Proporcionalidad de Magnitudes

Tabla de contenidos

Proporcionalidad de Magnitudes

El presente monografía examina la aplicación de la proporcionalidad en las ciencias de la comunicación, con un enfoque en herramientas matemáticas como la regla de tres simple, el reparto proporcional y los porcentajes. Este trabajo nos muestra cómo estas técnicas permiten optimizar recursos, analizar datos de audiencia y diseñar estrategias comunicacionales efectivas en entornos digitales y tradicionales. En un contexto donde la precisión en la gestión de campañas y la interpretación de métricas es importante, estas herramientas matemáticas son esenciales para los profesionales de ciencias de comunicación, permitiendo decisiones basadas en datos cuantitativos.

El objetivo principal es mostrar cómo conceptos matemáticos básicos, como la proporcionalidad directa e inversa, se aplican a problemas prácticos del periodismo, tales como la asignación de presupuestos publicitarios, la planificación de tiempos de producción y la evaluación de impacto de contenidos. A través de ejemplos prácticos, se ilustra su relevancia para mejorar la eficiencia y la toma de decisiones en la profesión.

Este trabajo se estructura en tres capítulos. El Capítulo I presenta los fundamentos teóricos de razones y proporciones. El Capítulo II Aplicación de las Magnitudes Proporcionales como la regla de tres y el reparto proporcional. El Capítulo III aplica estos conceptos a casos reales. Y finalmente las conclusiones, recomendaciones y referencias bibliográficas.

1 Monografía: Razones y Proporciones en Ciencias de la Comunicación

1.1 Historia

El concepto de razón y proporción tiene raíces profundas en la historia del pensamiento matemático y filosófico, remontándose a la Antigua Grecia. Los matemáticos griegos, como Euclides (ca. 300 a.C.), sentaron las bases de estas ideas en su obra *Elementos*, donde definió la razón como la relación entre dos magnitudes homogéneas y la proporción como la igualdad entre dos razones (Euclides, Libro V). Estas nociones fueron fundamentales para disciplinas como la geometría, la astronomía y la arquitectura, y se aplicaron en tratados como *De Architectura* de Vitruvio, donde se usaron proporciones para diseñar edificaciones armónicas (Vitruvio, ca. 15 a.C.).

En la Edad Media, matemáticos árabes como Al-Khwārizmī integraron estas ideas en el álgebra, mientras que en el Renacimiento, Daniele Barbaro (1567) reinterpretó las proporciones geométricas en contextos artísticos y arquitectónicos, enfatizando su universalidad (citado en Williams, 2019, p. 176). En la modernidad, las proporciones han evolucionado para aplicarse en campos como la estadística, la economía y las ciencias sociales, incluyendo la comunicación, donde se utilizan para analizar audiencias, presupuestos y estrategias mediáticas.

1.2 Etimología

La palabra *razón* proviene del latín *ratio*, que significa "cálculo", "proporción" o "razonamiento". Este término refleja la idea de comparar o relacionar magnitudes, un concepto central en matemáticas y lógica. Por su parte, *proporción* deriva del latín *proportio*, que implica una relación equilibrada o simétrica entre partes. En el contexto de Vitruvio y Barbaro, la proporción se asociaba con la armonía estética y funcional, un principio que trasciende a disciplinas como el diseño gráfico y la comunicación visual en la actualidad.

1.3 Definición

1.3.1 Razón

La razón es una relación matemática que compara dos magnitudes del mismo tipo, expresada como una fracción o diferencia. Por su parte en el libro V de los Elementos de Euclides se define así: "Una razón es una clase de relación con respecto al tamaño entre dos magnitudes de la misma clase". (Heath, 1908, p. 114). Se clasifica en:

- **Razón Aritmética**: Representa la diferencia entre dos magnitudes. Su fórmula es:

  $$r = a_n - a_{n-1}$$

  Donde:

  - r es la razón
  - a_n es el término en la posición n o Antecedente
  - a_{n-1} es el término anterior o Consecuente.

- **Razón Geométrica**: Expresa el cociente entre dos magnitudes, indicando cuántas veces una contiene a la otra:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

  Donde:

  - r es la razón
  - a_n es el término en la posición n o Antecedente
  - a_{n-1} es el término anterior o Consecuente.

