Prova scritta di Calcolo Scientifico

Udine, 22 febbraio 2022

18 •,⋆=30

1. Sia $\mathcal{F} := \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento, che contiene anche i numeri denormalizzati.
   - Siano u la precisione di macchina e d il più piccolo numero denormalizzato positivo. Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $\frac{u}{d} = 16$, $\mathrm{e}_{\max} = t+1$,$realmax = 14$.
   - Siano dati $x = (10.\overline{011})_2$ e $y = (1.\overline{0111})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y}$.
   - ⋆ Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
   - Definisci i numeri denormalizzati per $\mathcal{F}$. Quanti sono i numeri denormalizzati relativi a $\mathcal{F}$?. Giustifica la risposta.
2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$.
   - Sia $f(x) = \sqrt{g(x)}$, con g funzione reale non negativa. Determina la relazione tra il numero di condizionamento di f e quello di g. Studia il condizionamento della funzione $f(x) = \sqrt{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = \sqrt{\cos(2x)}$ con $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
   - Studia l'errore dei due algoritmi per il calcolo di f. Si può assumere che l'errore della moltiplicazione di x per 2 sia nullo? Quale algoritmo è più stabile? Giustifica tutte le risposte.
3. Sia $f(x) = (x^2 - 3)(x+1)^2$.
   4. Disegna il grafico di f. Determina le radici α, β, γ con $\alpha < \beta < \gamma$.

      Metodo di Newton
   5. Studia la convergenza del metodo di Newton ad α. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
   6. Siano $z_1, z_2, z_1 < z_2$, i due punti di flesso della funzione f. Studia la convergenza del metodo di Newton a β quando $x_0 \in [z_1, z_2]$. La successione ottenuta con $x_0 = 0$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
   7. Studia la convergenza del metodo di Newton a γ. La successione ottenuta con $x_0 = 1.5$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.

      Metodo a pendenza costante: $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots,$ con $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$.
   8. Studia la convergenza ad α del metodo iterativo al punto precedente con $m = 12$. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
   9. Studia la convergenza a β del metodo iterativo al punto precedente con $m = -12$. La successione ottenuta con $x_0 = 0$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.

   ⋆ Definisci il concetto di ordine di convergenza per una generica successione $x_k \to \alpha$ per $k \to +\infty$.

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - 1 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quale scelta del parametri α esiste tale fattorizzazione?
- Disegna il grafico della funzione $\alpha \to ||A||_1$.
- Per quale scelta del parametro α il sistema $Ax = b$ ha unica soluzione?
- Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4/5 & 28/5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

.

⋆ Scrivi la pseudocodifica dell'algoritmo di eliminazione di Gauss di base.

Sia $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$, $x \in [-1, 1]]$. Dati i punti $P_0 = (-1, f(-1))$, $P_1 = (0, f(0))$, $P_2 = (1, f(1))$.

- Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
- Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i tre punti e tale che $\tilde{p}'(0) = f'(0)$ nella forma di Newton.
- Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti P_0, P_1, P_2 e $P_3 = (1/2, f(1/2))$ nel senso dei minimi quadrati.