**Combo 1.**

**Teorema** (Teorema del Filtro Primo). *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna distributivo y $F$ un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo $P$ tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$.*

**Lema** (Propiedades basicas de la consistencia). *Sea $(\Sigma, \tau)$ una teoria.*

(1) *Si $(\Sigma, \tau)$ es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia $\varphi$.*
(2) *Si $(\Sigma, \tau)$ es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.*
(3) *Si $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.*

1) <u>Teorema</u> Sea $(L, s, i)$ un reticulado terna distributivo y $F$ un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo $P$ tq $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$.

<u>Demostración</u>: Sea

$$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro}, x_0 \notin F_1 \text{ y } F \subseteq F_1\}$$

Notar que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset. Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene cota superior para usar el lema de Zorn (si $(P, \leq)$ es un poset y cada cadena de $(P, \leq)$ tiene cota sup., entonces $(P, \leq)$ tiene un maximal)

Sea $C$ una cadena. Si $C = \emptyset$, cualquier elem. de $\mathcal{F}$ es cota de $C$. Sup $C \neq \emptyset$

Sea
$$G = \{x : x \in F_1, \text{ para algún } F_1 \in C\}$$

Veamos que $G$ es un filtro. Es claro que $G \neq \emptyset$. Sean $x, y \in G$ y $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tq $x \in F_1$, $y \in F_2$. Si $F_1 \subseteq F_2$, como $F_2$ es un filtro, $x \, i \, y \in F_2 \subseteq G$. Si $F_2 \subseteq F_1$, $x \, i \, y \in F_1 \subseteq G$. Como $C$ es una cadena, tenemos que siempre se da $x \, i \, y \in G$. En forma análoga se prueba la propiedad restante por lo cual tenemos que $G$ es un filtro. Además $x_0 \notin G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$ es cota superior de $C$. Por el lema de Zorn, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal $P$. Veamos que $P$ es un filtro primo. Sup $x \, s \, y \in P$ pero $x, y \notin P$. Notar que $[P \cup \{x\})$ es un filtro el cual contiene propiamente a $P$. Ya que $P$ es maximal de $(\mathcal{F}, \subseteq)$, tenemos que $x_0 \in [P \cup \{x\})$. Análogamente tenemos $x_0 \in [P \cup \{y\})$. Ya que $x_0 \in [P \cup \{x\})$, hay elementos $p_1, \ldots, p_n \in P$ tq

$$x_0 \geq p_1 \, i \ldots i \, p_n \, i \, x$$

$$x_0 \geq p_1 ; \dots ; p_n ; x$$

pues $[P \cup \{x\}) = \{y \in L : y \geq x_1 ; \dots ; x_n$, para algunos $x_1, \dots, x_n \in P \cup \{x\}\}$

Si $p_1, \dots, p_n$ son tales $x_i$ igual el caso $x_0 \in [P \cup \{x\})$, $x_0 \geq p_1 ; \dots ; p_n \geq p_1 ; \dots ; p_n ; x$

Como $x_0 \in [P \cup \{y\})$ tenemos que hay $q_1, \dots, q_m \in P$ tq

$$x_0 \geq q_1 ; \dots ; q_m ; y$$

Llamamos $p$ al elemento $p_1 ; \dots ; p_n ; q_1 ; \dots ; q_m \in P$, luego es claro que

$$x_0 \geq p ; x$$

$$x_0 \geq p ; y$$

por lo que $x_0 \geq (p ; x) s (p ; y) = p ; (x s y) \in P$, absurdo pues $x_0 \notin P$ ∎

2) <u>LEMA</u> Sea $(\Sigma, \tau)$ una teoría.

(1) Si $(\Sigma, \tau)$ es inconsistente, $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ para toda sentencia $\varphi$.

(2) Si $(\Sigma, \tau)$ es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

(3) Si $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>

<u>LEMA AUX</u> Sea $(\Sigma, \tau)$ una teoría.

a) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$

b) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ y $R$ es una regla distinta de generalización y elección tal que $\varphi$ se deduce de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ por la regla $R$, $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

c) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ sii $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$

Veamos (1)

Sup $(\Sigma, \tau)$ inconsistente. Entonces hay una sentencia $\psi$ tq $(\Sigma, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$ por (b) de lema aux con absurdo, tenemos que toda $\varphi \in S^\tau$ se deduce de $(\psi \wedge \neg\psi)$ por la regla absurdo, por lo que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

Veamos (2) supongamos que no ocurre. Es decir sup $(\Sigma, \tau)$ consistente, $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ pero $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ inconsistente. Notar que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$ para alguna que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ inconsistente. Notemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$ para algún $\psi \in S^\tau$ pero (a) del lema aux nos diría que $(\Sigma, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$, ABSURDO.

Veamos (3) Sup $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$, $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ inconsistente. Notemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$ para algún $\psi \in S^\tau$. (c) del lema aux nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)$ y (b) nos dice para $R$=ABSURDO que $(\Sigma, \tau) \vdash \neg\varphi$ lo cual es ABSURDO.

∎

# Combo 2

martes, 25 de noviembre de 2025 14:54

**Combo 2.**

**Teorema** (Teorema de Dedekind). *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna. La relacion binaria definida por:*

$$x \leq y \text{ si y solo si } x \,\mathsf{s}\, y = y$$

*es un orden parcial sobre $L$ para el cual se cumple que:*

$$\sup(\{x, y\}) = x \,\mathsf{s}\, y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \,\mathsf{i}\, y$$

*cualesquiera sean $x, y \in L$*

**Lema.** *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$*

1) TEOREMA DE DEDEKIND. SEA $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ UN RETICULADO TERNA. LA RELACIÓN BINARIA DEFINIDA POR

$$x \leq y \quad \text{sii} \quad x \,\mathsf{s}\, y = y$$

ES UN ORDEN PARCIAL SOBRE $L$ PARA EL CUAL SE CUMPLE QUE

$$\sup(\{x, y\}) = x \,\mathsf{s}\, y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \,\mathsf{i}\, y$$

CUALESQUIERA SEAN $x, y \in L$.

DEMOSTRACIÓN

PRIMERO VEAMOS QUE $\leq$ ES UN ORDEN PARCIAL (I.E ES REFLEXIVO, TRANSITIVO Y ANTISIMÉTRICO)

a) REFLEXIVIDAD. DADO $x \in L$, TENEMOS LA PROPIEDAD DE QUE

$x \,\mathsf{s}\, x = x$ POR LO QUE $x \leq x$.

b) TRANSITIVIDAD. SUP $x \leq y$ E $y \leq z$. ESTO DICE $x \,\mathsf{s}\, y = y$ E $y \,\mathsf{s}\, z = z$

LUEGO $x \,\mathsf{s}\, z = x \,\mathsf{s}\, (y \,\mathsf{s}\, z) = (x \,\mathsf{s}\, y) \,\mathsf{s}\, z = y \,\mathsf{s}\, z = z$

POR LO QUE $x \leq z$.

c) ANTISIMETRÍA. SUP $x \leq y$ E $y \leq x$. ESTO NOS DICE QUE $x \,\mathsf{s}\, y = y$ E $y \,\mathsf{s}\, x = x$. UNA PROPIEDAD DE $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ NOS DICE QUE $x \,\mathsf{s}\, y = y \,\mathsf{s}\, x$, POR LO QUE $x = y$.

ASÍ

lo que $x=y$.

Así, tenemos que $(L,\leq)$ es un poset. Veamos que $\sup(\{x,y\}) = x \mathcal{S} y$

Veamos que $x \mathcal{S} y$ es cota sup. de $\{x,y\}$ i.e

$$x \leq x \mathcal{S} y$$
$$y \leq x \mathcal{S} y$$

Esto ocurre si y solo si

$$x \mathcal{S} (x \mathcal{S} y) = x \mathcal{S} y$$
$$y \mathcal{S} (x \mathcal{S} y) = x \mathcal{S} y$$

Pero por las propiedades $x \mathcal{S} x = x$, $x \mathcal{S} y = y \mathcal{S} x$, $x \mathcal{S} (y \mathcal{S} z) = (x \mathcal{S} y) \mathcal{S} z$ tenemos que

$$x \mathcal{S} (x \mathcal{S} y) = (x \mathcal{S} x) \mathcal{S} y = x \mathcal{S} y$$

y

$$y \mathcal{S} (x \mathcal{S} y) = y \mathcal{S} (y \mathcal{S} x) = (y \mathcal{S} y) \mathcal{S} x = y \mathcal{S} x = x \mathcal{S} y$$

y ahora veamos que es la <u>menor</u> cota superior. Sup $x, y \leq z$ i.e

$$x \mathcal{S} z = z$$
$$y \mathcal{S} z = z$$

Entonces

$$(x \mathcal{S} y) \mathcal{S} z = x \mathcal{S} (y \mathcal{S} z) = x \mathcal{S} z = z$$

Nos dice que $x \mathcal{S} y \leq z$. Así, tenemos $x \mathcal{S} y = \sup(\{x,y\})$.

Veamos que para todo $x, y \in L$, $x \leq y$ sii $x i y = x$

Sup $x \leq y$, entonces $x \mathcal{S} y = y$, por lo que

$$x i y = x i (x \mathcal{S} y) = x$$

↳ propiedad de res. teoría.

Sup $x i y = x$, entonces

$$x \mathcal{S} y = (x i y) \mathcal{S} y = y \mathcal{S} (x i y) = y \mathcal{S} (y i x) = y$$

Por lo que $x \leq y$.

Con esto es análogo demostrar que $\inf(\{x,y\}) = x i y$ ∎

2) <u>Lema</u> Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $A \models \varphi[\vec{a}]$ sii $A \models \varphi[\vec{b}]$.

DEMOSTRACIÓN: SERÁ POR INDUCCIÓN EN K MOSTRANDO QUE EL LEMA VALE PARA CADA $\varphi \in F_K^{\tau}$.

CASO K=0: SEA $\varphi \in F_0^{\tau}$. HAY 2 CASOS, EN AMBOS VALE QUE $a_i = b_i$ PARA CADA $i$ TQ $x_i$ OCURRE EN $\varphi$.