1.3.2 Proporción

Una proporción es una igualdad entre dos razones. Según Rico (2008), "una proporción aritmética se establece cuando la diferencia entre dos términos es igual a la de otros dos" (p. 62), mientras que una proporción geométrica es una relación de igualdad entre los cocientes de dos pares de magnitudes, donde el cociente entre los términos de un par es igual al cociente entre los términos del otro par. Matemáticamente:

- **Proporción Aritmética**:

$$a - b = c - d$$

  Donde:

  - a, b, c, d son magnitudes
  - $a - c$ son los términos extremos
  - $b - d$ los términos medios.

- **Discreta** La proporcionalidad discreta aritmética establece una relación entre cuatro magnitudes donde la diferencia entre dos términos es igual a la diferencia entre otros dos. La relación se expresa como:

$$a - b = c - d$$

Donde:

- d es la cuarta diferencial de a, b y c.
- **Continua** La proporcionalidad continua aritmética describe una relación entre tres magnitudes. La relación se expresa como:

$$a - b = b - c$$

Donde: - c es la tercera diferencial de a y b, y b es la media diferencial de a y c.

- **Proporción Geométrica**:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{o} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Donde: - a, b, c, d son magnitudes - a y d son los términos extremos - b y c son los términos medios.

- **Discreta** La proporcionalidad discreta geométrica describe una relación entre cuatro magnitudes donde el cociente entre dos términos es igual al cociente entre otros dos. La relación se expresa como:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Donde:

- d es la cuarta proporcional de a, b y c.
- **Continua** La proporcionalidad continua geométrica describe una relación entre tres magnitudes. La relación se expresa as:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Donde:

- c es la tercera proporcional de a y b, y b es la media proporcional de a y c, implicando:

$$b^2 = a \cdot c$$

- **Propiedades de la Proporción Geométrica**: Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
  - $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$
  - $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.
  - $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
  - $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}; \quad n \in \mathbb{Q}$
  - $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

1.3.3 Series Geométricas

Una serie de razones geométricas equivalentes es una secuencia de proporciones geométricas que comparten la misma razón constante, permitiendo modelar crecimientos o disminuciones proporcionales.

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \cdots = r$$

Donde:

- $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son los antecedentes.
- $c_1, c_2, c_3, \ldots$ son los consecuentes.
- r es la razón constante.

1.3.4 Magnitudes Proporcionales

Las magnitudes pueden ser directamente proporcionales (una aumenta al aumentar la otra) o inversamente proporcionales (una disminuye al aumentar la otra). Estas relaciones son fundamentales para modelar fenómenos comunicacionales, como el impacto de presupuestos en audiencias.

Tabla 1

Relación entre Inversión en publicidad y Alcance de audiencia

Inversión en publicidad (x, en miles de dólares)	1	2	3	4	5
Alcance de audiencia (y, en miles)	10	20	30	40	50

Note. Elaboración propia

Magnitudes Directamente Proporcionales.. Las magnitudes directamente proporcionales son aquellas en las que el incremento de una magnitud provoca un incremento proporcional en la otra, manteniendo una constante de proporcionalidad, por ejemplo.

Vemos que la inversión en publicidad y el alcance de audiencia son directamente proporcionales.

Luego:

