→ Dato un grafo, fissato il 1° nodo io so che gli altri hanno per forza il colore opposto all'adiacente → $\in P$ e poi sappiamo che $P \subseteq NP$

$\in P$: dimostro che, dal colore del nodo iniziale, richiamo il CIRCUITO di CIRCUIT VALUE e valuto per ogni arco se i due estremi hanno colore diverso.

ESAME 10 settembre 2018

1. calcola usando il sist. di equaz. su REGEX, il linguaggio accettato dal DFA $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, q_0, \{q_1, q_2\})$

		0	1
	q_0	q_0	q_1
F →	q_1	q_0	q_2
F →	q_2	q_3	q_1
	q_3	q_0	q_1

$Q_0 : (Q_1 \cdot 0 + Q_3 \cdot 0 + \varepsilon) 0^*$

$Q_1 : (Q_0 \cdot 1 + Q_2 \cdot 1 + Q_3 \cdot 1)$

$Q_2 : (Q_1 \cdot 1)$

$Q_3 : (Q_2 \cdot 0)$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= ((Q_1 \cdot 0 + Q_3 \cdot 0 + \varepsilon) 0^* 1 + Q_1 \cdot 11 + Q_2 \cdot 01) \\
&= (Q_1 \cdot 0 + Q_2 \cdot 00 + \varepsilon) 0^* 1 + Q_1 \cdot 11 + Q_1 \cdot 101) \\
&= (Q_1 \cdot 0 + Q_1 \cdot 100 + \varepsilon) 0^* 1 + Q_1 \cdot 11 + Q_1 \cdot 101) \\
&= Q_1 \cdot 0^+ 1 + Q_1 \cdot 10^+ 1 + 0^* 1 + Q_1 \cdot 11 + Q_1 \cdot 101 \\
&= Q_1 (0^+ 1 + 10^+ 1 + 11 + 101) + 0^* 1 \\
&= 0^* 1 (0^+ 1 + \underbrace{10^+ 1}_{\text{almeno 2 zeri}} + 11 + 101)^*
\end{aligned}
$$

$L(M) = Q_1 + Q_2$

$Q_2 = 0^* 1 (0^+ 1 + 10^+ 1 + 11 + 101)^* 1$

$Q_3 = 0^* 1 (0^+ 1 + 10^+ 1 + 11 + 101)^* 10$

$Q_0 = (0^* 1 (0^+ 1 + 10^+ 1 + 11 + 101)^* 0 + 0^* 1 (0^+ 1 + 10^+ 1 + 11 + 101)^* 100 + \varepsilon) 0^*)$

2. def. di R.E. e PRODUTTIVO

R.E.: insieme che ha una funzione semicaratt. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ e l'appartenenza a quest'insieme è semidecidibile

Un insieme è R.E. se esiste una mdT K t.c. $W_K = A$

PRODUTTIVO: insieme che ha una funzione produttiva $f: W_x \to A / W_x$ per ogni $x \in \mathbb{N}$, inoltre un insieme produttivo non è R.E.

dimostra che non è R.E: prendo la mdT 6 (secondo la nostra enumeraz) e questa ha $W_x = \emptyset$, aggiungo un elemento con f PRODUTTIVA e ottengo B_1. Ora con f mappo l'elemento di B_1 in A/B_1 e ottengo B_2.
Faccio così più volte e vedo che non riesco mai a "catturare" tutti gli elementi ⇒ non è RE
se per assurdo A fosse R.E. allora $A = W_x$ per qualche x, ma allora la funz. prod. sarebbe non definita → ASSURDO

3. $A = \{0^n 1^a 0^n 1^b 0^n : a>0, b>0, n>0\}$ mostra che non è CF.

$z = uvwxy$

$|z| \geq n$

$|vwx| \leq n$

$|vx| > 0$

$z = 0^n 1 0^n 1 0^n$ (prendo un'istanza)

$\underleftrightarrow{0^n}\, 1\, \underleftrightarrow{0^n}\, 1\, \underleftrightarrow{0^n}$ $i = 0 \to \notin L$

$\longleftrightarrow$ $i = 0 \to \notin L$, ma se non ci fosse l'ultimo 0^n rimarrei dentro

4. $P = \bigcup TIME(n^k)$ e dimostra che $A \in P$: scrivo un algo che verifica la validità della stringa

