Prova scritta di Calcolo Scientifico
`Udine, 13 settembre 2021`

1. Sia $\mathcal{F} := \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento, che contiene anche i numeri denormalizzati. Siano d la spaziatura dei numeri denormalizzati e u la precisione di macchina di $\mathcal{F}$.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $e_{\max} + e_{\min} = 8$, $realmax = 15$ e $\frac{realmin}{d} = 8$.
   - Quanti sono i numeri di $\mathcal{F}$?
   - Siano dati $x = (1.\overline{011})_2$ e $y = (10.\overline{011})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y}$.
   - Determina u e l'esponente e tale che $\tilde{z}2^e = u$.
   - Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
2. Si vuole calcolare $y = F(x)$ con $F(x) = \sqrt{f(g(x))}$, con f, g funzioni date.
   - Determina la relazione tra il numero di condizionamento di F e quelli di f e g.
   - Studia il condizionamento della funzione $F(x)$ quando $f(x) = e^x, g(x) = x^2$, e $f(x) = x^2, g(x) = e^x$.

   Sia $F(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ con x che varia nel campo di definizione. Confronta la stabilità dei due algoritmi
   - $\sqrt{x^2 - 4}$
   - $\sqrt{(x-2)(x+2)}$

   al variare di x numero di macchina.
3. Sia $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.
   - Disegna il grafico di f. Determina le radici α, β con $\alpha < \beta$.
   - •• Studia la convergenza del metodo di Newton ad α e a β. Considera le successioni ottenute con il metodo di Newton con i seguenti valori iniziali
     (a) $x_0 = 0$
     (b) $x_0 = 5/3$
     (c) $x_0 = 2$
     (d) $x_0 = 7/3$
     (e) $x_0 = 8/3$
     (f) $x_0 = 4$

     Sono convergenti? Se convergenti, convergono ad α o a β? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
   - Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Considera il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$. Studia la convergenza locale ad α del metodo iterativo al punto precedente con $m = 7$. La successione ottenuta con $x_0 = 0$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Determina m in modo che la convergenza locale a β sia superlineare. La successione ottenuta con $x_0 = 2$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica le risposte.
   - Definisci il concetto di ordine di convergenza per una generica successione $x_k \to \alpha$ per $k \to +\infty$.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 2\alpha \\ 8 & 13 & 19 \\ -2\alpha & -7 & -3\alpha \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quale scelta del parametri α esiste tale fattorizzazione?
   - Disegna il grafico della funzione $\alpha \to ||A||_1$.
   - Sia $\alpha = 2$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Scrivi la pseudocodifica dell'algoritmo di eliminazione di Gauss di base per calcolare la fattorizzazione LU di A di dimensione n.
   - Modifica la pseudocodifica al punto precedente per calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.

Sia $f(x) = e^{2x}$. Dati i punti $P_0 = (-1/2, f(-1/2))$, $P_1 = (0, f(0))$, $P_2 = (1/2, f(1/2))$.
- Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
- Scrivi la formula dell'errore $f(x) - p(x)$ e determina una limitazione di $\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p(x)|$.
- Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i tre punti e $P_3 = (1, f(1))$ nella forma di Newton.
- Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti P_0, P_1, P_2 e $P_4 = (2, f(2))$ nel senso dei minimi quadrati.