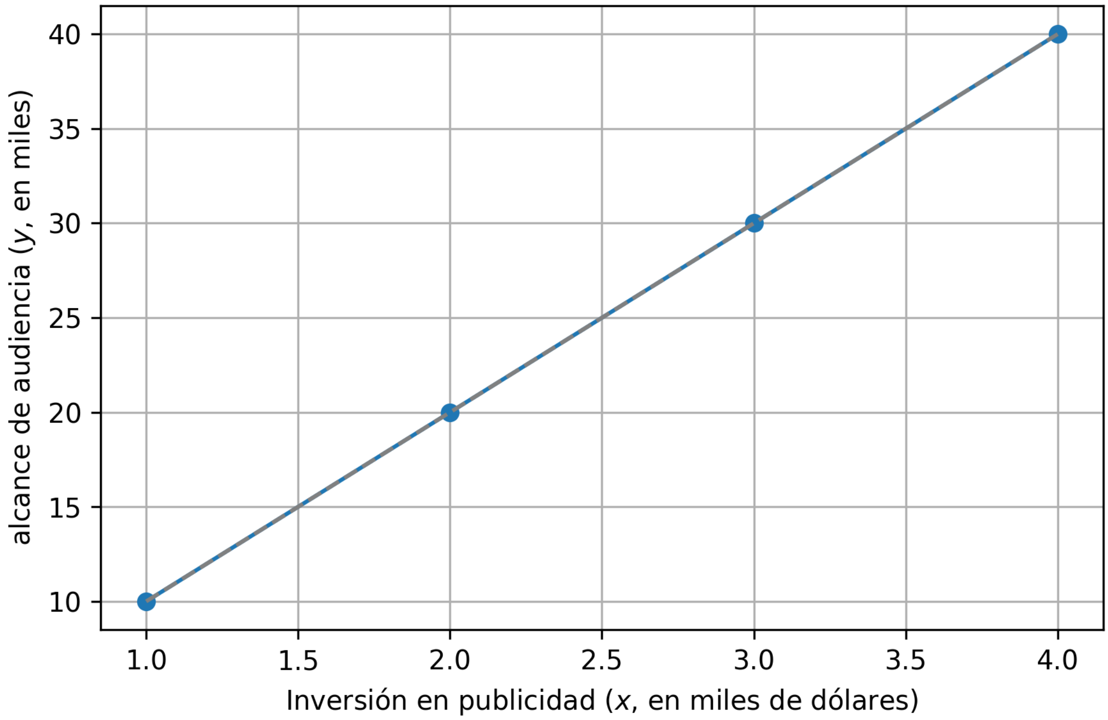
$$\frac{\text{valor de inversión en publicidad}}{\text{valor de alcance de audiencia}} = \frac{1}{10} = \frac{2}{20} = \frac{3}{30} = \frac{4}{40} = Constante$$

La constante de proporcionalidad es:

$$k = \frac{x}{y} = \frac{1}{10}$$

Figura 1

Relación entre Inversión en publicidad y alcance de audiencia



Gráficamente..

Tabla 2

Magnitudes directamente proporcionales

x	x_1	x_2	x_3
y	y_1	y_2	y_3

Note. Elaboración propia

En general.. donde se cumple que:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = k$$

Lo que denotamos:

$$\frac{x_i}{y_i} = k$$

donde k es la constante de proporcionalidad directa. 1 $<= i < n$; i pertenece a $\mathbb{Z}$

Funcion de proporcionalidad directa.. Se expresa mediante la función lineal homogénea:

$$f(x) = kx$$

donde $f(x)$ representa la magnitud dependiente.

Magnitudes Inversamente Proporcionales.. Las magnitudes inversamente proporcionales son aquellas en las que el incremento de una magnitud provoca una disminución proporcional en la otra, por ejemplo:

Tabla 3

Relación entre Nivel de sensacionalismo en la noticia y Credibilidad del medio

Nivel de sensacionalismo en la noticia	20	10	5	2.5
Credibilidad del medio	5	10	20	40

Note. Elaboración propia

Vemos que el Nivel de sensacionalismo en la noticia y la credibilidad del medio son inversamente proporcionales. Luego:

$$(\text{valor de sensacionalismo}) * (\text{valor de credibilidad}) = (5) * (20) = (10) * (10) = (20) * (5) = (40) * (2.5) = Con$$

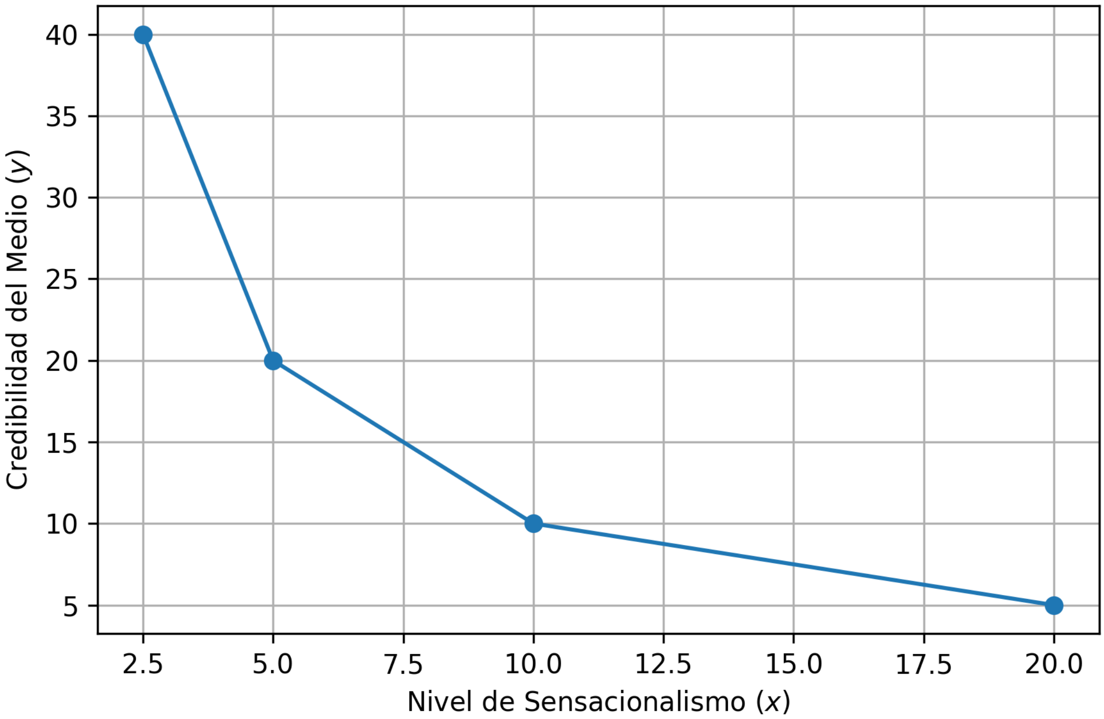
La constante de proporcionalidad inversa es:

