Estos son los teoremas y demostraciones que entraron al final de Julio 2024, están escritos en la forma que Penazzi los dió durante la cursada. Muchos de ellos se pueden resumir un poco, pero leer estas versiones largas ayuda a entender la lógica de cada demostración.

TEOREMAS PARA EL FINAL JULIO 2024

¿CUÁL ES LA COMPLEJIDAD DEL ALGORITMO DE EDMONDS-KARP?

RTA: LA COMPLEJIDAD DE E-K ES $O(nm^2)$ DONDE $n = \#$VÉRTICES $= |V|$ Y $m = \#$LADOS $= |E|$ SOBRE UNA NETWORK $N = (V, E, C)$

DEM:

EDMONDS-KARP CONSTRUYE UNA SUCESIÓN DE CAMINOS AUMENTANTES UTILIZANDO BFS.

LA COMPLEJIDAD DE E-K ENTONCES ESTÁ DADA POR (CONSTRUIR + AUMENTAR FLUJO)

$$\text{compl}(E\text{-}K) = O(\text{compl}(BFS) \cdot \#\text{CAMINOS\_AUMENTANTES})$$

$$= O(m \cdot \#\text{CAMINOS\_AUMENTANTES})$$

DEF: UN LADO "SE VUELVE" CRÍTICO EN UN PASO DADO SI ES USADO PARA CONSTRUIR EL SIGUIENTE FLUJO EN MODO FORWARDS Y SE SATURA O EN MODO BACKWARDS Y SE VACÍA.

¿CUÁNTAS VECES SE PUEDE VOLVER CRÍTICO UN LADO? PRIMERO NECESITAREMOS ALGUNAS DEFINICIONES.

DEF: DADO UN FLUJO f EN N Y VÉRTICES x, z,

$$d_f(x,z) = \begin{cases} 0 & ; x = z \\ \infty & , \text{NO EXISTE F-CAM-AUMENTANTE DE } x \text{ A } z. \\ \text{MÍN. } \underbrace{\text{LONGITUD}}_{\#\text{LADOS}} \text{ DE F-CAM-AUMENTANTE DE } x \text{ A } z & , \text{SI EXISTE.} \end{cases}$$

SI $f_0, f_1, \ldots$ SON LOS FLUJOS QUE SE VAN OBTENIENDO EN EK, DEFINIMOS:

$$d_k(x) = d_{f_k}(s, x) \quad , \quad b_k(x) = d_{f_k}(x, t)$$

PROPOSICIÓN: $d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$ Y $b_k(x) \leq b_{k+1}(x)$ $\forall x$ (NO HACE FALTA DEMOSTRARLA)

OBS: $d_k(t) = d_k(x) + b_k(x)$ SI AMBOS SON FINITOS.

¿CUÁNTAS VECES SE PUEDE VOLVER CRÍTICO UN LADO?

SEA $\overrightarrow{xy}$ UN LADO QUE SE VUELVE CRÍTICO EN EL PASO K. ESTO PUEDE DARSE DE DOS FORMAS:

a) $\overrightarrow{xy}$ SE SATURA EN EL PASO K

$\Rightarrow f_k(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy}),\ f_{k+1}(\overrightarrow{xy}) = c(xy)$

$\Rightarrow$ SE UTILIZÓ UN CAMINO AUMENTANTE

$s \ldots xy \ldots t$ DE LONGITUD MÍNIMA (EK)

$\therefore d_k(y) = d_k(x) + 1$

SI $\overrightarrow{xy}$ SE VUELVE CRÍTICO DE NUEVO EN ALGÚN PASO $j > K$, ENTONCES

- SE VACIÓ $\Rightarrow$ SE USÓ BACKWARDS EN EL PASO j
- SE SATURÓ $\Rightarrow$ SE USÓ BACKWARDS EN ALGÚN PASO i CON $k < i \leq j$

$\Rightarrow \exists\, i$ TQ $k < i \leq j$ DONDE $\overrightarrow{xy}$ SE USA EN MODO BACKWARDS

$\Rightarrow$ SE UTILIZÓ UN CAMINO AUMENTANTE DE LONGITUD MÍNIMA DE LA FORMA

$s \ldots \overleftarrow{yx} \ldots t$ TQ $d_i(x) = d_i(y) + 1$

LUEGO

$$\begin{aligned}
\underbrace{d_j(t)}\ &\overset{\text{PROP}}{\geq} d_i(t) = d_i(x) + b_i(x) \\
&= \overbrace{d_i(y)+1} + b_i(x) \\
&\geq d_k(y) + 1 + b_k(x) \\
&= d_k(x) + 1 + 1 + b_k(x) \\
&= \underbrace{d_k(t) + 2}
\end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{xy}$ SE VACÍA EN EL PASO K

$\Rightarrow f_k(\overrightarrow{xy}) > 0$ Y $f_{k+1}(\overrightarrow{xy}) = 0$

$\Rightarrow$ SE UTILIZÓ UN CAMINO AUMENTANTE DE LONGITUD MÍNIMA (EK) DE LA FORMA $s \ldots \overleftarrow{yx} \ldots t$

$\therefore d_k(x) = d_k(y) + 1$

SI $\overrightarrow{xy}$ SE VUELVE CRÍTICO DE NUEVO EN UN PASO $j > K$, ENTONCES

- SE VACIÓ $\Rightarrow$ SE USÓ FORWARDS EN ALGÚN PASO i CON $K < i < j$
- SE SATURÓ $\Rightarrow$ SE USÓ FORWARDS EN EL PASO j.

$\therefore$ SE USÓ FORWARDS EN ALGÚN PASO i CON $K < i \leq j$ CON UN CAMINO AUMENTANTE DE LONGITUD MÍNIMA DE LA FORMA

$s \ldots \overrightarrow{xy} \ldots t$ DE MANERA TAL QUE

$d_i(y) = d_i(x) + 1$

$$\begin{aligned}
\underbrace{d_j(t)}\ &\overset{\text{PROP}}{\geq} d_i(t) = d_i(y) + b_i(y) \\
&= d_i(x) + 1 + b_i(y) \\
&\geq d_k(x) + 1 + b_k(y) \\
&= d_k(y) + 1 + 1 + b_k(y) \\
&= \underbrace{d_k(t) + 2}
\end{aligned}$$

EN AMBOS CASOS (a y b), LA DISTANCIA ENTRE s Y t DEBE AUMENTAR EN AL MENOS 2 PARA QUE UN LADO PUEDA VOLVER A SER CRÍTICO. COMO ESTA DISTANCIA VA ENTRE 0 Y $n-1$, UN LADO PUEDE VOLVERSE CRÍTICO $O(n)$ VECES A LO SUMO.

FINALMENTE,
- CADA CAMINO AUMENTANTE DE EK VUELVE CRÍTICO AL MENOS UN LADO.
- CADA LADO PUEDE VOLVERSE CRÍTICO $O(n)$ VECES.
- HAY m LADOS $\Rightarrow$ HAY $O(m \cdot n)$ CAMINOS AUMENTANTES POSIBLES.

$\therefore \text{COMPL}(EK) = O(m \cdot \#\text{CAM\_AUM}) = O(m \cdot m \cdot n) = O(m^2 n)$

LAS DISTANCIAS DE E-K NO DISMINUYEN

DEF: DADOS VÉRTICES x, z EN UN NETWORK N Y UN FLUJO f,

$$d_f(x,z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = z \\ \infty & \text{si no existe } f\text{-CAM-AUM de } x \text{ a } z \\ \text{MIN LONGITUD } f\text{-CAM-AUM de } x \text{ a } z & \text{si existe} \end{cases}$$

DEF $d_k(x) = d_{f_k}(s,x)$ PARA f_k EL K-ÉSIMO FLUJO EN UNA CORRIDA DE EK

PROPOSICIÓN: $d_k(x) \leq d_{k+1}(x) \quad \forall x$

DEM:

SEA $A = \{x : d_{k+1}(x) < d_k(x)\}$, Y SUPONGAMOS QUE $A \neq \emptyset$

SEA $\underbrace{x \in A}_{\boxed{0}}$ TAL QUE $\underbrace{d_{k+1}(x) = \min\{d_{k+1}(y) : y \in A\}}_{\boxed{1}}$

$\boxed{0} \Rightarrow d_{k+1}(x) < d_k(x) \leq \infty \Rightarrow d_{k+1}(x) < \infty \Rightarrow \exists$ f-CAM-AUM ENTRE s Y x.

OBS: $x \neq s$ PUES $s \notin A$ YA QUE $d_k(s) = d_{k+1}(s)$

SEA ENTONCES $P_{k+1}: s \ldots x$ UN f_{k+1}-CAM-AUM ENTRE s Y x DE LONGITUD MÍNIMA, ES DECIR DE LONGITUD $d_{k+1}(x)$.

COMO $x \neq s$, EXISTE UN VÉRTICE z EN P_{k+1} INMEDIATAMENTE ANTERIOR A x.

LUEGO $P_{k+1}: s \ldots z x$ Y POR SER DE LONG. MÍNIMA, $d_{k+1}(z) = d_{k+1}(x) - 1$ $\}\ \boxed{2}$

AHORA HAY DOS OPCIONES

a). $\overrightarrow{zx}$ ES UN LADO

b). $\overrightarrow{xz}$ ES UN LADO

VEAMOS AMBOS CASOS

a) $\vec{zx}$ ES UN LADO

$$\boxed{2} \Rightarrow d_{k+1}(z) < d_{k+1}(x) \overset{\boxed{1}}{\Longrightarrow} z \notin A \Rightarrow \overbrace{\underbrace{d_k(z) \leq d_{k+1}(z) < \infty}}^{\boxed{3}}$$

$\Rightarrow \exists f_k$-CAM-AUM ENTRE S y Z.