- $\varphi = (t \equiv s)$, $t, s \in T^{\tau}$ $\quad A \models \varphi[\vec{a}]$ sii $t^A[\vec{a}] = s^A[\vec{a}]$
- $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$ $r \in R_n$, $t_1, \dots, t_n \in T^{\tau}$. $A \models \varphi[\vec{a}]$ sii $(t_1^A[\vec{a}], \dots, t_n^A[\vec{a}]) \in r^A$

VEAMOS QUE SI $t \in T^{\tau}$ $\quad t^A[\vec{a}] = t^A[\vec{b}]$

TEO$_0$: $t \in T_0^{\tau}$

- $t = c \in C \Rightarrow t^A[\vec{a}] = c^A = t^A[\vec{b}]$
- $t = x_i \in Var \Rightarrow t^A[\vec{a}] = a_i = b_i = t^A[\vec{b}]$

TEO$_K \Rightarrow$ TEO$_{K+1}$: SEA $t \in T_{K+1}^{\tau} - T_K^{\tau}$. ENTONCES

$t = f(t_1, \dots, t_n)$ $\quad t_1, \dots, t_n \in T_{K-1}^{\tau}$

LUEGO $t^A[\vec{a}] = f^A(t_1^A[\vec{a}], \dots, t_n^A[\vec{a}]) \overset{\text{TEO}_K}{=} f^A(t_1^A[\vec{b}], \dots, t_n^A[\vec{b}]) = t^A[\vec{b}]$

ASÍ ES DIRECTO CONCLUIR QUE $A \models \varphi[\vec{a}]$ SII $A \models \varphi[\vec{b}]$

CASO K $\Rightarrow$ CASO K+1: SEA $\varphi \in F_{K+1}^{\tau} - F_K^{\tau}$. HAY VARIOS CASOS:

- $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F_K^{\tau}$. ES CLARO QUE $Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi)$ Y $Li(\varphi_2) \subseteq Li(\varphi)$

  EL CASO K NOS DICE QUE $A \models \varphi_i[\vec{a}]$ sii $A \models \varphi_i[\vec{b}]$ PARA $i = 1, 2$.

  ENTONCES TENEMOS QUE

$$A \models \varphi[\vec{a}]$$
$$\Updownarrow \rightarrow \text{DEF DE } \models$$
$$A \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } A \models \varphi_2[\vec{a}]$$
$$\Updownarrow \rightarrow \text{CASO K}$$
$$A \models \varphi_1[\vec{b}] \text{ y } A \models \varphi_2[\vec{b}]$$
$$\Updownarrow \rightarrow \text{DEF DE } \models$$
$$A \models \varphi[\vec{b}]$$

- LOS CASOS $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, $\varphi = \neg \varphi_1$ SON COMPLETAMENTE SIMILARES AL ANTERIOR
- $\varphi = \forall x_j \varphi_1$, $\varphi_1 \in F_K^{\tau}$. SUP $A \models \varphi[\vec{a}]$, ENTONCES POR DEF DE $\models$ TENEMOS QUE $A \models \varphi[\downarrow_j^a(\vec{a})]$, PARA CADA $a \in A$. NOTAR QUE $\downarrow_j^a(\vec{a}) = \downarrow_j^a(\vec{b})$ COINCIDEN EN TODA $x_i \in Li(\varphi_1)$ PUES $Li(\varphi_1) \subseteq Li(\varphi) \cup \{x_j\}$. ASÍ, EL CASO K NOS DICE QUE $A \models \varphi[\downarrow_j^a(\vec{b})]$, PARA CADA $a \in A$ LO CUAL POR DEF DE $\models$ ES QUE $A \models \varphi[\vec{b}]$

  LA PRUEBA DE QUE $A \models \varphi[\vec{b}] \Rightarrow A \models \varphi[\vec{a}]$ ES ANÁLOGA.
- EL CASO $\varphi = \exists x_j \varphi_1$ ES COMPLETAMENTE SIMILAR AL ANTERIOR.

- EL CASO $\varphi = \exists x_j \varphi_1$ ES COMPLETAMENTE SIMILAR AL ANTERIOR.

# Combo 3

martes, 25 de noviembre de 2025 14:54

**Combo 3.**

**Teorema** (Lectura unica de terminos). *Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes:*

(1) $t \in Var \cup \mathcal{C}$

(2) *Hay unicos* $n \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau$ *tales que* $t = f(t_1, ..., t_n)$.

**Lema.** *Supongamos que* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un isomorfismo. Sea* $\varphi \in F^\tau$. *Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, ...)] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), ...)]$$

*para cada* $(a_1, a_2, ...) \in A^{\mathbf{N}}$. *En particular* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *satisfacen las mismas sentencias de tipo* $\tau$.

**Teorema.** *Sea* $T = (\Sigma, \tau)$ *una teoria. Entonces* $(S^\tau / \dashv\vdash_T, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{\mathsf{c}^T}, 0^T, 1^T)$ *es un algebra de Boole.*

Pruebe solo el item (6).

1) TEOREMA (LECTURA ÚNICA DE TÉRMINOS) DADO $t \in T^\tau$ SE DA UNA DE LAS SIGUIENTES:

- $t \in Var \cup C$
- HAY ÚNICOS $n \geq 1$, $f \in F_n$, $t_1, -, t_n \in T^\tau$ TALES QUE $t = f(t_1, -, t_n)$

DEMOSTRACIÓN

EL LEMA DE MENÚ PARA TÉRMINOS NOS DICE QUE SI $t \in T^\tau_{K+1}$ SE DA QUE $t \in Var \cup C$ Ó $t = f(t_1, -, t_n)$, $n \geq 1$, $f \in F_n$ Y $t_1, -, t_n \in T^\tau_K$

ES CLARO QUE ESTAS OPCIONES SON EXCLUYENTES. VEAMOS LA UNICIDAD DE LA SEGUNDA. SUPONGAMOS QUE

$$t = f(t_1, -, t_n) = g(s_1, -, s_m)$$

CON $n, m \geq 1$, $f \in F_n$, $g \in F_m$ $t_1, -, t_n, s_1, -, s_m \in T^\tau$. COMO $f$ Y $g$ NO CONTIENEN PARÉNTESIS, TENEMOS $f = g$, POR LO QUE $n = m = a(f)$. AHORA NOTEMOS QUE $t_1$ ES TRAMO INICIAL DE $s_1$ Ó $s_1$ ES TRAMO INICIAL DE $t_1$. EL LEMA DE MORDISQUEO DE TÉRMINOS ENUNCIADO A CONTINUACIÓN NOS DICE QUE $t_1 = s_1$ Y CON EL MISMO ANÁLISIS SE LLEGA A QUE $t_2 = s_2, \dots, t_n = s_n$.

LEMA DE MORDISQUEO SI $s, t$ SON TÉRMINOS TALES QUE EXISTEN PALABRAS $x, y, z$ CON $y \neq \varepsilon$ TQ $s = xy$ Y $t = yz$ ENTONCES $x = z = \varepsilon$ Ó $s, t \in C$. EN PARTICULAR SI UN TÉRMINO ES TRAMO INICIAL O FINAL DE OTRO, SON IGUALES.

2) <u>LEMA</u> Sup. $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^{\tau}$. Entonces

$$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[F(\vec{a})]$$

para cada $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo $\tau$. (Obs: $F(\vec{a})$ denota $(F(a_1), F(a_2), \dots) \in B^{\mathbb{N}}$ para $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$)

<u>Demostración</u>

Definimos $TEO_k$ como el mismo enunciado, con $\varphi \in F_k^{\tau}$.

<u>$TEO_0$</u> Hay dos casos

• Caso $\varphi = (t \equiv s)$. Tenemos que

<u>LEMA</u> $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ homo, $t \in T^{\tau}$, $\vec{a} \in A^{\mathbb{N}}$

$$F(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) = t^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]$$

$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$

sii $F(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) = F(s^{\mathbf{A}}[\vec{a}])$

LEMA ← sii $t^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})] = s^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]$

Def $\models$ ← sii $\mathbf{B} \models \varphi[F(\vec{a})]$

• Caso $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$ $r \in \mathcal{R}_n$, $t_1, \dots, t_n \in T^{\tau}$

$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in r^{\mathbf{A}}$

F iso ← sii $(F(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), \dots, F(t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])) \in r^{\mathbf{B}}$

Lema ← sii $(t_1^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})], \dots, t_n^{\mathbf{B}}[F(\vec{a})]$

Def $\models$ ← sii $\mathbf{B} \models \varphi[F(\vec{a})]$

<u>$TEO_k \Rightarrow TEO_{k+1}$</u> Sup. que vale $TEO_k$. Si $\varphi \in F_k^{\tau}$, listo. Sea $\varphi \in F_{k+1}^{\tau} - F_k^{\tau}$.

Por lectura única de fórmulas, hay varios casos:

• <u>Caso $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$</u>, $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^{\tau}$. Entonces

$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ sii $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$

TEO$_k$ ← sii $\mathbf{B} \models \varphi_1[F(\vec{a})]$ y $\mathbf{B} \models \varphi_2[F(\vec{a})]$

Def $\models$ ← sii $\mathbf{B} \models \varphi[F(\vec{a})]$

• <u>Casos</u> $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ y $\varphi = \neg\varphi_1$

análogos al anterior.

• <u>Caso $\varphi = \forall x_j \varphi_1$</u>, $\varphi_1 \in F_k^{\tau}$

Sup. $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$, esto nos dice por def de $\models$ que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{a})]$, para cada $a \in A$

Por $TEO_k$ tenemos que $\mathbf{B} \models \varphi_1[F(\downarrow_j^a(\vec{a}))]$, para cada $a \in A$. Notar que

Por TEO$_K$ tenemos que $\mathbf{B} \models \varphi_1[F(\downarrow_j^a(\vec{a}))]$, para cada $a \in A$. Notar que $F(\downarrow_j^a(\vec{a})) = \downarrow_j^{F(a)}(F(\vec{a}))$, luego que $\mathbf{B} \models \varphi_1[\downarrow_j^{F(a)}(F(\vec{a}))]$ para cada $a \in A$. Como $F$ es sobre, tenemos que $\mathbf{B} \models \varphi_1[\downarrow_j^b(F(\vec{a}))]$, para cada $b \in B$ lo cual por def de $\models$ nos dice que $\mathbf{B} \models \varphi[F(\vec{a})]$.

Sup $\mathbf{B} \models \varphi[F(\vec{a})]$, entonces $\mathbf{B} \models \varphi_1[\downarrow_j^b(F(\vec{a}))]$ para cada $b \in B$. Obviamente esto nos dice que $\mathbf{B} \models \varphi_1[\downarrow_j^{F(a)}(F(\vec{a}))]$ para cada $a \in A$. Como $\downarrow_j^{F(a)}(F(\vec{a})) = F(\downarrow_j^a(\vec{a}))$ tenemos que $\mathbf{B} \models \varphi_1[F(\downarrow_j^a(\vec{a}))]$ para cada $a \in A$. TEO$_K$ nos dice que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{a})]$ para cada $a \in A$ lo cual por def de $\models$ es $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$

- <u>Caso $\varphi = \exists x_j \varphi_1$</u>

  Análogo al anterior.

3) <u>TEOREMA</u> Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Entonces $(S^T/{\dashv\vdash_T}, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{c^T}, 0^T, 1^T)$ es un álgebra de Boole.

