Matematica Discreta 1 - 22/01/2021

*Le **Motivazioni** di questo quiz sono solo **uno** dei modi attraverso i quali si arriva alla soluzione, non necessariamente rappresentano né la soluzione migliore né quella più corretta.*

Parte 1 - Limite di Tempo 1h35

Quanto fa $\lfloor -\pi \rfloor - \lceil -\frac{11}{8} \rceil$?

Risposta

-3

Motivazione

$\lfloor -\pi \rfloor = -4$ e $\lceil -\frac{11}{8} \rceil = -1$

Si consideri una relazione R definita su un insieme di persone (ad esempio xRy se x e y hanno lo stesso cognome). Quali tra le seguenti condizioni determinano relazioni che **non** sono equivalenze?

- [ ] x e y hanno la stessa età
- [ ] x e y sono cugini
- [ ] x e y fanno il tifo per la stessa squadra
- [ ] x e y hanno un amico in comune
- [ ] x è più vecchio di y

Risposta

- [ ] x e y hanno la stessa età
- [x] x e y sono cugini
- [ ] x e y fanno il tifo per la stessa squadra
- [x] x e y hanno un amico in comune
- [x] x è più vecchio di y

Motivazione

Una relazione di equivalenza è una relazione in cui valgono le proprietà delle relazioni Riflessiva, Simmetrica e Transitiva.

- x e y sono cugini non vale perchè manca la transitività
    a) se x è cugino di y e y è cugino di z non è detto che x sia cugino di z
- x e y hanno un amico in comune per lo stesso motivo
- x è più vecchio di y per riflessività(a) e simmetria(b)
    a) x non è più vecchio di se stesso
    b) se x è più vecchio di y, y non può essere più vecchio di x

---

Sia $S = \{1, ..., n\}$. Siano a e b elementi diversi di S e siano $A = \{X : (X \subseteq S) \wedge (a \in X)\}$ e $B = \{X : (X \subseteq S) \wedge (b \notin X)\}$. Quale tra le seguenti relazioni è vera?

- ○ $|A| < |B|$ sempre
- ○ $|A| = |B|$ sempre
- ○ $|A| > |B|$ sempre
- ○ nessuna (dipende dai valori di a e b)

Risposta

- ○ $|A| < |B|$ sempre
- ● $|A| = |B|$ sempre
- ○ $|A| > |B|$ sempre
- ○ nessuna (dipende dai valori di a e b)

Motivazione

A è l'insieme dei sottoinsiemi di S contenenti a.

Un sottoinsieme di S contenente a è composto da $\{a\}$ unito ad un qualunque sottoinsieme di $S \setminus \{a\}$, e dunque la cardinalità di A è pari al numero di possibili sottoinsiemi di $S \setminus \{a\}$, ossia 2^{n-1}

B è l'insieme dei sottoinsiemi di S **non** contenenti b.
Un sottoinsieme di S non contenente b è dato da tutti i sottoinsiemi di $S \setminus \{b\}$ e dunque la cardinalità di B è anch'essa 2^{n-1} Quindi $|A| = |B|$ sempre

---

Indichiamo con $\equiv_n$ la relazione di congruenza modulo n. Siano $A_2 := (\mathbb{Z}/\equiv_2)$ e $A_4 := (\mathbb{Z}/\equiv_4)$ rispettivamente gli insiemi quoziente modulo 2 e modulo 4. Quale fra le seguenti affermazioni è vera?

- ○ $A_2 \subset A_4$
- ○ $A_2 \supset A_4$
- ○ $A_2 \cap A_4 \neq \varnothing$
- ○ $A_2 \cap A_4 = \varnothing$

Risposta

- ○ $A_2 \subset A_4$
- ○ $A_2 \supset A_4$
- ○ $A_2 \cap A_4 \neq \varnothing$
- ● $A_2 \cap A_4 = \varnothing$

Motivazione

L'insieme quoziente modulo n è dato dall'insieme delle classi di equivalenza della relazione "modulo n" sull'insieme in questione.

