Combo 1

sábado, 6 de diciembre de 2025 18:15

Combo 1.

Proposición (Caracterizacion de conjuntos Σ-p.r.). *Un conjunto S es Σ-p.r. sii S es el dominio de alguna funcion Σ-p.r.*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso de la composicion)

Teorema (Neumann vence a Godel). *Si h es Σ-recursiva, entonces h es Σ-computable*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso $h = R(f, \mathcal{G})$, con $I_h \subseteq \omega$)

(1) PROPOSICIÓN: UN CONJUNTO $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ ES Σ-P.R SII S ES EL DOMINIO DE ALGUNA FUNCIÓN Σ-P.R.

DEMOSTRACIÓN

($\Rightarrow$) SUP $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ ES Σ-P.R.

NOTAR QUE S ES EL DOMINIO DE $PRED \circ \chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$

($\Leftarrow$) VEAMOS POR INDUCCIÓN EN K QUE D_f ES Σ-P.R, PARA CADA $f \in PR_K^\Sigma$.

CASO $K=0$: TENEMOS QUE $f \in PR_0^\Sigma$, DONDE

$$PR_0^\Sigma = \{C_0^{0,0}, C_\varepsilon^{0,0}, SUC, PRED\} \cup \{p_j^{n,m} : 1 \leq j \leq n+m\} \cup \{d_a : a \in \Sigma\}$$

Y TODA FUNCIÓN DE ESTE CONJUNTO TIENE DOMINIO $\{\lozenge\}, \omega, N, \omega^n \times \Sigma^{*m}$ Ó Σ^*

LOS CUALES SABEMOS QUE SON CONJUNTOS Σ-P.R.

CASO $K \Rightarrow$ CASO $K+1$: SUP D_f ES Σ-P.R PARA TODA $f \in PR_K^\Sigma$. SEA $f \in PR_{K+1}^\Sigma - PR_K^\Sigma$.

HAY VARIOS CASOS (RECURSIÓN PRIMITIVA Y COMPOSICIÓN). HARÉ SOLO EL SIGUIENTE:

• SUP $f = g \circ [g_1, \ldots, g_r]$ CON $g, g_1, \ldots, g_r \in PR_K^\Sigma$. SI $f = \emptyset$, ES CLARO QUE $D_f = \emptyset$ ES Σ-P.R. SUPONGAMOS $f \neq \emptyset$. TENEMOS ENTONCES QUE r ES DE LA FORMA $n+m$ Y QUE:

$$g : D_g \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$$

$$g_i : D_{g_i} \subseteq \omega^K \times \Sigma^{*\ell} \to \omega \quad \text{PARA } i = 1, \ldots, n$$

$g_i : D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega$ para $i=1,\ldots,n$

$g_i : D_{g_i} \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \Sigma^*$ para $i=n+1,\ldots,n+m$

con $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ y $k,l \in \omega$.

<u>LEMA</u> Sean $O \in \{\omega,\Sigma^*\}$ y $n,m \in \omega$. Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ es Σ-p.r, entonces existe una función Σ-p.r $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ tq $f = \bar{f}|_{D_f}$.

Este lema nos dice que hay funciones Σ-p.r y Σ-totales $\bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_{n+m}$ las cuales cumplen $g_i = \bar{g}_i|_{D_{g_i}}$ para $i=1,\ldots,n+m$.

La hipótesis inductiva nos dice que los conjuntos D_{g_i} son Σ-p.r para $i=1,\ldots,n+m$, y por lo tanto

$$S = \bigcap_{i=1}^{n+m} D_{g_i}$$

es Σ-p.r. (<u>LEMA</u>: Si $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ son conjuntos Σ-p.r, $S_1 \cap S_2$, $S_1 - S_2$, $S_1 \cup S_2$ lo son)

Notar que

$$\chi_{D_f} = \left(\chi_{D_g} \circ [\bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_{n+m}] \wedge \chi_S^{\omega^k \times \Sigma^{*l}}\right)$$

lo cual nos dice que D_f es Σ-p.r. ■

(2) <u>TEOREMA</u> (Neumann vence a Gödel)

Si h es Σ-recursiva, entonces h es Σ-computable.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>

Será por inducción en k donde

TEO_k: Si $h \in R_k^\Sigma$, entonces h es Σ-computable.

<u>TEO_0</u> Sea $h \in R_0^\Sigma$. Hay varios casos, para cada uno de ellos daré un programa $P \in Pro^\Sigma$ que compute a h.

- $h = Suc$

$N1 \leftarrow N1+1$

- $h = Pred$

IF $N1 \neq 0$ GOTO L1

• $h = Suc$

$N1 \leftarrow N1+1$

• $h = C_0^{0,0}$ • $h = C_\varepsilon^{0,0}$

$N1 \leftarrow 0$ $P1 \leftarrow \varepsilon$

• $h = p_j^{n,m}$, $1 \leq j \leq n+m$

$N1 \leftarrow N_j$ si $1 \leq j \leq n$

$P1 \leftarrow P_{j-n}$ si $n+1 \leq j \leq n+m$

• $h = Pred$

IF $N1 \neq 0$ GOTO $L2$
$L1$ GOTO $L1$
$L2$ $N1 \leftarrow N1 \dot{-} 1$

• $h = d_a, a \in \Sigma$

$P1 \leftarrow P1.a$

<u>$TEO_k \Rightarrow TEO_{k+1}$</u> Sup. vale TEO_k. Sea $h \in R^{\Sigma}_{k+1} - R^{\Sigma}_{k}$. Hay varios casos, minimización, recursión primitiva y composición. Solo haré el siguiente

• $h = R(f, \mathcal{G})$, con

$$f : S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$$

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \times \Sigma^* \to \omega \text{ para cada } a \in \Sigma.$$

para $n,m \in \omega$, $S_1,\ldots,S_n \subseteq \omega$, $L_1,\ldots,L_m \subseteq \Sigma^*$, donde f y cada $\mathcal{G}_a$ son elementos de R^{Σ}_{k}. Sea $\Sigma = \{a_1,\ldots,a_r\}$. Por TEO_k, las funciones f y $\mathcal{G}_a$, $a \in \Sigma$ son Σ-computables y por lo tanto tenemos macros:

$$[V\overline{n+1} \leftarrow f(V1,\ldots,V\bar{n}, W1,\ldots,W\bar{m})]$$

$$[V\overline{n+2} \leftarrow \mathcal{G}_{a_i}(V1,\ldots,V\overline{n+1}, W1,\ldots,W\overline{m+1})] \text{ para } i=1,\ldots,r$$

con los cuales podemos formar el siguiente programa:

$[N\overline{n+1} \leftarrow f(N1,\ldots,N\bar{n}, P1,\ldots,P\bar{m})]$

$L\overline{r+1}$ IF $P\overline{m+1}$ BEGINS a_1 GOTO $L1$

⋮

IF $P\overline{m+1}$ BEGINS a_r GOTO L_r
GOTO $L\overline{r+2}$

$L1$ $P\overline{m+1} \leftarrow {}^\curvearrowright P\overline{m+1}$

$[N\overline{n+1} \leftarrow \mathcal{G}_{a_1}(N\overline{n+1}, N1,\ldots,N\bar{n}, P1,\ldots,P\bar{m}, P\overline{m+2})]$

$P\overline{m+2} \leftarrow P\overline{m+2}.a_1$

GOTO $L\overline{r+1}$

.

$\mathrm{GOTO}\ L_{\overline{r+1}}$

$\vdots$

$L_r\ P_{\overline{m+1}} \leftarrow \neg P_{\overline{m+1}}$

$[N_{\overline{n+1}} \leftarrow \mathcal{G}_{a_r}(N_{\overline{n+1}}, N_1, \ldots, N_{\bar{n}}, P_1, \ldots, P_{\bar{m}}, P_{\overline{m+2}})]$

$P_{\overline{m+2}} \leftarrow P_{\overline{m+2}}.a_r$

$\mathrm{GOTO}\ L_{\overline{r+1}}$

$L_{\overline{r+2}}\ N_1 \leftarrow N_{\overline{n+1}}$

Y ES CLARO QUE ESTE PROGRAMA COMPUTA A h. ∎

Combo 2

lunes, 8 de diciembre de 2025 15:22

Combo 2.

