

Valores y Vectores Propios

Departamento de Matemáticas, CSI/ITESM

1 de abril de 2009

Índice

9.1. Definiciones	1
9.2. Determinación de los valores propios	2
9.3. El teorema del factor	5
9.4. Multiplicidad algebraica de un valor propio	6
9.5. Espacios Invariantes	6
9.6. Multiplicidad geométrica de un valor propio	7

9.1. Definiciones

Definición

Sea \mathbf{A} una matriz cuadrada, un número real λ se dice que es un *valor propio* o un *eigenvalor* o un *valor característico* de \mathbf{A} si existe un vector, diferente del vector cero, \mathbf{x} tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Es decir, es un vector que al transformarlo mediante la multiplicación por \mathbf{A} el vector resultante mantiene su dirección, posiblemente sólo su longitud y/o sentido se modifique. El vector \mathbf{x} se llama *vector propio* o *eigenvector* asociado al valor propio λ .

Ejemplo

Para la matriz \mathbf{A} indique cuáles vectores son vectores propios.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución

Debemos multiplicar cada vector por la matriz \mathbf{A} y ver si el vector resultante es un múltiplo escalar del vector.

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\mathbf{v}_1 sí es vector propio de \mathbf{A} asociado al valor propio 3.

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

\mathbf{v}_2 no es vector propio de \mathbf{A} .

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\mathbf{v}_3 sí es vector propio de \mathbf{A} asociado al valor propio -1.

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

\mathbf{v}_4 no es vector propio de \mathbf{A} .

Ejercicio 1

Cuáles son vectores propios a la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{33}{2} & \frac{51}{2} & \frac{27}{2} \\ -\frac{83}{4} & \frac{121}{4} & \frac{57}{4} \\ \frac{57}{4} & -\frac{75}{4} & -\frac{27}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

El vector

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ \frac{16}{5} & 1 & \frac{18}{5} \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine el valor propio al cual está asociado.

Solución

Determinemos $\mathbf{A}\mathbf{v}$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ \frac{16}{5} & 1 & \frac{18}{5} \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Por tanto, \mathbf{v} está asociado al valor propio $\lambda = -1$ de la matriz \mathbf{A} .

Ejercicio 2

Los vectores

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

sí son vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ \frac{16}{5} & 1 & \frac{18}{5} \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine los valores propios a los cuales están asociados.

9.2. Determinación de los valores propios

Sea λ_o un valor propio de la matriz cuadrada \mathbf{A} , así existe un vector diferente cero de \mathbf{x}_o tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_o = \lambda_o\mathbf{x}_o = \lambda_o\mathbf{I}_n\mathbf{x}_o$$

Por tanto:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_o - \lambda_o\mathbf{I}_n\mathbf{x}_o = (\mathbf{A} - \lambda_o\mathbf{I}_n)\mathbf{x}_o = \mathbf{0}$$

Si $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_o\mathbf{I}_n$ lo anterior significa que el sistema homogéneo $n \times n$

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tiene además de la solución trivial otra solución ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_o \neq \mathbf{0}$). Por consiguiente, no tiene solución única. Y por tanto, el determinante de la matriz \mathbf{B} debe ser cero:

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A} - \lambda_o\mathbf{I}_n) = 0.$$

Resumiendo:

Todo valor propio λ_o debe ser raíz del *polinomio característico* asociado a \mathbf{A} :

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) \quad (1)$$

y un vector propio asociado al valor propio λ debe ser solución al sistema homogéneo:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Ejemplo

Determine los valores y los vectores propios correspondientes de las matrices:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Para \mathbf{A}_1 :

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$p_{\mathbf{A}_1}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$p_{\mathbf{A}_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$$p_{\mathbf{A}_1}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

Por tanto, los únicos valores propios de \mathbf{A}_1 son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$.

