Primo compito di matematica discreta – Settembre 2014

Prima parte – 10 domande, 6/10 giuste per passare. Tempo: 20 minuti

1) D: 21 palline in 10 contenitori. Quante di queste affermazioni sono vere?
   - In uno ce n'è almeno 1.
   - In uno ce ne sono almeno 3.
   - Almeno uno è vuoto.

   R: La prima è VERA per la piccionaia. Anche se provassi a lasciare uno dei contenitori completamente vuoto, negli alti ci sarà almeno un elemento.
   La seconda è sempre VERA per la piccionaia, infatti riesco a riempire per 2 volte completamente i 10 contenitori. Inoltre in almeno un contenitore ce ne saranno almeno 3.
   La terza potrebbe essere vera, ma non lo è sempre. Quindi la ritengo FALSA.
2) D: Il resto della divisione intera tra -6 e 5 è...?
   R: Ricordarsi che il resto è SEMPRE POSITIVO. Quindi -6 = -2*5 +4. Il resto è 4.

3) D: Quante sono le funzioni suriettive da A(n≥2) a B(n=2)?
   *R: Sappiamo che per definizione TUTTE le funzioni possibili da un insieme ad un altro sono **b^a**. Quindi in questo caso le funzioni totali sono 2^n, a cui dobbiamo togliere quelle NON suriettive. Le funzioni non suriettive sono quelle in cui un elemento dell'insieme B non è raggiunto da nessuna freccia.*
   Nel nostro caso queste funzioni NON suriettive sono solamente 2:
   - *Tutti gli elementi di A sono collegati al 1° el. di B.*
   - *Tutti gli elementi di A sono collegati al 2° el. di B.*

   Quindi la soluzione è 2^n-2.

4) D: Ogni grafo in cui il # di archi è maggiore di 2n, è connesso.
   R: FALSO. Nella dispensa (es. 7.7) si è dimostrato che il numero massimo di lati per cui un grafo G NON è connesso è (n-1)(n-2)/2. In questo esercizio ho 2n lati, ma È POSSIBILE CHE 2n<(n-1)(n-2)/2. Quindi l'affermazione è falsa.

5) D: Sia A insieme non vuoto. Il # di sottoinsiemi di A con cardinalità = 3 è sempre maggiore del # di sottoinsiemi di A che hanno cardinalità = 2.
   R: FALSO. È vero solo se 3!(n-3)! > 2!(n-2)! Quindi da un certo n in poi.

6) D: A e B hanno 5 elementi ciascuno. Quante sono le funzioni possibili da A a B?
   R: Le funzioni possibili da A a B sono in generale b^a. Quindi in questo caso sono 5^5.

7) Mancante

8) D: Se 1=0, allora 2=1. Vero o falso?
   R: VERO. Il falso implica qualsiasi cosa, quindi l'affermazione è corretta.
9) D: |S|=10, A sottoinsieme di S. B complementare di A rispetto ad S. Quali affermazioni sono vere?
   - |A|+|B|≤|S| *VERO (in particolare è proprio uguale a |S|)*
   - |A|<10*FALSO (A potrebbe anche essere tutto S)*
   - B è sottoinsieme di A-unito-S. *VERO (A-unito-S è proprio uguale a S, e B è sottoinsieme di S)*

- |A-unito-(A-intersecato-B)|>|A| *FALSO (Dato che B è complementare di A, l'intersezione è nulla. Quindi le due cardinalità si equivalgono.)*
- |S – B| ≤ 9   *FALSO (B potrebbe essere vuoto, quindi |S-B| potrebbe essere uguale a 10.)*

10)D: Dovendo dimostrare P(n) per tutti gli n≥5 naturali, si può utilizzare l'induzione?
R: VERO. Come caso base si utilizza n=5 e si dimostra che è vero. Come passo induttivo si utilizza n-1, che si dà per vero, e si dimostra che P(n) è valida anche per n.

Seconda parte – 5 esercizi. Tempo: 2 ore e 30 min

1) D: Mazzo di 52 carte, carte di 4 semi diversi.
Per ogni seme, ci sono 13 carte i cui valori sono A, 2, 3, …, 10, J, Q, K.
Ad ogni valore è associato un rango numerico in questo modo:
A→1, 2→2, …, 10→10, J→11, Q→12, K→13.
Dal mazzo viene tolto un insieme A di N carte.
   - Quanti sono gli insiemi di N=5 carte in cui 3 carte hanno lo stesso rango (sia esso x) e le altre due hanno lo stesso rango (sia esso y)?
   - Quanti sono gli insiemi di N=5 carte che contengono almeno 9 o almeno un 5?
   - Quanti sono gli insiemi di N=4 carte in cui i ranghi delle carte sono tutti diversi tra loro?
   - Supponiamo che le carte del mazzo vengono numerate da 1 a 52 (a ogni carta è associato un numero distinto).
     Definiamo la funzione f{1,…,52}→Numeri naturali, in questo modo:
     $f(i) = i^2$ se i è multiplo di 4
     $f(i) = i$ in tutti gli altri casi

     Quanto vale la sommatoria da 1 a 52 di f(i)?