Lema (Lema de division por casos para funciones Σ-p.r.). *Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$, $i = 1, ..., k$, son funciones Σ-p.r. tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $f_1 \cup ... \cup f_k$ es Σ-p.r.*

(Hacer el caso $k = 2$, $n = 2$ y $m = 1$)

Proposición (Caracterizacion basica de conjuntos Σ-enumerables). *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:*

(1) *S es Σ-enumerable*

(2) *Hay un programa $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$ tal que:*

  (a) *Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.*

  (b) *Para cada $(x_1, ...x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$*

(Hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

(1) LEMA (DIVISIÓN POR CASOS PARA FUNCIONES Σ-P.R)

SUPONGAMOS $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*n} \to \Sigma^*$, $i = 1, ..., k$ SON FUNCIONES Σ-P.R TALES QUE $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ PARA $i \neq j$. ENTONCES $f_1 \cup ... \cup f_k$ ES Σ-P.R.

DEMOSTRACIÓN

HARÉ EL CASO $K=2$, $n=2$ Y $M=1$, ES DECIR $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^2 \times \Sigma^* \to \Sigma^*$, $i=1,2$

LEMA SI $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, $n,m \in \omega$, $O \in \{\omega, \Sigma^*\}$ ES Σ-PR, ENTONCES EXISTE UNA FUNCIÓN $\bar{f} : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ TAL QUE $f = \bar{f}|_{D_f}$

PROP UN CONJUNTO $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ ES Σ-PR SII ES EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN Σ-P.R.

EL LEMA NOS DICE QUE HAY FUNCIONES

$$\bar{f}_i : \omega^2 \times \Sigma^* \to \Sigma^*$$

QUE SON Σ-P.R Y TALES QUE $f_i = \bar{f}_i|_{D_{f_i}}$ PARA $i=1,2$.

LA PROPOSICIÓN NOS DICE QUE D_{f_1} Y D_{f_2} SON Σ-P.R., Y POR LO TANTO

(LEMA: $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ Σ-PR, ENTONCES $S_1 \cap S_2, S_1 \cup S_2, S_1 - S_2$ SON Σ-PR)

(Lema: $S_1, S_2 \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ Σ-PR, entonces $S_1 \cap S_2, S_1 \cup S_2, S_1 - S_2$ son Σ-PR)

Tenemos que $D_{f_1} \cup D_{f_2}$ es Σ-P.R.

Notar que

$$f_1 \cup f_2 = \left(\lambda_{\alpha\beta}[\alpha\beta] \circ \left[\lambda_{x\alpha}[\alpha^x] \circ \left[\chi^{\omega^1 \times \Sigma^*}_{D_{f_1}}, f_1\right], \lambda_{x\alpha}[\alpha^x] \circ \left[\chi^{\omega^1 \times \Sigma^*}_{D_{f_2}}, f_2\right]\right]\right)\Big|_{D_{f_1} \cup D_{f_2}}$$

por lo que $f_1 \cup f_2$ es Σ-P.R.

■

(2) Proposición (Caracterización básica de conjuntos Σ-enumerables) Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:

(1) S es Σ-enumerable

(2) Hay un programa $\mathcal{P} \in Pro^{\Sigma}$ tq:

(a) Para cada $x \in \omega$, $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$ donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.

(b) Para cada $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$, hay un $x \in \omega$ tq $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$.

Demostración

Haré el caso $S \subseteq \omega^2 \times \Sigma^{*1}$ no vacío.

(1) $\Rightarrow$ (2) Como S es no vacío, por definición, tenemos que hay una función $F: \omega \to \omega^2 \times \Sigma^{*1}$ tq $I_F = S$ y cada $F_{(i)}$ es Σ-computable, $i = 1, 2, 3$.
Por el primer manantial de macros, hay macros

$[V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)]$

$[V2 \leftarrow F_{(2)}(V1)]$

$[W1 \leftarrow F_{(3)}(V1)]$

Sea $\mathcal{P}$ el siguiente programa:

$[P1 \leftarrow F_{(3)}(N1)]$

$[P1 \leftarrow F_{(3)}(N1)]$

$[N2 \leftarrow F_{(2)}(N1)]$

$[N1 \leftarrow F_{(1)}(N1)]$

Donde suponemos que las expansiones de los macros no utilizan las variables $N1, N2, P1$ como auxiliares ni comparten labels.

Veamos que $\mathcal{P}$ cumple (a) y (b).

(a) Sea $x \in \omega$, notar que si corremos $\mathcal{P}$ desde el estado $\|x\|$, se detendrá llegando a un estado de la forma $((F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), y_1, \ldots), (F_{(3)}(x), \alpha_1, \ldots))$ donde $(F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), F_{(3)}(x)) = F(x) \in S$.

(b) Sea $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$ y sea $x \in \omega$ tq $F(x) = (x_1, x_2, \alpha_1)$, notar que $F_{(1)}(x) = x_1$, $F_{(2)}(x) = x_2$ y $F_{(3)}(x) = \alpha_1$, por lo que si corremos $\mathcal{P}$ partiendo del estado $\|x\|$, se detendrá llegando a un estado de la forma $((F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), y_1 \ldots), (F_{(3)}(x), \beta_1, \ldots)) = ((x_1, x_2, y_1, \ldots), (\alpha_1, \beta_1, \ldots))$.

$(2) \Rightarrow (1)$

Supongamos que $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma}$ cumple (a) y (b) de (2)

Sean

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}\ N1 \leftarrow N1$$

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}\ N1 \leftarrow N2$$

$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}\ P1 \leftarrow P1$$

Definimos

$$F_1 = \Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#}$$

$$F_2 = \Psi_{\mathcal{P}_2}^{1,0,\#}$$

$$F_3 = \Psi_{\mathcal{P}_3}^{1,0,*}$$

Notar que cada F_i es Σ-computable y tiene dominio igual a ω. Sea $F = [F_1, F_2, F_3]$. Por definición, $D_F = \omega$ y ya que $F_i = F_{(i)}$ para cada $i = 1,2,3$, tenemos que cada $F_{(i)}$ es Σ-computable.

Veamos que $I_F = S$.

<u>Observación</u> por las definiciones de cada F_i, de cada $\mathcal{P}_i$ y de la función $N_{\mathcal{F}}$ tenemos que para cada $x \in \omega$

OBSERVACIÓN: Por las definiciones de cada F_i, de cada P_j y de la función Ψ, tenemos que para cada $x \in \omega$,

$F_1(x) =$ valor de N1 tras correr $\mathcal{P}$ desde el estado $\|x\|$

$F_2(x) =$ valor de N2 tras correr $\mathcal{P}$ partiendo del estado $\|x\|$

$F_3(x) =$ valor de P1 tras correr $\mathcal{P}$ partiendo del estado $\|x\|$

$I_F \subseteq S$

Sea $(x_1, x_2, \alpha_1) \in I_F$ y sea $x \in \omega$ tq $F(x) = (x_1, x_2, \alpha_1)$

es decir que $F_1(x) = x_1$, $F_2(x) = x_2$ y $F_3(x) = \alpha_1$

Por lo que al correr $\mathcal{P}$ desde el estado $\|x\|$ se llegó a un estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, \ldots), (\alpha_1, \beta_1, \ldots))$ y por (a) de (2) tenemos que $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$.

$S \subseteq I_F$ Sea $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$. Por (b) de (2) tenemos que hay un $x \in \omega$ tq $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, x_2, y_1, \ldots), (\alpha_1, \beta_1, \ldots))$.

Por OBS, $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x)) = (x_1, x_2, \alpha_1) \in I_F$

$\blacksquare$

Combo 3

lunes, 8 de diciembre de 2025 15:22

Combo 3.

