Y|X}(y|x)dy$.
Use esta función para calcular la probabilidad de que la segunda inversión genere una rentabilidad superior a 10% si la primera generó una rentabilidad de 20% o sea $X=0.2$
e) Halle e interprete la "*Media condicional de Y dado X*": $E(Y|X)$ y halle $V(Y|X)$, ambas en el caso $X=0.2$

Solución:

a) El rango R_{XY} de valores reales de (X,Y) determina la "región de integración":
$R_{XY} = \{(x,y) |\, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$



Para hallar c integramos $\iint_{R_{XY}} f_{XY} = 1 \Leftrightarrow 1 = \int_0^1 \left[\int_0^1 c(x+2y)\, dy\right] dx =$

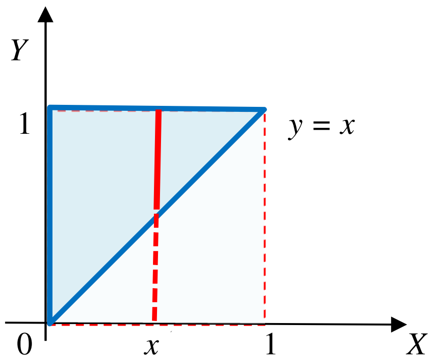
$= c\int_0^1 \left[\int_0^1 (x+2y)\, dy\right] dx = c\int_0^1 [xy+y^2]_0^1 dx =$

$c\int_0^1 (x+1)dx = c\left(\frac{x^2}{2}+x\right)_0^1 = \frac{3c}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$

y la f. de densidad conjunta de (X,Y) es:

$\boldsymbol{f_{XY}(x,y) = \frac{2}{3}(x+2y) \quad 0 < x < 1;\ 0 < y < 1}$

b) Se pide $P(X < Y)$: Hay que integrar sobre la región $A = \{(x,y) \in R_{XY} |\, 0 < x < y < 1\}$ (región más sombreada)



$P(A) = \frac{2}{3}\int_0^1 \left[\int_x^1 (x+2y)\, dy\right] dx = \frac{2}{3}\int_0^1 [xy+y^2]_x^1 dx =$

$\frac{2}{3}\int_0^1 (x+1-2x^2)dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x-2\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+1-2\frac{1}{3}\right) =$

$\frac{10}{18} = 0.55$

c) $f_X(x) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)dy = \frac{2}{3}[xy+y^2]_0^1 = \frac{2}{3}(x+1) \quad 0 < x < 1$ y como tenemos la función de densidad de X, no es problema hallar $\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x\frac{2}{3}(x+1)dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (x^2+x)dx =$

$\frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{9} = 0.556$ "La rentabilidad esperada de la primera inversión es 0.556 o 55.6%".

d) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{2}{3}(x+2y)}{\frac{2}{3}(x+1)} = \frac{(x+2y)}{(x+1)} \quad 0 < y < 1,\ x \in]0,1[$. Si $X = 0.2$, entonces:

$f_{Y|X}(y|0.2) = \frac{(0.2+2y)}{(0.2+1)} = \frac{(0.2+2y)}{1.2} \quad 0 < y < 1$ y $P(Y > 0.1|X = 0.2) = \int_{0.1}^1 \frac{(0.2+2y)}{1.2}dy = \frac{1}{1.2}(0.2y+y^2)_{0.1}^1$
$= \frac{1}{1.2}(0.2y+y^2)_{0.1}^1 = \frac{39}{40} = 0.9750$

e) Nos piden $E(Y|X = 0.2)$, pero mejor calculemos primero $E(Y|X)$ para un x general: $E(Y|X) =$
$\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy = \int_0^1 y\frac{(x+2y)}{(x+1)}dy = \frac{1}{(x+1)}\int_0^1 y(x+2y)dy = \frac{1}{(x+1)}\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{2y^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{(x+1)}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\right)$
y en el caso particular de $X = 0.2$: $E(Y|X = 0.2) = \frac{1}{1.2}\left(\frac{0.2}{2}+\frac{2}{3}\right) = \frac{23}{36} = 0.639$ "Dado que la primera inversión tuvo una rentabilidad de 20%, se espera que la segunda tenga una rentabilidad de 63.9%"
$\sigma^2_{Y|X} = V(Y|X) = E(Y^2|X) - (\mu_{Y|X})^2$ (pues se trata de una varianza usual, con todas las propiedades de la varianza de una variable aleatoria, sólo que calculada con $f_{Y|X}$. $E(Y^2|X) =$
$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{Y|X}(y|x)dy = \int_0^1 y^2\frac{(x+2y)}{(x+1)}dy = \frac{1}{(x+1)}\int_0^1 y^2(x+2y)dy = \frac{1}{(x+1)}\left(\frac{xy^3}{3}+\frac{2y^4}{4}\right)_0^1$
$= \frac{1}{(x+1)}\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)$ y si $X = 0.2$, $E(Y^2|X = 0.2) = \frac{1}{1.2}\left(\frac{0.2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{36} = 0.47$; $(\mu_{Y|X=0.2})^2 = \left(\frac{23}{36}\right)^2 = 0.011$ y así
$\sigma^2_{Y|X} = 0.459$

Problema 18

Sea (X, Y) vector aleatorio donde X = Utilidad distribuida entre socios de una empresa e Y = Utilidad total de la empresa, en millones, con f. de densidad $f_{XY}(x, y) = c(x + 2y) \quad 0 < x < 1; \quad x < y < 1$

a) Grafique el rango R_{XY} del vector aleatorio y halle la constante c.

b) Calcule la probabilidad de que se reinvierta utilidades por más de 0.6 millones.

c) Calcule la función de densidad marginal de Y y la función de densidad condicional $f_{X|Y}(x \mid y)$.

d) Si la utilidad total fue de 0.8 millones: ¿Se habría distribuido más de 0.2 millones? ¿Cuánto espera que se haya distribuido entre socios?