Probar solo el item (6)

<u>Demostración</u> Tenemos que $(S^T/{\dashv\vdash_T}, \mathsf{s}^T, \mathsf{i}^T, {}^{c^T}, 0^T, 1^T)$ es un álgebra de Boole si cumple las siguientes condiciones, cualesquiera sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^T$:

1) $[\varphi_1]_T \;\mathsf{i}^T\; [\varphi_1]_T = [\varphi_1]_T$

2) $[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_1]_T = [\varphi_1]_T$

3) $[\varphi_1]_T \;\mathsf{i}^T\; [\varphi_2]_T = [\varphi_2]_T \;\mathsf{i}^T\; [\varphi_1]_T$

4) $[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_2]_T = [\varphi_2]_T \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_1]_T$

5) $[\varphi_1]_T \;\mathsf{i}^T\; ([\varphi_2]_T \;\mathsf{i}^T\; [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \;\mathsf{i}^T\; [\varphi_2]_T) \;\mathsf{i}^T\; [\varphi_3]_T$

6) $[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; ([\varphi_2]_T \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_2]_T) \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_3]_T$

7) $[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; ([\varphi_1]_T \;\mathsf{i}^T\; [\varphi_2]_T) = [\varphi_1]_T$

8) $[\varphi_1]_T \;\mathsf{i}^T\; ([\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_2]_T) = [\varphi_1]_T$

9) $[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; 1^T = 1^T$

10) $0^T \;\mathsf{s}\; [\varphi_1]_T = 0^T$

11) $[\varphi_1]_T \;\mathsf{s}^T\; [\varphi_1]_T^{c^T} = 1^T$

12) $[\varphi_1]_T \;\mathsf{i}^T\; [\varphi_1]_T^{c^T} = 0^T$

11) $[\varphi_1]_T \, \mathsf{s}^T \, [\varphi_1]_T^{c^T} = 1^T$

12) $[\varphi_1]_T \, \mathsf{i}^T \, [\varphi_1]_T^{c^T} = 0^T$

13) $[\varphi_1]_T \, \mathsf{i}^T \, ([\varphi_2]_T \, \mathsf{s}^T \, [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \, \mathsf{i}^T \, [\varphi_2]_T) \, \mathsf{s}^T \, ([\varphi_1]_T \, \mathsf{i}^T \, [\varphi_3]_T)$

QUEREMOS VER QUE PARA CUALESQUIERA $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^T$, SE TIENE QUE

$$[\varphi_1]_T \, \mathsf{s}^T \, ([\varphi_2]_T \, \mathsf{s}^T \, [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T \, \mathsf{s}^T \, [\varphi_2]_T) \, \mathsf{s}^T \, [\varphi_3]_T$$

SEAN $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^T$ FIJAS. POR DEFINICIÓN DE $\mathsf{s}^T$ TENEMOS QUE

$$\begin{aligned}[\varphi_1]_T \, \mathsf{s}^T ([\varphi_2]_T \, \mathsf{s}^T \, [\varphi_3]_T) &= [\varphi_1]_T \, \mathsf{s}^T \, [(\varphi_2 \vee \varphi_3)]_T \\ &= [(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}([\varphi_1]_T \, \mathsf{s}^T \, [\varphi_2]_T) \, \mathsf{s}^T \, [\varphi_3]_T &= [(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_T \, \mathsf{s}^T \, [\varphi_3]_T \\ &= [((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)]_T\end{aligned}$$

ES DECIR QUE DEBEMOS PROBAR QUE

$$[(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T = [((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)]_T$$

ES DECIR, DEBEMOS VER QUE

$$T \vdash (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$$

UN LEMA NOS DICE QUE SI $T \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Y $\varphi$ SE DEDUCE DE $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ POR UNA REGLA DISTINTA DE GENERALIZACIÓN Y ELECCIÓN, ENTONCES $T \vdash \varphi$.

POR ELLO, ES SUFICIENTE VER QUE

$$T \vdash (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \qquad (a)$$

y

$$T \vdash ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \qquad (b)$$

PUES LO QUE BUSCAMOS SE DEDUCE DE ESTAS FÓRMULAS POR LA REGLA EQUIVALENCIAINTRODUCCIÓN.

LA SIGUIENTE ES UNA PRUEBA FORMAL DE (a) EN $T$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$ | HIPÓTESIS 1 |
| 2 | $\varphi_1$ | HIPÓTESIS 2 |
| 3 | $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ | DISJUNCIÓN INTRODUCCIÓN (2) |
| 4 | $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | TESIS 2 DISJUNCIÓN INTRODUCCIÓN (3) |
| 5 | $\varphi_1 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | CONCLUSIÓN |
| 6 | $(\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | HIPÓTESIS 3 |
| 7 | $\varphi_2$ | HIPÓTESIS 4 |
| 8 | $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ | DISJUNCIÓN INTRODUCCIÓN (7) |
| 9 | $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | TESIS 4 DISJUNCIÓN INTRODUCCIÓN (8) |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ | Disjunción introducción (7) |
| 9 | $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | Tesis 4 disjunción introducción (8) |
| 10 | $\varphi_2 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | Conclusión |
| 11 | $\varphi_3$ | Hipótesis 5 |
| 12 | $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | Tesis 5 disjunción introducción (11) |
| 13 | $\varphi_3 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | Conclusión |
| 14 | $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | Tesis 3 división por casos (6, 10, 13) |
| 15 | $(\varphi_2 \vee \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | Conclusión |
| 16 | $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | Tesis 1 división por casos (1, 5, 15) |
| 17 | $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | Conclusión |

La siguiente es una prueba formal de (6) en T.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | Hipótesis 1 |
| 2 | $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ | Hipótesis 2 |
| 3 | $\varphi_1$ | Hipótesis 3 |
| 4 | $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | Tesis 3 disjunción introducción (3) |
| 5 | $\varphi_1 \rightarrow \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | Conclusión |
| 6 | $\varphi_2$ | Hipótesis 4 |
| 7 | $\varphi_2 \vee \varphi_3$ | Disjunción introducción (6) |
| 8 | $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | Tesis 4 disjunción introducción (7) |
| 9 | $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | Conclusión |
| 10 | $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | Tesis 2 división por casos (2, 5, 9) |
| 11 | $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | Conclusión |
| 12 | $\varphi_3$ | Hipótesis 5 |
| 13 | $(\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | Disjunción introducción (12) |
| 14 | $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | Tesis 5 disjunción introducción (13) |
| 15 | $\varphi_3 \rightarrow \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | Conclusión |
| 16 | $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | Tesis 1 división por casos (1, 11, 15) |
| 17 | $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$ | Conclusión |

■

# Combo 4

martes, 25 de noviembre de 2025 14:54

**Combo 4.**

**Lema** (Propiedades basicas de la deduccion). *Sea $(\Sigma, \tau)$ una teoria.*

(1) *(Uso de Teoremas). Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*

(2) *Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. Si $R$ es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y $\varphi$ se deduce de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ por la regla $R$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*

(3) *$(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ si y solo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.*

**Teorema.** *Sea $(B, \mathsf{s}, \mathsf{i}, ^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in B$. Se tiene que:*

(1) $(a \mathsf{ i } b)^c = a^c \mathsf{ s } b^c$

(2) $a \mathsf{ i } b = 0$ *si y solo si* $b \leq a^c$

**Lema.** *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una funcion. Entonces $F$ es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si $F$ es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$*

1) Lema (Propiedades de $\vdash$) Sea $(\Sigma, \tau)$ una teoría.

1) (Uso de teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$ entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$

2) Sup. $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ si $R$ es una regla distinta de generalización y elección y $\varphi$ se deduce de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ por la regla $R$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$

3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ sii $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$

Demostración

1) Haré el caso $n=1$ y los casos $n \geq 2$ se obtienen aplicando $n$ veces el mismo resultado.

Sup $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau) \vdash \varphi$

Sea $(\alpha_1 ... \alpha_h, I_1 ... I_h)$ una prueba formal de $\varphi_1$ en $(\Sigma, \tau)$

Sea $(\psi_1 ... \psi_m, J_1 ... J_m)$ una prueba formal de $\varphi$ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau)$

Los lemas de cambio de nombre de constante auxiliares y cambio de índice de hipótesis nos permiten asumir que estas pruebas no comparten nombres de constante auxiliares ni números asociados a hipótesis y tesis. Para cada $i = 1, ..., m$, definimos $\tilde{J}_i$ de la siguiente manera:

- Si $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$ y $\alpha_i = \varphi_1$, $\tilde{J}_i = \alpha$EVOCACION$(\bar{h})$

- Si $J_i = \alpha$ AXIOMAPROPIO con $\alpha \in \{E\} \cup \{TESIS\bar{K} : K \in N\}$ y $\alpha_i \notin \{\varphi_1\}$, $\tilde{J}_i = \alpha$ AXIOMAPROPIO
- Si $J_i = \alpha P$ con $P \in \{$AXIOMALOGICO, CONCLUSION$\}$ y $\alpha \in \{E\} \cup \{TESIS\bar{K} ; K \in N\}$ entonces $\tilde{J}_i = \alpha P$
- Si $J_i =$ HIPOTESIS$\bar{K}$ $K \in N$, $\tilde{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{K}$
- Si $J_i = \alpha R(\bar{l_1}, ..., \bar{l_k})$ con $\alpha \in \{E\} \cup \{TESIS\bar{K} : K \in N\}$, $\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{l_1+h}, ..., \overline{l_k+h})$

Luego es claro que

$$(\alpha_1 ... \alpha_n \psi_1 ... \psi_m, I_1 ... I_n \tilde{J}_1 ... \tilde{J}_m)$$

es una prueba formal de $\varphi$ en $(\Sigma, \tau)$

2) Sup $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. Es claro que

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\varphi_1$ | AXIOMAPROPIO |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$. | $\varphi_n$ | AXIOMAPROPIO |
| $n+1$. | $\varphi$ | $R(\bar{1}, ..., \bar{n})$ |

es una prueba formal de $\varphi$ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau)$ lo cual por (1) nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$

3) Sup. $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$. Esto nos dice que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\varphi \to \psi), \varphi$ lo cual por (2) con modusponens nos dice que $(\Sigma \cup \{\varphi\}) \vdash \psi$

Sup. $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1 ... \varphi_n, J_1 ... J_n)$ una prueba formal de $\psi$ en $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$. Definimos $\tilde{J}_i$ para $i = 1, ..., n$ de la siguiente manera:

Obs en todos los casos, $\alpha \in \{E\} \cup \{TESIS\bar{K} : K \in N\}$

- Si $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO y $\varphi_i = \varphi$, $\tilde{J}_i = \alpha$EVOCACION(1)
- Si $J_i = \alpha$ AXIOMAPROPIO y $\varphi_i \neq \varphi$, $\tilde{J}_i = \alpha$AXIOMAPROPIO
- Si $J_i = \alpha P$ con $P \in \{$AXIOMALOGICO, CONCLUSION$\}$, $\tilde{J}_i = \alpha P$
- Si $J_i =$ HIPOTESIS$\bar{K}$, $K \in N$, $\tilde{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{K}$
- Si $J_i = \alpha R(\bar{l_1}, ..., \bar{l_k})$, $\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{l_1+1}, ..., \overline{l_k+1})$

Sea $m \in N$ tal ninguna $J_i$ es igual a HIPOTESIS$\bar{m}$. Nótese que $\tilde{J}_n$ no es de la forma TESIS$\bar{K}P$ ni de la forma HIPOTESIS$\bar{K}$ pues en una prueba formal si $J_i =$ TESIS$\bar{K}P$, debe ocurrir $J_{i+1} =$ CONCLUSION y si $J_i =$ HIPOTESIS$\bar{K}$ debe haber un $j > i$ tal $J_j =$ TESIS$\bar{K}P$. Entonces tenemos que TESIS$\bar{m}\tilde{J}_n$ es una justificación.