SEA $P_k: S \dots z$ UN f_k CAM. AUM DE LONG MÍNIMA, COMO $\vec{zx} \in E$, PODRÍAMOS AGREGARLO Y OBTENER UN f_k-CAM-AUM ENTRE S y x TAL QUE

$d_k(x) \leq d_k(z)+1 \leq d_{k+1}(z)+1 \leq d_{k+1}(x)$ ABSURDO PUES $x \in A$.

$\therefore$ $\vec{zx}$ DEBE ESTAR SATURADO $f_k(\vec{zx}) = c(\vec{zx})$

PERO $P_{k+1}: S \dots zx$ ES f_{k+1}-CAM-AUM $\Rightarrow f_{k+1}(\vec{zx}) < c(\vec{zx})$

$\vec{zx}$ SE UTILIZÓ DE MODO BACKWARDS AL PASAR DE f_k A f_{k+1}

ES DECIR SE UTILIZÓ UN CAMINO DE LONGITUD MÍNIMA DE LA FORMA

$\tilde{P}_k: S \dots \overleftarrow{xz} \dots t$

LUEGO $d_k(z) = d_k(x)+1 > d_{k+1}(x)+1 = d_{k+1}(z)+1+1$

$\geq d_k(z)+2 \Rightarrow 0 > 2$ ABSURDO DE ASUMIR $\vec{zx}$ LADO.

b) $\vec{xz}$ ES UN LADO

LUEGO P_{k+1} ES DE LA FORMA $S \dots \overleftarrow{zx}$

$\Rightarrow d_{k+1}(z) < d_{k+1}(x) \overset{\boxed{1}}{\Rightarrow} z \notin A \Rightarrow d_k(z) \leq d_{k+1}(z) < \infty \Rightarrow \exists f_k$-CAM-AUM ENTRE S y z

$P_k: S \dots z$ UNO DE ELLOS, DE LONGITUD MÍNIMA, PODRÍA AGREGARLE $\vec{xz}$ BACKWARDS, PERO ENTONCES

$d_k(x) \leq d_k(z)+1 \leq d_{k+1}(z)+1 \leq d_{k+1}(x) \Rightarrow$ ABSURDO PUES $x \in A$

COMO NO LO PUEDO AGREGAR BACKWARDS, ENTONCES $f_k(\vec{xz}) = 0$

PERO SI $P_{k+1}: S \dots \overleftarrow{zx}$ ES UN f_{k+1}-CAM-AUM, ENTONCES $f_{k+1}(\vec{xz}) > 0$

SE UTILIZÓ $\vec{xz}$ FORWARDS AL PASAR DE f_k A f_{k+1}

$\therefore$ $\exists f_k$ CAM-AUM DE LONGITUD MÍNIMA DE LA FORMA

$\hat{P}_k: S \dots \vec{xz} \dots t$

$\Rightarrow d_k(z) = d_k(x)+1 > d_{k+1}(x)+1 = d_{k+1}(z)+1+1 \geq d_k(z)+2 \Rightarrow 0 > 2$ ABSURDO DE ASUMIR QUE $\vec{xz}$ ES UN LADO

CONCLUIMOS ENTONCES QUE $A = \emptyset$ y $d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$ $\forall x$ ∎

LA COMPLEJIDAD DE DINIC, PARA AMBAS VERSIONES, ES $O(n^2 m)$

DEM

COMO EL NIVEL DE t AUMENTA EN LOS NA SUCESIVOS, SÓLO PUEDE HABER $O(n)$ NA'S, LUEGO

$$\text{compl}(\text{DINIC}) = O(n)\cdot\Big(\overbrace{\text{compl}(\text{CONSTRUIR NA})}^{\text{DFS ES } O(m)} + \text{compl}(\text{HALLAR FLUJO BLOQUEANTE})\Big)$$

$$= O(n)\cdot\big(O(m) + \text{compl}(\text{HALLAR FLUJO BLOQUEANTE})\big)$$

VEAMOS LA COMPLEJIDAD DE HALLAR UN FLUJO BLOQUEANTE EN AMBAS VERSIONES:

VERSIÓN ORIGINAL: EL NA ES TAL QUE NO HAY VÉRTICES SIN LADOS DE SALIDA (★)

$\therefore$ DFS SIEMPRE LLEGA A t SIN BACKTRACKING $\Rightarrow$ DFS ES $O(\#\text{NIVELES}) = O(n)$
COMO CADA CAMINO BORRA UN LADO DEL NA, HAY $O(m)$ CAMINOS EN CADA NA.

$\therefore$ LA COMPLEJIDAD DE HALLAR LOS CAMINOS Y AUMENTAR EL FLUJO POR ELLOS ES $O(nm)$ $\boxed{1}$

AHORA BIEN, ¿CUÁL ES LA COMPLEJIDAD DE ASEGURAR ★?

PARA ELLO, SE DEBEN RECORRER LOS VÉRTICES LUEGO DE CADA NUEVO CAMINO Y BORRAR AQUELLOS QUE NO TENGAN LADOS DE SALIDA

HAY $O(m)$ CAMINOS $\therefore$ SE "PODA" $O(m)$ VECES A LOS $O(n)$ VÉRTICES CHEQUEANDO SUS SALIDAS EN $O(1)$, TOTAL: $O(mn)$ $\boxed{2}$

COMPL (BORRAR UN VÉRTICE Y SUS LADOS) = $O(d(x))$, PERO SOBRE TODOS LOS "PODA" SE OBTIENE $\sum_x O(d(x)) = O(m)$ $\boxed{3}$

FINALMENTE, $\text{compl}(\text{HALLAR FLUJO BLOQUEANTE}) = \overset{\boxed{1}}{O(mn)} + \overset{\boxed{2}}{O(mn)} + \overset{\boxed{3}}{O(m)} = O(mn)$

$\therefore \text{compl}(\text{DINIC}) = O(n)\,(O(m) + O(mn)) = O(mn^2)$ ■

VERSIÓN OCCIDENTAL

PARA ELLO ANALIZAMOS SU PSEUDO-CÓDIGO

```
g=0; FLAG=1;
while (FLAG)
    P := [s];
    x := s;
    while ((x≠t) AND FLAG)
        IF (Γ⁺(x) ≠ Ø)
            TOMAR y ∈ Γ⁺(x)
            P.add(y);    } A (AVANZAR)
            x := y;
        ELSE
            IF (x≠s)
                z := ELEM ANT DE x EN P
                P.DELETE(x)       } R (RETROCEDER)
                NA.DELETE(zx)
                x := z;
            ELSE
                FLAG = 0
    IF (x==t)
        AUMENTAR EL FLUJO A LO LARGO DE P Y BORRAR LOS LADOS SATURADOS } I (INCREMENTAR)
RETURN g;
```

UNA CORRIDA DEL ALGORITMO ES DE LA FORMA $\underbrace{\overbrace{A\ldots A}^{}}_{O(n)}\underbrace{R}_{O(1)}\overbrace{A\ldots A\underbrace{I}_{O(n)}}A\ldots AR\cdots$ (PATRÓN A...AX REPETIDO)

$O(A) = O(1)$ OPERACIÓN ADD

$O(R) = O(1)$ OPERACIÓN DELETE $O(1)$ $O(1)$

$O(I) = O(n)$ $\underbrace{\text{RECORRER}}_{O(n)}$ P 2 VECES P/AUMENTAR FLUJO Y BORRAR LADOS

CUÁNTAS A HAY EN CADA PARTE DEL PATRÓN REPETIDO? COMO CADA A AVANZA UN NIVEL EN EL NA, HAY $O(n)$ A'S HASTA TENER QUE RETROCEDER O LLEGAR A t.

$\text{COMPL}(A\ldots AR) = O(n) + O(1) = O(n) = \text{COMPL}(A\ldots AI) = O(n)\cdot O(1) + 1\cdot O(n)$

COMO R BORRA UN LADO E I BORRA AL MENOS UN LADO, HAY $O(m)$ REPETICIONES DE A...AX

FINALMENTE $\text{COMPL}(\text{HALLAR FLUJO BLOQUEANTE}) = O(m)\cdot O(n) = O(mn)$ ■

TEOREMA: COMPLEJIDAD DE WAVE DE TARJAN ES $O(n^3)$

COMO WAVE ES DE TIPO DINIC Y LA DISTANCIA ENTRE S Y t AUMENTA EN LOS NA'S SUCESIVOS, HAY $O(n)$ NA'S, PUES t NO PUEDE ESTAR A MÁS DE n LADOS DE S.

LUEGO $\text{COMPL}(\text{WAVE}) = \underbrace{O(n)}_{\#NA's} \big(\underbrace{O(m)}_{\text{CONSTRUIR EL NA CON BFS}} + \underbrace{\text{COMPL}(\text{HALLAR FLUJO BLOQUEANTE})}_{\text{PODREMOS VER QUE ES } O(n^2)} \big)$

NOTAR QUE $O(m) + O(n^2) = O(n^2)$ PUES $m \leq \binom{n}{2} = O(n^2)$

EL PROCESO SE DIVIDE EN

"OLAS" O "BALANCEOS" HACIA ADELANTE:
CUANDO UN VÉRTICE x LE MANDA FLUJO A z, PUEDE QUE $\overrightarrow{xz}$ SE SATURE O NO.

S = TODOS LOS CASOS DONDE SE SATURA UN LADO

P = TODOS LOS CASOS DONDE NO SE SATURA UN LADO.

