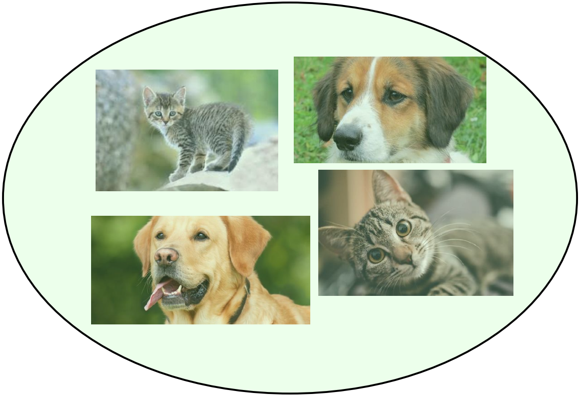
Introduction au machine learning

ENSTA 2024

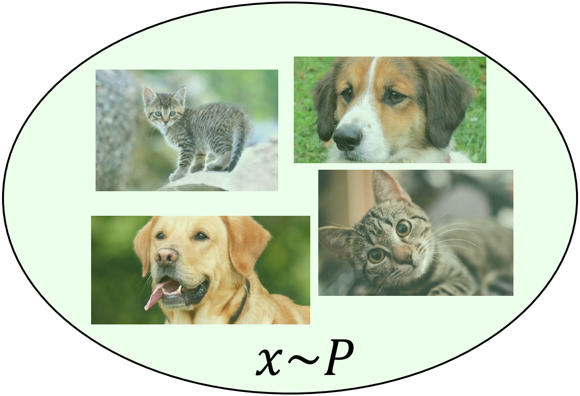
Adrien CHAN-HON-TONG
HDR ONERA

objectif

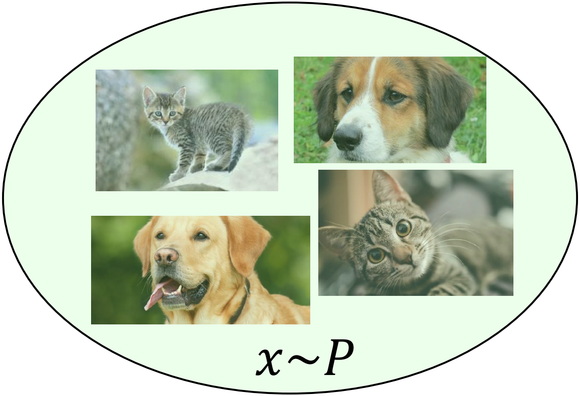
objectif



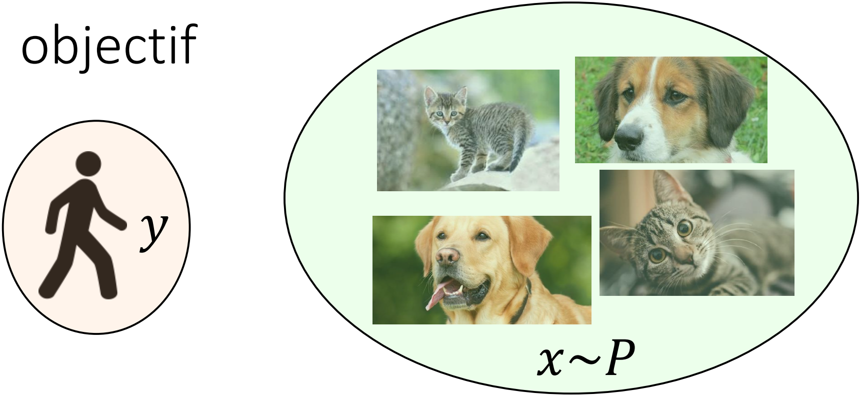
objectif



objectif



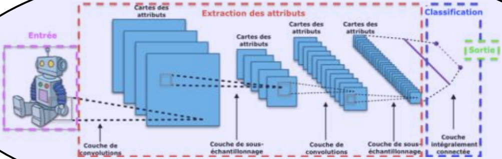
objectif



objectif

y

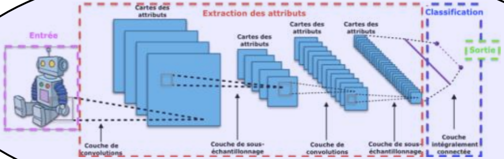
$x \sim P$



objectif

y

$x \sim P$

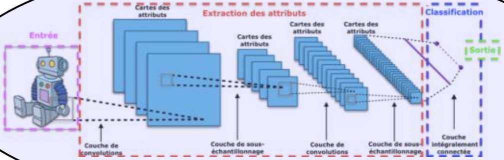


f

objectif

y

$x \sim P$



f

$$f(x) \approx y(x)$$
$$x \sim P$$

Notion d'erreurs

$$f(x) \approx y(x)$$
$$x \sim P$$

En fait, c'est pas la valeur de *f* qui compte
C'est le fait qu'on y associe la bonne valeur de *y*.

Notion d'erreurs

$$f(x) \approx y(x)$$
$$x \sim P$$

En fait, c'est pas la valeur de *f* qui compte
C'est le fait qu'on y associe la bonne valeur de *y*.

Dans le cas binaire $y(x) \in \{-1,1\}$

$$erreur = \int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x)y(x))P(x)\mathrm{d}x$$

Notre objectif est de trouver *f* qui vérifierait

$$f(x) \approx y(x) \qquad x \sim P$$

à partir de quelques exemples $x_1, \ldots, x_N \sim P$ <u>annotés</u>

(c'est-à-dire qu'on connait *y* pour ces exemples)

(par exemple, parce qu'on les a montré à des humains)

Notre objectif est de trouver *f* qui vérifierait

$$\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x)y(x))P(x)\mathrm{d}x \ll 1$$

à partir de quelques exemples $x_1, \dots, x_N \sim P$ <u>annotés</u>

(c'est-à-dire qu'on connait *y* pour ces exemples)

(par exemple, parce qu'on les a montré à des humains)

Notre objectif est de trouver *f* qui vérifierait

$$\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x)y(x))P(x)\mathrm{d}x \ll 1$$

à partir de quelques exemples $x_1, \dots, x_N \sim P$ <u>annotés</u>

(c'est-à-dire qu'on connait *y* pour ces exemples)

(par exemple, parce qu'on les a montré à des humains)

D'un point de vue théorique,
ce problème n'est <u>PAS</u> assez bien défini,
pour qu'on puisse avoir une méthode systématique !

Notre objectif est de trouver *f* qui vérifierait

$$\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x)y(x))P(x)\mathrm{d}x \ll 1$$

à partir de quelques exemples $x_1, \ldots, x_N \sim P$ annotés

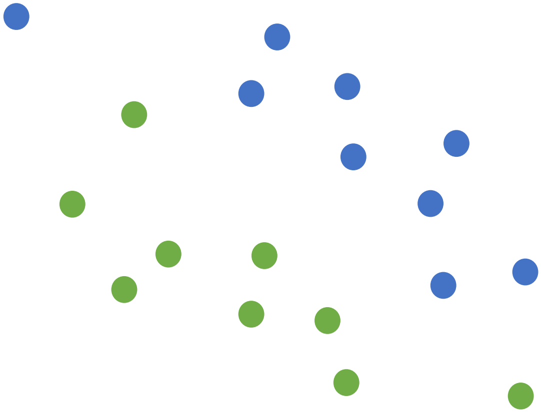
Attention. Je n'ai pas dit « on ne peut pas ».
Je dit « il n'y a pas de méthode systématique ».

The lack of a priori distinction between classifier

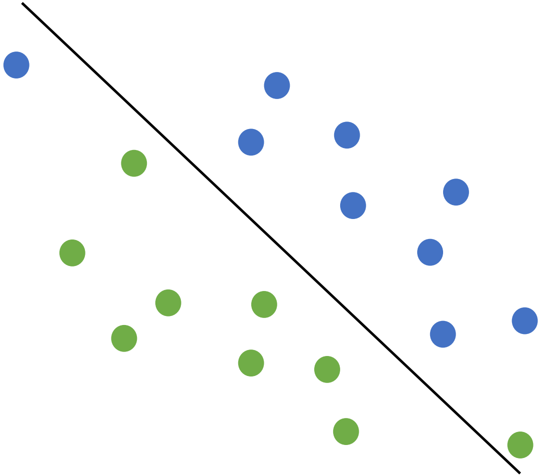
Un problème mal défini

Un problème mal défini

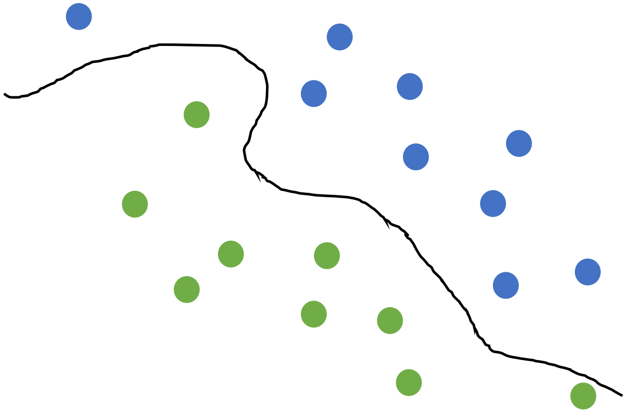
Un problème mal défini



Un problème mal défini



Un problème mal défini



Quelques résultats « théoriques »

Cas N = ∞

Bornes statistiques

pour l’évaluation

Vapnik

Cas N = ∞

(y est connu pour les exemples d'apprentissage $x_1, \dots, x_N$)

Le plus proche voisin

$$f(x) = y(x_i) \; ; \; \|x - x_i\| = \min_{\{x_j \in Base\ Apprentissage\}} \|x - x_j\|$$

Cas N = ∞

(y est connu pour les exemples d'apprentissage $x_1, \ldots, x_N$)

Le plus proche voisin

$$f(x) = y(x_i)\ ;\ ||x - x_i|| = \min_{\{x_j \in Base\ Apprentissage\}} ||x - x_j||$$

$$\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x)y(x))P(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Cas N = ∞

(y est connu pour les exemples d'apprentissage $x_1, \dots, x_N$)

Le plus proche voisin

$$f(x) = y(x_i)\ ;\ \left|\left|x - x_i\right|\right| = \min_{\{x_j \in Base\ Apprentissage\}} \left|\left|x - x_j\right|\right|$$

$$\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x)y(x))P(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

(Le résultat est plus général, dans le cas où *y* est une distribution, il faut utiliser un K-plus proche voisin.)