Es claro así que

$$(\varphi \varphi_1 ... \varphi_n (\varphi \to \psi), \text{HIPOTESIS}\bar{m} \tilde{J}_1 ... \tilde{J}_{n-1} \text{TESIS}\bar{m} \tilde{J}_n \text{CONCLUSION})$$

ES CLARO ASÍ QUE

$(\varphi\varphi_1 \ldots \varphi_n(\varphi\to\psi), \text{HIPÓTESIS} \bar{m}\, \tilde{J}_1 \ldots \tilde{J}_{n-1}\ \text{TESIS} \bar{m}\, \tilde{J}_n\ \text{CONCLUSIÓN})$

ES UNA PRUEBA FORMAL DE $(\varphi\to\psi)$ EN $(\Sigma,\tau)$

2) <u>TEOREMA</u> SEA $(B, s, i, {}^c, 0, 1)$ UN ÁLGEBRA DE BOOLE Y SEAN $a, b \in B$. SE TIENE QUE

(1) $(a\,i\,b)^c = a^c\ s\ b^c$

(2) $a\,i\,b = 0$ sii $b \leq a^c$

<u>DEMOSTRACIÓN</u> RECORDEMOS QUE $\leq$ ES EL ORDEN DADO POR $x \leq y$ sii $x\,s\,y = y$.

<u>LEMA</u>: SI: $(L, s, i, 0, 1)$ ES UN RET. ACOTADO, TODO ELEMENTO TIENE A LO SUMO UN COMPLEMENTO.
↳ DIST.

(1) VEMOS QUE $a^c\,s\,b^c$ ES COMPLEMENTO DE $a\,i\,b$.

$$
\begin{aligned}
(a^c\,s\,b^c)\ s\ (a\,i\,b) &= a^c\ s\ (b^c\,s\,(a\,i\,b)) \\
&\overset{\text{DIS}_2}{=} a^c\ s\,((b^c\,s\,a)\ i\ (b^c\,s\,b)) \\
&= a^c\ s\,((a\,s\,b^c)\ i\ 1) \qquad x\,i\,1 = x\,i\,(x\,s\,1) = x \ \ \forall x \\
&= a^c\ s\,(a\,s\,b^c) \\
&= (a^c\,s\,a)\,s\,b^c = 1\,s\,b^c = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a^c\,s\,b^c)\ i\ (a\,i\,b) &= ((a^c\,s\,b^c)\,i\,a)\ i\ b \\
&= (a\,i\,(a^c\,s\,b^c))\ i\ b \\
&= ((a\,i\,a^c)\ s\ (a\,i\,b^c))\ i\ b \\
&= (0\ s\,(a\,i\,b^c))\,i\,b \qquad x\,i\,0 = 0\,i\,x = 0\,i\,(0\,s\,x) = 0 \ \ \forall x \\
&= a\,i\,(b^c\ i\,b) = a\,i\,0 = 0
\end{aligned}
$$

LUEGO POR EL LEMA ANT. APLICADO AL RET. ACOTADO $(B, s, i, 0, 1)$ TENEMOS QUE $a^c\,s\,b^c = (a\,i\,b)^c$ ES EL ÚNICO COMPLEMENTO.

(2) SUP. $a\,i\,b = 0$, ENTONCES

$$
\begin{aligned}
a^c = 0\,s\,a^c = (a\,i\,b)\,s\,a^c = a^c\,s\,(a\,i\,b) &= (a^c\,s\,a)\ i\ (a^c\,s\,b) \\
&= 1\ i\ (a^c\,s\,b) \\
&= a^c\,s\,b = b\,s\,a^c \ \therefore\ b \leq a^c
\end{aligned}
$$

SUP $b \leq a^c$. ES DECIR $b\,s\,a^c = a^c$

ENTONCES

ENTONCES

$$0 = a\,i\,a^c = a\,i\,(b\,s\,a^c) = (a\,i\,b)\,s\,(a\,i\,a^c) = (a\,i\,b)\,s\,0 = a\,i\,b \quad \blacksquare$$

3) LEMA Sean $(L,s,i)$ y $(L',s',i')$ reticulados terna y sean $(L,\leq)$ y $(L',\leq')$ sus posets asociados. Entonces $F$ es un isomorfismo de $(L,s,i)$ en $(L',s',i')$ si y solo si $F$ es un isomorfismo de $(L,\leq)$ en $(L',\leq')$.

DEMOSTRACIÓN

$(\Rightarrow)$ Sup. $F$ iso de $(L,s,i)$ en $(L',s',i')$. Debemos ver que $\forall a,b \in L$,

$$a \leq b \quad \text{implica} \quad F(a) \leq' F(b)$$

Sean $x,y \in L$ tq $x \leq y$. Entonces $x\,s\,y = y$

$$\therefore F(x)\,s'\,F(y) \underset{F \text{ Homo}}{=} F(x\,s\,y) = F(y) \quad \text{i.e.} \quad F(x) \leq' F(y).$$

Es análogo verlo para $F^{-1}$ pues también es un homomorfismo.

$(\Leftarrow)$ Sup $F$ iso de $(L,\leq)$ en $(L',\leq')$. Debemos ver que $\forall a,b \in L$,

$$F(a\,s\,b) = F(a)\,s'\,F(b)$$
$$F(a\,i\,b) = F(a)\,i'\,F(b)$$

Como sabemos por Dedekind,

$$a\,s\,b = \sup(\{a,b\}) \geq a \quad \overset{F \text{ Homo de posets}}{\therefore} \quad F(a\,s\,b) \geq' F(a)$$
$$a\,s\,b = \sup(\{a,b\}) \geq b \quad \therefore \quad F(a\,s\,b) \geq' F(b)$$

Por lo que

$$F(a\,s\,b) \geq \sup(\{F(a),F(b)\}) = F(a)\,s'\,F(b)$$

Pero

$$F(a)\,s'\,F(b) = \sup(\{F(a),F(b)\}) \begin{array}{l} \geq' F(a) \\ \geq' F(b) \end{array}$$

$$\therefore F^{-1}(F(a)\,s'\,F(b)) \left.\begin{array}{l} \geq a \\ \geq b \end{array}\right\} \geq \sup(\{a,b\}) = a\,s\,b$$

$$\therefore F(F^{-1}(F(a)\,s'\,F(b))) \geq F(a\,s\,b)$$
$$F(a)\,s'\,F(b) \geq F(a\,s\,b)$$

$$F(a)\, s'\, F(b) \geq F(a\, S\, b)$$

ES DECIR, $F(a\, S\, b) = F(a)\, s'\, F(b)$.

EL CASO PARA $i$ ES ANÁLOGO Y EL CASO PARA $F^{-1}$ TAMBIÉN PUES $F^{-1}$ ES UN ISO. DE $(L', \leq')$ EN $(L, \leq)$ CON INVERSA $F$. $\blacksquare$

Combo 5

martes, 25 de noviembre de 2025 14:54

**Combo 5.**

**Teorema** (Teorema de Completitud). *Sea $T=(\Sigma,\tau)$ una teoria de primer orden. Si $T\models\varphi$, entonces $T\vdash\varphi$.*

Haga solo el caso en que $\tau$ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de $\Sigma$. En la exposicion de la prueba no es necesario que demuestre los items (1) y (5).

Teorema de completitud: Sea $T=(\Sigma,\tau)$ una teoría de primer orden. Si $T\models\varphi$, entonces $T\vdash\varphi$.

Demostración: Será para el caso en el que $\tau$ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de $\Sigma$. Iremos por el absurdo. Sup. hay una sentencia $\varphi_0$ tq $T\models\varphi_0$ y $T\not\vdash\varphi_0$. Esto nos dice que $[\varphi_0]_T\neq 1^T=\{\varphi\in S^\tau : T\vdash\varphi\}$ y $[\neg\varphi_0]_T\neq 0^T=\{\varphi\in S^\tau : T\vdash\neg\varphi\}$

El lema de enumeración nos dice que hay una infinitupla $(\gamma_1,\gamma_2,\dots)\in F^{\tau\mathbb{N}}$ tal que

- $|Li(\gamma_i)|\leq 1$ $i=1,2,\dots$
- Si $Li(\gamma)\leq 1$, entonces $\gamma=\gamma_j$ para algún $j\in\mathbb{N}$.

Para cada $j\in\mathbb{N}$, sea $w_j\in Var$ tq $Li(\gamma_j)\subseteq\{w_j\}$ y para cada $j\in\mathbb{N}$ declaramos $\gamma_j=_d\gamma_j(w_j)$. El lema de ínfimo nos dice que

$$\inf\{[\gamma_j(t)]_T : t\in T_c^\tau\} = [\forall w_j\gamma_j(w_j)]_T$$

para cada $j=1,2,\dots$. El teorema de Rasiowa y Sikorski nos dice que hay un filtro primo $\mathcal{U}$ de $A_T$ que cumple:

a) $[\neg\varphi_0]_T\in\mathcal{U}$

b) para cada $j\in\mathbb{N}$, $\{[\gamma_j(t)]_T : t\in T_c^\tau\}\subseteq\mathcal{U}$ implica $[\forall w_j\gamma_j(w_j)]_T\in\mathcal{U}$

Ya que la infinitupla $(\gamma_1,\gamma_2,\dots)$ cubre todas las fórmulas con a lo sumo una var. libre, podemos reescribir

b') para cada $\varphi=_d\varphi(v)\in F^\tau$, si $\{[\varphi(t)]_T : t\in T_c^\tau\}\subseteq\mathcal{U}$ entonces $[\forall v\varphi(v)]_T\in\mathcal{U}$

Definamos sobre $T_c^\tau$ la siguiente relación

$$t\bowtie s \text{ sii } [(t\equiv s)]_T\in\mathcal{U}$$

Veamos las siguientes 3 propiedades:

VEAMOS LAS SIGUIENTES 3 PROPIEDADES:

1) $\bowtie$ ES DE EQUIVALENCIA

2) PARA CADA $\varphi =_d \varphi(v_1,\dots,v_n) \in F^\tau$, $t_1,\dots,t_n, s_1,\dots,s_n \in T_c^\tau$, SI $t_i \bowtie s_i$ $i=1,\dots,n$ ENTONCES $[\varphi(t_1,\dots,t_n)]_T \in \mathcal{U}$ SII $[\varphi(s_1,\dots,s_n)]_T \in \mathcal{U}$

3) PARA CADA $f \in F_n$, $t_1,\dots,t_n, s_1,\dots,s_n \in T_c^\tau$, SI $t_i \bowtie s_i$ $i=1,\dots,n$ ENTONCES $f(t_1,\dots,t_n) \bowtie f(s_1,\dots,s_n)$.