"OLAS" O BALANCEOS HACIA ATRÁS:
CUANDO x LE DEVUELVE FLUJO A v, PUEDE QUE $\overrightarrow{vx}$ SE VACÍE O NO

V = CASOS DONDE SE VACÍA UN LADO

Q = CASOS DONDE NO SE VACÍA UN LADO

S: SUP $\overrightarrow{xz}$ SATURADO, ¿PUEDE VOLVER A SATURARSE?
PARA ELLO, PRIMERO z LE DEBE DEVOLVER FLUJO A x, CON LO CUAL z ESTÁ BLOQUEADO, PERO x NO LE VOLVERÁ A MANDAR PUES SOLO SE ENVÍA HACIA ADELANTE A VÉRTICES NO BLOQUEADOS
$\therefore$ C/LADO SE SATURA A LO SUMO UNA VEZ,

$\boxed{1}$ $\text{COMPL}(S) = O(m)$

V: SUP $\overrightarrow{vx}$ SE VACÍA ¿PUEDE VOLVER A VACIARSE? NO, PUES SI x LE DEVOLVIÓ FLUJO A v PARA VACIAR EL LADO $\overrightarrow{vx}$, ENTONCES x ESTÁ BLOQUEADO Y v NO LE MANDARÁ MÁS FLUJO COMO PARA QUE x PUEDA DEVOLVERLO $\therefore$ $\overrightarrow{vx}$ NO SE PODRÁ VACIAR DE NUEVO. C/LADO SE VACÍA UNA VEZ A LO SUMO.

$\boxed{2}$ $\text{COMPL}(V) = O(m)$

P y Q

EN UNA OLA HACIA ADELANTE, TODOS LOS LADOS, MENOS QUIZÁS EL ÚLTIMO USADO, SE SATURAN.

∴ EN CADA VÉRTICE EN CADA OLA HACIA ADELANTE, HAY A LO SUMO 1 LADO QUE NO SE SATURA Y SE INCLUYE EN P. ENVIAR FLUJO POR ESE LADO ES $O(1)$

$\boxed{3}$ $\text{COMPL}(P) = O(n) \cdot$ #OLAS HACIA ADELANTE

LO MISMO OCURRE CON Q PUES EN CADA VÉRTICE DE CADA OLA HACIA ATRÁS, HAY A LO SUMO UN LADO QUE NO SE VACÍA, Y DEVOLVER FLUJO POR ÉL ES $O(1)$

$\boxed{4}$ $\text{COMPL}(Q) = O(n)$ #OLAS HACIA ATRÁS

#OLAS HACIA ADELANTE = #OLAS HACIA ATRÁS

EN C/OLA HACIA ADELANTE, SALVO QUIZÁS EN LA ÚLTIMA, ALGÚN VÉRTICE QUEDA DESBALANCEADO Y ∴ BLOQUEADO, Y NUNCA SE DESBLOQUEA,

$\boxed{5}$ #OLAS_HACIA_ADELANTE $= O(n)$

$\boxed{3}, \boxed{4}$ y $\boxed{5} \Rightarrow \text{compl}(P) = \text{compl}(Q) = O(n) \cdot O(n) = O(n^2)$

∴ COMPL (HALLAR FLUJO BLOQUEANTE) $= \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4}$

$= O(m) + O(m) + O(n^2) + O(n^2)$

$= O(n^2)$ ■

MAX FLOW MIN CUT

a) El valor de todo flujo es menor o igual que la capacidad de todo corte

b) f flujo $\Rightarrow$ f maximal $\Leftrightarrow$ $\exists$ corte S tq $v(f) = cap(S)$ (y ese corte es minimal)

DEM:

a) Vimos en un lema que si f es un flujo y S es un corte,

$$v(f) \overset{\text{LEMA}}{=} f(S,\bar{S}) - \underbrace{f(\bar{S},S)}_{\substack{\| \\ \sum\limits_{\substack{x\in\bar{S}\\ y\in S\\ xy\in E}} f(xy) \geq 0 \text{ pues } f(xy)\geq 0 \ \forall \overrightarrow{xy}\in E}} \leq f(S,\bar{S}) \leq c(S,\bar{S}) = cap(S)$$

b) f flujo

($\Rightarrow$) f maximal, definimos $S = \{s\} \cup \{x \in V : \exists f\text{-cam-aum entre } s \text{ y } x\}$

Veamos que S es un corte, $s \in S$ ✓

Si no fuera corte $\Rightarrow t \in S \Rightarrow \exists_{f}$ cam-aum entre s y t $\Rightarrow$ puedo aumentar el flujo en algún "ε"
$\therefore$ existiría f' con $v(f') = v(f) + \varepsilon > v(f)$
absurdo pues f es maximal.

$\therefore t \notin S$ y S es corte,

Ahora podemos usar el lema mencionado anteriormente para ver

$\boxed{0}$ $v(f) = f(S,\bar{S}) - f(\bar{S},S)$

$\boxed{1}$ • $f(S,\bar{S}) = \sum\limits_{\substack{x\in S\\ y\notin S\\ \overrightarrow{xy}\in E}} f(\overrightarrow{xy})$ para cualquier par $\overrightarrow{xy}$ de la sumatoria,

$x \in S \Rightarrow \exists f$-cam aum de s a x

$y \notin S \Rightarrow \nexists f$-cam aum de s a y

$\overrightarrow{xy} \in E \Rightarrow s\ldots\overrightarrow{xy}$ podría ser cam-aum pero no lo es

$\therefore f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy}) \ \forall xy$

$\therefore f(S,\bar{S}) = c(S,\bar{S}) = cap(S)$

• $f(\bar{S},S) = \sum\limits_{\substack{y\in S\\ x\notin S\\ \overrightarrow{xy}\in E}} f(\overrightarrow{xy})$ para cualquier par $\overrightarrow{xy}$, $y \in S \Rightarrow \exists s\ldots y$ f-cam aum

$x \notin S \Rightarrow \nexists s\ldots x$ f-cam aum

$\overrightarrow{xy} \in E \Rightarrow$ lo podría agregar $s\ldots y\overleftarrow{x}$, pero ese camino no es aumentante $\Rightarrow f(\overrightarrow{xy}) = 0$

$\boxed{2}$ $\therefore f(\bar{S},S) = 0$

$\boxed{0}, \boxed{1}$ y $\boxed{2}$ $\Rightarrow v(f) = \overbrace{f(S,\bar{S})}^{cap(S)} - \overbrace{f(\bar{S},S)}^{0} = cap(S)$. Como todo corte T cumple

$cap(T) \geq v(f) = cap(S) \Rightarrow S$ es minimal.

$(\Leftarrow)$ $\exists$ corte S tal que $v(f) = cap(S)$

Sea g otro flujo,

$$v(g) \underset{(a)}{\leq} cap(S) = v(f) \rightarrow f \text{ maximal}$$

y S es minimal pues si T es otro corte

$$cap(T) \geq v(f) = cap(S)$$

$\blacksquare$

BABY BROOKS

G CONEXO NO REGULAR $\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta$

DEM

SEA x tq $d(x) = \delta$

CORREMOS $BFS(x)$, OBTENIENDO TODOS LOS VÉRTICES Y EL ORDEN EN EL QUE FUERON AGREGADOS.

AHORA CORREMOS GREEDY CON EL ORDEN INVERSO AL OBTENIDO DE MANERA TAL QUE LA RAÍZ x SERÁ EL ÚLTIMO POR COLOREAR.

c(PRIMER VÉRTICE) $= 1$

(ES POSTERIOR EN EL ORDEN INVERSO)

PARA COLOREAR CUALQUIER VÉRTICE $z \neq x$, SABEMOS QUE z FUE INCLUIDO A BFS POR UN VECINO ANTERIOR QUE AÚN NO FUE COLOREADO, POR LO TANTO SE DESCARTARÁN, EN EL PEOR CASO, $d(z) - 1 \leq \Delta - 1$ COLORES, SIENDO POSIBLE UTILIZAR ALGÚN COLOR EN $\{1, \dots, \Delta\}$ PARA z.

NO REGULAR

AHORA BIEN CUANDO LLEGAMOS A x, COMO $d(x) = \delta < \Delta$, HABRÁ SIEMPRE UN COLOR EN $\{1, \dots, \Delta\}$ QUE SUS VECINOS NO UTILICEN, ENTONCES LO UTILIZA.

DE ESTA FORMA SE OBTUVO UN COLOREO PROPIO DE G CON Δ COLORES

$\therefore \chi(G) \leq \Delta$ ∎

2-COLOR ES POLINOMIAL

PARA ELLO DARÉ UN ALGORITMO POLINOMIAL QUE COLOREA UN GRAFO G CON DOS COLORES Y MOSTRARÉ QUE SI EL COLOREO NO ES PROPIO ENTONCES $\chi(G) \geq 3$.

SI G NO ES CONEXO SE CORRE EL ALGORITMO EN TODAS SUS COMPONENTES CONEXAS Y SIGUE SIENDO POLINOMIAL

ALGORITMO DE COLOREO

SEA x UN VÉRTICE ARBITRARIO DE G

CORRO $BFS(x)$ OBTENIENDO UN ORDEN DE VÉRTICES EN DISTINTOS NIVELES.

