**Esercitazione CS**

`Udine, 26 maggio 2022`

1. Sia $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.
   - Disegna il grafico di $f$. Localizza le due radici $\alpha, \beta$, con $\alpha < \beta$.
   - Studia la convergenza ad $\alpha$ del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = -1$ è convergente ad $\alpha$? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - Studia la convergenza a $\beta$ del metodo di Newton. La successione ottenuta con $x_0 = 2$ è convergente a $\beta$? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.

   Sia $g(x) = e^{x-1} - 1$. Verifica che $\alpha, \beta$ sono punti fissi di $g$.
   - Studia la convergenza ad $\alpha$ del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i), i = 0, 1, \ldots$. La successione ottenuta con $x_0 = -1$ è convergente ad $\alpha$? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - Studia la convergenza a $\beta$ del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i), i = 0, 1, \ldots$. La successione ottenuta con $x_0 = 2$ è convergente a $\beta$? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.

   Sia $h(x) = log(x + 1) + 1,\ x > -1$. Verifica che $\alpha, \beta$ sono punti fissi di $h$.
   - Studia la convergenza ad $\alpha$ del metodo iterativo $x_{i+1} = h(x_i), i = 0, 1, \ldots$ La successione ottenuta con $x_0 = 0$ è convergente ad $\alpha$? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - Studia la convergenza a $\beta$ del metodo iterativo $x_{i+1} = h(x_i), i = 0, 1, \ldots$. La successione ottenuta con $x_0 = 2$ è convergente a $\beta$? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - Definisci il concetto di ordine di convergenza.
2. La funzione $f(x) = e^x - 1 - 2x$ è tale che $f(0) = 0$ e possiede un'ulteriore zero $\alpha \neq 0$.
3. Disegna il grafico di $f$. Localizza $\alpha$.
4. Studia la convergenza del metodo di Newton, determinando tutti i valori $x_0$ che generano una successione convergente ad $\alpha$ e determina l'ordine di convergenza.
5. Studia la convergenza del metodo di iterazione funzionale $x_{k+1} = \frac{e^{x_k} - 1}{2}$, $k = 0, 1, \ldots,$ determinando gli eventuali valori $x_0$ che generano una successione convergente ad $\alpha$.
6. Studia la convergenza del metodo di iterazione funzionale $x_{k+1} = \log(1 + 2x_k),\ k = 0, 1, \ldots,$ determinando gli eventuali valori $x_0$ che generano una successione convergente ad $\alpha$.
7. Quale metodo sceglieresti per approssimare $\alpha$? Giustifica la risposta.
8. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   - Calcola $\|A\|_1$ al variare del parametro $a$.
   - Calcola la fattorizzazione $LU$ di $A$.
   - Illustra la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perchè si applica?
   - Per quali valori del parametro $a$ il metodo di Gauss è applicabile alla matrice $A$ senza scambi di righe?
   - Sia $a = \frac{1}{4}$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Sia $a = 4$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.

   Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ a & 3 & 1 + a \\ 0 & -3 & -a \end{pmatrix}.$$
   - Calcola $\|A\|_\infty$ al variare del parametro $a$.
   - Calcola la fattorizzazione $LU$ di $A$, determinando per quali valori di $a$ ciò é possibile.
   - Calcola il determinante di $A$ e determina per quali valori di $a$ la matrice è singolare.
   - Illustra la strategia del pivot parziale per il metodo di Gauss. Perchè si applica?
   - Per quali valori del parametro $a$ la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale fornisce $P = I$ ($I$ matrice identità)?
   - Sia $a = -1/3$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Sia $a = 3$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
9. Sia nota la fattorizzazione $LU$ di una matrice $A \in R^{n \times n}$ non singolare, i.e. $A = LU$.
   - Dati due vettori $b, c \in R^n$, proponi un algoritmo efficiente per calcolare $y = c^t A^{-1} b$.
   - Analizza il costo computazionale dell'algoritmo proposto.
   - Come cambia l'algoritmo, se è nota la fattorizzazione $PA = LU$?