Teorema (Godel vence a Neumann). *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ es Σ-computable, entonces f es Σ-recursiva.*

Teorema (Caracterizacion de conjuntos Σ-efectivamente computables). *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. Son equivalentes*

(a) *S es Σ-efectivamente computable*
(b) *S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-efectivamente enumerables*

(Haga solo (b) implica (a). La prueba de este resultado esta al final de la Guia 3)

(1) TEOREMA (GODEL VENCE A NEUMANN) SI $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \Sigma^*$ ES Σ-COMPUTABLE, ENTONCES f ES Σ-RECURSIVA.

DEMOSTRACIÓN

SEA $\mathcal{P}_0$ UN PROGRAMA QUE COMPUTE A f. VEAMOS QUE f ES $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-RECURSIVA.
NOTAR QUE

$$f = E_{*1}^{n,m} \circ \left[T^{n,m} \circ \left[p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m} \right], p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}_0}^{n,m} \right]$$

DONDE LAS PROYECCIONES $p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}$ SON RESPECTO AL ALFABETO $(\Sigma \cup \Sigma_p)$, ES DECIR TIENEN DOMINIO $\omega^n \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^m$. ESTO NOS DICE QUE f ES $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-RECURSIVA.

TEOREMA SEAN Σ Y Γ ALFABETOS. SI f ES Σ-MIXTA Y Γ-MIXTA, f ES Σ-RECURSIVA SII f ES Γ-RECURSIVA.

ESTE TEOREMA NOS DICE QUE f ES Σ-RECURSIVA. ∎

(2) TEOREMA (CARACTERIZACIÓN DE CONJUNTOS Σ-EFECTIVAMENTE COMPUTABLES)
SEA $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$. SON EQUIVALENTES:

(a) S ES Σ-EFECTIVAMENTE COMPUTABLE

(b) S Y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ SON Σ-EFECTIVAMENTE ENUMERABLES.

(b) S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-efectivamente enumerables.

DEMOSTRACIÓN

Solo haré (b) $\Rightarrow$ (a). Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto tal que S y $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son Σ-efectivamente enumerables.

Si $S = \emptyset$ ó $S = \omega^n \times \Sigma^{*m}$, es claro que se cumple (a). Podemos suponer entonces que ni S ni $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$ son el conjunto vacío.

Sea $\mathbb{P}_1$ un procedimiento efectivo que enumera a S y $\mathbb{P}_2$ un procedimiento efectivo que enumera a $(\omega^n \times \Sigma^{*m}) - S$.

Es claro que el siguiente procedimiento efectivo computa al predicado $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$ (i.e. se da (a)):

Dato de entrada: $(\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^n \times \Sigma^{*m}$

Etapa 1: Darle a la variable T el valor 0.

Etapa 2: Realizar $\mathbb{P}_1$ con valor de entrada T para obtener de salida la upla $(\vec{y}, \vec{\beta})$

Etapa 3: Realizar $\mathbb{P}_2$ con valor de entrada T para obtener de salida la upla $(\vec{z}, \vec{\gamma})$

Etapa 4: Si $(\vec{y}, \vec{\beta}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, detenerse y dar como dato de salida el valor 1. Si $(\vec{z}, \vec{\gamma}) = (\vec{x}, \vec{\alpha})$, detenerse y dar como dato de salida el valor 0. Si no sucede ninguno de los dos casos dados, aumentar en 1 el valor de T y dirigirse a la etapa 2.

∎

Combo 4

lunes, 8 de diciembre de 2025 15:22

Combo 4.

Proposición (Caracterizacion basica de conjuntos Σ-enumerables). *Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacio. Entonces son equivalentes:*

(1) *S es Σ-enumerable*

(2) *Hay un programa $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$ tal que:*

(a) *Para cada $x \in \omega$, tenemos que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$, donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.*

(b) *Para cada $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$ hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$*

(Hacer el caso $n = 2$ y $m = 1$)

Lema (Lema de la sumatoria). *Sea Σ un alfabeto finito. Si $f : \omega \times S_1 \times ... \times S_n \times L_1 \times ... \times L_m \to \omega$ es Σ-p.r., con $S_1, ..., S_n \subseteq \omega$ y $L_1, ..., L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacios, entonces la funcion $\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r.*

(1) Proposición (Carac. de conjuntos Σ-enumerables). Sea $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ un conjunto no vacío. Entonces son equivalentes:

(1) S es Σ-enumerable

(2) Hay un programa $\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^\Sigma$ tq

(a) Para cada $x \in \omega$, $\mathcal{P}$ se detiene partiendo del estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$ donde $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$.

(b) Para cada $(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in S$, hay un $x \in \omega$ tal que $\mathcal{P}$ se detiene partiendo desde el estado $\|x\|$ y llega a un estado de la forma $((x_1, ..., x_n, y_1, ...), (\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ...))$.

Demostración: Haré solo el caso $S \subseteq \omega^2 \times \Sigma^*$ no vacío.

(1) ⇒ (2) Sup. S es Σ-enumerable. Como no es vacío, por definición tenemos que hay una función $F : \omega \to \omega^2 \times \Sigma^*$ tq $I_F = S$ y cada $F_{(i)}$ es Σ-computable, para $i = 1, 2, 3$. El primer manantial de macros nos dice que hay macros

$[V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)]$

$[V2 \leftarrow F_{(2)}(V1)]$

$[V2 \leftarrow F_{(1)}(V1)]$

$[V2 \leftarrow F_{(2)}(V1)]$

$[W1 \leftarrow F_{(3)}(N1)]$

CON LOS CUALES PODEMOS ARMAR EL SIGUIENTE PROGRAMA $\mathcal{P}$:

$$[P1 \leftarrow F_{(3)}(N1)]$$
$$[N2 \leftarrow F_{(2)}(N1)]$$
$$[N1 \leftarrow F_{(1)}(N1)]$$

DONDE PODEMOS ASUMIR QUE LAS EXPANSIONES DE ESTOS MACROS NO UTILIZAN A N1, N2, P1 COMO VARIABLES AUXILIARES NI COMPARTEN LABELS. VEAMOS QUE $\mathcal{P}$ CUMPLE (a) y (b).

(a) SEA $x \in \omega$. ES CLARO QUE CORRER $\mathcal{P}$ PARTIENDO DEL ESTADO $\|x\|$ HACE QUE SE DETENGA EN UN ESTADO DE LA FORMA

$$((F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), y_1, \ldots), (F_{(3)}(x), \alpha_1, \ldots))$$

DONDE $(F_{(1)}(x), F_{(1)}(x), F_{(3)}(x)) = F(x) \in I_F = S$.

(b) SEA $(x_1, x_2, \alpha_1) \in S$. SEA $x \in \omega$ TQ $F(x) = (x_1, x_2, \alpha_1)$, ES DECIR $F_{(1)}(x) = x_1$, $F_{(2)}(x) = x_2$, $F_{(3)}(x) = \alpha_1$. NOTAR QUE CORRER $\mathcal{P}$ PARTIENDO DEL ESTADO $\|x\|$ HACE QUE SE DETENGA LLEGANDO A UN ESTADO DE LA FORMA $((F_{(1)}(x), F_{(2)}(x), y_1, \ldots), (F_{(3)}(x), \alpha_1, \ldots))$ $= ((x_1, x_2, y_1, \ldots), (\alpha_1, \alpha_1, \ldots))$

(2) $\Rightarrow$ (1)

SEA $\mathcal{P}$ UN PROGRAMA QUE CUMPLE (a) y (b) DE (2).

SEAN

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}\ N1 \leftarrow N1$$
$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}\ N1 \leftarrow N2$$
$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}\ P1 \leftarrow P1$$

Y CON ELLOS DEFINIMOS

$$F_1 = \Psi_{\mathcal{P}_1}^{1,0,\#}, \quad F_2 = \Psi_{\mathcal{P}_2}^{1,0,\#}, \quad F_3 = \Psi_{\mathcal{P}_3}^{1,0,*}$$

NOTAR QUE F_1, F_2, F_3 SON Σ-COMPUTABLES Y TIENEN DOMINIO ω.