Cas N = ∞

(y est connu pour les exemples d'apprentissage $x_1, \dots, x_N$)

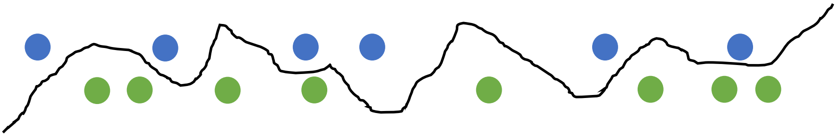
Le plus proche voisin

$$f(x) = y(x_i) \; ; \; \left\|x - x_i\right\| = \min_{\{x_j \in Base\ Apprentissage\}} \left\|x - x_j\right\|$$

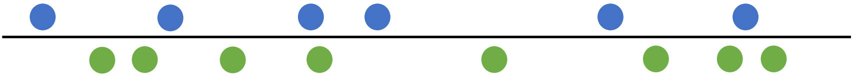
$$\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}\big(f(x)y(x)\big)P(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[N\rightarrow\infty]{} 0$$

Mais en pratique, ça ne marche pas bien hors de la base d'apprentissage ☹

Pire cas pour le plus proche voisin



Pire cas pour le plus proche voisin



Concept	**+**	**-**
Plus proche voisin	Erreur nulle partout quand la base d’apprentissage est infinie	Ça marche pas bien hors de la base d’apprentissage en pratique

Résultat statistique (« N » non infini)

Peut-on approximer
$\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x)y(x))P(x)\mathrm{d}x$?

Résultat statistique (« N » non infini)

Peut-on approximer

$$\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x)y(x))P(x)\mathrm{d}x \ ?$$

Oui (et non – on en reparlera) :
La moyenne converge vers l'espérance

Résultat statistique (« N » non infini)

Peut-on approximer
$\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x)y(x))P(x)\mathrm{d}x$?

Oui (et non – on en reparlera) :
La moyenne converge vers l'espérance

Si $\chi_1, \dots, \chi_K \sim P$ est une base de TEST

$$\frac{1}{K}\sum_k \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(\chi_k)y(\chi_k)) \to \int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x)y(x))P(x)\mathrm{d}x$$

Résultat statistique (« N » non infini)

Si $\chi_1, \dots, \chi_K \sim P$ est une base de TEST

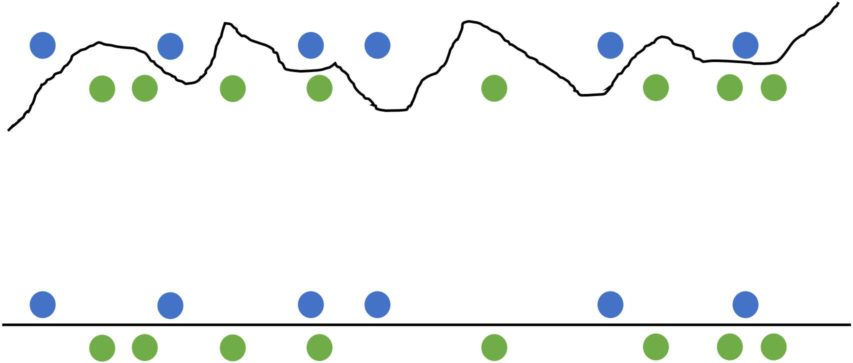
$$P\left(\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}\big(f(x)y(x)\big)P(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{K}\sum_{k} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(\chi_k)y(\chi_k)\,) + \frac{\log(\epsilon)}{\sqrt{K}} \right) \leq \ \epsilon$$

Concept	**+**	**-**
Plus proche voisin	Erreur nulle partout quand la base d’apprentissage est infinie	Ça marche pas bien hors de la base d’apprentissage en pratique
Inégalité entre erreur empirique et réelle	Permet de savoir si on a une fonction f qui approxime correctement y	Ne dit rien sur comment choisir f

Les phases d'une démarche d'apprentissage automatique

- On part d'un problème *y,P*
- On récolte une base d'apprentissage $x_1, \dots, x_N \sim P$
- On annote les exemples d'apprentissage (on connait alors $y(x_1), \dots, y(x_N)$)
- Le cœur de l'apprentissage : à la fin on a choisi *f*
- On récolte une base de test $\chi_1, \dots, \chi_K \sim P$
- On annote la base de test
- $P\left(\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}\big(f(x)y(x)\big)P(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{K}\sum_k \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(\chi_k)y(\chi_k)) + \frac{\log(\epsilon)}{\sqrt{K}}\right) \leq \epsilon$

« Simplicité » du critère



« Simplicité » du critère

$$P\left(\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}\big(f(x)y(x)\big)P(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{N}\sum_{n} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x_n)y(x_n)\,) + \frac{VC(\mathcal{F}) + \log(\epsilon)}{\sqrt{K}}\right) \leq \ \epsilon$$

« Simplicité » du critère

$$P\left(\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}\big(f(x)y(x)\big)P(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{N}\sum_{n} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x_n)y(x_n)\,) + \frac{VC(\mathcal{F}) + \log(\epsilon)}{\sqrt{K}}\right) \leq \ \epsilon$$

La dimension de Vapnik mesure la capacité du modèle à apprendre « du bruit ».

« Simplicité » du critère

$$P\left(\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}\big(f(x)y(x)\big)P(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{N}\sum_{n} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(f(x_n)y(x_n)\,) + \frac{VC(\mathcal{F}) + \log(\epsilon)}{\sqrt{K}}\right) \leq \ \epsilon$$

La dimension de Vapnik mesure la capacité du modèle à apprendre « du bruit ».
Elle peut être infinie (cas plus proche voisin).

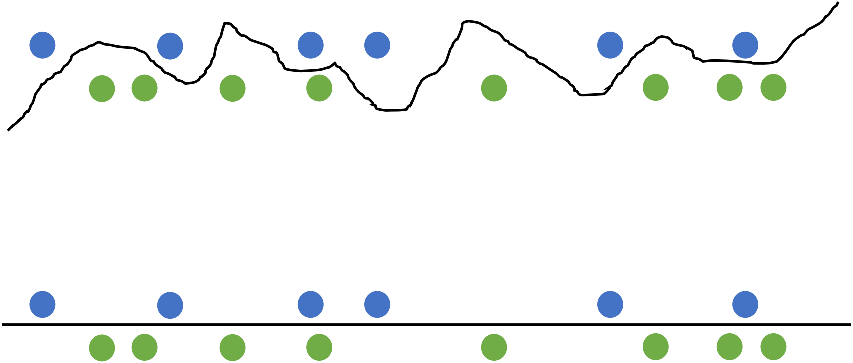
« Simplicité » du critère

$$P\left(\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}\big(f(x)y(x)\big)P(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{N}\sum_{n} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}\big(f(x_n)y(x_n)\,\big) + \frac{VC(\mathcal{F}) + \log(\epsilon)}{\sqrt{K}}\right) \leq \ \epsilon$$

La dimension de Vapnik mesure la capacité du modèle à apprendre « du bruit ».
Elle peut être infinie (cas plus proche voisin).

Quand elle est faible, être capable d'avoir une erreur d'apprentissage faible conduit statistiquement à avoir une erreur réelle (et de test) faible !

« Simplicité » du critère



« Simplicité » du critère

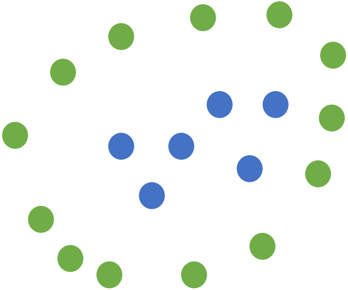
$$P\left(\int \mathbf{1}_{]-\infty,0[}\big(f(x)y(x)\big)P(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{N}\sum_{n} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}\big(f(x_n)y(x_n)\big) + \frac{VC(\mathcal{F}) + \log(\epsilon)}{\sqrt{K}}\right) \leq \epsilon$$

La dimension de Vapnik mesure la capacité du modèle à apprendre « du bruit ». Elle peut être infinie (cas plus proche voisin).

