Université Cadi Ayyad **Département de Mathématique**
Faculté des Sciences Semlalia **Printemps 2020**

Une liste d'exercices donnés aux contrôles de probabilités en 2020

Exercice 1

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, contenant chacune deux boules. Les deux boules de U_1 portent respectivement les numéros 1 et 2, celles de U_2 portent respectivement les numéros 2 et 3 et celles de U_3 portent respectivement les numéros 3 et 1. Les trois urnes sont indépendantes. On effectue l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer un tirage, avec remise, de 3 boules : une boule de chaque urne. Un résultat de l'expérience serait par exemple $B_2B_2B_1$ qui signifie que le tirage de l'urne U_1 a donné une boule numéro 2, celui de l'urne U_2 a donné aussi une boule numéro 2 et celui de l'urne U_3 a donné une boule numéro 1.
On suppose que la probabilité de tirer une boule numéro n de l'urne numéro n est 1/3. Pour $j \in \{1,2,3\}$, on note X_j le numéro de la boule tirée de l'urne U_j.
1^o) Pour chaque $j \in \{1,2,3\}$,
  1.1) donner l'ensemble des valeurs $X_j(\Omega)$ de la variable aléatoire X_j,
  1.2) donner, dans un tableau, la loi de probabilité π_j de la variable X_j,
  1.3) calculer $\mathbb{E}(X_j)$ et $Var(X_j)$.
2^o) Soit $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire qui représente la somme des numéros obtenus lors d'une expérience.
  2.1) En considérant tous les triplets de numéros possibles de l'expérience, donner l'ensemble des valeurs possibles $S(\Omega)$ de la variable aléatoire S.
  2.2) Déterminer, dans un tableau, la loi de probabilité π_S de S,
  2.3) Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $Var(S)$.
3^o) Si on suppose que les deux boules de chaque urne sont numérotées respectivement par 0 et 1 et que la probabilité de tirer une boule numéro 1 est 3/5 quelque soit l'urne, donner la loi de S, ainsi que $\mathbb{E}(S)$ et $Var(S)$.

Exercice 2

Trouver la valeur du paramètre $p \in [0,1]$ et compléter le tableau suivant qui résume la loi jointe $(\pi_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ et les lois marginales, $(\pi_{i.})_{1\le i\le 2}$ et $(\pi_{.j})_{1\le j\le 2}$, du couple aléatoire discret (X,Y), qui est à valeurs dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \{x_1,x_2\} \times \{y_1,y_2\}$.

	y_1	y_2	$\pi_{i.}$
x_1	p^2	$1/9$	
x_2	$2/9$	p^2	
$\pi_{.j}$			1

Le couple (X,Y) est-il indépendant ? (justifier la réponse)

Exercice 3

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. Dans chaque urne on met deux boules qui portent les numéros 0 et 1 respectivement. L'expérience aléatoire que l'on considère consiste à tirer une boule de chaque urne et les échanger (remettre la boule tirée de U_1 dans U_2 et remettre celle tirée de U_2 dans U_1). Après l'expérience, on note X_1 la somme des numéros des deux boules qui sont dans U_1 et X_2 la somme des numéros des deux boules qui sont dans U_2.

On suppose que la probabilité de tirer la boule numéro 1 de U_1 est $p \in]0,1[$ et la probabilité de tirer la boule numéro 1 de U_2 est $q \in]0,1[$. Les quantités X_1 et X_2 sont donc des variables aléatoires.

1^o) Donner les ensembles des valeurs possibles $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$ des variables aléatoires respectives X_1 et X_2.

2^o) Déterminer la loi de probabilité de X_1 et celle de X_2, que vous résumez dans deux tableaux différents.

3^o) On définit les variables aléatoires Y_1 et Y_2 par : $Y_1 = X_1\ [2]$ et $Y_2 = X_2\ [2]$, avec [2] qui désigne "modulo 2" (reste de la division entière par 2).