NO ES NECESARIO MOSTRAR (1)

VEAMOS (2). NOTAR QUE

$$T \vdash ((t_1 \equiv s_1) \wedge \dots \wedge (t_n \equiv s_n) \wedge \varphi(t_1,\dots,t_n)) \longrightarrow \varphi(s_1,\dots,s_n)$$

LO CUAL NOS DICE QUE

$$[(t_1\equiv s_1)]_T \,i^T \dots i^T [(t_n \equiv s_n)]_T \,i^T [\varphi(t_1,\dots,t_n)]_T \leq^T [\varphi(s_1,\dots,s_n)]_T$$

DE LO CUAL SE DESPRENDE QUE

$$[\varphi(t_1,\dots,t_n)]_T \in \mathcal{U} \text{ IMPLICA } [\varphi(s_1,\dots,s_n)] \in \mathcal{U}$$

PUES $\mathcal{U}$ ES UN FILTRO. LA OTRA IMPLICACIÓN ES ANÁLOGA.

VEAMOS (3). TOMEMOS $\varphi = (f(v_1,\dots,v_n) \equiv f(s_1,\dots,s_n))$. SI APLICAMOS (2), OBTENEMOS QUE SI $t = f(t_1,\dots,t_n)$ Y $s = f(s_1,\dots,s_n)$ ENTONCES

$$t \bowtie s \underbrace{\text{ SII }}_{\text{DEF } \bowtie} [(t\equiv s)]_T \in \mathcal{U} \underbrace{\text{ SII }}_{(2)} [(s\equiv s)]_T \in \mathcal{U} \text{ SII } 1^T \in \mathcal{U}$$

DEFINAMOS UN MODELO $A_{\mathcal{U}}$ DE TIPO $\tau$ DE LA SIGUIENTE MANERA:

- UNIVERSO: $T_c^\tau/\bowtie$
- $c^{A_\mathcal{U}} = c/\bowtie$ PARA CADA $c \in C$
- $f^{A_\mathcal{U}}(t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie) = f(t_1,\dots,t_n)/\bowtie$ PARA CADA $f \in F_n$, $t_1,\dots,t_n \in T_c^\tau$
- $r^{A_\mathcal{U}} = \{(t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie) : [r(t_1,\dots,t_n)]_T \in \mathcal{U}\}$ PARA CADA $r \in R_n$

OBS: LA DEF DE $f^{A_\mathcal{U}}$ ES INAMBIGUA POR (3).

VEAMOS LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

4) PARA CADA $t =_d t(v_1,\dots,v_n) \in T^\tau$, $t_1,\dots,t_n \in T_c^\tau$, TENEMOS QUE

$$t^{A_\mathcal{U}}[t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie] = t(t_1,\dots,t_n)/\bowtie$$

5) PARA CADA $\varphi =_d \varphi(v_1,\dots,v_n) \in F^\tau$, $t_1,\dots,t_n \in T_c^\tau$, TENEMOS QUE

5) para cada $\varphi =_d \varphi(v_1,\dots,v_n) \in F^{\tau}$, $t_1,\dots,t_n \in T_C^{\tau}$, tenemos que

$$A_U \models \varphi[t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie] \text{ sii } [\varphi(t_1,\dots,t_n)]_T \in \mathcal{U}$$

Veamos (4) y no probaremos (5). Lo haré por inducción. Si $t \in T_0^{\tau}$ entonces hay 2 casos.

- $t = c \in C \Rightarrow t^{A_U}[t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie] = c^{A_U} = c/\bowtie = t(t_1,\dots,t_n)/\bowtie$
- $t = v_i$ para algún $i=1,\dots,n$, entonces $t(t_1,\dots,t_n) = t_i$

$$\Rightarrow t^{A_U}[t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie] = t_i/\bowtie = t(t_1,\dots,t_n)/\bowtie$$

Supongamos que (4) vale para $s \in T_K^{\tau}$. Sea $t \in T_{K+1}^{\tau} - T_K^{\tau}$. Entonces es de la forma

$$t = f(s_1,\dots,s_m) \quad f \in F_m,\ s_1,\dots,s_m \in T_K^{\tau}.$$

Luego

$$\begin{aligned} t^{A_U}[t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie] &= f^{A_U}\left(s_1^{A_U}[t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie],\dots,s_m^{A_U}[t_1/\bowtie,\dots,t_n/\bowtie]\right) \\ &\overset{(4) \text{ en } T_K^{\tau}}{=} f^{A_U}\left(s_1(t_1,\dots,t_n)/\bowtie,\dots,s_m(t_1,\dots,t_n)/\bowtie\right) \\ &\overset{\text{def } f^{A_U}}{=} f(s_1,\dots,s_m)(t_1,\dots,t_n)/\bowtie \\ &= t(t_1,\dots,t_n)/\bowtie \end{aligned}$$

Notar que en particular, (5) nos dice que para cada sentencia $\psi \in S^{\tau}$, $A_U \models \psi$ sii $[\psi]_T \in \mathcal{U}$. De aquí llegamos a que $A_U \models \Sigma$ y $A_U \models \neg\varphi_0$ lo cual contradice la suposición de que $T \models \varphi_0$.

Supongamos que $\tau$ es cualquier tipo. Sean $s_1$ y $s_2$ un par de símbolos no pertenecientes a la lista $\forall\ \exists\ \neg\ \vee\ \wedge\ \rightarrow\ \leftrightarrow\ ,\ (\ )\ \equiv\ X\ 0\dots9\ \underline{0}\dots\underline{9}$ y tales que ninguno ocurra en alguna palabra de $C \cup F \cup R$. Si $T \models \varphi$, entonces el lema de coincidencia nos dice que $(\Sigma,(C\cup\{s_1s_2s_1, s_1s_2s_2s_1,\dots\}, F, R, a)) \models \varphi$ por lo cual

$$(\Sigma,(C\cup\{s_1s_2s_1, s_1s_2s_2s_1,\dots\}, F, R, a)) \vdash \varphi$$

pero el lema de tipos parecidos nos dice que $T \vdash \varphi$ ∎

# Combo 6

martes, 25 de noviembre de 2025 14:54

**Combo 6.**

**Teorema** (Teorema de Completitud). *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoria de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*

Haga solo el caso en que $\tau$ tiene una cantidad infinita de nombres de cte que no ocurren en las sentencias de $\Sigma$. En la exposicion de la prueba no es necesario que demuestre los items: (1), (2), (3) y (4)

TEOREMA DE COMPLETITUD: Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.

DEMOSTRACIÓN: Sea para el caso donde $\tau$ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de $\Sigma$. Lo haremos por el absurdo. Supongamos que hay una sentencia $\varphi_0$ tal que $T \models \varphi_0$ y $T \nvdash \varphi_0$. Esto nos dice que $[\varphi_0]_T \neq 1^T = \{\varphi \in S^\tau : T \vdash \varphi\}$ y además $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T = \{\varphi \in S^\tau : T \vdash \neg\varphi\}$.

LEMA DE ENUMERACIÓN: Sea $\tau$ un tipo. Entonces hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in F^{\tau^{\mathbb{N}}}$ tal que

- $|Li(\gamma_i)| \leq 1 \quad i = 1, 2, \ldots$
- Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

Sea $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ una infinitupla dada por el lema para el tipo $\tau$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $w_j$ tq $Li(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$ y declaremos $\gamma_j =_d \gamma_j(w_j)$.

LEMA DEL ÍNFIMO: Si $(\Sigma, \tau)$ es una teoría y $\tau$ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de $\Sigma$, entonces para cada $\varphi =_d \varphi(v)$,

$$\inf\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\} = [\forall v\, \varphi(v)]_T$$

en el álgebra de Lindenbaum $\mathcal{A}_T$.

Este lema nos dice que para cada $j \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\inf\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} = [\forall w_j\, \gamma_j(w_j)]_T$$

TEOREMA DE RASIOWA Y SIKORSKI: Sea $(B, s, i, {}^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Sea $a \in B$, $a \neq 0$. Sup $(A_1, A_2, \ldots)$ es una infinitupla de subconjuntos de $B$ tales que existe

$a \neq 0$. Sup $(A_1, A_2, \ldots)$ es una infinitupla de subconjuntos de $B$ tales que existe $\inf(A_j)$ para cada $j=1,2,\ldots$. Entonces hay un filtro primo $P$ el cual cumple

- $a \in P$
- $A_j \subseteq P \Rightarrow \inf(A_j) \in P$ para $j=1,2,\ldots$

Este teorema nos dice que hay un filtro primo $\mathcal{U}$ de $A_T$ tal que

a) $[\neg\varphi_0]_T \in \mathcal{U}$

b) para cada $j \in N$, $\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ implica $[\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T \in \mathcal{U}$

Como la infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ cubre todas las fórmulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir:

b') para cada $\varphi =_d \varphi(v) \in F^\tau$, $\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq \mathcal{U}$ implica $[\forall v \varphi(v)]_T \in \mathcal{U}$

Definamos sobre $T_c^\tau$ la siguiente relación:

$$t \bowtie s \text{ sii } [(t \equiv s)]_T \in \mathcal{U}$$

Veamos las siguientes 3 propiedades las cuales no hace falta probar:

(1) $\bowtie$ es de equivalencia

(2) Si $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in F^\tau$, $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n \in T_c^\tau$ y $t_i \bowtie s_i$ para $i=1,\ldots,n$ entonces $[\varphi(t_1,\ldots,t_n)]_T \in \mathcal{U}$ sii $[\varphi(s_1,\ldots,s_n)]_T \in \mathcal{U}$.