LUEGO COLOREO TODO VÉRTICE z DE LA FORMA

$$c(z) = \text{NIVEL}_{BFS}(z) \bmod 2$$

$O(m)$ POR BFS

LUEGO CHEQUEO SI ES PROPIO, EN $\sum_{x \in V} O(d(x)) = O(m)$

- SI ES PROPIO,
  ENTONCES EXISTE UN COLOREO PROPIO CON 2 COLORES $\Rightarrow \chi(G) \leq 2$ ✓
- SI NO ES PROPIO,

$\exists u, v$ VÉRTICES TQ $c(u) = c(v)$ Y $uv \in E$

$\Rightarrow \text{NIVEL}_{BFS}(u) \bmod 2 = \text{NIVEL}_{BFS}(v) \bmod 2$

$\Rightarrow \text{NIVEL}_{BFS}(u) + \text{NIVEL}_{BFS}(v)$ ES PAR $\boxed{1}$

SABEMOS QUE EXISTE UN CAMINO, POR BFS, UNO DE LA RAÍZ HASTA u Y OTRO HASTA v

$x \ldots u$
$x \ldots v$

$\therefore \exists w$ VÉRTICE A PARTIR DEL CUAL LOS CAMINOS DIFIEREN $x \ldots w \ldots u$
$x \ldots w \ldots v$

COMO $uv \in E$, TENEMOS EL CICLO

$w \ldots uv \ldots w$

¿CUÁNTOS LADOS TIENE?

$w \ldots u \Rightarrow \text{NIVEL}_{BFS}(u) - \text{NIVEL}_{BFS}(w)$
$v \ldots w \Rightarrow \text{NIVEL}_{BFS}(v) - \text{NIVEL}_{BFS}(w)$
$uv \Rightarrow 1$ LADO

EN TOTAL SON $\overbrace{\text{NIVEL}_{BFS}(u) + \text{NIVEL}_{BFS}(v)}^{\text{PAR POR } \boxed{1}} \underbrace{- 2 \cdot \text{NIVEL}_{BFS}(w)}_{\text{PAR}} \underbrace{+ 1}_{\text{IMPAR}}$

Y POR LO TANTO HAY UN CICLO CON UNA CANTIDAD IMPAR DE LADOS $\Rightarrow \chi(G) \geq 3$.

Y DE ESTA FORMA SE DETERMINA EN TIEMPO POLINOMIAL SI UN GRAFO ES O NO 2-COLOREABLE.
(SOBRE EL TAMAÑO DE G)

TEOREMA DE HALL

SEA G UN GRAFO BIPARTITO CON PARTES X E Y.

EXISTE UN MATCHING COMPLETO DE X A Y SI TODO SUBCONJUNTO DE X TIENE MÁS (O IGUAL) VECINOS QUE ELEMENTOS. FORMALMENTE:

$$\exists M \text{ MATCHING CON } |E(M)| = |X| \Leftrightarrow |\Gamma(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq X$$

$(\Rightarrow)$ $\exists M$ MATCHING CON $|E(M)| = |X| \Rightarrow \exists f$ INYECTIVA DE X EN Y, CON $f(x) \in \Gamma(x)$

$\therefore \; |f(S)| = |S| \quad \forall S \subseteq X$ Y $f(S) \subseteq \Gamma(S)$

$\Rightarrow \; |\Gamma(S)| \geq |f(S)| = |S| \quad \forall S \subseteq X$ ∎

$(\Leftarrow)$ SUPONEMOS LA CONDICIÓN DE HALL $\boxed{|\Gamma(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq X}$ VERDADERA.

SI AL CORRER EL ALGORITMO P/HALLAR MATCHING MAXIMAL NOS QUEDAMOS CON UN

M_{MAX} TAL QUE $|E(M_{MAX})| < |X|$

UTILIZARÉ LA FORMA MATRICIAL DEL ALGORITMO P/CONSTRUIR UN $S \subseteq X$ QUE VIOLE LA CONDICIÓN DE HALL.

CORREMOS EL ALGORITMO SOBRE EL ÚLTIMO MATCHING M_{MAX} EL CUAL NO CUBRE A X.

$\Rightarrow \exists$ FILAS SIN 'MATCHEAR' Y OTRAS FILAS ETIQUETADAS. DEFINIMOS:

$S = \{\text{FILAS ETIQUETADAS}\}$

$T = \{\text{COLUMNAS ETIQUETADAS}\}$

$S_0 = \{\text{FILAS ETIQUETADAS CON } *\} \neq \emptyset$ PUES $|E(M_{MAX})| < |X|$

$T_1 = \{\text{COLS. ETIQUETADAS POR FILAS DE } S_0\}$

$S_1 = \{\text{FILAS ETIQUETADAS POR COLUMNAS DE } T_1\}$

$\vdots$

$T_{i+1} = \{\text{COLUMNAS ETIQUETADAS POR } S_i\}$

$S_j = \{\text{FILAS ETIQUETADAS POR } T_j\}$

ES CLARO QUE

$$\left.\begin{array}{l} S = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_K \\ T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_K \end{array}\right\}$$ Y EN AMBOS LA UNIÓN ES DISJUNTA $\boxed{1}$

PUES EL ALGORITMO SE DETIENE AL PASAR DE UN S_K A UN $T_{K+1} = \emptyset$ Y NUNCA AL PASAR DE UN T_j A UN S_j PUES AL REVISAR COLUMNAS DE T_j, O ESTÁN LIBRES Y SE EXTIENDE EL MATCHING (LO CUAL NO OCURRE POR HIP) Ó ENCUENTRAN UNA FILA Y LA ETIQUETAN $\therefore S_j \neq \emptyset$, MAS AÚN, CADA COLUMNA DE T_j ETIQUETA ÚNICAMENTE A LA FILA CON LA QUE ESTÁ MATCHEADA,

POR LO TANTO $|S_j| = |T_j| \quad \forall j = 1 \dots K$ $\boxed{2}$

AHORA,

$$\begin{aligned} |S| &\overset{\boxed{1}}{=} |S_0| + |S_1| + \dots + |S_K| \\ &\overset{\boxed{2}}{=} |S_0| + |T_1| + \dots + |T_K| \\ &\overset{\boxed{1}}{=} |S_0| + |T| > |T| \quad \text{PUES } S_0 \neq \emptyset \end{aligned}$$

VEAMOS QUE $T = \Gamma(S)$

$T \subseteq \Gamma(S)$ PUES LAS FILAS DE S SÓLO ETIQUETAN COLUMNAS VECINAS.

SEA $y \in \Gamma(S)$, SUP $y \notin T$, ENTONCES y NO ESTÁ ETIQUETADO

$\Rightarrow \exists x \in S$ TQ $y \in \Gamma(x)$, PERO AL ESCANEAR x DEBERÍA HABER ETIQUETADO A y.
ABSURDO

$\therefore y \in T$

Y ASÍ $T = \Gamma(S) \Rightarrow |S| > |\Gamma(S)|$ VIOLA LA CONDICIÓN DE HALL

LO CUAL ES UN ABSURDO QUE VIENE DE SUPONER QUE $|E(M_{max})| < |X|$ ∎

Teorema del Matrimonio de König

Todo grafo bipartito regular tiene un matching perfecto

DEM

Sea $G=(V,E)$ un grafo bipartito regular con partes X e Y.

Para $W \subseteq V$ definimos $E_W = \{\hat{w}v \in E : \hat{w} \in W\}$

Sea $S \subseteq X$ un subconjunto, sea $\ell \in E_S$ un lado

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists x \in S, y \in Y \text{ tq } \ell = xy \\ \therefore y \in \Gamma(x) \Rightarrow y \in \Gamma(S) \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \in E_{\Gamma(S)}$$

Esto significa que $E_S \subseteq E_{\Gamma(S)}$ y en particular, $|E_S| \leq |E_{\Gamma(S)}|$ $\boxed{1}$

Veamos $|E_W|$ para $W \subseteq X$ ó $W \subseteq Y$

Si $\hat{w}v \in E_W$, $v \notin W$ pues $W \subseteq X \Rightarrow v \in Y$
y $W \subseteq Y \Rightarrow v \in X$

$\Rightarrow E_W = \bigcup_{\hat{w} \in W} \{\hat{w}v, v \in \Gamma(\hat{w})\}$ y la unión es disjunta.

$$\Rightarrow |E_W| = \sum_{\hat{w} \in W} d(\hat{w}) \overset{\text{regular}}{=} \Delta \cdot |W| \quad \boxed{2}$$

Luego por $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$

$$\Delta \cdot |S| \leq \Delta \cdot |\Gamma(S)| \Rightarrow |S| \leq |\Gamma(S)| \quad \forall S \subseteq X$$

$\therefore$ Por el teorema de Hall existe un matching completo de X a Y.

