Valores y Vectores Propios

En todo lo que sigue A es una matriz cuadrada.

1. Propiedades básicas.

Definición:

- El escalar λ es valor propio de A si existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boxed{A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}}$.
- El vector $\mathbf{v}$ es vector propio de A asociado a λ si $\boxed{A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}}$.

Teorema: (método para calcular valores y vectores propios para matrices concretas)

- El escalar λ es valor propio de A si y sólo si $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$.
- El vector $\mathbf{v}$ es vector propio de A asociado a λ si $\boxed{(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}}$.

Demostración (sólo la parte 2):

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Obsérvese que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff (A - \lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ es incorrecto. ¿Por qué?

Ejemplo: Calcular los valores y vectores propios para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solución: Primero se calculan los valores propios:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1, \\ \lambda = 2. \end{cases}$$

Con lo cual obtenemos dos valores propios: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

Buscamos ahora los correspondientes vectores propios:

• Para $\lambda = -1$:

$$[A - (-1)I]\mathbf{v} = \mathbf{0} \ \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x = y \rightarrow \text{ múltiplos de } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema obtenido tiene una infinidad de soluciones.

• Para $\lambda = 2$ (Ejercicio). Debe salir múltiplos de $[5, 2]^{\mathrm{t}}$. Nuevamente el sistema obtenido tiene una infinidad de soluciones.

Observaciones:

- Se puede demostrar que $\det(A - \lambda I)$ es un polinomio cuyo grado coincide con el tamaño de la matriz A; sea n. Se llama polinomio característico. Como mucho tiene n raíces distintas.

- Como puede verse del ejemplo anterior, a un valor propio le corresponden una infinidad de vectores propios. En otras palabras: si λ es valor propio, el sistema $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ tiene siempre infinitas soluciones.

En Matlab:

```
A=[4 -5;2 -3];
eig(A)
[V, D]=eig(A);
```

Ejercicio: Puede haber valores y vectores propios complejos: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio: Puede haber menos valores propios "de lo normal": $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio: ¿Cómo "calcular" los valores propios de una matriz triangular?

Ejercicio:

- Relación entre los valores propios de A y αA para un escalar α no nulo.
- Relación entre los valores propios de A y A^2.
- Si $A^2 = 0$, hállense los posibles valores propios de A.
- Si $A^2 = A$, hállense los posibles valores propios de A.

Observación: Supongamos que A es una matriz real. Si A tiene un valor propio complejo λ, entonces existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. De aquí se deduce que $\overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}}$, o de forma equivalente $\overline{A}\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}$ y como A es real, entonces $A\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}$.

¿Qué importancia práctica tiene esta última igualdad? (No olvidemos que si A es real, su polinomio característico es real, y por tanto sus raíces complejas están "emparejadas": si μ es una raíz compleja, entonces $\overline{\mu}$ es otra raíz.

2. Diagonalización.

Definición: Una matriz A de orden n es diagonalizable si existen $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios linealmente independientes.

Factorización espectral: Supongamos que A es diagonalizable y sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios linealmente independientes asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivamente (observe que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$). Formamos

$$S = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \text{ matriz } n \times n, \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ (diagonal)}$$

Ahora se tiene (matrices por bloques)

$$AS = A\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} A\mathbf{v}_1 & \dots & A\mathbf{v}_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \dots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{array}\right]$$

y

$$SD = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \dots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{array}\right].$$

Luego $AS = SD$. Se puede probar que S es siempre invertible, luego

$$\boxed{A = SDS^{-1}}$$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio: Si A es diagonalizable, entonces $\det(A) =$ producto de los valores propios.

Desgraciadamente, no todas las matrices son diagonalizables: Ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Multiplicidad algebraica y geométrica. Ejemplos.

Teoremas:

- Una matriz A es diagonalizable si y sólo si m.a.$(\lambda) =$ m.g.(λ) para todo valor propio λ.
- m.g.$(\lambda) \leq$ m.a.(λ) para todo valor propio λ.

Ejercicio:

- Si m.a.$(\lambda) = 1$, entonces m.g.$(\lambda) = 1$.
- Si todos los valores propios de A tienen multiplicidad algebraica simple, entonces A es diagonalizable.

Ejemplo: ¿Para qué valores de a y b la matriz $A = * * *$ es diagonalizable?

3. Diagonalización de matrices simétricas.

Una matriz simétrica de orden n tiene valores propios reales y n vectores propios ortogonales que siempre se pueden convertir en ortonormales (se pueden demostrar estas afirmaciones).

Se puede probar que si las columnas de S son ortonormales, entonces $S^{-1} = S^{\mathrm{t}}$ (una matriz que cumple esta propiedad se llama matriz ortogonal). Por tanto:

$$\boxed{A = SDS^{\mathrm{t}}}$$

Ejemplos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.