Tomás Achával Berzero
45085146

LÓGICA - PARCIAL 2

10

Ejercicio: Dé una prueba elemental de reticulados complementados de

$$DIS_1 \to \forall x \forall y \left(c(x \mathrel{i} y) = c(x) \mathrel{s} c(y) \right)$$

Vale usar

A) $DIS_1 \to \forall x \forall u \forall v \left((x \mathrel{s} u = 1 \wedge x \mathrel{i} u = 0 \wedge x \mathrel{s} v = 1 \wedge x \mathrel{i} v = 0) \to u = v \right)$

B) $DIS_1 \to DIS_2$

Resolución:

Sea $(L, s, i, c, 0, 1) \to \mathbf{L}$ un reticulado complementado.

Supongamos que $\mathbf{L}$ es tal que se cumple DIS_1 i.e. $\forall x \forall y \forall z \left(x \mathrel{i} (y \mathrel{s} z) = (x \mathrel{i} y) \mathrel{s} (x \mathrel{i} z) \right)$

Por A), como se cumple DIS_1, vale $\forall x \forall u \forall v \left((x \mathrel{s} u = 1 \wedge x \mathrel{i} u = 0 \wedge x \mathrel{s} v = 1 \wedge x \mathrel{i} v = 0) \to u = v \right)$ A^*

Por B), como se cumple DIS_1, vale DIS_2: $\forall x \forall y \forall z \left(x \mathrel{s} (y \mathrel{i} z) = (x \mathrel{s} y) \mathrel{i} (x \mathrel{s} z) \right)$

Como $\mathbf{L}$ es un ret. complementado, sabemos que valen los siguientes axiomas elementales:

1) $\forall x (x \mathrel{s} x = x)$
2) $\forall x (x \mathrel{i} x = x)$
3) $\forall x \forall y (x \mathrel{s} y = y \mathrel{s} x)$
4) $\forall x \forall y (x \mathrel{i} y = y \mathrel{i} x)$
5) $\forall x \forall y \forall z (x \mathrel{s} (y \mathrel{s} z) = (x \mathrel{s} y) \mathrel{s} z)$
6) $\forall x \forall y \forall z (x \mathrel{i} (y \mathrel{i} z) = (x \mathrel{i} y) \mathrel{i} z)$
7) $\forall x \forall y (x \mathrel{s} (x \mathrel{i} y) = x)$
8) $\forall x \forall y (x \mathrel{i} (x \mathrel{s} y) = x)$
9) $\forall x (x \mathrel{s} 1 = 1)$
10) $\forall x (0 \mathrel{s} x = x)$
11) $\forall x (x \mathrel{s} c(x) = 1)$
12) $\forall x (x \mathrel{i} c(x) = 0)$

Sean $a, b \in \mathbf{L}$ elementos fijos pero arbitrarios.

Veamos $(c(a) \mathrel{s} c(b)) \mathrel{s} (a \mathrel{i} b) \underset{\text{Por } DIS_2}{=} ((c(a) \mathrel{s} c(b)) \mathrel{s} a) \mathrel{i} ((c(a) \mathrel{s} c(b)) \mathrel{s} b)$

Por 3) y 5), tenemos

$((c(a) \mathrel{s} c(b)) \mathrel{s} a) \mathrel{i} ((c(a) \mathrel{s} c(b)) \mathrel{s} b) = ((c(b) \mathrel{s} c(a)) \mathrel{s} a) \mathrel{i} (c(a) \mathrel{s} (c(b) \mathrel{s} b))$

Por 3), 5) y 11),

$((c(b) \mathrel{s} c(a)) \mathrel{s} a) \mathrel{i} (c(a) \mathrel{s} (c(b) \mathrel{s} b)) = (c(b) \mathrel{s} (c(a) \mathrel{s} a)) \mathrel{i} (c(a) \mathrel{s} 1) \underset{\text{Por 3) y 11)}}{=} (c(b) \mathrel{s} 1) \mathrel{i} (c(a) \mathrel{s} 1)$

Por 9) esto último es igual a

$1 \mathrel{s} 1 \underset{\text{Por 1)}}{=} 1$

Por lo tanto $\underbrace{(c(a) \mathrel{s} c(b)) \mathrel{s} (a \mathrel{i} b) = 1}_{\star_1}$, $\underset{\text{Por 3)}}{\|}$ $(a \mathrel{i} b) \mathrel{s} (c(a) \mathrel{s} c(b))$

AHORA VEAMOS

$$(c(a)\ s\ c(b))\ i\ (a\ i\ b) \overset{\text{Por } 4)}{=} (a\ i\ b)\ i\ (c(a)\ s\ c(b)) \overset{\text{Por DIS}_1}{=} ((a\ i\ b)\ i\ c(a))\ s\ ((a\ i\ b)\ i\ c(b))$$

POR 4) Y 6) ESTO ÚLTIMO ES IGUAL A

$$(b\ i\ (a\ i\ c(a)))\ s\ (a\ i\ (b\ i\ c(b))) \overset{\text{Por } 12)}{=} (b\ i\ 0)\ s\ (a\ i\ 0)$$

OBSERVACIÓN, $\forall x(0\ i\ x \overset{\text{Por } 10)}{=} 0\ i\ (0\ s\ x) \overset{\text{Por } 8)}{=} 0)$, CON ELLO Y 4) (i.e. $0\ i\ x = x\ i\ 0$) TENEMOS QUE ESTE ÚLTIMO TÉRMINO ES IGUAL A

$$0\ s\ 0 \underset{\text{Por } 1)}{=} 0.$$

POR LO TANTO TENEMOS $\bigstar_2$: $(c(a)\ s\ c(b))\ i\ (a\ i\ b) = 0$
$\overset{4)}{=} (a\ i\ b)\ i\ (c(a)\ s\ c(b))$

AHORA BIEN, POR 11), 12), $\bigstar_1$ Y $\bigstar_2$, TENEMOS

$$(a\ i\ b)\ s\ c(a\ i\ b) = 1 \ \wedge\ (a\ i\ b)\ i\ c(a\ i\ b) = 0 \ \wedge\ (a\ i\ b)\ s\ (c(a)\ s\ c(b)) = 1 \ \wedge\ (a\ i\ b)\ i\ (c(a)\ s\ c(b)) = 0$$

LO CUAL POR A^* (CON $u = c(a\ i\ b)$, $v = c(a)\ s\ c(b)$ Y $x = (a\ i\ b)$) NOS DICE QUE

$$c(a\ i\ b) = c(a)\ s\ c(b)$$

FINALMENTE, COMO a Y b ERAN ELEMENTOS FIJOS PERO ARBITRARIOS Y SÓLO ASUMIMOS DIS_1, ENTONCES

$$DIS_1 \rightarrow \forall x \forall y\ (c(x\ i\ y) = c(x)\ s\ c(y))$$

■