

Estos son los teoremas y demostraciones que entraron al final de Julio 2024, están escritos en la forma que Penazzi los dió durante la cursada. Muchos de ellos se pueden resumir un poco, pero leer estas versiones largas ayuda a entender la lógica de cada demostración.

TEOREMAS PARA EL FINAL JULIO 2024

• CUÁNTE LA COMPLEJIDAD DEL ALGORITMO DE EDMOND-KARP?

RTA: LA COMPLEJIDAD DE E-K ES $O(nm^2)$, DONDE $N = \# VÉRTICES$ Y $M = \# LADOS$.
SOBRE UNA RED $N = (V, E, C)$

DEM: EDMOND-KARP CONSTRUYE UNA SUCESIÓN DE CAMINOS AUMENTANTES UTILIZANDO BFS.

LA COMPLEJIDAD DE E-K EN VERTICES ESTÁ DADA POR

$$\text{compl}(E-K) = O(\text{compl}(BFS) \cdot \# \text{CAMINOS-AUMENTANTES})$$
$$= O(m \cdot \# \text{CAMINOS-AUMENTANTES})$$

(camino + aumento de flujo)

DEF: UN LADO "SE LLAMA CRÍTICO EN UN PASO PAGO SI: ES UJADO PARA CONSTRUIR EL SIGUIENTE FLUJO EN MODO FORWARD Y SE SATURA O EN MODO BACKWARDS Y SE VACÍA".

• CUÁNTAS VECES SE PUEDE VOLVER CRÍTICO UN LADO? PRIMERAS NECESITAREMOS ARGUMENTAR DEFINICIONES.

I DEF: DADO UN FLUJO f EN N Y VÉRTICES x, z ,

$$d_f(x, z) = \begin{cases} 0 & x=z \\ \infty, \text{ NO EXISTE } F\text{-CAM-AUMENTANTE DE } x \text{ A } z. \\ \underbrace{\min}_{\# \text{ LADOS}} \text{ LONGITUD DE } F\text{-CAM-AUMENTANTE DE } x \text{ A } z, \text{ SI EXISTE.} \end{cases}$$

Si f_0, f_1, \dots SON LOS FLUJOS QUE SE VAN OBTENIENDO EN EK, DEFINIMOS:

$$d_k(x) = d_{f_k}(s, x), \quad b_x(x) = d_{f_k}(x, t)$$

PROPOSICIÓN: $d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$ Y $b_x(x) \leq b_{x+1}(x) \quad \forall x$ (NO HACE FALTA DEMOSTRAR)

OBS: $d_k(t) = d_k(x) + b_x(x)$ SI AMBOS SON FINITOS.

• CUÁNTAS VECES SE PUEDE VOLVER CRÍTICO UN LADO?



SEA \vec{xy} UN LADO PUEDE SER UN VÉRTICE CRÍTICO EN EL PASO K. ESTO PUEDE DARSE DE DOS FORMAS:

a) \vec{xy} SE SATURA EN EL PASO K

$$\Rightarrow f_k(\vec{xy}) < c(\vec{xy}), f_{k+1}(\vec{xy}) = c(\vec{xy})$$

• SE UTILIZÓ UN CAMINO AUMENTANTE

S... $\vec{xy} \dots t$ DE LONGITUD MÍNIMA (EK)

$$\therefore d_k(y) = d_k(x) + 1$$

b) \vec{xy} SE VACÍA EN EL PASO K

$$\Rightarrow f_k(\vec{xy}) > 0 \quad y \quad f_{k+1}(\vec{xy}) = 0$$

• SE UTILIZÓ UN CAMINO AUMENTANTE DE LONGITUD MÍNIMA (EK) DE LA FORMA S... $\vec{xy} \dots t$

$$\therefore d_k(x) = d_k(y) + 1$$

Si \vec{xy} SE VUELVE CRÍTICO DE NUEVO EN UN PASO $j > k$, ENTonces

• SE VACÍO \Rightarrow SE USÓ BACKWARDS EN EL PASO j

• SE SATURÓ \Rightarrow SE USÓ BACKWARDS EN ALGÚN PASO i CON $k < i < j$

$\Rightarrow \exists i \in K < i < j$ DONDE \vec{xy} SE USA EN MODO BACKWARDS

• SE UTILIZÓ UN CAMINO AUMENTANTE DE LONGITUD MÍNIMA DE LA FORMA

$$S... \vec{xy} \dots t \quad \text{TA} \quad d_i(x) = d_i(y) + 1$$

LUEGO

$$\begin{aligned} d_j(t) &\geq d_i(t) = d_i(x) + b_i(x) \\ &\stackrel{\text{prop}}{=} d_i(y) + 1 + b_i(x) \\ &\geq d_k(y) + 1 + b_k(x) \\ &= d_k(x) + 1 + 1 + b_k(x) \\ &= \underline{d_k(x) + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_j(t) &\geq d_i(t) = d_i(y) + b_i(y) \\ &\stackrel{\text{prop}}{=} d_i(x) + 1 + b_i(y) \\ &\geq d_k(x) + 1 + b_k(y) \\ &= d_k(y) + 1 + 1 + b_k(y) \\ &= \underline{d_k(t) + 2} \end{aligned}$$

EN AMBOS CASOS (a, b), LA DISTANCIA ENTRE $y + t$ DEBE AUMENTAR EN AL MENOS 2 PARA QUE UN LADO PUEDA VOLVER A SER CRÍTICO. COMO ESTA DISTANCIA VA ENTRE 0 Y $n-1$, UN LADO PUEDE VOLVERSE CRÍTICO O(n) VECES LO TURNO.

FINALMENTE,

- CADA CAMINO AUMENTANTE DE EK VUELVE CRÍTICO AL MENOS UN LADO.
- CADA LADO PUEDE VOLVERSE CRÍTICO O(n) VECES.
- HAY M LADOS \Rightarrow HAY O($M \cdot n$) CAMINOS AUMENTANTES POSIBLES.

$$\therefore \text{COMPL}(EK) = O(M \cdot \# \text{CAM-AUM}) = O(M \cdot M \cdot n) = O(M^2 n)$$

LAS DISTANCIAS DE E-K NO DISTINUYEN

DEF: PARAOS VÉHICULOS x, z EN UN NETWORK N Y UN FLUJO F ,

$$d_f(x, z) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x = z \\ \infty & \text{Si no existe } F\text{-CAM-AUM dt } x \text{ A } z \\ \min \text{ LONGITUD } F\text{-CAM-AUM dt } x \text{ A } z & \text{Si existe} \end{cases}$$

DEF $d_k(x) = d_{f_k}(s, x)$ PARA f_k EL k -ÉSIMO FLUJO EN UNA CORRIENTE DE EK

PROPOSICIÓN: $d_k(x) \leq d_{k+1}(x) \quad \forall x$

DEM:

SEA $A = \{x : d_{k+1}(x) < d_k(x)\}$, Y SUPONGAMOS P.R.T $A \neq \emptyset$

SEA $\underbrace{x \in A}$ TAL QUE $\underbrace{d_{k+1}(x) = \min \{d_{k+1}(y) : y \in A\}}$

$\boxed{0} \Rightarrow d_{k+1}(x) < d_k(x) \leq \infty \Rightarrow d_{k+1}(x) < \infty \Rightarrow \exists F\text{-CAM-AUM ENTRE } s \text{ y } x.$

OBS: $x \neq s$ PUES $s \notin A$ Y A P.R.T $d_k(s) = d_{k+1}(s)$

SEA ENTONCES $P_{k+1}: s \dots x$ UN F_{k+1} -CAM-AUM ENTRE s Y x DE LONGITUD MÍNIMA,
ES DECIR DE LONGITUD $d_{k+1}(x)$.

Como $x \neq s$, EXISTE UN VÉHICULO z EN P_{k+1} INMEDIATAMENTE ANTERIOR A x .

LUEGO $P_{k+1}: s \dots z \dots x$ Y POR SER DE LONG. MÍNIMA, $d_{k+1}(z) = d_{k+1}(x) - 1$ $\boxed{2}$

AHORA HAY DOS OPCIONES

a) $\rightarrow z \dots x$ ES UN NODO

b) $\xrightarrow{z} x$ ES UN NODO

VEAMOS AMBOS CASOS

a) \vec{zx} ES UN LADO

$$\boxed{2} \Rightarrow d_{k+1}(z) < d_{k+1}(x) \stackrel{\boxed{1}}{\Rightarrow} z \notin A \Rightarrow \underbrace{d_k(z) \leq d_{k+1}(z) < \infty}_{\rightarrow \exists f_k\text{-CAM-AUM ENTRE } s_y z} \quad \boxed{3}$$

Sea $P_k: S \dots \vec{z}$ UN f_k^* -CAM-AUM DE LONGITUD, como $\vec{zx} \in E$, podrá AGREGARLE Y OBTENER UN f_k -CAM-AUM ENTRE $s_y z$ TAL PUE

$$d_k(x) \leq d_k(z) + 1 \leq d_{k+1}(z) + 1 \leq d_{k+1}(x) \text{ ABSURDO PUES } x \in A.$$

$\therefore \vec{zx}$ DEBE ESTAR SATURADO $f_k(\vec{zx}) = c(\vec{zx}) \rightarrow \vec{zx}$ SE UTILIZÓ DE TODO BACKWARDS PERO $P_{k+1}: S \dots \vec{zx}$ ES f_{k+1} -CAM-AUM $\rightarrow f_{k+1}(\vec{zx}) < c(\vec{zx}) \rightarrow$ AL PASEAR DE f_k A f_{k+1}

