25.6

Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Sei esercizi – 14 settembre 2020

(i frequentanti dell'a.a. 15/16 o precedenti omettono l'esercizio 6)

Nel seguito a, b, c sono, rispettivamente, la terza, la quarta, la quinta cifra del Tuo numero di matricola; ad esempio, matricola 142431 $\Longrightarrow a = 2,\ b = 4,\ c = 3$

1. Un'urna contiene $10 + a$ palline nere e $90 - a$ bianche. Una seconda urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Una terza urna contiene 90 palline nere e 10 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le tre con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, sei palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 90 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, cinque nere e una bianca.

2. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [1, b+2]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = kx$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante di normalizzazione k. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e varianza di X. Sia infine $T = X^3$. Si ottengano il supporto e la funzione di ripartizione di T e si calcoli $P(T = 2)$.

3. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(1, 1/4)$ (legge binomiale con indice $n = 1$ e parametro $p = 1/4$) e distribuzioni condizionate binomiali $Y|X = x \sim Bi(1, 1/3)$, per $x \in S_x$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Si calcoli infine $P(X = Y)$.

4. Una apparecchiatura ha solo due componenti che si possono guastare. La vita operativa X_i ($i = 1, 2$) di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a c+3 anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento dell'altra. Quando almeno una delle due è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il settimo decile di T (è il quantile-p con $p = 7/10$) e la probabilità condizionale $P(T > 4|T > 2)$.

5. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(a, 4)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(a, 4/n)$. Sia $n = 4$. Si calcolino $P(\bar{Y}_4 > a + 1)$ e $P(\bar{Y}_4 < a - 1.5)$. Si ottenga infine il novantacinquesimo percentile di $\bar{Y}_4$ (è il quantile-p con $p = 95/100$).

6. Dato un campione $y_1, \ldots, y_n$, realizzazione di variabili casuali $Y_1, \ldots, Y_n$, $n > 1$, indipendenti con legge di Poisson di media $\lambda > 0$ ignota, si reperisca una stima di λ e si indaghino le proprietà campionarie dello stimatore corrispondente.

Buon lavoro!