(3) para cada $f \in F_n$, $t_1,\ldots,t_n,s_1,\ldots,s_n \in T_c$. Si $t_i \bowtie s_i$ para $i=1,\ldots,n$ entonces $f(t_1,\ldots,t_n) \bowtie f(s_1,\ldots,s_n)$

Definamos un modelo $A_{\mathcal{U}}$ de tipo $\tau$ de la siguiente manera:

- Universo: $T_c^\tau / \bowtie$
- $c^{A_U} = c/\bowtie$ para cada $c \in C$
- $f^{A_U}(t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie) = f(t_1,\ldots,t_n)/\bowtie$ para cada $f \in F_n$, $t_1,\ldots,t_n \in T_c^\tau$
- $r^{A_U} = \{(t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie) : [r(t_1,\ldots,t_n)]_T \in \mathcal{U}\}$ para cada $r \in R_n$

Notemos que la def de $f^{A_U}$ es inambigua por (3). Veamos que este modelo cumple las siguientes propiedades básicas:

(4) Si $t =_d t(v_1,\ldots,v_n) \in T^\tau$, $t_1,\ldots,t_n \in T_c^\tau$, entonces

$$t^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = t(t_1,\ldots,t_n)/\bowtie$$

$f^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = f(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie$

(5) SI $\varphi = \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in F^{\tau}$, $t_1, \ldots, t_n \in T_c^{\tau}$, ENTONCES

$$A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \text{ sii } [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in \mathcal{U}$$

NO PROBARÉ 4 AUNQUE ES DIRECTO POR INDUCCIÓN. VEAMOS (5) POR INDUCCIÓN EN K TAL QUE $\varphi \in F_K^{\tau}$.

CASO K=0 HAY DOS SUBCASOS:

- $\varphi = (t \equiv s)$, $t, s \in T^{\tau}$

$A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]$ sii $t^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = s^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]$

(4) sii $t(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie = s(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie$

sii $t(t_1, \ldots, t_n) \bowtie s(t_1, \ldots, t_n)$

sii $[t(t_1, \ldots, t_n) \equiv s(t_1, \ldots, t_n)]_T \in U$

sii $[\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in \mathcal{U}$

- CASO $\varphi = r(s_1, \ldots, s_m)$ $r \in R_m$ $s_1, \ldots, s_m \in T^{\tau}$

$A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]$ sii $(s_1^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie], \ldots, s_m^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]) \in r^{A_U}$

sii $(s_1(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie, \ldots, s_m(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie) \in r^{A_U}$

sii $[r(s_1, \ldots, s_m)(t_1, \ldots, t_n)]_T \in \mathcal{U}$

sii $[\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in \mathcal{U}$

VEAMOS AHORA QUE CASO K $\Rightarrow$ CASO K+1. SUP (5) VALE PARA $\varphi \in F_K^{\tau}$. SEA $\varphi \in F_{K+1}^{\tau} - F_K^{\tau}$

HAY VARIOS CASOS:

- CASO $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$

$A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]$ sii $A_U \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]$ ó $A_U \models \varphi_2[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]$

CASO K sii $[\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T \in \mathcal{U}$ ó $[\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in \mathcal{U}$

sii $[\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T \; s^{\tau} \; [\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in \mathcal{U}$

sii $[\varphi_1(t_1, \ldots, t_n) \vee \varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in \mathcal{U}$

sii $[\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in \mathcal{U}$

sii $[\varphi(t_1,\dots,t_n)]_T \in \mathcal{U}$

- Los casos $\varphi=\varphi_1\wedge\varphi_2$, $\varphi=\varphi_1\to\varphi_2$, $\varphi=\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2$ y $\varphi=\neg\varphi_1$ llevan un análisis similar.

- Caso $\varphi=\forall v\,\varphi_1$, con $v\in VAR-\{v_1,\dots,v_n\}$. Tenemos $\varphi_1=_d\varphi_1(v_1,\dots,v_n,v)$, $\varphi_1\in F_K^T$.

$A_U\models\varphi[t_1/\sim,\dots,t_n/\sim]$ sii para cada $t\in T_C^T$, $A_U\models\varphi_1[t_1/\sim,\dots,t_n/\sim,t/\sim]$

caso K sii para cada $t\in T_C^T$, $[\varphi_1(t_1,\dots,t_n,t)]_T\in\mathcal{U}$

propiedad de $\mathcal{U}$ sii $[\forall v\varphi_1(t_1,\dots,t_n,v)]_T\in\mathcal{U}$

sii $[\varphi(t_1,\dots,t_n)]_T\in\mathcal{U}$.

- Caso $\varphi=\exists v\,\varphi_1$, $\varphi_1\in F_K^T$, $v\in VAR-\{v_1,\dots,v_n\}$. Tenemos $\varphi_1=_d\varphi_1(v_1,\dots,v_n,v)$

$A_U\models\varphi[t_1/\sim,\dots,t_n/\sim]$ sii hay un $t\in T_C^T$ tq $A_U\models\varphi_1[t_1/\sim,\dots,t_n/\sim,t/\sim]$

sii hay un $t\in T_C^T$ tq $[\varphi_1(t_1,\dots,t_n,t)]_T\in\mathcal{U}$

siendo dos complementarios, ya que tengo $A\ 0^T\varphi$ $\therefore$ $\mathcal{U}=S^T/_{\dashv\vdash}$ no sería filtro primo.

sii hay un $t\in T_C^T$ tq $([\varphi_1(t_1,\dots,t_n,t)]_T)^{c^T}\notin\mathcal{U}$

sii hay un $t\in T_C^T$ tq $[\neg\varphi_1(t_1,\dots,t_n,t)]_T\notin\mathcal{U}$

sii $[\forall v\neg\varphi_1(t_1,\dots,t_n,v)]_T\notin\mathcal{U}$

sii $([\forall v\neg\varphi_1(t_1,\dots,t_n,v)]_T)^{c^T}\in\mathcal{U}$

sii $[\neg\forall v\neg\varphi_1(t_1,\dots,t_n,v)]_T\in\mathcal{U}$

sii $[\varphi(t_1,\dots,t_n)]_T\in\mathcal{U}$

- Los últimos dos casos con $v\in\{v_1,\dots,v_n\}$ son similares.

El punto (5) nos dice en particular que para cada sentencia $\psi\in S^T$, $A_U\models\psi$ sii $[\psi]_T\in\mathcal{U}$. De ello podemos concluir que $A_U\models\Sigma$ y $A_U\models\neg\varphi_0$, lo cual contradice la suposición de que $T\models\varphi_0$.

Supongamos que $T$ es cualquier tipo. Sean $S_1,S_2$ símbolos cualquiera que no ocurran en la lista $\forall\ \exists\ \wedge\ \vee\ \to\ \leftrightarrow\ \neg\ ,\ (\ )\ \equiv\ 0\dots9\ \mathbf{0}\dots\mathbf{9}\ X$ ni en ninguna palabra de $C\cup F\cup R$.

en la lista $\forall\ \exists\ \wedge\ \vee \rightarrow \leftrightarrow \neg\ ,\ (\ )\ \equiv\ 0 \ldots 9\ \mathbf{0} \ldots \mathbf{9}\ X$ ni en ninguna palabra de $C \cup F \cup R$.

<u>Lema de coincidencia</u> Sean $\tau$ y $\tau'$ tipos y sea $\tau_\cap = (C_\cap, F_\cap, R_\cap, a_\cap)$ dado por $C_\cap = C \cap C'$, $F_\cap = \{f \in F \cap F' : a(f) = a(f')\}$, $R_\cap = \{r \in R \cap R' : a(r) = a(r')$ y $a_\cap = a|_{F_\cap \cup R_\cap}$. Si $\Sigma \cup \varphi \subseteq S^{\tau_\cap}$, $(\Sigma, \tau) \vDash \varphi$ sii $(\Sigma, \tau') \vDash \varphi$.

Luego si $T \vDash \varphi$, el lema nos dice que $(\Sigma, (C \cup \{s_1 s_2 s_1, s_1 s_2 s_2 s_1, \ldots\}, F, R, a)) \vDash \varphi$

por lo cual $(\Sigma, (C \cup \{s_1 s_2 s_1, s_1 s_2 s_2 s_1, \ldots\}, F, R, a)) \vdash \varphi$

y por el lema de tipos parecidos tenemos que $T \vdash \varphi$.

<u>Lema de tipos parecidos</u> Sea $\tau = (C, F, R, a)$ y $\tau' = (C', F', R', a')$ tipos.
Si $C \subseteq C'$, $F = F'$, $R = R'$ y $a' = a$, entonces $(\Sigma, \tau') \vdash \varphi$ implica $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ cada vez que $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S^\tau$.

■

# Combo 7

martes, 25 de noviembre de 2025 14:54

**Combo 7.**

**Lema** (Propiedades basicas de la deduccion). *Sea $(\Sigma, \tau)$ una teoria.*

(1) *(Uso de Teoremas). Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*

(2) *Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$. Si $R$ es una regla distinta de GENERALIZACION y ELECCION y $\varphi$ se deduce de $\varphi_1, ..., \varphi_n$ por la regla $R$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*

(3) *$(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ si y solo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.*

**Lema.** *Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna y sea $\theta$ una congruencia de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Entonces:*

(1) *$(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$ es un reticulado terna.*

(2) *El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado al reticulado terna $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$ cumple*

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \text{ sii } y\theta(x \mathsf{s} y)$$

**Lema.** *Sean $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ y $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una funcion. Entonces $F$ es un isomorfismo de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ en $(L', \mathsf{s}', \mathsf{i}')$ si y solo si $F$ es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$*

1) LEMA (PROPIEDADES BÁSICAS DE $\vdash$) SEA $(\Sigma, \tau)$ UNA TEORÍA.

1) (USO DE TEOREMAS) SI $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ Y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, ENTONCES $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$

2) SUPONGAMOS QUE $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, ..., \varphi_n$ Y $R$ ES UNA REGLA DISTINTA DE GENERALIZACIÓN Y ELECCIÓN TAL QUE $\varphi$ SE DEDUCE A PARTIR DE $\varphi_1, ..., \varphi_n$ POR LA REGLA $R$. ENTONCES $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$

3) $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi \to \psi$ SII $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$

DEMOSTRACIÓN

(1) LO HARÉ PARA EL CASO $n=1$ Y TODOS LOS CASOS $n \geq 2$ CONSISTIRÁN EN ITERAR $n$ VECES ESE CASO.

