Prova scritta di Calcolo Scientifico

`Udine, 8 febbraio 2021`

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $realmin = 1/64$, $realmax = 15$, e $Nu = 5$, dove N è il numero degli elementi di $\mathcal{F}$ maggiori di 0 e u è la precisione di macchina.
   - Siano dati $x = (10.\overline{101})_2$ e $y = (11.\overline{101})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = 2\tilde{x} fl(-) \tilde{y} \in \mathcal{F}$.
   - ⋆ Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
   - Determina l'esponente intero minimo e tale che $\tilde{z}2^e \in \mathcal{F}$. Giustifica la risposta.
2. Siano dati una funzione $f(x)$ e un intero $n > 1$.
   - Scrivi il numero di condizionamento di $F(x) = f(x)^n$ e quello di $G(x) = f(x^n)$ in funzione di quello di f e n.
   - Considera $f(x) = e^x$. Per quali valori di x risulta $\mathtt{cond}_F(x) > \mathtt{cond}_G(x)$? Giustifica la risposta.
   - Supponi che $f(x)$ sia approssimata con un errore relativo maggiorato da u. Studia la stabilitá in avanti dell'algoritmo ricorsivo che calcola F con x numero di macchina. Quando $n = 50$, quante cifre decimali potresti avere in meno rispetto a quelle garantite da u.
   - Considera $f(x) = e^x$ e supponi sia approssimata con un errore relativo è maggiorato da u. Studia la stabilitá in avanti dell'algoritmo che calcola G con x numero di macchina.
3. Sia $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - x^2) - 4x + 6$.
   - Disegna il grafico di f. Determina le radici α, β, con $\alpha < \beta$.
   - •• Studia la convergenza del metodo di Newton a α e β. Considera le successioni ottenute con il metodo di Newton con i seguenti valori iniziali
     (a) $x_0 = -2$
     (b) $x_0 = -4$
     (c) $x_0 = -4/3$
     (d) $x_0 = 3$
     (e) $x_0 = 1$
     (f) $x_0 = 1/3$

     Sono convergenti? Se convergenti, convergono ad α o a β? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.

     Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Verifica che α, β sono punti fissi di g e considera il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$.
   - Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente in maniera monotona a α con fattore asintotico di convergenza pari a $\frac{1}{6}$. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - ⋆ Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente ad α con ordine di convergenza quadratico. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - Sia $m = -7$. Studia la convergenza locale a β del metodo. La successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & 3 & 4 \\ -4 & -9 & 4 \\ 2\alpha & 13 & 8 \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quale scelta del parametri α esiste tale fattorizzazione?
   - Studia al variare di α il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo.
   - Sia $\alpha = 4$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - ⋆ Proponi un algoritmo per risolvere il sistema $Ux = b$. Scrivi la sua pseudocodifica e analizzane la complessità computazionale.
5. Sia dati i punti $P_0 = (-1, 18)$, $P_1 = (0, 12)$ e $P_2 = (2, 0)$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i tre punti e $\tilde{p}'(0) = -8$ nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti P_0, P_1, P_2 e $P_3 = (3, 6)$ nel senso dei minimi quadrati.

⋆ Sia data una matrice A di dimensione n che ammette la fattorizzazione LU. Scrivi la pseudocodifica che calcola L e U mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss gestendo in maniera efficiente la memoria.