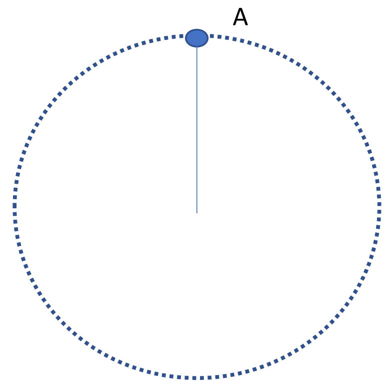
- Esercizio 21.3 Un sasso viene fatto roteare attaccato all'estremità di una fune. La traiettoria che segue è circolare, contenuta in un piano verticale.



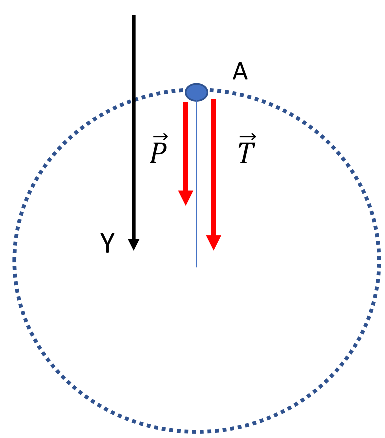
Nel punto A più alto della sua traiettoria ne viene misurata la velocità e contemporaneamente la tensione T1 della fune.

Successivamente, il sasso viene fatto roteare più velocemente, in modo che nel punto A esso abbia velocità doppia del caso precedente. In tali condizioni, la tensione della fune risulta T2.

1. Valutare l'intensità della forza peso esercitata sul sasso

Utilizzare per i calcoli i seguenti valori: T1 = 100. N, T2 = 500. N

In A il sasso risente della forza peso P e della tensione della fune T. Poiché la fune non può applicare forze trasverse, l'accelerazione in A è puramente centripeta.



Se introduciamo un asse Y orientato come in figura, per la seconda legge della dinamica avremo

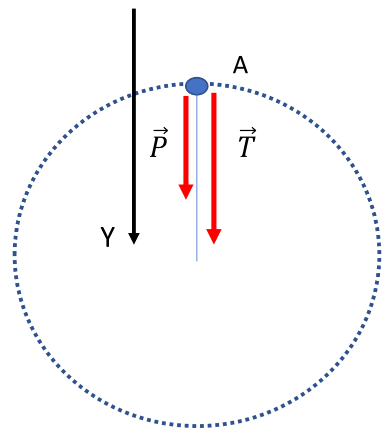
$$P + T = ma_{centr} = m\,v^2/L$$

avendo indicato con m la massa del sasso, v la sua velocità nel punto A e con L la lunghezza della fune.

Il testo propone il confronto tra due situazioni in cui variano la tensione T e la velocità v del sasso, ma rimane ovviamente invariata la sua massa e la lunghezza della fune.

Avremo così

$$\begin{cases} P + T1 = m\, v1^2/L \\ P + T2 = m\, v2^2/L \end{cases}$$



con v2 = 2 v1. Sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} P + T1 = m\dfrac{v1^2}{L} \\ P + T2 = m\dfrac{4\, v1^2}{L} \end{cases}$$

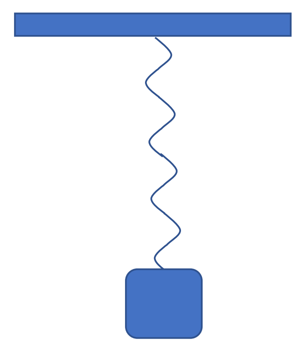
Risolvendo il sistema per P otteniamo

$$P = \frac{T2 \ - 4\, T1}{3}$$

Numericamente P = 33.3 N

Notiamo che questo problema non può essere risolto in maniera lineare (cioè procedendo calcolando successivamente delle quantità fino ad arrivare al valore della grandezza richiesto) ma devono essere scritte un numero sufficiente di relazioni formali tra le grandezze coinvolte prima di poter ottenere una formula risolutiva.

- Esercizio 21.4 Una molla, di costante elastica K, sostiene verticalmente una massa M. Abbassando la massa verticalmente di L rispetto alla posizione di equilibrio e rilasciandola a velocità iniziale nulla, essa compie delle oscillazioni armoniche. Determinare



1. la velocità con cui la massa ripassa per la posizione di equilibrio durante tali oscillazioni
2. il lavoro fatto dalla forza elastica della molla dalla posizione iniziale del moto fino alla posizione di equilibrio

Utilizzare per i calcoli i seguenti valori : K = 1.00 10^3 N/m, M = 1.00 kg, L = 0.10 m

Introduciamo un asse coordinato Y come in figura, con l'origine posta alla quota della massa per la quale la molla risulta a riposo (non deformata).

