Circuits électriques linéaires

en courant alternatif sinusoïdal

A-***Rappels***

I- Caractéristiques d'une grandeur alternative sinusoïdale (Courant ou tension)

1- Définition d'une grandeur alternative sinusoïdale (Courant ou tension)

On appelle ***grandeur physique sinusoïdale (courant ou tension)*** x(t) une grandeur qui peut se mettre sous la forme : x(t) = $X_m \sin(\omega t + \phi)$ ou bien x(t) = $X_m \cos(\omega t + \varphi)$

ω (> 0) : la pulsation de la grandeur sinusoïdale en rad par seconde ou rad Hertz

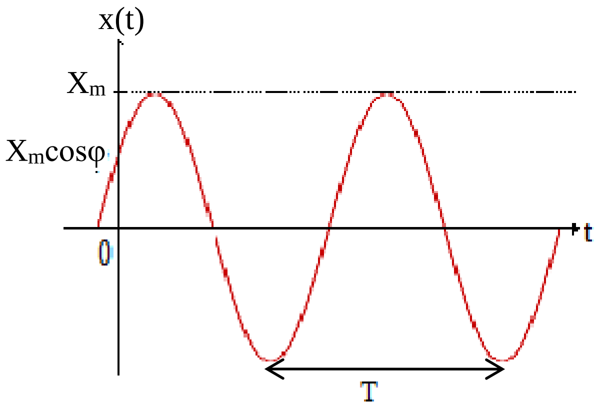
$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: la période en seconde, $f = \dfrac{1}{T}$ la fréquence en Hertz.

X_m (> 0) : l'amplitude de la grandeur sinusoïdale,

φ : la phase à l'origine

$\omega.t + \varphi$: la phase à l'instant *t*.

Remarque : x(t) = $X_m \sin(\omega t + \phi)$ = $X_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\varphi = \phi - \dfrac{\pi}{2}$



En régime sinusoïdal forcé permanent, toutes les grandeurs électriques sont sinusoïdales à la même pulsation ω.

2- Valeur moyenne et valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale

Une grandeur sinusoïdale (courant ou tension) du type $x(t) = X_m \cos(\omega t+\varphi)$ est alternative sinusoïdale.

• La valeur moyenne sur une période de x(t) : $X_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T X_m \cos(\omega t+\varphi)\,dt = 0$

• La valeur efficace X_{eff} de la grandeur sinusoïdale $x(t) = X_m \cos(\omega t+\varphi)$ est tel que:

$$X_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T X_m^2 \cos^2(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{X_m^2}{2} \quad \text{soit} \quad X_{eff} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

On pourra donc écrire x(t) sous la forme: $x(t) = X_m \cos(\omega t+\varphi) = X_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi)$

II- Notation complexe

1-Rappels :

Un nombre complexe noté $\bar{z}$ peut s'écrire : $\bar{z} = x + jy = z e^{j\varphi}$ avec $z = |\bar{z}| \geq 0$ et $\varphi = \arg \bar{z} \in [0;2\pi[$.

Un complexe conjugué est noté $\bar{z}^*$ et $j^2 = -1$

$$\bar{z} = x + jy = z e^{j\varphi} : \begin{cases} x = z\cos\varphi \\ y = z\sin\varphi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|\bar{z}_1 \times \bar{z}_2| = z_1 z_2 \qquad et \qquad \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{z}$$

$$\arg(\bar{z}_1 \times \bar{z}_2) = \arg\bar{z}_1 + \arg\bar{z}_2 \; ; \quad \arg\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \arg\bar{z}_1 - \arg\bar{z}_2$$

2-Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

A une grandeur sinusoïdale $x(t) = X_m\cos(\omega.t+\varphi)$ on associe la grandeur complexe

$\bar{x}(t) = X_m\, e^{j(\omega.t+\varphi)}$ tel que $x(t) = X_m\cos(\omega.t+\varphi) = R_e(\bar{x}(t))$;

$R_e(\bar{x}(t))$ *est la partie réelle de* $\bar{x}(t)$

L'association de $x(t)$ et $\bar{x}(t)$ est unique.

$$\bar{x}(t) = X_m e^{j(\omega.t+\varphi)} = X_m\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega.t} = \bar{X}\, e^{j\omega.t} \quad (j^2=-1)$$

$\overline{X} = X_m e^{j\varphi}$, appelé amplitude complexe de $\overline{x}(t)$, contient toute l'information sur l'amplitude réelle X_m et sur la phase à l'origine φ de la grandeur sinusoïdale x(t)

Dérivation:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -X_m\,\omega \sin(\omega.t+\varphi) = -X_m\,\omega \cos(\omega.t+\varphi-\frac{\pi}{2}) = X_m\,\omega \cos(\omega.t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

C'est donc une grandeur sinusoïdale. On peut lui associer la grandeur complexe :

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = X_m\,\omega e^{j(\omega.t+\varphi+\frac{\pi}{2})} = \omega e^{j\frac{\pi}{2}} X_m\, e^{j(\omega.t+\varphi)} = j\omega\,\overline{x}$$

Intégration

La primitive de x(t) est une grandeur sinusoïdale :

$$\int x(t)\; dt = \frac{1}{\omega} X_m \sin(\omega.t+\varphi) = \frac{1}{\omega} X_m \cos(\omega.t+\varphi-\frac{\pi}{2})$$

On peut lui associer la grandeur complexe :

$$\int \overline{x}(t)\,dt = \frac{1}{\omega} X_m e^{j(\omega.t+\varphi-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} X_m e^{j(\omega.t+\varphi)} = \frac{1}{j\omega}\overline{x}(t)$$

On notera que l'on n'introduit pas de constante d'intégration

A-Circuits électriques linéaires en courant alternatif sinusoïdal

Les lois et théorèmes vus en courant continu sont également valables en grandeurs instantanées et en notation complexe.