Sugerencias:

Es problema similar al problema 17

Problema 19

Se propone que el valor X de las Exportaciones y el valor Y de las Importaciones (en miles de millones) de un país, componen un v.a.c. (X, Y) con f. de densidad conjunta $f_{XY}(x, y) = cxe^{-(2x+y)} \quad x > 0,\ y > 0$

a) Halle el valor de c

b) Calcule la probabilidad de tener un déficit comercial menor de 600 millones

c) Calcule el vector de medias μ y la matriz de varianza-covarianza Σ

Problema 20

El número X de clientes que entra a un establecimiento a preguntar por un bien es una v.a.d. con función de probabilidad $P_X(x)$ según la siguiente tabla:

x	1	2	3	4	5
$P_X(x)$	0.0625	c	$1.5c$	c	0.0625

Por otra parte, cada uno de estos clientes, independientemente de los otros, puede animarse a comprar el bien con probabilidad $p = \frac{1}{3}$ y cada cliente sólo puede comprar una unidad del bien. Sea Y = Número total de clientes que compra el bien:

a) Halle c y $E(X)$

b) Dado que al establecimiento entra la cantidad esperada de clientes interesados en el bien y la tienda tiene sólo esa cantidad de unidades del bien ¿Diría que se venderán todas las unidades disponibles del bien?

c) Halle $P_{XY}(x, y)$, $P_{Y|X}(y|x)$ y $E(Y|X)$: indique, según $E(Y|X)$, si habría relación inversa o directa entre X e Y.

Solución:

a) Aplicamos $1 = \sum_1^5 P_X(x) = 0.0625 + 3.5c + 0.0625 = 0.125 + 3.5c \Rightarrow c = 0.35$; Y para $E(X) = \sum_1^5 xP_X(x)$, mejor es una Tabla:

x	1	2	3	4	5	Total
$P_X(x)$	0.0625	0.25	0.325	0.25	0.0625	1
$xP_X(x)$	0.0625	0.5	1.125	1	0.3125	$3 = \mu_X$

b) Ha ocurrido el evento $X = \mu_X = 3$ y, en este contexto, se pregunta la probabilidad $P(Y = 3)$, o sea se pide en verdad: $P(Y = 3|X = 3)$, del enunciado, eso implica que los tres clientes a la vez se deciden a comprar, lo que ocurre con probabilidad $p \times p \times p = p^3 \Rightarrow P(Y = 3|X = 3) = P_{Y|X}(3|3) = p^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} < 0.5$ No se venderán todas las unidades del bien.

c) Extendiendo el razonamiento de b), uno se da cuenta que $P_{Y|X}(y|x)$ es directa de calcular: Se trata de una distribución binomial: $P_{Y|X}(y|x) = B\left(y; n = x, p = \frac{1}{3}\right)$. Pues si entran $X = x$ clientes al establecimiento, entonces el número Y de estos x clientes que se deciden a comprar el bien, puede ser $\{0,1, 2\ldots, y\}$ y

$$P_{Y|X}(y|x) = C_y^x \times \left(\overbrace{p \times p \times \dots \times p}^{y\ veces}\right) \times \left(\overbrace{(1-p) \times (1-p) \times \dots \times (1-p)}^{(x-y) veces}\right)$$

$= C_y^x p^y (1-p)^{x-y}$ $\begin{cases} y = 0,1,\dots,x \\ x = valor\ fijo \end{cases}$ es la distribución condicional $P_{Y|X}(y|x)$ que coincide con una distribución binomial $B\left(y; n = x, p = \frac{1}{3}\right)$, i.e. $Y|X \sim B\left(y; n = x, p = \frac{1}{3}\right)$. Y de $P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)} \Rightarrow$

$P_{XY}(x,y) = P_{Y|X}(y|x)P_X(x) = P_X(x)C_y^x p^y (1-p)^{x-y}$ $x = 1,2,\dots,5;\ y = 0,1,\dots,x$ donde $P_X(x)$ figura en la tabla de abajo.

x	1	2	3	4	5	Total
$P_X(x)$	0.0625	0.25	0.325	0.25	0.0625	1

$E(Y|X)$ es directo pues ya vimos que, ocurrido el evento $(X = x)$, entonces $Y|X \sim B\left(y; n = x, p = \frac{1}{3}\right)$ cuya media es $E(Y|X) = np = x \times \frac{1}{3} = \frac{x}{3}$. Por inspección se ve que conforme *X* crece, *Y* también tiende a hacerlo, o sea sería una relación creciente. Esto se puede verificar más formalmente con $\frac{dE(Y|X)}{dX} = p = \frac{1}{3} > 0$, que confirma el tipo de relación entre *X* e *Y*