$\Rightarrow |X| \leq |Y|$, pero la elección de utilizar X sobre Y fue arbitraria, por lo tanto también vale para Y, $|Y| \leq |X|$

$\therefore |X| = |Y|$ y el matching completo es perfecto ■

Teorema de la cota de Hamming

Sea $C \subseteq \{0,1\}^n$ un código binario de longitud n con $\delta = \delta(C)$ y $t = \left\lfloor \frac{\delta-1}{2} \right\rfloor$

Entonces $$|C| \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}}$$

Dem

Sea $A = \bigcup_{v \in C} D_t(v)$ donde $D_t(v)$ es el disco de radio t al rededor de v

Como $t = \left\lfloor \frac{\delta-1}{2} \right\rfloor$, C corrige t errores $\Rightarrow D_t(v) \cap D_t(w) = \emptyset \ \forall v, w, v \neq w \in C$

$\therefore$ A es una unión disjunta $\Rightarrow |A| = \sum_{v \in C} |D_t(v)|$ $\boxed{1}$

Sea $S_r(v) = \{w \in \{0,1\}^n : d_H(v,w) = r\} \Rightarrow D_t(v) = \bigcup_{r=0}^{t} S_r(v)$ y la unión es disjunta pues $d_H(v,w) = r \Rightarrow d_H(v,w) \neq r' \ \forall r' \neq r$

Luego $|D_t(v)| = \sum_{r=0}^{t} |S_r(v)|$ $\boxed{2}$

Notar que
$w \in S_r(v) \Leftrightarrow w$ difiere en r bits de v

$\therefore$ Hay una biyección entre $S_r(v)$ y el conjunto de subconjuntos de r bits en los que las palabras de $S_r(v)$ difieren de v.

$$\Rightarrow |S_r(v)| = |\text{conjunto de subconjuntos de } r \text{ bits, de los } n \text{ bits posibles}| = \binom{n}{r}$$

$$\therefore |D_t(v)| \overset{\boxed{2}}{=} \sum_{r=0}^{t} \binom{n}{r}$$

Ahora, por $\boxed{1}$

$$|A| = \sum_{v \in C} |D_t(v)| = \sum_{v \in C} \Bigg(\overbrace{\sum_{r=0}^{t} \binom{n}{r}}^{\text{independiente de } v} \Bigg) = |C| \cdot \sum_{r=0}^{t} \binom{n}{r}$$

Ahora bien, como $A \subseteq \{0,1\}^n \Rightarrow |A| \leq 2^n$

$$\therefore \quad |C| \cdot \sum_{r=0}^{t} \binom{n}{r} \leq 2^n \Rightarrow |C| \leq \frac{2^n}{\sum_{r=0}^{t} \binom{n}{r}} \quad \left(\text{notar que } \sum_{r=0}^{t} \binom{n}{r} > 0 \ \forall n \geq 0, t \geq 0 \right)$$

$\blacksquare$

Si H es matriz de chequeo de C, entonces

$$\delta(C) = \min\{j : \exists \text{ un conjunto de } j \text{ columnas LD en } H\}$$

DEM Sea $\delta = \delta(C)$ y $m = \min\{j : \exists \text{ un conjunto de } j \text{ columnas LD en } H\}$

Sea $H^{(k)}$ la k-ésima columna de H.

$\boxed{m \leq \delta}$

Como C es lineal, $\delta = \min\{|x| : x \in C, x \neq 0\}$

Sea $x \in C$, $x \neq 0$ con $|x| = \delta$ (existe porque es un mínimo)

$|x| = \delta \Rightarrow x$ tiene δ unos ("1"s) por lo tanto

$x = e_{i_1} + \dots + e_{i_\delta}$ donde $i_1, \dots, i_\delta$ son las posiciones de los "1"s en x.

Luego como $x \in C$ y $C \in Nu(H)$, $Hx^t = 0$

$0 = Hx^t = H(e_{i_1} + \dots + e_{i_\delta})^t = H(e_{i_1})^t + \dots + H(e_{i_\delta})^t = H^{(i_1)} + \dots + H^{(i_\delta)}$

$\therefore \{H^{(i_1)}, \dots, H^{(i_\delta)}\}$ son δ columnas LD de H

$\Rightarrow m \leq \delta$

$\boxed{\delta \leq m}$

Sean $H^{(j_1)}, \dots, H^{(j_m)}$ m columnas LD en H, como m es el mínimo,

$0 = H^{(j_1)} + \dots + H^{(j_m)} = H(e_{j_1})^t + \dots + H(e_{j_m})^t = H(e_{j_1} + \dots + e_{j_m})^t$

$\Rightarrow \underbrace{(e_{j_1} + \dots + e_{j_m})}_{\neq 0} \in Nu(H) = C$ y $|(e_{j_1} + \dots + e_{j_m})| = m \geq \delta$ (pues $\delta = \min\{|x| : x \in C, x \neq 0\}$)

Finalmente, $\boxed{\delta = m}$

■

SEA C UN CÓDIGO CÍCLICO DE DIMENSIÓN K Y LONGITUD n Y SEA $g(x)$ SU POLINOMIO GENERADOR. PROBAR QUE:

i) $C = \{ p(x) : gr(p) < n \text{ y } g(x) | p(x) \}$

ii) $C = \{ v(x) \odot g(x) : v \text{ es un polinomio cualquiera} \}$

iii) $gr(g) = n - K$

iv) $g(x)$ divide a $1 + x^n$

DEM:

SEAN $C_1 = \{ p(x) : gr(p) < n \text{ y } g(x) | p(x) \}$

$C_2 = \{ v(x) \odot g(x) : v \text{ es un polinomio cualquiera} \}$

PARA PROBAR i) y ii), VEREMOS QUE $C_1 \subseteq C_2 \subseteq C \subseteq C_1$ y $\therefore C_1 = C = C_2$

$\boxed{C_1 \subseteq C_2}$ $p(x) \in C_1 \Rightarrow \underbrace{gr(p) < n}_{\Rightarrow p(x) \bmod (1+x^n) = p(x)}$ y $g(x) | p(x) \Rightarrow \exists q(x)$ tq $p(x) = q(x) g(x)$

$p(x) \bmod (1+x^n) = q(x) g(x) \bmod (1+x^n)$

$p(x) = q(x) \odot g(x) \in C_2$

$\boxed{C_2 \subseteq C}$ SEA $p(x) = g(x) \odot v(x)$ PARA ALGÚN POLINOMIO $v(x)$ $(p(x) \in C_2)$

LUEGO $v(x) = v_0 + v_1 x + \cdots + v_d x^d$ PARA ALGÚN d.

$\Rightarrow p(x) = g(x) \odot v(x) = v(x) \odot g(x) = (v_0 + v_1 x + \cdots + v_d x^d) \odot g(x)$

$= v_0 \odot g(x) + v_1 x \odot g(x) + \cdots + v_d x^d \odot g(x)$

$= v_0 \odot g(x) + v_1 \operatorname{ROT}(g(x)) + \cdots + v_d \operatorname{ROT}^d(g(x)) \in C$ PUES ES UNA COMBINACIÓN LINEAL DE PALABRAS EN C.

$\boxed{C \subseteq C_1}$ $p(x) \in C \Rightarrow gr(p) < n$

SABEMOS QUE $\exists q(x)$ y $r(x)$ tq $p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, CON $gr(r) < gr(g)$

AHORA, $p(x) \bmod (1+x^n) = (g(x) \cdot q(x) + r(x)) \bmod (1+x^n)$

$p(x) = g(x) \odot q(x) + (r(x) \bmod (1+x^n))$, $gr(r) < gr(g) < n \Rightarrow r \bmod 1+x^n = r$

$$\underset{C}{\underset{\Uparrow}{p(x)}} = \underset{C}{\underset{\Uparrow}{g(x) \odot q(x)}} + \underset{C}{\underset{\Uparrow}{r(x)}}$$

PERO $r(x) \in C$ y $gr(r) < gr(g) \Rightarrow r(x) = 0$ $\therefore$ $g(x) | p(x)$ y $gr(p) < n \Rightarrow p(x) \in C_1$

iii) Vimos ya que $C = C_1$

$\therefore$ $p(x) \in C \Leftrightarrow gr(p) < n$ y $\exists\, q(x)$ tq $p(x) = q(x)\, g(x)$

$gr(p) < n \Rightarrow gr(q \cdot g) < n \Rightarrow gr(q) + gr(g) < n$

$\Rightarrow gr(q) < n - gr(g)$

Si tomo cualquier $q(x)$ con $gr(q) < n - gr(g) \Rightarrow gr(qg) < n$ y $qg \in C$

$\therefore \exists$ una biyección entre C y los polinomios de grado menor a $n - gr(g)$

Como C es lineal,

$|C| = 2^K$

Por la biyección

$|C| = |\text{conjunto de polinomios de grado menor a } n - gr(g)| = 2^{n-gr(g)}$

$\therefore K = n - gr(g)$ ó $gr(g) = n - K$

iv) $(1+x^n) = g(x)q(x) + r(x)$ con $gr(r) < gr(g)$, donde q y r existen por la división $\frac{1+x^n}{g(x)}$

$(1+x^n) \bmod (1+x^n) = 0 = (g(x)q(x) + r(x)) \bmod (1+x^n)$

$0 = g(x) \odot q(x) + r(x) \bmod (1+x^n)$

$r(x) = g(x) \odot q(x) \in C$ y como $gr(r) < gr(g) \Rightarrow r(x) = 0$ y $\therefore g(x) \mid (1+x^n)$

3-SAT ES NP-COMPLETO

DEM: VEREMOS QUE CNF-SAT $\leq_p$ 3-SAT

SEA B UNA INSTANCIA DE CNF-SAT CON VARIABLES $x_1, \ldots, x_n$

$B = D_1 \wedge \cdots \wedge D_m$ CON $D_j = \ell_{j,1} \vee \cdots \vee \ell_{j,r_j}$ DONDE $\ell_{j,i}$ SON LITERALES (VARIABLES O SUS NEGACIONES)

QUEREMOS UN ALGORITMO POLINOMIAL A TQ $A(B)$ ESTÉ EN EL DOMINIO DE 3-SAT, Y QUE B SEA SATISFACIBLE $\iff$ $A(B)$ LO ES, NOTAR QUE $B(\vec{b})=1 \iff D_j(\vec{b})=1 \ \forall j$ ($\vec{b}$ UNA ASIGNACIÓN DE LOS x_i)

PARA ELLO, $A(B) = E_1 \wedge \cdots \wedge E_m$ DONDE E_j SERÁN CONJUNCIONES DE DISJUNCIONES DE 3 LITERALES.