SEA $F = [F_1, F_2, F_3]$. ES CLARO QUE $D_F = \omega$ Y COMO CADA

NOTAR QUE F_1, F_2, F_3 SON Σ-COMPUTABLES Y TIENEN DOMINIO ω.

SEA $F=[F_1,F_2,F_3]$. ES CLARO QUE $D_F=\omega$ Y COMO CADA $F_{(i)}$ ES F_i, TENEMOS QUE $F_{(i)}$ ES Σ-COMPUTABLE, PARA $i=1,2,3$.

VEAMOS QUE $I_F=S$.

<u>OBSERVACIÓN</u> DADO $x\in\omega$, NOTAR QUE:

- $F_{(1)}(x)=$ VALOR QUE ASUME N1 TRAS CORRER $\mathcal{P}$ PARTIENDO DEL ESTADO $\|x\|$
- $F_{(2)}(x)=$ VALOR QUE ASUME N2 TRAS CORRER $\mathcal{P}$ PARTIENDO DEL ESTADO $\|x\|$
- $F_{(3)}(x)=$ VALOR QUE ASUME P1 TRAS CORRER $\mathcal{P}$ PARTIENDO DEL ESTADO $\|x\|$

<u>$I_F\subseteq S$</u> SEA $(x_1,x_2,\alpha_1)\in I_F$ Y SEA $x\in\omega$ TQ $F(x)=(x_1,x_2,\alpha_1)$ POR <u>OBS</u>, NOTAR QUE AL CORRER $\mathcal{P}$ DESDE EL ESTADO $\|x\|$, SE DETIENE LLEGANDO A UN ESTADO DE LA FORMA $((F_{(1)}(x),F_{(2)}(x),y_1,\dots),(F_{(3)}(x),\beta_1,\dots))$, Y (a) DE (2) NOS DICE QUE $(x_1,x_2,\alpha_1)=(F_{(1)}(x),F_{(2)}(x),F_{(3)}(x))\in S$.

<u>$S\subseteq I_F$</u> SEA $(x_1,x_2,\alpha_1)\in S$. NOTAR QUE (b) DE (2) NOS DICE QUE HAY UN $x\in\omega$ TQ $\mathcal{P}$ SE DETIENE PARTIENDO DEL ESTADO $\|x\|$ Y LLEGA A UN ESTADO DE LA FORMA $((x_1,x_2,y_1,\dots),(\alpha_1,\beta_1,\dots))$. LUEGO <u>OBS</u> NOS DICE QUE $(x_1,x_2,\alpha_1)=(F_{(1)}(x),F_{(2)}(x),F_{(3)}(x))=F(x)\in I_F$.

■

(2) <u>LEMA</u> (LEMA DE LA SUMATORIA) SEA Σ UN ALFABETO FINITO. SI $f:\omega\times S_1\times\dots\times S_n\times L_1\times\dots\times L_m\to\omega$ ES Σ-P.R, CON $S_1,\dots,S_n\subseteq\omega$, $L_1,\dots,L_m\subseteq\Sigma^*$ NO VACÍOS, ENTONCES LA FUNCIÓN

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{t=x}^{t=y} f(t,\vec{x},\vec{\alpha})\right] \text{ ES } \Sigma\text{-P.R}$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u> SEA $G=\lambda tx\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=t} f(i,\vec{x},\vec{\alpha})\right]$, YA QUE

$$\lambda xy\vec{x}\vec{\alpha}\left[\sum_{i=x}^{i=y} f(i,\vec{x},\vec{\alpha})\right]=G\circ\left[p_2^{n+2,m},p_1^{n+2,m},p_3^{n+2,m},\dots,p_{n+m+2}^{n+2,m}\right]$$

SOLO TENEMOS QUE PROBAR QUE G ES Σ-P.R. NOTAR QUE

$$G(0,x,\vec{x},\vec{\alpha})=\begin{cases}0 & \text{si } x>0\\ f(0,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x=0\end{cases}$$

$$G(t+1,x,\vec{x},\vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ G(t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) + f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases}$$

O sea que si definimos

$$h : \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$$

$$(x,\vec{x},\vec{\alpha}) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ f(0,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g : \omega^3 \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$$

$$(A,t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) \to \begin{cases} 0 & \text{si } x > t+1 \\ A + f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha}) & \text{si } x \leq t+1 \end{cases}$$

Tenemos que $G = R(h,g)$. Ahora nos resta probar que h y g son Σ-p.r.

Sean

$D_1 = \{(x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x > 0\}$

$D_2 = \{(x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x = 0\}$

$H_1 = \{(z,t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x > t+1\}$

$H_2 = \{(z,t,x,\vec{x},\vec{\alpha}) \in \omega^3 \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m : x \leq t+1\}$

Notar que

$$h = C_0^{n+1,m}|_{D_1} \cup f|_{D_2}$$

$$g = C_0^{n+3,m}|_{H_1} \cup \lambda_{A t x \vec{x} \vec{\alpha}}[A + f(t+1,\vec{x},\vec{\alpha})]|_{H_2}$$

Lemas:
- La unión de funciones Σ-p.r. es Σ-p.r.
- La restricción de una función Σ-p.r. a un subconjunto de su dominio el cual es Σ-p.r., es Σ-p.r.
- $S_1,\ldots,S_n,L_1,\ldots,L_m$ Σ-p.r. sii $S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$ Σ-p.r.
- f Σ-p.r. $\Rightarrow$ D_f Σ-p.r.

Es claro así que sólo nos resta ver que D_1, D_2, H_1 y H_2 son Σ-p.r., pues el resto de los objetos que conforman h y g claramente lo son. Notar que $S_1,\ldots,S_n,L_1,\ldots,L_m$ son Σ-p.r. por los lemas anteriores.

Notar que

$$\chi_{D_1}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} = \lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\chi_{D_f}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}[x > 0]\right]$$

$$\chi_{D_2}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} = \lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\chi_{D_f}^{\omega^{n+1} \times \Sigma^{*m}} \wedge \lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}[x = 0]\right]$$

Sea $R = \omega^3 \times S_1 \times \ldots S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$ claramente Σ-p.r. por lemas.

$$\chi_{D_2} = \lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}[\chi_{D_j} \wedge \lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}[\ldots]]$$

Sea $R = \omega^3 \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m$, claramente Σ-p.r. por lema.

Notar que

$$\chi_{H_1}^{\omega^{n+3}\times\Sigma^{*m}} = \lambda_{zt x\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\chi_R^{\omega^{n+3}\times\Sigma^{*m}} \wedge \lambda_{zt x\vec{x}\vec{\alpha}}[x > t+1]\right]$$

$$\chi_{H_2}^{\omega^{n+3}\times\Sigma^{*m}} = \lambda_{zt x\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\chi_R^{\omega^{n+3}\times\Sigma^{*m}} \wedge \lambda_{zt x\vec{x}\vec{\alpha}}[x \leq t+1]\right]$$

Por lo que D_1, D_2, H_1, H_2 son Σ-p.r

$\blacksquare$

Combo 5

lunes, 8 de diciembre de 2025 15:22

Combo 5.