Vector propio para $\lambda_1 = 3$

Debe ser solución al sistema homogéneo:

$$(\mathbf{A}_1 - \lambda\mathbf{I}_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Es decir:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - (3)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Desarrollando y finalmente aplicando Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Convirtiendo en ecuación y poniendo en la notación vectorial:

$$x - y = 0 \rightarrow x = y \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo anterior indica que cualquier vector de la forma:

$$y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado a $\lambda_1 = 3$; nosotros nos conformaremos con uno: digamos el que se obtiene para $y = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vector propio para $\lambda_2 = -1$

Debe ser solución al sistema homogéneo:

$$(\mathbf{A}_1 - \lambda \mathbf{I}_2) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Es decir:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Desarrollando y finalmente aplicando Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Convirtiendo en ecuación y poniendo en la notación vectorial:

$$x + y = 0 \rightarrow x = -y \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo anterior indica que cualquier vector de la forma:

$$y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado a $\lambda_2 = -1$; nosotros nos conformaremos con uno: digamos el que se obtiene para $y = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para la matriz \mathbf{A}_2 :

$$p_{\mathbf{A}_2}(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$p_{\mathbf{A}_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Por tanto, el único valor propio de \mathbf{A}_2 es $\lambda_1 = 1$.

Vector propio para $\lambda_1 = 1$

Debe ser solución al sistema homogéneo:

$$(\mathbf{A}_2 - \lambda \mathbf{I}_2) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Es decir:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Desarrollando y finalmente aplicando Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Convirtiendo en ecuación y poniendo en la notación vectorial:

$$y = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo anterior indica que cualquier vector de la forma:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$; nosotros nos conformaremos con uno: digamos el que se obtiene para $y = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para la matriz \mathbf{A}_3 :

$$p_{\mathbf{A}_3}(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right)$$

El polinomio característico queda:

$$p_{\mathbf{A}_3}(t) = t^2 - 3t + 4$$

Como este polinomio tiene raíces complejas, \mathbf{A}_3 no tiene valores ni vectores propios.

Ejercicio 3

Determine el polinomio característico, los valores propios, y vectores propios asociados a la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{11}{8} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{15}{4} & -\frac{63}{8} & \frac{17}{8} \end{bmatrix}$$

9.3. El teorema del factor

De los cursos básicos de ecuaciones algebraicas es importante recordar el teorema del factor:

Teorema 9.1

Sea $p(x)$ un polinomio. Un número c es raíz del polinomio $p(x)$, es decir $p(x=c) = 0$ si y sólo si $x-c$ divide a $p(x)$. Es decir, al hacer la división de $p(x)$ entre $x-c$ el residuo es cero.

De hecho, $p(c)$ es precisamente el residuo de la división de $p(x)$ entre $x - c$. Y este residuo puede calcularse por medio de un proceso elemental conocido como *división sintética*:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ - & & c \cdot a_n & \cdots & \cdot & \cdot \\ \hline & a_n & a_{n-1} + c \cdot a_n & \cdots & p(c) & \end{array}$$

9.4. Multiplicidad algebraica de un valor propio

Definición

Sea \mathbf{A} una matriz cuadrada y λ_o un valor propio. Como hemos visto λ debe ser raíz del polinomio característico de \mathbf{A} $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ así:

$$(\lambda - \lambda_o) \mid p_{\mathbf{A}}(\lambda)$$

Al mayor exponente m que cumple

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_o)^m q(\lambda)$$

le llamaremos la *multiplicidad algebraica* de λ_o .

Ejercicio 4

Determine la multiplicidad algebraica de cada uno de los vectores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 7 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

9.5. Espacios Invariantes

Teorema 9.2

Sea \mathbf{A} una matriz cuadrada y λ un escalar cualquiera entonces

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

es un subespacio lineal de \mathbf{R}^n .

Demostración

1. No es vacío pues: $\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$. Es decir, $\mathbf{0}$ es un elemento del conjunto.
2. Si $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_2$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2 = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$

Es decir, que si \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son elementos del conjunto, la suma de ellos también es un vector en el conjunto al cumplir la propiedad que define al conjunto.

3. Si $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{A}(c\mathbf{x}_1) = c\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = c\lambda\mathbf{x}_1 = \lambda(c\mathbf{x}_1)$$

Es decir, que si un vector \mathbf{x}_1 pertenece al conjunto y c es un escalar cualquiera, entonces, el vector $c\mathbf{x}_1$ también pertenece al conjunto al cumplir la propiedad.

Por tanto, el conjunto dado es un espacio lineal.

Observe que en la afirmación del teorema anterior no se requiere que el escalar λ sea un valor propio. Sin embargo, el conjunto anterior es diferente de $\{\mathbf{0}\}$ sólo cuando el valor λ es efectivamente un valor propio.