ES DECIR SE UTILIZÓ UN CAMINO DE LONGITUD MÍNIMA DE LA FORMA

$$\tilde{P}_k: S \dots \overset{\leftarrow}{xz} \dots t$$

$$\text{LUEGO } d_k(z) = d_k(x) + 1 \geq d_{k+1}(x) + 1 = d_{k+1}(z) + 1 + 1$$

$$\geq d_k(z) + 2 \Rightarrow 0 > 2 \text{ ABSURDO DE ASUMIR } \vec{zx} \text{ LADO.}$$

b) \vec{xz} ES UN LADO

LUEGO P_{k+1} ES DE LA FORMA $S \dots \overset{\leftarrow}{xz}$

$$\Rightarrow d_{k+1}(z) < d_{k+1}(x) \stackrel{\boxed{1}}{\Rightarrow} z \notin A \Rightarrow d_k(z) \leq d_{k+1}(z) < \infty \Rightarrow \exists f_k\text{-CAM-AUM ENTRE } s_y z$$

$P_k: S \dots \vec{z}$ UNO DE LOS, DE LONGITUD MÍNIMA, PODRÁ AGREGARLE \vec{xz} BACKWARDS, PERO ENTENCIENDO $d_k(x) \leq d_k(z) + 1 \leq d_{k+1}(z) + 1 \leq d_{k+1}(x) \Rightarrow$ ABSURDO PUES $x \in A$

Como NO LO PUEDO AGREGAR BACKWARDS, CONCLUIDO $f_k(\vec{xz}) = 0 \} \text{ SE UTILIZÓ } \vec{xz} \text{ FORWARD AL PASEAR SI } P_{k+1}: S \dots \vec{xz} \text{ ES UN } f_{k+1}\text{-CAM-AUM, CONCLUIDO } f_{k+1}(\vec{xz}) > 0 \}$ PASEAR DE f_k A f_{k+1}

$\therefore \exists f_k\text{-CAM-AUM DE LONGITUD MÍNIMA DE LA FORMA}$

$$\hat{P}_k: S \dots \overset{\rightarrow}{xz} \dots t$$

$$\Rightarrow d_k(z) = d_k(x) + 1 \geq d_{k+1}(x) + 1 = d_{k+1}(z) + 1 + 1 \geq d_k(z) + 2 \Rightarrow 0 > 2 \text{ ABSURDO DE ASUMIR } \vec{xz} \text{ LADO}$$

CONCLUIDOS ESTAMOS PUES $A = \emptyset$ Y $d_k(x) \leq d_{k+1}(x) \forall x$

LA COMPLEJIDAD DE DINIC, EN LAS VERSIONES, ES $O(N^2M)$

DEM

Como el nro de t aumenta en los NA siguientes, sólo tiene que hacer

$O(n)$ NA's, luego

$$\begin{aligned} \text{compl(Dinic)} &= O(n) \cdot (\underbrace{\text{compl(contruir NA)}}_{\text{BFS es } O(M)} + \text{compl(HACER FLUJO BLOQUEANTE)}) \\ &= O(n) \cdot (O(M) + \text{compl(HACER FLUJO BLOQUEANTE)}) \end{aligned}$$

VÉAMOS LA COMPLEJIDAD DE HACER UN FLUJO BLOQUEANTE EN AMBAS VERSIONES:

VERSIÓN ORIGINAL El NA es tal que no hay vértices sin salidas (\star)

∴ DFS SIEMPRE LLEGA A t SIN BACKTRACKING \Rightarrow DFS ES $O(\# NIVELES) = O(n)$
Como cada camino BOMBA UN NRO DE NA, hay $O(M)$ CAMINOS EN CADA NA.

∴ LA COMPLEJIDAD DE HACER LOS CAMINOS Y AUMENTAR EL FLUJO por ellos es $O(nm)$ [1]

Ahora bien, cuál es la complejidad de asumir \star ?

PARA ELLA, SE DEBE RECOMENZAR LOS VÉRTICES LUEGO DE CADA NUEVO CAMINO Y BOMBAR AQUELLOS QUE NO TENGAN SALIDAS DE SALIDA

HAY $O(M)$ CAMINOS ∴ SE "BOMBA" $O(m)$ VÉRTICES ALLOS $O(n)$ VÉRTICES } [2]
(RECUERDANDO SUS SALIDAS EN $O(1)$, TOTAL: $O(Mn)$) } [3]

$\text{compl(BOMBAR UN VÉRTICE Y SUS SALIDAS)} = O(d(x))$, pero sobre TODOS los "bombar" se obtiene
 $\sum_x O(d(x)) = O(M)$ [3]

FINALMENTE, $\text{compl(HACER FLUJO BLOQUEANTE)} = O(Mn) + O(Mn) + O(M) = O(Mn)$

∴ $\text{compl(Dinic)} = O(n)(O(m) + O(Mn)) = O(Mn^2)$ ■

Versión Occidental

PARA EL ALGORITMO EN PSEUDO-CODIGO

$g=0$; $\text{FLAG}=1$;

while (FLAG)

$P_i = [s]$;
 $x = s$;

while ($|x| \neq t$) AND FLAG)

IF ($\Gamma^+(x) \neq \emptyset$)

TOMAR $y \in \Gamma^+(x)$

$P.\text{add}(y);$ } A (ANIZANZAS)
 $x := y;$ }

Else

IF ($x \neq s$)

$z := \text{ELEMENT OF } x \text{ EN } P$
P, DELETF(x) } R (RETRACCION)
NA, DELETF(zx)
 $x := z;$

Else

$\text{FLAG} = 0$

IF ($x == t$)

ANHJAR EL FLUJO A LO LARGO DE P Y SUMAR LOS MDES SATINADOS } I (INCREMENTAR)

RETORN g;

PATRON A...AX REPETIDO

UNA COPIA DEL ALGORITMO ES DE LA FORMA

A...ARA..AIA..AR...

$O(A) = O(1)$ OPERACION ADD

$O(R) = O(1)$ OPERACION DELETF

$O(I) = O(n)$ RECORRER P 2 VECES P/ANOTAR FLUJO Y SUMARLO

$O(n)$

CUANTOS A'S HAY EN CADA PATRON REPETIDO? COMO CADA A ANOTA UN NODO EN LA NA, HAY $O(n)$ A'S HASTA QUE UN RETRACKERA ALLEGAR A T.

$$\text{COMPL}(A..AR) = O(n) + O(1) = O(n) = \text{COMPL}(A..AI) = O(n) \cdot O(1) + 1 \cdot O(n)$$

Como R SUMA UN LADO E I SUMA ALMOS UN LADO, HAY $O(m)$ REPETICIONES DE A..AX

$$\text{FINALMENTE } \text{COMPL}(\text{HUMAR FLUJO BILATERAL}) = O(m) \cdot O(n) = O(mn)$$

TEOREMA: complejidad de WAVE DE TANTAN ES $O(n^3)$

Como WAVE es de tipo DIVIDE Y CONQUISTA ENTRE S y t aumenta en $\log n$ (más subproblemas).

Hay $O(n)$ NA's, pues t no puede estar más allá de un lado de S .

$$\text{Largo compl(WAVE)} = \underbrace{O(n)}_{\substack{\text{NA's} \\ \text{CONSTANTES}}} + \underbrace{O(M)}_{\substack{\text{EN NA} \\ \text{CON BFS}}} + \underbrace{\text{COMPL(HACER FLUJO BIPARTITO)}}_{\substack{\text{PUEDE VER QUE ES } O(n^2)}}$$

$$\text{NOTAR QUE } O(M) + O(n^2) = O(n^2) \text{ PUES } M \in \binom{n}{2} = O(n^2)$$

El proceso se divide en

"OLAS" o "BALANCES" HACIA ADELANTE:

CUANDO UN VÉRTICE x LE MANDA FLUJO A y , PUEDE QUE $\vec{x}y$ SE SATURE O NO.

S = TODOS LOS CASOS DONDE SE SATURA UN LADO

P = TODOS LOS CASOS DONDE NO SE SATURA UN LADO.

"OLAS" o BALANCES HACIA ATRAÍS:

CUANDO x LE DEVUELVE FLUJO A y , PUEDE QUE \vec{yx} SE VACÍE O NO

V = CASOS DONDE SE VACÍA UN LADO

Q = CASOS DONDE NO SE VACÍA UN LADO

S : SUP $\vec{x}y$ SATURADO, ¿PUEDE VOLVER A SATURARSE?

PARA ESO, PRIMERO y LE DEBE DEVOLVER FLUJO A x , CON LO CUAL \vec{yx} ESTÁ BLOQUEADO, PERO x NO LE VOLVERÁ A MANDAR FLUJO PUES SOLO SE ESTÁ DIRIGIENDO A UN VÉRTICE NO BLOQUEADO. \therefore CADA VEZ QUE SE SATURA A LO SUMO UNA VEZ,

[1] $\text{compl}(S) = O(M)$

V : SUP \vec{yx} SE VACÍA, ¿PUEDE VOLVER A SATURARSE? NO, PUES SI x LE DEVOLVIERA FLUJO A y PARA VACIAR EL LADO \vec{yx} , ENTONCES x ESTÁ BLOQUEADO Y y NO LE MANDARÍA MAS FLUJO, PUES PARA QUE x PUEDE DEVOLVERLO, \vec{yx} NO SE PODRÍA VACIAR DE NUEVO. CADA VEZ SE VACÍA UNA VEZ.

[2] $\text{compl}(V) = O(M)$

P y Q

EN UNA OLA HACIA ADELANTE, TODOS LOS LADOS, MÁS PRIMOS EL ÚLTIMO USADO, SE SATUAN.