Lema. *Sea* $\Sigma = \{@, \%, !\}$. *Sea*

$$f : S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \to \omega$$

con $S_1, S_2 \subseteq \omega$ *y* $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ *conjuntos no vacios y sea* $\mathcal{G}$ *una familia* Σ*-indexada de funciones tal que*

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \times \Sigma^* \to \omega$$

para cada $a \in \Sigma$. *Si* f *y cada* $\mathcal{G}_a$ *son* Σ*-efectivamente computables, entonces* $R(f, \mathcal{G})$ *lo es.*

(Es un ejercicio de la Guia 5)

Lema (Lema de cuantificacion acotada). *Sea* Σ *un alfabeto finito. Sea* $P : S \times S_1 \times \ldots \times S_n \times L_1 \times \ldots \times L_m \to \omega$ *un predicado* Σ*-p.r., con* $S, S_1, \ldots, S_n \subseteq \omega$ *y* $L_1, \ldots, L_m \subseteq \Sigma^*$ *no vacios. Supongamos* $\bar{S} \subseteq S$ *es* Σ*-p.r.. Entonces* $\lambda x\vec{x}\vec{\alpha}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x}\, P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ *es* Σ*-p.r.*

(1) LEMA SEA $\Sigma = \{@, \%, !\}$. SEA

$$f : S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \to \omega$$

CON $S_1, S_2 \subseteq \omega$ Y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ CONJUNTOS NO VACÍOS Y SEA $\mathcal{G}$ UNA FAMILIA Σ-INDEXADA DE FUNCIONES TAL QUE

$$\mathcal{G}_a : \omega \times S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \times \Sigma^* \to \omega$$

PARA CADA $a \in \Sigma$. SI f Y CADA $\mathcal{G}_a$ SON Σ-EFECTIVAMENTE COMPUTABLES, ENTONCES $R(f, \mathcal{G})$ LO ES.

DEMOSTRACIÓN

RECORDEMOS QUE $R(f, \mathcal{G}) : S_1 \times S_2 \times L_1 \times L_2 \times \Sigma^* \to \omega$

$$(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) \to \begin{cases} f(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) & \text{si } \alpha = \varepsilon \\ \mathcal{G}_a(R(f,\mathcal{G})(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta), x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) & \text{si } \alpha = \beta a \end{cases}$$

SEA $\mathbb{P}_f$ UN PROC. EFECTIVO QUE COMPUTE A f.

SEAN $\mathbb{P}_@$, $\mathbb{P}_\%$ Y $\mathbb{P}_!$ PROCEDIMIENTOS EFECTIVOS QUE COMPUTEN A $\mathcal{G}_@$, $\mathcal{G}_\%$ Y $\mathcal{G}_!$ RESPECTIVAMENTE.

SEA $\mathbb{P}$ EL SIGUIENTE PROCEDIMIENTO EFECTIVO CON DATO DE ENTRADA $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) \in \omega^2 \times \Sigma^{*3}$:

$(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) \in \omega^2 \times \Sigma^{*3}$:

ETAPA 1 CORRER $\mathbb{P}_f$ CON DATO DE ENTRADA $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$. SI SE DETIENE, GUARDAR EL RESULTADO EN A.

ETAPA 2 ASIGNAR $B \leftarrow \varepsilon$, $C \leftarrow \alpha$

ETAPA 3 SI C ES DE LA FORMA $@\alpha'$, CORRER $\mathbb{P}_@$ CON DATO DE ENTRADA $(A, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, B)$ Y GUARDAR EL RESULTADO EN A, SI SE DETIENE. ADEMÁS ASIGNAR $B \leftarrow B@$ Y $C \leftarrow \alpha'$. SI NO ES DE TAL FORMA, IR A ETAPA SIG.

ETAPA 4 SI C ES DE LA FORMA $\%\alpha'$, CORRER $\mathbb{P}_\%$ CON DATO DE ENTRADA $(A, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, B)$ Y GUARDAR EL RESULTADO EN A, SI SE DETIENE. ADEMÁS ASIGNAR $B \leftarrow B\%$ Y $C \leftarrow \alpha'$. SI NO ES DE TAL FORMA, IR A ETAPA SIG.

ETAPA 5 SI C ES DE LA FORMA $!\alpha'$, CORRER $\mathbb{P}_!$ CON DATO DE ENTRADA $(A, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, B)$ Y GUARDAR EL RESULTADO EN A, SI SE DETIENE. ADEMÁS ASIGNAR $B \leftarrow B!$ Y $C \leftarrow \alpha'$. SI NO ES DE TAL FORMA, IR A ETAPA SIG.

ETAPA 6 SI $C = \varepsilon$, DETENERSE Y DEVOLVER A COMO DATO DE SALIDA. SI NO, IR A ETAPA 3.

ES CLARO QUE $\mathbb{P}$ COMPUTA A $R(f, g)$ PUES DADO UN DATO DE ENTRADA $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) \in \omega^2 \times \Sigma^{*3}$, TENEMOS QUE:

- SI $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) \notin D_{R(f,g)}$, ES CLARO QUE $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) \notin D_f$ Y POR LO TANTO $\mathbb{P}$ NUNCA SE DETENDRÁ YA QUE INTENTA CORRER $\mathbb{P}_f$ CON DATO DE ENTRADA $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$ EN LA PRIMERA ETAPA.

- SI $(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) \in D_{R(f,g)}$, NOTAR QUE SI $\alpha = \varepsilon$, $\mathbb{P}$ SE DETIENE Y DEVUELVE EL VALOR $f(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2)$. ADEMÁS, SI $\alpha = a_1 \ldots a_k$ CON $a_1 \ldots a_k \in \Sigma$, $k \geq 1$, TENEMOS QUE $\mathbb{P}$ COMPUTA EL VALOR

$$g_{a_k}(\ldots g_{a_1}(f(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2), x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, \varepsilon) \ldots), x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, a_1 \ldots a_{k-1})$$
$$= R(f, g)(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2, a_1 \ldots a_k)$$

EN LA VARIABLE A, Y LA DEVUELVE AL DETENERSE.

■

(2) LEMA (Cuantificación acotada). Sea Σ un alfabeto finito. Sea $P: S \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \to \omega$ un predicado Σ-p.r., con $S, S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos. Supongamos $\bar{S} \subseteq S$ es Σ-p.r. Entonces $\lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es Σ-p.r.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\bar{P} = P|_{\bar{S} \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m} \cup C_1^{n+1,m}|_{(\omega - \bar{S}) \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m}$

Notar que $\bar{P}$ tiene dominio $\omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$.

LEMAS

- $S_1, \dots, S_n \subseteq \omega$ y $L_1, \dots, L_m \subseteq \Sigma^*$ no vacíos: $S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$ Σ-PR sii $S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ Σ-PR.
- $f_i: D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ $i = 1, 2$ tq $D_{f_1} \cap D_{f_2} = \emptyset$, f_1 y f_2 Σ-PR $\Rightarrow f_1 \cup f_2$ Σ-PR.
- $f: S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ Σ-PR y $\bar{S} \subseteq S$ Σ-PR, entonces $f|_{\bar{S}}$ es Σ-PR.
- f Σ-PR $\Rightarrow D_f$ Σ-PR.
- S_1, S_2 Σ-PR $\Rightarrow S_1 - S_2$, $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$ Σ-PR

Por estos lemas, tenemos que $\omega, \bar{S}, S_1, \dots, S_n, L_1, \dots, L_m$ son Σ-PR y por lo tanto $\bar{S} \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ y $(\omega - \bar{S}) \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m$ lo son.
Con ello, como P y $C_1^{n+1,m}$ son Σ-PR, podemos concluir que $\bar{P}$ es Σ-PR.
Notar que

$$\lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}\left[(\forall t \in \bar{S})_{t \leq x} P(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] = \lambda_{x\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\prod_{t=0}^{t=x} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$$

$$= \lambda_{xy\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\prod_{t=x}^{t=y} \bar{P}(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right] \circ \left[C_0^{n+1,m}, p_1^{n+1,m}, \dots, p_{n+1+m}^{n+1,m}\right]$$

Lo cual es Σ-p.r. por el lema de la productoria:

LEMA Si $f: \omega \times S_1 \times \dots \times S_n \times L_1 \times \dots \times L_m \to \omega$ es Σ-p.r., $\lambda_{xy\vec{x}\vec{\alpha}}\left[\prod_{t=x}^{t=y} f(t, \vec{x}, \vec{\alpha})\right]$ es Σ-PR.

