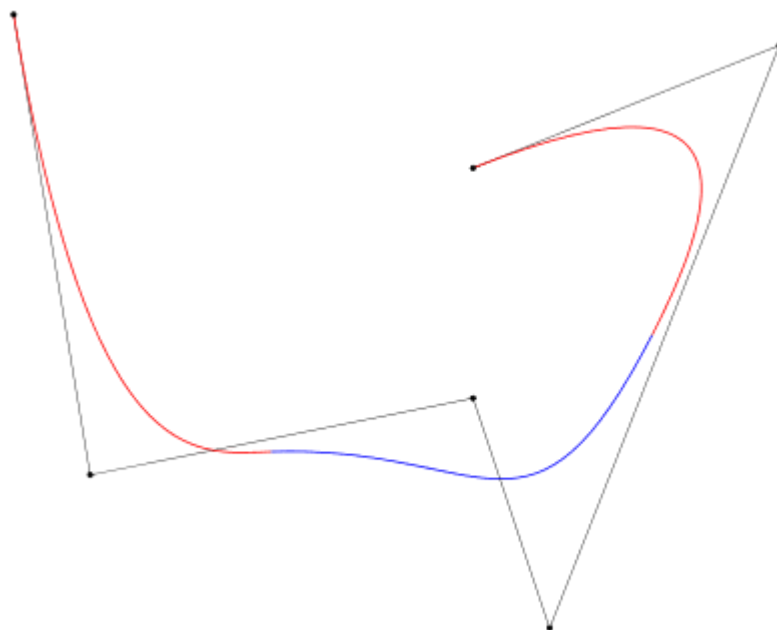


В-сплайн

В математическом подполе численного анализа**В-сплайн** или **базисный сплайн**-это сплайновая функция , которая имеет минимальную поддержку по отношению к заданной степени, гладкости разделению области. Любая сплайновая функция заданной степени может быть выражена как линейная комбинация В-сплайнов этой степени. Кардинальные В-сплайны имеют узлы, которые равноудалены друг от друга. В-сплайны могут быть использованы для подгонки кривых и численного дифференцирования экспериментальных данных.

В автоматизированном проектировании и компьютерной графикесплайновые функции строятся как линейные комбинации В-сплайнов с набором контрольных точек.



Сплайновая кривая, построенная как взвешенная сумма В-сплайнов с контрольными точками/контрольным полигоном и отмеченными компонентными кривыми

Содержание

Введение

Определение

Свойства

Кардинальный В-сплайн

Р-сплайн

Производные выражения

Моментов одномерных В-сплайнов

Отношение к кусочно-составному Безье

Подгонка кривой

. Автоматизированное проектирование и компьютерная графика

НУРБОВ

См. также

Примечания

Список литературы

Дальнейшее чтение

Внешние ссылки

Introduction

Термин "В-сплайн" был придуман Исааком Якобом Шенбергом^[1] и является сокращенным от базового сплайна.^[2] Сплайновая функция порядка n является кусочно -полиномиальной функцией степени $n - 1$ в переменной x . Места, где части встречаются, известны как узлы. Ключевое свойство сплайновых функций заключается в том, что они и их производные могут быть непрерывными в зависимости от кратности узлов.

В-сплайны порядка n являются базисными функциями для сплайновых функций одного и того же порядка, определенных над одними и теми же узлами, что означает, что все возможные сплайновые функции могут быть построены из линейной комбинации В-сплайнов, и существует только одна уникальная комбинация для каждой сплайновой функции.^[3]

Определение

Сплайн порядка n - это кусочно - полиномиальная функция степени $n - 1$ в переменной x . Значения x , где части полинома встречаются, известны как узлы, обозначенные $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ и отсортированные в порядке неразбавления. Когда узлы различны, первые $n - 2$ производные полиномиальных частей непрерывны по каждому узлу. Когда r узлы совпадают, то только первые $n - r - 1$ производные сплайна непрерывны через этот узел.

