Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

# CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

## Esercizi per la prova scritta – 28 giugno 2022

**1.** Un'urna contiene 5 palline nere e 95 bianche. Una seconda urna contiene 20 palline nere e 80 bianche. Una terza urna contiene 40 palline nere e 60 bianche. Una quarta urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le quattro con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, cinque palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 20 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, una nera e quattro bianche.

**2.** Sia $X$ una variabile casuale con supporto $S_X = [0, 1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = cx^2$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di $X$, determinando il valore della costante di normalizzazione $c$. Si calcoli la funzione di ripartizione di $X$, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e varianza di $X$. Sia infine $T = 4X$. Si ottengano supporto e funzione di ripartizione di $T$; si calcoli $P(T = 1)$.

**3.** Una apparecchiatura ha tre componenti che si possono guastare. La vita operativa $X_i$ $(i = 1, 2, 3)$ di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale, $X_1$ con valore atteso pari a 6 anni, $X_2$ con valore atteso pari a 9 anni, $X_3$ con valore atteso pari a 12 anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre. Quando almeno una delle tre è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Sia $T$ il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima $T$ come funzione di $X_1$, $X_2$, $X_3$. Si dica qual è il supporto di $T$. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di $T$, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il terzo quartile di $T$ (è il quantile-$p$ con $p = 75/100$) e la probabilità condizionale $P(3 \leq T \leq 6 | T > 3)$.

**4.** Sia $Y$ una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = exp(0.5t^2 - t)$, dove $exp(z) = e^z$. Siano poi $Y_1, Y_2$ copie indipendenti di $Y$ e si ponga $W = Y_1 - Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di $W$. Si ottengano valore atteso e varianza di $W$.

**5.** La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(1, 1)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(1, 1/n)$. Sia $n = 16$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{16} > 1.5)$ e $P(\bar{Y}_{16} < 0.75)$. Si ottenga infine il novantesimo percentile di $\bar{Y}_{16}$ (è il quantile-$p$ con $p = 90/100$).

**6.** Il responsabile qualità di una fabbrica vuole valutare la proporzione $p$ di pezzi prodotti che non sono idonei alla vendita. Viene estratto dalla produzione del giorno un campione casuale di 100 pezzi e si osserva che 5 di essi non sono idonei. Si definisca un modello statistico parametrico utile per descrivere l'esperimento effettuato. Si reperisca uno stimatore per $p$, si determini l'associato *standard error*, e si calcolino le corrispondenti stime.

*Buon lavoro!*