$K>0$

considero il problema CIRCUIT VALUE e so che $\exists$ un circuito che tramite AND/OR/NOT/XOR verifica l'appartenenza ad A, restituendo TRUE/FALSE. Quindi posso fornire una stringa in input e il circuito decide se appartiene o no in tempo POLINOMIALE e CIRCUIT SAT è P-COMPLETO.
posso verificare con 3 WHILE che controllano se il numeri degli 0 coincidono

5. - $B = \{x : (\forall y > x)(\varphi_y(x) = x)\}$ sembra essere VUOTO $= \emptyset$

$\bar{B} = \{x : (\exists y > x)(\varphi_y(x) \neq x)\} = \mathbb{N}$ per PADDING (es. da mdT 6)

$\Rightarrow$ RICORSIVO sia B che $\bar{B}$

$\hookrightarrow$ ci saranno TUTTE LE x, non guardo le y

- $C = \{x : (\exists y > x)(\varphi_x(y) = y)\} \rightarrow$ 1 terminaz $\rightarrow$ R.E.

$K \leq C$: $\psi(a,b) = \begin{cases} b & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ per SMN $\rightarrow \exists g$ RIC TOT $\rightarrow \psi(a,b) = \varphi_{g(a)}(b)$ $\rightarrow$ se $a \in K \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)}(b)\downarrow \rightarrow$ per $b > g(a) \Rightarrow \varphi_{g(a)}(b) = b \rightarrow g(a) \in C$

se $a \notin K \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)}(b)\uparrow \rightarrow g(a) \notin C$

C è R.E. completo $\rightarrow$ CREATIVO

$\bar{C}$ è PRODUTTIVO

- $D = \{x : E_{\lceil \frac{x}{2} \rceil} = \text{EVEN}\} \rightarrow \infty$ TERMINAZ., non R.E.

$\hookrightarrow \varphi_{\lceil \frac{x}{2} \rceil}(b) = 2b$

$\bar{D} = \{x : E_{\lceil \frac{x}{2} \rceil} \neq \text{EVEN}\}$

$K \leq \bar{D}$: $\psi(a,b) = \begin{cases} 2b & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ $\rightarrow$ se $a \in K$ allora $\varphi_{g(a)}(b) = 2b \rightarrow f(a) = 2g(a)$ $E_{\lceil \frac{f(a)}{2} \rceil} = \text{EVEN}$ OK $\rightarrow f(a) \in D \Rightarrow \bar{D}$ è PRODUTTIVO

se $a \notin K$ allora $\varphi_{g(a)}(b)\uparrow \rightarrow E_{f(a)} = \emptyset \rightarrow f(a) \in \bar{D}$

$\bar{K} \leq D$: $\psi(a,b) = \begin{cases} 2b & M_a(a) \not\downarrow \text{ in } \leq b \text{ passi} \\ 1 & \text{else} \end{cases}$ $\rightarrow$ se $a \in \bar{K}$ allora $\varphi_{g(a)}(b) = 2b$ $f(a) = 2g(a)$ $E_{\lceil \frac{f(a)}{2} \rceil} = \text{EVEN}$ OK $\rightarrow f(a) \in D \Rightarrow D$ è PRODUTTIVO

se $a \in K$ allora $M_a(a)\downarrow$ in t passi: se $t > b \rightarrow E_{\lceil \frac{f(a)}{2} \rceil} = \{0, \dots, 2t-2\}$; se $t \leq b \rightarrow E_{\frac{f(a)}{2}} = 1$ $\rightarrow E_{g(a)} = \{0, \dots, 2t-2, 1\}$

$\Rightarrow f(a) \notin D$

6. Definisci un NON R.E. e NON PRODUTTIVO contemporaneamente

il complementare di un ins. semplice e dimostro che NON R.E. / NON PROD. $\rightarrow A$

- NON R.E. $\rightarrow$ se fosse R.E. allora l'insieme semplice (essendo R.E.) dovrebbe essere RICORSIVO (teo. POST)
- NON PROD. $\rightarrow \bar{A}$ è R.E. per def. e se A fosse prod. allora $\bar{A}$ sarebbe creativo. (R.E. completo), ma allora per def. di $\bar{A}$ $\forall$ R.E. l'intersez. $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ ma A contiene ∞ sottoins. RE e avremmo $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ ASSURDO

ESAME 19 febbraio 2019

1. Dimostra che la classe di linguaggi di DFA e NFA coincidono.

Da DFA $M'(Q', \Sigma, \delta, q_0, F)$

NFA $M(Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, F)$ con $Q = \mathcal{P}(Q')$