∴ EN CADA NÉSTIC EN UNA OLA HACIA ADELANTE, HAY ALO SUMO 1 LADO PUE NO SE SATUAR Y SE INCLUYE EN P. EN DÍA FLUJO POR EST LADO ES $O(1)$

$$[3] \text{ compl}(P) = O(n) \cdot \# \text{ OLS HACIA ADELANTE}$$

LO MISMO OCURRE CON Q PUES EN CADA NÉSTIC DE CADA OLA HACIA ATÁS, HAY ALO SUMO UN LADO PUE NO SE SATURA, Y DEVOLVER FLUJO POR ÉL ES $O(1)$

$$[4] \text{ compl}(Q) = O(n) \# \text{ OLS HACIA ATÁS}$$

$$\# \text{ OLS HACIA ADELANTE} = \# \text{ OLS HACIA ATÁS}$$

EN CADA OLA HACIA ATÁS, SIEMPRE QUEDA EN LA ÚLTIMA, ALGÚN NÉSTIC ALTA DESBALANCEADO Y SE BLOQUEA, Y NUNCA SE DESBLOQUEA,

$$[5] \# \text{ OLS HACIA ATÁS} = O(n)$$

$$[3], [4] \text{ y } [5] \Rightarrow \text{compl}(P) = \text{compl}(Q) = O(n) \cdot O(n) = O(n^2)$$

$$\begin{aligned} ∴ \text{compl}(\text{FLUJO ADELANTE}) &= [1] + [2] + [3] + [4] \\ &= O(m) + O(m) + O(n^2) + O(n^2) \\ &= O(n^2) \end{aligned}$$

MAX FLOW MIN CUT

a) EL VALOR PT UNO FLUJO ES MENOR O IGUAL PTE LA CAPACIDAD DE TODO CORT

b) f FLUJO $\Rightarrow f$ MAXIMAL $\Leftrightarrow \exists$ CORTE S tq $v(f) = \text{cap}(S)$ (y EST CONST EN MÁX)

DENI:

a) VENOS EN UN LOMA DLT SI f ES UN FLUJO Y S ES UN CORT,

$$v(f) = f(S, \bar{S}) - \underbrace{f(\bar{S}, S)}_{\leq 0} \leq f(S, \bar{S}) \leq c(S, \bar{S}) = \text{cap}(S)$$

$$\sum_{\substack{x \in S \\ y \in \bar{S} \\ xy \in E}} f(xy) \geq 0 \quad \text{pues } f(xy) \geq 0 \quad \forall xy \in E$$

b) f FLUJO

(\Rightarrow) f MAXIMAL, DEFINIMOS $S = \{s\} \cup \{x \in V : \exists$ F-CAM-AUM ENTRE s y $x\}$

VENOS DLT S ES UN CORT, $S \in \mathcal{S}$ ✓

Si. NO FUERA CONST $\Rightarrow t \in S \Rightarrow \exists$ CAM-AUM ENTRE s y $t \Rightarrow$ PODER AUMENTAR EL FLUJO EN ALGUN "E"
 \therefore EXISTIRÍA f' CON $v(f') = v(f) + \epsilon > v(f)$
 ABSURDO PUES f ES MAXIMAL.

$\therefore t \notin S$ y S ES CONST,

AHORA PODEMOS USAR EL LMA MEDIANTE APROXIMACIÓN PARA UNA UNA

10] $v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$

11] • $f(S, \bar{S}) = \sum_{\substack{x \in S \\ y \in \bar{S} \\ xy \in E}} f(xy)$ PARA QUEDAR PELA \bar{xy} AT LA SUMATORIA,
 $x \in S \Rightarrow \exists$ S-CAM-AUM ENTRE S Y x
 $y \in \bar{S} \Rightarrow \exists$ F-CAM-AUM ENTRE S Y y

$\bar{xy} \in E \Rightarrow S \dots \bar{xy}$ PODRÍA SER CAM-AUM PERO NO NO ES
 $\therefore f(\bar{xy}) = c(\bar{xy}) \quad \forall \bar{xy}$

$\therefore f(S, \bar{S}) = c(S, \bar{S}) = \text{cap}(S)$

• $f(\bar{S}, S) = \sum_{\substack{y \in S \\ x \in \bar{S} \\ xy \in E}} f(xy)$ PARA QUEDAR PELA \bar{xy} , $y \in S \Rightarrow \exists$ S...Y F-CAM-AUM

$x \in \bar{S} \Rightarrow \exists$ S...X S-CAM-AUM
 $\bar{xy} \in E \Rightarrow$ LO PODRÍA AGREGAR S...Y X, PERO
 ESE CAMINO NO ES AUMENTANTE $\Rightarrow f(\bar{xy}) = 0$

12] $\therefore f(\bar{S}, S) = 0$

13] $\therefore v(2) \Rightarrow v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S) = \text{cap}(S)$. CON TODOS CONST T CUMPLE

$\text{cap}(T) \geq v(f) = \text{cap}(S) \Rightarrow S$ ES MINIMAL.

(\Leftarrow) \exists const S

$$\text{tal p.e } v(S) = \text{cap}(S)$$

SEA g OTRA FLUJO,

$$v(g) \leq \text{cap}(S) = v(S) \Rightarrow S \text{ MAXIMAL}$$

\downarrow
(a)

y $S \Leftrightarrow$ MINIMAL PUES SI T ES OTRA CONST

$$\text{cap}(T) \geq v(S) = \text{cap}(S)$$

BABY BROOKS

$$G \text{ CONEXO NO REGULAR} \Rightarrow \chi(G) \leq \Delta$$

DEM

$$\text{SEA } X \text{ TAQ } d(X) = \delta$$

COMO $\text{BFS}(X)$, OBTIENE TODOS LOS VÉRTICES Y EL ORDEN EN EL QUE FUEON AGREGADOS.

AHORA COMO EN ESTE CASO EL ORDEN INVERSO AL OBTENIDO DE MANERA TAQ PUEDE LA RAÍZ X SER UN VÉRTICE NO COLORADO.

$$c(\text{primer vértice}) = 1$$

(ES PINTADO EN EL ORDEN INVERSO)

PARA COLOCAR CUALQUIER VÉRTICE $Z \neq X$, SABEMOS PUEDE Z FUE INCLUIDO A BFS POR UN VECINO ANTERIOR PUEDE AÚN NO FUE COLORADO, POR LO TANTO SE PINTARÁN, EN EL PEOR CASO, $d(Z)-1 \leq \Delta-1$ COLORES, SIGUENDO POSIBLE UTILIZAR ALGÚN COLOR EN $\{1, \dots, \Delta\}$ PARA Z .

AHORA BIEN CUANDO MEGAMOS A X , CONO $d(X) = \delta < \Delta$, HABRÁ SIEMPRE UN COLOR EN $\{1, \dots, \Delta\}$ ENTRE SUS VECINOS NO PINTADOS, ENTONCES LO PINTA.

DE ESTA FORMA SE OBTIENE UN COLORADO PROPIO DE G CON Δ COLORES

$$\therefore \chi(G) \leq \Delta$$

2-COLOR ES POLINOMIAL

PRIMER CASO DADO UN ALGORITMO POLINOMIAL PUESE GENERAR UN GRAFO G CON DOS CLASES Y MOSTRAR QUE SI EL COLORADO NO ES PROPIO ENTonces $\chi(G) \geq 3$.

SI G NO ES CONEXO SE CUELE ALGORITMO EN TODOS SUS COMPONENTES CONEXOS Y SIGUE SIENDO POLINOMIAL.

ALGORITMO DE COLORADO

SEA x UN VÉRTICE ARBITRARIO DE G

COMO $BFS(x)$ OBTIENELOS UNA ORGANIZACION DE VÉRTICES EN DISTINTOS NIVELES,

INTRODUCCION TODO VÉRTICE \in DIFERENTE

$$c(z) = \text{NIVEL}_{BFS}(z) \bmod 2$$

LUEGO CHEQUEO SI ES PROPIO, EN $\sum_{x \in V} c(x) = O(M)$

- SI ES PROPIO,
ENTONCES EXISTE UN COLORADO PROPIO CON 2 CLASES $\Rightarrow \chi(G) = 2$ ✓
- SI NO ES PROPIO,

$\exists u, v$ VÉRTICES tq $c(u) = c(v)$ y $uv \in E$

$$\Rightarrow \text{NIVEL}_{BFS}(u) \bmod 2 = \text{NIVEL}_{BFS}(v) \bmod 2$$

$$\Rightarrow \text{NIVEL}_{BFS}(u) + \text{NIVEL}_{BFS}(v) \text{ ES PAR } [1]$$

SABEMOS PUEDE EXISTIR UN CAMINO, PM BFS, DESDE UN PUNTO HASTA u Y OTRO HASTA v

$x \dots u$

$x \dots v$

\therefore EXISTE ALGUNA RUTA ENTRE LOS CAMINOS DIFERENTES $x \dots w \dots u$

$x \dots w \dots v$

COMO $uvw \in E$, FORMA UN CICLO

$w \dots uv \dots w$

¿CUANTOS LADOS TIENEN?

$$\begin{aligned} w \dots w &\Rightarrow \text{NIVEL}_{BFS}(w) - \text{NIVEL}_{BFS}(w) \\ v \dots w &\Rightarrow \text{NIVEL}_{BFS}(v) - \text{NIVEL}_{BFS}(w) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{EN TOTAL SON} \\ \text{NIVEL}_{BFS}(u) + \text{NIVEL}_{BFS}(v) \end{array} \right\}$$

$$wv \Rightarrow 1 \text{ LADO}$$

$$\begin{aligned} & \overbrace{-2 \cdot \text{NIVEL}_{BFS}(w)}^{\text{PM}} + 1 \\ & \overbrace{1}^{\text{IMP}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{PM} \\ \text{IMP} \end{array} \right\}$$

Y POR LO TANTO HAY UN CICLO CON UNA

CANTIDAD IMPAR DE LADOS $\Rightarrow \chi(G) \geq 3$.

Y DE ESTA FORMA SE DETERMINA EN TIEMPO POLINOMIAL SI UN GRAFO ES O NO 2-COLORABLE.
(SOBRE EL TAMAÑO DE G)

TEOREMA DE HALL

SEA G UN GRAFO BIPARTITO CON PARTES X Y Y .