Для заданной последовательности узлов существует, с точностью до масштабного коэффициента, уникальный сплайн $B_{i,n}(x)$, удовлетворяющий

$$B_{i,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < t_i \text{ or } x \geq t_{i+n} \\ \text{nonzero} & \text{otherwise} \end{cases}$$

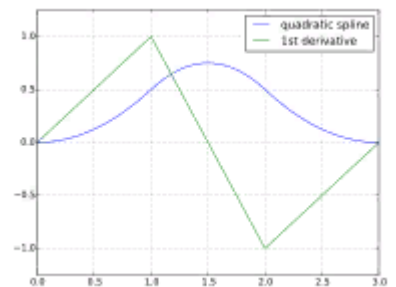
Если мы добавим дополнительное ограничение, что $\sum_i B_{i,n}(x) = 1$ для всех x между первым и последним узлом, то масштабный коэффициент $B_{i,n}(x)$ становится фиксированным. Полученные $B_{i,n}(x)$ сплайновые функции называются В-сплайнами.

В качестве альтернативы В-сплайны могут быть определены путем построения с помощью рекурсивной формулы Кокса-де Бура. Учитывая последовательность узлов $\dots, t_0, t_1, t_2, \dots$, то В-сплайны порядка 1 определяются

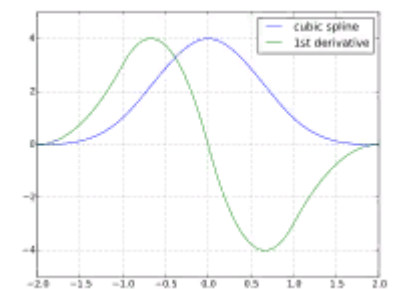
$$B_{i,1}(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Они удовлетворяют $\sum_i B_{i,1}(x) = 1$ для всех x , потому что для любого x ровно одно из $B_{i,1}(x) = 1$ них, а все остальные равны нулю.

В-сплайны высшего порядка определяются рекурсией



Кардинальный квадратичный В-сплайн с узловым вектором (0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3) и контрольные точки (0, 0, 1, 0, 0), и его первая производная



Кардинальный кубический В-сплайн с вектором узла (-2, -2, -2, -2, -1, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 2) и контрольные точки (0, 0, 0, 6, 0, 0, 0), и его первая производная

$$B_{i,k+1}(x) := \omega_{i,k}(x)B_{i,k}(x) + [1 - \omega_{i+1,k}(x)]B_{i+1,k}(x),$$

где

$$\omega_{i,k}(x) := \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i}, & t_{i+k} \neq t_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Свойства

Функция В-сплайна представляет собой комбинацию гибких полос, которые проходят через ряд точек, называемых контрольными точками, создавая плавные кривые. Эти функции позволяют создавать и управлять сложными формами и поверхностями, используя ряд точек. В-сплайн - функции и функции Безье широко применяются в методах оптимизации формы.^[4]

В-сплайн порядка n - это кусочно-полиномиальная функция степени $n - 1$ в переменной x . Он определяется по $1 + n$ местоположениям t_j , называемым узлами или точками останова, которые должны быть в неубывающем порядке $t_j \leq t_{j+1}$. В-сплайн вносит вклад только в диапазоне между первым и последним из этих узлов и равен нулю в других местах. Если каждый узел отделен одинаковым расстоянием h (где $h = t_{j+1} - t_j$) от своего предшественника, то вектор узла и соответствующие ему В-сплайны называются "однородными" (см.

Для каждого конечного узлового интервала, отличного от нуля, В-сплайн является полиномом степени $n - 1$. В-сплайн является непрерывной функцией в узлах.^[примечание 1] Когда все узлы, принадлежащие В-сплайну, различны, его производные также непрерывны вплоть до производной степени $n - 2$. Если узлы совпадают при заданном значении x , то непрерывность производного порядка уменьшается на 1 для каждого дополнительного совпадающего узла. В-сплайны могут иметь общее подмножество своих узлов, но два В-сплайна, определенные над точно такими же узлами, идентичны. Другими словами, В-сплайн однозначно определяется его узлами.

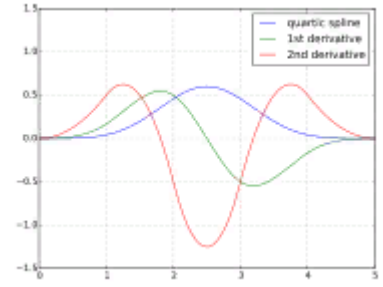
Различают внутренние узлы и конечные точки. Внутренние узлы охватывают x интересующую нас область. Поскольку один В-сплайн уже распространяется на $1 + n$ узлы, из этого следует, что внутренние узлы должны быть расширены $n - 1$ конечными точками с каждой стороны, чтобы обеспечить полную поддержку первому и последнему В-сплайну, которые влияют на интервалы внутренних узлов. Значения конечных точек не имеют значения, обычно первый или последний внутренний узел просто повторяется.