Le classi di equivalenza sull'insieme dato per una generica relazione "modulo n" sono $[0], [1], ..., [n-1]$, quindi l'insieme quoziente su un generico insieme X è $(X/\equiv_n) = \{[0], [1], ..., [n-1]\}$.

Nel nostro caso, $(\mathbb{Z}/\equiv_2) = \{[0], [1]\}$ e $(\mathbb{Z}/\equiv_4) = \{[0], [1], [2], [3]\}$.

Presta attenzione che lo $[0] \in (\mathbb{Z}/\equiv_2)$ e $[0] \in (\mathbb{Z}/\equiv_4)$ sono due insiemi diversi, così come lo sono $[1] \in (\mathbb{Z}/\equiv_2)$ e $[1] \in (\mathbb{Z}/\equiv_4)$

Infatti, per esempio, $(\mathbb{Z}/\equiv_2) \ni [0] = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$ e $(\mathbb{Z}/\equiv_4) \ni [0] = \{0, 4, 8, 12, 16, ...\}$

Quindi $A_2 \cap A_4 = \varnothing$

Sedici persone siedono attorno ad un tavolo circolare. Ognuno stringe la mano a tutti gli altri tranne alla persona seduta direttamente in fronte a lui. Quante strette di mano ci sono state in tutto?

Risposta

112

Motivazione

Col metodo di inclusione ed esclusione otteniamo $\binom{16}{2} = 120$ strette di mano totali, a cui togliere le 8 delle persone sedute una di fronte all'altra

---

In quanti modi si possono scegliere un presidente ed un vicepresidente da un gruppo di 30 candidati?

Risposta

870

Motivazione

Si hanno 30 modi per scegliere il presidente e 29 per scegliere il vicepresidente, quindi $30 \times 29 = 870$

Il principio di Inclusione/Esclusione...

- ☐ si applica per calcolare la cardinalità dell'insieme di altri insiemi
- ☐ si può utilizzare per calcolare quanti sono gli spiazzamenti di n elementi
- ☐ si applica per calcolare la cardinalità di un insieme a partire dalla cardinalità di alcuni sottoinsiemi
- ☐ non si può applicare ad un insieme i cui sottoinsiemi non siano disgiunti

Risposta

- ☐ si applica per calcolare la cardinalità dell'insieme di altri insiemi
- ■ si può utilizzare per calcolare quanti sono gli spiazzamenti di n elementi
- ■ si applica per calcolare la cardinalità di un insieme a partire dalla cardinalità di alcuni sottoinsiemi
- ☐ non si può applicare ad un insieme i cui sottoinsiemi non siano disgiunti

Motivazione

- ☐ (No)
- ■ (Ricordando il significato di spiazzamento, sì perché posso includere ed escludere proprietà combinate di presenza o meno dei numeri nelle posizioni corrette)
- ■ (Sostanzialmente la definizione del principio di inclusione/esclusione)
- ☐ (Si applica specialmente quando i sottoinsiemi sono disgiunti)

Siano R e R' due equivalenze definite su uno stesso insieme S. Supponiamo che per ogni coppia x, y di elementi di S si abbia $xRy \Rightarrow xR'y$. L'insieme quoziente S/R contiene l'insieme quoziente S/R'?

Risposta

Falso

Motivazione

Portiamo un controesempio: $R = congruenza\ modulo\ 4$ e $R' = congruenza\ modulo\ 2$

Si può verificare che in questo caso $xRy \Rightarrow xR'y$ in quanto se due numeri sono congruenti modulo 4, sono congruenti anche modulo 2.

Gli insiemi quoziente sono $(S \setminus R) = \{[0], [1], [2], [3]\}$ e $(S \setminus R') = \{[0], [1]\}$.

Si legga la motivazione alla domanda "Indichiamo con $\equiv_n$ la relazione di congruenza modulo n. Siano $A_2 := (\mathbb{Z}/\equiv_2)$ e $A_4 := (\mathbb{Z}/\equiv_4)$..." in cui si dimostra la diversità dei due insiemi e quindi falsità dell'affermazione

---

$1 = 0$ implica $1 = 2$?

Risposta

Vero

Motivazione

$1 = 0$ è falso e falso implica qualsiasi cosa, sia vero sia falso.