SUP. $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1$ Y $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau) \vdash \varphi$. SEA $(\varphi_1 ... \varphi_h, I_1 ... I_h)$ UNA PRUEBA FORMAL DE $\varphi_1$ EN $(\Sigma, \tau)$ Y SEA $(\psi_1 ... \psi_m, J_1 ... J_m)$ UNA PRUEBA FORMAL DE $\varphi$ EN $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau)$. LOS SIGUIENTES LEMAS NOS PERMITE ASUMIR QUE LAS PRUEBAS NO COMPARTEN NOMBRES DE CTE. AUXILIARES NI NÚMEROS ASOCIADOS A HIPÓTESIS Y TESIS:

$\varphi$ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau)$. Los siguientes lemas nos permite asumir que las pruebas no contienen nombres de cte. auxiliares ni números asociados a hipótesis y tesis:

LEMA Si $(\varphi, J)$ es una prueba formal de $\varphi$ y $m \in \mathbb{N}$ es un número tal que $J_i \neq$ HIPOTESIS$\bar{m}$ para $i=1,\dots,n(J)$, si $\tilde{J}$ es el resultado de reemplazar HIPOTESIS$\bar{k}$ y TESIS$\bar{k}\alpha$ con $\alpha J_i k$ num para algún $k \in \mathbb{N}$ por HIPOTESIS$\bar{m}$ y TESIS$\bar{m}\alpha$ en $J$, entonces $(\varphi, \tilde{J})$ es una prueba formal de $\varphi$.

LEMA Sea $(\varphi, J)$ una prueba formal de $\varphi$ y $C_1$ es el conjunto de nombres de cte. auxiliares utilizados. Sea $e \in C_1$ y $\tilde{e} \notin C \cup C_1$ tq $(C \cup C_1 - \{e\} \cup \{\tilde{e}\}, F, R, a)$ es un tipo. Si $\tilde{\varphi}_i$ es el resultado de reemplazar en $\varphi_i$ cada ocurrencia de $e$ por $\tilde{e}$, entonces $(\tilde{\varphi}_1 \dots \tilde{\varphi}_{n(\varphi)}, J)$ es una prueba formal de $\varphi$.

Para $i=1,\dots,m$, definimos $\tilde{J}_i$ de la siguiente manera:

OBS en todos los casos, $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{$TESIS$\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$

- Si $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO y $\psi_i = \varphi_1$, $\tilde{J}_i = \alpha$EVOCACION$(\bar{n})$
- Si $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO y $\psi_i \neq \varphi_1$, $\tilde{J}_i = \alpha$AXIOMAPROPIO
- Si $J_i = \alpha P$ con $P \in \{$AXIOMALOGICO, CONCLUSION$\}$, $\tilde{J}_i = \alpha P$
- Si $J_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$
- Si $J_i = \alpha R(\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_k)$, $l_1,\dots,l_k \in \mathbb{N}$, $\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{l_1+h}, \dots, \overline{l_k+h})$

Es claro que $(\alpha_1 \dots \alpha_h \psi_1 \dots \psi_m, I_1 \dots I_h \tilde{J}_1 \dots \tilde{J}_m)$ es una prueba formal de $\varphi$ en $(\Sigma, \tau)$

(2) Notar que

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\varphi_1$ | AXIOMAPROPIO |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| n. | $\varphi_n$ | AXIOMAPROPIO |
| n+1. | $\varphi$ | $R(\bar{1},\dots,\bar{n})$ |

es una prueba formal de $\varphi$ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}, \tau)$. Luego (1) nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(3) $(\Rightarrow)$ Sup. $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi \to \psi$. Luego $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \varphi \to \psi, \varphi$ y si $R =$ MODUSPONENS entonces (2) nos dice que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

$(\Leftarrow)$ Sup $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1 \dots \varphi_n, J_1 \dots J_n)$ una prueba formal de $\psi$ en $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$. Definimos para $i=1,\dots,n$, $\tilde{J}_i$ de la siguiente manera:

OBS: $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{$TESIS$\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$

- Si $J_i = \alpha$AXIOMAPROPIO y $\varphi_i = \varphi$, $\tilde{J}_i = \alpha$EVOCACION$(\bar{1})$

- Si $\mathcal{J}_i = \alpha$ AXIOMAPROPIO y $\varphi_i = \varphi$, $\tilde{\mathcal{J}}_i = \alpha$ EVOCACION(1)
- Si $\mathcal{J}_i = \alpha$ AXIOMAPROPIO y $\varphi_i \neq \varphi$, $\tilde{\mathcal{J}}_i = \alpha$ AXIOMAPROPIO
- Si $\mathcal{J}_i = \alpha P$, $P \in \{$CONCLUSION, AXIOMALOGICO$\}$, $\tilde{\mathcal{J}}_i = \alpha P$
- Si $\mathcal{J}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mathcal{J}}_i =$ HIPOTESIS$\bar{k}$
- Si $\mathcal{J}_i = \alpha R(\bar{l_1},\dots,\bar{l_k})$ $l_1,\dots,l_k \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mathcal{J}}_i = \alpha R(\overline{l_1+1},\dots,\overline{l_k+1})$

Como $(\varphi_1 \dots \varphi_n, \mathcal{J}_1 \dots \mathcal{J}_n)$ es una prueba formal, podemos asumir que $\mathcal{J}_n \neq$ HIPOTESIS$\bar{k}$ y $\mathcal{J}_n \neq$ TESIS$\bar{k}\alpha$, $\alpha \in$ JUSTBAS, $k \in \mathbb{N}$ pues si $\mathcal{J}_n =$ HIPOTESIS$\bar{k}$ entonces habría un $j > n$ tq $\mathcal{J}_j =$ TESIS$\bar{k}\alpha$, $\alpha \in$ JUSTBAS y si $\mathcal{J}_n =$ TESIS$\bar{k}\alpha$, $\mathcal{J}_{n+1} = \beta$CONCLUSION

Sea $m \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{J}_i \neq$ HIPOTESIS$\bar{m}$ para $i = 1,\dots,n$. Es fácil ver que

$$(\varphi\,\varphi_1 \dots \varphi_n (\varphi \to \psi),\ \text{HIPOTESIS}\bar{m}\ \tilde{\mathcal{J}}_1 \dots \tilde{\mathcal{J}}_{n-1}\ \text{TESIS}\bar{m}\,\tilde{\mathcal{J}}_n\ \text{CONCLUSION})$$

es una prueba formal de $(\varphi \to \psi)$ en $(\Sigma, \tau)$.

2) LEMA Sea $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$ un reticulado terna y sea $\theta$ una congruencia de $(L, \mathsf{s}, \mathsf{i})$. Entonces

(1) $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$ es un reticulado terna.

(2) El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado al ret. terna $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$ cumple

$$x/\theta \ \tilde{\leq}\ y/\theta \quad \text{sii} \quad y\,\theta\,(x \mathsf{s} y)$$

<u>DEMOSTRACION</u>

(1) Para ver que $(L/\theta, \tilde{\mathsf{s}}, \tilde{\mathsf{i}})$ es un ret. terna, debemos ver que cumple $I_1, \dots I_7$:

$I_1)$ $x/\theta\ \tilde{\mathsf{s}}\ x/\theta = x/\theta\ \tilde{\mathsf{i}}\ x/\theta = x/\theta$

$I_2)$ $x/\theta\ \tilde{\mathsf{s}}\ y/\theta = y/\theta\ \tilde{\mathsf{s}}\ x/\theta$

$I_3)$ $x/\theta\ \tilde{\mathsf{i}}\ y/\theta = y/\theta\ \tilde{\mathsf{i}}\ x/\theta$

$I_4)$ $x/\theta\ \tilde{\mathsf{s}}\ (y/\theta\ \tilde{\mathsf{s}}\ z/\theta) = (x/\theta\ \tilde{\mathsf{s}}\ y/\theta)\ \tilde{\mathsf{s}}\ z/\theta$

$I_5)$ $x/\theta\ \tilde{\mathsf{i}}\ (y/\theta\ \tilde{\mathsf{i}}\ z/\theta) = (x/\theta\ \tilde{\mathsf{i}}\ y/\theta)\ \tilde{\mathsf{i}}\ z/\theta$

$I_6)$ $x/\theta\ \tilde{\mathsf{s}}\ (x/\theta\ \tilde{\mathsf{i}}\ y/\theta) = x/\theta$

$I_7)$ $x/\theta\ \tilde{\mathsf{i}}\ (x/\theta\ \tilde{\mathsf{s}}\ y/\theta) = x/\theta$

$I_6)\ x/\theta \ \tilde{s}\ (x/\theta \ \tilde{i}\ y/\theta) = x/\theta$

$I_7)\ x/\theta \ \tilde{i}\ (x/\theta \ \tilde{s}\ y/\theta) = x/\theta$

para todo $x/\theta, y/\theta, z/\theta \in L/\theta$.

Probamos $I_1, I_2, I_4, I_6$ y las demás son análogas para $\tilde{i}$.

Sean $x/\theta, y/\theta, z/\theta$ elementos cualesquiera de $L/\theta$

$I_1)\ x/\theta \ \tilde{s}\ x/\theta = (x s x)/\theta = x/\theta$

$\quad\ x/\theta \ \tilde{i}\ x/\theta = (x i x)/\theta = x/\theta$

$I_2)\ x/\theta \ \tilde{s}\ y/\theta = (x s y)/\theta = (y s x)/\theta = y/\theta \ \tilde{s}\ x/\theta$

$I_4)\ x/\theta \ \tilde{s}\ (y/\theta \ \tilde{s}\ z/\theta) = x/\theta \ \tilde{s}\ (y s z)/\theta = (x s (y s z))/\theta$

$= ((x s y) s z)/\theta = (x s y)/\theta \ \tilde{s}\ z/\theta = (x/\theta \ \tilde{s}\ y/\theta) \ \tilde{s}\ z/\theta$.

$I_6)\ x/\theta \ \tilde{s}\ (x/\theta \ \tilde{i}\ y/\theta) = x/\theta \ \tilde{s}\ (x i y)/\theta = (x s (x i y))/\theta$

$= x/\theta$.

(2) Veamos que $\tilde{\leq}$ cumple $x/\theta \ \tilde{\leq}\ y/\theta$ sii $y\theta(x s y)$

Por definición, tenemos $x/\theta \ \tilde{\leq}\ y/\theta$ sii $x/\theta \ \tilde{s}\ y/\theta = y/\theta$

sii $(x s y)/\theta = y/\theta$ sii $y\theta(x s y)$.

