# Combos de Teoremas

sábado, 21 de junio de 2025 11:47



## Combos de teoremas de la materia Lenguajes formales y computabilidad

La siguiente lista contiene 9 combos de resultados de la teoria los cuales seran utilizados para la parte teorica del examen. Algunas observaciones:

(1) Cuando el alumno desarrolle una prueba de un resultado perteneciente a un combo, podra utilizar un resultado previo sin necesidad de demostrarlo, salvo que justo el combo exija la prueba de dicho resultado. Esto implica, por ejemplo, que se pueden usar en cualquier combo que la funciones suma, producto, etc son $\Sigma$-p.r.

(2) Cuando el alumno aplique algun resultado que no figura en los resultados del combo que esta desarrollando, debera referirse a el en forma descriptivamente clara, preferentemente enunciandolo. Por ejemplo, no vale poner "por Lema 13 de la Guia 5, tenemos que...."

**Combo 1.**

**Proposición** (Caracterizacion de conjuntos $\Sigma$-p.r.). *Un conjunto $S$ es $\Sigma$-p.r. sii $S$ es el dominio de alguna funcion $\Sigma$-p.r.*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso de la composicion)

**Teorema** (Neumann vence a Godel). *Si $h$ es $\Sigma$-recursiva, entonces $h$ es $\Sigma$-computable*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso $h = R(f, \mathcal{G})$, con $I_h \subseteq \omega$)

**Combo 2.**

**Lema** (Lema de division por casos para funciones $\Sigma$-p.r.). *Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$, $i = 1, ..., k$, son funciones $\Sigma$-p.r. tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup ... \cup f_k$ es $\Sigma$-p.r.*

(Hacer el caso $k = 2$, $n = 2$ y $m = 1$)

**Proposición** (Caracterizacion basica de conjuntos $\Sigma$-enumerables). *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:*

(1) *$S$ es $\Sigma$-enumerable*

(2) *Hay un programa $\mathcal{P} \in \text{Pro}^\Sigma$ tal que:*

   (a) *Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.*

   (b) *Para cada $(x_1, ...x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$*

(Hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

**Combo 3.**

**Teorema** (Godel vence a Neumann). *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ es $\Sigma$-computable, entonces $f$ es $\Sigma$-recursiva.*

**Teorema** (Caracterizacion de conjuntos $\Sigma$-efectivamente computables). *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes*

(a) *$S$ es $\Sigma$-efectivamente computable*
(b) *$S$ y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son $\Sigma$-efectivamente enumerables*

(Haga solo (b) implica (a). La prueba de este resultado esta al final de la Guia 3)

**Combo 4.**

**Proposición** (Caracterizacion basica de conjuntos $\Sigma$-enumerables). *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:*

(1) *$S$ es $\Sigma$-enumerable*
(2) *Hay un programa $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$ tal que:*
    (a) *Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.*
    (b) *Para cada $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$*

(Hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

**Lema** (Lema de la sumatoria). *Sea $\Sigma$ un alfabeto finito. Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ es $\Sigma$-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces la funcion $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es $\Sigma$-p.r.*

**Combo 5.**

**Lema.** *Sea $\Sigma = \{@, \%, !\}$. Sea*

$$f : S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \to \omega$$

*con $S_1, S_2 \subseteq \omega$ y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacios y sea $\mathcal{G}$ una familia $\Sigma$-indexada de funciones tal que*

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \times \Sigma^* \to \omega$$

*para cada $a \in \Sigma$. Si $f$ y cada $\mathcal{G}_a$ son $\Sigma$-efectivamente computables, entonces $R(f, \mathcal{G})$ lo es.*

(Es un ejercicio de la Guia 5)

**Lema** (Lema de cuantificacion acotada). *Sea $\Sigma$ un alfabeto finito. Sea $P : S \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ un predicado $\Sigma$-p.r., con $S, S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es $\Sigma$-p.r.. Entonces $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es $\Sigma$-p.r.*

**Combo 6.**

**Lema** ($\Sigma$-efectivamente computable implica $\Sigma$-efectivamente enumerable). *Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es $\Sigma$-efectivamente computable entonces $S$ es $\Sigma$-efectivamente enumerable.*

**Teorema** (Caracterizacion de conjuntos $\Sigma$-r.e.). *Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes*

(1) *$S$ es $\Sigma$-recursivamente enumerable*
(2) *$S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada $F_{(i)}$ es $\Sigma$-recursiva.*
(3) *$S = D_f$, para alguna funcion $\Sigma$-recursiva $f$*

(Haga solo la prueba de (2)$\Rightarrow$(3), caso $k = l = 1$ y $n = m = 2$)

**Combo 7.**

**Lema** (Lema de minimizacion acotada). *Sean $n, m \geq 0$. Sea $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ un predicado $\Sigma$-p.r.. Entonces*

(a) *$M(P)$ es $\Sigma$-recursiva.*
(b) *Si hay una funcion $\Sigma$-p.r. $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ tal que*

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)},$$

*entonces $M(P)$ es $\Sigma$-p.r..*

**Lema.** *Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es $\Sigma$-recursiva y $S \subseteq D_f$ es $\Sigma$-r.e., entonces $f|_S$ es $\Sigma$-recursiva.*

(Haga solo el caso $S$ no vacio, $n = m = 1$ y $O = \Sigma^*$)

**Combo 8.**

**Lema.** *Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^\Sigma$ no es $\Sigma$-recursivo.*

**Teorema.** *Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^\Sigma$ no es $\Sigma$-efectivamente computable. Es decir no hay ningun procedimiento efectivo que decida si un programa de $\mathcal{S}^\Sigma$ termina partiendo de si mismo.*

**Lema.** *Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces*

$$A = \left\{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 1\right\}$$

*es $\Sigma$-r.e. y no es $\Sigma$-recursivo. Mas aun el conjunto*

$$N = \left\{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma : AutoHalt^\Sigma(\mathcal{P}) = 0\right\}$$

*no es $\Sigma$-r.e.*

**Teorema** (Neumann vence a Godel). *Si $h$ es $\Sigma$-recursiva, entonces $h$ es $\Sigma$-computable.*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso $h = M(P)$)

**Combo 9.**

**Lema** (Lema de division por casos para funciones $\Sigma$-recursivas). *Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, $i = 1, ..., k$, son funciones $\Sigma$-recursivas tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces la funcion $f_1 \cup ... \cup f_k$ es $\Sigma$-recursiva.*

(Haga el caso $k = 2$, $n = m = 1$ y $O = \omega$)

**Teorema** (Godel vence a Neumann). *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es $\Sigma$-computable, entonces $f$ es $\Sigma$-recursiva.*

COMBO 1

PROPOSICIÓN (CARACTERIZACIÓN DE CONJUNTOS $\Sigma$-P.R) UN CONJUNTO $S$ ES $\Sigma$-P.R SII $S$ ES EL DOMINIO DE ALGUNA FUNCIÓN $\Sigma$-P.R. (EN LA INDUCCIÓN HACEMOS SOLO COMPOSICIÓN)

DEM:

($\Rightarrow$) SUP $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ ES UN CONJUNTO $\Sigma$-P.R

NOTAR QUE $S = D_{PRED \circ \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}}$

($\Leftarrow$) POR INDUCCIÓN EN K SOBRE $PR_K^\Sigma$

VEAMOS QUE

$$PR_0^\Sigma = \{ p_i^{n,m} : 1 \leq i \leq n+m \} \cup \{ d_a : a \in \Sigma \} \cup \{ C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}, SUC, PRED \}$$

Y LOS DOMINIOS DE ESTAS FUNCIONES SON $\omega^n \times \Sigma^{*m}$, $\Sigma^*$, $\omega$, $N$ Y $\{\Diamond\}$ TODOS ELLOS CLARAMENTE $\Sigma$-P.R.