EXISTE UN MATCHING COMPLETO DE X A Y si, TODOS SI CONJUNTO DE X TIENE MAS (o igual) VECINOS QUE ELEMENTOS. Formalmente:

$$\exists M \text{ MATCHING CON } |E(M)| = |X| \Leftrightarrow |\Gamma(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq X$$

$$(\Rightarrow) \quad \exists M \text{ MATCHING CON } |E(M)| = |X| \rightarrow \exists f \text{ INYECCION DE } X \text{ EN } Y, \text{ CON } f(x) \in \Gamma(x)$$

$$\therefore |f(S)| = |S| \quad \forall S \subseteq X \quad \text{y} \quad f(S) \subseteq \Gamma(S)$$

$$\Rightarrow |\Gamma(S)| \geq |f(S)| = |S| \quad \forall S \subseteq X.$$

$$(\Leftarrow) \quad \text{Supongamos LA CONDICIÓN DE HALL } \boxed{|\Gamma(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq X} \quad \text{VERDADERA.}$$

Si al correr el ALGORITMO para HALLAR MATCHING MAXIMAL NO PUDIERAMOS CON UN

$$M_{\max} \text{ TAL QUE } |E(M_{\max})| < |X|$$

UTILIZARE LA FORMA MATRICIAL DEL ALGORITMO P/ CONSTATAR UN $S \subseteq X$ QUE VIOLTA LA CONDICIÓN DE HALL.

COMO SE CORRER EL ALGORITMO SABE EL ÚLTIMO MATCHING M_{\max} EL CUAL NO CUBRE X .

$\rightarrow \exists$ FILAS SIN 'MATCHEAR' Y OTRAS FILAS ETIQUETADAS. DEFINIMOS:

$$S = \{ \text{FILAS ETIQUETADAS} \}$$

$$T = \{ \text{COLUMNAS ETIQUETADAS} \}$$

$$S_0 = \{ \text{FILAS ETIQUETADAS CON * } \neq \text{ O } \text{ PUES } |E(M_{\max})| < |X| \}$$

$$T_0 = \{ \text{COLS. ETIQUETADAS POR FILAS DE } S_0 \}$$

$$S_1 = \{ \text{FILAS ETIQUETADAS POR COLUMNAS DE } T_0 \}$$

:

$$T_{i+1} = \{ \text{COLUMNAS ETIQUETADAS POR } S_i \}$$

$$S_j = \{ \text{FILAS ETIQUETADAS POR } T_j \}$$

Es claro que

$$\left. \begin{array}{l} S = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_K \\ T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_K \end{array} \right\} \text{Y EN AMBOS LA UNIÓN ES DISJUNTA} \quad \boxed{1}$$

Pues el algoritmo se detiene al pasar de un S_k a un $T_{k+1} \neq \emptyset$ y NUNCA a la pasar de un T_j a un S_j pues al revisar columnas de T_j , o están libres y se extiende el matching (lo cual no ocurre por hip) o encuentran una fila y la etiquetan $\therefore S_j \neq \emptyset$, mas aún, cada columna de T_j etiqueta únicamente a la fila con la que está matched.

Por lo tanto $|S_j| = |T_j| \quad \forall j=1\dots K \quad \boxed{2}$

Ahora,

$$\begin{aligned} |S| &\stackrel{\boxed{1}}{=} |S_0| + |S_1| + \dots + |S_K| \\ &\stackrel{\boxed{2}}{=} |S_0| + |T_1| + \dots + |T_K| \\ &\stackrel{\boxed{1}, \boxed{2}}{=} |S_0| + |T| > |T| \quad \text{pues } S_0 \neq \emptyset \end{aligned}$$

Vemos que $T = \Gamma(S)$

$T \subseteq \Gamma(S)$ · Pues las filas de S sólo etiquetan columnas vecinas.

Sea $y \in \Gamma(S)$, sup $y \notin T$, entonces y no está etiquetado

$\Rightarrow \exists x \in S$ tq $y \in \Gamma(x)$, pero al escanear x debería haber etiquetado a y .
Asumido

$\therefore y \in T$

y así $T = \Gamma(S) \Rightarrow |S| > |\Gamma(S)|$ viola la condición de Hall

La cual es un absurdo pues viene de suponer que $|E(M_{\max})| < |X|$ ■

Teorema del matrimonio de KÖNIG

TODO GRAFO BIPARTITO REGULAR TIENE UN MATCHING PERFECTO

DEM

SEA $G = (V, E)$ UN GRAFO BIPARTITO REGULAR CON PARTES $X \subseteq V$.

PARA $W \subseteq V$ DEFINIMOS $E_W = \{\hat{w}v \in E : \hat{w} \in W\}$

SEA $S \subseteq X$ UN SUBCONJUNTO, SEA $\ell \in E_S$ UN LAZO

$$\Rightarrow \exists x \in S, y \in Y \quad \ell = xy \quad \left. \begin{array}{l} \ell = xy \\ y \in \Gamma(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \ell \in E_{\Gamma(S)}$$

ESTO SIGNIFICA QUE $E_S \subseteq E_{\Gamma(S)}$ Y EN PARTICULAR, $|E_S| \leq |E_{\Gamma(S)}|$ 1

VEAMOS $|E_W|$ PARA $W \subseteq X$ O $W \subseteq Y$

Si $\hat{w}v \in E_W$, $v \notin W$ PUES $M \subseteq X \Rightarrow v \in Y$
 $v \in W \Rightarrow v \in X$

$\Rightarrow E_W = \bigcup_{\hat{w} \in W} \{\hat{w}v, v \in \Gamma(\hat{w})\}$ Y LA UNION ES DISJUNTA.

$$\Rightarrow |E_W| = \sum_{\hat{w} \in W} d(\hat{w}) \stackrel{\text{REGULAR}}{=} \Delta \cdot |W| \quad [2]$$

LUGO POR 1 Y 2

$$\Delta \cdot |S| \leq \Delta \cdot |\Gamma(S)| \Rightarrow |S| \leq |\Gamma(S)| \quad \forall S \subseteq X$$

••• POR EL TEOREMA DE HALL EXISTE UN MATCHING COMPLETO DE $X \wedge Y$.

$\Rightarrow |X| \leq |Y|$, PERO LA ELECCIÓN DE UTILIZAR X SOBRE Y FUE ARBITRARIA,

POR LO TANTO TAMBÍEN VALE PARA Y , $|Y| \leq |X|$

$\therefore |X| = |Y|$ Y EL MATCHING COMPLETO ES PERFECTO. ■

TEOREMA DE LA COTA DE HAMMING

SEA $C \subseteq \{0,1\}^n$ UN CODIGO BINARIO DE LONGITUD n CON $\delta = \delta(C)$ Y $t = \left\lfloor \frac{\delta-1}{2} \right\rfloor$

ENTONCES $|C| \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i}}$

DEB

SEA $A = \bigcup_{v \in C} D_t(v)$ DONDE $D_t(v)$ ES EL DISCO DE RADIO t AL RECEPTOR DE v

COMO $t = \left\lfloor \frac{\delta-1}{2} \right\rfloor$, C CORRIGE t ERRORES $\Rightarrow D_t(v) \cap D_t(w) = \emptyset \quad \forall v, w, v \neq w \in C$

$$\therefore A \text{ ES UNA UNION DISJUNTA} \Rightarrow |A| = \sum_{v \in C} |D_t(v)| \quad [1]$$

SEA $S_r(v) = \{w \in \{0,1\}^n : d_H(v, w) = r\} \Rightarrow D_t(v) = \bigcup_{r=0}^t S_r(v) \text{ Y LA UNION ES DISJUNTA}$

$$\text{LUEGO } |D_t(v)| = \sum_{r=0}^t |S_r(v)| \quad [2] \quad \text{PUES } d_H(v, w) = r \Rightarrow d_H(v, w) \neq r' \quad \forall r' \neq r$$

NOTAR PUE
 $w \in S_r(v) \Leftrightarrow w \text{ DIFERENTE EN } r \text{ BITS DE } v$

\therefore HAY UNA BIYECCION ENTRE $S_r(v)$ Y EL CONJUNTO DE SUBCONJUNTOS DE r BITS EN LOS PUE LAS PALABRAS DE $S_r(v)$ DIFERENTES DE v .

$$\Rightarrow |S_r(v)| = |\text{CONJUNTO DE SUBCONJUNTOS DE } r \text{ BITS}| = \binom{n}{r}$$

$$\therefore |D_t(v)| = \sum_{r=0}^t \binom{n}{r}$$

AHORA, POR [1] INDEPENDIENTE DE v

$$|A| = \sum_{v \in C} |D_t(v)| = \sum_{v \in C} \left(\sum_{r=0}^t \binom{n}{r} \right) = |C| \cdot \sum_{r=0}^t \binom{n}{r}$$

AHORA BIEN, COMO $A \subseteq \{0,1\}^n \Rightarrow |A| \leq 2^n$

$$\therefore |C| \cdot \sum_{r=0}^t \binom{n}{r} \leq 2^n \Rightarrow |C| \leq \frac{2^n}{\sum_{r=0}^t \binom{n}{r}} \quad \left(\text{NOTAR PUE } \sum_{r=0}^t \binom{n}{r} > 0 \quad \forall n \geq 0, t \geq 0 \right)$$

Si H es matriz de ceros de C , entonces

$$\delta(C) = \min\{j : \exists \text{ un conjunto de } j \text{ columnas LD en } H\}$$

DEM $\underline{\delta \leq \delta} = \delta(C)$ y $M = \min\{j : \exists \text{ un conjunto de } j \text{ columnas LD en } H\}$
SEA $H^{(k)}$ LA k -ésima columna de H .