POR LO TANTO A TRANSFORMARÁ $D_j \to E_j$ DE LA SIGUIENTE MANERA:

$\boxed{r_j = 3}$ $E_j = D_j$

$\boxed{r_j \geq 4}$ $E_j = (\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee y_{j,1}) \wedge (\overline{y}_{j,1} \vee y_{j,2} \vee \ell_{j,3}) \wedge (\overline{y}_{j,2} \vee y_{j,3} \vee \ell_{j,4}) \wedge \cdots \wedge (\overline{y}_{j,r_j-4} \vee y_{j,r_j-3} \vee \ell_{j,r_j-2})$
$\wedge (\overline{y}_{j,r_j-3} \vee \ell_{j,r_j-1} \vee \ell_{j,r_j})$

$\boxed{r_j = 1}$ $E_j = (\ell_{j,1} \vee y_{j,1} \vee y_{j,2}) \wedge (\ell_{j,1} \vee y_{j,1} \vee \overline{y}_{j,2}) \wedge (\ell_{j,1} \vee \overline{y}_{j,1} \vee y_{j,2}) \wedge (\ell_{j,1} \vee \overline{y}_{j,1} \vee \overline{y}_{j,2})$

$\boxed{r_j = 2}$ $E_j = (\ell_{j1}, \ell_{j2}, y_j) \wedge (\ell_{j1}, \ell_{j2}, \overline{y}_j)$

ES CLARO QUE $D_j(\vec{b}) = 1 \iff E_j(\vec{b}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ASIGNACIONES DE LOS } y_i}}{\vec{d}}) = 1$ PARA LOS CASOS DE $r_j = 1, 2, 3$

($\Leftarrow$, PARA $r_j \geq 4$) SUPONGAMOS QUE NO SE CUMPLE, i.e $\exists \vec{b}, \vec{d}$ TQ $E_j(\vec{b}, \vec{d}) = 1$ Y $D_j(\vec{b}) = 0$

$0 = D_j(\vec{b}) = (\ell_{j,1} \vee \cdots \vee \ell_{j,r_j})(\vec{b}) \Rightarrow \ell_{j,k}(\vec{b}) = 0 \ \forall k$

$\Rightarrow E_j(\vec{b}, \vec{d}) = (0 \vee 0 \vee y_{j,1}) \wedge (\overline{y}_{j,1} \vee y_{j,2} \vee 0) \wedge \cdots \wedge (\overline{y}_{j,r_j-4} \vee y_{j,r_j-3} \vee 0) \wedge (\overline{y}_{j,r_j-3} \vee 0 \vee 0)$

$= y_{j1} \wedge (y_{j,1} \Rightarrow y_{j,2}) \wedge \cdots \wedge (y_{j,r_j-4} \Rightarrow y_{j,r_j-3}) \wedge \overline{y}_{j,r_j-3}$

$= 0 \ \forall \vec{d}$ ABSURDO PUES $E_j(\vec{b}, \vec{d}) = 1$ ■

($\Rightarrow$, para $r_j \geq 4$)

Supongamos $D_j(\vec{b})=1$, entonces $\exists k$ tq $\ell_{jk}(\vec{b})=1$

Definimos $\vec{d}=(d_1, \ldots, d_{r_j-3})$ tal que $d_1=\cdots=d_{k-2}=1$ $\quad y_{jt}(\vec{d})=d_t$

$d_{k-1}=d_k=\cdots=d_{r_j-3}=0$

Luego

$$E_j(\vec{b},\vec{d}) = (\ell_{j1} \vee \ell_{j2} \vee y_{j1})(\vec{b},\vec{d}) \wedge (\overline{y_{j1}} \vee \underbrace{y_{j2}}_{=1} \vee \ell_{j3})(\vec{b},\vec{d}) \wedge \cdots \wedge (\overline{y_{jk-3}} \vee \overbrace{y_{jk-2}}^{=1} \vee \ell_{jk-1})(\vec{b},\vec{d})$$

Todos estos términos son 1 pues contienen un d_p con $1 \leq p \leq k-2$

$$\wedge (\overline{\overset{0}{\widehat{y_{jk-2}}}} \vee \overset{0}{\widehat{y_{jk-1}}} \vee \overset{1}{\widehat{\ell_{jk}}})(\vec{b},\vec{d})$$

$$\wedge (\underbrace{\overline{y_{jk-1}}}_{=1} \vee \cdots)(\vec{b},\vec{d}) \wedge \cdots \wedge (\underbrace{\overline{y_{j,r_j-3}}}_{=1} \vee \cdots)(\vec{b},\vec{d}) = 1$$

Todos estos términos son 1 pues contienen un $\overline{d_q}$ con $k-2 < q \leq r_j-3$

Así queda demostrado que $D_j(\vec{b})=1 \Leftrightarrow \exists \vec{d}$ tq $E_j(\vec{b},\vec{d})=1 \quad \forall j$

$\therefore$ B es satisfacible $\Leftrightarrow$ $A(B)$ es satisfacible

■

3-COLOR ES NP-COMPLETO

DEM: VEREMOS QUE 3-SAT $\leq_p$ 3-COLOR

"DOMINIO" = "CONJUNTO DE INSTANCIAS"

EN TIEMPO POLINOMIAL

PARA ELLO, DEBEMOS TRANSFORMAR UN ELEMENTO B DEL DOMINIO DE 3-SAT A UN ELEMENTO $A(B) = G$ DEL DOMINIO DE 3-COLOR, Y MOSTRAR QUE B ES SATISFACIBLE $\Leftrightarrow \chi(G) \leq 3$

SABEMOS QUE B ES DE LA FORMA $D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ DONDE $D_i = (\ell_{i1} \vee \ell_{i2} \vee \ell_{i3})$, CON $\ell_{jk} = x_{\text{ALGO}}$ Ó $\overline{x_{\text{ALGO}}}$

PARA LAS VARIABLES DE B $x_1, \dots, x_n$

LUEGO A TRANSFORMA B EN G, EN TIEMPO POLINOMIAL, DE LA SIGUIENTE FORMA:

VÉRTICES DE G

$$\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \{a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, e_{j1}, e_{j2}, e_{j3}\}\right) \cup \{t, \text{CAPITÁN}\}$$

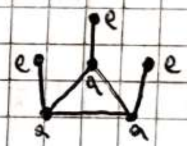
LADOS DE G

TRIÁNGULOS $\{(tv_i), (tw_i), (v_iw_i)\}$ PARA $i = 1, \dots, n$

TRIÁNGULOS $\{(a_{j1}a_{j2}), (a_{j2}a_{j3}), (a_{j3}a_{j1})\}$ PARA $j = 1, \dots, m$

LADOS $\{(a_{jr}e_{jr})\}$ PARA $j = 1, \dots, m$ Y $r = 1, 2, 3$

"GARRAS"



LADOS $\{((\text{CAPITÁN})e_{jk})\}$ PARA $j = 1, \dots, m$ Y $k = 1, 2, 3$

LADO $(\text{CAPITÁN})t$

PARA UN LITERAL ℓ, DEFINIMOS EL VÉRTICE CORRESPONDIENTE A ÉL COMO

$$v(\ell) = \begin{cases} v_k & \text{SI } \exists k \text{ TQ } \ell = x_k \\ w_k & \text{SI } \exists k \text{ TQ } \ell = \overline{x_k} \end{cases}$$

FINALMENTE, AGREGAMOS LOS LADOS

$$\{(e_{jr}\, v(\ell_{jr}))\} \text{ PARA } j = 1, \dots, m \text{ Y } r = 1, 2, 3$$

ES CLARO QUE LA CONSTRUCCIÓN DE G ES EN TIEMPO POLINOMIAL EN EL TAMAÑO DE B.

AHORA DEBEMOS PROBAR

$$\boxed{B \text{ SATISFACIBLE} \Leftrightarrow \chi(G) \leq 3} \; ☆$$

NOTAR QUE B SATISFACIBLE $\Leftrightarrow \exists \vec{b}$ VECTOR DE ASIGNACIÓN DE x_i'S TQ $\overline{B(\vec{b}) = 1 \Leftrightarrow D_j(\vec{b}) = 1 \; \forall j = 1, \dots, m}$

★ ($\Leftarrow$) $\chi(G) \leq 3$ DONDE $G = A(B)$. V = "VÉRTICES DE G", E = "LADOS DE G"

COMO G TIENE TRIÁNGULOS ($K3$) DE SUBGRAFOS, $\chi(G) \geq 3$ $\therefore \chi(G) = 3$

$\Rightarrow \exists$ UN COLOREO C PROPIO DE G CON 3 COLORES. $c(v)$ = "COLOR DE v"

COMO $(t\,(\text{CAPITAN})) \in E \Rightarrow c(t) \neq c(\text{CAPITAN})$

$\therefore C$ UTILIZA LOS COLORES $\{c(t), c(\text{CAPITAN}), c3\}$

DEFINIMOS $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ TAL QUE $b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } c(u_i) = c(\text{CAPITAN}) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

PROBAREMOS QUE $B(\vec{b}) = 1$ i.e B ES SATISFACIBLE

PARA ELLO, HAY QUE MOSTRAR QUE $D_j(\vec{b}) = 1$ $\forall j = 1, \ldots, M$, Y PARA ELLO, HAY QUE MOSTRAR QUE