3) Lema Sean $(L,s,i)$ y $(L',s',i')$ reticulados terna y sean $(L,\leq)$ y $(L',\leq')$ sus posets asociados. Sea $F: L \to L'$ una función. Entonces $F$ es un isomorfismo de $(L,s,i)$ en $(L',s',i')$ sii $F$ es un isomorfismo de $(L,\leq)$ en $(L',\leq')$

Demostración

$(\Rightarrow)$ Sup. $F$ iso de $(L,s,i)$ en $(L',s',i')$, queremos ver que para todo $x,y \in L$,

$$x \leq y \Rightarrow F(x) \leq' F(y)$$

y será análogo para ver que $F^{-1}$ también es homomorfismo.

$$x \leq y \underset{\text{Def} \leq}{\Rightarrow} x s y = y \Rightarrow F(x s y) = F(y) \Rightarrow F(x) s' F(y) = F(y)$$

$$\Rightarrow F(x) \leq' F(y)$$

Def $\le$ $\Rightarrow F(x) \le F(y)$

($\Leftarrow$) Sup F. iso de $(L, \le)$ en $(L', \le')$, queremos ver que para todo $x, y \in L$, se cumple

(1) $F(x\, s\, y) = F(x)\, s'\, F(y)$

(2) $F(x\, i\, y) = F(x)\, i'\, F(y)$

Haré (1) y (2) es análogo para $i$. Esto nos dirá que F es un homomorfismo biyectivo de $(L,s,i)$ en $(L',s',i')$. También es análogo ver que $F^{-1}$ es un homomorfismo de $(L',s',i')$ en $(L,s,i)$

Veamos (1)

<u>Teorema de Dedekind</u> Sea $(L,s,i)$ un ret. teoría. El orden definido por

$$x \le y \text{ sii } x\, s\, y = y$$

es un orden parcial sobre L que además cumple

$$\sup\{x,y\} = x\, s\, y$$
$$\inf\{x,y\} = x\, i\, y$$

para todo $x, y \in L$.

Teniendo este teorema en cuenta, podemos ver que

el sup. es menor cota superior

$$\left.\begin{array}{l} x\, s\, y \ge x \Rightarrow F(x\, s\, y) \ge' F(x) \\ x\, s\, y \ge y \Rightarrow F(x\, s\, y) \ge' F(y) \end{array}\right\} \Rightarrow F(x\, s\, y) \ge' F(x)\, s'\, F(y)$$

Pero además,

$$\begin{array}{l} F(x)\, s'\, F(y) \ge' F(x) \\ F(x)\, s'\, F(y) \ge' F(y) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} F^{-1}(F(x)\, s'\, F(y)) \ge' F^{-1}(F(x)) = x \\ F^{-1}(F(x)\, s'\, F(y)) \ge' F^{-1}(F(y)) = y \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$F^{-1}(F(x)\, s'\, F(y)) \ge' x\, s\, y$$

$$\Downarrow$$

$$F(F^{-1}(F(x)\, s'\, F(y))) \ge' F(x\, s\, y)$$

$$\Downarrow$$

$$F(x)\, s'\, F(y) \ge' F(x\, s\, y)$$

Luego por antisimetría de $\le'$, tenemos $F(x\, s\, y) = F(x)\, s'\, F(y)$.

Combo 8

martes, 25 de noviembre de 2025 14:54

**Combo 8.**

**Lema.** *Supongamos que* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un isomorfismo. Sea* $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$. *Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, a_2, ..., a_n] \text{ sii } \mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), F(a_2), ..., F(a_n)]$$

*para cada* $a_1, a_2, ..., a_n \in A$.

**Lema.** *Sean* $(P, \leq)$ *y* $(P', \leq')$ *posets. Supongamos* $F$ *es un isomorfismo de* $(P, \leq)$ *en* $(P', \leq')$.

(a) *Para cada* $S \subseteq P$ *y cada* $a \in P$, *se tiene que* $a$ *es cota superior (resp. inferior) de* $S$ *si y solo si* $F(a)$ *es cota superior (resp. inferior) de* $F(S)$.

(b) *Para cada* $S \subseteq P$, *se tiene que existe* $\sup(S)$ *si y solo si existe* $\sup(F(S))$ *y en el caso de que existan tales elementos se tiene que* $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.

1) LEMA Sup. $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ isomorfismo. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, ..., v_n) \in F^\tau$. Entonces

$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii $\mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), ..., F(a_n)]$

para cada $a_1, ..., a_n \in A$.

DEMOSTRACIÓN Sea por inducción en $k$ donde $TEO_k$ representa al lema con $\varphi \in F_k^\tau$.

LEMA 5: $F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un iso y $t =_d t(v_1, ..., v_n) \in T^\tau$,

$F(t^A[a_1, ..., a_n]) = t^B[F(a_1), ..., F(a_n)]$

para cada $a_1, ..., a_n \in A$

TEO$_0$: Sea $\varphi \in F_0^\tau$ y $a_1, ..., a_n \in A$. Hay dos casos:

- Caso $\varphi = (t \equiv s)$, $t, s \in T^\tau$

$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ sii $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = s^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]$

sii $F(t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]) = F(s^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n])$

lema

sii $t^{\mathbf{B}}[F(a_1), ..., F(a_n)] = s^{\mathbf{B}}[F(a_1), ..., F(a_n)]$

LEMA ←

Sii $t^{\mathbb{B}}[F(a_1),\ldots,F(a_n)] = s^{\mathbb{B}}[F(a_1),\ldots,F(a_n)]$

Sii $\mathbb{B} \models \varphi[F(a_1),\ldots,F(a_n)]$

• CASO $\varphi = r(t_1,\ldots,t_m)$, $r \in R_m$, $t_1,\ldots,t_m \in T^T$

$\mathbb{A} \models \varphi[a_1,\ldots,a_n]$ sii $(t_1^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_n],\ldots,t_m^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_n]) \in r^{\mathbb{A}}$

Fijo ← sii $(F(t_1^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_n]),\ldots,F(t_m^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_n])) \in r^{\mathbb{B}}$

LEMA ← sii $(t_1^{\mathbb{B}}[F(a_1),\ldots,F(a_n)],\ldots,t_m^{\mathbb{B}}[F(a_1),\ldots,F(a_n)]) \in r^{\mathbb{B}}$

Sii $\mathbb{B} \models \varphi[F(a_1),\ldots,F(a_n)]$

TEO$_K \Rightarrow$ TEO$_{K+1}$ SUP. QUE EL LEMA VALE PARA TODA $\varphi \in F_K^T$. SEA $\varphi \in F_{K+1}^T - F_K^T$

EL LEMA DE LECTURA ÚNICA DE FÓRMULAS DECLARADAS JUNTO AL CARÁCTER RECURSIVO DE LA NOTACIÓN $\varphi =_d \varphi(v_1,\ldots,v_n)$ NOS DAN LOS SIGUIENTES CASOS:

SEAN $a_1,\ldots,a_n \in A$.

• CASO $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ $\varphi_1,\varphi_2 \in F_K^T$

$\mathbb{A} \models \varphi[a_1,\ldots,a_n]$ sii $\mathbb{A} \models \varphi_1[a_1,\ldots,a_n]$ y $\mathbb{A} \models \varphi_2[a_1,\ldots,a_n]$

TEO$_K$ ← sii $\mathbb{B} \models \varphi_1[F(a_1),\ldots,F(a_n)]$ y $\mathbb{B} \models \varphi_2[F(a_1),\ldots,F(a_n)]$

sii $\mathbb{B} \models \varphi[F(a_1),\ldots,F(a_n)]$

• LOS CASOS $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, $\varphi = \neg\varphi_1$ SE RESUELVEN DE FORMA ANÁLOGA.

• CASO $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, $\varphi_1 \in F_K^T$, $j \in \{1,\ldots,n\}$

posición $j$

$\mathbb{A} \models \varphi[a_1,\ldots,a_n]$ sii PARA CADA $a \in A$, $\mathbb{A} \models \varphi_1[a_1,\ldots,a,\ldots,a_n]$

TEO$_K$ ← Sii PARA CADA $a \in A$, $\mathbb{B} \models \varphi_1[F(a_1),\ldots,F(a),\ldots,F(a_n)]$

F BIYECTIVA ← Sii PARA CADA $b \in B$, $\mathbb{B} \models \varphi_1[F(a_1),\ldots,b,\ldots,F(a_n)]$

Sii $\mathbb{B} \models \varphi[F(a_1),\ldots,F(a_n)]$

• CASO $\varphi = \forall v\, \varphi_1$, $\varphi_1 \in F_K^T$, $v \in VAR - \{v_1,\ldots,v_n\}$

• CASO $\varphi = \forall v \varphi_1$, $\varphi_1 \in F_K^T$, $v \in Var - \{v_1, \ldots, v_n\}$

Recordemos que por convención, $\varphi_1 = _d\varphi_1(v_1, \ldots, v_n, v)$. Luego

$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ sii para cada $a \in A$, $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n, a]$

TEOR $\Leftarrow$ sii para cada $a \in A$, $\mathbf{B} \models \varphi_1[F(a_1), \ldots, F(a_n), F(a)]$

F BIY $\Leftarrow$ sii para cada $b \in B$, $\mathbf{B} \models \varphi_1[F(a_1), \ldots F(a_n), b]$

sii $\mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), \ldots, F(a_n)]$

• Los casos $\varphi = \exists v_j \varphi_1$ y $\varphi = \exists v \varphi_1$ con $\varphi_1 \in F_K^T$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $v \in Var - \{v_1, \ldots, v_n\}$ son análogos a los dos anteriores.

■

2) LEMA Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Sup. $F$ es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$.

(a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que $a$ es cota superior (resp. inferior) de $S$ en $P$ sii $F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$.

(b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ sii existe $\sup(F(S))$ y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$.

DEMOSTRACIÓN

(a) Sea $S \subseteq P$ y $a \in P$.

($\Rightarrow$) Sup. $a$ cota superior de $S$. Sea $b' \in F(S)$ y $b \in S$ tq $F(b) = b'$. Como $a \geq b$, $F(a) \geq' F(b) = b'$ $\therefore$ $F(a)$ cota sup. de $F(S)$

($\Leftarrow$) Sup $F(a)$ cota sup. de $F(S)$. Sea $b \in S$ y $b' \in F(S)$ tq $F^{-1}(b') = b$. Como $F(a) \geq' b'$, $F^{-1}(F(a)) \geq' F^{-1}(b')$, es decir $a \geq b$. $\therefore$ $a$ cota sup. de $S$.

(b) Sea $S \subseteq P$.

($\Rightarrow$) Sup. que existe $x = \sup(S)$. Por (a) sabemos que $F(x)$ es cota superior de $F(S)$. Sea $z' \in P'$ otra cota superior de $F(S)$ y $z \in P$ tq $F(z) = z'$. Por (a) tenemos que $z$ es cota superior de $S$ en $P$. Luego $x \leq z \Rightarrow F(x) \leq' F(z) = z'$. $\therefore$ $F(x) = \sup(F(S))$

($\Leftarrow$) Es análogo viendo que si existe $\sup(F(S))$, entonces $F^{-1}(\sup(F(S))) = \sup(S)$

DE $P$. LUEGO $x \leq z \Rightarrow f(x) \leq' f(z) = z'$ $\therefore$ $f(x) = \sup(f(S))$

($\Leftarrow$) ES ANÁLOGO USANDO $f^{-1}$ SI EXISTE $\sup(f(S))$, ENTONCES $f^{-1}(\sup(f(S))) = \sup(S)$