

EJERCICIO: DÉ UNA PRUEBA ELEMENTAL DE RETICULADOS COMPLEMENTADOS DE

$$DIS_1 \rightarrow \forall x \forall y (c(x;y) = c(x) \text{ s } c(y))$$

VALE USAR

A)  $DIS_1 \rightarrow \forall x \forall u \forall v ((x \text{ s } u = 1 \wedge x \text{ i } u = 0 \wedge x \text{ s } v = 1 \wedge x \text{ i } v = 0) \rightarrow u = v)$

B)  $DIS_1 \rightarrow DIS_2$

RESOLUCIÓN:

SEA  $(L, s, i, c, 0, 1)$  UN RETICULADO COMPLEMENTADO.

SUPONGAMOS QUE  $L$  ES TAL QUE SE CUMPLE  $DIS_1$ , I.E.  $\forall x \forall y \forall z (x \text{ i } (y \text{ s } z) = (x \text{ i } y) \text{ s } (x \text{ i } z))$

POR A), COMO SE CUMPLE  $DIS_1$ , VALE  $\forall x \forall u \forall v ((x \text{ s } u = 1 \wedge x \text{ i } u = 0 \wedge x \text{ s } v = 1 \wedge x \text{ i } v = 0) \rightarrow u = v)$  A\*

POR B), COMO SE CUMPLE  $DIS_1$ , VALE  $DIS_2$ :  $\forall x \forall y \forall z (x \text{ s } (y \text{ i } z) = (x \text{ s } y) \text{ i } (x \text{ s } z))$

COMO  $L$  ES UN RET. COMPLEMENTADO, TAMBIÉN PUEDE VALER LOS SIGUIENTES AXIOMAS ELEMENTALES:

- 1)  $\forall x (x \text{ s } x = x)$
- 2)  $\forall x (x \text{ i } x = x)$
- 3)  $\forall x \forall y (x \text{ s } y = y \text{ s } x)$
- 4)  $\forall x \forall y (x \text{ i } y = y \text{ i } x)$
- 5)  $\forall x \forall y \forall z (x \text{ s } (y \text{ s } z) = (x \text{ s } y) \text{ s } z)$
- 6)  $\forall x \forall y \forall z (x \text{ i } (y \text{ i } z) = (x \text{ i } y) \text{ i } z)$
- 7)  $\forall x \forall y (x \text{ s } (x \text{ i } y) = x)$
- 8)  $\forall x \forall y (x \text{ i } (x \text{ s } y) = x)$
- 9)  $\forall x (x \text{ s } 1 = 1)$
- 10)  $\forall x (0 \text{ s } x = x)$
- 11)  $\forall x (x \text{ s } c(x) = 1)$
- 12)  $\forall x (x \text{ i } c(x) = 0)$

SEAN  $a, b \in L$  ELEMENTOS FIJOS PERO ARBITRARIOS.

$$\text{VEAMOS } (c(a) \text{ s } c(b)) \text{ s } (a \text{ i } b) = ((c(a) \text{ s } c(b)) \text{ s } a) \text{ i } ((c(a) \text{ s } c(b)) \text{ s } b)$$

↓  
POR  $DIS_2$

POR 3) Y 5), TENEMOS

$$((c(a) \text{ s } c(b)) \text{ s } a) \text{ i } ((c(a) \text{ s } c(b)) \text{ s } b) = ((c(b) \text{ s } c(a)) \text{ s } a) \text{ i } (c(a) \text{ s } (c(b) \text{ s } b))$$

POR 3), 5) Y 11),

$$((c(b) \text{ s } c(a)) \text{ s } a) \text{ i } (c(a) \text{ s } (c(b) \text{ s } b)) = (c(b) \text{ s } (c(a) \text{ s } a)) \text{ i } (c(a) \text{ s } 1) = (c(b) \text{ s } 1) \text{ i } (c(a) \text{ s } 1)$$

POR 9) ESTO ÚLTIMO ES IGUAL A

$$(a \text{ i } b) \text{ s } (c(a) \text{ s } c(b))$$

POR 3) Y 11)

$$1 \text{ s } 1 = 1$$

POR 1)

$$\text{POR LO TANTO } (c(a) \text{ s } c(b)) \text{ s } (a \text{ i } b) = 1$$

★



AHORA VAMOS

por 4)

por 015:

$$(c(a) \leq c(b)) \wedge (a \leq b) \stackrel{!}{=} (a \leq b) \wedge (c(a) \leq c(b)) \stackrel{!}{=} ((a \leq b) \wedge c(a)) \leq ((a \leq b) \wedge c(b))$$

Por 4) y 6) esto último es igual a

por 12)

$$(b \wedge (a \wedge c(a))) \leq (a \wedge (b \wedge c(b))) \stackrel{!}{=} (b \wedge 0) \leq (a \wedge 0)$$

OBSERVACIÓN,  $\forall x (0 \wedge x = 0 \wedge (0 \leq x) = 0)$ , con ello y 4) (i.e.  $0 \wedge x = x \wedge 0$ ) tenemos que este

último término es igual  $\stackrel{!}{=} 0$  a

$$0 \leq 0$$

por 1)

Por lo tanto tenemos  $\star_2: (c(a) \leq c(b)) \wedge (a \leq b) = 0$

$$\star_1 = (a \leq b) \wedge (c(a) \leq c(b))$$

Ahora bien, por 11), 12),  $\star_1$  y  $\star_2$ , tenemos

$$(a \leq b) \leq c(a \leq b) = 1 \wedge (a \leq b) \wedge c(a \leq b) = 0 \wedge (a \leq b) \leq (c(a) \leq c(b)) = 1 \wedge (a \leq b) \wedge (c(a) \leq c(b)) = 0$$

Lo cual por  $A^*$  (con  $u = c(a \leq b)$ ,  $v = c(a) \leq c(b)$  y  $x = (a \leq b)$ ) nos dice que

$$c(a \leq b) = c(a) \leq c(b)$$

Finalmente, como  $a$  y  $b$  eran elementos fijos pero arbitrarios y sólo asumimos  $DIS_1$ , entonces

$$DIS_1 \rightarrow \forall x \forall y (c(x \leq y) = c(x) \leq c(y))$$