$\forall j = 1, \ldots, M$, $\exists r$ TQ $\ell_{j,r}(\vec{b}) = 1$

SEA $j \in \{1, \ldots, M\}$. COMO LOS "$a_{j,r}$"S FORMAN TRIÁNGULOS QUE UTILIZAN LOS 3 COLORES,

$$\exists r \text{ tq } c(a_{j,r}) = c(t) \ \} \ \boxed{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} (e_{j,r} a_{j,r}) \in E \Rightarrow c(e_{j,r}) \neq c(a_{j,r}) = c(t) \\ (e_{j,r}(\text{CAPITAN})) \in E \Rightarrow c(e_{j,r}) \neq c(\text{CAPITAN}) \end{array}\right\} \Rightarrow c(e_{j,r}) = c3 \ \} \ \boxed{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} (e_{j,r} v(\ell_{j,r})) \in E \text{ y } \boxed{2} \Rightarrow c(v(\ell_{j,r})) \neq c3 \\ v(\ell_{j,r}) = u_{\text{ALGO}} \text{ ó } w_{\text{ALGO}} \Rightarrow (v(\ell_{j,r})t) \in E \therefore c(v(\ell_{j,r})) \neq c(t) \end{array}\right\} c(v(\ell_{j,r})) = c(\text{CAPITAN})$$

VEAMOS QUE OCURRE CON $\ell_{j,r}$ PARA LOS CASOS $\ell_{j,r}$ = VARIABLE Y $\ell_{j,r} = \overline{\text{VARIABLE}}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \ell_{j,r} \text{ ES UNA VARIABLE, } \underbrace{\exists k \text{ tq } \ell_{j,r} = x_k} \Rightarrow \ell_{j,r}(\vec{b}) = x_k(\vec{b}) = b_k \\ \qquad \Rightarrow v(\ell_{j,r}) = u_k \therefore c(u_k) = c(v(\ell_{j,r})) = c(\text{CAPITAN}) \Rightarrow b_k = 1 \end{array}\right\} \ell_{j,r}(\vec{b}) = 1$$

Si $\ell_{j,r}$ ES UNA NEGACIÓN DE VARIABLE, $\underbrace{\exists k \text{ tq } \ell_{j,r} = \overline{x}_k}$ $\Rightarrow \ell_{j,r}(\vec{b}) = \overline{x}_k(\vec{b}) = 1 - b_k$ — $\ell_{j,r}(\vec{b}) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow v(\ell_{j,r}) = w_k \therefore c(w_k) = c(v(\ell_{j,r})) = c(\text{CAPITAN}) \\ u_k w_k \in E \end{array}\right\} c(u_k) \neq c(\text{CAPITAN}) \Rightarrow b_k = 0$$

POR LO TANTO $\forall j = 1, \ldots, M$, $\exists r$ TQ $\ell_{j,r}(\vec{b}) = 1$ $\therefore B(\vec{b}) = 1 \Rightarrow B$ ES SATISFACIBLE

★ $(\Rightarrow)$ B SATISFACIBLE $\Rightarrow \exists \vec{b}$ tq $B(\vec{b})=1$

DARÉ UN COLOREO c PROPIO DE $G=A(B)$ CON 3 COLORES Y POR LO TANTO $\chi(G)\leq 3$.

$c(\text{CAPITAN})=$ ESCARLATA , $c(f)=$ VERDE $\Rightarrow$ EL LADO $(f(\text{CAPITAN}))$ MANTIENE LO PROPIO DEL COLOREO.

A PARTIR DE ALGÚN $\vec{b}$ tq $B(\vec{b})=1$, DEFINIMOS (con $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)$)

$$c(v_i)=\begin{cases}\text{ESCARLATA} & \text{si } b_i=1\\ \text{NEGRO} & \text{si } b_i=0\end{cases} \quad y \quad c(w_i)=\begin{cases}\text{NEGRO} & \text{si } b_i=1\\ \text{ESCARLATA} & \text{si } b_i=0\end{cases}$$

DE ESTA FORMA, LOS TRIÁNGULOS $\{fv_i, fw_i, w_iv_i\}$ PARA $i=1,\dots,n$ MANTIENEN LO PROPIO DEL COLOREO PUES UTILIZAN LOS 3 COLORES.

COMO $B(\vec{b})=1$, $D_j(\vec{b})=1$ $\forall j=1,\dots,m \Rightarrow \forall j=1,\dots,m, \exists K_j$ tq $\ell_{jK_j}(\vec{b})=1$. TOMO ALGÚN K_j QUE LO CUMPLA.

Y DEFINIMOS

$$\left.\begin{array}{l} c(a_{jK_j})=\text{VERDE} \\ c(a_{jr})=\text{UNO NEGRO Y OTRO ESCARLATA} \\ r\neq K_j \end{array}\right\}$$

LOS TRIÁNGULOS $\{a_{j1}a_{j2}, a_{j2}a_{j3}, a_{j3}a_{j1}\}$ PARA $j=1,\dots,m$ MANTIENEN LO PROPIO DEL COLOREO. (USAN LOS 3 COLORES)

COLOREAMOS

$c(e_{jK_j})=$ NEGRO Y $c(e_{jr})=$ VERDE PARA $r\neq K_j$

LUEGO LOS SIGUIENTES LADOS MANTIENEN LO PROPIO DEL COLOREO:

$\{(e_{jq}(\text{CAPITAN}))\}$ PARA $j=1,\dots,m$ Y $q=1,2,3$ PUES $c(e_{jq})=$ NEGRO ó VERDE Y $c(\text{CAPITAN})=$ ESCARLATA

$\{(e_{jr}\, a_{jr})\}$ PARA $j=1,\dots,m$ Y $r\in\{1,2,3\}$ CON $r\neq K_j$ PUES $c(e_{jr})=$ VERDE Y $c(a_{jr})=$ NEGRO O ESCARLATA

$\{(e_{jK_j} a_{jK_j})\}$ PARA $j=1,\dots,m$ PUES $c(e_{jK_j})=$ NEGRO Y $c(a_{jK_j})=$ VERDE

$\{e_{jr}\, v(\ell_{jr})\}$ PARA $j=1,\dots,m$ Y $r\in\{1,2,3\}$ CON $r\neq K_j$, PUES $c(e_{jr})=$ VERDE Y $v(\ell_{jr})=v_{\text{ALGO}}$ ó $w_{\text{ALGO}} \Rightarrow c(v(\ell_{jr}))=$ NEGRO Ó ESCARLATA

SÓLO QUEDA POR VER EL LADO $e_{jK_j}v(\ell_{jK_j})$.

Si ℓ_{jK_j} ES UNA VARIABLE, $\exists i$ tq $\ell_{jK_j}=x_i \Rightarrow v(\ell_{jK_j})=v_i$ y $\ell_{jK_j}(\vec{b})=1 \Rightarrow x_i(\vec{b})=1 \Rightarrow b_i=1 \Rightarrow c(v_i)=$ ESCARLATA

$\therefore c(v(\ell_{jK_j}))=c(v_i)=$ ESCARLATA y $c(e_{jK_j})=$ NEGRO $\therefore$ EL LADO $e_{jK_j}v(\ell_{jK_j})$ MANTIENE LO PROPIO DEL COLOREO

Si ℓ_{jK_j} ES UNA NEGACIÓN DE VARIABLE, $\exists i$ tq $\ell_{jK_j}=\bar{x}_i \Rightarrow \left.\underbrace{\ell_{jK_j}(\vec{b})}_{=1}=\bar{x}_i(\vec{b})=1-b_i\right\}$ $b_i=0$ $\Rightarrow c(w_i)=$ ESCARLATA

$\therefore v(\ell_{jK_j})=w_i$ y $c(w_i)=$ ESCARLATA y $c(e_{jK_j})=$ NEGRO

POR LO QUE EL LADO $e_{jK_j}v(\ell_{jK_j})$ MANTIENE LO PROPIO DEL COLOREO.

FINALMENTE, B SATISFACIBLE $\Rightarrow \exists$ COLOREO c PROPIO DE $A(B)=G$ CON 3 COLORES $\Rightarrow \chi(G)\leq 3$ ∎

Teorema del matrimonio 3-D

Matrimonio 3D es NP-completo

DEM

Mostraremos que $3\text{-SAT} \leq_p$ Matrimonio 3D

Esto es, a partir de una instancia $B = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ con variables $x_1, \dots, x_n$ y $D_j = l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3}$ con l_{jk} variables o negaciones de variables, construir en tiempo polinomial sobre el tamaño de B un 3-hipergrafo H de manera tal que B es satisfacible $\Leftrightarrow$ H tiene un matching perfecto

Notar que para que H sea una instancia de matrimonio 3D, sus 3 partes X, Y, Z deben tener la misma cardinalidad. Construcción de H en tiempo polinomial:

Notación: $j \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $r \in \{1,2,3\}$, $k \in \{1, \dots, m(n-1)\}$

Vértices de H, en 3 partes disjuntas de igual cardinalidad:

$$X = \{a_{ij}\}_{ij} \cup \{s_j\}_j \cup \{g_k\}_k \qquad |X| = nm + m + m(n-1) = 2mn$$

$$Y = \{b_{ij}\}_{ij} \cup \{t_j\}_j \cup \{h_k\}_k \qquad |Y| = nm + m + m(n-1) = 2mn = |X|$$

$$Z = \{v_{ij}\}_{ij} \cup \{w_{ij}\}_{ij} \qquad |Z| = nm + nm = 2mn = |X| = |Y|$$

Lados de H: $E(H) = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$

$$E_0 = \{\{a_{ij}, b_{ij}, v_{ij}\}\}_{ij} \qquad E_1 = \{\{a_{i(j+1)}, b_{ij}, w_{ij}\}\}_{ij} \qquad j=m \Rightarrow j+1=1$$

$$E_2 = \{\{g_k, h_k, z\} : z \in Z\}_k$$

Definimos

$$v_{jr} = \begin{cases} v_{ij} & \text{si } l_{jr} = x_i \\ w_{ij} & \text{si } l_{jr} = \overline{x_i} \end{cases}$$

y luego $E_3 = \{\{s_j, t_j, v_{jr}\}\}_{j,r}$

Es claro que la construcción de H es en tiempo polinomial dependiente de n y m (tamaño de B)

Ahora debemos mostrar que B es satisfacible $\Leftrightarrow$ $\exists$ un matching perfecto en H

$(\Rightarrow)$ B satisfacible, sea $\vec{b}$ tq $B(\vec{b})=1$, y $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)$ asignaciones de variables.