Полезность В-сплайнов заключается в том, что любая сплайновая функция порядка n на заданном множестве узлов может быть выражена как линейная комбинация В-сплайнов:

$$S_{n,t}(x) = \sum_i \alpha_i B_{i,n}(x).$$

В-сплайны играют роль базисных функций для пространства функций сплайна, отсюда и название. Это свойство вытекает из того, что все части имеют одинаковые свойства непрерывности, в пределах их индивидуального диапазона опоры, у узлов.^[5]

Выражения для полиномиальных частей могут быть получены с помощью рекуррентной формулы Кокса-де Бура^[6]



Кардинальная четверть В-сплайн с узловым вектором (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5) и контрольные точки (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), и его первая и вторая производные

$$B_{i,0}(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(x) := \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x).^{[7]}$$

То есть $B_{j,0}(x)$ является кусочно постоянной единицей или нулем, указывающим, в каком узле находится промежуток x (ноль, если узел j повторяется). Уравнение рекурсии состоит из двух частей:

$$\frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i}$$

пандусы от нуля до единицы по мере того как x переходит от t_i к t_{i+k} и

$$\frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}$$

пандусы от единицы до нуля по мере того, как x переходит от t_{i+1} к t_{i+k+1} . Соответствующие B s равны нулю вне этих соответствующих диапазонов. $B_{i,1}(x)$ Например, это треугольная функция, которая равна нулю ниже, наклоняется к единице в точке и обратно к нулю в точке и за ее пределами. $x = t_i, x = t_{i+1}, x = t_{i+2}$ Однако, поскольку базисные функции В-сплайна имеют локальную поддержку, В-сплайны обычно вычисляются алгоритмами, которым не нужно вычислять базисные функции там, где они равны нулю, такими как алгоритм де Бура.

Это соотношение непосредственно приводит к кодированному ФОРТРАНОМ алгоритму BSPLV, который генерирует значения В-сплайнов порядка n в точке x ^[8]. Следующая схема иллюстрирует, как каждая часть порядка n является линейной комбинацией частей В-сплайнов порядка $n-1$ слева от нее.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & & B_{i-2,2} & & \\ 0 & & & & & & \\ & B_{i-1,1} & & & & & \\ B_{i,0} & & & & B_{i-1,2} & & \\ & B_{i,1} & & & & & \\ 0 & & & & B_{i,2} & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Применение рекурсивной формулы с узлами at $(0, 1, 2, 3)$ дает кусочки однородного В-сплайна порядка 3

$$\begin{aligned} B_1 &= x^2/2 & 0 \leq x < 1 \\ B_2 &= (-2x^2 + 6x - 3)/2 & 1 \leq x < 2 \\ B_3 &= (3 - x)^2/2 & 2 \leq x < 3 \end{aligned}$$

Эти фрагменты показаны на диаграмме. Свойство непрерывности квадратичной сплайн-функции и ее первой производной во внутренних узлах иллюстрируется следующим образом

$$\text{At } x = 1, B_1 = B_2 = 0.5; \frac{dB_1}{dx} = \frac{dB_2}{dx} = 1$$

$$\text{At } x = 2, B_2 = B_3 = 0.5; \frac{dB_2}{dx} = \frac{dB_3}{dx} = -1$$

Вторая производная В-сплайна степени 2 разрывна в узлах:

$$\frac{d^2 B_1}{dx^2} = 1, \frac{d^2 B_2}{dx^2} = -2, \frac{d^2 B_3}{dx^2} = -1.$$

Были предложены более быстрые варианты алгоритма де Бура, но они страдают сравнительно меньшей стабильностью.^{[9][10]}

Кардинальный В-сплайн

Кардинальный В-сплайн имеет постоянное разделение, h , между узлами. Кардинальные В-сплайны для заданного порядка n являются просто сдвинутыми копиями друг друга. Их можно получить из более простого определения.^[11]

$$B_{i,n,t}(x) = \frac{x - t_i}{h} n[0, \dots, n](\cdot - t_i)_+^{n-1}$$

Обозначение "заполнитель" используется для обозначения того, что n -я деленная разность функции $(t - x)_+^{n-1}$ двух переменных t и x должна быть взята путем фиксации x и рассмотрения $(t - x)_+^{n-1}$ только как функции t .