3.1) Identifier la loi de probabilité de Y_1 et celle de Y_2

3.2) En considérant le couple aléatoire (X_1, Y_1) qui est à valeurs dans $E \times F = \{0,1,2\} \times \{0,1\}$, déterminer la loi jointe $\pi = (\pi_{ij})_{(i,j)\in E\times F}$ et les lois marginales $(\pi_{i.})_{i\in E}$ et $(\pi_{.j})_{j\in F}$, que vous résumez dans un tableau à deux dimensions.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la loi de probabilité est définie par la densité f suivante : $a > 0$ est une constante,

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + \sqrt{a} & si \quad x \in [0, \sqrt{a}] \\ 0 & si \quad x \in]-\infty, 0[\cup]\sqrt{a}, +\infty[\end{cases}$$

1^o) Déterminer la constante a

2^o) Calculer, en fonction de a, la fonction de répartition F de X et représenter l'allure de son graphe

3^o) Calculer, en fonction de a, la probabilité $\mathbb{P}(-1 < X < \sqrt{a}/2)$

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$, dont la loi de probabilité $\pi = (\pi(k))_{k\in X(\Omega)}$ est donnée par

$$\pi(k) = \begin{cases} 2^{-2} & si \quad k = 0 \\ a2^{-k} & si \quad 1 \leq k \leq 2 \\ a2^{-2} & si \quad k = 3 \end{cases}$$

1^o) Déterminer la constante a et expliciter les valeurs de π dans un tabteau.

2^o) Représenter l'allure du graphe de la fonction de répartition F de X.

3^o) Trouver l'ensemble des valeurs de t tel que $\mathbb{P}(X > t) \geq \frac{1}{2}$.

4^o) Calculer $\mathbb{P}(X \in [2, +\infty[)$

5^o) Calculer $\mathbb{E}(X)$ puis $\mathbb{E}(X(X-1))$ et en déduire $Var(X)$.

Exercice 6

Soit Y une variable aléatoire réelle absolument continue dont la loi de probabilité est définie par la densité de probabilité suivante :

$$g(y) = \begin{cases} (2\alpha y + \beta)e^{\alpha y^2 + \beta y} & si \quad y \in [0,1] \\ 0 & si \quad y \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\end{cases}$$

1^o) Trouver les conditions que doivent vérifier les paramètres réels α et β.

2^o) En prenant $\alpha = 0$ et $\beta = \ln(2)$,

2.1) Déterminer la fonction de répartition G de Y et tracer son graphe.

2.2) Calculer $\mathbb{P}\left(Y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$

2.3) Calculer $\mathbb{E}(2Y-1)$

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $I\!N$, dont la loi de probabilité $\pi_a = (\pi_a(k))_{k\in I\!N}$ vérifie

$$\pi_a(0) = a \quad \text{et} \quad \pi_a(k+1) = a\frac{\pi_a(k)}{k+1}, \text{ pour } k \in I\!N^*$$

a est un paramètre de la loi.

1°) Identifier (ou expliciter) la loi π_a de X en précisant la condition que doit vérifier la constante a.

2°) Calculer, en fonction de a, $I\!E(X)$ et $Var(X)$.

3°) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X,

3.1) Pour $n \in I\!N$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$, calculer, en fonction de a, la probabilité

$$I\!P(X_1 = n-k, X_2 = k)$$

3.2) En déduire la loi de la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$.

3.3) Donner, en fonction de a, $I\!E(S)$ et $Var(S)$,

3.4) Calculer, en fonction de a, la probabilité $I\!P(S > 1)$.

Exercice 8

Soit (X, Y) un couple aléatoire réel continu à valeurs dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = I\!R \times I\!R$, de densité de probabilité jointe

$$f_{XY}(x,y) = \frac{2x}{9}e^{-y}\mathbb{1}_{[0,3]\times[0,+\infty[}(x,y), \quad (x,y) \in I\!R^2$$

1°) Déterminer les densités marginales f_X et f_Y du couple (X, Y).

2°) Le couple (X, Y) est-il indépendant ? (justifier la réponse).

3°) Calculer $I\!E(X)$, $I\!E(Y)$ et $I\!E(XY)$,

4°) En déduire $Cov(X, Y)$ et le coéfficient de corrélation linéaire ρ_{XY} de (X, Y).