SUPONGAMOS QUE $D_F$ ES $\Sigma$-P.R $\forall F \in PR_K^\Sigma$ Y VEAMOS ENTONCES $h \in PR_{K+1}^\Sigma - PR_K^\Sigma$

SUPONGAMOS $h = f \circ [f_1, ..., f_r]$ DONDE $f_1, ..., f_r, f$ SON FUNCIONES $\Sigma$-P.R CUYOS DOMINIOS $D_{f_1}, ..., D_{f_r}, D_f$ SON $\Sigma$-P.R. POR HI.

SI $h = \emptyset$, ES CLARO QUE ES $\Sigma$-P.R. EN OTRO CASO, TENEMOS QUE $r$ ES DE LA FORMA $n+m$ Y

$f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$

$f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega$ PARA $i = 1, ..., n$

$f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega$ para $i = 1, \ldots, n$

$f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \Sigma^*$ para $i = n+1, \ldots, n+m$

con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $k, l \in \omega$.

<u>LEMA</u>: Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ es una función $\Sigma$-p.r., entonces existe una función $\Sigma$-PR $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ tq $f = \bar{f}|_{D_f}$.

Por el lema anterior, tenemos que existen funciones $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_r$ que son $\Sigma$-totales y cumplen $f_i = \bar{f}_i|_{D_{f_i}}$ para $i = 1, \ldots, r$

Como $D_{f_1}, \ldots, D_{f_r}$ son $\Sigma$-PR por HI entonces $S = \bigcap_{i=1}^{r} D_{f_i}$ lo es.

Notar que

$$\chi_{D_h}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} = \left( \chi_{D_f}^{\omega^n \times \Sigma^{*m}} \circ [\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_r] \wedge \chi_S^{\omega^k \times \Sigma^{*l}} \right)$$

lo cual indica que $D_h$ es $\Sigma$-p.r. ■

<u>TEOREMA</u> (Neumann vence a Gödel) Si $h$ es $\Sigma$-recursiva, entonces $h$ es $\Sigma$-computable. (En la inducción hacer solo el caso $h = R(f, g)$ con $I_h \subseteq \omega$)

<u>Dem</u>: Probaremos por inducción en $k$ que

(*) Si $h \in R_k^\Sigma$, entonces $h$ es $\Sigma$-computable

Caso $k = 0$:

- $h \in \{p_i^{n,m} : 1 \leq i \leq n+m\}$

  Notemos que $\Psi_{N1 \leftarrow Ni}^{n,m,\#} = p_i^{n,m} \ \forall i = 1, \ldots, n$

  $\Psi_{P1 \leftarrow P\overline{i-n}}^{n,m,*} = p_i^{n,m} \ \forall i = n+1, \ldots, n+m$

- $\Psi_{N1 \leftarrow 0}^{0,0,\#} = C_0^{n,m}$ y $\Psi_{P1 \leftarrow \varepsilon}^{0,0,*} = C_\varepsilon^{n,m}$

- $\Psi_{N1 \leftarrow N1+1}^{n,m,\#} = Suc$ y $\Psi_{\text{IF } N1 \neq 0 \text{ GOTO } L1 \ L2 \ \text{GOTO} \ L2 \ L1 \ N1 \leftarrow N1 \dot{-} 1}^{n,m,\#} = Pred$

- $\Psi_{P1 \leftarrow P1.a}^{0,1,*} = d_a \ \forall a \in \Sigma$

SUPONGAMOS QUE * VALE PARA $K$ Y VEAMOS QUE VALE PARA $K+1$.

SEA $h \in R^{\Sigma}_{K+1} - R^{\Sigma}_{K}$. HAY VARIOS CASOS PERO SÓLO VEREMOS EL SIGUIENTE:

SUPONGAMOS $h = R(f, \mathcal{G})$ CON

$$f : S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \to \omega$$

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \times \Sigma^* \to \omega \quad \forall a \in \Sigma$$

ELEMENTOS DE $R^{\Sigma}_{K}$.

SEA $\Sigma = \{a_1, \dots, a_r\}$ POR HI, LAS FUNCIONES $f$ Y $\mathcal{G}_a$ $\forall a \in \Sigma$ SON $\Sigma$-COMPUTABLES Y POR LO TANTO TENEMOS LAS MACROS

$$[V\overline{n+1} \leftarrow f(V1, \dots, V\bar{n}, W1, \dots, W\bar{m})]$$

$$[V\overline{n+2} \leftarrow \mathcal{G}_{a_i}(V1, \dots, V\bar{n}, V\overline{n+1}, W1, \dots, W\bar{m}, W\overline{m+1})] \quad i = 1, \dots, r$$

Y CON ELLOS PODEMOS HACER EL SIGUIENTE PROGRAMA

$[N\overline{n+1} \leftarrow f(N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m})]$

$L\overline{r+1}$ IF $P\overline{m+1}$ BEGINS $a_1$ GOTO $L1$

⋮

IF $P\overline{m+1}$ BEGINS $a_r$ GOTO $L\bar{r}$

GOTO $L\overline{r+2}$

$L1$ $P\overline{m+1} \leftarrow {}^{\curvearrowright}P\overline{m+1}$

$[N\overline{n+1} \leftarrow \mathcal{G}_{a_1}(N\overline{n+1}, N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}, P\overline{m+2})]$

$P\overline{m+2} \leftarrow P\overline{m+2}.a_1$

GOTO $L\overline{r+1}$

⋮

$L\bar{r}$ $P\overline{m+1} \leftarrow {}^{\curvearrowright}P\overline{m+1}$

$[N\overline{n+1} \leftarrow \mathcal{G}_{a_r}(N\overline{n+1}, N1, \dots, N\bar{n}, P1, \dots, P\bar{m}, P\overline{m+2})]$

$P\overline{m+2} \leftarrow P\overline{m+2}.a_r$

GOTO $L\overline{r+1}$

$L\overline{r+2}$ $N1 \leftarrow N\overline{n+1}$

Y ES CLARO QUE ESTE PROGRAMA COMPUTA A $h$ ■

__COMBO 2__

__LEMA__ (Lema de división por casos para funciones $\Sigma$-p.r.) Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ para $i = 1, \dots, k$ son funciones $\Sigma$-p.r. tq $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup \dots \cup f_k$ es $\Sigma$-p.r. (Hacer el caso $k=2$, $n=2$ y $m=1$)

__DEM__

Supongamos $f_1 : D_{f_1} \subseteq \omega^2 \times \Sigma^* \to \Sigma^*$

$f_2 : D_{f_2} \subseteq \omega^2 \times \Sigma^* \to \Sigma^*$

son funciones $\Sigma$-p.r. tq $D_{f_1} \cap D_{f_2} = \emptyset$

Por el lema "Un conjunto $S$ es $\Sigma$-p.r. sii es el dominio de una función $\Sigma$-p.r." tenemos que $D_{f_1}$ y $D_{f_2}$ son conjuntos $\Sigma$-p.r. y por lo tanto también lo es $D_{f_1} \cup D_{f_2}$

Notemos que por el lema "Sea $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $n, m \in \omega$. Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es una función $\Sigma$-p.r., existe una función $\Sigma$-p.r. $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ tq $f = \bar{f}|_{D_f}$"

Tenemos $\bar{f}_1$ y $\bar{f}_2$ $\Sigma$-totales y $\Sigma$-p.r. tq $f_1 = \bar{f}_1|_{D_{f_1}}$ y $f_2 = \bar{f}_2|_{D_{f_2}}$

Así, tenemos que

$$f_1 \cup f_2 = \left( \lambda_{\alpha\beta}[\alpha\beta] \circ \left[ \lambda_{x\alpha}[\alpha^x] \circ \left[ \chi_{D_{f_1}}^{\omega^2 \times \Sigma^*}, \bar{f}_1 \right], \lambda_{x\alpha}[\alpha^x] \circ \left[ \chi_{D_{f_2}}^{\omega^2 \times \Sigma^*}, \bar{f}_2 \right] \right] \right) \Big|_{D_{f_1} \cup D_{f_2}}$$

es $\Sigma$-p.r. ∎

__PROPOSICIÓN__ (Caracterización básica de conjuntos $\Sigma$-enumerables) Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:

1) $S$ es $\Sigma$-enumerable

2) Hay un programa $P \in Pro^{\Sigma}$ tq:

- Para cada $x \in \omega$, tenemos que $P$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots), (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots))$ donde $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S$

- Para cada $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in S$, hay un $x \in \omega$ tq $P$ se detiene

...