Кардинальный В-сплайн имеет равномерно расположенные узлы, поэтому интерполяция между узлами равна свертке со сглаживающим ядром.

Например, если мы хотим интерполировать три значения между узлами В-сплайна (**b**), мы можем записать сигнал в виде:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{b}_1, 0, 0, \mathbf{b}_2, 0, 0, \mathbf{b}_3, 0, 0, \dots, \mathbf{b}_n, 0, 0]$$

Свертка сигнала \mathbf{x} с функцией прямоугольника $\mathbf{h} = [1/3, 1/3, 1/3]$ дает интерполированные значения б-сплайна первого порядка. В-сплайновая интерполяция второго порядка-это свертка с функцией прямоугольника дважды $\mathbf{y} = \mathbf{x} * \mathbf{h} * \mathbf{h}$, путем итерационной фильтрации с функцией прямоугольника получается интерполяция более высокого порядка.

Быстрая б-сплайновая интерполяция на однородной области выборки может быть выполнена с помощью итерационной фильтрации средних. В качестве альтернативы функция прямоугольника равна Sinc в области Фурье. Таким образом, кубическая сплайновая интерполяция равна умножению сигнала в области Фурье с помощью Sinc⁴.

См. Распределение Ирвина-Холла#Специальные случаи для алгебраических выражений для кардинальных В-сплайнов степени 1-4.

Р-сплайн

Термин Р-сплайн расшифровывается как "наказанный В-сплайн". Это относится к использованию представления В-сплайна, где коэффициенты определяются частично данными, подлежащими подгонке, а частично дополнительной штрафной функцией, которая

направлена на наложение гладкости, чтобы избежать переобучения.^[1]

Двух - и многомерные Р-сплайновые аппроксимации данных позволяют использовать произведение граней матриц для минимизации вычислительных операций.^[13]

Производные выражения

Производная В-сплайна степени k является просто функцией В-сплайнов степени $k-1$.^[1]

$$\frac{dB_{i,k}(x)}{dx} = k \left(\frac{B_{i,k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \right)$$

Это означает, что

$$\frac{d}{dx} \sum_i \alpha_i B_{i,k} = \sum_{i=r-k+2}^{s-1} k \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1} \quad \text{on} \quad [t_r, t_s]$$

что показывает, что существует простая связь между производной сплайновой функции и В-сплайнами степени на один меньше.

Моменты одномерных В-сплайнов

Одномерные В-сплайны, то есть В-сплайны, где положения узлов лежат в одном измерении, могут быть использованы для представления 1-d функций плотности вероятности $p(x)$. Примером может служить взвешенная сумма базисных функций В-сплайна порядка n , каждая из которых нормирована по площади к единице (т. Е. не оценивается непосредственно с помощью стандартного алгоритма де-Бура)

$$p(x) = \sum_i c_i \cdot B_{i,n,\text{norm}}(x)$$

и с постоянным ограничением нормализации $\sum_i c_i = 1$. К-й сырой момент μ_k нормализованного В-сплайна $B_{i,n,\text{norm}}$ может быть записан как среднее Дирихле Карлсона R_k ^[15], которое, в свою очередь, может быть решено точно через контурный интеграл и итерационную сумму ^[16] как

$$\mu_k = R_k(\mathbf{m}; \mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot B_{i,n,\text{norm}}(x|t_1 \dots t_j) dx = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(m)}{\Gamma(m+k)} \cdot D_k(\mathbf{m}, \mathbf{t})$$

с

$$D_k = \frac{1}{k} \sum_{u=1}^k \left[\left(\sum_{i=1}^j m_i \cdot t_i^u \right) D_{k-u} \right]$$

и $D_0 = 1 \dots$ Здесь \mathbf{t} представляет собой вектор с позициями j узлов и \mathbf{m} вектор с соответствующими кратностями узлов. Поэтому можно точно вычислить любой момент функции плотности вероятности, $p(x)$ представленной суммой базисных функций В-сплайна, не прибегая к численным методам.