I- Loi d'Ohm généralisée

1- Régime sinusoïdal forcé permanent

Un circuit électrique sera dit en régime sinusoïdal forcé si *les tensions et les courants sont alternatifs sinusoïdaux de même pulsation ω imposée par un générateur*. Cela suppose que s'il existe un éventuel régime transitoire dans le circuit, ce régime s'est amorti.

Exemple : considérons un circuit R,L,C série soumis à une tension u(t) et parcouru par un courant i(t)

Avec $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

$U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

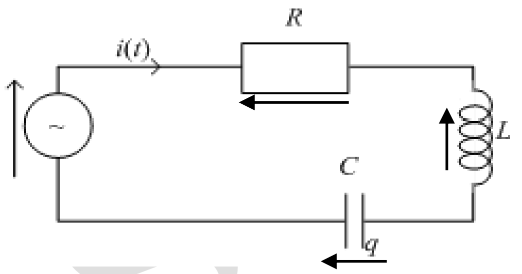


Figure 1

D'après la loi des mailles, $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$

Où : $u_R(t) = Ri(t)$; $u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$; $u_C(t) = \dfrac{q}{C} = \dfrac{1}{C}\int i(t)\,dt$ avec $\dfrac{dq}{dt} = i(t)$

Donc :
$$u(t) = R\,i(t) + L\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

$$U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = R\,i(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

On dérive par rapport au temps les deux membres de l'égalité et on obtient l'équation différentielle:

$$-U_m\,\omega \sin(\omega.t + \varphi_u) = L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C}$$

La résolution de cette équation différentielle revient à déterminer le courant i(t) :
- La solution sans second membre correspond à un régime qui s'amortit pendant un temps transitoire.
- La solution particulière du régime sinusoïdal forcé permanent est de la forme : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

Il s'agit, donc, de déterminer l'amplitude $\mathbf{I_m}$ (ou la valeur efficace I) du courant i(t) et sa phase à l'origine $\boldsymbol{\varphi_i}$. Pour cela on utilise la méthode de «la notation complexe »

2- Loi d'Ohm en notation complexe - Impédance complexe

Loi d'Ohm en notation complexe

On considère le circuit précédent RLC série. On utilise la méthode de « la notation complexe » :

Au courant $i(t) = I_m \cos(\omega.t + \varphi_i)$ on associe la grandeur complexe $\bar{i}(t) = I_m e^{j(\omega.t+\varphi_i)}$ et
à la tension $u(t) = U_m \cos(\omega.t + \varphi_u)$ on associe la grandeur complexe $\bar{u}(t) = U_m e^{j(\omega.t+\varphi_u)}$.

L'équation différentielle $U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = R\,i(t) + L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}\int i(t)\,dt$ devient :

$$U_m e^{j(\omega.t+\varphi_u)} = R I_m e^{j(\omega.t+\varphi_i)} + Lj\omega I_m e^{j(\omega.t+\varphi_i)} + \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j(\omega.t+\varphi_i)}$$

D'où : $U_m e^{j\varphi_u} = \left[R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}\right] I_m e^{j\varphi_i}$ soit $\bar{U} = \left[R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}\right]\bar{I}$

$\bar{U}$: L'amplitude complexe de $\bar{u}(t)$ associé à u(t)

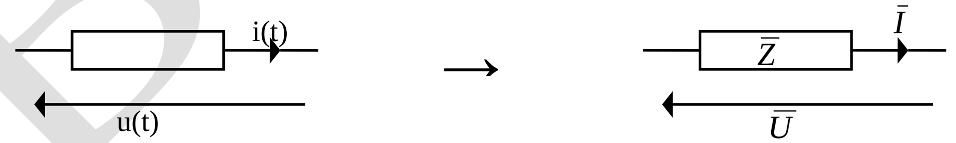
$\bar{I}$: L'amplitude complexe de $\bar{i}(t)$ associé à i(t)

On peut, donc, écrire une relation entre ***les amplitudes complexes*** $\bar{U}$ et $\bar{I}$ de la forme : $\bar{U} = \bar{Z}\,\bar{I}$

$\bar{U} = \bar{Z}\,\bar{I}$ est **la loi d'Ohm en notation complexe** qu'on peut généraliser pour tout circuit linéaire passif.

Impédance complexe

Considérons un circuit linéaire **passif** soumis à une tension u(t) = $U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ et parcouru par un courant i(t) = $I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$:



Représentation instantanée → Représentation complexe

$\bar{U} = U_m e^{j\varphi_u}$ est l'amplitude complexe de $\bar{u}(t)$ associé à la tension u(t)

$\bar{I} = I_m e^{j\varphi_i}$ est l'amplitude complexe de $\bar{i}(t)$ associé au courant i(t)

$\bar{Z}$ est l'impédance complexe du circuit considéré, qui peut s'écrire :

$\bar{Z} = Z\ e^{j\varphi} \ = \ Z\cos\varphi + j\,Z\sin\varphi \ = \ \Re + j\,X$

où $\Re$ *est équivalente à une résistance* exprimée en ohm et X est appelé réactance exprimée en ohm dans le système MKSA

et *où* $Z = \left|\bar{Z}\right|$ *est l'impédance* exp*rimée en Ohm* (Ω) *et* $\varphi = \arg\bar{Z}$. On définit l'admittance complexe du dipôle considéré par : $\bar{Y} = \dfrac{1}{\bar{Z}}$

$$\bar{I} \ = \ \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{U_m}{Z}\ e^{j(\varphi_u - \varphi)} = I_m\ e^{j\varphi_i}$$

$$\text{où} \quad I_m = \frac{U_m}{Z} \quad \text{et} \quad I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z}$$

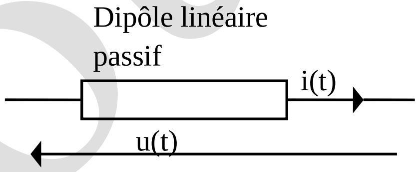
$$\text{et} \quad \varphi_i = \arg\bar{I} = \arg\bar{U} - \arg\bar{Z} = \varphi_u - \varphi$$