Quand elle est faible, être capable d'avoir une erreur d'apprentissage faible conduit statistiquement à avoir une erreur réelle (et de test) faible !

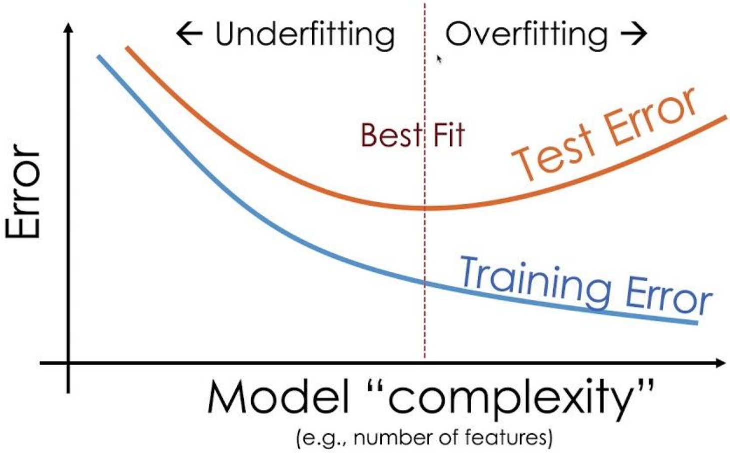
En faible dimension, si un classifier linéaire sépare vos exemples d'apprentissage en 2, il est probablement pertinent partout !

Pire cas du classifier linéaire

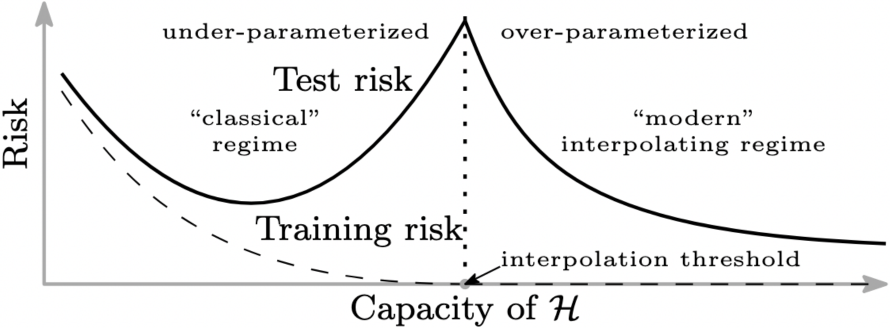


Concept	**+**	**-**
Plus proche voisin	Erreur nulle partout quand la base d’apprentissage est infinie	Ça marche pas bien hors de la base d’apprentissage en pratique
Inégalité entre erreur empirique et réelle	Permet de savoir si on a une fonction f qui approxime correctement y	Ne dit rien sur comment choisir f
Classifier linéaire	Erreur d’apprentissage et réelle corrélées (en faible dimension)	Souvent mauvais même à l’apprentissage

Trouver un compromis ?
(à N fixé)



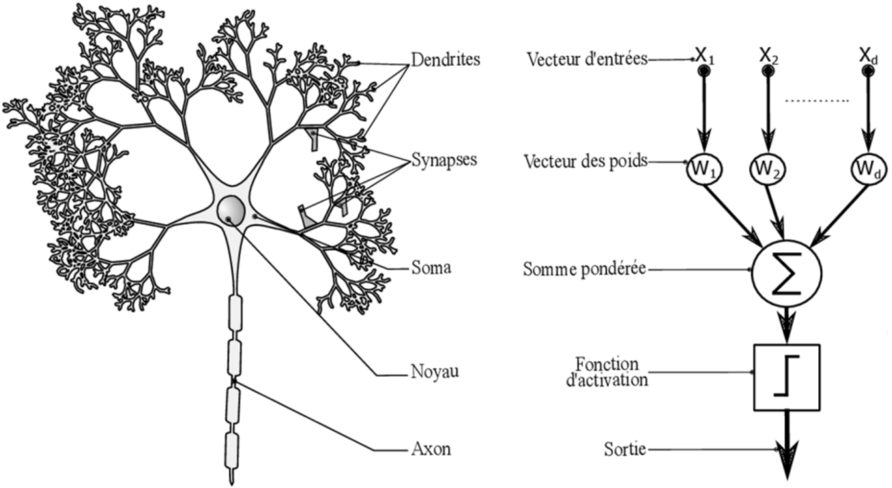
Ce qu’on observe



Ce qui marche le mieux aujourd’hui : les réseaux de neurones !

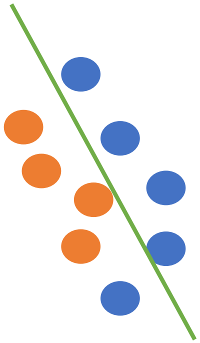
- COURS 1
  - **MLP**
  - Double descente ?
  - Apprentissage
- Cours 2
  - CNN
  - Segmentation/détection
  - Transformer et perspective

Réseau de neurones



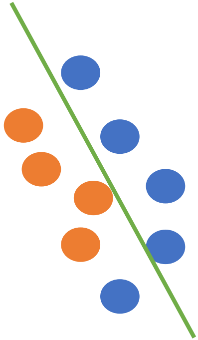
La classification

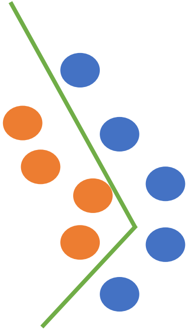
1 neurone
ne peut être que linéaire



La classification

1 neurone
ne peut être que linéaire

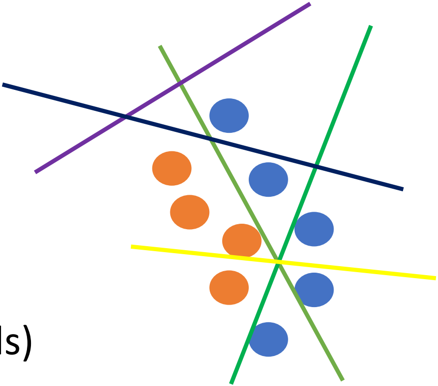




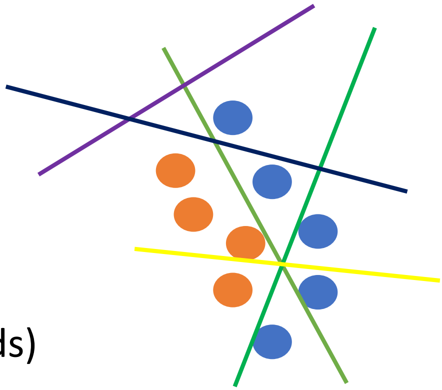
4 neurones + activation
peut être une fonction **non** linéaire

La classification

1 neurone
peut coder TOUTES
ces fonctions
(via la valeur des poids)



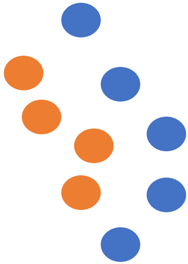
La classification



1 neurone
peut coder TOUTES
ces fonctions
(via la valeur des poids)

Le SVM en est 1 seule fonction
(optimisation des poids)

La classification



4 neurones + activation
=> On ne peut même pas dessiner l'ensemble des fonctions qu'on peut obtenir via les valeurs des poids !

Il va falloir en choisir 1

MLP

Notebook illustration

+

https://playground.tensorflow.org

MLP

1 neurone : $f(x) = w^T x + b = \sum_{d=1}^{D} w_d x_d + b$

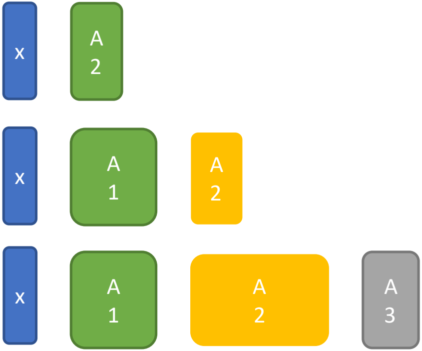
1 couche de 2 neurones + 1 neurone :

$$f(x) = w_3^T \begin{pmatrix} \phi(w_1^T x + b_1) \\ \phi(w_2^T x + b_2) \end{pmatrix} + b_3$$

1 couche de 2 neurones
+ 1 couche de 3 neurones
+ 1 neurone :

$$f(x) = w_6^T \begin{pmatrix} \phi\left(w_3^T \begin{pmatrix} \phi(w_1^T x + b_1) \\ \phi(w_2^T x + b_2) \end{pmatrix} + b_3\right) \\ \phi\left(w_4^T \begin{pmatrix} \phi(w_1^T x + b_1) \\ \phi(w_2^T x + b_2) \end{pmatrix} + b_4\right) \\ \phi\left(w_5^T \begin{pmatrix} \phi(w_1^T x + b_1) \\ \phi(w_2^T x + b_2) \end{pmatrix} + b_5\right) \end{pmatrix} + b_6$$