$\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q')$

$\delta'(P, a) = \bigcup_{p \in \delta(p,a)} \quad P \in \mathcal{P}(Q)$

2. ins. PRODUTTIVO: $\exists f$ produttiva totale t.c. $\forall x \in \mathbb{N}$ se $W_x \subseteq A$ allora $f(x) \in A \setminus W_x$

dimostra che non può essere finito: dimostro che non è FINITO → NON RICORSIVO → NON R.E.

se fosse R.E. allora $\exists$ una mdT che ha dom $W_x = A$.
ma se A ha la funz. prod. allora esco dal dominio → ASSURDO

3. $f(x,0) = x$ se $x \geq 0$
$f(0,y) = f(2, y-1)$ se $y > 0$
$f(x,y) = f(x-1, y+1)$ se $x > 0$ $y > 0$

$f(0,3) = f(2,2) = f(1,3) = f(0,4) = f(2,3) = f(1,4) \ldots$ NON È PRIM. RIC → LOOP

4. $A = \{ u_n \ldots u_0 \in \{0,1\}^* :$ stringa palindroma ∧ numero bin multiplo o uguale a 4 (ci possono 0 inutili all'inizio)$\}$

→ terminano per forza con 00

bisogna avere memoria → non regolare

0: 0 → pal
2: 10
4: 100
8: 1000 → sicuramente le potenze di 2
12: 1100
16: 10000
20: 10100
24: 11000
28: 11100
32: 100000
36: 100100

le stringhe PALINDROME sono CF
le stringhe MULTIPLO di 4 sono REGOLARI → $1(0+1)^*00$

→ INTERSEZ. non è CF

$z = 0^m 1 0^m 1 0^m$

$z = uvw$ → NON è REG

$\underline{0^m \; 1 \; 0^m}$

$S \to 00A00 \mid 0$ → deve essere palindromo
$A \to 0A0 \mid 1A1 \mid 1 \mid \varepsilon$

5. $-B = \{ x : (\exists y > x!)(\varphi_x(y) = y!) \}$ sembra R.E.

semicaratt f: $\begin{cases} 1 & \text{se con DOVETAIL } \varphi_x(y) = y! \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$

$K \leq B$:

$\psi(a,b) = \begin{cases} b! & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ → SMN → $\varphi_{g(a)}(b) = b!$

se $a \in K \to b > g(a)! \Rightarrow \varphi_{g(a)}(b) = b! \to g(a) \in B$

se $a \notin K \to \varphi_{g(a)}(b) \uparrow \to g(a) \notin B$

$\bar{B}$ creativo $\bar{B}$ produttivo

$- C : \{x : \{0,1,2\} \subseteq E_x \subseteq \{0,1,2,3\}\}$

↳ l'output è $\langle^{0,1,2}_{0,1,2,3}$

$K \leq C : \psi(a,b) = \begin{cases} b \bmod 4 & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ → SMN → $\exists g(a)$ RIC. TOT.

se $a \in K \to \forall b \ \varphi_{g(a)}(b) = b \bmod 4 \to E_{g(a)} = \{0,1,2,3\} \to g(a) \in C$

se $a \notin K \to \forall b \ \varphi_{g(a)}(b)\uparrow \to E_{g(a)} = \emptyset \to g(a) \notin C$

$\bar{K} \leq C : \psi(a,b) = \begin{cases} b \bmod 4 & M_a(a) \not\downarrow \text{ in } \leq b \text{ passi} \\ 5 & \text{else} \end{cases}$ → SMN → $\exists g(a)$ RIC. TOT

se $a \notin K \to \varphi_{g(a)}(b) = b \bmod 4 \to E_{g(a)} = \{0,1,2,3\} \to g(a) \in C$

se $a \in K \to M_a(a) \downarrow$ in t passi $\to E_{g(a)} = \{0,1,2,3,5\} \to g(a) \notin C$

$\Rightarrow C, \bar{C}$ produttivi

$- D : \{x : (\exists y > x!)(\varphi_x(y) = x!)\}$ → R.E.

$K \leq D : \psi(a,b) = \begin{cases} (b-1)! & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ → SMN → $\varphi_{g(a)}(b)$ → se $a \in K$ $b = g(a)+1 \Rightarrow \varphi_{g(a)}(g(a)+1) = g(a)! \to g(a) \in D$

se $a \notin K \Rightarrow \varphi_{g(a)}(b)\uparrow \to g(a) \notin D$

D è CREATIVO, $\bar{D}$ è PROD.

