Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практическому заданию №2

Сеточные методы для задачи теплопроводности.

Выполнил:
студент 451 гр.
Челабов А.Г.

Санкт - Петербург
2024

Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу с оператором $L = a(x,t)\partial_x^2 + b(x,t)\partial_x + c(x,t)$ на квадрате $\Omega = [0,1] \times [0,T]$:

$$\dot{u} = Lu + f(x,t) \tag{1}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{2}$$

$$\alpha(t)u(0,t) + \beta(t)u(\dot{0},t) = \eta(t), \gamma(t)u(1,t) + \zeta(t)u(\dot{1},t) = \theta(t) \tag{3}$$

Будем считать всех необходимые функции непрерывными и достаточно гладкими для возможной аппроксимации. Построим равномерную сетку с шагом τ по времени и h по координате: $w(h,\tau) = \{(x_i,t_j), i = 0,1\ldots I, j = 0,1\ldots J\}$. Для произвольной функции f обозначим ее значение в точке (x_n,t_m) как f_n^m. Перейдем к разностной задаче. Для этого заменим дифференциальный оператор L на разностный:

$$L_h u_i^j = a_i^j \frac{\delta_i^2[u^j]}{h^2} + b_i^j \frac{\delta_i[u^j]}{2h} + c_i^j u_i^j \tag{4}$$

И запишем задачу в следующим виде, получив аппроксимацию с порядком $O(\tau + h^2)$:

$$\frac{\nabla_j[u_i]}{\tau} = L_h u_i^j + f_j^i, u_i^0 = \phi_i \tag{5}$$

$$\alpha(t)u(0,t) + \beta(t)\frac{-3u_0^{j+1} + 4u_1^{j+1} - u_2^{j+1}}{2h} = \eta(t) \tag{6}$$

$$\gamma(t)u(1,t) + \zeta(t)\frac{-3u_I^{j+1} + 4u_{I-1}^{j+1} - u_{I-2}^{j+1}}{2h} = \theta(t) \tag{7}$$

Известно, что при ограничении $\max_\Omega a(x,t)\tau h^{-2} \leq 0.5$ и достаточно малых b и c данная схема устойчива.

Рассмотрим однопараметрическую систему разностных схем с параметром σ:

$$\frac{\Delta_j[u_i]}{\tau} = L_h(\sigma u_i^j - \sigma)u_i^{j-1}) + f_i^j \tag{8}$$

При $\sigma = 0$ получим рассмотренную ранее явную схему, иначе имеем неявную двухслойную схему, зависящую от 6 точек. Такая схема может быть решена послойно, где решение на j слое может быть представлено следующим образом:

$$\sigma L_h u_i^j - \frac{u_i^j}{\tau} = P_i^j \tag{9}$$

Где P_i^j зависит от уже известного решения предыдущего слоя. Краевые условия будем аппроксимировать первым порядком точности:

$$\alpha(t)u(0,t) - \beta(t)\frac{u_1^j - u_0^j}{h} = \eta(t) \tag{10}$$

$$\gamma(t)u(1,t) + \zeta(t)\frac{u_I^j - u_{I-1}^j}{h} = \theta(t) \tag{11}$$

Они замыкают систему для j-того слоя:

$$\sigma L_h u_1^j - \frac{u_1^j}{\tau} = P_1^j$$

$$\sigma L_h u_i^j - \frac{u_i^j}{\tau} = P_i^j, i = 1, 2 \ldots, I-1$$

$$\sigma L_h u_I^j - \frac{u_I^j}{\tau} = P_I^j$$

Такая система имеет трехдиагональную матрицу и может быть решена методом прогонки. Для $\sigma = 1$ получается чисто неявная четырехточечная схема, известно, что она устойчива с и имеет порядок не более $O(\tau + h)$. Для $\sigma = 0.5$ получаем шеститочечную схему с порядком аппроксимации не более $O(\tau^2 + h^2)$.

Для проверки была взята следующая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+3)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - xu + f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1,t) = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.1.$$