MLP



1 neurone : $f(x) = Ax + b$

1 couche de 2 neurones + 1 neurone :

$$f(x) = A_2\big(\phi(A_1 x + b_1)\big) + b_2$$

1 couche de 2 neurones
+ 1 couche de 3 neurones
+ 1 neurone :

$$f(x) = A_3\big(\phi(A_2(\phi(A_1 x + b_1)) + b_2)\big) + b_3$$

ϕ d'un vecteur c'est le vecteur des ϕ

MLP

la famille de MLP à activation ϕ et à Q couches de taille $i_1, \ldots, i_Q$
est la famille des fonctions qui peuvent s'écrire

$$f(x) = A_Q\left(\phi\left(A_{Q-1}\left(\ldots\phi\left(A_2\left(\phi(A_1 x + b_1)\right) + b_2\right)\ldots\right) + b_{q-1}\right)\right) + b_q$$

Avec $A_q \in \mathbb{R}^{i_q \times i_{q-1}}$ et $b_q \in \mathbb{R}^{i_q}$

Convention i0 correspond à la dimension des entrées « x »

L'activation la plus classique est : $relu(t) = \max(t, 0)$

MLP

Notebook illustration

+

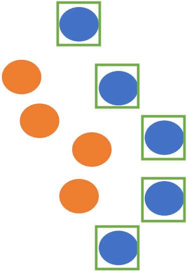
https://playground.tensorflow.org

PLAN

- COURS 1
  - MLP
  - **Double descente ?**
  - Apprentissage
- Cours 2
  - CNN
  - Segmentation/détection
  - Transformer et perspective

Théorème d'universalité

Avec 100 neurones,
on peut faire



Théorème d'universalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = relu(x) + relu(-x)$$

Théorème d'universalité

$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = relu(x) + relu(-x)$
$\forall x \in \mathbb{R}^D, ||x||_1 = \mathbf{1}^T \left(relu(Ix) + relu(-Ix)\right)$

Théorème d’universalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = relu(x) + relu(-x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^D, ||x||_1 = \mathbf{1}^T\left(relu(Ix) + relu(-Ix)\right)$$
$$\forall x, u \in \mathbb{R}^D, ||x-u||_1 = \mathbf{1}^T\left(relu(Ix-u) + relu(-Ix+u)\right)$$

Théorème d'universalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = relu(x) + relu(-x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^D, ||x||_1 = \mathbf{1}^T\left(relu(Ix) + relu(-Ix)\right)$$
$$\forall x, u \in \mathbb{R}^D, ||x-u||_1 = \mathbf{1}^T\left(relu(Ix-u) + relu(-Ix+u)\right)$$
$$\forall x, u \in \mathbb{R}^D, relu(1 - ||x-u||_1)$$
$$= relu\left(1 - \mathbf{1}^T\left(relu(Ix-u) + relu(-Ix+u)\right)\right)$$

Théorème d'universalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = relu(x) + relu(-x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^D, ||x||_1 = \mathbf{1}^T\left(relu(Ix) + relu(-Ix)\right)$$
$$\forall x, u \in \mathbb{R}^D, ||x-u||_1 = \mathbf{1}^T\left(relu(Ix-u) + relu(-Ix+u)\right)$$
$$\forall x, u \in \mathbb{R}^D, relu(1 - ||x-u||_1)$$

$$= relu\left(1 - \mathbf{1}^T\left(relu(Ix-u) + relu(-Ix+u)\right)\right)$$

$$\forall x, u, v \in \mathbb{R}^D, \begin{pmatrix} relu(1 - ||x-u||_1) \\ relu(1 - ||x-v||_1) \end{pmatrix}$$

$$= relu\left(\mathbf{1} - \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} relu\begin{pmatrix} Ix-u \\ -Ix+u \\ Ix-v \\ -Ix+v \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left[\mathbf{1} - \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ix-u \\ -Ix+u \\ Ix-v \\ -Ix+v \end{bmatrix}_+\right]_+$$

Théorème d’universalité

Soit la matrice $W \in \mathbb{R}^{N\times(N\times 2D)}$ tel que $\forall n \in \{1, ..., N\}, i \in \{1, ..., N \times 2D\}$,

$$W_{n,i} = \begin{cases} 1 & ssi \quad 2nD \leq i < 2nD + 2D \\ 0 & sinon \end{cases}$$

alors, $\forall x_1, ..., x_N \in \mathbb{R}^D$

$$\left[\mathbf{1} - \begin{pmatrix} ||x - x_1||_1 \\ ||x - x_2||_1 \\ ... \\ ||x - x_N||_1 \end{pmatrix}\right]_+ = \left[\mathbf{1} - W \begin{bmatrix} Ix - x_1 \\ -Ix + x_1 \\ Ix - x_2 \\ -Ix + x_2 \\ ... \\ Ix - x_N \\ -Ix + x_N \end{bmatrix}_+\right]_+$$

Théorème d'universalité

Soit la matrice $W \in \mathbb{R}^{N\times(N\times 2D)}$ tel que $\forall n \in \{1, ..., N\}, i \in \{1, ..., N \times 2D\}$,

$$W_{n,i} = \begin{cases} 1 & ssi \quad 2nD \leq i < 2nD + 2D \\ 0 & sinon \end{cases}$$

alors, $\forall x_1, ..., x_N \in \mathbb{R}^D$

$$\left[\mathbf{1} - \begin{pmatrix} ||x - x_1||_1 \\ ||x - x_2||_1 \\ ... \\ ||x - x_N||_1 \end{pmatrix}\right]_+ = \left[\mathbf{1} - W \begin{bmatrix} Ix - x_1 \\ -Ix + x_1 \\ Ix - x_2 \\ -Ix + x_2 \\ ... \\ Ix - x_N \\ -Ix + x_N \end{bmatrix}_+\right]_+$$

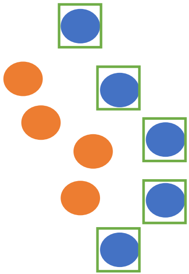
$\forall x_1, ..., x_N \in \mathbb{Z}^D, y_1, ..., y_N \in \{-1, 1\}$ la fonction

$$f(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_N \end{pmatrix}^T \left[\mathbf{1} - W \begin{bmatrix} Ix - x_1 \\ -Ix + x_1 \\ Ix - x_2 \\ -Ix + x_2 \\ ... \\ Ix - x_N \\ -Ix + x_N \end{bmatrix}_+\right]_+$$

vérifie $\forall n \in \{1, ..., N\},\ y_n f(x_n) > 0$.

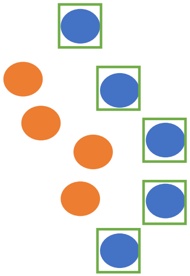
Théorème d'universalité

Avec 100 neurones,
on peut faire ça



Théorème d'universalité

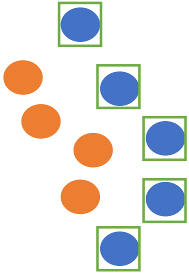
Avec 100 neurones,
on peut faire ça



Sauf que c'est pas forcément bien comme avec le plus proche voisin

Théorème d'universalité

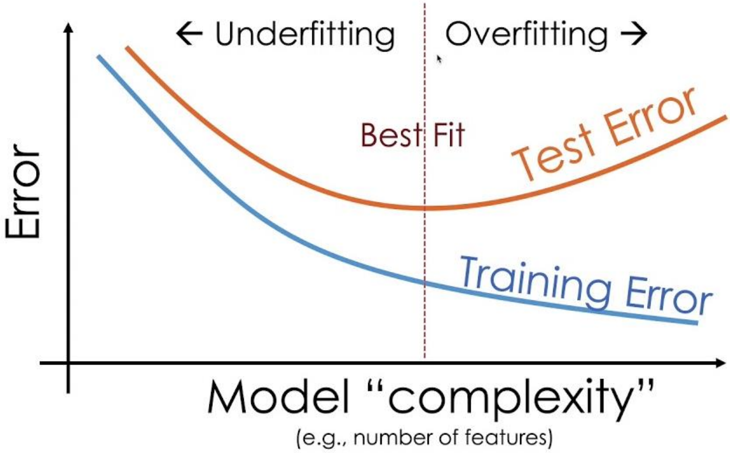
Avec 100 neurones,
on peut faire ça



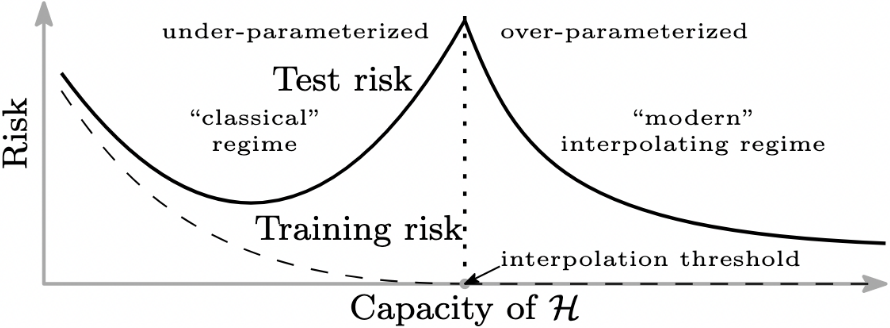
Sauf que c'est pas forcément bien comme avec le plus proche voisin

Il se trouve que ça arrive pas « trop » ???

