

COGNOME

NOME

CORSO DI LAUREA

INF TWM

ANNO DI IMMATRICOLAZIONE

MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, PRIMA PARTE

28 gennaio 2013

Scrivere subito il vostro nome, cognome e numero di matricola; tenere il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 3 ore.

NOTA BENE: per il COMPITO TOTALE, rispondere alle prime cinque domande V/F e svolgere i primi due esercizi sia nella prima che nella seconda parte (in totale, 10 domande V/F e 4 esercizi). Non rispondere ad altre domande V/F e non svolgere altri esercizi perché non verranno valutati

DOMANDE V/F

Nota: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ indicano gli insiemi di numeri naturali, interi, razionali, reali e complessi, rispettivamente.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa:

1. La funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è iniettiva.

☒ V ☐ F

2. La funzione $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $f(n, m) = n + m$ è suriettiva.

☒ V ☐ F

3. La relazione E definita sui numeri reali non nulli \mathbb{R}^* da

$$r E s \Leftrightarrow rs > 0$$

è d'equivalenza.

☐ V ☐ F

4. L'equazione

$$z^2 = z$$

ha infinite soluzioni nei numeri complessi.

☒ V ☐ F

5. Ogni numero complesso non nullo ha un inverso moltiplicativo.

☒ V ☐ F

6. Dati due insiemi A, B con n elementi, il numero delle funzioni da A in B è uguale al numero delle funzioni da B ad A .

☐ V ☐ F

7. Esistono funzioni biunivoche da \mathbb{N} a \mathbb{Z} .

☐ V ☐ F

8. Un insieme di n elementi ha n sottoinsiemi di cardinalità $n-1$.

☐ V ☐ F

9. Se a, b sono numeri interi e $a \equiv_5 b$ allora $a \equiv_{15} b$;

☐ V ☐ F

10. se $|A| = n, |B| = m$ allora $|Pow(A) \times Pow(B)| = 2^{n+m}$.

☐ V ☐ F

SECONDA SEZIONE

- ✓ 1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

2. Determinare se 16 è invertibile modulo 35 e in caso affermativo trovare l'inverso moltiplicativo.
- ✓ 3. Trovare la forma trigonometrica del numero complesso $-i + 1$ e il suo inverso moltiplicativo.
Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^2 = -i + 1.$$

4. Sia A l'insieme delle successioni finite non vuote delle cifre 0 e 1,

$$A = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 100, \dots\}.$$

Si consideri la seguente relazione d'equivalenza E sull'insieme A

$$\sigma E \tau \Leftrightarrow \sigma, \tau \text{ contengono lo stesso numero di cifre}$$

(ad esempio, $0 E 1$, $11 E 10$, $1001 E 1101$, etc).

- (a) Determinare la classe d'equivalenza della stringa 0 e della stringa 10.
- (b) La relazione E ha un numero finito o infinito di classi d'equivalenza?
- (c) Se la successione σ ha lunghezza n , quante successioni appartengono alla classe d'equivalenza di σ ?
- (d) Trovare un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su A .