- PARA CADA $(x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in S$, HAY UN $x\in\omega$ TQ $P$ SE DETIENE PARTIENDO DESDE EL ESTADO $\|x\|$ Y LLEGA A UN ESTADO DE LA FORMA $((x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots),(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots))$.

(HACER EL CASO $n=2$ Y $m=1$)

DEM

$(\Rightarrow)$ SUP $S\subseteq\omega^2\times\Sigma^*$ ES $\Sigma$-ENUMERABLE Y NO VACÍO.

ENTONCES EXISTE UNA FUNCIÓN $F:\omega\to\omega^2\times\Sigma^*$ TQ

$I_F=S$ Y CADA $F_{(i)}$ ES $\Sigma$-COMPUTABLE. PARA $i=1,2,3$

EN PARTICULAR, CADA $F_i$ TIENE UN MACRO (PARECE PRIMER MANDATO):

$$[V2\leftarrow F_{(1)}(V1)]$$

$$[V2\leftarrow F_{(2)}(V1)]$$

$$[W1\leftarrow F_{(3)}(V1)]$$

ES FÁCIL VER QUE EL PROGRAMA

$$[P1\leftarrow F_{(3)}(N1)]$$
$$[N2\leftarrow F_{(2)}(N1)]$$
$$[N1\leftarrow F_{(1)}(N1)]$$

CUMPLE LAS CONDICIONES DE (2) PUES $\forall x\in\omega$, $P$ SE DETIENE PARTIENDO DE $\|x\|$ Y LLEGA A UN ESTADO DE LA FORMA $((F_1(x),F_2(x),y_1,\ldots),(F_3(x),\beta_1,\ldots))$

DONDE $(F_1(x),F_2(x),F_3(x))=F(x)\in S$

Y $\forall(x,y,\alpha)\in S$, $\exists z\in\omega$ TQ $F(z)=(x,y,\alpha)=(F_1(z),F_2(z),F_3(z))$

Y CORRER EL PROGRAMA DESDE EL ESTADO $\|z\|$ LLEGA A UN ESTADO DE LA FORMA $((F_1(z),F_2(z),y_1,\ldots),(F_3(z),\beta_1,\ldots))=((x,y,y_1,\ldots),(\alpha,\beta_1,\ldots))$

$(\Leftarrow)$ SUPONGAMOS $P\in Pro^\Sigma$ CUMPLE LAS CONDICIONES DE (2). DEFINIMOS LOS PROGRAMAS

$$P_1=P\ N1\leftarrow N1$$

$$P_2=P\ N1\leftarrow N2$$

$$P_3=P\ P1\leftarrow P1$$

LUEGO PODEMOS DEFINIR

$$F_{(1)}=\Psi_{P_1}^{1,0,\#}\quad F_{(2)}=\Psi_{P_2}^{1,0,\#}\quad F_{(3)}=\Psi_{P_3}^{1,0,*}$$

DONDE CADA $F_{(i)}$ ES $\Sigma$-COMPUTABLE CON DOMINIO $\omega$

$F_{(1)} = \Psi_{P_1}$ $F_{(2)} = \Psi_{P_2}$ $F_{(3)} = \Psi_{P_3}$

Donde cada $F_{(i)}$ es $\Sigma$-computable con dominio $\omega$

Sea $F = [F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}]$. Así, tenemos por definición que $D_F = \omega$ y que cada $F_{(i)}$ es $\Sigma$-computable.

Veamos ahora

$I_F \subseteq S$

$\forall x \in \omega$, $F(x) = \left(\Psi_{P_1}^{1,0,\#}(x), \Psi_{P_2}^{1,0,\#}(x), \Psi_{P_3}^{1,0,*}(x)\right)$ y sabemos que $P$ se detiene partiendo de $\|x\|$ en un estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, \ldots), (\alpha_1, \beta_1, \ldots))$ tq $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$

Donde $x_1, x_2$ y $\alpha_1$ son los valores que representan las variables N1, N2 y P1 al terminar $P$

Como $\Psi_{P_1}^{1,0,\#}$ devuelve el valor de N1 al terminar $P_1$ y $P_1 = P$ N1 $\leftarrow$ N1, entonces $\Psi_{P_1}^{1,0,\#}(x) = x_1$

Como $\Psi_{P_2}^{1,0,\#}$ devuelve el valor de N1 al terminar $P_2$ y $P_2 = P$ N1 $\leftarrow$ N2, entonces $\Psi_{P_2}^{1,0,\#}(x) = x_2$

Como $\Psi_{P_3}^{1,0,*}$ devuelve el valor de P1 al terminar $P_3$, y $P_3 = P$ P1 $\leftarrow$ P1 entonces $\Psi_{P_3}^{1,0,*}(x) = \alpha_1$

Luego $F(x) = (x_1, x_2, \alpha_1) \in S$

$S \subseteq I_F$

Tenemos que para cada $(x, y, \alpha) \in S$, $\exists z \in \omega$ tq $P$ se detiene partiendo desde $\|z\|$ y llega a un estado de la forma $((x, y, y_1, \ldots), (\alpha, \beta_1, \ldots))$

Luego por la explicación anterior de $P_1, P_2$ y $P_3$ tenemos que $(x, y, \alpha) = F(z) \in I_F$

Por lo tanto $S = I_F$ ∎

Combo 3

Teorema (Gödel vence a Neumann) Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ es $\Sigma$-computable, entonces $f$ es $\Sigma$-recursiva.

TEOREMA (GODEL VENCE A NEUMANN) Si $f: D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ es $\Sigma$-computable, entonces $f$ es $\Sigma$-recursiva.

DEM:

Tenemos que existe un programa $\mathcal{P}_0 \in Pro^{\Sigma}$ que computa a $f$. Veremos que $f$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva. Notar que

$$f = E_{*1}^{n,m} \circ [T^{n,m} \circ [p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}], p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m}]$$

donde las $p_i^{n,m}$ son proyecciones con respecto al alfabeto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$ i.e tienen dominio $\omega^n \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^{*m}$. Esto nos dice que $f$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva y por el lema de independencia del alfabeto, $f$ es $\Sigma$-recursiva.

TEOREMA (caracterización de conjuntos $\Sigma$-efectivamente computables) Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son equivalentes:

(a) $S$ es $\Sigma$-efectivamente computable

(b) $S$ y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son $\Sigma$-efectivamente enumerables

(Hacer solo $b \Rightarrow a$)

DEM)

Si $S = \emptyset$ ó $S = \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es claro que se cumple A. Supongamos entonces que ni $S$ ni $\bar{S}$ son vacíos.

Sea $\mathbb{P}_0$ un procedimiento efectivo que enumera a $S$ y $\mathbb{P}_1$ uno que enumera a $\bar{S}$. Sea $\mathbb{P}$ el siguiente procedimiento efectivo para datos de entrada $(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$

ETAPA 1: $T \leftarrow 0$

ETAPA 2: $(\vec{y}, \vec{\beta}) \leftarrow$ resultado de correr $\mathbb{P}_0$ con dato de entrada $T$.
Si $(\vec{y}, \vec{\beta}) = (x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, detenerse y devolver 1.

ETAPA 3: $(\vec{z}, \vec{v}) \leftarrow$ resultado de correr $\mathbb{P}_1$ con dato de entrada $T$
Si $(\vec{z}, \vec{v}) = (x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, detenerse y devolver 0.

ETAPA 4: $T \leftarrow T+1$. Ir a etapa 2.

Es claro que $\mathbb{P}$ computa al predicado $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ pues

• Se detiene partiendo de cualquier $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$

• Si $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in S \Rightarrow \exists t \in \omega$ tq sería $\mathbb{P}_0$ partiendo de $t$ devuelve $(\vec{x},\vec{\alpha})$ y no existe un $t \in \omega$ tq $\mathbb{P}_1$ partiendo de $t$ devuelva $(\vec{x},\vec{\alpha})$ pues $(\vec{x},\vec{\alpha}) \notin \bar{S}$ por lo tanto $\mathbb{P}$ devolverá 1 cuando $T=t$.