Le forze agenti sulla massa saranno la forza peso $m\,\vec{g}$ e la tensione della fune $\vec{T}$: la massa sarà in equilibrio alla coordinata y = Δy di figura, per la quale

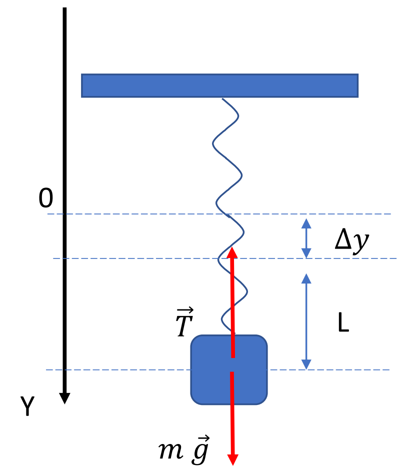
$$\vec{T} + m\,\vec{g} = 0$$

e quindi

$$-K\,\Delta y + mg = 0$$

da cui la posizione di equilibrio si trova a Δy = m g /K.

Precisato ciò procediamo con la risposta alla prima domanda



La massa compirà delle oscillazioni armoniche centrate sulla posizione di equilibrio, con una pulsazione $\omega = \sqrt{K/_M}$. La forza peso qui influisce sul moto soltanto definendo un centro di oscillazione diverso da quello per molla a riposo.

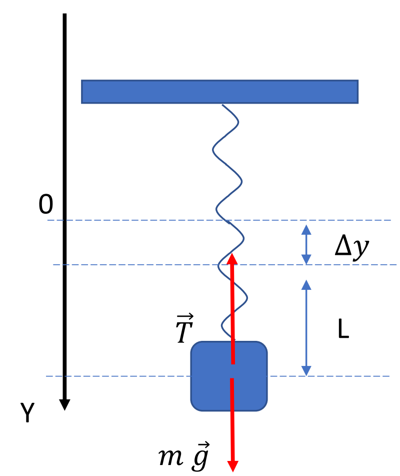
Il moto partendo da quiete da una posizione a distanza L da quella di equilibrio ha una legge oraria ed una dipendenza della velocità dal tempo del tipo

$$\begin{cases} y(t) = \Delta y + L\cos(\omega t) \\ v(t) = -\omega L \sin(\omega t) \end{cases}$$

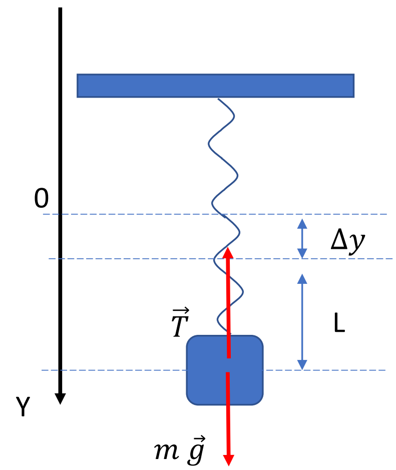
Ne risulta che quando la massa passa per la posizione di equilibrio ha una velocità pari a

$$v = -\omega L$$

Numericamente v =3.16 m/s



Per rispondere alla seconda domanda, notiamo che il lavoro fatto dalla tensione T non è da uno stato di deformazione L ad uno nullo, bensì da L + Δy a Δy (la posizione di equilibrio non è quella di riposo della molla).



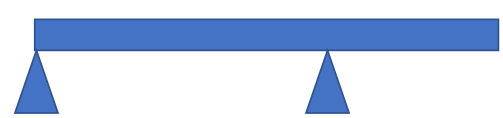
Per il lavoro avremo così

$$\mathcal{L} = -\Delta U = -\left(\frac{1}{2}K(\Delta y)^2 - \frac{1}{2}K\,(L + \Delta y)^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}KL^2 + KL\Delta y = \frac{1}{2}KL^2 + L\,m\,g$$

Numericamente

$$\mathcal{L} = 6.0\,J$$

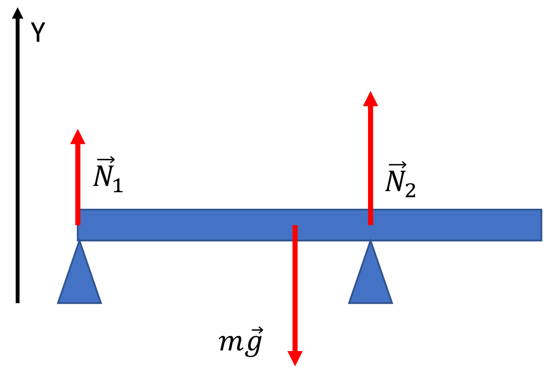
- Esercizio 21.5 Una mensola di massa M è appoggiata a due sostegni, uno ad una estremità della mensola, l'altro ad un terzo della lunghezza della mensola dall'altra estremità (vedere figura).



Determinare l'intensità delle forze normali che si esercitano tra mensola e sostegni.