6. GUESS & VERIFY: se avessi una possibile suddivisione posso verificare in tempo POL. DET. se verifica o no. → TIME(n^k)
e poi ne ho tante possibili → $\in$ NP

ESAME 23 luglio 2019

1. dimostra che $r \cdot (s+t) = r \cdot s + r \cdot t$

$L(r(s+t)) = L(rs + rt)$. preso $uv \in L(r(s+t)) \to u \in L(r), v \in L(s+t) \langle^{v \in L(s)}_{v \in L(t)} \to uv \in L(rs + rt)$

preso $uv \in L(rs+rt) \to uv \in L(rs)$ o $uv \in L(rt) \to u \in L(r), v \in \langle^{L(t)}_{L(s)} \Rightarrow uv \in L(r(s+t))$

$uv \in L(rs) \downarrow u \in L(r) \wedge v \in L(s)$

$uv \in L(rt)$ ↳ $u \in L(r) \wedge v \in L(t)$

3. TIME($f(n)$): insieme dei problemi che sono decisi da una k-mdT in al max $f(n)$ passi in modo deterministico
es. di TIME($a \cdot n + b$) es. con una 2-mdT verificare se una stringa è PALINDROMA → NON VA BENE L'ACCESSO DIRETTO

4. $\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(x,y) = f(\min\{x,y\}, 0) \cdot Ack(x,y) & \text{se } x+y > 0 \end{cases}$ → è PRIM. RIC perché è il prodotto per ZERO (caso BASE)
↳ FUNZ. ZERO

5. $A = \{x \in \{0,1,..\}^* : x$ è prefisso dell'esp. binaria di $^{30}/_{7}\}$

$\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$

30 in binario → 11110

7 in binario → 111

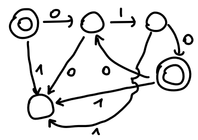
$$\begin{array}{r|l} 11110 & 111 \\ 010 & 100,\overline{010} \\ 01000 & \\ 10 & \end{array}$$

OPPURE →

$\frac{2}{7}$	2
$\frac{4}{7}$	0
$\frac{1}{7}$	1
$\frac{2}{7}$	0
$\frac{4}{7}$	0
$\frac{1}{7}$	1

$A = \{\varepsilon, 010, 010010, 010010010 \dots\}$

è REGOLARE



se avessi scritto $\sqrt{18}$ → è IRRAZ. NON È REG ma CF → non si può scrivere la parte decimale perché è ∞ e non c'è periodo

6. $- B = \{x : \varphi_{x-2}(x+2) = 18\}$ → RE

$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$, $K \leq B$: $\psi(a,b) = \begin{cases} 18 & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$

se $a \in K$ → $\varphi_{g(a)}(b) = 18$ → $f(a) = g(a)+2$ → $\varphi_{f(a)-2}(f(a)+2) = 18$ → $f(a) \in B$

se $a \notin K$ → $\forall b\ \varphi_{g(a)}\uparrow$ → $f(a) \notin B$

B è CREATIVO $\bar{B}$ produttivo

$- C = \{(x,y) : E_y = \{x!\}\}$

↳ $\varphi_y(b) = x!$ → ∞ TERMINAZ. → no R.E. (dovet.)

fisso $x=0$, $K \leq C$: $\psi(a,b) = \begin{cases} 0! & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ → se $a \in K$ → $\varphi_{g(a)}(b) = 1$ → $E_{g(a)} = \{0!\} = \{1\}$ → $(0, g(a)) \in C$

se $a \notin K$ → $\varphi_{g(a)}(b)\uparrow$ → $E_{g(a)} = \emptyset$ → $(0, g(a)) \notin C$

→ $\bar{C}$ è produttivo

$\bar{K} \leq C$: $\psi(a,b) = \begin{cases} 0! & M_a(a) \not\downarrow \text{ in } \leq b \text{ passi} \\ 2 & \text{else} \end{cases}$ → se $a \in \bar{K}$ → $\varphi_{g(a)}(b) = 0!$ → $E_{g(a)} = \{0!\}$ → $(0, g(a)) \in \bar{C}$

se $a \in K$ → $M_a(a)\downarrow$ in t passi → se $t \leq b$ → $E_{g(a)} = \{2\}$ → $E_{g(a)} = \{0!, 2\}$ → $(0, g(a)) \notin \bar{C}$

se $t > b$ → $E_{g(a)} = \{0!\}$

→ C è produttivo

$- D = \{x : (\exists y > x)(\forall u \in \mathbb{N})(\forall v \in \mathbb{N})(\varphi_y(u,v) = Ack(u,v))\}$ → $\mathbb{N}$ RIC.