• Exactamente lo contrario ocurre cuando $(\vec{x},\vec{\alpha}) \notin S$ (i.e $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in \bar{S}$) y por lo tanto $\mathbb{P}$ devolverá 0.

## COMBO 4

**Proposición** (caracterización básica de conjuntos $\Sigma$-enumerables) Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:

1) $S$ es $\Sigma$-enumerable

2) Hay un programa $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ tq

a) para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots),(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots))$ donde $(x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in S$.

b) para cada $(x_1,\ldots,x_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in S$, hay un $x \in \omega$ tq $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots),(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots))$

(Hacer el caso $n=2$ y $m=1$)

**DEM**

$(\Rightarrow)$ Sea $S \subseteq \omega^2 \times \Sigma^*$ un conjunto no vacío $\Sigma$-enumerable.
Por definición, tenemos que existe una función $F: \omega \to \omega^2 \times \Sigma^*$ tq $I_F = S$ y donde cada $F_{(i)}$ es $\Sigma$-computable para $i=1,2,3$
Por el primer manantial de macros, tenemos los macros

$$[V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)]$$

$$[V2 \leftarrow F_{(2)}(V1)]$$

$$[W1 \leftarrow F_{(3)}(V1)]$$

Sea $\mathcal{P}$ el programa dado por

SEA $\mathcal{P}$ EL PROGRAMA DADO POR

$$P1 \leftarrow F_{(3)}(N1)$$
$$N2 \leftarrow F_{(2)}(N1)$$
$$N1 \leftarrow F_{(1)}(N1)$$

ASÍ, ES CLARO QUE $\mathcal{P}$ CUMPLE LAS CONDICIONES DE (2) PUES:

- PARA CADA $x \in \omega$, $\mathcal{P}$ SE DETIENE PARTIENDO DESDE EL ESTADO $\|x\|$ Y LLEGA A UN ESTADO DE LA FORMA $((F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), y, \ldots), (F_{(3)}(x), \beta_1, \ldots))$ DONDE $(F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), F_{(3)}(x)) = F(x) \in S$.

- PARA CADA $(x,y,\alpha) \in S$, $\exists t \in \omega$ TQ $F(t) = (x,y,\alpha) = (F_{(1)}(t), F_{(2)}(t), F_{(3)}(t))$ LUEGO $\mathcal{P}$ SE DETIENE PARTIENDO DE $\|t\|$ Y LLEGANDO A UN ESTADO DE LA FORMA $((x, y, z, \ldots), (\alpha, \beta_1, \ldots))$.

($\Leftarrow$) SEA $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ UN PROGRAMA QUE CUMPLE LAS CONDICIONES DE (2)

DEFINIMOS LOS PROGRAMAS

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}\, N1 \leftarrow N1$$
$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}\, N1 \leftarrow N2$$
$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}\, P1 \leftarrow P1$$

ES CLARO QUE:
- $\mathcal{P}_1$ DEJA EN N1 EL VALOR QUE $\mathcal{P}$ DEJA EN N1
- $\mathcal{P}_2$ DEJA EN N1 EL VALOR QUE $\mathcal{P}$ DEJA EN N2
- $\mathcal{P}_3$ DEJA EN $P_1$ EL VALOR QUE $\mathcal{P}$ DEJA EN $P_1$

$\bigstar_1$

LUEGO, TENIENDO EN CUENTA QUE

$\Psi_{\mathcal{E}}^{1,0,\#}(x)$ = VALOR QUE REPRESENTA N1 TRAS CORRER $\mathcal{E}$ PARTIENDO DESDE EL ESTADO $\|x\|$

Y $\Psi_{\mathcal{E}}^{1,0,*}(x)$ = VALOR QUE REPRESENTA P1 TRAS CORRER $\mathcal{E}$ PARTIENDO DESDE EL ESTADO $\|x\|$

$\bigstar_2$

PODEMOS FORMAR $F : \omega \to \omega^2 \times \Sigma^*$ DADA POR

$$F = [\Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#}, \Psi_{\mathcal{P}_2}^{1,0,\#}, \Psi_{\mathcal{P}_3}^{1,0,*}]$$

DONDE CADA $F_{(i)}$ ES CLARAMENTE $\Sigma$-COMPUTABLE CON DOMINIO $\omega$. Y $D_F = \omega$

VEAMOS

$I_F \subseteq S$

$I_F \subseteq S$

$\forall t \in \omega$, por (2a) sabemos que $P$ partiendo de $\|t\|$ llega a un estado de la forma $((x,y,z,\dots),(\alpha,\beta,\dots))$ donde $(x,y,\alpha) \in S$ y como $F = [\Psi_{P_1}^{1,0,\#}, \Psi_{P_2}^{1,0,\#}, \Psi_{P_3}^{1,0,*}]$ y teniendo en cuenta $\bigstar_1$ y $\bigstar_2$, entonces $F(x) = (x,y,\alpha) \in S$.

$S \subseteq I_F$

Sea $(x,y,\alpha) \in S$. Sabemos (2b) que $\exists t \in \omega$ que cumple $P$ partiendo del estado $\|t\|$ llega a un estado de la forma $((x,y,z,\dots),(\alpha,\beta,\dots))$ entonces por $\bigstar_1$ y $\bigstar_2$, $(x,y,\alpha) = (F_{(1)}(t), F_{(2)}(t), F_{(3)}(t)) = F(t) \in I_F$.

Luego $I_F = S$ y $\therefore$ $S$ es $\Sigma$-enumerable. ■

**Lema** (Lema de la sumatoria) Sea $\Sigma$ un alfabeto finito. Si $f : \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \to \omega$ es $\Sigma$-p.r. donde cada $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ son no vacíos entonces la función

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$$

es $\Sigma$-p.r.

Dem:

Sea $G = \lambda tx\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$

Ya que

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i,\vec{x},\vec{\alpha})\right] = G \circ \left[p_2^{n+2,m}, p_1^{n+2,m}, p_3^{n+2,m}, \dots, p_{n+m+2}^{n+2,m}\right]$$

Basta con probar que $G$ es $\Sigma$-p.r.

Notar que

$$G(0,x,\vec{x},\vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ f(0,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$$G(t+1,x,\vec{x},\vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ G(t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) + f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases}$$

Observar que si definimos

$$h: \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \to \omega$$

$$(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g: \omega \times \omega \times \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \to \omega$$

$$(A, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases}$$

TENEMOS QUE $G = R(h, g)$ Y SOLO RESTA PROBAR QUE $h$ Y $g$ SON $\Sigma$-P.R.

SEAN.

$$D_1 = \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x > 0\}$$

$$D_2 = \{(x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x = 0\}$$

$$H_1 = \{(A, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times \omega \times \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x > t+1\}$$

$$H_2 = \{(A, t, x, \vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega \times \omega \times \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m : x \leq t+1\}$$

NOTAR QUE

$$h = C_0^{n+1,m}|_{D_1} \cup f|_{D_2}$$

$$g = C_0^{n+3,m}|_{H_1} \cup \lambda_{A t x \vec{x} \vec{\alpha}}[A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})]|_{H_2}$$

COMO $f \in \Sigma$-P.R Y

$$\lambda_{A t x \vec{x} \vec{\alpha}}[A + f(t+1, \vec{x}, \vec{\alpha})] = \lambda_{xy}[x+y] \circ \left[p_1^{n+3,m}, f \circ \left[Suc \circ p_2^{n+3,m}, p_4^{n+3,m}, \dots, p_{n+3+m}^{n+3,m}\right]\right]$$

ES $\Sigma$-P.R, NOS RESTA VER QUE $D_1, D_2, H_1$ Y $H_2$ SON CONJUNTOS $\Sigma$-P.R.