Utilizzare per i conti i seguenti valori M = 2.00 kg, g = 9.81 m/s^2

Le forze esercitate sulla mensola sono tutte verticali: la forza peso e le due forze normali .



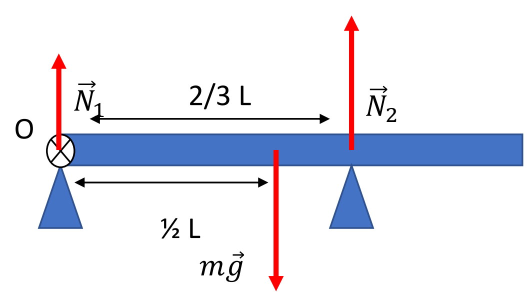
Introdotto un asse coordinato Y come in figura avremo che l'unica condizione di staticità rispetto alle traslazioni non identicamente nulla è quella per gli spostamenti lungo Y

$$N_1 - mg + N_2 = 0$$

Per le rotazioni: se scegliamo un polo nel piano della figura, tutte le forze hanno un momento diretto perpendicolarmente a tale piano.

Ne segue che una sola condizione di staticità per le rotazioni non è identicamente nulla.

Per semplicità nei calcoli, scegliamo il polo in modo da annullare il momento di una delle forze normali: ad esempio, poniamo il polo all'estremità sinistra della mensola. Definiamo L la lunghezza della mensola.



Otteniamo (considerando positivo il verso dei momenti in uscita dal foglio)

$$-\frac{L}{2}\,m\,g + \frac{2L}{3}\,N_2 = 0$$

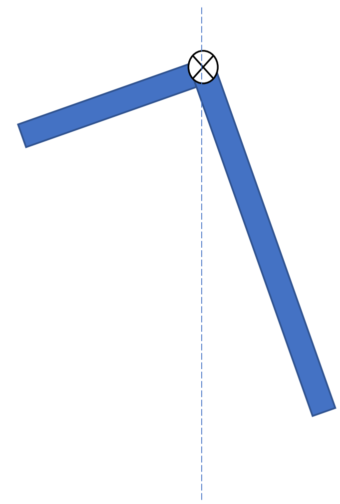
Per cui $$N_2 = \frac{3}{4}\,mg$$

Dal precedente risultato si ottiene inoltre $$N_1 = \frac{1}{4}mg$$

Numericamente $N_1 = 4.9\ N$, $N_2 = 14.7\ N$

- Esercizio 21.6 Una sbarra è piegata ad L, in modo che un braccio sia lungo il doppio dell'altro. Vincolata a ruotare in un piano verticale attorno al punto di piegatura (vedi figura), viene orientata in maniera da essere in equilibrio statico.

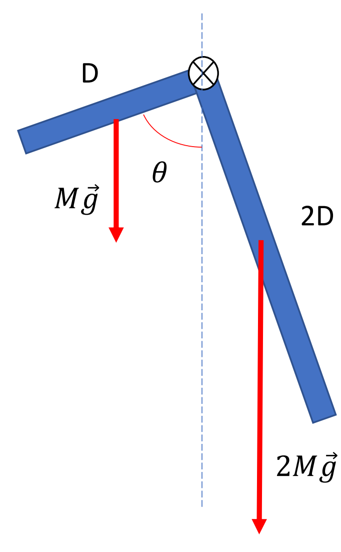
Determinare l'angolo formato dai due bracci rispetto la verticale.



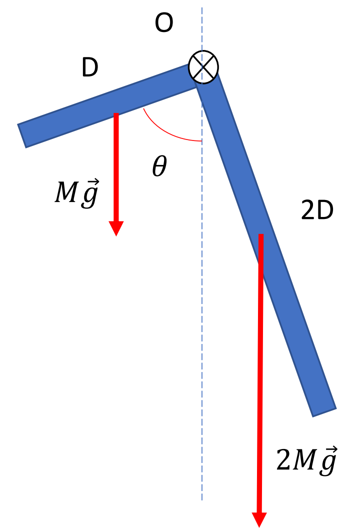
Come in altri esercizi, le condizioni di staticità rispetto alle traslazioni coinvolgono la forza vincolare che il perno di rotazione applica alla sbarra, per cui servono essenzialmente a determinare le componenti di tale forza.

Per trattare la staticità rispetto alle rotazioni, chiamiamo θ l'angolo formato da uno dei due bracci con la verticale, D la sua lunghezza e M la sua massa.

In figura la massa dell'altro braccio risulterà essere il doppio di quella del primo braccio, per proporzione.



Scegliendo come polo il perno di rotazione della sbarra, avremo che il momento della forza vincolare risulterà nullo.



Definendo come positivo per i momenti il verso uscente dal piano verticale, avremo per le due forze peso

$$D/2 \sin(\theta)\, M\, g - D \cos(\theta)\, 2\, M\, g = 0$$

e quindi

$$\mathrm{tg}(\theta) = 4$$

che corrisponde ad un valore

$$\theta = 76.0°$$