Отношение к кусочно-композиционному Безье

В кривой Безье также является кривой полинома, определяемые с помощью рекурсии от нижней ступени кривые того же класса и закодированных в плане контрольных точек, но ключевое различие заключается в том, что все условия рекурсии для кривой Безье сегмента имеют одинаковые области определения (обычно $[0, 1]$), а поддержка двух терминов в В-сплайн рекурсии различные (крайние подинтервала не общие). Это означает, что кривая степени Безье n , заданная $m \gg n$ контрольными точками, состоит примерно из m/n в основном независимые сегменты, тогда как В-сплайн с теми же параметрами плавно переходит от субинтервала к субинтервалу. Чтобы получить что-то сравнимое с кривой Безье, нужно было бы наложить условие гладкости на переходы между сегментами, что привело бы к некоторому виду сплайна Безье (для которого многие контрольные точки были бы определены требованием гладкости).

Кусочно-составная кривая Безье-это ряд кривых Безье, соединенных непрерывностью по крайней мере C_0 (последняя точка одной кривой совпадает с начальной точкой следующей). В зависимости от области применения могут быть добавлены дополнительные требования к гладкости (например, непрерывность C_1 или C_2).^[17] Непрерывные кривые C_1 имеют идентичные касательные в точке разрыва (где встречаются две кривые). Непрерывные кривые C_2 имеют одинаковую кривизну в точке разрыва.^[18]

Чтобы получить непрерывность C_2 , кривая Безье теряет локальный контроль, потому что для обеспечения непрерывности C_2 контрольные точки зависят друг от друга. Если одна контрольная точка перемещается, весь сплайн должен быть повторно оценен. В-сплайны имеют как непрерывность C_2 , так и локальное управление, но они теряют интерполяционное свойство кусочного Безье.¹

Подгонка кривой

Обычно при подгонке кривой набор точек данных снабжается кривой, определенной некоторой математической функцией. Например, общие типы подгонки кривых используют полином или набор экспоненциальных функций. Когда нет теоретических оснований для выбора функции подгонки, кривая может быть снабжена сплайновой функцией, состоящей из суммы В-сплайнов, используя метод наименьших квадратов.^{[20][примечание 2]} Таким образом, целевая функция минимизации наименьших квадратов является для сплайновой функции степени k ,

$$U = \sum_{\text{all } x} \left\{ W(x) \left[y(x) - \sum_i \alpha_i B_{i,k,t}(x) \right] \right\}^2$$

$W(x)$ - это вес, а $y(x)$ - исходное значение в точке x . Коэффициенты α_i - это параметры, которые должны быть определены. Значения узлов могут быть фиксированными или они тоже могут рассматриваться как параметры.

Основная трудность в применении этого процесса заключается в определении количества используемых узлов и места их размещения. де Бур предлагает различные стратегии для решения этой проблемы. Например, расстояние между узлами уменьшается пропорционально кривизне (2-я производная) данных. Например, использование В-сплайнов для подгонки одиночных лоренцевых и гауссовых кривые были исследованы. Вычислены оптимальные сплайновые функции степеней 3-7 включительно, основанные на симметричном расположении узлов 5, 6 и 7, и применен метод сглаживания и дифференцирования

спектроскопических кривых. В сопоставимом исследовании двумерная версия фильтрации Савицкого-Голея и сплайн-метод дали лучшие результаты, чем скользящая средняя или фильтрация Чебышева.¹

Computer-aided design and computer graphics

In computer-aided design and computer graphics applications, a spline curve is sometimes represented as $C(t)$, a parametric curve of some real parameter t . In this case the curve $C(t)$ can be treated as two or three separate coordinate functions $(x(t), y(t))$, or $(x(t), y(t), z(t))$. The coordinate functions $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$ are each spline functions, with a common set of knot values t_1, t_2, \dots, t_n .

Because a B-splines form basis functions, each of the coordinate functions can be expressed as a linear sum of B-splines, so we have

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_i x_i B_{i,n}(t), \\ Y(t) &= \sum_i y_i B_{i,n}(t), \\ Z(t) &= \sum_i z_i B_{i,n}(t). \end{aligned}$$

The weights x_i , y_i and z_i can be combined to form points $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ in 3-d space. These points P_i are commonly known as control points.

Working in reverse, a sequence of control points, knot values, and order of the B-spline define a parametric curve. This representation of a curve by control points has several useful properties:

1. The control points P_i define a curve. If the control points are all transformed together in some way, such as being translated, rotated, scaled, or moved by any affine transformation, then the corresponding curve is transformed in the same way.
2. Because the B-splines are non-zero for just a finite number of knot intervals, if a single control point is moved, the corresponding change to the parametric curve is just over the parameter range of a small number knot intervals.
3. Because $\sum_i B_{i,n}(x) = 1$, and at all times each $B_{i,n}(x) \geq 0$, then the curve remains inside the bounding box of the control points. Also, in some sense, the curve broadly follows the control points.