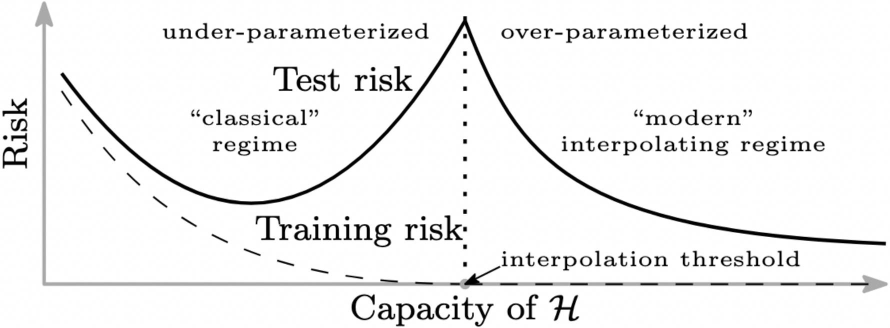
Ancien paradigme



Ce qu'on observe



Ce qu’on observe

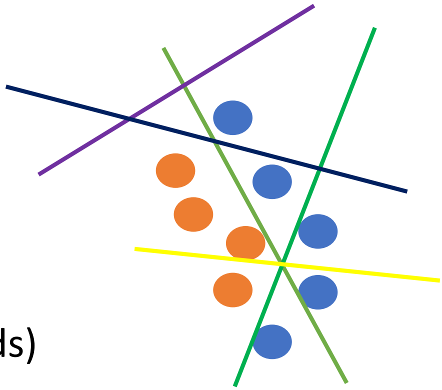


On pourrait penser que limiter le nombre de neurones est le moyen de limiter le sur-apprentissage.
En pratique, c’est plus compliqué.

PLAN

- COURS 1
  - MLP
  - Double descente ?
  - **Apprentissage**
- Cours 2
  - CNN
  - Segmentation/détection
  - Transformer et perspective

Rappel



1 neurone
peut coder TOUTES
ces fonctions
(via la valeur des poids)

Le SVM en est 1 seule fonction
(optimisation des poids)

https://playground.tensorflow.org

Comment apprendre un MLP en pratique ?

- Descente de gradient
- Descente de gradient stochastique
- Fonction de perte
- Calcul du gradient

Descente de gradient

$$J(u+\varepsilon) \approx J(u) + [\nabla_u J]^T \varepsilon + \varepsilon o(\varepsilon)$$

Descente de gradient

$$J(u+\varepsilon) \approx J(u) + [\nabla_u J]^T \varepsilon + \varepsilon o(\varepsilon)$$

$$J(u - \lambda \nabla_u J)$$
$$\approx\ J(u) - \lambda [\nabla_u J]^T [\nabla_u J] + \lambda o(\lambda)$$
$$\approx\ J(u) - \|\nabla_u J\|^2 \times \lambda + \lambda o(\lambda)$$

Descente de gradient

$$J(u+\varepsilon) \approx J(u) + [\nabla_u J]^T \varepsilon + \varepsilon o(\varepsilon)$$

$$\begin{gathered} J(u - \lambda \nabla_u J) \\ \approx\ J(u) - \lambda [\nabla_u J]^T [\nabla_u J] + \lambda o(\lambda) \\ \approx\ J(u) - \|\nabla_u J\|^2 \times \lambda + \lambda o(\lambda) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \nabla_u J \neq 0 \Longrightarrow \exists \lambda > 0, \\ J(u - \lambda \nabla_u J) < J(u) \end{gathered}$$

Descente de gradient

- Initialiser u
- Si $\|\nabla_u J\| < \delta$, sortir
- Sinon
  - Initialiser λ
  - Si $\mathrm{J}(\mathrm{u} - \lambda \nabla_u J) < \mathrm{J}(\mathrm{u})$, alors $\mathrm{u} = \mathrm{u} - \lambda \nabla_u J$
  - Sinon réessayer avec $\lambda = \frac{\lambda}{2}$

Descente de gradient

- Initialiser u
- Si $\|\nabla_u J\| < \delta$, sortir
- Sinon
  - Initialiser λ
  - Si $\mathrm{J}(\mathrm{u} - \lambda \nabla_u J) < \mathrm{J}(\mathrm{u})$, alors $\mathrm{u} = \mathrm{u} - \lambda \nabla_u J$
  - Sinon réessayer avec $\lambda = \frac{\lambda}{2}$

⇨ Converge vers un point u tel que $\|\nabla_u J\| < \delta$

Si la fonction est bornée

Descente de gradient

$$u = A^{-1}b$$

$$\min_{\mathrm{u}} \|Au - b\|^2$$

1. $u = 0$
2. Si $\|2A^T(Au - b)\| < 10^{-6}$, sortir
3. $u = u - \lambda A^T(Au - b)$, GOTO2

Descente de gradient

$$u = A^{-1}b$$

$$\min_{\mathrm{u}} \|Au - b\|^2$$

$$O(N^\gamma L), \qquad \gamma \approx 2.34$$

1. $u = 0$
2. Si $\|2A^T(Au - b)\| < 10^{-6}$, sortir
3. $u = u - \lambda A^T(Au - b)$, GOTO2

$$O(N^2 2^L L)$$

Descente de gradient **stochastique**

$$J(u) = \sum_{k=1}^{K} j_k(u)$$

Si je tire *k* uniformément dans {1,…,*K*}, et que $\mathscr{g} = j_k(u)$

$$\mathbf{E}[\nabla \mathscr{g}] = \frac{1}{\mathrm{K}} \sum_{k=1}^{K} \nabla j_k = \nabla J$$

Descente de gradient **stochastique**

$$J(u) = \sum_{k=1}^{K} j_k(u)$$

Si je tire *k* uniformément dans {1,…,*K*}, et que $g = j_k(u)$

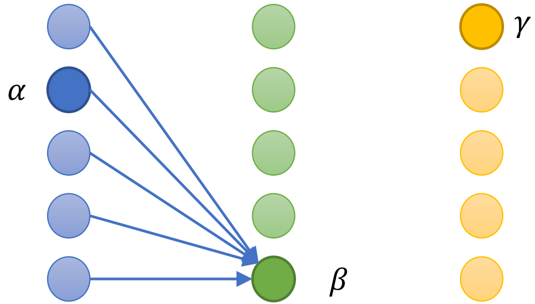
$$\mathbf{E}[\nabla g] = \frac{1}{\mathrm{K}} \sum_{k=1}^{K} \nabla j_k = \nabla J$$

➡ Si *K* est très très grand, il n'y a pas d'alternative à chercher une approximation probabiliste du gradient

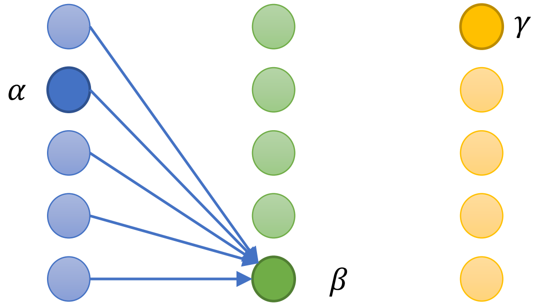
Descente de gradient **stochastique** pour un MLP

- Choisir une fonction de perte *J*
- Initialiser aléatoirement les poids *w*
- Faire un certain nombre de fois
  - Sélectionner un paquet de données *X*
  - Comparer *f(X)* et *y(X)* à travers *J*
  - Calculer le gradient correspondant *dw*
  - *w = w – lr * dw*

Calcul du gradient ?

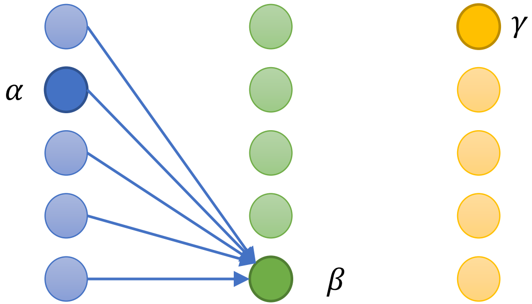


Calcul du gradient ?



$$\beta = w_{\{\beta,\alpha\}}\alpha + \cdots$$
$$\gamma = w_{\{\gamma,\beta\}}\beta + \cdots$$

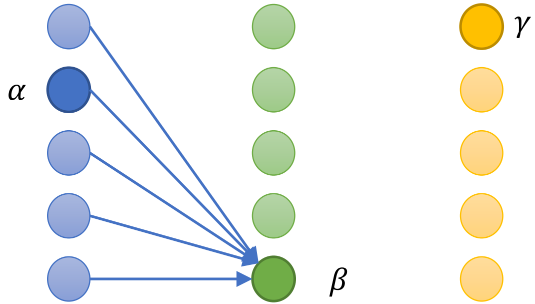
Calcul du gradient ?



