ESAME 26 giugno 2020

1. Si dimostri che le due espr. reg. sono EQUIVALENTI

$$(r+s)\cdot t = r\cdot t + s\cdot t$$

Dimostro che $L((r+s)\cdot t) = L(r\cdot t + s\cdot t)$

sia $x \in L((r+s)\cdot t)$; $x = uv$ con $u \in L(r+s)$ e $v \in L(t)$
- 1. $u \in L(r)$ e $v \in L(t) \Rightarrow uv \in L(rt)$
- 2. $u \in L(s)$ e $v \in L(t) \Rightarrow uv \in L(st)$

$\Rightarrow uv \in L(rt+st)$

Dimostro che $L(r\cdot t + s\cdot t) = L((r+s)\cdot t)$

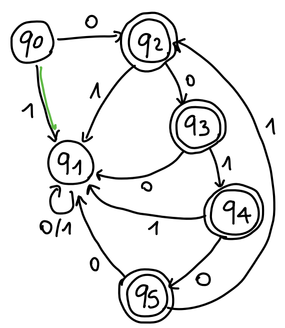
sia $x \in L(rt+st)$; $x = uv$ con $uv \in L(rt+st)$
- 1. $uv \in L(rt) \Rightarrow u \in L(r)$ e $v \in L(t)$
- 2. $uv \in L(st) \Rightarrow u \in L(s)$ e $v \in L(t)$

$\Rightarrow uv \in L((r+s)\cdot t)$

2. DFA (q_0 iniz, $F = \{q_2, q_3, q_4, q_5\}$)

	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1	q_1	q_1
q_2	q_3	q_1
q_3	q_1	q_4
q_4	q_5	q_1
q_5	q_1	q_2

Scrivi le classi delle relazioni R_M e R_L associate.



- R_M ha 5 classi di eq: i linguaggi accettati da ogni stato sono le classi di equiv.

INTUIZIONE

$L(q_0) = \{\varepsilon\}$

$L(q_1) = \{(1 + 0(0101)^*1 + 0(0101)^*00 + 0(0101)^*011 + 0(0101)^*0100)(0+1)^*\}$

$L(q_2) = \{0(0101)^*\}$

$L(q_3) =$ *comprende anche solo ε $\Rightarrow \{0(0101)^*0\}$

$L(q_4) = \{0(0101)^*01\}$

$L(q_5) = \{0(0101)^*010\}$

SISTEMA

$L(q_0) = \{\varepsilon\}$

$L(q_1) = \{(Q_0\cdot 1 + Q_2\cdot 1 + Q_3\cdot 0 + Q_4\cdot 1 + Q_5\cdot 0)(0+1)^*\} = \dots$

$L(q_2) = \{Q_0\cdot 0 + Q_5\cdot 1\} = \{0 + ((Q_3\cdot 1)\cdot 0)\cdot 1\} = \{0 + (((Q_2\cdot 0)1)0)1\} = \{0 + (Q_2\cdot 0101)\}$

$\Rightarrow Q_2 = 0 + (Q_2\cdot 0101) \Rightarrow Q_2 = 0(0101)^* \to$ è $L(q_2)$

$L(q_3) = \{Q_2\cdot 0\} = \{0(0101)^*0\}$

$L(q_4) = \{Q_3\cdot 1\} = \{0(0101)^*01\}$

$L(q_5) = \{Q_4\cdot 0\} = \{(Q_3\cdot 1)0\} = \{0(0101)^*010\}$

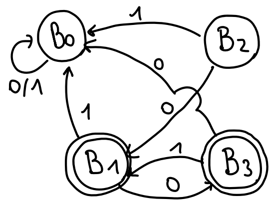
- R_L: bisogna minimizzare il DFA, raggruppo in FINALI e NON

	B_0 SPLITTARE		B_1 SPLIT			SPLIT
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$B_1^{q_2}$	$B_0^{q_1}$	$B_1^{q_3}$	$B_0^{q_1}$	$B_1^{q_5}$	$B_0^{q_1}$
1	$B_0^{q_1}$	$B_0^{q_1}$	$B_0^{q_1}$	$B_1^{q_4}$	$B_0^{q_1}$	$B_1^{q_2}$

SPLIT SPLIT

	B_2	B_0	B_1		B_3	
	q_0	q_1	q_2	q_4	q_5	q_3
0	$B_1^{q_2}$	$B_0^{q_1}$	$B_3^{q_3}$	$B_3^{q_5}$	$B_0^{q_1}$	$B_0^{q_1}$
1	$B_0^{q_1}$	$B_0^{q_1}$	$B_0^{q_1}$	$B_0^{q_1}$	$B_1^{q_2}$	$B_1^{q_4}$