Sia A un insieme non vuoto. Ogni sottoinsieme di A di cardinalità 3 contiene 3 sottoinsiemi di A di cardinalità 2. In base a questa osservazione, possiamo concludere che A ha più sottoinsiemi di cardinalità 2 che di cardinalità 3?

Risposta

Falso

Motivazione

Ogni insieme di 3 elementi ha 3 sottoinsiemi di cardinalità 2, infatti $\binom{3}{2} = 3$.
Quindi qualsiasi sottoinsieme di 3 elementi di $A \neq \varnothing$ avrà 3 sottoinsiemi di cardinalità 2 e quindi non si può sapere. (**La risposta può non essere corretta...**)

Esistono relazioni di equivalenza riflessive ma non simmetriche?

Risposta

Falso

Motivazione

Per definizione una relazione d'equivalenza è Riflessiva, Simmetrica e Transitiva

Sul pianeta Zorg la gravità su una palla funziona in modo strano:

- se cade in verticale da un'altezza $h > 500$, rimbalza e sale fino all'altezza $h-2$
- se cade in verticale da un'altezza $1 < h \leq 500$, rimbalza e sale fino all'altezza $h-1$
- se cade in verticale da un'altezza $h \leq 1$, la palla **non** rimbalza

Supponiamo di lasciar cadere una palla da un'altezza di 1000 ed aspettare finché la palla non si ferma al suolo (quindi ha smesso di rimbalzare). Quanta strada avrà percorso in totale la palla (comprensiva di tutti gli spostamenti)?

Risposta

625000

Motivazione

La serie di numeri da sommare è quindi la seguente, in cui i numeri colorati di rosso rappresentano la strada da percorrere in caduta mentre quelli in blu rappresentano la strada da percorrere in risalita:

$$1000 + 998 + 998 + \ldots + 502 + 502 + 500 + 500 + 499 + 499 + \ldots + 2 + 2 + 1 + 1$$

Ossia ogni volta che si tocca terra si deve viaggiare fino ad una certa altezza, per poi ricadere al suolo percorrendo la stessa identica distanza, prima di poter procedere al prossimo rimbalzo.

Possiamo quindi definire due sommatorie $2\sum_{h=250}^{499} 2h$ e $2\sum_{h=1}^{499} h$, che rappresentano rispettivamente tutte le altezze raggiunte fino a quota 500 compresa e tutte le quote raggiunte dai 500 in giù i cui valori andranno sommati all'ultimo numero rimasto escluso, ossia 1000.

Possiamo ora comporre l'espressione che se risolta da il risultato atteso, che è:

$$1000 + 2\sum_{h=250}^{499} 2h + 2\sum_{h=1}^{499} h.$$

Per risolverla si può fare:

$$1000 + 2\sum_{h=250}^{499} 2h + 2\sum_{h=1}^{499} h = 1000 + 4\sum_{h=250}^{499} h + 2\sum_{h=1}^{249} h + 2\sum_{h=250}^{499} h = 1000 + 6\sum_{h=250}^{499} h + 2\sum_{h=1}^{249} h =$$

$$= 1000 + 6\sum_{h=1}^{250}(h+249) + 2\sum_{h=1}^{249} h = 1000 + 6\sum_{h=1}^{250} h + 6\sum_{h=1}^{250} 249 + 2\sum_{h=1}^{250} h - 2 \times 250 =$$

$$= 1000 + 8\sum_{h=1}^{250} h + 6 \times 250 \times 249 - 250 = 1000 + 8\frac{250 \times 251}{2} + 6 \times 250 \times 249 - 2 \times 250$$

$$= 1000 + 251000 + 373500 - 500 = 625000$$

Qual è l’ordine di priorità degli operatori booleani?