On note $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ *le déphasage entre la tension* $u(t)$ *et le courant* $i(t)$ *ou la différence de phase entre la tension et le courant*

D'où $i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi_i)$

II-Dipôles passifs élémentaires

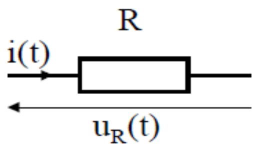
On considère un dipôle passif linéaire parcouru par un courant $i(t) = I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$ et soumis à une tension $u(t) = U_m\cos(\omega t+\varphi_u)$



• Résistance parfaite

Si le dipôle est un conducteur ohmique de résistance R . La loi d'Ohm s'applique en notation sinusoïdale instantanée et on peut écrire : $u(t) = R\,i(t)$ soit $U_m\cos(\omega t+\varphi_u) = R\,I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$

$U_m = RI_m$ et $\varphi_u = \varphi_i$ la tension u(t) et le courant i(t) sont en phase



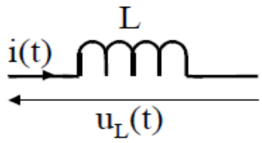
En notation complexe: $\bar{u}(t) = U_m e^{j(\omega t+\varphi_u)}$ et $\bar{i}(t) = I_m e^{j(\omega t+\varphi_i)}$

soit $\bar{u}(t) = R\,\bar{i}(t)$ d'où $\bar{U} = R\,\bar{I}$

$\bar{U} = R\,\bar{I}$ soit $U_m = R\,I_m$ et $U_{eff} = R\,I_{eff}$ Donc : $i(t) = R\,I_m\cos(\omega t+\varphi_u)$

• **Bobine pure**.

Si le dipôle est une bobine idéale d'inductance L



La loi reliant la tension u(t) et le courant i(t) dans cette bobine est : u(t) = $L\dfrac{di(t)}{dt}$.

$$i(t)=\frac{U_m}{L\omega}\sin(\omega t+\varphi_u)=\frac{U_m}{L\omega}\cos(\omega t+\varphi_u-\frac{\pi}{2})$$

Le courant qui traverse la bobine est aussi sinusoïdal, de même pulsation ω, d'amplitude $\dfrac{U_m}{L\omega}$ et déphasé par rapport à la tension de $-\dfrac{\pi}{2}$: on dit que le courant est en quadrature retard par rapport à la tension.

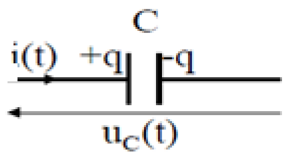
En notation complexe: u(t) = $L\dfrac{di(t)}{dt}$ devient $\bar{u}(t)=jL\omega\bar{i}(t)$ donc $\bar{U}=jL\omega\bar{I}$

$$\bar{I}=\frac{U_m e^{j\varphi_u}}{jL\omega}=\frac{U_m}{L\omega}e^{j(\varphi_u-\frac{\pi}{2})} \qquad U_m= L\omega I_m \text{ d'où } U_{eff}= L\omega\, I_{eff}$$

soit i(t) = $\dfrac{U_m}{L\omega}\cos(\omega t+\varphi_u-\dfrac{\pi}{2})$

• **Condensateur pur**.

La relation reliant u(t) et i(t) dans un condensateur en convention récepteur est i(t) = C$\dfrac{du(t)}{dt}$



$$i(t)=-C\omega U_m\sin(\omega t+\varphi_u)=C\omega U_m\cos(\omega t+\varphi_u+\frac{\pi}{2})$$

Le courant qui traverse le condensateur est aussi sinusoïdal, de même pulsation ω, d'amplitude $C\omega U_m$ et déphasé par rapport à la tension de $+\dfrac{\pi}{2}$: on dit que le courant est en quadrature avance par rapport à la tension.

En notation complexe: i(t) = $C\dfrac{du(t)}{dt}$ devient $\bar{u}(t)=\dfrac{1}{jC\omega}\,\bar{i}(t)$

donc $\bar{U}=\dfrac{1}{jC\omega}\bar{I}$; $U_m=\dfrac{1}{C\omega}I_m$ et $U_{eff}=\dfrac{1}{C\omega}I_{eff}$

$$\bar{I}= C\omega U_m e^{j(\varphi_u+\frac{\pi}{2})} \quad \text{soit} \quad i(t)=C\omega U_m\cos(\omega t+\varphi_u+\frac{\pi}{2})$$

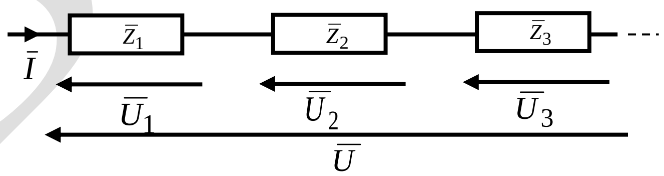
Résumons les résultats obtenus pour les trois composants passifs élémentaires envisagés ci-dessus:

	Résistance	Bobine	Condensateur
$\bar{Z}=\dfrac{\bar{U}}{\bar{I}}$	R	jLω	$\dfrac{1}{jC\omega}$
$\lvert Z\rvert=\dfrac{U_m}{I_m}=\dfrac{U}{I}$	R	Lω	$\dfrac{1}{C\omega}$
Arg ($\bar{Z}$) = déphasage entre u(t) et i(t)	0	$\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$

III-<u>Associations des impédances complexes</u>

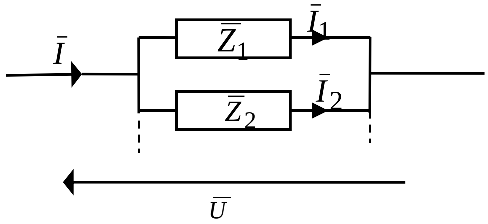
Les lois des circuits linéaires en courant continu s'appliquent en régime sinusoïdal à des associations quelconques de dipôles élémentaires R, L ou C, à condition de considérer les amplitudes complexes des courants et des tensions et les impédances complexes de ces éléments.

