10

LÓGICA - PARCIAL 1

TOMÁS ACHÁVAL BERZERO
M5085146

EJERCICIO 17:

SEA $(P, \leq)$ UN RETICULADO PAR Y SUP. $a, b \in P$ SON TALES QUE b TAPA A a. ENTONCES

$$x \not\leq a \Rightarrow a \, S \, x = b \, S \, x,$$

PARA CADA $x \in P$.

RESOLUCIÓN:

DEF DECIMOS QUE DADOS $a, b \in P$, b TAPA A a SII $b > a$ Y $x > a \Rightarrow x \geq b$ $\forall x \in P$.

SEAN $a, b \in P$ TQ b TAPA A a Y SEA $x \in P$ TQ $x \not\leq a$ (x FIJO PERO ARBITRARIO)

VEREMOS QUE $a \, S \, x \geq b \, S \, x$ Y $a \, S \, x \leq b \, S \, x$ PARA CONCLUIR POR ANTISIMETRÍA DE $\leq$ QUE $a \, S \, x = b \, S \, x$.

$(\geq)$

SABEMOS QUE $a \, S \, x = \sup(\{a, x\}) \underset{\geq x}{\geq a}$, VEAMOS QUE $a \, S \, x \neq a$ PARA CONCLUIR $a \, S \, x > a$

TENEMOS QUE $x \not\leq a \Rightarrow x > a$ Ó x NO ES COMPARABLE CON a.

EN AMBOS CASOS, $a \, S \, x > a$ PUES SI $x > a$, $a \, S \, x = x \neq a$
Y SI x NO ES COMPARABLE CON a
ENTONCES SI $a \, S \, x = a \Rightarrow a \geq x$ ABSURDO.

AHORA, COMO b TAPA A a Y $a \, S \, x > a$, $b \leq a \, S \, x$ POR DEF.

ASÍ, COMO $a \, S \, x \geq x$ Y $a \, S \, x \geq b$, $a \, S \, x$ ES COTA SUPERIOR DE $\{b, x\}$

$\therefore$ $a \, S \, x \geq b \, S \, x$, PUES $b \, S \, x$ ES LA MENOR COTA SUPERIOR DE $\{b, x\}$

$(\leq)$

TENEMOS QUE $b \overset{(b \geq a \text{ y } b \neq a)}{>} a$ Y $b \, S \, x \geq b$, POR TRANSITIVIDAD DEL ORDEN PARCIAL $\leq$,

TENEMOS QUE $a \leq b$, $b \leq b \, S \, x \Rightarrow a \leq b \, S \, x$

POR DEFINICIÓN DE SUPREMO TAMBIÉN TENEMOS QUE $b \, S \, x = \sup(\{b, x\}) \geq x$

LUEGO $b \, S \, x \geq a$ Y $b \, S \, x \geq x \Rightarrow b \, S \, x$ ES COTA SUPERIOR DE $\{a, x\}$

$\therefore$ $b \, S \, x \geq a \, S \, x$, PUES $a \, S \, x$ ES LA MENOR COTA SUPERIOR DE $\{a, x\}$.

FINALMENTE POR ANTISIMETRÍA DE $\leq$, TENEMOS QUE

$$a \, S \, x \leq b \, S \, x \text{ y } b \, S \, x \leq a \, S \, x \Rightarrow \boxed{a \, S \, x = b \, S \, x} \quad \forall x \in P$$ (PUES x ERA ARBITRARIO).