$\boxed{M \leq \delta}$

Como C es unitaria, $\delta = \min\{|x| : x \in C, x \neq 0\}$

SEA $x \in C, x \neq 0$ con $|x| = \delta$ (existe porque es un mínimo)

$|x| = \delta \Rightarrow x$ tiene δ unos ("1's") por lo tanto

$x = e_{i_1} + \dots + e_{i_\delta}$ donde i_1, \dots, i_δ son las posiciones de los "1's" en x .

Luego como $x \in C$ y $c \in \text{Nu}(H)$, $Hx^t = 0$

$0 = Hx^t = H(e_{i_1} + \dots + e_{i_\delta})^t = H(e_{i_1})^t + \dots + H(e_{i_\delta})^t = H^{(i_1)} + \dots + H^{(i_\delta)}$
 $\therefore \{H^{(i_1)}, \dots, H^{(i_\delta)}\}$ son δ columnas LD de H

$\Rightarrow M \leq \delta$

$\boxed{\delta \leq M}$

SEA $H^{(i_1)}, \dots, H^{(i_m)}$ m columnas LD de H , como M es el mínimo,

$0 = H^{(i_1)} + \dots + H^{(i_m)} = H(e_{j_1})^t + \dots + H(e_{j_m})^t = H(e_{j_1} + \dots + e_{j_m})^t$

$\Rightarrow \underbrace{(e_{j_1} + \dots + e_{j_m})}_{\neq 0} \in \text{Nu}(H) = C \quad y \quad |(e_{j_1} + \dots + e_{j_m})| = m \geq \delta \quad (\perp \delta = \min\{|x| : x \in C, x \neq 0\})$

Finalmente, $\boxed{\delta = M}$

SEA G UN CÓDIGO CÍCLICO DE DIMENSIÓN K Y LONGITUD N Y SEA $g(x)$ SU POLINOMIO GENERADOR. PROBAR QUE:

$$i) \quad C = \{ p(x) : g(r(p)) \leq N \text{ y } g(x) | p(x) \}$$

$$ii) \quad C = \{ r(x) \odot g(x) : r \text{ es un polinomio cuáquico} \}$$

$$iii) \quad g(r(g)) = N - K$$

$$iv) \quad g(x) \text{ divide a } 1+x^N$$

DEM:

$$\text{SEAN } C_1 = \{ p(x) : g(r(p)) \leq N \text{ y } g(x) | p(x) \}$$

$$C_2 = \{ r(x) \odot g(x) : r \text{ es un polinomio cuáquico} \}$$

PMA proba i) y ii), veremos que $C_1 \subseteq C_2 \subseteq C \subseteq C_1$, y $\therefore C_1 = C = C_2$

$$\boxed{C_1 \subseteq C_2} \quad p(x) \in C_1 \Rightarrow \underbrace{g(r(p)) \leq N}_{\text{y } g(x) | p(x)} \Rightarrow \exists q(x) \text{ tq } p(x) = q(x)g(x)$$

$$\Rightarrow p(x) \bmod (1+x^N) = r(x) \quad p(x) \bmod (1+x^N) = q(x)g(x) \bmod (1+x^N)$$

$$p(x) = q(x) \odot g(x) \in C_2$$

$$\boxed{C_2 \subseteq C} \quad \text{SEA } p(x) = q(x) \odot r(x) \text{ PMA ALGÚN POLINOMIO } r(x) \quad (p(x) \in C_2)$$

$$(N \in \mathbb{Z}) \quad r(x) = r_0 + r_1x + \dots + r_dx^d \text{ PMA ALGÚN D.}$$

$$\Rightarrow p(x) = q(x) \odot r(x) = r(x) \odot q(x) = (r_0 + r_1x + \dots + r_dx^d) \odot q(x)$$

$$= r_0 \odot q(x) + r_1x \odot q(x) + \dots + r_dx^d \odot q(x)$$

$$= r_0 \odot q(x) + r_1 \cdot \text{ROT}(q(x)) + \dots + r_d \cdot \text{ROT}^d(q(x)) \in C \text{ PUES ES UNA COMBINACIÓN LINEAL DE ELEMENTOS EN } C.$$

$$\boxed{C \subseteq C_1} \quad p(x) \in C \Rightarrow g(r(p)) \leq N$$

$$\text{SABEMOS QUE } \exists q(x) \text{ y } r(x) \text{ tq } p(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x), \text{ CON } g(r) < g(g)$$

$$\text{AHORA, } p(x) \bmod (1+x^N) = (q(x) \cdot g(x) + r(x)) \bmod (1+x^N)$$

$$p(x) = q(x) \odot g(x) + (r(x) \bmod (1+x^N)), \quad g(r) < g(g) < N \Rightarrow r \bmod 1+x^N = r$$

$$\begin{matrix} p(x) &= q(x) \odot g(x) + r(x) \\ &\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ &C \quad C \quad C \end{matrix}$$

$$P \in \mathbb{Z} \quad r(x) \in C \text{ y } g(r) < g(g) \Rightarrow r(x) = 0 \quad \therefore \quad g(x) | p(x) \text{ y } g(r) < N \Rightarrow p(x) \in C_1,$$

iii) Vamos a probar $C = C_1$

$$\because p(x) \in C \Leftrightarrow \text{gr}(p) \leq n \quad y \quad \exists q(x) \text{ tal que } p(x) = q(x)q'(x)$$

$$\text{gr}(p) \leq n \Rightarrow \text{gr}(q \cdot q') \leq n \Rightarrow \text{gr}(q) + \text{gr}(q') \leq n$$

$$\Rightarrow \text{gr}(q) \leq n - \text{gr}(q')$$

Si $r(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a $n - \text{gr}(q')$ $\Rightarrow \text{gr}(qr) \leq n - \text{gr}(q')$ $y qr \in C$

$\therefore \exists$ una biyección entre C y los polinomios de grado menor a $n - \text{gr}(q')$

Son C es finito,

$$|C| = 2^k$$

Por la biyección

$$|C| = |\text{conjunto de polinomios de grado menor a } n - \text{gr}(q')| = 2^{n - \text{gr}(q')}$$

$$\therefore k = n - \text{gr}(q') \quad \text{o}'' \quad \text{gr}(q') = n - k$$

iv) $(1+x^n) = q(x)q'(x) + r(x)$ con $\text{gr}(r) < \text{gr}(q')$, donde q y r existen por la división $\frac{1+x^n}{q(x)}$

$$(1+x^n) \bmod (1+x^n) = 0 = (q(x)q'(x) + r(x)) \bmod (1+x^n)$$

$$0 = q(x)q'(x) + r(x) \bmod (1+x^n)$$

$$r(x) = q(x)q'(x) \in C \quad y \text{ como } \text{gr}(r) < \text{gr}(q') \Rightarrow r(x) = 0 \quad y \therefore q(x) \mid (1+x^n)$$

3-SAT ES NP-COMPLETO

DEM: VENEMOS DE 2-SAT \leq_p 3-SAT

SEA B UNA INSTANCIA DE CNF-SAT CON VARIABLES x_1, \dots, x_n

$B = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ CON $D_j = l_{j,1} \vee \dots \vee l_{j,r_j}$ DONDE $l_{j,i}$ SON LITERALES (VARIABLES O SUS NEGACIONES)

DEFINIMOS UN ALGORITMO POLINOMIAL A TAL QUE $A(B)$ ESTÉ EN EL DOMINIO DE 3-SAT, Y QUE

B SEA SATISFAZIBLE $\Leftrightarrow A(B)$ LO ES, NOTA PUE $B(\vec{b}) = 1 \Leftrightarrow D_j(\vec{b}) = 1 \forall j$ (\vec{b} UNA ASIGNACIÓN DE LOS x_i)

PARA ESO, $A(B) = E_1 \wedge \dots \wedge E_m$ DONDE E_j SERÁN CONJUNCIÓNES DE DISJUNCIÓNES DE 3 LITERALES.

PODÉS LO TANTO A TRANSFORMAR $D_j \rightarrow E_j$ DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\boxed{r_j = 3} \quad E_j = D_j$$

$$\boxed{r_j \geq 4} \quad E_j = (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3}) \wedge (\overline{l_{j,1}} \vee l_{j,2} \vee l_{j,4}) \wedge (\overline{l_{j,2}} \vee l_{j,3} \vee l_{j,4}) \wedge \dots \wedge (\overline{l_{j,r_j-4}} \vee l_{j,r_j-3} \vee l_{j,r_j-2}) \\ \wedge (\overline{l_{j,r_j-3}} \vee l_{j,r_j-2} \vee l_{j,r_j-1})$$

$$\boxed{r_j = 1} \quad E_j = (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3}) \wedge (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee \overline{l_{j,3}}) \wedge (l_{j,1} \vee \overline{l_{j,2}} \vee l_{j,3}) \wedge (l_{j,1} \vee \overline{l_{j,2}} \vee \overline{l_{j,3}})$$

$$\boxed{r_j = 2} \quad E_j = (l_{j,1} \wedge l_{j,2} \wedge l_{j,3}) \wedge (l_{j,1} \wedge l_{j,2} \wedge \overline{l_{j,3}})$$

ES CLARO QUE $D_j(\vec{b}) = 1 \Leftrightarrow E_j(\vec{b}, \vec{d}) = 1$ PARA LOS CASOS DE $r_j = 1, 2, 3$
ASIGNACIONES DE LOS y_i