*Association série : l’impédance équivalente $\bar{Z}_{eq}=\sum\bar{Z}_i=\bar{Z}_1+\bar{Z}_2+\bar{Z}_3+\ldots$



$\bar{U}=(\bar{Z}_1+\bar{Z}_2+\bar{Z}_3+\ldots)\bar{I}=\bar{Z}_{eq}\,\bar{I}$

*Association parallèle : l'admittance équivalente $\overline{Y}_{eq} = \sum \overline{Y}_i = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 + \ldots$



$$\overline{U} = (\overline{Z}_1\,\overline{I}_1 = \overline{Z}_2\,\overline{I}_2 = \overline{Z}_3\,\overline{I}_3 \ldots) = \overline{Z}_{eq}\,\overline{I}$$

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 . + \ldots = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_1} + \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_2} + \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_3} .. = \overline{U}\left[\frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} + \frac{1}{\overline{Z}_3} ..\right] = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_{eq}}$$

$$\frac{1}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2 .} + \frac{1}{\overline{Z}_2 .} \ldots$$

-IV- <u>*Les générateurs alternatifs sinusoïdaux*</u>

Les notions de générateurs de tension et de générateurs de courant vues pour le courant continu peuvent être étendues pour les courants sinusoïdaux. On adoptera la notation complexe.

1- <u>*Les générateurs de tension sinusoïdaux*</u>

• Générateur de tension réel (e(t), z_g) peut être modélisé, en notation complexe, par une f.e.m complexe $\overline{E}$ en série avec une impédance complexe $\overline{Z}_g$ (figure2)

Loi d'Ohm en notation complexe : $\overline{U} = \overline{E} - \overline{Z}_g\,\overline{I}$

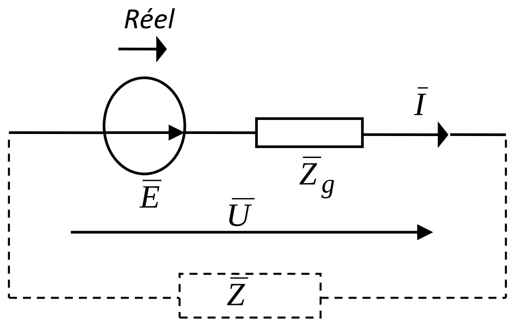
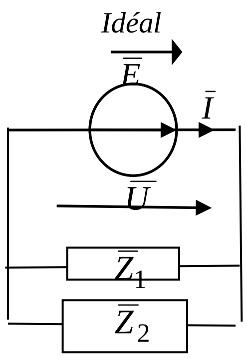


Figure2

• Générateur de tension idéal de f.e.m e(t) et d'impédance interne négligeable.

En notation complexe:

$\overline{U} = \overline{E}$



2- ***Les générateurs de courant sinusoïdaux***

• Un générateur de courant réel ($i_0(t)$,z) est modélisé, en notation complexe, par un courant électromoteur $\overline{I}_0$ en parallèle avec une impédance complexe $\overline{Z}_0$ (figure3)

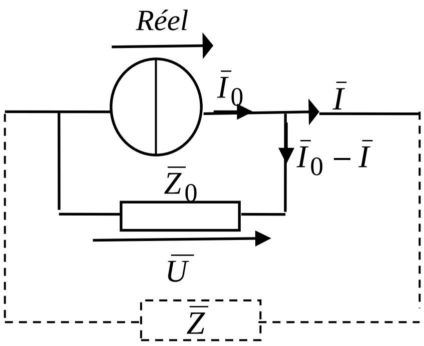
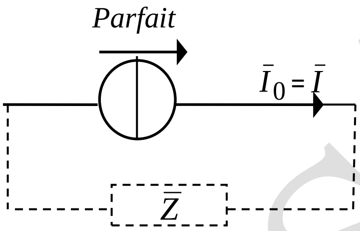


Figure 3

• Si $\overline{Z}_0$ est très grande, le générateur de courant est dit idéal



3- ***Equivalence générateur de tension-générateur de courant***

En notation complexe :

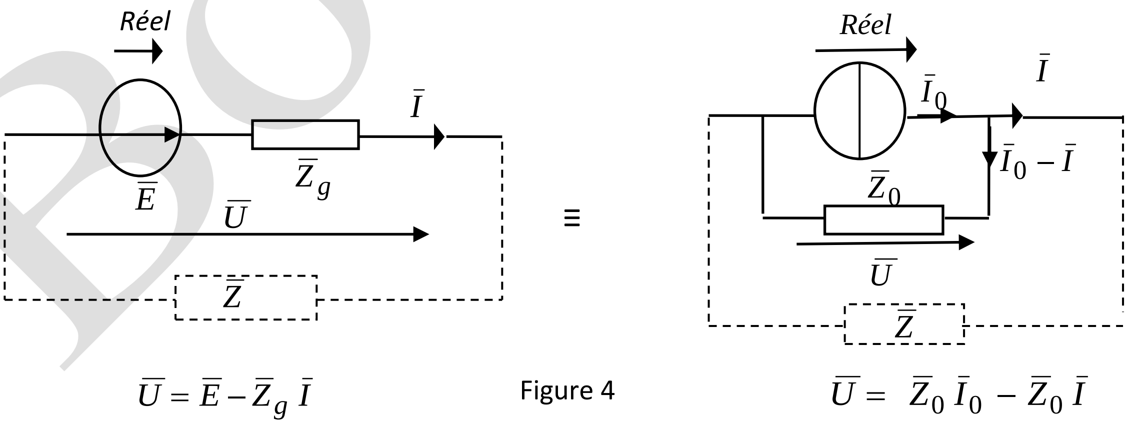


Figure 4

Le générateur de tension ($\overline{E}$, $\overline{Z}_g$) est équivalent électriquement au générateur de courant ($\overline{I}_0, \overline{Z}_0$) si: $\overline{U} = \overline{E} - \overline{Z}_g\, \overline{I} = \overline{Z}_0\, \overline{I}_0 - \overline{Z}_0\, \overline{I}$ d'où $\overline{Z}_g = \overline{Z}_0$ et $\overline{E} = \overline{Z}_g\, \overline{I}_0$