A less desirable feature is that the parametric curve does not interpolate the control points. Usually the curve does not pass through the control points.

NURBS

In computer aided design, computer aided manufacturing, and computer graphics, a powerful extension of B-splines is non-uniform rational B-splines (NURBS). NURBS are essentially B-splines in homogeneous coordinates. Like B-splines, they are defined by their order, and a knot vector, and a set of control points, but unlike simple B-splines, the control points each have a weight. When the weight is equal to 1, a NURBS is simply a B-spline and as such NURBS generalizes both B-splines and Bézier curves and surfaces, the primary difference being the weighting of the control points which makes NURBS curves "rational".

By evaluating a NURBS at various values of the parameters, the curve can be traced through space; likewise, by evaluating a NURBS surface at various values of the two parameters, the surface can be represented in Cartesian space.

Like B-splines, NURBS control points determine the shape of the curve. Each point of the curve is computed by taking a weighted sum of a number of control points. The weight of each point varies according to the governing parameter. For a curve of degree d , the influence of any control point is only nonzero in $d+1$ intervals (knot spans) of the parameter space. Within those intervals, the weight changes according to a polynomial function (basis functions) of degree d . At the boundaries of the intervals, the basis functions go smoothly to zero, the smoothness being determined by the degree of the polynomial.

The knot vector is a sequence of parameter values that determines where and how the control points affect the NURBS curve. The number of knots is always equal to the number of control points plus curve degree plus one. Each time the parameter value enters a new knot span, a new control point becomes active, while an old control point is discarded.

A NURBS curve takes the following form:^[23]

$$C(u) = \frac{\sum_{i=1}^k N_{i,n}(u) w_i P_i}{\sum_{i=1}^k N_{i,n}(u) w_i}$$

Here the notation is as follows. u is the independent variable (instead of x), k is the number of control points, N is a B-spline (used instead of B), n is the polynomial degree, P is a control point and w is a weight. The denominator is a normalizing factor that evaluates to one if all weights are one.

It is customary to write this as

$$C(u) = \sum_{i=1}^k R_{i,n}(u) P_i$$

in which the functions

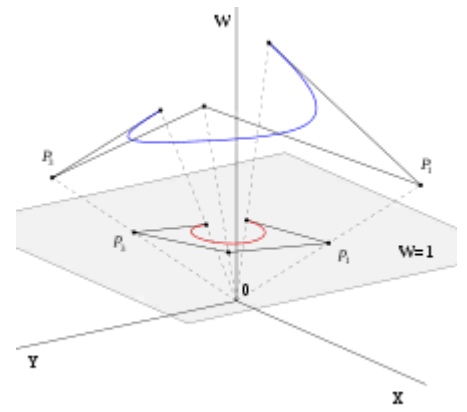
$$R_{i,n}(u) = \frac{N_{i,n}(u)w_i}{\sum_{j=1}^k N_{j,n}(u)w_j}$$

are known as the rational basis functions.

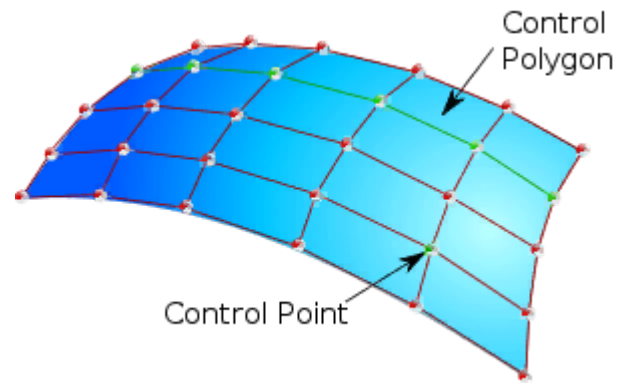
A NURBS surface is obtained as the tensor product of two NURBS curves, thus using two independent parameters u and v (with indices i and j respectively):^[24]

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l R_{i,j}(u, v) P_{i,j}$$

with



NURBS curve – polynomial curve
defined in homogeneous
coordinates (blue) and its projection
on plane – rational curve (red)



$$R_{i,j}(u,v) = \frac{N_{i,n}(u)N_{j,m}(v)w_{i,j}}{\sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^l N_{p,n}(u)N_{q,m}(v)w_{p,q}}$$

as rational basis functions.