(\Leftarrow , PMA $r_j \geq 4$) SUPONGAMOS QUE NO SE COMPLI, I.E. $\exists \vec{b}, \vec{d} \text{ TAL QUE } E_j(\vec{b}, \vec{d}) = 1 \wedge D_j(\vec{b}) = 0$

$$0 = D_j(\vec{b}) = (l_{j,1} \vee \dots \vee l_{j,r_j})(\vec{b}) \Rightarrow l_{j,k}(\vec{b}) = 0 \quad \forall k$$

$$\Rightarrow E_j(\vec{b}, \vec{d}) = (0 \vee 0 \vee l_{j,1}) \wedge (\overline{l_{j,1}} \vee l_{j,2} \vee 0) \wedge \dots \wedge (\overline{l_{j,r_j-4}} \vee l_{j,r_j-3} \vee 0) \wedge (\overline{l_{j,r_j-3}} \vee 0 \vee 0) \\ = l_{j,1} \wedge (\overline{l_{j,1}} \Rightarrow l_{j,2}) \wedge \dots \wedge (\overline{l_{j,r_j-4}} \Rightarrow l_{j,r_j-3}) \wedge \overline{l_{j,r_j-3}} \\ = 0 \quad \text{ABSURDO PUES } E_j(\vec{b}, \vec{d}) = 1$$

$(\Rightarrow, \exists M \in \Gamma_j \ni)$

SUPONGAMOS $D_j(\vec{b}) = 1$, ENTONCES $\exists \vec{r}_q, R_{j,k}(\vec{b}) = 1$

DEFINIMOS $\vec{d} = (d_1, \dots, d_{r_{j-3}})$ TAL QUE $d_1 = \dots = d_{k-2} = 1$ $y_{j,t}(\vec{d}) = d_t$
 $d_{k-1} = d_k = \dots = d_{r_{j-3}} = 0$

Luego

$$E_j(\vec{b}, \vec{d}) = (q_{j,1} \vee q_{j,2} \vee q_{j,3}) | (\vec{b}, \vec{d}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{TODOS LOS TÉRMINOS SON 1} \\ \text{PUEDE CONTENER UN } d_p \text{ CON } 1 \leq p \leq k-2 \end{array} \right\}$$
$$\wedge (\overline{q_{j,1} \vee q_{j,2} \vee q_{j,3}}) | (\vec{b}, \vec{d})$$
$$\wedge \dots \quad \left. \begin{array}{l} \text{...} \\ \text{...} \end{array} \right\}$$
$$\wedge (\overline{q_{j,k-3} \vee q_{j,k-2} \vee q_{j,k-1}}) | (\vec{b}, \vec{d}) \wedge (\overline{\overline{q_{j,k-2} \vee q_{j,k-1} \vee q_{j,k}}} | (\vec{b}, \vec{d}))$$
$$\wedge (\overline{q_{j,k-1} \vee \dots}) | (\vec{b}, \vec{d}) \wedge \dots \wedge (\overline{q_{j,r_{j-3}}} \vee \dots) | (\vec{b}, \vec{d}) = 1$$
$$\left. \begin{array}{l} \text{...} \\ \text{...} \end{array} \right\}$$

TODOS LOS TÉRMINOS SON 1 PUEDE CONTENER UN d_q CON $k-2 < q \leq r_{j-3}$

Así, queremos demostrar que $D_j(\vec{b}) = 1 \Leftrightarrow \exists \vec{r}_q, E_j(\vec{b}, \vec{d}) = 1 \quad \forall j$

$\therefore B$ ES SATISFAZIBLE $\Leftrightarrow A(B)$ ES SATISFAZIBLE

3-COLOR ES NP-COMPLEJO

DEM: VERDAD QUE $3\text{-SAT} \leq_p 3\text{-COLOR}$ EN TIEMPO POLINOMIAL

PARA ELLA, DEBEMOS TRANSFORMAR UN ELEMENTO B DEL DOMINIO DE 3-SAT A UN ELEMENTO

$A(B) = G$ DEL DOMINIO DE 3-COLOR, Y MOSTRAR QUE B ES SATISFAZIBLE $\Leftrightarrow \chi(G) \leq 3$

SABEMOS QUE B ES DE LA FORMA $D_1 \wedge \dots \wedge D_M$ DONDE $D_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$, CON $l_{jk} = x_{j,k} \text{ ó } \bar{x}_{j,k}$

LUEGO A TRANSFORMAR B EN G , EN TIEMPO POLINOMIAL, DE LA SIGUIENTE FORMA:

VÉRTICES DE G

$$\{U_1, \dots, U_n, W_1, \dots, W_n\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^M \{a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, e_{j1}, e_{j2}, e_{j3}\} \right) \cup \{t, \text{CAPITÁN}\}$$

PARA LAS VARIABLES DE B
 x_1, \dots, x_n

LADOS DE G

TRIÁNGULOS $\{(tu_i), (tw_i), (v,w_i)\}$ PARA $i=1, \dots, n$

TRIÁNGULOS $\{(a_{ji}, a_{j2}), (a_{j2}, a_{j3}), (a_{j3}, a_{ji})\}$ PARA $j=1, \dots, M$

LADOS $\{(a_{jr}, e_{jr})\}$ PARA $j=1, \dots, M$ Y $r=1, 2, 3$

LADOS $\{((\text{CAPITÁN}), l_{jk})\}$ PARA $j=1, \dots, M$ Y $k=1, 2, 3$

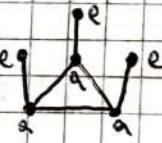
LADOS (CAPITÁN) t

PARA UN ELEMENTO l_{jk} , DEFINIMOS EL VÉRTICE CORRESPONDIENTE A ÉL COMO

$$\nabla(l_{jk}) = \begin{cases} U_k & \text{SI } \exists k \text{ tq } l_{jk} = x_k \\ W_k & \text{SI } \exists k \text{ tq } l_{jk} = \bar{x}_k \end{cases}$$

FINALMENTE, AGREGAMOS LOS LADOS

$$\{(e_{jr}, \nabla(l_{jk}))\} \text{ PARA } j=1, \dots, M \text{ Y } r=1, 2, 3$$



ES CLARO QUE LA CONSTRUCCIÓN DE G ES EN TIEMPO POLINOMIAL EN EL TAMAÑO DE B .

AHORA DEBEMOS PROBAR

$$[B \text{ SATISFAZIBLE} \Leftrightarrow \chi(G) \leq 3] \star$$

NOTAMOS QUE B SATISFAZIBLE $\Leftrightarrow \exists \vec{b}$ VERSIÓN DE ASIGNACIÓN DE x_i 'S TAL QUE $B(\vec{b}) = 1 \Leftrightarrow D_j(\vec{b}) = 1 \forall j=1, \dots, M$

* (\Leftarrow) $X(G) \leq 3$ donde $G = A(\beta)$, $V = \text{"vértices de } G\text{"}$, $E = \text{"aristas de } G\text{"}$

Como G tiene triángulos (K_3) de subgrafos, $X(G) \geq 3 \Rightarrow X(G) = 3$

$\Rightarrow \exists$ un colorante C propio de G con 3 colores. $c(v) = \text{"color de } v\text{"}$

Como $(t(\text{CAPITAN})) \in E \Rightarrow c(t) \neq c(\text{CAPITAN})$

$\therefore C$ utiliza los colores $\{c(t), c(\text{CAPITAN}), c_3\}$

DEFINIMOS $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ tal que $b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } c(v_i) = c(\text{CAPITAN}) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

PROBAREMOS QUE $B(\vec{b}) = 1$ i.e. B es satisfactorio

PARA ELLA, HAY QUE MOSTRAR QUE $B_j(\vec{b}) = 1 \quad \forall j=1, \dots, M$, Y PARA ELLA, HAY QUE MOSTRAR QUE

$\forall j=1, \dots, M, \exists r \text{ tq } \varphi_{j,r}(\vec{b}) = 1$

SEA $j \in \{1, \dots, M\}$. COMO LOS " $a_{j,r}$ " SON TRIÁNGULOS QUE UTILIZAN LOS 3 COLORES,

$\exists r \text{ tq } c(a_{j,r}) = c(t) \quad \boxed{1}$

$\left. \begin{array}{l} (e_j, a_{j,r}) \in E \Rightarrow c(e_j) \neq c(a_{j,r}) = c(t) \\ (e_j, (\text{CAPITAN})) \in E \Rightarrow c(e_j) \neq c(\text{CAPITAN}) \end{array} \right\} \Rightarrow c(e_j) = c_3 \quad \boxed{2}$

$(e_j, \varphi(\varphi_{j,r})) \in E \quad \boxed{2} \Rightarrow c(\varphi(\varphi_{j,r})) \neq c_3 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \varphi(\varphi_{j,r}) = u \text{ o } w \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c(\varphi(\varphi_{j,r})) = c(\text{CAPITAN}) \\ c(\varphi(\varphi_{j,r})) = c(u) \end{array} \right\} c(\varphi(\varphi_{j,r})) = c(\text{CAPITAN})$

NEAMOZ QUE OCURRÍA CON $\varphi_{j,r}$ PARA LOS CASOS $\varphi_{j,r} = \text{variable}$ Y $\varphi_{j,r} = \overline{\text{variable}}$

Si $\varphi_{j,r}$ ES UNA VARIABLE, $\underbrace{\exists K \text{ tq } \varphi_{j,r} = x_K}_{\Rightarrow \varphi_{j,r}(\vec{b}) = x_K(\vec{b}) = b_K} \Rightarrow \varphi_{j,r}(\vec{b}) = x_K(\vec{b}) = b_K \quad \left. \begin{array}{l} \\ \varphi(\varphi_{j,r}) = u_K \end{array} \right\} \varphi(\varphi_{j,r})(\vec{b}) = 1$

$$\Rightarrow \varphi(\varphi_{j,r}) = u_K \quad \therefore c(u_K) = c(\varphi(\varphi_{j,r})) = c(\text{CAPITAN}) \Rightarrow b_K = 1$$

Si $\varphi_{j,r}$ ES UNA NO VARIABLE VARIABLE, $\underbrace{\exists K \text{ tq } \varphi_{j,r} = \bar{x}_K}_{\Rightarrow \varphi_{j,r}(\vec{b}) = \bar{x}_K(\vec{b}) = 1 - b_K} \Rightarrow \varphi_{j,r}(\vec{b}) = \bar{x}_K(\vec{b}) = 1 - b_K \quad \left. \begin{array}{l} \\ \varphi(\varphi_{j,r})(\vec{b}) = 1 \end{array} \right\} \varphi(\varphi_{j,r})(\vec{b}) = 1$

$$\Rightarrow \varphi(\varphi_{j,r}) = w_K \quad \therefore c(w_K) = c(\varphi(\varphi_{j,r})) = c(\text{CAPITAN})$$

$$\left. \begin{array}{l} c(w_K) \neq c(\text{CAPITAN}) \\ u_K w_K \in E \end{array} \right\} c(w_K) \neq c(\text{CAPITAN}) \Rightarrow b_K = 0$$

POR LO TANTO $\forall j=1, \dots, M, \exists r \text{ tq } \varphi_{j,r}(\vec{b}) = 1 \quad \therefore B(\vec{b}) = 1 \Rightarrow B$ SE SATISFACTORIO

$\star (\Rightarrow) \quad B$ SATISFACILIT $\Rightarrow \exists \vec{b} \text{ tal que } B(\vec{b})=1$

DANÉ UN COLORITO C PROPIO DE $G=A(B)$ CON 3 COLORES Y POR LO TANTO $X(G) \leq 3$.