-V- Pont diviseur de tension- Pont diviseur de courant

1- Pont diviseur de tension

La figure5 montre un cas d'exemple d'un pont diviseur de tension en notation complexe:

$$\overline{E} = (\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2)\,\overline{I} \quad \text{et} \quad \overline{U}_2 = \overline{Z}_2\,\overline{I} \quad \Rightarrow \quad \overline{U}_2 = \overline{E}\,\frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}$$

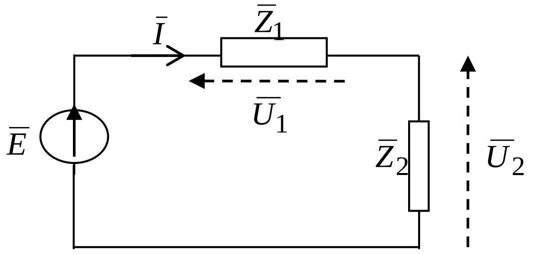


Figure5

De même la tension aux bornes de l'impédance $\overline{Z}_1$: $\overline{U}_1 = \overline{E}\,\dfrac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}$

2- Pont diviseur de courant

La figure 6 montre un cas d'exemple d'un pont diviseur de courant en notation complexe:

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2$$

$$\overline{U} = \frac{\overline{Z}_1\,\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}\,\overline{I} \ ; \quad \overline{U} = \overline{Z}_1\,\overline{I}_1 \ ; \quad \overline{U} = \overline{Z}_2\,\overline{I}_2$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{I}_1 = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_1} = \overline{I}\,\frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} \quad \text{et} \quad \overline{I}_2 = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_2} = \overline{I}\,\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}$$

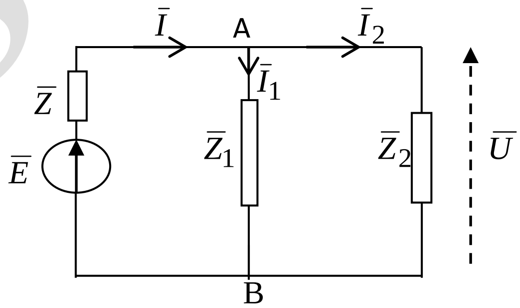


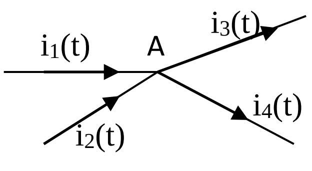
Figure 6

-VI- Lois et théorèmes

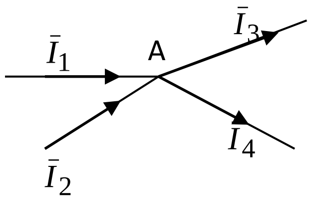
Les lois et les théorèmes (loi d'Ohm, lois de kirchchoff, théorème de Thévenin, théorème de Norton, principe de superposition…) vus en courant continu peuvent être étendus pour les courants sinusoïdaux en représentation complexe.

1- Lois de Kirchchoff

a- Loi des nœuds



Représentation instantanée



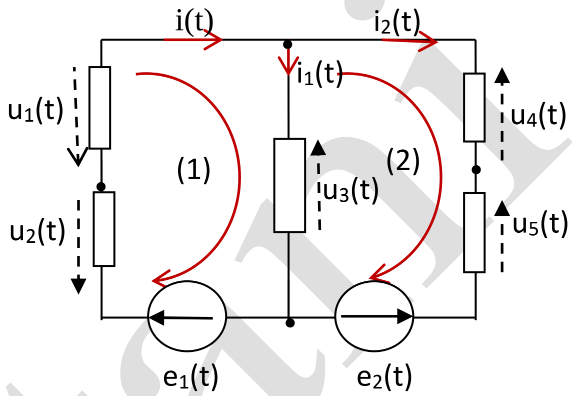
Représentation Complexe

En valeurs instantanées : $i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) - i_4(t) = 0 \qquad \sum_k \pm i_k(t) = 0$

En grandeurs complexes : $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 - \bar{I}_3 - \bar{I}_4 = 0 \qquad \sum_k \pm \bar{I}_k = 0$

S'il y a (n) nœuds dans un circuit électrique, on pose (n- 1) équations indépendantes.

b- <u>Loi des mailles</u>



La loi d'Ohm généralisée :

En valeurs instantanées : $\sum_i \pm u_i(t) = 0$

En notation complexe : $\sum_i \pm \bar{U}_i = 0$

Si dans un circuit électrique il y a (b) branches (c'est-à-dire (b) courants inconnus), on pose (b - (n - 1)) équations indépendantes.