$\Rightarrow$



Le classi di RL sono i linguaggi accettati dai singoli stati

$\varepsilon, 01\ 0101\ 01 \dots$

$L(B_1) = \{ 0(01)^* \}$

$L(B_2) = \{ \varepsilon \}$

$L(B_3) = \{ 0(01)^* 0 \}$

$L(B_0) = \{ (0(01)^* 1) + 1 + 0(01)^* 00)(0+1)^*$

da B_1 — da B_2 — da B_3 — da B_0

$= \{ (1 + 0(01)^* 1)(0+1)^* \}$

3. per dimostrare che è REGOLARE → provo a fare il DFA

" che è CF ⇒ PUMP. LEMMA per i regolari (fai vedere che non è regolare e trovi una grammatica)

" che non è CF ⇒ PUMP. LEMMA per i CF (" " ")

$x_1 \dots x_n$ è una concatenaz. di stringhe

stringa stringa

trasformo $\frac{1}{12}$ in binario $\frac{1}{12}$ e prendo il prefisso di lunghezza i

$,(00\overline{01})_2$

$\frac{1}{12}$	2
$\frac{1}{6}$	0
$\frac{1}{3}$	0
$\frac{2}{3}$	0
$\frac{1}{3}$	1
$\frac{2}{3}$	0
$\frac{1}{3}$	1

$L = \{ \varepsilon, 0, 00, 000, 0001, 00010, 00010, 000101 \dots \}$

i singoli A_i sono REGOLARI (prefissi) perchè sono esprimibili attraverso un'espr. regolare

A_0 accetta ε

A_1 accetta 0

A_2 accetta 00

⋮

0001 lo accetta A_4

00010 lo accetta A_5 → sottostringa (prefisso) di lunghezza 5

⋮

$\Rightarrow L(A_4) = \{ (0001)^{+} \} = \{ 0001, 00010001, \dots \}$ ha espr. reg. $e(A_i) = (0001)^+$ allora è REGOLARE

$L(A_0) = \{\varepsilon\}$
$L(A_1) = \{0^+\}$
$L(A_2) = \{(00)^+\}$
$L(A_3) = \{(000)^+\}$
$L(A_4) = \{(0001)^+\}$
$L(A_5) = \{(00010)^+\}$
...
$L(A) = \{ 0^*, (00(01)^a)^*, (00(01)^a 0)^* \}$ → comprende A_0, A_1, A_2, A_3

es. $0^n 1^n$ non è regolare perchè non posso esprimerlo con REGEX o DFA a causa della mancanza di MEMORIA

Mentre $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ (UNIONE INFINITA) non è REG perchè non trovo regex

Dimostro che non è reg → PUMP LEMMA e trovo una grammatica CF
poi se non trovo provo PUMP LEMMA dei CF

posso fare anche direttamente quello dei CF e se non è CF allora non è neanche regolare

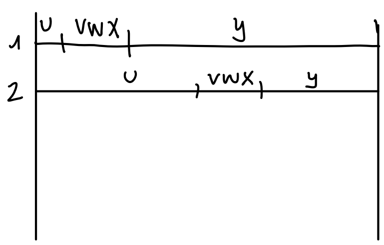
- PUMP. LEMMA CF → $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists z (\dots)$

$$\begin{cases} z = uvw \\ |uv| \leq n \\ |v| > 0 \\ \forall i \;\; uv^i w \in L \end{cases}$$

$z =$

$z = 00(01)^m 00(01)^m 00(01)^m$ → $(00(01)^m)^3$

$v = 0^{m-a}$ $\quad w = (01)^a$ $\quad a < m$
$x = 1^{m-a}$



1. $i = 0$ → $uv^0wx^0y = 00(01)^a 00(01)^m 00(01)^m \notin L$

→ ma non agiamo sul linguaggio

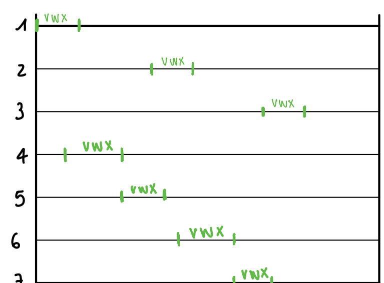
---

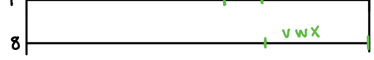
ci sono 2m simboli

$z = 00(01)^m 00(01)^m 00(01)^m$ (2m, 2m, 2m)

uv^iwx^iy $\quad |vwx| \leq m$
$\quad |vx| \geq 1$

z = 3 ripetizioni = K K K $\quad |K| = |K| = |K|$
e se pompi /spompi non hanno più le stesse cardinalità





4. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \{x : \varphi_x(\lfloor \tfrac{x}{2} \rfloor) = x!\} \\
C_1 &= \{\langle x, y\rangle : W_x \cap E_y = \emptyset\} \\
D_1 &= \{x : (\exists y > x)(\varphi_y(x) = 0)\}
\end{aligned}
$$

$B_1 = \{x : \varphi_x(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) = x!\} \longrightarrow$ R.E.