Combo 6

lunes, 8 de diciembre de 2025 15:22

Combo 6.

Lema (Σ-efectivamente computable implica Σ-efectivamente enumerable). *Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ es Σ-efectivamente computable entonces S es Σ-efectivamente enumerable.*

Teorema (Caracterizacion de conjuntos Σ-r.e.). *Dado $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$, son equivalentes*

(1) *S es Σ-recursivamente enumerable*

(2) *$S = I_F$, para alguna $F : D_F \subseteq \omega^k \times \Sigma^{*l} \to \omega^n \times \Sigma^{*m}$ tal que cada $F_{(i)}$ es Σ-recursiva.*

(3) *$S = D_f$, para alguna funcion Σ-recursiva f*

(Haga solo la prueba de (2)$\Rightarrow$(3), caso $k = l = 1$ y $n = m = 2$)

(1) LEMA Si $S \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m}$ ES Σ-EFECTIVAMENTE COMPUTABLE ENTONCES S ES Σ-EFECTIVAMENTE ENUMERABLE.

DEMOSTRACIÓN Si $S=\emptyset$, ES ENUMERABLE POR DEFINICIÓN.

SUPONGAMOS $S \neq \emptyset$. SEA $(\vec{z}, \vec{v}) \in S$, FIJO.

SEA $\mathbb{P}_S$ UN PROCEDIMIENTO EFECTIVO QUE COMPUTA $\chi_S^{\omega^n \times \Sigma^{*m}}$

SEA $\leq$ CUALQUIER ORDEN TOTAL SOBRE Σ Y RECORDEMOS QUE LA FUNCIÓN $*^{\leq}$ ES Σ-EFECTIVAMENTE COMPUTABLE, SEA $\mathbb{P}_*$ UN P.E. QUE LA COMPUTE.

SEA $\mathbb{P}$ EL SIGUIENTE PROGRAMA CON DATO DE ENTRADA $x \in \omega$:

ETAPA 1 Si $x=0$, DETENERSE Y DEVOLVER $(\vec{z}, \vec{v})$

ETAPA 2 ASIGNAR

$y_1 \leftarrow (x)_1$

$\vdots$

$y_n \leftarrow (x)_n$

$\beta_1 \leftarrow$ RESULTADO DE CORRER $\mathbb{P}_*$ CON DATO DE ENTRADA $(x)_{n+1}$

$\vdots$

$\beta_1 \leftarrow$ RESULTADO DE CORRER P_* CON DATO DE ENTRADA $(x)_{n+1}$

⋮

$\beta_m \leftarrow$ RESULTADO DE CORRER P_* CON DATO DE ENTRADA $(x)_{n+m}$

ETAPA 3: CORRER EL PROCEDIMIENTO P_S CON DATO DE ENTRADA $(y_1,\dots,y_n,\beta_1,\dots,\beta_m)$. SI DEVUELVE 1, DETENERSE Y DEVOLVER $(y_1,\dots,y_n,\beta_1,\dots,\beta_m)$. SI DEVUELVE 0, DETENERSE Y DEVOLVER $(\vec{x},\vec{\gamma})$.

NOTAR QUE P SE DETIENE PARTIENDO DE CUALQUIER $x\in\omega$.
ES CLARO ENTONCES QUE P ENUMERA A S PUES LA ETAPA 2 DEL PROGRAMA GENERA TODAS LAS $n+m$-UPLAS DE $\omega^n\times\Sigma^{*m}$ Y LA ETAPA 3 SE ASEGURA DE DEVOLVER ESTAS UPLAS SÓLO CUANDO PERTENECEN A S.

■

(2) TEOREMA (CARACTERIZACIÓN DE CONJUNTOS Σ-R.E.). DADO $S\subseteq\omega^n\times\Sigma^{*m}$, SON EQUIVALENTES:

(1) S ES Σ-RECURSIVAMENTE ENUMERABLE.

(2) $S=I_F$, PARA ALGUNA $F:D_F\subseteq\omega^k\times\Sigma^{*l}\to\omega^n\times\Sigma^{*m}$ TAL QUE CADA $F_{(i)}$ ES Σ-RECURSIVA.

(3) $S=D_f$, PARA ALGUNA FUNCIÓN Σ-RECURSIVA f.

DEMOSTRACIÓN: SEA $S\subseteq\omega^2\times\Sigma^{*2}$

SUP $S=I_F$, PARA ALGUNA $F:D_F\subseteq\omega\times\Sigma^{*}\to\omega^2\times\Sigma^{*2}$ TAL QUE CADA $F_{(i)}$ ES Σ-RECURSIVA.

TEOREMA: SI f ES Σ-RECURSIVA, f ES Σ-COMPUTABLE.

PARA $i=1,2,3,4$, SEA P_i UN PROGRAMA QUE COMPUTA A $F_{(i)}$.

SEA $\leq$ UN ORDEN TOTAL SOBRE Σ. DEFINIMOS

$$H_i=\lambda_{t x_1 \alpha_1}\left[\neg Halt^{1,1}(t,x_1,\alpha_1,P_i)\right]$$

NOTAR QUE $D_{H_i}=\omega^2\times\Sigma^{*}$ Y QUE H_i ES Σ-MIXTA PARA LA FUNCIÓN

$H_i = \lambda_{t x_1 \alpha_1} [\neg HALT^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, P_i)]$

NOTAR QUE $D_{H_i} = \omega^2 \times \Sigma^{*}$ Y QUE H_i ES Σ-MIXTA. COMO LA FUNCIÓN $HALT^{1,1}$ ES $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-P.R, TENEMOS QUE H_i ES $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-P.R Y POR INDEPENDENCIA DEL ALFABETO, H_i ES Σ-P.R.

<u>SEGUNDO MANANTIAL</u> SI $P: \omega^2 \times \Sigma^{*} \to \omega$ ES Σ-R, HAY UN MACRO

$$[\text{IF } P(V1, V2, W1) \text{ GOTO } A1]$$

USANDO ESTO, TENEMOS QUE PARA $i=1,2,3,4$, HAY MACROS

$$[\text{IF } H_i(V2, V1, W1) \text{ GOTO } A1]$$

LOS CUALES ESCRIBIREMOS DE LA FORMA

$$[\text{IF } \neg HALT^{1,1}(V2, V1, W1, P_i) \text{ GOTO } A1]$$

PARA $i=1,2$, SEA

$$E_i = \lambda_{x t x_1 \alpha_1} [x \neq E_{\#1}^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, P_i)]$$

PARA $i=3,4$, SEA

$$E_i = \lambda_{t x_1 \alpha_1 \alpha} [\alpha \neq E_{*1}^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, P_i)]$$

NOTAR QUE CON EL MISMO ANÁLISIS REALIZADO PARA H_i, TENIENDO EN CUENTA QUE LAS FUNCIONES $E_{*1}^{1,1}$ Y $E_{\#1}^{1,1}$ SON $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-P.R, LLEGAMOS A QUE CADA E_i ES Σ-P.R. ES DECIR QUE HAY MACROS

$i=1,2$ $\quad [\text{IF } E_i(V2, V3, V1, W1) \text{ GOTO } A1]$

$i=3,4$ $\quad [\text{IF } E_i(V2, V1, W1, W2) \text{ GOTO } A1]$

Y LOS ESCRIBIMOS DE FORMA MÁS INTUITIVA, COMO PARA $i=1$,

$$[\text{IF } V2 \neq E_{\#1}^{1,1}(V3, V1, W1, P_1) \text{ GOTO } A1]$$

COMO LA FUNCIÓN $f = \lambda_x [(x)_1]$ ES Σ-P.R, HAY UN MACRO $[V2 \leftarrow f(V1)]$ QUE ESCRIBIRÉ COMO $[V2 \leftarrow (V1)_1]$

SIMILARMENTE, HAY MACROS

$$[V2 \leftarrow *^{S}((V1)_3)] \quad , [V2 \leftarrow (V1)_2]$$

SEA P EL SIGUIENTE PROGRAMA DE S^{Σ}:

L1 $N20 \leftarrow N20 + 1$

$L1 \quad N20 \leftarrow N20+1$

$N10 \leftarrow (N20)_1$

$N3 \leftarrow (N20)_2$

$P3 \leftarrow *^{\Sigma}((N20)_3)$

[IF $\neg HALT^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_1)$ GOTO L1]

[IF $\neg HALT^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_2)$ GOTO L1]

[IF $\neg HALT^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_3)$ GOTO L1]

[IF $\neg HALT^{1,1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_4)$ GOTO L1]

[IF $N1 \neq E^{1,1}_{\#1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_1)$ GOTO L1]

[IF $N2 \neq E^{1,1}_{\#1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_2)$ GOTO L1]

[IF $P1 \neq E^{1,1}_{*1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_3)$ GOTO L1]

[IF $P2 \neq E^{1,1}_{*1}(N10, N3, P3, \mathcal{P}_4)$ GOTO L1]

NOTAR QUE ESTE PROGRAMA COMPUTA A $p_1^{2,2}|_S$ PUES DADO UN DATO DE ENTRADA $(x, y, \alpha, \beta) \in \omega^2 \times \Sigma^{*2}$, SE TIENE QUE

- SI $(x, y, \alpha, \beta) \notin S$, EL PROGRAMA NUNCA SE DETENDRÁ PUES SIEMPRE SE DARÁ ALGUNA DESIGUALDAD DE LOS MACROS ASOCIADOS A LOS E_i, PUES DE NO SER ASÍ TENDRÍAMOS QUE $(x, y, \alpha, \beta) = F(x_1, \alpha_1) \in I_F = S$, DONDE x_1, α_1 SON LOS VAL. QUE REPR. N3 Y P3.

- SI $(x, y, \alpha, \beta) \in S$, HAY UN PAR x_1, α_1 TAL QUE $F(x_1, \alpha_1) = (x, y, \alpha, \beta)$. NOTAR QUE $\mathcal{P}$ GENERA EN N3 Y P3 TODAS LAS COMBINACIONES POSIBLES DE $\omega \times \Sigma^*$, EN PARTICULAR x_1 Y α_1, ES DECIR QUE CADA $\mathcal{P}_i$ SE DETENDRÁ TRAS ALGUNA CANTIDAD DE PASOS DESDE EL DATO $\|x_1, \alpha_1\|$ LLEGANDO A ESTADOS DE LA FORMA $((x, \ldots), (\ldots)), ((y, \ldots), (\ldots)), ((\ldots), (\alpha, \ldots)), ((\ldots), (\beta, \ldots))$ RESPECTIVAMENTE, POR LO QUE $\mathcal{P}$ TERMINARÁ, Y PODEMOS ASUMIR QUE LAS EXPANSIONES DE LOS MACROS NO MODIFICAN EL VALOR DE N1.

[illegible]

MODIFICAN EL VALOR DE N1.

NOTAR QUE $P_1^{2,2}|_S$ ES Σ-COMPUTABLE Y $\therefore$ Σ-RECURSIVA, Y $S = D_{P_1^{2,2}|_S}$

$\blacksquare$

Combo 7

lunes, 8 de diciembre de 2025 15:22

Combo 7.

Lema (Lema de minimizacion acotada). *Sean* $n, m \geq 0$. *Sea* $P : D_P \subseteq \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ *un predicado* Σ*-p.r.. Entonces*

(a) $M(P)$ *es* Σ*-recursiva.*

(b) *Si hay una funcion* Σ*-p.r.* $f : \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ *tal que*

$$M(P)(\vec{x}, \vec{\alpha}) = \min_t P(t, \vec{x}, \vec{\alpha}) \leq f(\vec{x}, \vec{\alpha}), \text{ para cada } (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in D_{M(P)},$$

entonces $M(P)$ *es* Σ*-p.r..*

Lema. *Supongamos* $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$ *es* Σ*-recursiva y* $S \subseteq D_f$ *es* Σ*-r.e., entonces* $f|_S$ *es* Σ*-recursiva.*

(Haga solo el caso S no vacio, $n = m = 1$ y $O = \Sigma^*$)

Combo 8

lunes, 8 de diciembre de 2025 15:22

Combo 8.

Lema. *Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^{\Sigma}$ no es Σ-recursivo.*

Teorema. *Supongamos $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces $AutoHalt^{\Sigma}$ no es Σ-efectivamente computable. Es decir no hay ningun procedimiento efectivo que decida si un programa de $\mathcal{S}^{\Sigma}$ termina partiendo de si mismo.*

Lema. *Supongamos que $\Sigma \supseteq \Sigma_p$. Entonces*

$$A = \{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma} : AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 1\}$$

es Σ-r.e. y no es Σ-recursivo. Mas aun el conjunto

$$N = \{\mathcal{P} \in \mathrm{Pro}^{\Sigma} : AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 0\}$$

no es Σ-r.e.

Teorema (Neumann vence a Godel). *Si h es Σ-recursiva, entonces h es Σ-computable.*

(En la induccion de la prueba hacer solo el caso $h = M(P)$)

(1) LEMA SUP $\Sigma_p \subseteq \Sigma$, ENTONCES $AutoHalt^{\Sigma}$ NO ES Σ-RECURSIVO.

DEMOSTRACIÓN SUPONGAMOS $AutoHalt^{\Sigma}$ ES Σ-RECURSIVO. POR EL SEGUNDO MANANTIAL TENEMOS QUE HAY UN MACRO

$$[\text{IF } AutoHalt^{\Sigma}(W1) \text{ GOTO } A1]$$

SEA $\mathcal{P}_0$ EL SIGUIENTE PROGRAMA DE S^{Σ}

$$L1\ [\text{IF } AutoHalt^{\Sigma}(P1) \text{ GOTO } L1]$$

NOTAR QUE

$\mathcal{P}_0$ TERMINA PARTIENDO DESDE $\|\mathcal{P}_0\|$ SII $AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}_0) = 0$

LO CUAL ES UNA CONTRADICCIÓN. ■

(2) TEOREMA SUP $\Sigma_p \subseteq \Sigma$. ENTONCES $AutoHalt^{\Sigma}$ NO ES Σ-EFECTIVAMENTE COMPUTABLE. ES DECIR NO HAY NINGÚN PROCEDIMIENTO EFECTIVO QUE DECIDA SI UN PROGRAMA DE S^{Σ} TERMINA PARTIENDO DE SÍ MISMO.

DEMOSTRACIÓN

TESIS DE CHURCH Si: f ES Σ-E.C, f ES Σ-RECURSIVA.

ENTONCES, SI $AutoHalt^{\Sigma}$ FUERA Σ-E.C, SERÍA Σ-RECURSIVO LO CUAL CONTRADICE EL LEMA ANTERIOR.

(3) LEMA Sup $\Sigma_p \subseteq \Sigma$. Entonces

$$A = \{\mathcal{P} \in Pro^{\Sigma} : AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 1\}$$

es Σ-R.E y no es Σ-recursivo. Mas aún,

$$N = \{\mathcal{P} \in Pro^{\Sigma} : AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 0\}$$

no es Σ-R.E.

DEMOSTRACIÓN

Veamos que A es Σ-R.E.

Sea $P = \lambda t \mathcal{P}[Halt^{0,1}(t, \mathcal{P}, \mathcal{P})]$. Notar que P es Σ-P.R

por lo que $M(P)$ lo es. Además, notar que

$$D_{M(P)} = \{\mathcal{P} \in Pro^{\Sigma} : (\exists t \in \omega)\, P(t, \mathcal{P}) = 1\} = \{\mathcal{P} \in Pro^{\Sigma} : AutoHalt^{\Sigma}(\mathcal{P}) = 1\} = A$$

LEMA S es Σ-RE sii $S = D_S$ para alguna función Σ-R.

Es decir que A es Σ-R.E.