$$x \cdot y = 5 \cdot 20 = 100$$

Gráficamente.. La gráfica de una función inversamente proporcional.

Figura 2

Relación entre Nivel de sensacionalismo en la noticia y la credibilidad del medio



La gráfica muestra cómo a medida que aumenta el Nivel de sensacionalismo, la credibilidad del medio disminuye, manteniendo una relación inversa.

Tabla 4

Magnitudes inversamente proporcionales

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

Note. Elaboración propia

En general.. donde se cumple que:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \ldots = X_n \cdot Y_n = k$$

Lo que denotamos:

$$y_i * x_i = k$$

donde k es la constante de proporcionalidad inversa. $1 <= i < n$; i pertenece a $\mathbb{Z}$

Funcion de proporcionalidad inversa.. La función de proporcionalidad inversa se expresa como:

$$f(x) * x = k$$

donde $f(x)$ representa la magnitud dependiente.

1.3.5 Propiedades

Sean las magnitudes x e y, entonces:

1. si x DP $y \Rightarrow y$ DP x
2. x IP $y \Rightarrow y$ IP x
3. x IP $y \Leftrightarrow x$ DP $\left(\frac{1}{y}\right)$
4. x DP $y \Leftrightarrow x$ IP $\left(\frac{1}{y}\right)$
5. Si $n \in \mathbb{Q}$, entonces:
   - x DP $y \Leftrightarrow x^n$ DP y^n
   - x IP $y \Leftrightarrow x^n$ IP y^n

2 Aplicaciones de las Magnitudes Proporcionales

2.1 Reparto Proporcional

El reparto proporcional es un procedimiento matemático que distribuye una cantidad total entre varias partes según una proporción determinada, ya sea directa o inversa, en función de una variable de referencia. Este concepto se divide en dos tipos principales: reparto directo e inverso.

2.1.1 *Reparto Directo*

El reparto directo se utiliza cuando se distribuye una cantidad total entre varias partes de manera proporcional a sus magnitudes. Por ejemplo, si se desea repartir un presupuesto de S/ 10,000 entre tres departamentos directamente proporcional a de 2, 3 y 5, el reparto proporcional se realiza de la siguiente manera:

$$\text{Total a repartir: } 10\,000$$

$$\begin{cases} 2k = 2000 \\ 3k = 3000 \\ 5k = 5000 \end{cases}$$

$$2k + 3k + 5k = 10k = 10\,000$$

$$k = 1\,000$$

2.1.2 *Reparto Inverso*

El reparto inverso se aplica cuando se distribuye una cantidad total entre varias partes de manera inversamente proporcional a sus magnitudes. Por ejemplo, si se desea repartir un presupuesto de S/ 180,000 entre tres departamentos inversamente proporcional a de 2, 3 y 6, el reparto proporcional inverso se realiza de la siguiente manera:

$$\text{Total a repartir: } 180\,000$$

$$\begin{cases} \frac{k}{2} = 90000 \\ \frac{k}{3} = 60000 \\ \frac{k}{6} = 30000 \end{cases}$$