COMO $f \in \Sigma$-P.R, $D_f = \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \in \Sigma$-P.R $\therefore$ CADA $S_i$ Y CADA $L_i$ SON $\Sigma$-P.R.

LUEGO

$$\chi_{D_1}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} = \lambda_{x \vec{x} \vec{\alpha}}\left[\chi_{D_f}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda_x[x > 0] \circ p_1^{n+1,m}\right]$$

$$\chi_{D_2}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} = \lambda_{x \vec{x} \vec{\alpha}}\left[\chi_{D_f}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda_x[x = 0] \circ p_1^{n+1,m}\right]$$

COMO $R = \omega^3 \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \in \Sigma$-P.R:

$$\chi_{H_1}^{\omega^{n+3} \times \Sigma^{*m}} = \lambda_{A t x \vec{x} \vec{\alpha}}\left[\chi_R^{\omega^{n+3} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda_{xy}[x > y] \circ \left[p_3^{n+3,m}, Suc \circ p_2^{n+3,m}\right]\right]$$

$$\chi_{H_2}^{\omega^{n+3} \times \Sigma^{*m}} = \lambda_{A t x \vec{x} \vec{\alpha}}\left[\chi_R^{\omega^{n+3} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda_{xy}[x \leq y] \circ \left[p_3^{n+3,m}, Suc \circ p_2^{n+3,m}\right]\right]$$

$\ldots_2 \quad \lambda_{A t x \tilde{x} \tilde{\alpha}} [\, x_R \quad \ldots \lambda_{xy} [\ldots]_3 \ldots ]$

$\therefore$ $D_1, D_2, H_1$ y $H_2$ son $\Sigma$-P.R. ∎

## COMBO 5

<u>Lema</u> Sea $\Sigma = \{@, \%, !\}$ Sea

$$f : S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \to \omega$$

con $S_1, S_2 \subseteq \omega$ y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ conjuntos no vacíos y sea $\mathcal{G}$ una familia $\Sigma$-indexada de funciones tq

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \times \Sigma^* \to \omega$$

para cada $a \in \Sigma$. Si $f$ y cada $\mathcal{G}_a$ son $\Sigma$ efectivamente computables, entonces $R(f, \mathcal{G})$ lo es.

<u>Dem</u> Sea $\mathbb{P}_f$ un procedimiento efectivo que computa a $f$
Sean $\mathbb{P}_@$, $\mathbb{P}_\%$ y $\mathbb{P}_!$ procedimientos efectivos que computan a $\mathcal{G}_@, \mathcal{G}_\%$ y $\mathcal{G}_!$ respectivamente.
Sea $\mathbb{P}$ el procedimiento efectivo con datos de entrada en $\omega \times \omega \times \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^*$ de la forma $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dado por

Etapa 1: correr $\mathbb{P}_f$ con dato de entrada $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$
si se obtiene, guardar el resultado en $A$.

Etapa 2: Asignar $B \leftarrow \varepsilon$

Etapa 3. Si $\alpha_3$ es de la forma $@\alpha_3'$, correr $\mathbb{P}_@$ con datos de entrada $(A, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, B)$ y guardar el resultado en $A$. Asignar $B \leftarrow B@$ y $\alpha_3 \leftarrow \alpha_3'$
si no, pasar a la etapa sig.

Etapa 4: Si $\alpha_3$ es de la forma $\%\alpha_3'$, correr $\mathbb{P}_\%$ con datos

SINO, PASAR A LA ETAPA 5.

ETAPA 4: SI $\alpha_3$ ES DE LA FORMA $\%.\alpha_3'$, CORRER $\mathbb{P}_{\%}$ CON DATOS DE ENTRADA $(A, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, B)$ Y GUARDAR SU RESULTADO EN $A$. ASIGNAR $B \leftarrow B\%$ Y $\alpha_3 = \alpha_3'$.
SINO, PASAR A LA ETAPA 5|6.

ETAPA 5: SI $\alpha_3$ ES DE LA FORMA $!\alpha_3'$, CORRER $\mathbb{P}_!$ CON DATOS DE ENTRADA $(A, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, B)$ Y GUARDAR SU RESULTADO EN $A$. ASIGNAR $B \leftarrow B!$ Y $\alpha_3 = \alpha_3'$!
SINO, PASAR A LA ETAPA 5|6.

ETAPA 6: SI $\alpha_3 = \varepsilon$, DETENERSE Y DAR COMO RESULTADO $A$.
SINO, IR A ETAPA 3.

ASÍ, ES CLARO QUE $\mathbb{P}$ COMPUTA A $R(f,g)$ PUES PARA UN VALOR EN $D_{R(f,g)}$ $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, SI $\alpha_3 = \varepsilon$, $\mathbb{P}$ COMPUTARÁ $f(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$
Y SI $\alpha_3$ ES DE LA FORMA $a_{i_1} \dots a_{i_k}$ PARA $k \geq 1$ Y $i_j \in \{1,2,3\}$ DONDE $a_1 = @$, $a_2 = \%$ Y $a_3 = !$
ENTONCES $\mathbb{P}$ COMPUTARÁ

$$g_{a_{i_k}}(\dots g_{a_{i_1}}(f(x_1,x_2,\alpha_1,\alpha_2), x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \varepsilon)\dots), x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, a_{i_1}\dots a_{i_{k-1}})$$

$$= R(f,g)(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, a_{i_1}\dots a_{i_k})$$

Y EN EL CASO DONDE $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) \notin S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2$, $\mathbb{P}$ NO SE DETENDRÁ. ■

LEMA (LEMA DE CUANTIFICACIÓN ACOTADA) SEA $\Sigma$ UN ALFABETO FINITO,
SEA $P: S \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \to \omega$ UN PREDICADO $\Sigma$-P.R CON $S, S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ Y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$
NO VACÍOS. SUPONGAMOS $\bar{S} \subseteq S$ ES $\Sigma$-P.R. ENTONCES

$$\lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\, P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

ES $\Sigma$-P.R.

DEM SEA $\bar{P} = P|_{\bar{S} \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m} \cup C_1^{n+1,m}|_{(\omega - \bar{S}) \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m}$

NOTAR QUE $\bar{P}$ TIENE DOMINIO $\omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ Y ES $\Sigma$-P.R
LUEGO

$$\lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\, P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = \lambda_{xy\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \circ \left[C_0^{n+1,m}, p_1^{n+1,m}, \dots, p_{n+1+m}^{n+1,m}\right]$$

[illegible]

$\lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}[(\forall t \in S)_{t\leq x} P(t,\vec{x},\vec{\alpha})] = \lambda_{xy\vec{x}\vec{\alpha}}[\prod_{t=x} P(t,\vec{x},\vec{\alpha})] \circ [C_0, p_1, \ldots, p_{n+1+m}]$

el lema "Si $f: \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$ es $\Sigma$-p.r. entonces $\lambda_{xy\vec{x}\vec{\alpha}}[\prod_{t=x}^{t=y} f(t,\vec{x},\vec{\alpha})]$ es $\Sigma$-p.r."
$\emptyset \neq S_i \subseteq \omega \quad \emptyset \neq L_i \subseteq \Sigma^*$

implica que $\lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}[(\forall t \in S)_{t\leq x} P(t,\vec{x},\vec{\alpha})]$ es $\Sigma$-p.r.

## COMBO 6

Lema ($\Sigma$-efectivamente computable implica $\Sigma$-efectivamente enumerable) Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es $\Sigma$-efectivamente computable, entonces $S$ es $\Sigma$-efectivamente enumerable

Dem

Si $S = \emptyset$, es enumerable es $\Sigma$-e.e. Supongamos $S \neq \emptyset$.

Sea $\mathbb{P}_S$ un procedimiento efectivo que computa la función $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$

Sea $(\vec{x},\vec{\alpha})$ un elemento fijo de $S$.