Construimos a partir de B un matching M en H y mostramos que es perfecto.

Lados de M: $F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3$

$F_0 = \{\{a_{ij}, b_{ij}, v_{ij}\} : j \in \{1,\dots,m\} \text{ y } b_i = 0\} \subseteq E_0$

$F_1 = \{\{a_{i(j+1)}, b_{ij}, w_{ij}\} : j \in \{1,\dots,m\} \text{ y } b_i = 1\} \subseteq E_1 \quad (j+1=1 \text{ si } j=m)$

Estos lados son disjuntos pues los b_i no pueden ser 0 y 1 a la vez.

$B(\vec{b})=1 \Rightarrow D_j(\vec{b})=1 \ \forall j=1,\dots,m \Rightarrow \forall j=1,\dots,m,\ \exists r_j \text{ tq } \ell_{jr_j}(\vec{b})=1$ (si hay más de 1, elijo 1)

Luego definimos

$F_3 = \{\{s_j, t_j, v_{jr_j}\}\}_j$, como elegimos un solo r_j p/c j, los lados de F_3 son disjuntos entre sí

Supongamos que los lados de F_3 no son disjuntos con los lados de F_1 o F_2

$\Rightarrow \exists L_3 \in F_3$ tq $\exists L_0 \in F_0$ tq $L_3 \cap L_0 \neq \emptyset$
ó $\exists L_1 \in F_1$ tq $L_1 \cap L_0 \neq \emptyset$

Notar que esta intersección sólo podría contener un vert. v_{jr_j}, pues $\forall L \in F_0, F_1$ $s_j \notin L$ $t_j \notin L$

Caso $L_0 = \{a_{ij}, b_{ij}, v_{jr_j}\} \in F_0 \Rightarrow v_{jr_j} = u_{ij} \Rightarrow \ell_{jr_j} = x_i$, $\underbrace{\in F_0}_{b_i=0}$ $\Big\}\ 1=\ell_{jr_j}(\vec{b})=x_i(\vec{b})=b_i=0$ ABSURDO.

Caso $L_1 = \{a_{i(j+1)}, b_{ij}, v_{jr_j}\} \in F_1 \Rightarrow v_{jr_j} = w_i \Rightarrow \ell_{jr_j} = \overline{x_i}$, $\Rightarrow b_i = 1$ $\Big\}\ 1=\ell_{jr_j}(\vec{b})=\overline{x_i}(\vec{b})=1-b_i=0$ ABSURDO

Luego los lados de F_3 son disjuntos con los de F_1 y F_0.

Sea $N = \{z \in Z : z \text{ no está cubierto por } F_0, F_1 \text{ o } F_3\}$

Veamos $|Z-N| = |\{z \in Z : z \text{ está cubierto por } F_0, F_1 \text{ o } F_3\}|$

- F_3 cubre a m elementos de Z (un v_{jr_j} por cada j)

Si $q = \#\{i : b_i = 1\}$ y $p = \#\{i : b_i = 0\}$, luego

- F_0 cubre $p \cdot m$ vértices $u_{ij} \in Z$ (lados $\{a_{ij}, b_{ij}, u_{ij}\}_j, b_i = 0$)
- F_1 cubre $q \cdot m$ vértices $w_{ij} \in Z$ (lados $\{a_{ij+1}, b_{ij}, w_{ij}\}_j, b_i = 1$)

$$p+q=n$$

ASÍ, $|Z-N| = m + pm + qm \overset{\uparrow}{=} m(n+1)$

LUEGO $|N| = |Z| - |Z-N|$

$$= 2nm - m(n+1) = m(n-1)$$

$\Rightarrow \exists$ BIYECCIÓN $f: \{1, \dots, m(n-1)\} \to N$

DEFINIMOS

$$F_2 = \{\{a_k, h_k, f(k)\}\}_k$$

DISJUNTOS ENTRE SÍ, Y COMO $f(k) \in N \Rightarrow$ NO ESTABA CUBIERTO POR F_0, F_1 NI F_3

$\therefore$ LOS LADOS DE F_2 SON DISJUNTOS DE LOS DE F_0, F_1 Y F_2 Y SON $m(n-1)$ (SOBREYECTIVA)

ASÍ, $|E(M)| = \underbrace{|F_0| + |F_1|} + \underbrace{|F_2|} + \underbrace{|F_3|}$

$$= mn + m(n-1) + m$$

$$= 2nm$$ Y EL MATCHING ES PERFECTO.

($\Leftarrow$) SEA M UN MATCHING PERFECTO EN H

OBSERVAR QUE LOS VÉRS. a_{ij} Y b_{ij} SOLO ESTÁN EN LADOS DE E_0 Ó E_1

COMO M ES PERFECTO, DEBEN ESTAR TAMBIÉN EN ALGÚN LADO DE M.

FIJAMOS $i \in \{1, \dots, n\}$

SUPONGAMOS QUE PARA UN $j \in \{1, \dots, m\}$, $\exists$ L LADO $\in E(M) \cap E_0$ TQ $a_{ij} \in L$

$\Rightarrow \{a_{ij}, b_{ij}, v_{ij}\} \in E_0 \cap E(M) \Rightarrow b_{ij}$ NO PUEDE ESTÁR EN OTRO LADO DEL <u>MATCHING</u> M.

$\therefore \{a_{i(j+1)}, b_{ij}, w_{ij}\} \notin E(M)$ PERO $a_{i(j+1)}$ <u>DEBE</u> ESTAR EN $E(M)$

$\Rightarrow \{a_{i(j+1)}, b_{i(j+1)}, v_{i(j+1)}\} \in E(M)$

$\Rightarrow \{a_{ij}, b_{ij}, v_{ij}\} \in E(M)$ $\forall j$ PARA ESTE i FIJO. $\boxed{\text{"CASO 0" PARA } i}$

AHORA SI PARA UN $j \in \{1, \dots, m\}$ $\exists L$ LADO $\in E(M) \cap E_1$ TQ $a_{ij} \in L \Rightarrow L = \{a_{ij}, b_{i(j-1)}, w_{i(j-1)}\}$

PERO COMO $b_{i(j-1)}$ NO PUEDE ESTAR EN OTRO LADO DE M, $\{a_{i(j-1)}, b_{i(j-1)}, v_{i(j-1)}\} \notin E(M) \Rightarrow$

$\{a_{i(j-1)}, b_{i(j-2)}, w_{i(j-2)}\} \in E(M) \cap E_1$ $\forall j$, PARA ESTE i FIJO $\boxed{\text{"CASO 1" PARA } i}$

ES CLARO QUE SIEMPRE SE DA Ó EL "CASO 0" Ó EL "CASO 1" PARA CADA i, Y A PARTIR DE ELLO, DEFINIMOS

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{SI SE DA "CASO 1" PARA } i \\ 0 & \text{SI SE DA "CASO 0" PARA } i \end{cases}$$

$\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ Y QUEREMOS VER QUE $D_j(\vec{b}) = 1 \; \forall_j$ Y $\therefore$ B ES SATISFACIBLE.

FIJAMOS $j \in \{1, \dots, m\}$

COMO M ES PERFECTO, LOS VÉRTICES s_j, t_j DEBEN ESTAR EN ALGÚN LADO DE M

$\Rightarrow \exists r$ tq $\{s_j, t_j, v_{j,r}\} \in E(M)$

SI $\ell_{j,r}$ ES UNA VARIABLE, $\exists i$ tq $\ell_{j,r} = x_i \Rightarrow v_{j,r} = u_{ij}$

LUEGO $\{s_j, t_j, u_{ij}\} \in E(M) \Rightarrow u_{ij}$ NO ESTÁ EN OTRO LADO DE M

$\Rightarrow \{a_{ij}, b_{ij}, u_{ij}\} \notin E(M) \Rightarrow$ "CASO 1" PARA i

$\therefore b_i = 1 \Rightarrow \ell_{j,r}(\vec{b}) = x_i(\vec{b}) = b_i = 1 \Rightarrow D_j(\vec{b}) = 1$

SI $\ell_{j,r}$ ES UNA NEGACIÓN DE VARIABLE, $\exists i$ tq $\ell_{j,r} = \overline{x_i} \Rightarrow v_{j,r} = w_{ij}$

LUEGO $\{s_j, t_j, w_{ij}\} \in E(M) \Rightarrow w_{ij}$ NO PUEDE ESTAR EN OTRO LADO DE M

$\Rightarrow \{a_{i(j+1)}, b_{ij}, w_{ij}\} \notin E(M) \Rightarrow$ "CASO 0" PARA i

$\therefore b_i = 0 \Rightarrow \ell_{j,r}(\vec{b}) = \overline{x_i}(\vec{b}) = 1 - b_i = 1 \Rightarrow D_j(\vec{b}) = 1$

LUEGO $\exists \vec{b}$ tq $D_j(\vec{b}) = 1 \; \forall_j \Rightarrow B(\vec{b}) = 1 \Rightarrow B$ ES SATISFACIBLE ■