TD réseau de neurones

Gaston LENCZNER, Javiera CASTILLO NAVARRO,
Guillaume VAUDAUX RUTH, Adrien CHAN-HON-TONG

Notations et rappels :
- on note ^{T} la transposition matricielle
- $relu(x) = \max(x, 0) = [x]_+$ (par composante pour les vecteurs)
- les vecteurs colonnes dans $\mathbb{R}^J$ sont considérés comme des matrices $J \times 1$, et, $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^{I\times J} \times \mathbb{R}^{J\times K}$ 2 matrices, AB est leur produit dans $\mathbb{R}^{I\times K}$
- un multi layer perceptron de profondeur P est une fonction qui peut s'écrire $W_P relu(W_{P-1} relu(...(W_2 relu(W_1 x + b_1) + b_2)...) + b_{P-1}) + b_P$ avec W_p des matrices et b_p des vecteurs
- **apprendre par coeur une base d'apprentissage $x_1, y_1, ..., x_N, y_N$ avec un modèle f c'est trouver w tel que $\forall n,\ y_n f(x_n, w) > 0$ - en particulier seul le signe compte !**

Partie 1 réseau préappris

Q1

On considère la fonction $f(x) = f((x_1 \ \ x_2)^T) = x_2 - relu(x_1 - x_2)$

Q1.1 : déterminez les zones où f est positive vs négative.

Q1.2 : écrivez cette fonction comme un réseau de neurones.

aide : $x = relu(x) - relu(-x)$ et si $x = (x_1 \ \ x_2)^T$ alors $x_1 = (1 \ \ 0)x$

Q2 même questions avec $g((x_1 \ \ x_2)^T) = x_2 + relu(x_1 - x_2)$ et $h((x_1 \ \ x_2)^T) = x_1 + relu(x_2 - x_1)$, que remarquez vous ?

Partie 2 réseau à déterminer (chercher des poids triviaux)

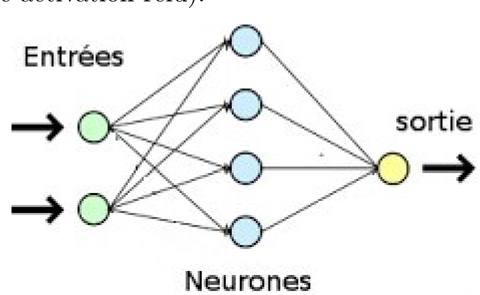
1 neurone

Q3.1 : Montrez qu'il est possible d'apprendre par coeur la base de données $((1 \ \ 1)^T, 1)$, $((-1 \ \ -1)^T, -1)$ avec 1 neurones sans biais (et sans activation puisque les activations concernent les couches cachées).

Q3.2 : Est-il possible d'apprendre par coeur la base de données $((0 \ \ 1)^T, 1)$, $((0 \ \ -1)^T, 1)$, $((1 \ \ 0)^T, -1)$, $((-1 \ \ 0)^T, -1)$ avec 1 neurones sans biais ?

2 couches de neurones

Q4.1 : Montrez qu'il possible d'apprendre par coeur la base de données $((0 \ \ 1)^T, 1)$, $((0 \ \ -1)^T, 1)$, $((1 \ \ 0)^T, -1)$, $((-1 \ \ 0)^T, -1)$ avec le réseau ci dessous (sans biais et avec activation relu).



Q4.2 : estimez les zones $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.

Q4.3 : Est-il possible d'apprendre avec le même réseau (mais d'autres poids) la base $((0\ \ 2)^T, 1)$, $((0\ \ -2)^T, 1)$, $((2\ \ 0)^T, 1)$, $((-2\ \ 0)^T, 1)$, $((0\ \ 0)^T, -1)$?

2 couches de neurones avec biais

Q5 : Considérons encore même la base de données $((0\ \ 2)^T, 1)$, $((0\ \ -2)^T, 1)$, $((2\ \ 0)^T, 1)$, $((-2\ \ 0)^T, 1)$, $((0\ \ 0)^T, -1)$, ainsi que les 2 réseaux

- $\psi(x) = [(0\ \ 1)x]_+ + [(0\ \ -1)x]_+ + [(1\ \ 0)x]_+ + [(-1\ \ 0).x]_+ - 1$
- $\phi(x) = 2relu((-1\ \ 1)x - 1) + 2relu((1\ \ -1)x - 1) - 1$

Q5.1 : Montrez qu'ils apprennent la base par coeur.

Q5.2 : Donnez la structure de chaque réseau.

Q5.3 : Dessinez les zones positives et négatives.

Pour votre culture : *cette base est intéressant car il est possible de l'apprendre asymétriquement avec un réseau de 3 neurones. Mais pour obtenir une solution symétrique et bornée, il faut 5 neurones. Ainsi, dans cet exemple précis, plus de paramètres permet d'obtenir une solution plus élégante. Attention c'est plutôt faux en général !*