Sea $\mathbb{P}$ el siguiente procedimiento efectivo con datos de entrada $x \in \omega$

Etapa 1: Si $x = 0$, detenerse y devolver $(\vec{x},\vec{\alpha})$

Etapa 2: $y_1 \leftarrow (x)_1$
$\vdots$
$y_n \leftarrow (x)_n$
$\beta_1 \leftarrow *((x)_{n+1})$
$\vdots$
$\beta_m \leftarrow *((x)_{n+m})$

Etapa 3 correr el procedimiento $\mathbb{P}_S$ con dato de entrada $(y_1, \ldots, y_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$
Si da como salida 1, detenerse y devolver $(y_1, \ldots, y_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$
Si da como salida 0, detenerse y devolver $(\vec{x},\vec{\alpha})$

Luego es claro que $\mathbb{P}$ enumera a $S$ pues

- Se detiene $\forall x \in \omega$

- LA ETAPA 2 GENERA TODOS LOS VALORES POSIBLES DE $(y_1,\dots,y_n,\beta_1,\dots,\beta_m) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ Y LA ETAPA 3 LOS DEVUELVE CUANDO ESTÁN EN $S$

$\therefore$ ESTÁ GARANTIZADO QUE TODOS LOS DATOS DE SALIDA ESTÁN EN $S$ Y QUE TODOS LOS DATOS DE $S$ TIENEN UN $x \in \omega$ TQ CORRER $\mathbb{P}$ PARTIENDO DE $x$ LO DEVUELVE. ∎

TEOREMA (CARACTERIZACIÓN DE CONJUNTOS $\Sigma$-RE) DADO $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, SON EQUIVALENTES:

1. $S$ ES $\Sigma$-RECURSIVAMENTE NUMERABLE
2. $S = I_F$ PARA ALGUNA $F: D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ TQ CADA $F_{(i)}$ ES $\Sigma$-RECURSIVA
3. $S = D_F$ PARA ALGUNA FUNCIÓN $\Sigma$-RECURSIVA $F$

(HACEMOS $2 \Rightarrow 3$ $K = l = 1$ Y $n = m = 2$)

DEM

$(2 \Rightarrow 3)$ SUP. $S = I_F$ PARA ALGUNA $F: D_F \subseteq \omega \times \Sigma^* \to \omega^2 \times \Sigma^{*2}$ TQ CADA $F_{(i)}$ ES $\Sigma$-RECURSIVA

PARA CADA $i = 1,2,3,4$, SEA $\mathcal{P}_i$ UN PROGRAMA QUE COMPUTA A $F_{(i)}$ Y SEA $\leq$ UN ORDEN TOTAL SOBRE $\Sigma$.

DEFINIMOS $H_i = \lambda_{tx_1\alpha_1}[\neg Halt^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$

NOTAR QUE $D_{H_i} = \omega^2 \times \Sigma^*$ Y QUE $H_i$ ES $\Sigma$-MIXTA. COMO $Halt^{1,1}$ ES $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-P.R, $H_i$ ES $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-P.R Y POR INDEPENDENCIA DEL ALFABETO, $H_i$ ES $\Sigma$-P.R

EL SEGUNDO MANANTIAL NOS DICE QUE HAY UN MACRO

$$[\text{IF } H_i(V1, V2, W1) \text{ GOTO } A1]$$

QUE ESCRIBIMOS DE LA FORMA

$$[\text{IF } \neg Halt^{1,1}(V1, V2, W1, \mathcal{P}_i) \text{ GOTO } A1]$$

PARA $i = 1,2$, DEFINIMOS

$$E_i = \neg\lambda_{xy}[x = y] \circ [p_1^{3,1}, E_{\#1}^{1,1} \circ [p_2^{3,1}, p_3^{3,1}, p_4^{3,1}, C_{\mathcal{P}_i}^{3,1}]] = \lambda_{xtx\alpha_1}[x \neq E_{\#1}^{1,1}(t, x, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$$

Y PARA $i = 3,4$ DEFINIMOS

$$E_i = \neg\lambda_{\alpha\beta}[\alpha = \beta] \circ [p_4^{2,2}, E_{*1}^{1,1} \circ [p_1^{2,2}, p_2^{2,2}, p_3^{2,2}, C_{\mathcal{P}_i}^{2,2}]] = \lambda_{tx\alpha_1\alpha}[\alpha \neq E_{*1}^{1,1}(t, x, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$$

DONDE ES CLARO QUE CADA $E_i$ ES $\Sigma$-P.R LUEGO

PARA $i = 1,2$ HAY UN MACRO

PARA $i=1,2$ HAY UN MACRO

$$[\text{IF } E_i(V2,V3,V1,W1) \text{ GOTO } A1]$$

PARA $i=3,4$ HAY UN MACRO

$$[\text{IF } E_i(V2,V1,W1,W2) \text{ GOTO } A1]$$

QUE ESCRIBIREMOS DE FORMA MÁS INTUITIVA (P.EJ. PARA $i=1$, $[\text{IF } V2 \neq E_{\#,1}^{1,1}(V3,V1,W1,\mathcal{P}_1) \text{ GOTO } A1]$)

Y COMO $\lambda x_i[(x)_i]$ Y $*^{S}$ SON $\Sigma$-P.R, HAY MACROS

$$[V2 \leftarrow (V1)_1]$$

$$[W1 \leftarrow *^{S}((V1)_3)]$$

$$[V2 \leftarrow (V1)_2]$$

SEA $\mathcal{P}$ EL SIGUIENTE PROGRAMA DE $S^{\Sigma}$

$$
\begin{array}{ll}
L1 & N20 \leftarrow N20+1 \\
 & [N10 \leftarrow (N20)_1] \\
 & [N3 \leftarrow (N20)_2] \\
 & [P3 \leftarrow *^{S}((N20)_3)] \\
 & [\text{IF } \neg HALT^{1,1}(N10,N3,P3,\mathcal{P}_1) \text{ GOTO } L1] \\
 & [\text{IF } \neg HALT^{1,1}(N10,N3,P3,\mathcal{P}_2) \text{ GOTO } L1] \\
 & [\text{IF } \neg HALT^{1,1}(N10,N3,P3,\mathcal{P}_3) \text{ GOTO } L1] \\
 & [\text{IF } \neg HALT^{1,1}(N10,N3,P3,\mathcal{P}_4) \text{ GOTO } L1] \\
 & [\text{IF } N1 \neq E_{\#1}^{1,1}(N10,N3,P3,\mathcal{P}_1) \text{ GOTO } L1] \\
 & [\text{IF } N2 \neq E_{\#1}^{1,1}(N10,N3,P3,\mathcal{P}_2) \text{ GOTO } L1] \\
 & [\text{IF } P1 \neq E_{*1}^{1,1}(N10,N3,P3,\mathcal{P}_3) \text{ GOTO } L1] \\
 & [\text{IF } P2 \neq E_{*1}^{1,1}(N10,N3,P3,\mathcal{P}_4) \text{ GOTO } L1]
\end{array}
$$

ES CLARO QUE $\mathcal{P}$ COMPUTA $p_1^{2,2}|_S$ PUES:

- SI $z$ ES EL VALOR DE $N20$ Y $t, x_1, \alpha_1$ SON LOS VALORES DE $N10, N3$ Y $P3$ Y $(x,y,\alpha,\beta)$ SON LOS VALORES DE $N1,N2,P1,P2$, SE PUEDE VER QUE DADO UN DATO DE ENTRADA $(x,y,\alpha,\beta) \in \omega^2 \times \Sigma^{*2}$,
- SI $(x,y,\alpha,\beta) \in S$, $\mathcal{P}$ INCREMENTA EL VALOR DE $z$ HASTA ENCONTRAR UNO TAL

DADO UN DATO DE ENTRADA $(x, y, \alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma^{*2}$,

• SI $(x, y, \alpha, \beta) \in S$, $P$ INCREMENTA EL VALOR DE $Z$ HASTA ENCONTRAR UNO TAL QUE $P_1, P_2, P_3$ Y $P_4$ SE DETIENEN LUEGO DE $t$ PASOS PARTIENDO DEL ESTADO $\|x_1, \alpha_1\|$ LLEGANDO A ESTADOS DE LA FORMA

$((x, \ldots), (\ldots))$
$((y, \ldots), (\ldots))$
$((\ldots), (\alpha, \ldots))$
$((\ldots), (\beta, \ldots))$

RESPECTIVAMENTE.