<u>Exemple:</u>

En valeurs instantanées :

Maille (1) : $- u_1(t) - u_2(t) - u_3(t) + e_1(t) = 0$

Maille (2) : $- u_4(t) - u_5(t) + u_3(t) - e_2(t) = 0$

En notation complexe :

Maille (1) : $\bar{E}_1 - \bar{U}_1 - \bar{U}_2 - \bar{U}_3 = 0$

Maille (2) : $-\bar{E}_2 + \bar{U}_3 - \bar{U}_4 - \bar{U}_5 = 0$

2-<u>Théorème de Thévenin</u>

<u>Enoncé</u>

« Un circuit linéaire actif, pris entre deux points A et B, peut être remplacé, en notation complexe, par un générateur de tension unique de f.e.m complexe $\bar{E}_{th}$ en série avec une impédance complexe $\bar{Z}_{th}$ »

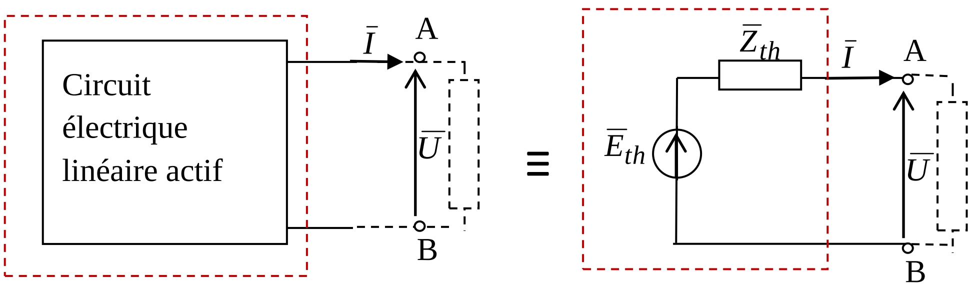


Figure 7

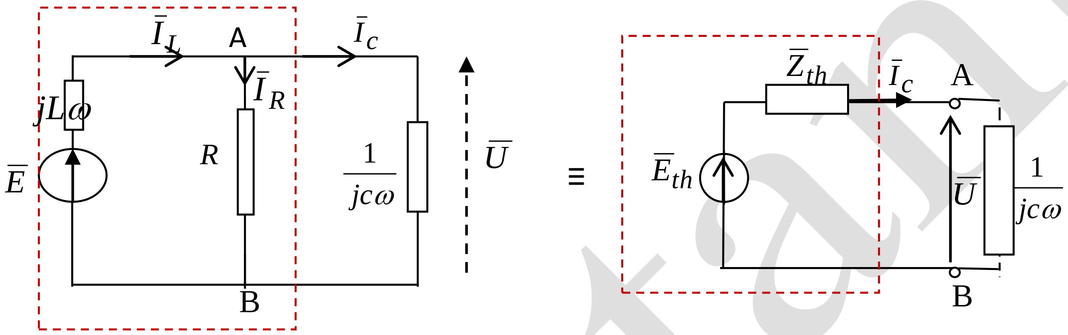
C'est le modèle générateur de Thévenin en notation complexe

- $\bar{E}_{th} = \bar{U}_{à\,vide}$: est l'amplitude complexe de la tension $\bar{e}_{th}(t)$ à circuit ouvert entre A et B

- $\bar{Z}_{th}$: est l'impédance complexe équivalente vue entre A et B lorsque les sources indépendantes de tension et/ ou de courants sont éteintes.

« Éteindre une source de tension » revient à la court-circuiter (e = 0) en la remplaçant par un fil.
« Éteindre une source de courant » revient à ouvrir la branche dans laquelle elle se trouve.

Exemple : on applique le théorème de Thévenin équivalent au dipôle AB constitué par (E, L,R)



- On débranche le dipôle d'impédance complexe (1/jcω)

- On calcule: $\bar{E}_{th} = \bar{V}_{AB}$ à vide ,

on applique le diviseur de tension : $\bar{E}_{th} = \bar{E}\,\dfrac{\bar{Z}_R}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_L}$

- $\bar{Z}_{th} = \dfrac{\bar{Z}_R\,\bar{Z}_L}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_L}$ est l'impédance complexe vue entre A et B (on a remplacé la fem par un fil).

3-***Théorème de Norton***

Enoncé

« Un circuit électrique linéaire actif, pris entre deux points A et B, peut être remplacé, en notation complexe, par un générateur de courant de courant électromoteur complexe $\bar{I}_N$ en parallèle avec une impédance complexe $\bar{Z}_N$ »

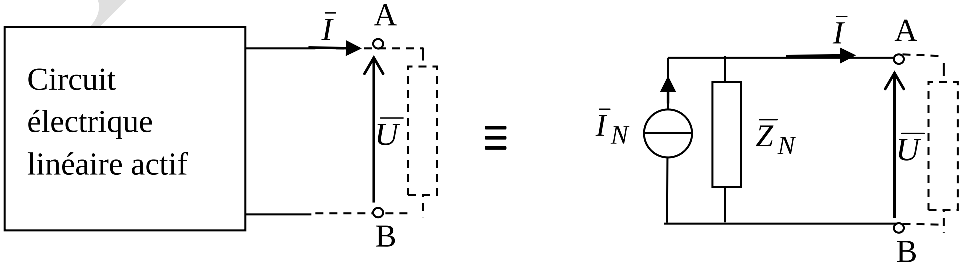


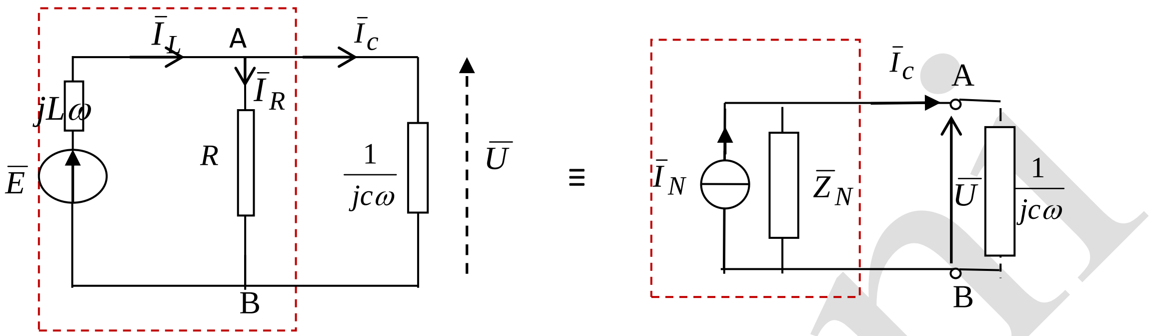
Figure 8

C'est le modèle générateur de Norton en notation complexe

• $\bar{I}_N$: est l'amplitude complexe du courant de court-circuit entre A et B

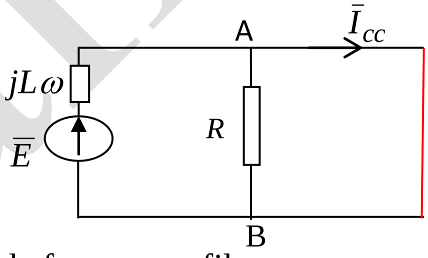
• $\bar{Z}_N$ est l'impédance complexe équivalente vue entre A et B lorsque les sources indépendantes de tension et/ ou de courant sont éteintes.