See also

- [Bézier curve](#)
- [Box spline](#)
- [De Boor algorithm](#)
- [I-spline](#)
- [M-spline](#)
- [Spline wavelet](#)
- [T-spline](#)

Notes

1. Strictly speaking, B-splines are usually defined as being left-continuous.
2. de Boor gives FORTRAN routines for least-squares fitting of experimental data.

References

1. de Boor, p. 114
2. Gary D. Knott (2000), *Interpolating cubic splines* ([https://books.google.com/books?id=qkGlJfJRuRs8C&dq=The+global+cubic+spline+basis+based+on+the+particular+join+order+2+piece-wise+polynomials+known+as+B-splines+\(B+stands+for+%22basis%22\)+is+developed+by&source=gbs_navlinks_s](https://books.google.com/books?id=qkGlJfJRuRs8C&dq=The+global+cubic+spline+basis+based+on+the+particular+join+order+2+piece-wise+polynomials+known+as+B-splines+(B+stands+for+%22basis%22)+is+developed+by&source=gbs_navlinks_s)). Springer. p. 151
3. Hartmut., Prautzsch (2002). *Bézier and B-Spline Techniques*. Mathematics and Visualization. Boehm, Wolfgang., Paluszny, Marco. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. p. 63. doi:10.1007/978-3-662-04919-8 (<https://doi.org/10.1007%2F978-3-662-04919-8>). ISBN 9783662049198. OCLC 851370272 (<https://www.worldcat.org/oclc/851370272>).
4. Talebitooti, R.; Shojaeefard, M.H.; Yarmohammadisatri, Sadegh (2015). "Shape design optimization of cylindrical tank using b-spline curves". *Computer & Fluids*. **109**: 100–112. doi:10.1016/j.compfluid.2014.12.004 (<https://doi.org/10.1016%2Fj.compfluid.2014.12.004>).
5. de Boor, p 113.
6. de Boor, p 131.
7. de Boor, p. 131
8. de Boor, p. 134.
9. Lee, E. T. Y. (December 1982). "A Simplified B-Spline Computation Routine". *Computing*. **29** (4): 365–371. doi:10.1007/BF02246763 (<https://doi.org/10.1007%2F978-3-662-04919-8>).
10. Lee, E. T. Y. (1986). "Comments on some B-spline algorithms". *Computing*. **36** (3): 229–238. doi:10.1007/BF02240069 (<https://doi.org/10.1007%2F978-3-662-04919-8>).
11. de Boor, p 322.
12. Eilers, P.H.C. and Marx, B.D. (1996). Flexible smoothing with B-splines and penalties (with comments and rejoinder). *Statistical Science* 11(2): 89-121.
13. Eilers, Paul H.C.; Marx, Brian D. (2003). "Multivariate calibration with temperature interaction using two-dimensional penalized signal regression". *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*. **66** (2): 159–174. doi:10.1016/S0169-7439(03)00029-7 ([https://doi.org/10.1016%2FS0169-7439\(03\)00029-7](https://doi.org/10.1016%2FS0169-7439(03)00029-7)).
14. de Boor, p. 115