• SI $(x, y, \alpha, \beta) \notin S$, $P$ INCREMENTA $Z$ DE MANERA INDEFINIDA PUES AL MENOS UNO DE LOS MACROS ASOCIADOS A LAS FUNCIONES $H_i$ SIEMPRE REALIZARÁ EL SALTO A L1

LUEGO COMO $p_1^{2,2}|_S$ ES $\Sigma$-COMPUTABLE, ENTONCES ES $\Sigma$-RECURSIVA Y

$S = D_{p_1^{2,2}|_S}$ ■

COMBO 7 (LEMA DE MINIMIZACIÓN ACOTADA) SEAN $n, m > 0$. SEA $P: D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ UN PREDICADO $\Sigma$-P.R. ENTONCES

a) $M(P)$ ES $\Sigma$-RECURSIVA.

b) SI HAY UNA FUNCIÓN $\Sigma$-P.R. $f: \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ TQ

$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}) \; \forall (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$

ENTONCES $M(P)$ ES $\Sigma$-P.R.

DEM

SEA $P: D_P \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*n} \to \omega$ UN PREDICADO $\Sigma$-P.R.

SEA $\bar{P} = P \cup C_0^{n+1,m}|_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$

SEA $\bar{P} = P \cup C_0^{n+1,m}|_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P}$

ES CLARO QUE $\bar{P}$ ES $\Sigma$-P.R PUES $P$, $C_0^{n+1,m}$ Y $(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P$ LO SON ($\chi^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}}_{(\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}) - D_P} = \neg \chi^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}}_{D_P}$ Y $D_P$ ES $\Sigma$-P.R POR SER DOMINIO DE UNA FUNCIÓN $\Sigma$-P.R.)

NOTAR QUE PARA CADA $(\vec{x}, \vec{\alpha})$,

$$\{t \in \omega : P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\} = \{t \in \omega \mid \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1\}$$

LO CUAL NOS DICE QUE $D_{M(P)} = D_{M(\bar{P})}$ Y QUE $M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$ PARA CADA $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)}$, POR LO CUAL $M(P) = M(\bar{P})$

a) SEA $K$ TQ $\bar{P} \in PR_K^{\Sigma}$, LUEGO COMO $\bar{P}$ ES $\Sigma$-TOTAL Y $\bar{P} \in PR_K^{\Sigma} \subseteq R_K^{\Sigma}$ ENTONCES $M(\bar{P}) \in R_{K+1}^{\Sigma}$ Y $\therefore$ $M(P)$ ES $\Sigma$-RECURSIVA.

b) VEAMOS QUE $\chi^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}_{D_{M(\bar{P})}}$ ES UN CONJUNTO $\Sigma$-P.R.

$$\chi^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}_{D_{M(\bar{P})}} = \lambda_{\vec{x}\vec{\alpha}} \left[ (\exists t \in \omega)_{t \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha})} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right]$$

$$= \lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}} \left[ (\exists t \in \omega)_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ \left[ f, p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m} \right]$$

ES $\Sigma$-P.R POR LEMA DE CUANTIFICACIÓN ACOTADA.

SEA

$$P_1 = \lambda_{t\vec{x}\vec{\alpha}} \left[ \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \wedge (\forall j \in \omega)_{j \leq t} \underbrace{j = t \vee \neg \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})}_{P_2(j, t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \text{ CLARAMENTE } \Sigma\text{-P.R}} \right]$$

NOTAR QUE $P_1$ ES $\Sigma$-TOTAL

COMO $\lambda_{t\vec{x}\vec{\alpha}} \left[ (\forall j \in \omega)_{j \leq t} P_2(j, t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] = \lambda_{xt\vec{x}\vec{\alpha}} \left[ (\forall j \in \omega)_{j \leq x} P_2(j, t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \circ \left[ p_1^{n+1,m}, p_1^{n+1,m}, p_2^{n+1,m}, p_3^{n+1,m}, \ldots, p_{n+1+m}^{n+1,m} \right]$

ENTONCES $P_1$ ES $\Sigma$-P.R.

ADEMÁS NOTAR QUE PARA CADA $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$ SE TIENE QUE

$$P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(\bar{P})} \text{ Y } t = M(\bar{P})(\vec{x}, \vec{\alpha})$$

POR LO TANTO

$$M(\bar{P}) = \lambda_{\vec{x}\vec{\alpha}} \left[ \prod_{t=0}^{t = f(\vec{x}, \vec{\alpha})} {}^{t} P_1(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \right] \Big|_{D_{M(\bar{P})}}$$

$$M(p) = \lambda_{\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\prod_{t=0} t^{p_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right]\Big|_{D_{M(\bar{p})}}$$

Y sólo nos resta probar que $F = \lambda_{\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\prod_{t=0}^{t=s(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{p_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \in \Sigma\text{-p.r}$ para que $M(p)$ lo sea.

Pero

$$F = \lambda_{\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\prod_{t=0}^{t=s(\vec{x},\vec{\alpha})} t^{p_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right] = \lambda_{xy\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\prod_{t=x}^{t=y} t^{p_1(t,\vec{x},\vec{\alpha})}\right] \circ \left[C_0^{n,m}, s, p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}\right]$$

Y el lema de la sumatoria nos dice que $F$ es $\Sigma$-p.r $\therefore M(p)$ lo es ■

**Lema** Supongamos $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es $\Sigma$-recursiva y $S \subseteq D_f$ $\Sigma$-recursivamente enumerable. Entonces $f|_S$ lo es.

(Hacer solo caso $S \neq \emptyset$, $n=m=1$ y $O = \Sigma^*$)

Dem

Como $f$ es $\Sigma$-recursiva, el segundo manantial de macros nos dice que hay un macro

$$[W2 \leftarrow f(V1, W1)]$$

Sea $F^S$ una función que enumera a $S$, como cada $F^S_{(i)}$ es $\Sigma$-recursiva, tenemos macros

$$[V2 \leftarrow F^S_{(1)}(V1)]$$
$$[W1 \leftarrow F^S_{(2)}(V1)]$$

Como $\lambda_{xy}[x \neq y]$ y $\lambda_{\alpha\beta}[\alpha \neq \beta]$ son $\Sigma$-R, tienen macros asociados que usaremos de la forma

[IF V1 ≠ V2 GOTO A1]    [IF W1 ≠ W2 GOTO A1]

Luego es claro que el siguiente programa computa $f|_S$ $\therefore$ es computable $\Rightarrow f|_S$ es $\Sigma$-recursiva.

```
L2 [N2 ← F^S_(1)(N20)]
   [P2 ← F^S_(2)(N20)]
   [IF N1 ≠ N2 GOTO L1]
```

$[IF\ N1 \neq N2\ \ GOTO\ L1]$

$[IF\ P1 \neq P2\ \ GOTO\ L1]$

$[P1 \leftarrow \mathcal{F}(N1, P1)]$

GOTO L3

L1 $N20 \leftarrow N20+1$

GOTO L2

L3 SKIP ■

COMBO 8

LEMA Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^{\Sigma}$ no es $\Sigma$-recursivo

DEM Supongamos que $AutoHalt^{\Sigma}$ es $\Sigma$-recursivo, entonces por el segundo manantial tenemos que hay un macro

$[IF\ AutoHalt^{\Sigma}(W1)\ GOTO\ A1]$

Sea $\mathcal{P}_0$ el programa de $S^{\Sigma}$

$L1\ [IF\ AutoHalt^{\Sigma}(P1)\ GOTO\ L1]$

Notemos que

$\mathcal{P}_0$ termina partiendo desde $\|\mathcal{P}_0\| \Leftrightarrow AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}_0) = 0$

Lo cual es una contradicción con la definición de $AutoHalt^{\Sigma}$. ■

TEOREMA Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$, entonces $AutoHalt^{\Sigma}$ no es $\Sigma$-efectivamente computable. Es decir no hay ningún procedimiento efectivo que decida si un programa de $S^{\Sigma}$ termina partiendo de sí mismo.