Exemple : on applique le théorème de Norton équivalent au dipôle AB constitué par (E, L,R)



• On débranche le dipôle d'impédance complexe (1/jcω)

• On calcule: $\bar{I}_N = \bar{I}_{cc}$ où $\bar{I}_{cc} = \dfrac{\bar{E}}{\bar{Z}_L}$



• $\bar{Z}_N = \dfrac{\bar{Z}_R \bar{Z}_L}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_L}$ L'impédance complexe vue entre A et B on a remplacé la fem par un fil.

• Pont diviseur de courant : $\bar{I}_c = \bar{I}_N \dfrac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_N + \bar{Z}_c}$

4- ***<u>Principe de superposition</u>***

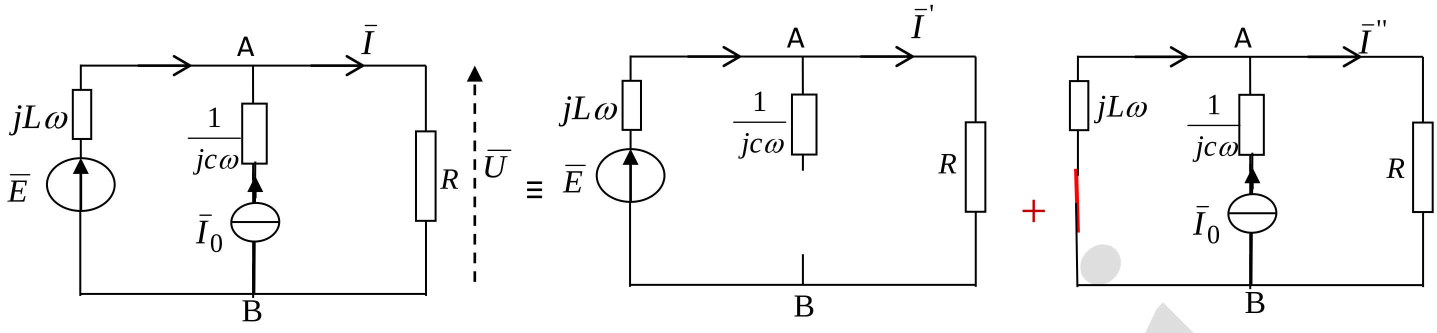
<u>Enoncé</u>

Dans un circuit contenant plusieurs générateurs, le courant fourni par chaque générateur est indépendant de la présence des autres générateurs dans le circuit. Les courants, qu'ils créent dans une branche, s'y superposent pour donner le courant final mesuré. Le circuit est remplacé par plusieurs circuits chacun ne contenant qu'une seule source de tension ou de courant indépendante.

« Dans un circuit électrique linéaire, le courant (ou la tension) dans une branche est égal à la somme algébrique des courants (ou des tensions) obtenus dans cette branche sous l'effet de chacune des sources indépendantes prise isolément, toutes les autres sources indépendantes étant éteintes »

« Éteindre une source de tension » revient à la court-circuiter (e = 0).
« Éteindre une source de courant » revient à ouvrir la branche dans laquelle elle se trouve (i = 0).

Exemple d'application :



Etat (1) Etat (2)

Etat 1 : $\bar{I}' = \dfrac{\bar{E}}{R + jL\omega}$

Etat 2 : $\bar{I}'' = \bar{I}_0 \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}$

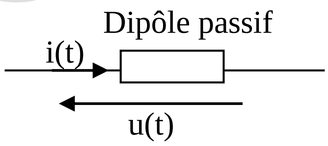
D'où $\bar{I} = \dfrac{\bar{E}}{R + jL\omega} + \bar{I}_0 \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega}$

-V - PUISSANCE

1 - Puissance instantanée.

Soit un dipôle passif soumis en régime sinusoïdal à une tension $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_u)$ et parcouru par un courant $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_i)$.

U et I sont respectivement les valeurs efficaces de la tension u(t) et du courant i(t).
On pose $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ le déphasage entre u(t) et i(t),



La puissance instantanée p(t) est définie par la relation : $p(t) = u(t).i(t)$. Elle est non mesurable.

$$p(t) = u(t).i(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \times \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$p(t) = \frac{U_m.I_m}{2}\cos(\omega t + \varphi_u - \varphi_i - \omega t) + \frac{U_m.I_m}{2}\cos(\omega t + \varphi_u + \varphi_i + \omega t)$$

$$p(t) = U I \cos\varphi + U I \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

La puissance instantanée est constituée par deux termes :

- un premier terme constant égal à U.I.cosφ

- un second terme U.I.cos(2ωt+φ_u +φ_i) dit puissance fluctuante, de valeur moyenne nulle.

2 - Puissance moyenne ou active.

La puissance active notée P_a est la valeur moyenne sur une période de la puissance instantanée.

$$P_a = P_{moy} = \langle p \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T [U\,I\cos(\varphi_u-\varphi_i)+U\,I\cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)]dt = U\,I\,\cos(\varphi_u-\varphi_i) = U\,I\,\cos\varphi$$

La valeur moyenne du terme périodique est nulle (c’est une fonction périodique alternative). Il reste donc le terme constant (**U I cosφ)**

d’où P_a = U I cosφ est la puissance consommée par le dipôle passif

La puissance active ou puissance moyenne est exprimée en Watt (W)

U : valeur efficace de la tension en volt (V)

I : valeur efficace du courant en ampère (A) ;

φ : déphasage entre la tension u(t) et le courant i(t).