$C(CAPITAN)=ESCRAMADA$, $c(t)=VERDE \Rightarrow$ EL LADO $(t(CAPITAN))$ MANTIENE LO PROPIO DEL COLORITO.

A PARTIR DE ALGUN \vec{b} tal que $B(\vec{b})=1$, DEFINIMOS (CON $\vec{b}=(b_1, \dots, b_n)$)

$$c(u_i) = \begin{cases} ESCRAMADA & \text{si } b_i = 1 \\ NEGRO & \text{si } b_i = 0 \end{cases} \quad y \quad c(w_i) = \begin{cases} NEGRO & \text{si } b_i = 1 \\ ESCRAMADA & \text{si } b_i = 0 \end{cases}$$

DE ESTA FORMA, LOS TRIÁNGULOS $\{tu_i, tw_i, uw_i, w_i\}$ PARA $i=1, \dots, n$ MANTIENEN LO PROPIO DEL COLORITO PUES UTILIZAN LOS 3 COLORES.

Como $B(\vec{b})=1$, $D_j(\vec{b})=1 \forall j=1, \dots, m \Rightarrow H_j=1, \dots, m, \exists k_j \text{ tal que } q_{j,k_j}(\vec{b})=1$. TOMO ALGUN k_j AL AZAR.

Y DEFINIMOS

$$\left. \begin{array}{l} c(a_{j,k_j}) = VERDE \\ c(a_{j,r}) = \text{UNO NEGRO Y OTRO} \\ \quad \quad \quad ESCRAMADA \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{LOS TRIÁNGULOS } \{a_{j,1}, a_{j,2}, a_{j,3}, a_{j,4}\} \text{ PARA } j=1, \dots, m \\ \text{MANTIENEN LO PROPIO DEL COLORITO. (USAN LOS 3 COLORES)} \end{array}$$

COLORIEMOS

$$c(e_{j,k_j}) = NEGRO \quad y \quad c(e_{j,r}) = VERDE \text{ PARA } r \neq k_j$$

LUEGO LOS SIGUIENTES NODOS MANTIENEN LO PROPIO DEL COLORITO:

$$\{(e_{j,q}, CAPITAN)\} \text{ PARA } j=1, \dots, m \text{ y } q=1, 2, 3 \text{ PUES } c(e_{j,q}) = NEGRO \text{ O VERDE} \quad y \quad c(CAPITAN) = ESCRAMADA$$

$$\{(e_{j,r}, a_{j,r})\} \text{ PARA } j=1, \dots, m \text{ y } r \in \{1, 2, 3\} \text{ CON } r \neq k_j \text{ PUES } c(e_{j,r}) = VERDE \quad y \quad c(a_{j,r}) = NEGRO \text{ O ESCRAMADA}$$

$$\{(e_{j,k_j}, a_{j,k_j})\} \text{ PARA } j=1, \dots, m \text{ PUES } c(e_{j,k_j}) = NEGRO \quad y \quad c(a_{j,k_j}) = VERDE$$

$$\{(e_{j,r}, \nabla(q_{j,r}))\} \text{ PARA } j=1, \dots, m \text{ y } r \in \{1, 2, 3\} \text{ CON } r \neq k_j, \text{ PUES } c(e_{j,r}) = VERDE \quad y \quad \nabla(q_{j,r}) = U_{NEGRO} \text{ O } W_{NEGRO} \Rightarrow c(\nabla(q_{j,r})) = \begin{cases} NEGRO & \text{SI } U_{NEGRO} \\ ESCRAMADA & \text{SI } W_{NEGRO} \end{cases}$$

SÓLO QUEDA PONER EL NODO $e_{j,k_j} \nabla(q_{j,k_j})$,

$$\text{Si } q_{j,k_j} \text{ ES UNA VARIABLE, } \exists i \text{ tal que } q_{j,k_j} = x_i \Rightarrow \nabla(q_{j,k_j}) = U_i \quad y \quad \nabla(q_{j,k_j})(\vec{b}) = 1 \Rightarrow x_i(\vec{b}) = 1 \Rightarrow b_i = 1 \Rightarrow c(u_i) = ESCRAMADA$$

$$\therefore c(\nabla(q_{j,k_j})) = c(u_i) = ESCRAMADA \quad y \quad c(e_{j,k_j}) = NEGRO \quad . \because \text{EL NODO } e_{j,k_j} \nabla(q_{j,k_j}) \text{ MANTIENE LO PROPIO DEL COLORITO}$$

$$\text{Si } q_{j,k_j} \text{ ES UNA NEGACIÓN DE UNA VARIABLE, } \exists i \text{ tal que } q_{j,k_j} = \bar{x}_i \Rightarrow \nabla(q_{j,k_j})(\vec{b}) = \bar{x}_i(\vec{b}) = 1 - b_i \Rightarrow b_i = 0$$

$$\therefore \nabla(q_{j,k_j}) = W_i \quad y \quad c(w_i) = ESCRAMADA \quad y \quad c(e_{j,k_j}) = NEGRO \Rightarrow c(w_i) = ESCRAMADA$$

Por lo que EL LADO $e_{j,k_j} \nabla(q_{j,k_j})$ MANTIENE LO PROPIO DEL COLORITO.

Finalmente, B SATISFACILIT $\Rightarrow \exists$ COLORITO C PROPIO DE $A(\vec{b})=G$ CON 3 COLORES $\Rightarrow X(G) \leq 3$

TEOREMA DEL MATRIMONIO 3-D

MATRIMONIO 3D ES NP-COMPLETO

DEM

MOSTRALEMOS QUE 3-SAT \leq_p MATRIMONIO 3D

ESTO ES, A PARTIR DE UNA INSTANCIA $B = D_1 \wedge \dots \wedge D_M$ CON VARIABLES x_1, \dots, x_n

y $D_j = \ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee \ell_{j3}$ CON ℓ_{jk} VARIABLES O NEGACIONES DE VARIABLES,

CONSTRUIR EN TIEMPO POLINOMIAL SABE EL TAMAÑO DE B UN 3-HIPERGRAFO H DE

MANERA QUE, PARA QUE B ES SATISFAZIBLE $\Leftrightarrow H$ TIENE UN MATCHING PERFECTO

NOTAR QUE PARA QUE H SEA UNA INSTANCIA DE MATRIMONIO 3D, SUS 3 PARTES X, Y, Z DEBEN

TEVER LA MISMA CARDINALIDAD. CONSTRUCCIÓN DE H EN TIEMPO POLINOMIAL:

NOTACIÓN: $j \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $r \in \{1, 2, 3\}$, $k \in \{1, \dots, M(n-1)\}$

VÉRTICES DE H , EN 3 PARTES DISJUNTAS DE IGUAL CARDINALIDAD:

$$X = \{a_{ij}\}_{ij} \cup \{s_j\}_j \cup \{g_k\}_k \quad |X| = nm + m + m(n-1) = 2mn$$

$$Y = \{b_{ij}\}_{ij} \cup \{t_j\}_j \cup \{h_k\}_k \quad |Y| = nm + m + m(n-1) = 2mn = |X|$$

$$Z = \{v_{ij}\}_{ij} \cup \{w_{ij}\}_{ij} \quad |Z| = nm + nm = 2mn = |X| = |Y|$$

UNA EDGE DE H : $E(H) = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$

$$E_0 = \{\{a_{ij}, b_{ij}, v_{ij}\}\}_{ij} \quad E_1 = \{\{a_{ij}, b_{ij}, w_{ij}\}\}_{ij} \quad j=n \Rightarrow i+j=1$$

$$E_2 = \{\{g_k, h_k, z\} : z \in Z\}_k$$

DEFINIENDO

$$v_{jr} = \begin{cases} v_{ij} & \text{si } \ell_{jr} = x_i \\ w_{ij} & \text{si } \ell_{jr} = \bar{x}_i \end{cases} \quad \text{Y LUEGO} \quad E_3 = \{\{s_j, t_j, v_{jr}\}\}_{jr}$$

ES CLARO QUE LA CONSTRUCCIÓN DE H ES EN TIEMPO POLINOMIAL DEPENDIENTE DE N Y M (TAMAÑO DE B). AHORA DEBERÍAMOS MOSTRAR QUE B ES SATISFAZIBLE \Leftrightarrow EXISTE UN MATCHING PERFECTO EN H .

\Rightarrow B SATISFACIBLE, $S \in A$ \vec{b} s.t. $B(\vec{b})=1$, y $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ ASIGNACIONES DE VARIABLES.