$$\frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{6} = 6k = 180\,000$$

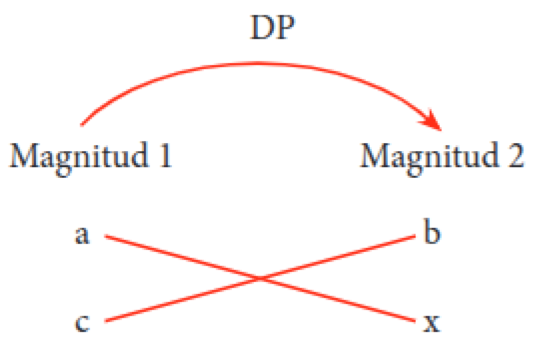
$$k = 30\,000$$

2.2 Regla de Tres

2.2.1 Regla de Tres Simple

La regla de tres simple es un procedimiento matemático que permite encontrar un cuarto valor desconocido a partir de tres valores conocidos, en relaciones de proporcionalidad directa o inversa entre dos magnitudes.

- **Regla de Tres Simple Directa**

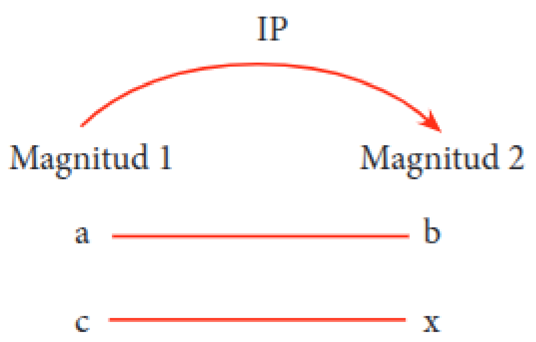


Al ser Directamente Proporcional, se cumple: $\frac{Magnitud1}{Magnitud2} = k$

De forma práctica, cuando sea regla de tres simple, directamente se multiplica en aspa, igualando los resultados de la siguiente forma:

$$a \cdot x = b \cdot c$$

- **Regla de Tres Simple Inversa**



Al ser Inversamente Proporcional, se cumple: $Magnitud1 * Magnitud2 = k$

De forma práctica, cuando sea regla de tres simple inversa, se multiplica de forma paralela, igualando los resultados de la siguiente forma:

$$a \cdot b = c \cdot x$$

2.2.2 Regla de Tres Compuesta

Es aquella operación matemática que se utiliza cuando en el problema participan más de dos magnitudes.

2.3 Porcentajes

El porcentaje es una expresión matemática que representa una relación proporcional entre una parte y un todo, tomando como base el número cien. Es una forma de expresar razones o fracciones en términos de "por cada cien", facilitando la comparación y análisis de datos, especialmente en contextos comunicacionales como encuestas, métricas de audiencia o análisis de participación.

$$\text{a por ciento de N} = a\%\text{de N} = \frac{a}{100} \cdot N$$

Por ejemplo , si se desea calcular el 20% de 150, se aplica la fórmula:

$$20\% \text{ de } 150 = \frac{20}{100} \cdot 150 = 30$$

Parte de un total como tanto por ciento

En general

$$\frac{\text{Parte}}{\text{Total}} \cdot 100\% = \frac{a}{b} \cdot 100\%$$

2.3.1 Operaciones con porcentajes

$$N = 100\%N$$

Ejmeplo

$$32\%N + 48\%N = 80\%N$$

2.3.2 Aplicaciones de los Porcentajes

a. Descuentos sucesivos

Para dos descuentos de a% y b%:

$$\text{Descuento unico} = (a+b) - \frac{a \cdot b}{100}$$

b. Aumentos sucesivos

Para dos incrementos de a% y b%:

$$\text{Aumento inicial} = (a+b) + \frac{a \cdot b}{100}$$

3 Ejemplos Aplicados a la Carrera de Periodismo y Ciencias de la Comunicación

En las Ciencias de la Comunicación, las razones y proporciones son herramientas importantes para optimizar estrategias, analizar datos y diseñar campañas efectivas. A continuación, se presentan:

3.1 Ejercicio 1: Regla de Tres Simple Directa para Calcular Costo por Impresión

Problema: Una campaña publicitaria en un medio digital cuesta S/ 6,000 y genera 30,000 impresiones en redes sociales. Si se desea calcular cuánto costaría alcanzar 45,000 impresiones, usa la regla de tres simple directa para determinar el costo.