$\beta = w_{\{\beta,\alpha\}}\alpha + \cdots \qquad \gamma\,(\alpha, \ldots) = \gamma\,(\beta(\alpha, \ldots), \ldots)$

$\gamma = w_{\{\gamma,\beta\}}\beta + \cdots$

Calcul du gradient ?



$$\beta = w_{\{\beta,\alpha\}}\alpha + \cdots$$
$$\gamma = w_{\{\gamma,\beta\}}\beta + \cdots$$

$$\gamma\,(\alpha, \ldots) = \gamma\,(\beta(\alpha, \ldots), \ldots)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} = \frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} + \cdots$$

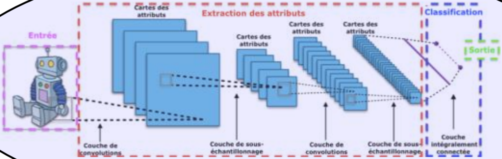
Calcul du gradient

Et en pratique à la fin c’est pytorch qui le calcul pour vous !

Rappel

y

$x \sim P$



$\mathcal{F}$

$f \in \mathcal{F}$

NVIDIA

Pourquoi une fonction de perte ?

Ce qu'on veut c'est trouver w tel que

$$f_w(x) \approx y(x)$$

sur la base d'apprentissage.

Pourquoi une fonction de perte ?

Ce qu'on veut c'est trouver w tel que

$$f_w(x) \approx y(x)$$

sur la base d'apprentissage.

⇒ 1 erreur c'est χ tel que $y(\chi) f_w(\chi) \leq 0$

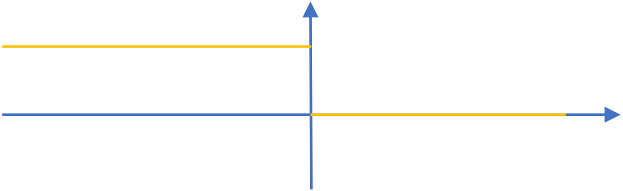
Pourquoi une fonction de perte ?

Ce qu'on veut c'est trouver w tel que

$$f_w(x) \approx y(x)$$

sur la base d'apprentissage.

1 erreur c'est χ tel que $y(\chi)f_w(\chi) \leq 0$



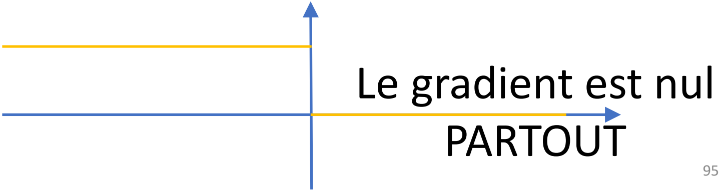
Pourquoi une fonction de perte ?

Ce qu'on veut c'est trouver w tel que

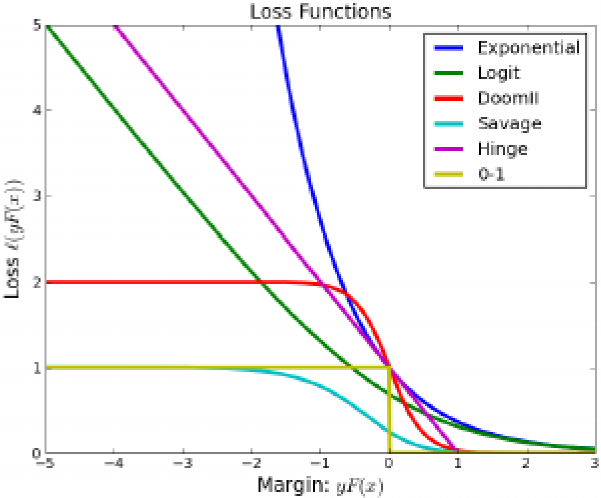
$$f_w(x) \approx y(x)$$

sur la base d'apprentissage.

1 erreur c'est χ tel que $y(\chi)f_w(\chi) \leq 0$

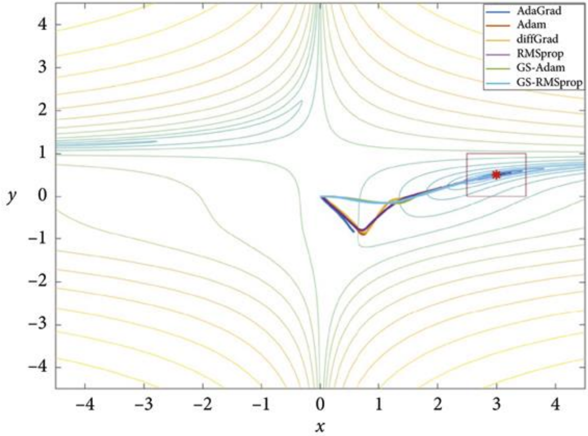


fonction de perte



https://playground.tensorflow.org

fonction de perte



https://playground.tensorflow.org

Réseau de neurones

- Choisir une architecture
- Choisir une fonction de perte
- Choisir une variante de la SGD
- Effectuer une SGD sur les données d'apprentissage (en utilisant les gradients calculés par pytorch)

PLAN

- COURS 1
  - MLP
  - Double descente ?
  - Apprentissage
- Cours 2
  - **CNN**
  - Segmentation/détection
  - Transformer et perspective

Convolution

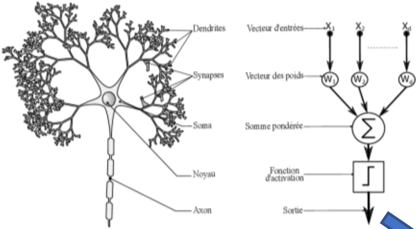
Convolution

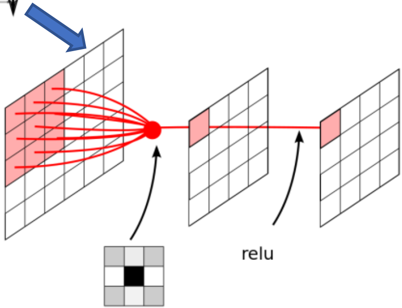
$$
\begin{bmatrix}
100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\
100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\
100 & 100 & 150 & 100 & 100 \\
100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\
100 & 100 & 100 & 100 & 100
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 \\
-1 & 5 & -1 \\
0 & -1 & 0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\
100 & 100 & 50 & 100 & 100 \\
100 & 50 & 350 & 50 & 100 \\
100 & 100 & 50 & 100 & 100 \\
100 & 100 & 100 & 100 & 100
\end{bmatrix}
$$

Gabor

$$\mathbf{G_x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{G_y} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \mathbf{A}$$

ConvNet : convolution





ConvNet

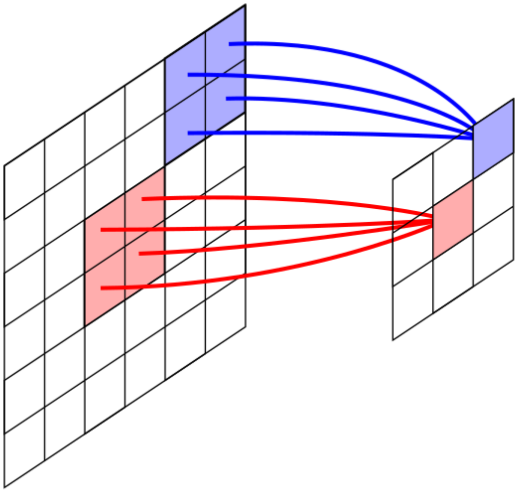
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

	1	
1	-4	1
	1	

4	3	2	1	-6
-5	0	0	0	-11
-10	0	0	0	-16
-15	0	0	0	-21
-46	-27	-28	-29	-56

4	3	2	1	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

ConvNet : pooling

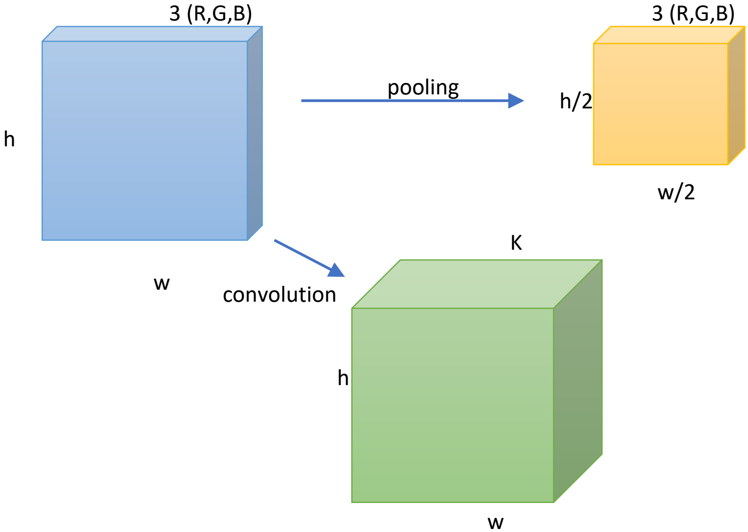


ConvNet

1	2	3	4
6	7	8	9
11	12	13	14
16	17	18	19

7	9
17	19

Attention : on oublie souvent la dimension spectrale



Attention, on manipule des paquets (donc 4D)