15. Carlson, B.C. (1991). "B-splines, hypergeometric functions, and Dirichlet averages" (<https://doi.org/10.1016%2F0021-9045%2891%2990006-V>). *Journal of Approximation Theory*. **67** (3): 311–325. doi:10.1016/0021-9045(91)90006-V (<https://doi.org/10.1016%2F0021-9045%2891%2990006-V>).
16. Glösenkamp, T. (2018). "Probabilistic treatment of the uncertainty from the finite size of weighted Monte Carlo data". *EPJ Plus*. **133** (6): 218. arXiv:1712.01293 (<https://arxiv.org/abs/1712.01293>). Bibcode:2018EPJP..133..218G (<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018EPJP..133..218G>). doi:10.1140/epjp/i2018-12042-x (<https://doi.org/10.1140%2Fepjp%2Fi2018-12042-x>).
17. Eugene V. Shikin; Alexander I. Plis (14 July 1995). *Handbook on Splines for the User* (<https://books.google.com/books?id=DL88KouJCQkC&pg=PA96>). CRC Press. pp. 96–. ISBN 978-0-8493-9404-1.
18. Wernecke, Josie (1993). "8" (http://www-evasion.imag.fr/~Francois.Faure/doc/inventorMentor/cgi_html/ch08.html). *The Inventor Mentor: Programming Object-Oriented 3D Graphics with Open Inventor, Release 2* (http://www-evasion.imag.fr/~Francois.Faure/doc/inventorMentor/cgi_html/index.html) (1st ed.). Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. ISBN 978-0201624953.
19. Zorin, Denis (2002), *Bezier Curves and B-splines, Blossoming* (<http://mrl.nyu.edu/~dzorin/geom04/lectures/lect02.pdf>) (PDF), New York University, retrieved 4 January 2015
20. de Boor, Chapter XIV, p. 235
21. Gans, Peter; Gill, J. Bernard (1984). "Smoothing and Differentiation of Spectroscopic Curves Using Spline Functions". *Applied Spectroscopy*. **38** (3): 370–376. Bibcode:1984ApSpe..38..370G (<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1984ApSpe..38..370G>). doi:10.1366/0003702844555511 (<https://doi.org/10.1366%2F0003702844555511>).
22. Vicsek, Maria; Neal, Sharon L.; Warner, Isiah M. (1986). "Time-Domain Filtering of Two-Dimensional Fluorescence Data" (<http://www.dtic.mil/get-tr-doc/pdf?AD=ADA164954>). *Applied Spectroscopy*. **40** (4): 542–548. Bibcode:1986ApSpe..40..542V (<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986ApSpe..40..542V>). doi:10.1366/0003702864508773 (<https://doi.org/10.1366%2F0003702864508773>).
23. Piegl and Tiller, chapter 4, sec. 2
24. Piegl and Tiller, chapter 4, sec. 4

Works cited

- Carl de Boor (1978). *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag. ISBN 978-3-540-90356-7.
- Piegl, Les; Tiller, Wayne (1997). *The NURBS Book* (<https://archive.org/details/nurbsbook00piegl>) (2nd. ed.). Springer. ISBN 978-3-540-61545-3.

Further reading

- Richard H. Bartels; John C. Beatty; Brian A. Barsky (1987). *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling*. Morgan Kaufmann. ISBN 978-1-55860-400-1.
- Jean Gallier (1999). *Curves and Surfaces in Geometric Modeling: Theory and Algorithms* (<http://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/geom1.html>). Morgan Kaufmann. Chapter 6. B-Spline Curves. This book is out of print and freely available from the author.
- Hartmut Prautzsch; Wolfgang Boehm; Marco Paluszny (2002). *Bézier and B-Spline Techniques*. Springer Science & Business Media. ISBN 978-3-540-43761-1.
- David Salomon (2006). *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer. Chapter 7. B-Spline Approximation. ISBN 978-0-387-28452-1.

External links

- Weisstein, Eric W. "B-Spline" (<https://mathworld.wolfram.com/B-Spline.html>). *MathWorld*.

- Ruf, Johannes. "B-splines of third order on a non-uniform grid" (https://web.archive.org/web/20131106031347/http://www.oxford-man.ox.ac.uk/~jruf/papers/ruf_bspline.pdf) (PDF). Archived from the original (http://www.oxford-man.ox.ac.uk/~jruf/papers/ruf_bspline.pdf) (PDF) on 2013-11-06. Retrieved 2012-05-02.
 - bivariate B-spline from numpy (<http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.interpolate.bisplrep.html>)
 - Interactive B-splines with JSXGraph (<http://jsxgraph.uni-bayreuth.de/wiki/index.php/B-splines>)
 - TinySpline: Opensource C-library with bindings for various languages (<https://github.com/msteinbeck/tinyspline>)
 - Uniform non rational B-Splines, Modelling curves in 2D space. Author: Stefan G. Beck (<http://www.qwerkop.de/projects/bspline/doku.pdf>)
 - B-Spline Editor by Shukant Pal (<https://editbspline.github.io/>)
-

Извлечено из "<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=B-spline&oldid=1031796551>"

This page was last edited on 3 July 2021, at 18:04 (UTC).

Text is available under the Creative Commons Attribution-ShareAlike License; additional terms may apply. By using this site, you agree to the Terms of Use and Privacy Policy. Wikipedia® is a registered trademark of the Wikimedia Foundation, Inc., a non-profit organization.