Solución:

La regla de tres simple directa se aplica porque el costo es directamente proporcional al número de impresiones, es decir, $\frac{\text{Costo}}{\text{Impresiones}} = k$. La fórmula, según el documento, es:

$$a \cdot x = b \cdot c$$

Donde: - $a = 30,000$ (costo inicial) - $b = 6,000$ (impresiones iniciales) - $c = 45,000$ (impresiones deseadas) - x = costo desconocido

Configuramos la proporción:

$$30,000 \cdot x = 6,000 \cdot 45,000$$

Calculamos:

$$30,000 \cdot x = 270,000,000$$

$$x = \frac{270,000,000}{30,000} = 9,000$$

Resultado: El costo para alcanzar 45,000 impresiones es S/ 9,000. Esta métrica ayuda a los comunicadores a planificar presupuestos publicitarios.

3.2 Ejercicio 2: Regla de Tres Simple Inversa para Tiempo de Producción de Contenido

Problema: Un equipo de 4 periodistas tarda 12 horas en producir un reportaje investigativo. Si se aumenta el equipo a 6 periodistas, ¿cuánto tiempo tomará producir el mismo reportaje? Usa la regla de tres simple inversa.

Solución:

La regla de tres simple inversa se aplica porque el tiempo es inversamente proporcional al número de periodistas, es decir, Número de periodistas $\cdot$ Tiempo $= k$. La fórmula, según el documento, es:

$$a \cdot b = c \cdot x$$

Donde: - $a = 4$ (número inicial de periodistas) - $b = 12$ (horas iniciales) - $c = 6$ (nuevo número de periodistas) - x = tiempo desconocido

Configuramos la proporción:

$$4 \cdot 12 = 6 \cdot x$$

$$48 = 6 \cdot x$$

$$x = \frac{48}{6} = 8$$

Resultado: Con 6 periodistas, el reportaje tomará 8 horas. Esta aplicación es útil para gestionar recursos humanos en redacciones.

3.3 Ejercicio 3: Reparto Proporcional Directo de un Presupuesto Publicitario

Problema: Un medio periodístico tiene un presupuesto de S/ 15,000 para distribuir entre tres plataformas digitales (YouTube, Instagram y TikTok) en proporción directa a sus suscriptores: 20,000, 30,000 y 50,000, respectivamente. Calcula cuánto le corresponde a cada plataforma usando reparto proporcional directo.

Solución:

El reparto proporcional directo distribuye el total según las magnitudes de los suscriptores. Según el documento, la fórmula es:

$$\text{Monto por plataforma} = k \cdot \text{Suscriptores}$$

Donde k es la constante de proporcionalidad, calculada como:

$$k = \frac{\text{Presupuesto total}}{\text{Total de suscriptores}}$$

1. Calculamos el total de suscriptores:

$$20,000 + 30,000 + 50,000 = 100,000$$

2. Calculamos k:

$$k = \frac{15,000}{100,000} = 0.15$$

3. Asignamos el monto a cada plataforma:

- YouTube: $20,000 \cdot 0.15 = S/3,000$
- Instagram: $30,000 \cdot 0.15 = S/4,500$
- TikTok: $50,000 \cdot 0.15 = S/7,500$

4. Verificamos la suma:

$$3,000 + 4,500 + 7,500 = 15,000$$

Resultado: El presupuesto se distribuye como sigue: S/ 3,000 para YouTube, S/ 4,500 para Instagram y S/ 7,500 para TikTok. Esto optimiza la inversión según el alcance de cada plataforma.

3.4 Ejercicio 4: Reparto Proporcional Inverso para Asignación de Espacios Publicitarios

Problema: Una revista digital tiene S/ 12,000 para pagar espacios publicitarios en tres secciones, y desea distribuir el presupuesto inversamente proporcional a la cantidad de anuncios ya publicados en cada una: 2, 4 y 6 anuncios, respectivamente. Calcula cuánto le corresponde a cada sección usando reparto proporcional inverso.