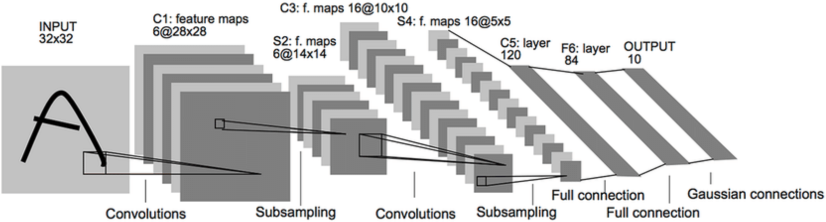
paquet

dimensions spatiales

$$x \in \mathbb{R}^{B \times C \times H \times W}$$

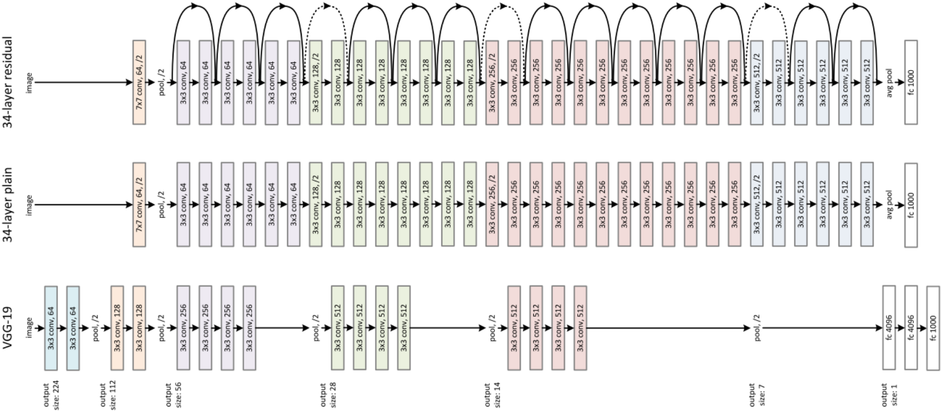
dimension spectrale

Lenet

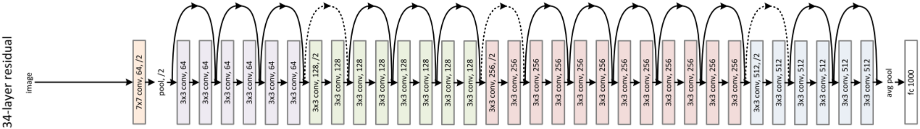

C3: f. maps 16@10x10
S4: f. maps 16@5x5
INPUT
32x32
C1: feature maps
6@28x28
S2: f. maps
6@14x14
C5: layer
120
F6: layer
84
OUTPUT
10
Convolutions
Subsampling
Convolutions
Subsampling
Full connection
Full connection
Gaussian connections

Alexnet et VGG

Resnet


34-layer residual
image
7x7 conv, 64, /2
pool, /2
3x3 conv, 64
3x3 conv, 64
3x3 conv, 64
3x3 conv, 64
3x3 conv, 64
3x3 conv, 64
3x3 conv, 128, /2
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 256, /2
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 512, /2
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
avg pool
fc 1000
34-layer plain
image
7x7 conv, 64, /2
pool, /2
3x3 conv, 64
3x3 conv, 64
3x3 conv, 64
3x3 conv, 64
3x3 conv, 64
3x3 conv, 64
3x3 conv, 128, /2
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
3x3 conv, 256, /2
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 512, /2
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
avg pool
fc 1000
VGG-19
image
3x3 conv, 64
3x3 conv, 64
pool, /2
3x3 conv, 128
3x3 conv, 128
pool, /2
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
3x3 conv, 256
pool, /2
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
pool, /2
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
3x3 conv, 512
pool, /2
fc 4096
fc 4096
fc 1000
output size: 224
output size: 112
output size: 56
output size: 28
output size: 14
output size: 7
output size: 1

Resnet

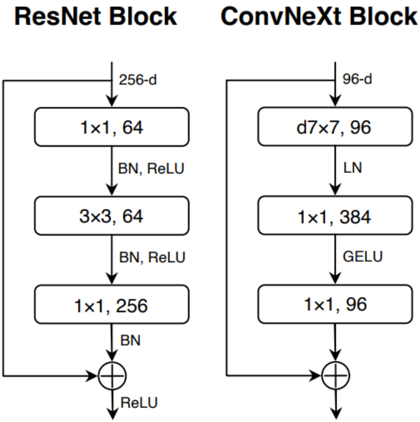


$$BN(x) = \frac{x - \left(\sum_b x_b\right)}{\sqrt{\sum_b \left(x_b - \left(\sum_{b'} x_{b'}\right)\right)^2} + 0.0000001}$$

EfficientNet, ConvNext

https://pytorch.org/vision/stable/models.html

EfficientNet, ConvNext



EfficientNet, ConvNext

https://pytorch.org/vision/stable/models.html

PLAN

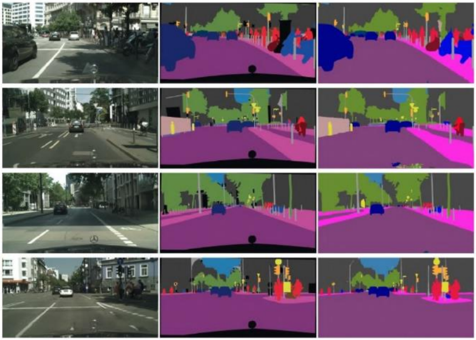
- COURS 1
  - MLP
  - Double descente ?
  - Apprentissage
- Cours 2
  - CNN
  - **Segmentation/détection**
  - Transformer et perspective

Au-delà de la classification

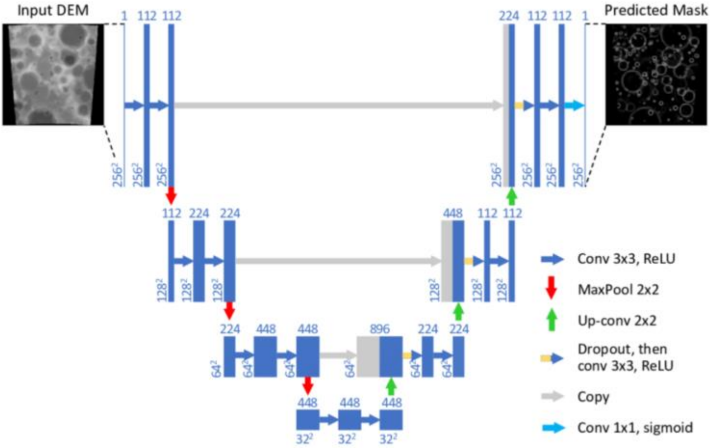
Les modèles par réseau de neurones sont flexibles.
Ils peuvent généralement s'adapter au format du problème !

Au-delà de la classification

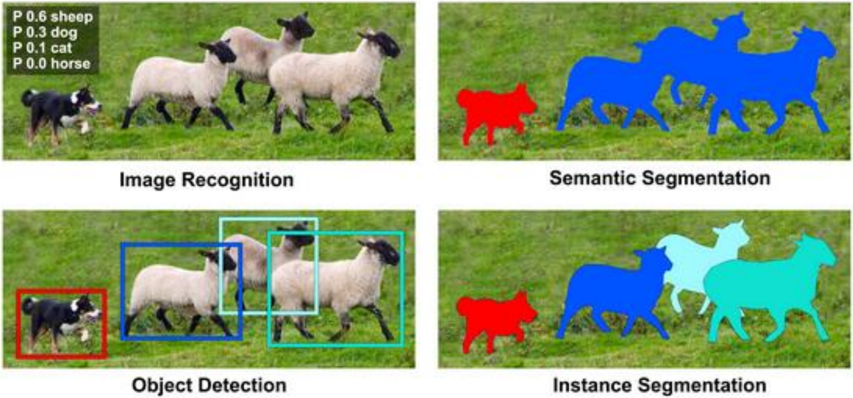
Les modèles par réseau de neurones sont flexibles.
Ils peuvent généralement s'adapter au format du problème !



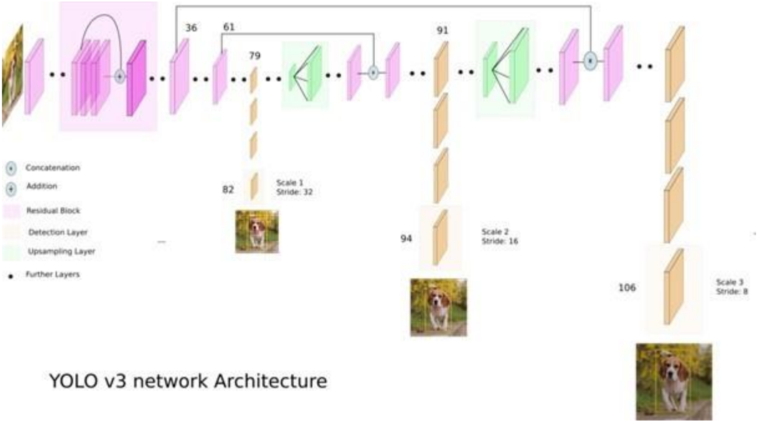
Segmentation



Détection


P 0.6 sheep
P 0.3 dog
P 0.1 cat
P 0.0 horse
Image Recognition
Semantic Segmentation
Object Detection
Instance Segmentation