- ○ $\wedge$ poi $\neg$ poi $\vee$
- ○ $\wedge$ e $\neg$ hanno la stessa priorità, poi $\vee$
- ○ $\wedge$ poi $\vee$ poi $\neg$
- ○ $\neg$ poi $\wedge$ poi $\vee$
- ○ hanno tutti la stessa priorità

Risposta

- ○ $\wedge$ poi $\neg$ poi $\vee$
- ○ $\wedge$ e $\neg$ hanno la stessa priorità, poi $\vee$
- ○ $\wedge$ poi $\vee$ poi $\neg$
- ● $\neg$ poi $\wedge$ poi $\vee$
- ○ hanno tutti la stessa priorità

Motivazione

Per definizione, l’ordine degli operatori booleani è $\neg$ poi $\wedge$ poi $\vee$

Sia P il predicato $A \Rightarrow B$. In una dimostrazione per assurdo di P si parte immaginando che A sia falso e si dimostra che in questo caso anche B è falso. Questa descrizione è corretta?

Risposta

Falso

Motivazione

Si deve dimostrare che B è assurdo.

Se x è congruo a y modulo 7 allora $x+3$ è congruo a $y-4$ (sempre modulo 7)?

Risposta

Vero

Motivazione

Le classi di equivalenza di “modulo 7” sono $[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6]$.

Immaginando che due numeri x e y siano entrambi congruenti modulo 7 significa sostanzialmente identificare a quale delle 7 classi entrambi appartengono.

Immaginiamo che si trovino entrambi nella classe $[4]$. Allora

- $y-4$ apparterrà alla classe 4 volte più a **sinistra(-)** di y, quindi:
  - $[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6] \rightarrow [0],[1],[2],[3],[4],[5],[6]$
  - Nota che la cifra in rosso acceso si è spostata a sinistra di 4
- $x+3$ apparterrà alla classe 3 volte più a **destra(+)** di x, quindi:
  - $[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6] \rightarrow [0],[1],[2],[3],[4],[5],[6]$
  - Nota che la cifra in rosso acceso si è spostata a destra di 3

(La dimostrazione potrebbe essere fatta in modo algebrico, la trovo più noiosa e meno intuitiva)

Parte 2 - Limite tempo 45 min

Si consideri l'equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ con $x_1, \ldots, x_5$ variabili intere non-negative. Quante sono le soluzioni dell'equazione per le quali si ha $x_1 \neq x_5$?

Risposta

1568

Motivazione

Applicando Inclusione/Esclusione possiamo ottenere il numero di soluzioni come sottrazione tra il numero di totale di risultati ed il numero di casi con $x_1 \neq x_5$, ossia, indicando per convenzione con $|S|$ il numero totale di risultati all'espressione e con $|A|$ il numero di risultati aventi $x_1 = x_5$, $risultati = |S| - |A|$

Calcoliamo quindi $|S| = \binom{12+5-1}{5-1} = \binom{12+4}{4} = \binom{16}{4} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2} = 1820$

Notiamo ora che se $x_1 \neq x_5$, allora l'espressione data può essere riscritta come $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1 = 12$ e quindi $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$

A questo punto possiamo notare che x_2, x_3, x_4 sono:

a) o tutti quanti pari
b) o due di loro sono dispari

Quindi sommando questi due casi ho il numero totale di casi da sottrarre ad $|S|$.

a) Sostituiamo x_2, x_3, x_4 con $2y_2, 2y_3, 2y_4$ ottenendo dunque l'espressione
   $2x_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 12 \Leftrightarrow 2(x_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 12 \Leftrightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$
   Risolviamo ora l'equazione: $\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$
b) Siccome si possono scegliere $\binom{3}{2} = 3$ diverse coppie di numeri che devono essere dispari, allora calcolare la soluzione di un'equazione e moltiplicarla per 3 mi da il risultato completo.
   Sostituiamo x_2, x_3 con $2y_2, 2y_3$ ottenendo dunque l'espressione
   $2x_1 + 2y_2 + 1 + 2y_3 + 1 + 2y_4 = 12 \Leftrightarrow 2(x_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 10 \Leftrightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$
   Risolviamo ora l'equazione: $\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$
   Moltiplichiamo questo risultato per 3 ed otteniamo quindi $3 \times 56 = 168$ casi totali in cui 2 delle tre variabili sono dispari.

A questo punto sottraendo i risultati totali coi due valori appena calcolati otteniamo il risultato richiesto: $1820 - 84 - 168 = 1568$