Для тестирования использовались следующее точное решение:

$$u(x,t) = t^3 + x^3$$

$$f(x,t) = x^4 - 9x^2 + 3t^2 + xt^3 - 18x$$

$$\alpha(t) = 0$$

$$\beta(t) = t^3 + 1$$

$$\phi(t) = x^3$$

Реализация в Python

```
def progonka (K1, K2, K3, f):
    N = K2.shape[0]
    u_prog = np.zeros(N)
    alpha = np.zeros(N+1)
    beta = np.zeros(N+1)
    alpha [0] = -K3[0]/K2[0]
    beta[0] = f[0]/K2[0]
    for i in range(N-1):
        alpha[i+1] = -K3[i]/(K2[i]+alpha[i]*K1[i])
        beta[i+1] = (-K1[i]*beta[i]+f[i])/(K2[i]+alpha[i]*K1[i])
    u_prog[N-1] = beta [N-1]
    for i in range(N-2, -1, -1):
        u_prog[i] = alpha[i+1]*u_prog[i+1]+beta[i+1]
    return u_prog

def yavnaya(h, tau, phi, alpha, beta, f, U):
    x = np.arange(0, 1+h, h)
    t = np.arange(0, 0.1+tau, tau)
    M = t.shape[0]
    N = x.shape[0]
    u = np.zeros((N,M))
    for i in range (N):
        u[i][0] = phi(x[i])
    for k in range(M-1):
        for j in range(1,N-1):
            Lh = (u[j+1][k] -2*u[j][k]+u[j-1] [k])/h**2
            u[j][k+1] = u[j][k] + tau*(Lh + f(x[j],t[k]))
    for k in range (M):
        u[0][k] = alpha(t[k])
        u[N-1] [k] = 1/3*(4*u[N-2][k] -u[N-3] [k]+2*h*beta(t[k]))
    err = np.zeros((N,M))
    for k in range (M):
        for j in range (N):
            err[j][k] = u[j][k] - U(x[j], t[k])
    max_err = max([np.max([np.abs (item) for item in e]) for e in err])
    return u, max_err
```

```python
def neyavnaya(h, tau, phi, alpha, beta, f, U, sigma):
    x = np.arange(0, 1+h, h)
    t = np.arange(0, 0.1+tau, tau)
    M = t.shape[0]
    N = x.shape[0]
    u = np.zeros((N,M))
    u_ex = np.zeros((N,M))
    for i in range (N):
        u[i][0] = phi(x[i])
    A = np. zeros (N)
    B = np.zeros(N)
    C = np. zeros (N)
    G = np.zeros(N)
    B[0] = 1
    B[N-1] = 1
    for k in range(1,M):
        G[0] = alpha(t[k])
        G[N-1] = beta(t[k])
        for j in range(1,N-1):
            Lh = (u[j+1][k-1] -2*u[j] [k-1]+u[j-1] [k-1])/h**2
            G[j] = u[j][k-1] + tau* (1-sigma) *Lh+tau*f(x[j],t[k])
            A[j] = sigma*(-tau/h**2)
            B[j] = 1+(sigma*2*tau/h**2)
            C[j] = sigma*(-tau/h**2)
        for i in range(len(u)):
            u[i] [k] = progonka (A, B, C, G) [i]
    for k in range (M):
        u[0][k] = alpha(t[k])
        u[N-1] [k] = 1/3*(4*u[N-2] [k] -u [N-3] [k]+2*h*beta(t[k]))
    for k in range (M):
        for j in range (N):
            u_ex[j][k] = U(x[j],t[k])
    diff = [np.abs(u_ex[i]-u[i]) for i in range(len(u))]
    return u
```

```python
def u_ex (x,t):
    return x**3+t**3
def f(x,t):
    return x**4 - 9*x**2 + 3*t**2 + x*t**3 - 18*x
def phi(x):
    return x**3
def alpha(x):
    return 3*x**2
def beta(t):
    return 1+ t**3

def main (N, sigma):
    tau = (1/N)**2/4
    M=int(round (0.1/((1/N) **2/4)))
    h = 1/N
    u_yavnaya, yavn_err=yavnaya(h, tau, phi, alpha, beta, f,u_ex)
    u_neyavnaya=neyavnaya(h, tau, phi, alpha, beta, f, u_ex, sigma)
    u_f_yavnaya=np.zeros((6,6))
    u_f_neyavnaya=np.zeros((6,6))
    for k in range(6):
        for j in range(6):
            u_f_yavnaya[j][k]=u_yavnaya[int(N*j/5)][int(k*M/5)]
            u_f_neyavnaya[j][k]=u_neyavnaya [int (j*N/5)][int (k*M/5)]
    u_f_yavnaya=u_f_yavnaya.T
    u_f_neyavnaya=u_f_neyavnaya.T
    return u_yavnaya, yavn_err, u_neyavnaya, u_f_yavnaya, u_f_neyavnaya

N = 10
sigma = 0
u_yavnaya, yavn_err, u_neyavnaya,  u_f_yavnaya, u_f_neyavnaya = main (N, sigma)
diff = [u_f_yavnaya[i]-u_f_neyavnaya[i] for i in range(len(u_f_yavnaya))]
table_yavnaya = pd.DataFrame([row for row in u_f_yavnaya], columns = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1],
                             index = [0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 1])
table_neyavnaya = pd.DataFrame([row for row in u_f_neyavnaya], columns = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1],
                               index = [0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 1])
print(f"Результаты вычислений для явной схемы с N = {N}")
print(table_yavnaya)
print(f"Результаты вычислений для неявной схемы с N = {N}, sigma = {sigma}")
print(table_neyavnaya)
```