Supongamos que N es Σ-R.E. Entonces por Lema de restricción tenemos que $C_0^{0,1}|_N$ es Σ-recursiva ya que $C_0^{0,1}$ lo es. Además, como A es Σ-R.E, $C_1^{0,1}|_A$ es Σ-recursiva.

Notar que

$$AutoHalt^{\Sigma} = C_0^{0,1}|_N \cup C_1^{0,1}|_A$$

y el lema de división por casos nos diría que $AutoHalt^{\Sigma}$ es Σ-recursiva, contradiciendo el Lema (1). Es decir que N no es Σ-R.E.

Ahora supongamos que A es Σ-recursivo. Entonces el conjunto

$$N = (\Sigma^* - A) \cap Pro^{\Sigma}$$

debería serlo, lo cual es absurdo. Por lo tanto A no es Σ-recursivo.

■

(4) TEOREMA (Neumann vence a Gödel)

Si h es Σ-recursiva, entonces h es Σ-computable

DEMOSTRACIÓN

Probaré por inducción en K que

DEMOSTRACIÓN

PROBARÉ POR INDUCCIÓN EN K QUE

TEO_K: SI $h \in R_K^{\Sigma}$, h ES Σ-COMPUTABLE.

TEO_0 SUPONGAMOS $h \in R_0^{\Sigma}$. HAY VARIOS CASOS. PARA CADA CASO, DARÉ UN PROGRAMA QUE COMPUTE A h.

$\bullet h = C_0^{0,0}$
$N1 \leftarrow 0$

$\bullet h = C_\varepsilon^{0,0}$
$P1 \leftarrow \varepsilon$

$\bullet h = Suc$
$N1 \leftarrow N1+1$

$\bullet h = Pred$
IF $N1 \neq 0$ GOTO L2
L1 GOTO L1
L2 $N1 \leftarrow N1 \dot{-} 1$

$\bullet h = d_a, a \in \Sigma$
$P1 \leftarrow P1.a$

$\bullet h = p_j^{n,m}$ $1 \leq j \leq n+m$
$N1 \leftarrow N\bar{j}$ (si $j \leq n$)
$P1 \leftarrow P\overline{j-n}$ (si $j \geq n+1$)

$TEO_K \Rightarrow TEO_{K+1}$ SUP. VALE TEO_K. SEA $h \in R_{K+1}^{\Sigma} - R_K^{\Sigma}$. HAY VARIOS CASOS (COMPOSICIÓN, RECURSIÓN, MINIMIZACIÓN). SOLO HARÉ EL SIGUIENTE:

$\bullet h = M(P)$, CON $P: \omega \times \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ UN PREDICADO DE R_K^{Σ}.

POR TEO_K, P ES Σ-COMPUTABLE Y EL PRIMER MANANTIAL NOS DICE QUE HAY UN MACRO

[IF $P(V1,\ldots,V\overline{n+1},W1,\ldots,W\bar{m})$ GOTO A1]

EL CUAL NOS PERMITE REALIZAR EL SIGUIENTE PROGRAMA:

```
L2 [IF P(N n+1, N1,…,N n, P1,…,P m) GOTO L1]
   N n+1 ← N n+1 + 1
   GOTO L2
L1 N1 ← N n+1
```

Y ES CLARO QUE ESTE PROGRAMA COMPUTA A $M(P) = h$ ∎

Combo 9

lunes, 8 de diciembre de 2025 15:22

Combo 9.

Lema (Lema de division por casos para funciones Σ-recursivas). *Supongamos $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, $i = 1, ..., k$, son funciones Σ-recursivas tales que $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces la funcion $f_1 \cup ... \cup f_k$ es Σ-recursiva.*

(Haga el caso $k = 2$, $n = m = 1$ y $O = \omega$)

Teorema (Godel vence a Neumann). *Si $f : D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to \omega$ es Σ-computable, entonces f es Σ-recursiva.*

(1) LEMA (DIV. POR CASOS PARA FUNCIONES Σ-R) SUP. $f_i : D_{f_i} \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \to O$, $i=1,...,k$ SON FUNCIONES Σ-RECURSIVAS TQ $D_{f_i} \cap D_{f_j} = \emptyset$ PARA $i \neq j$. ENTONCES LA FUNCIÓN $f_1 \cup ... \cup f_k$ ES Σ-RECURSIVA.

DEMOSTRACIÓN HARÉ EL CASO $k=2$, $n=m=1$ y $O=\omega$. ES DECIR

$$f_i : D_{f_i} \subseteq \omega \times \Sigma^* \to \omega \quad \text{PARA } i=1,2 \quad \Sigma\text{-RECURSIVAS}$$

TALES QUE $D_{f_1} \cap D_{f_2} = \emptyset$.

RECORDEMOS QUE f ES Σ-RECURSIVA SII ES Σ-COMPUTABLE.
SEAN $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ PROGRAMAS QUE COMPUTEN A f_1 y f_2 RESPECTIVAMENTE.
PARA $i=1,2$, DEFINIMOS

$$H_i = \lambda t x_1 \alpha_1 [\text{HALT}^{1,1}(t, x_1, \alpha_1, \mathcal{P}_i)]$$

NOTAR QUE $D_{H_i} = \omega^2 \times \Sigma^*$ y QUE H_i ES Σ-MIXTA. SABEMOS QUE $\text{HALT}^{1,1}$ ES $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-P.R, POR LO QUE H_i ES $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-P.R y POR INDEPENDENCIA DEL ALFABETO, H_i ES Σ-P.R. EL SEGUNDO MANANTIAL DE MACROS NOS DICE QUE HAY UN MACRO

$$[\text{IF } H_i(V1, V2, W1) \text{ GOTO } A1]$$

EL CUAL ESCRIBIRÉ DE LA FORMA

$$[\text{IF HALT}^{1,1}(V1, V2, W1, \mathcal{P}_i) \text{ GOTO } A1]$$

COMO CADA f_i ES Σ-RECURSIVA, HAY MACROS

[IF HAS (V1,V2,W1,P_i) GOTO A1]

COMO CADA f_i ES Σ-RECURSIVA, HAY MACROS

$$[V2 \leftarrow f_i(V1,W1)]$$

SEA $\mathcal{P}$ EL SIGUIENTE PROGRAMA:

```
L1  N20 ← N20+1
    [IF HAS^{1,1}(N20,N1,P1,P_1) GOTO L2]
    [IF HAS^{1,1}(N20,N1,P1,P_2) GOTO L3]
    GOTO L1
L2  [N1 ← f_1(N1,P1)]
    GOTO L4
L3  [N1 ← f_2(N1,P1)]
L4  SKIP
```

ES CLARO QUE $\mathcal{P}$ COMPUTA A $f_1 \cup f_2$ $\therefore$ ES Σ-COMPUTABLE Y Σ-RECURSIVA.

■

(2) TEOREMA (GODEL VENCE A NEUMANN)

SI $f: D_f \subseteq \omega^n \times \Sigma^{*m} \rightarrow \omega$ ES Σ-COMPUTABLE, ENTONCES f ES Σ-RECURSIVA.

DEMOSTRACIÓN: SEA $\mathcal{P}$ UN PROGRAMA QUE COMPUTE A f. NOTAR QUE

$$f = E_{\#1}^{n,m} \circ \left[T^{n,m} \circ [p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}}^{n,m}], p_1^{n,m}, \ldots, p_{n+m}^{n,m}, C_{\mathcal{P}}^{n,m} \right]$$

NOTAR QUE LAS PROYECCIONES UTILIZADAS TIENEN DOMINIO $\omega^n \times (\Sigma \cup \Sigma_p)^{*m}$, POR LO QUE f ES $(\Sigma \cup \Sigma_p)$-RECURSIVA. EL TEOREMA DE INDEPENDENCIA DEL ALFABETO NOS DICE QUE COMO f TAMBIÉN ES Σ-MIXTA, DEBE SER Σ-RECURSIVA.

■