Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Prova scritta del 28 gennaio 2015

1. Un'urna contiene 5 palline nere e 95 bianche. Una seconda urna contiene 40 palline nere e 60 bianche. Una terza urna contiene 80 palline nere e 20 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le tre con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, cinque palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 5 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, una nera e quattro bianche.

2. Una apparecchiatura dispone di tre resistenze. La vita operativa X_i ($i = 1, 2, 3$) di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a 9 anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre resistenze. Quando almeno una delle tre resistenze è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Si supponga, per semplicità, che le resistenze siano le uniche componenti soggette a guasto. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2, X_3. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il primo decile di T (è il quantile-p con $p = 1/10$) e la probabilità condizionale $P(T > 6|T > 3)$.

3. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [-1, 1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = k$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante k. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottenga la mediana di X. Sia infine $T = 1 + X$; si reperisca il supporto di T e si calcoli $P(T > 1.5)$.

4. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(2, 1/2)$ (legge binomiale con indice $n = 2$ e parametro $p = 1/2$) e distribuzioni condizionate uniformi discrete $Y|X = x \sim Ud(0, 1)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Si calcoli infine $P(XY = 0)$.

5. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = exp(e^t - 1)$, dove $exp(z) = e^z$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $W = Y_1 + Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di W. Si ottengano valore atteso e varianza di W.

6. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(5, 25)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(5, 25/n)$. Sia $n = 100$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{100} > 5.5)$ e $P(\bar{Y}_{100} < 4.0)$. Si ottenga infine il novantesimo percentile di $\bar{Y}_{100}$ (è il quantile-p con $p = 90/100$).

Buon lavoro!