Результаты

```
Результаты вычислений для явной схемы с N = 5
            0.0         0.2         0.4         0.6         0.8         1.0
0.00  0.0000  0.008000  0.064000  0.216000  0.512000  0.744000
0.02  0.0012 -0.048909 -0.061885  0.008435  0.011971  0.146484
0.04  0.0048 -0.111104 -0.206426 -0.291901 -0.329014 -0.208043
0.06  0.0108 -0.185371 -0.372489 -0.529711 -0.519613 -0.382885
0.08  0.0192 -0.264840 -0.524560 -0.712562 -0.648887 -0.494261
1.00  0.0300 -0.338960 -0.655064 -0.856251 -0.744339 -0.573569
Результаты вычислений для неявной схемы с N = 5, sigma = 0
            0.0         0.2         0.4         0.6         0.8         1.0
0.00  0.0000  0.008000  0.064000  0.216000  0.512000  0.744000
0.02  0.0012 -0.048823 -0.061873  0.008447  0.102607  0.267328
0.04  0.0048 -0.110216 -0.200621 -0.262780 -0.317430 -0.202305
0.06  0.0108 -0.179294 -0.361725 -0.534166 -0.673274 -0.586281
0.08  0.0192 -0.255429 -0.528962 -0.791571 -0.990393 -0.923265
1.00  0.0300 -0.333486 -0.694148 -1.033556 -1.279273 -1.227712
```

```
Результаты вычислений для неявной схемы с N = 5, sigma = 0.5
            0.0         0.2         0.4         0.6         0.8         1.0
0.00  0.0000  0.008000  0.064000  0.216000  0.512000  0.744000
0.02  0.0012 -0.050333 -0.066518 -0.015596  0.071525  0.233900
0.04  0.0048 -0.115334 -0.214532 -0.281419 -0.325326 -0.206620
0.06  0.0108 -0.186760 -0.374145 -0.541247 -0.656540 -0.561609
0.08  0.0192 -0.261523 -0.535212 -0.784147 -0.944822 -0.864979
1.00  0.0300 -0.335936 -0.691390 -1.008573 -1.201309 -1.132087
```

```
Результаты вычислений для неявной схемы с N = 5, sigma = 1
            0.0         0.2         0.4         0.6         0.8         1.0
0.00  0.0000  0.008000  0.064000  0.216000  0.512000  0.744000
0.02  0.0012 -0.052748 -0.073679 -0.034567  0.044066  0.203612
0.04  0.0048 -0.120394 -0.225701 -0.295586 -0.328610 -0.206277
0.06  0.0108 -0.192397 -0.383049 -0.544821 -0.640835 -0.539477
0.08  0.0192 -0.265459 -0.538420 -0.775958 -0.910571 -0.822041
1.00  0.0300 -0.336697 -0.687232 -0.987961 -1.148024 -1.067912
```

Результаты вычислений для явной схемы с N = 10

	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.00	0.0000	0.008000	0.064000	0.216000	0.512000	0.868000
0.02	0.0012	-0.049971	-0.063980	-0.024063	-0.032347	-0.005050
0.04	0.0048	-0.115633	-0.219819	-0.312234	-0.343816	-0.157816
0.06	0.0108	-0.192346	-0.384450	-0.542022	-0.527028	-0.234438
0.08	0.0192	-0.271148	-0.533757	-0.720719	-0.653420	-0.284192
1.00	0.0300	-0.343881	-0.661860	-0.861995	-0.747466	-0.320070

Результаты вычислений для неявной схемы с N = 10, sigma = 0

	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.00	0.0000	0.008000	0.064000	0.216000	0.512000	0.868000
0.02	0.0012	-0.049869	-0.063331	-0.003825	0.095626	0.194725
0.04	0.0048	-0.112965	-0.206966	-0.269445	-0.319649	-0.280314
0.06	0.0108	-0.183367	-0.367895	-0.540565	-0.687994	-0.680930
0.08	0.0192	-0.259614	-0.535665	-0.803133	-1.022751	-1.037967
1.00	0.0300	-0.337968	-0.703221	-1.053712	-1.331356	-1.363761