Ejercicio 5

Demuestre que si V es un espacio lineal y posee al menos un vector diferente del vector cero, entonces la dimensión es mayor que 1.

Sugerencia. Tome el vector que no es cero, y forme un conjunto sólo con él: muestre que el conjunto es linealmente independiente.

9.6. Multiplicidad geométrica de un valor propio

Definición

Por el resultado anterior: Siendo λ_o un valor propio el anterior conjunto es un espacio lineal diferente de $\{\mathbf{0}\}$ así tiene dimensión mayor que cero: la dimensión del espacio anterior se llamará *multiplicidad geométrica* del valor propio λ_o .

Teorema 9.3

La dimensión geométrica de un valor propio es menor o igual que la dimensión algebraica.

Ejemplo

Determine la dimensión y una base para el espacio propio asociado a $\lambda = -3$ para la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{11}{8} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{15}{4} & -\frac{63}{8} & \frac{17}{8} \end{bmatrix}$$

Solución

El espacio propio de un valor λ es el conjunto de soluciones al sistema homogéneo:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

En este caso queda:

$$[\mathbf{A} - (-3)\mathbf{I} | \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5/2 & 7/4 & -9/4 & 0 \\ -5/4 & 35/8 & -5/8 & 0 \\ -15/4 & -63/8 & 41/8 & 0 \end{array} \right]$$

Después de eliminación gaussiana obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Como sólo hay una variable libre, entonces la dimensión geométrica del espacio propio de $\lambda = -3$ es 1. Y una base es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como se trabaja en \mathbf{R}^3 , el espacio propio es una línea que pasa por el origen y que tiene dirección $\langle 2/3, 1/3, 1 \rangle'$ por consiguiente tiene ecuaciones simétricas:

$$\frac{x-0}{2/3} = \frac{y-0}{1/3} = \frac{z-0}{1} \diamond$$

Ejercicio 6

Determine la dimensión y una base para el espacio propio asociado a $\lambda = -2$ para la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 7 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo debido a estar en \mathbb{R}^3 los espacios deberían ser $\{\mathbf{0}\}$, líneas, planos o todo \mathbb{R}^3 : ¿Cuál caso aplica? En caso de ser posible, encuentre la(s) ecuaciones correspondientes.

Teorema 9.4

Si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ son vectores propios asociados a valores propios diferentes entonces el conjunto formado por ellos es linealmente independiente.

Demostración

Llamemos λ_i al valor propio al cual está asociado el vector \mathbf{v}_i . Supongamos que el conjunto de vectores es linealmente dependiente. Puesto que ningún vector propio puede ser el vector cero, de esta suposición deducimos entonces que un vector \mathbf{v}_i debe ser combinación lineal de los anteriores. Escojamos aquél que tiene el menor índice posible, digamos j , así: \mathbf{v}_j es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$ y ningún vector \mathbf{v}_i es combinación lineal de los anteriores para $i = 2, 3, \dots, j-1$. Tenemos

$$\mathbf{v}_j = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_{j-1} \mathbf{v}_{j-1}$$

Multiplicando por \mathbf{A} , y utilizando que cada \mathbf{v} es vector propio, obtenemos

$$\lambda_j \mathbf{v}_j = c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_{j-1} \lambda_{j-1} \mathbf{v}_{j-1}$$

Si multiplicamos la primera de estas ecuaciones por λ_j y se la restamos a la segunda obtenemos:

$$\mathbf{0} = c_1 (\lambda_1 - \lambda_j) \mathbf{v}_1 + \dots + c_{j-1} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) \mathbf{v}_{j-1}$$

Como el conjunto formado por los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$ es linealmente independiente, al no ser un vector combinación de los restantes, se deduce que todos los coeficientes de esta última ecuación deben ser cero:

$$c_i (\lambda_i - \lambda_j) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, j-1$$

Como los valores propios son diferentes entre sí: $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$. Así son los $c_i = 0$ para $i = 1, \dots, j-1$. Así la fórmula inicial de este teorema queda:

$$\mathbf{v}_j = 0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_{j-1} = \mathbf{0}$$

Pero esto es imposible pues ningún vector propio es el vector cero. Esta contradicción afirma que el conjunto formado por los vectores es linealmente independiente. \diamond

Ejercicio 7

Investigue cómo se obtienen los valores y vectores propios en una calculadora avanzada. Documente-se de cuál es el formato en el cual se presentan los resultados.