3 - Puissance apparente – Facteur de puissance.

La puissante apparente est : **S = UI**

La puissance apparente S s’exprime en voltampères (VA)

$$P_a = P_{moy} = U\,I\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{P_a}{U\,I}$$

Le facteur de puissance est défini par la relation: $\cos\varphi = \frac{P_a}{U\,I}$. Il s’agit d’un nombre sans dimension toujours inférieur à *1*

4 - Puissance réactive

La puissance réactive notée P_r est définie par la relation: **P_r = U I sinφ**

La puissance réactive P_r permet d'évaluer l'importance des récepteurs inductifs (moteurs, ...) et des récepteurs capacitifs (condensateurs, ...) dans les installations.

Elle s'exprime en volt-ampère-réactif (VAR).

Pour $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, le courant i(t) est en retard par rapport à la tension u(t), le circuit est inductif et $P_r > 0$: le récepteur consomme de la puissance réactive.

Pour $0 > \varphi > -\frac{\pi}{2}$, le courant i(t) est en avance par rapport à la tension u(t), le circuit est capacitif et $P_r < 0$: le récepteur fournit de la puissance réactive.

Pour $\varphi = 0$, le courant i(t) est en phase avec la tension u(t) le circuit est résistif : $P_r = 0$.

5- <u>Puissance complexe</u>

La puissance complexe est définie par la relation $\overline{P} = \frac{1}{2}\overline{U}\ \overline{I}^*$

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\overline{U}\ \overline{I}^* = \frac{1}{2}U_m\ I_m\ e^{j\varphi_u}\ e^{-j\varphi_i} = \frac{1}{2}U_m\, I_m\, e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{1}{2}U_m\, I_m\ e^{j\varphi} = U\, I\ e^{j\varphi}$$

$$\overline{P} = U\, I\cos\varphi + j\, U\, I\, \sin\varphi = P_a + j\ P_r$$

$\left|\overline{P}\right| = U\, I$ = S est la puissante apparente

$P_a = R_e(\frac{1}{2}\overline{U}\ \overline{I}^*) = U\, I\cos\varphi$ et $P_r = \Im_m(\frac{1}{2}\overline{U}\ \overline{I}^*) = U\, I\sin\varphi$ et $P_r = P_a \operatorname{tg}\varphi$

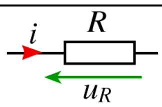
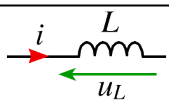
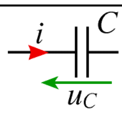
<u>Remarque importante</u> : si le dipôle passif est d'impédance complexe $\overline{Z} = R + j\,X$:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\overline{U}\ \overline{I}^* = \frac{1}{2}\overline{Z}\ \overline{I}\ I^* = \frac{1}{2}\overline{Z}\ I^2 = \overline{Z}\ I^2 = RI^2 + j\ X\, I^2$$

Donc : $P_a = R\, I^2$ analogue à la puissance dissipée par effet joule, dans une résistance R parcouru par un courant continu I

$P_r = X\, I^2$: si $X > 0$ $P_r > 0$ le dipôle est inductif

si $X < 0$ $P_r < 0$ le dipôle est capacitif

	Résistance R	Inductance L	Capacité C
Schéma			
Equation	$u_R = Ri$	$u_L = L\dfrac{di}{dt}$	$i = C\dfrac{du_C}{dt}$
Impédance Z (Ω)	$Z_R = R$	$Z_L = L\omega$	$Z_C = \dfrac{1}{C\omega}$
Admittance Y (S)	$Y_R = \dfrac{1}{R}$	$Y_L = \dfrac{1}{L\omega}$	$Y_C = C\omega$
Relation entre les valeurs efficaces	$U_R = R.I$	$U_L = L\omega.I$	$U_C = \dfrac{1}{C\omega}.I$

Puissance active P_a (W)	$P_R = U_R I = RI^2 = \dfrac{U^2}{R}$	0	0
Puissance réactive P_r (VAR)	0	$P_{rL} = U_L I = L\omega I^2$	$P_{rC} = -U_C I = -C\omega U_C^2$
Puissance complexe	$P_R + j\,0$	$0 + j\,P_{rL}$	$0 + P_{rC}$

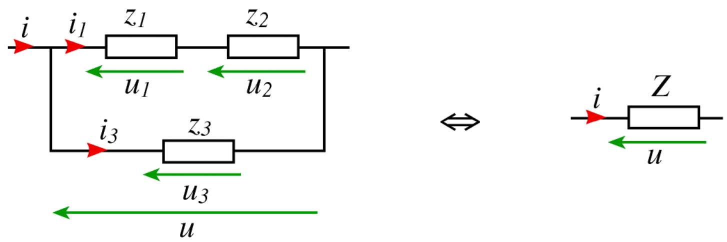
5 - Théorème de Boucherot

Les puissances active et réactive pour un groupement de dipôles sont respectivement égales à la somme des puissances actives et réactives pour chaque élément du groupement.

$P_a = \Sigma P_{ai}$ et $P_r = \Sigma P_{ri}$

La puissance apparente totale : $S_t = \sqrt{P_a^2 + P_r^2}$ et le facteur de puissance : $\cos\varphi = \dfrac{P_a}{S_t}$

Exemple



- **Puissance instantanée :** $p = ui = u_1 i_1 + u_2 i_1 + u_3 i_3$

- **Puissance active :** $P = UI\cos\varphi = P_1 + P_2 + P_3 = U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_1 \cos\varphi_2 + U_3 I_3 \cos\varphi_3$

- **Puissance réactive :** $Q = UI\sin\varphi = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U_1 I_1 \sin\varphi_1 + U_2 I_1 \sin\varphi_2 + U_3 I_3 \sin\varphi_3$