Результаты вычислений для неявной схемы с N = 10, sigma = 0.5

	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.00	0.0000	0.008000	0.064000	0.216000	0.512000	0.868000
0.02	0.0012	-0.050219	-0.065000	-0.012284	0.071033	0.154115
0.04	0.0048	-0.114576	-0.212284	-0.281052	-0.333109	-0.279848
0.06	0.0108	-0.186219	-0.374026	-0.546241	-0.671214	-0.619071
0.08	0.0192	-0.262353	-0.538496	-0.793961	-0.963236	-0.904316
1.00	0.0300	-0.338678	-0.698144	-1.021892	-1.220512	-1.152075

Результаты вычислений для неявной схемы с N = 10, sigma = 1

	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.00	0.0000	0.008000	0.064000	0.216000	0.512000	0.868000
0.02	0.0012	-0.050700	-0.067003	-0.019721	0.055671	0.134407
0.04	0.0048	-0.116180	-0.216660	-0.288251	-0.337424	-0.273640
0.06	0.0108	-0.188449	-0.377969	-0.547983	-0.657651	-0.580314
0.08	0.0192	-0.264032	-0.539467	-0.786431	-0.927440	-0.830559
1.00	0.0300	-0.338652	-0.693933	-1.002043	-1.159892	-1.042549

```
Результаты вычислений для явной схемы с N = 20
          0.0        0.2        0.4        0.6        0.8        1.0
0.00  0.0000  0.008000  0.064000  0.216000  0.512000  0.933500
0.02  0.0012 -0.050263 -0.065445 -0.031386 -0.042616 -0.017578
0.04  0.0048 -0.116904 -0.223098 -0.317124 -0.347467 -0.087215
0.06  0.0108 -0.194053 -0.387373 -0.545067 -0.528895 -0.123386
0.08  0.0192 -0.272682 -0.536019 -0.722759 -0.654571 -0.147224
1.00  0.0300 -0.345091 -0.663545 -0.863438 -0.748261 -0.164546
Результаты вычислений для неявной схемы с N = 20, sigma = 0
          0.0        0.2        0.4        0.6        0.8        1.0
0.00  0.0000  0.008000  0.064000  0.216000  0.512000  0.933500
0.02  0.0012 -0.050128 -0.063852 -0.004504  0.103283  0.177422
0.04  0.0048 -0.113497 -0.207367 -0.267058 -0.311858 -0.307393
0.06  0.0108 -0.183772 -0.367483 -0.538010 -0.686701 -0.720829
0.08  0.0192 -0.259744 -0.535189 -0.802981 -1.030241 -1.091236
1.00  0.0300 -0.338111 -0.703733 -1.057660 -1.348634 -1.430428
```

```
Результаты вычислений для неявной схемы с N = 20, sigma = 0.5
          0.0        0.2        0.4        0.6        0.8        1.0
0.00  0.0000  0.008000  0.064000  0.216000  0.512000  0.933500
0.02  0.0012 -0.050217 -0.064505 -0.010813  0.067719  0.098697
0.04  0.0048 -0.114324 -0.211698 -0.282178 -0.337913 -0.296598
0.06  0.0108 -0.186099 -0.374319 -0.547485 -0.666338 -0.590306
0.08  0.0192 -0.262583 -0.538737 -0.790944 -0.941340 -0.827699
1.00  0.0300 -0.338808 -0.696433 -1.010589 -1.176942 -1.027212
```

```
Результаты вычислений для неявной схемы с N = 20, sigma = 1
          0.0        0.2        0.4        0.6        0.8        1.0
0.00  0.0000  0.008000  0.064000  0.216000  0.512000  0.933500
0.02  0.0012 -0.050322 -0.065158 -0.015071  0.050488  0.067784
0.04  0.0048 -0.114969 -0.214281 -0.289074 -0.345662 -0.280333
0.06  0.0108 -0.187402 -0.377385 -0.549813 -0.651032 -0.522914
0.08  0.0192 -0.263776 -0.539400 -0.782557 -0.897129 -0.710460
1.00  0.0300 -0.338619 -0.691656 -0.987162 -1.101398 -0.862666
```

```
[[0.2        0.01       0.21681092 0.45145238]
 [0.1        0.0025     0.27490726 0.18844235]
 [0.05       0.000625   0.30428869 0.08601093]]
Сходимость явной схемы
[[0.2        0.01       0.21733517 0.09333528]
 [0.1        0.0025     0.29079698 0.06551293]
 [0.05       0.000625   0.33188034 0.0531665 ]]
Сходимость неявной схемы с σ = 1
```