Détection



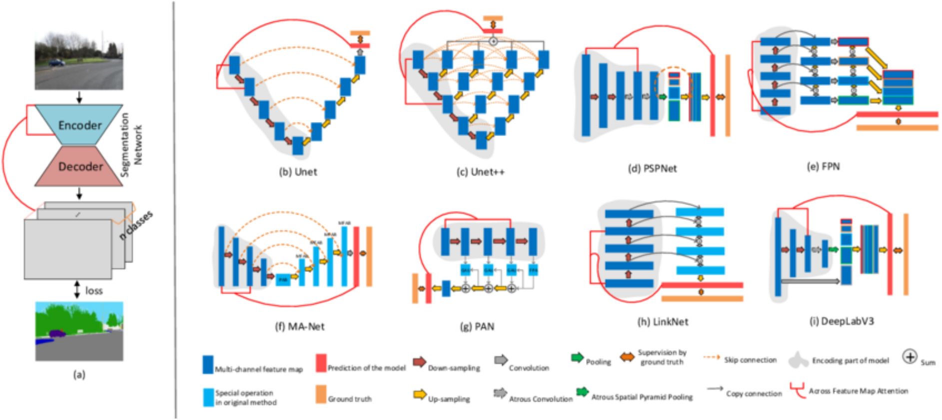
YOLO v3 network Architecture

Segmentation et détection

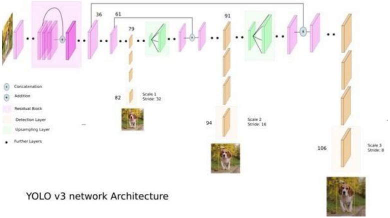
Le framework classique

- Un encodeur
    - qui part de l'image, et
    - produit des cartes de features multirésolutions
- Une tête qui
    - fusionne des cartes de features multirésolutions
    - produit la sortie attendue

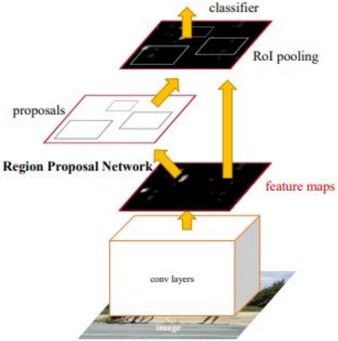
Segmentation

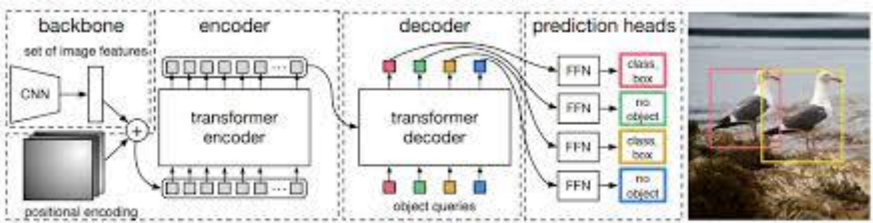


Détection



YOLO v3 network Architecture





Segmentation et détection

Le framework classique

- Un encodeur
    - qui part de l’image, et
    - produit des cartes de features multirésolutions
- Une tête qui
    - fusionne des cartes de features multirésolutions
    - produit la sortie attendue

Grosse unification en cours
via le mécanisme d’attention !

PLAN

- COURS 1
  - MLP
  - Double descente ?
  - Apprentissage
- Cours 2
  - CNN
  - Segmentation/détection
  - **Transformer et perspective**

Transformer

Si $H = h_1, \dots, h_R$ sont *R* vecteurs de dimension *D*, la self attention s'exprime comme

$$\mathrm{S}(H) = softmax\left(\frac{(QH)(KH)^T}{\sqrt{L}}\right)(VH)$$

avec $\quad \mathrm{Q}, \mathrm{K} \in \mathbb{R}^{L \times D}$

Transformer

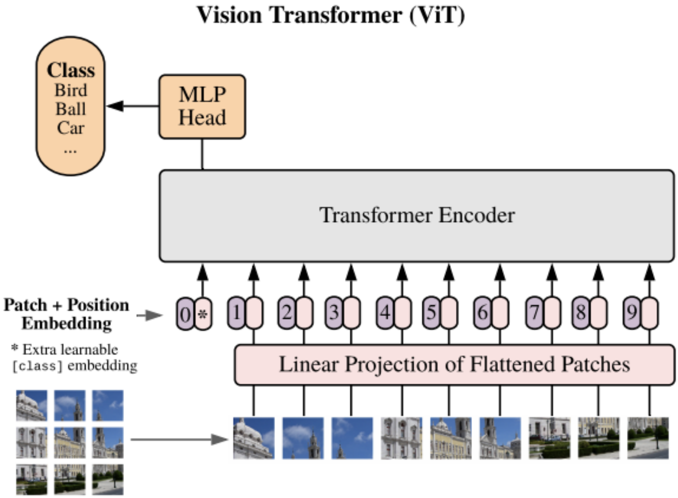
Si $H = h_1, \dots, h_R$ sont *R* vecteurs de dimension *D*, la self attention s'exprime comme

$$\mathrm{S}(H) = softmax\left(\frac{(QH)(KH)^T}{\sqrt{L}}\right)(VH)$$

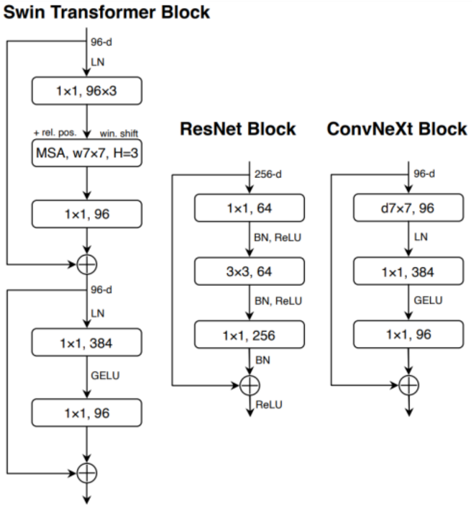
avec $\mathrm{Q}, \mathrm{K} \in \mathbb{R}^{L \times D}$

➡ Le nombre de poids ne dépend pas de *R* !

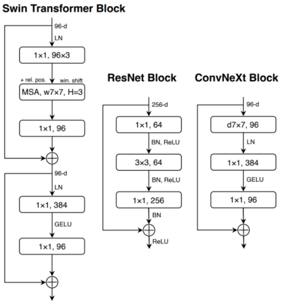
Visual transformer



ViT vs ConvNet



ViT vs ConvNet



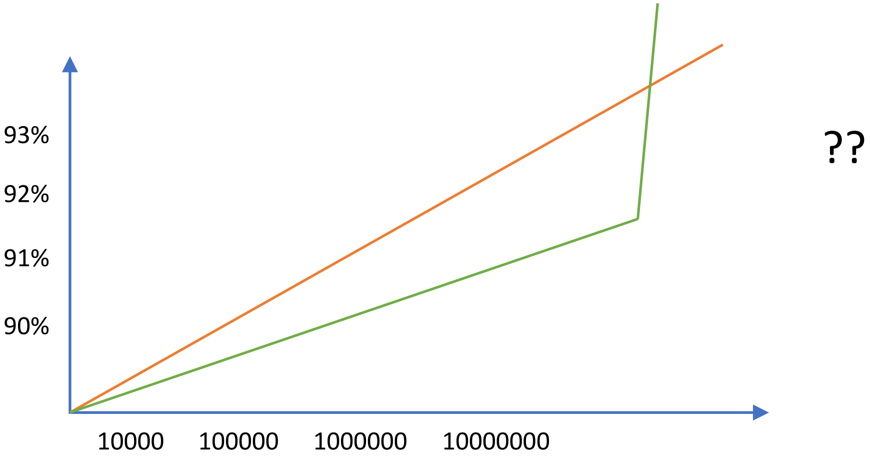
$$S(H) = softmax\left(\frac{(QH)(KH)^T}{\sqrt{L}}\right)(VH)$$

Augmenter brutalement la taille n'apporte pas tant que cela sur des architectures convolutives, alors que l'augmentation de performance semble constante avec des architectures Transformer !

L’état de l’art de la vision par ordinateur

https://pytorch.org/vision/stable/models.html

Performance vs tailles-données-modèles



Fondation models

EfficientNet
    100 Mo

SAM (Segment Everything by Meta)
    2Go de poids
    21Go pour faire un batch de 2 sur le petit modèle

LLAMA (un concurrent de chatGPT)
    128 Go de poids !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    8 x 32Go pour le faire tourner
    200000€

Fondation models

Sam Scarpino
@svscarpino

"Most good ideas still come from academia." 💯💯💯

Prof @ylecun on the role of academia in AI and the importance of good ideas (even if you don't have access to 50k gpus for compute). Fireside chat @Northeastern with @Experiential_AI's @usamaf.

Traduire le Tweet

8:32 PM · 24 mai 2023 depuis Boston, MA · **25,5 k** vues

Fondation models

- Lenet	AT&T
- Alexnet	toronto / google
- VGG	Oxford
- Resnet	Microsoft
- Gpipe	Google
- Efficientnet	Google
- ViT	Google
- SWIM	Microsoft
- ConvNext	Meta

Perspectives

Il existe de très bon modèles convolutifs (EfficientNet, ConvNext) mais leurs performances saturent

L'utilisation de couche Transformer est autant prometteuse que couteuse !

Le passage à l'échelle ne se fera pas dans les labos, car les ordres de grandeur mis en jeux ont explosé !

Merci pour votre attention