$\bar{D} = \{x : (\forall y > x)(\exists u \in \mathbb{N})(\exists v \in \mathbb{N})(\varphi_y(u,v) \neq Ack(u,v))\}$ → $\emptyset$ RIC.

ESAME 10 settembre 2019

1. dimostra che $r^* \cdot (r + \varepsilon) = r^*$

$L(r^*(r+\varepsilon)) = L(r^*)$ se $uv \in L(r^*(r+\varepsilon)) = u \in L(r^*)$ e $v \in L(r+\varepsilon)$ ⇒ $u \in L(r^*)$ e $v \in L(r)$ → $uv \in L(r^+)$ dove $r^+ \subset r^*$

$v \in L(\varepsilon)$ → $uv \in L(r^*)$

se $uv \in L(r^*)$

2. Un insieme A.E. il cui complementare non è PRODUTTIVO: – SEMPLICE
– RICORSIVO

3. $L \in NTIME(f(n))$ allora $L \in SPACE(O(f(n)))$

↳ $\in TIME(c^{f(n)}) \in SPACE(\log(c^{f(n)})) = SPACE(O(f(n)))$

4. Secondo l'enumeraz. a lezione, $8 \in K$?

$ 0
L R

	$	0	
q_0	$$$	$$$	0
q_0	$$$	q_0 $ L	1
q_0	$$$	q_0 $ R	2
q_0	$$$	q_0 0 L	3
q_0	$$$	q_0 0 R	4
q_0	q_0 $ L	$$$	5
q_0	q_0 $ L	q_0 $ L	6
q_0		q_0 $ R	7
q_0	q_0 $ L	q_0 0 L	8

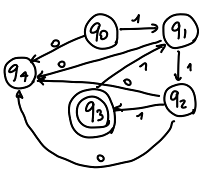
fisso una combinaz su $ e poi provo tutte le combinaz su 0, poi incremento

deve terminare con $ 0 zeri e $ → va ∞ a sx → $\notin K$

5. $A = \{xxx : x \in \{0,1\}^*, x \neq \varepsilon$ e x inizia con $1\}$

non è CF : $z = 10^n10^n10^n$ ed esco dal linguaggio

$A \cap \{1\}^* \to 1^{3 \cdot n}$ che è REGOLARE (ovvero #1 è multiplo di 3)



6. - $C = \{x : (\forall y \geq x^2)(\varphi_x(y^2) = y)\}$ → ∞ TERM.

$K \leq C$: $\nu(a,b) = \begin{cases} \sqrt{b} & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ → se $a \in K \to \forall b \; \varphi_{g(a)}(b) = \sqrt{b}$, se $b > g(a)^2$ e $f(x) = \sqrt{b}$, $\varphi_{g(a)}(f(x)^2) = f(x) \to g(a) \in C$

se $a \in \bar{K} \to g(a) \notin C$

$\bar{C}$ prod.

$\bar{K} \leq C$: $\nu(a,b) = \begin{cases} \sqrt{b} & M_a(a) \not\downarrow \text{ in} \leq b \text{ passi} \\ b & \end{cases}$ → funzia → C prod.

- $D = \{x : W_x \cap E_x \neq \emptyset\}$ non è $\emptyset$ né $\mathbb{N}$

↳ $\varphi_x(b) = b$

$K \leq D$: $\psi(a,b) = \begin{cases} b & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ $\rightarrow g(a) \in D \rightarrow \bar{D}$ produttivo

$\bar{K} \leq D$: $\psi(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{se } M_a(a) \not\downarrow \text{ in } \leq b \text{ passi} \wedge b \neq 0 \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ $\rightarrow$ se $a \in \bar{K} \rightarrow g(a) \in D$

se $a \in K \rightarrow M_a(a) \downarrow$ in t passi $\rightarrow$ se $t \leq b \rightarrow E_{g(a)} = \emptyset$ $W_{g(a)} = \emptyset \rightarrow \emptyset$

se $t > b \rightarrow E_{g(a)} = \{0\}$ $W_{g(a)} = \{1 \dots b-1\}$

$W_{g(a)} \cap E_{g(a)} = \emptyset$

per capire $W_{g(a)}$ in $\bar{K}$:

es. $t = 3$ $\quad M_a(0) = \emptyset$

$M_a(1) = W_{g(a)} = 1$ e $E_{g(a)} = 0$ $\rightarrow W_{g(a)} = \{1,2\}$ $E_{g(a)} = \emptyset$

$M_a(2) = W_{g(a)} = 2$ $E_{g(a)} = 0$

$M_a(3) = \emptyset$

$M_a(4) = \emptyset$