CONSIDERAMOS A M UN MATCHING MAXIMAL Y MOSTRAMOS QUE ES PERFECTO.

LAOS DE M : $F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3$

$$F_0 = \left\{ \{a_{ij}, b_{ij}, u_{ij}\} : j \in \{1, \dots, M\} \text{ y } b_i = 0 \right\} \subseteq E_0$$

$$F_1 = \left\{ \{a_{i(j+1)}, b_{ij}, w_{ij}\} : j \in \{1, \dots, M-1\} \text{ y } b_i = 1 \right\} \subseteq E_1 \quad (j+1=i \text{ si } j=M)$$

ESTOS LAOS SON DISJUNTOS PUES LOS b_i NO PUEDEN SER 0 Y 1 AL MISMO TIEMPO.

$$B(\vec{b})=1 \Rightarrow D_i(\vec{b})=1 \quad \forall i=1, \dots, M \Rightarrow \forall j=1, \dots, M, \exists r_j \text{ tal que } d_{jr_j}(\vec{b})=1 \quad (\text{SI HAY MÁS DE 1, ELIGIR})$$

LUEGO DEFINIMOS

$$F_3 = \left\{ \{s_j, t_j, v_{jr_j}\} \right\}_j, \text{ COMO EXISTEN UN SOLO } r_j \text{ P/C } j, \text{ LOS LAOS DE } F_3 \text{ SON DISJUNTOS ENTRE SÍ}$$

SUPONDREMOS QUE LOS LAOS DE F_3 NO SON DISJUNTOS CON LOS LAOS DE F_0 O F_2 .

$$\Rightarrow \exists L_3 \in F_3 \quad \exists L_0 \in F_0 \quad \text{TA} \quad L_3 \cap L_0 \neq \emptyset \\ \text{O} \quad \exists L_1 \in F_1 \quad \text{TA} \quad L_1 \cap L_0 \neq \emptyset$$

NORMALIZA ESTA INTERSECCIÓN PARA QUE PUEDE CONTENER UN VERT. v_{jr_j} , PUES $\forall L \in F_0, F_1, s_j \notin L \text{ y } t_j \notin L$

$$\text{CASO 1: } L_0 = \{a_{ij}, b_{ij}, v_{jr_j}\} \in F_0 \Rightarrow v_{jr_j} = u_{ij} \Rightarrow d_{jr_j} = x_i \\ b_i = 0 \quad \left. \begin{array}{l} 1 = d_{jr_j}(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 0 \text{ ABSURDO.} \\ \end{array} \right\}$$

$$\text{CASO 2: } L_1 = \{a_{i(j+1)}, b_{ij}, v_{jr_j}\} \in F_1 \Rightarrow v_{jr_j} = w_i \Rightarrow d_{jr_j} = \bar{x}_i \\ \Rightarrow b_i = 1 \quad \left. \begin{array}{l} 1 = d_{jr_j}(\vec{b}) = \bar{x}_i(\vec{b}) = 1 - b_i = 0 \text{ ABSURDO.} \\ \end{array} \right\}$$

LUEGO LOS LAOS DE F_3 SON DISJUNTOS CON LOS DE F_0 Y F_1 .

SEA $N = \{z \in \mathbb{Z} : z \text{ NO ESTÁ CUBIERTO POR } F_0, F_1, \text{ O } F_3\}$

VEMOS $|Z - N| = |\{z \in \mathbb{Z} : z \text{ ESTÁ CUBIERTO POR } F_0, F_1, \text{ O } F_3\}|$

- F_3 CUBRE M ELEMENTOS DE \mathbb{Z} (UN v_{jr_j} POR CADA j)

Si $Q = \#\{i : b_i = 1\}$ y $P = \#\{i : b_i = 0\}$, LUEGO

- F_0 CUBRE $P \cdot M$ VÉRTICES $u_{ij} \in \mathbb{Z}$ (LAOS $\{a_{ij}, b_{ij}, u_{ij}\}, b_i = 0\}$)

- F_1 CUBRE $Q \cdot M$ VÉRTICES $w_{ij} \in \mathbb{Z}$ (LAOS $\{a_{i(j+1)}, b_{ij}, w_{ij}\}, b_i = 1\}$)

$$\text{Así, } |Z-N| = M + PM + q, M \stackrel{p+q=n}{\uparrow} = M(n+1)$$

$$\text{LUEGO } |N| = |Z| - |Z-N| \\ = 2nM - M(n+1) = M(n-1)$$

$\Rightarrow \exists$ Biyección $f: \{1, \dots, M(n-1)\} \rightarrow N$

DEFINIMOS

$$F_2 = \{ \{a_K, b_K, f(K)\} \}_{K=1}^n$$

DISJUNTOS ENTRE SI Y SON $f(K) \in N \Rightarrow$ NO ESTABA CUBIERTO POR F_0, F_1 u F_3

i. LOS LADOS DE F_2 SON DISJUNTOS DE LOS DE F_0, F_1 Y F_3 Y SON $M(n-1)$ (SOBREYECTIVA)

$$\begin{aligned} \text{Así, } |E(M)| &= |\underbrace{F_0}_1| + |\underbrace{F_1}_1| + |\underbrace{F_2}_2| + |\underbrace{F_3}_1| \\ &= M + M(n-1) + M \\ &= 2nM \text{ y EL MATCHING ES PERFECTO.} \end{aligned}$$

(\Leftarrow) SEA M UN MATCHING PERFECTO EN H

OBSERVAR QUE LOS VÉRS. a_{ij} y b_{ij} SOLO ESTÁN EN LADOS DE E_0 ó E_1 .

COMO M ES PERFECTO, DEBEN ESTAR TAMBÍEN EN ALGUN LADO DE M .

Fijamos $i \in \{1, \dots, n\}$

IMPONGAMOS QUE PARA UN $j \in \{1, \dots, M\}$, $\exists L$ UNO $\in E(M) \cap E_0$ TAQ. $a_{ij} \in L$

$\Rightarrow \{a_{ij}, b_{ij}, v_{ij}\} \in E_0 \cap E(M) \Rightarrow b_{ij}$ NO PUEDE ESTAR EN OTRO LADO DE MATCHING M .

$\therefore \{a_{i(j+1)}, b_{i(j+1)}, v_{i(j+1)}\} \notin E(M)$ PERO $a_{i(j+1)}$ DEBE ESTAR EN $E(M)$

$\Rightarrow \{a_{i(j+1)}, b_{i(j+1)}, v_{i(j+1)}\} \in E(M)$

$\Rightarrow \{a_{ij}, b_{ij}, v_{ij}\} \in E(M) \quad \forall j$. PMA ESTE i FIJO, "CASO 0" PMA i

AHORA S. PMA UN $j \in \{1, \dots, M\}$ $\exists L$ UNO $\in E(M) \cap E_1$ TAQ. $a_{ij} \in L \Rightarrow L = \{a_{ij}, b_{i(j-1)}, w_{i(j-1)}\}$

PERO como $b_{i(j-1)}$ NO PUEDE ESTAR EN OTRO LADO DE M , $\{a_{ij}, b_{i(j-1)}, w_{i(j-1)}\} \notin E(M) \Rightarrow$

$\{a_{ij}, b_{i(j-1)}, b_{i(j-2)}, w_{i(j-2)}\} \in E(M) \cap E_1 \quad \forall j$. PMA ESTE i FIJO, "CASO 1" PMA i

EJ CLARO PUE SIEMPRE SE DA O' ESU "CASO 0" O' ES "CASO 1" PMA CADA I, Y A PUNTO DE ESO,

DEFINIMOS

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{SI SE DA "CASO 1" PMA i} \\ 0 & \text{SI SE DA "CASO 0" PMA i} \end{cases}$$

$\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ Y DEDUCIMOS QUE $D_j(\vec{b}) = 1 \forall j$ Y $\therefore B$ ES SATISFACIBLE.

Fijandonos $j \in \{1, \dots, m\}$

SABO M ES PERFECCIONADO, LOS VERTICES s_j, t_j DEBERAN ESTAR EN ALGUN LADO DE M

$$\Rightarrow \exists r \text{ tal que } \{s_j, t_j, v_{j,r}\} \subseteq E(M)$$

Si $q_{j,r}$ ES UNA VARIABLE, $\exists i, r_q q_{j,r} = x_i \Rightarrow v_{j,r} = v_i$

LUEGO $\{s_j, t_j, v_{j,r}\} \subseteq E(n) \Rightarrow v_{j,r}$ NO ESTARA EN OTRO LADO DE M

$$\Rightarrow \{a_{ij}, b_{ij}, v_{ij}\} \notin E(n) \Rightarrow \text{"CASO 0" PMA i}$$

$$\therefore b_i = 1 \Rightarrow q_{j,r}(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1 \Rightarrow D_j(\vec{b}) = 1$$

Si $q_{j,r}$ ES UNA NEGACION DE VARIABLE, $\exists i, r_q q_{j,r} = \bar{x}_i \Rightarrow v_{j,r} = w_{ij}$

LUEGO $\{s_j, t_j, w_{ij}\} \subseteq E(n) \Rightarrow w_{ij}$ NO PUEDE ESTAR EN OTRO LADO DE M

$$\Rightarrow \{a_{ij}, b_{ij}, w_{ij}\} \notin E(n) \Rightarrow \text{"CASO 0" PMA i}$$

$$\therefore b_i = 0 \Rightarrow q_{j,r}(\vec{b}) = \bar{x}_i(\vec{b}) = 1 - b_i = 1 \Rightarrow D_j(\vec{b}) = 1$$

$$\text{LUEGO } \exists \vec{b} \text{ TQ } D_j(\vec{b}) = 1 \forall j \Rightarrow B(\vec{b}) = 1 \Rightarrow B \text{ ES SATISFACIBLE}$$

■