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B_1 \ (\varphi_x(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor)\downarrow \wedge \varphi_x(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) = x!) \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ è semi-caratt. di B_1

riduz. $K \leq B_1$

se usavo a! ero legato all'indice e $\varphi_{g(a)}(b) = a!$

$\psi(a,b) = \begin{cases} 2b! & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ $\qquad \varphi_{g(a)}\left(\frac{g(a)}{2}\right) = g(a)!$ $\forall b$

per SMN $\psi(a,b) = \varphi_{g(a)}$ $\qquad h(a) = a!$

$a \in K \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = 2b! \rightarrow b = \lfloor \frac{g(a)}{2} \rfloor \rightarrow \varphi_{g(a)}(\lfloor \frac{g(a)}{2} \rfloor) = g(a)! \rightarrow g(a) \in B_1$

$a \notin K \rightarrow \varphi_{g(a)}\uparrow \rightarrow g(a) \notin B_1$

$\Rightarrow B_1$ è R.E. COMPLETO $\rightarrow B_1$ è CREATIVO

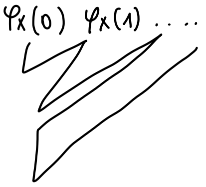
$\overline{B_1} = \neg B_1 = \neg \varphi_x(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) = x! = \overline{B_1} = \{x : \varphi_x(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) \neq x!\}$ $\quad \varphi_x(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor)\uparrow \vee \varphi_x(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor) \neq x! \longrightarrow \infty$ NON TERMINAZ.

$C_1 = \{<x,y> : W_x \cap E_y = \emptyset\} \rightarrow$ R.E. e usi il DOVE TAIL sia per W_x che per E_y

$\varphi_6(x)\uparrow = W_6 = \emptyset$

$\varphi_5(6)\uparrow = W_5 = \{\ldots$

$\varphi_x(0)\ \varphi_x(1)\ \ldots\ldots \longrightarrow W_x$ e E_x



$\varphi_x(b) = a \qquad \varphi_y(c) = b$

$f(x) = \begin{cases} 1 \\ \uparrow \end{cases}$ $\quad W_x \cap E_y \neq \emptyset \vee \varphi_x($

SMN $\rightarrow \overline{C_1}$ $\forall b$

ESAME 23 LUGLIO 2020

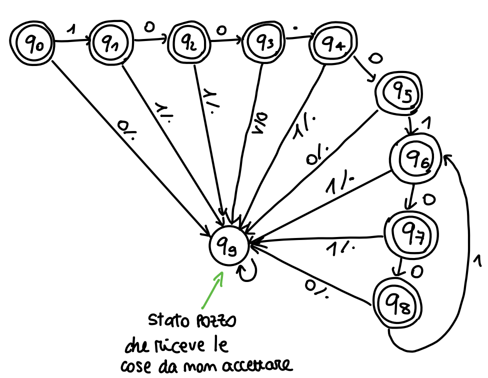
es. 5: $A = \{x \in \{0,1,'.'\} : x$ è un PREFISSO dell'ESP. BINARIA di $30/7\}$
↳ deve riconoscere anche ε, 1, 100, ...

esp. binaria: $4 + \frac{2}{7}$ (guardo in potenze di 2)

$\frac{2}{7}$	2
$\frac{4}{7}$	0
$\frac{1}{7}$	1
$\frac{2}{7}$	0
$\frac{4}{7}$	0
$\frac{1}{7}$	1

$(\underbrace{100}_{4}.\underbrace{01\overline{001}}_{\frac{2}{7}})_2$

Faccio il DFA:



⇒ è regolare perché ho fatto il DFA

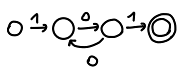
per $\sqrt{18}$ è IRRAZ → è IRREGOLARE

ESAME 15 settembre 2020

5. A è regolare o cf?

$A = \{10^n1 : n$ DISPARI oppure n è POTENZA di $2\}$

n DISPARI → NFA:



→ non è DFA perché per ogni stato dovrei avere un "percorso" per ogni carattere dell'alfabeto

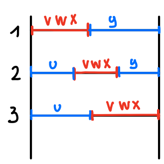
⇒ è REGOLARE

ma n pot. di 2 → no NFA

⇒ PUMP. LEMMA per i CF: sappiamo già che n DISPARI è REG, provo con n potenza di 2

$z = 1\,0^{2^n}\,1$ $\qquad z = uv^iwx^iy$ $\qquad |vwx| \le n$

$|vx| \ge 1$ $\qquad a < n$



caso 1: $i=0$ $(u=\varepsilon)$ $v^0wx^0y \Rightarrow 0^{2^n-a}1$

caso 2: $i=0$ $uv^0wx^0y \Rightarrow 10^{2^n-a}1$

caso 3: $i=0$ $uv^0wx^0 \Rightarrow 10^{2^n-a}$

in generale $1\,0^{\overbrace{ia}^{v^i}+\overbrace{ib}^{x^i}+\overbrace{2^n-a-b}^{w}}\,1$