Solución:

El reparto proporcional inverso distribuye el total inversamente a las magnitudes. Según el documento, la fórmula es:

$$\text{Monto por sección} = \frac{k}{\text{Número de anuncios}}$$

Y la suma de los términos inversos satisface:

$$\frac{k}{a_1} + \frac{k}{a_2} + \frac{k}{a_3} = \text{Presupuesto total}$$

Donde: - $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$ - Presupuesto total = 12,000

1. Calculamos la suma de los inversos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 0.5 + 0.25 + 0.1667 = 0.9167$$

2. Calculamos k:

$$k \cdot 0.9167 = 12,000$$

$$k = \frac{12,000}{0.9167} \approx 13,090.91$$

3. Asignamos el monto a cada sección:

- Sección 1: $\frac{13{,}090.91}{2} \approx S/6,545.46$

- Sección 2: $\frac{13{,}090.91}{4} \approx S/3,272.73$
- Sección 3: $\frac{13{,}090.91}{6} \approx S/2,181.82$

4. Verificamos la suma (aproximada por redondeo):

$$6,545.46 + 3,272.73 + 2,181.82 \approx 12,000$$

Resultado: El presupuesto se distribuye aproximadamente como: S/ 6,545.46 para la sección con 2 anuncios, S/ 3,272.73 para la sección con 4 anuncios y S/ 2,181.82 para la sección con 6 anuncios. Esto prioriza secciones con menos saturación publicitaria.

3.5 Ejercicio 5: Cálculo de Porcentaje de Participación en una Encuesta

Problema: En una encuesta realizada por un medio periodístico sobre preferencias electorales, 240 de 800 encuestados apoyan a un candidato. Calcula el porcentaje de apoyo al candidato.

Solución:

El porcentaje se calcula como la relación entre la parte y el total, multiplicado por 100, según la fórmula del documento:

$$\text{Porcentaje} = \frac{\text{Parte}}{\text{Total}} \cdot 100$$

Sustituyendo los valores:

$$\text{Porcentaje} = \frac{240}{800} \cdot 100 = 30\%$$

Resultado: El 30% de los encuestados apoya al candidato. Este porcentaje es clave para reportar tendencias electorales y analizar el impacto de la cobertura mediática.

4 Conclusiones y Recomendaciones

La regla de tres simple, el reparto proporcional y los porcentajes son herramientas esenciales en las ciencias de la comunicación, ya que facilitan la gestión eficiente de recursos, el análisis de audiencias y la planificación de estrategias mediáticas. Su aplicación permite a los comunicadores interpretar métricas, asignar presupuestos equitativamente y optimizar procesos de producción, conectando la teoría matemática con las demandas prácticas de la profesión.

Se recomienda integrar estas herramientas en los programas académicos de la escuela profesional, con un enfoque en ejercicios prácticos basados en escenarios reales, como la distribución de publicidad o la evaluación de encuestas. Asimismo, se sugiere crear recursos digitales interactivos que simplifiquen el uso de estas técnicas, fortaleciendo las competencias cuantitativas de los profesionales y mejorando la precisión en la toma de decisiones estratégicas.

5 Bibliografía y referencias

Arican, M., & Kiymaz, Y. (2022). Investigating preservice mathematics teachers' definitions, formulas, and graphs of directly and inversely proportional relationships. *The Mathematics Enthusiast, 19*(2), 5–16. https://scispace.com/papers/investigating-preservice-mathematics-teachers-definitions-2oii9y83

D'Amore, B. (2005a). *Didáctica de la matemática: Ideas para una teoría*. Narcea Ediciones.

D'Amore, B. (2005b). *Matemáticas y su didáctica*. Paidós.

Euclides. (ca. 300 a.C./1908). *Elementos* (T. L. Heath, Trans.). Cambridge University Press. (Original work published ca. 300 BCE)

Gómez, A. (2011). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I*. McGraw-Hill. https://www.mheducation.es/bcv/guide/capitulo/8448186618.pdf

Gómez, J. (2011). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Pirámide.

Heath, T. L. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements* (Vol. 2). Cambridge University Press.

López Pan, F., & Vicente, M. (2016). *Análisis de contenido en comunicación*. Síntesis.

Martínez, P., & Piñuel, J. L. (2011). *Métricas de audiencia*. Gedisa.

Pérez Ruiz, L., & Domínguez, M. (2015). *Publicidad y comunicación*. ESIC.

Rico, L. (2008a). *Didáctica de las matemáticas*. Morata.

Rico, L. (2008b). *Educación matemática: Una visión de conjunto*. Síntesis.

Rodríguez Morales, J. (2012). *Diseño gráfico y comunicación visual*. Trillas.

Vitruvio. (ca. 15 a.C./1999). *De Architectura* (I. D. Rowland, Trans.). Cambridge University Press. (Original work published ca. 15 BCE)

Williams, K. (2019). *Proporciones en la arquitectura renacentista*. Routledge.