DEM

Si $AutoHalt^{\Sigma}$ fuera $\Sigma$-efectivamente computable, la Tesis de Church diría que es $\Sigma$-recursivo, contradiciendo el lema anterior ■

**LEMA** Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces

$$A = \{\mathcal{P} \in Pro^{\Sigma} : AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 1\}$$

es $\Sigma$-recursivamente enumerable y no es $\Sigma$-recursivo. Más aún el conjunto

$$N = \{\mathcal{P} \in Pro^{\Sigma} : AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 0\}$$

no es $\Sigma$-recursivamente enumerable.

Dem

Sea $P = \lambda t\mathcal{P}[Halt^{0,1}(t,\mathcal{P},\mathcal{P})]$. Notar que $P$ es $\Sigma$-p.r. por lo que $M(P)$ es $\Sigma$-recursiva. Además, $D_{M(P)} = \{\mathcal{P} \in \Sigma^{*} : (\exists t \in \omega)\, Halt^{0,1}(t,\mathcal{P},\mathcal{P})\} = A$

lo cual nos dice que $A$ es $\Sigma$-recursivamente enumerable.

Supongamos que $N$ es $\Sigma$-r.e. Entonces la función $C_0^{0,1}|_N$ es $\Sigma$-recursiva ya que $C_0^{0,1}$ lo es. Como $A$ es $\Sigma$-r.e., $C_1^{0,1}|_A$ es $\Sigma$-recursiva

pero

$$AutoHalt^{\Sigma} = C_1^{0,1}|_A \cup C_0^{0,1}|_N$$

y el lema de división por casos nos dice que $AutoHalt^{\Sigma}$ es $\Sigma$-recursivo, contradiciendo el primer lema del combo. Por lo tanto $N$ no es $\Sigma$-r.e.

Finalmente, supongamos que $A$ es $\Sigma$-recursivo. Entonces

$$N = (\Sigma^{*} - A) \cap Pro^{\Sigma}$$

debería serlo, lo cual es absurdo $\therefore$ $A$ no es $\Sigma$-recursivo. ■

**TEOREMA** (Neumann vence a Gödel) Si $h$ es $\Sigma$-recursiva, entonces $h$ es $\Sigma$-computable

(en la inducción hacer solo el caso $h = M(P)$)

Dem Será una prueba por inducción en los conjuntos $R_k^{\Sigma}$

Caso base Veamos

$$R_0^{\Sigma} = \{C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}, Suc, Pred\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\} \cup \{p_i^{n,m} : 1 \leq i \leq n+m\}$$

y notar que

$$C_0^{0,0} = \Psi^{0,0,\#}_{N1 \leftarrow 0} \qquad C_\varepsilon^{0,0} = \Psi^{0,0,*}_{P1 \leftarrow \varepsilon} \qquad Suc = \Psi^{1,0,\#}_{N1 \leftarrow N1+1}$$

$$d_a = \Psi^{0,1,*}_{P1 \leftarrow P1.a} \quad \forall a \in \Sigma$$

$d_a = \Psi_{P1 \leftarrow P1.a} \quad \forall a \in \Sigma$

$p_i^{n,m} = \Psi^{n,m,\#}_{N1 \leftarrow N\bar{i}} \quad i=1,\dots,n \qquad p_i^{n,m} = \Psi^{n,m,*}_{P1 \leftarrow P\overline{i-n}} \quad i=n+1,\dots,m$

Y si $\mathcal{P}$ es el programa

L2 IF N1 ≠ 0 GOTO L1
GOTO L2
L1 N1 ← N1 ∸ 1

entonces $p_{1,0,0} = \Psi^{1,0,\#}_{\mathcal{P}}$

$\therefore \forall h \in R_0^{\Sigma}$, $h$ es $\Sigma$-computable.

Supongamos ahora que $\forall f \in R_K^{\Sigma}$, $f$ es $\Sigma$-computable y veamos que vale para $h \in R_{K+1}^{\Sigma} - R_K^{\Sigma}$. Hay varios casos, pero sólo haremos $h = M(P)$ donde $P: \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es un predicado de $R_K^{\Sigma}$.

Por hipótesis inductiva, $P$ es $\Sigma$-computable y por el primer manantial tenemos un macro

[IF $P(V1,\dots,V\bar{n},V\overline{n+1},W1,\dots,W\bar{m})$ GOTO A1]

Sea $\mathcal{P}_h$ el siguiente programa

L2 [IF $P(N\overline{n+1},N1,\dots,N\bar{n},P1,\dots,P\bar{m})$ GOTO L1]
N$\overline{n+1}$ ← N$\overline{n+1}$ + 1
GOTO L2
L1 N1 ← N$\overline{n+1}$

Es claro que $\mathcal{P}_h$ computa a $h = M(P)$ ∎

COMBO 9

Lema (lema de división por casos para funciones $\Sigma$-recursivas)
Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ $i=1,\dots,K$ son funciones $\Sigma$-recursivas tq $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ $\forall i \neq j$. Entonces la función $f_1 \cup \dots \cup f_K$ es $\Sigma$-recursiva.

$D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ $\forall i \neq j$. Entonces la función $f_1 \cup \dots \cup f_k$ es $\Sigma$-recursiva.

(Hacer el caso $k=2$, $n=m=1$ y $O=\omega$)

Dem: Sean $f_1 : D_{f_1} \subseteq \omega \times \Sigma^* \to \omega$

$$f_2 : D_{f_2} \subseteq \omega \times \Sigma^* \to \omega$$

funciones $\Sigma$-recursivas tales que $D_{f_1} \cap D_{f_2} = \emptyset$

Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ programas que computan a $f_1$ y $f_2$ respectivamente

Para $i=1,2$, definimos

$$H_i = \lambda t x_1 \alpha_1 \left[ Halt^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i) \right]$$

Notar que $D_{H_i} = \omega^2 \times \Sigma^*$ y que $H_i$ es $\Sigma$-mixta. Además sabemos que $Halt^{1,1}$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR $\therefore$ $H_i$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-PR y por independencia del alfabeto, es $\Sigma$-PR. Luego por el segundo manantial de macros, sabemos que hay un macro

[IF $H_i$(V2, V1, W1) GOTO A1]

que escribiremos de la forma

[IF $HALT^{1,1}$(V2, V1, W1, $\mathcal{P}_i$) GOTO A1]

Como cada $f_i$ es $\Sigma$-recursiva, el segundo manantial nos dice que hay macros

[V2 ← $f_1$(V1, W1)]
[V2 ← $f_2$(V1, W1)]

Sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa

```
L3  N20 ← N20 + 1
    [IF HALT^{1,1}(N20, N1, P1, 𝒫1) GOTO L1]
    [IF HALT^{1,1}(N20, N1, P1, 𝒫2) GOTO L2]
    GOTO L3
L1  [N1 ← f1(N1, P1)]
    GOTO L4
L2  [N1 ← f2(N1, P1)]
L4  SKIP
```

Es claro que $\mathcal{P}$ computa $f_1 \cup f_2$ $\therefore$ $f_1 \cup f_2$ es $\Sigma$-recursiva ■

Teorema (conexión Gödel a Neumann) Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es $\Sigma$-computable, TEOREMA (GODEL VENCE A NEUMANN) Si $f: D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es $\Sigma$-computable, entonces $f$ es $\Sigma$-recursiva.

DEM Sea $P_0$ un programa que compute a $f$. Veamos que $f$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva

Notar que

$$f = E_{\#1}^{n,m} \circ \left[ T^{n,m} \circ \left[ p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}, C_{P_0}^{n,m} \right], p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}, C_{P_0}^{n,m} \right]$$

Indica que $f$ es $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-recursiva pues aquellas proyecciones son con respecto al alfabeto $(\Sigma \cup \Sigma_p)$. Entonces el teorema de independencia del alfabeto nos dice que $f$ es $\Sigma$-recursiva. ∎