Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Prova scritta del 17 giugno 2015

1. Un'urna contiene 10 palline nere e 90 bianche. Una seconda urna contiene 20 palline nere e 80 bianche. Una terza urna contiene 80 palline nere e 20 bianche. Una quarta urna contiene 100 palline nere e 0 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le quattro con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, tre palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 80 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, due nere e una bianca.

2. Una apparecchiatura dispone di due resistenze. La vita operativa X_i ($i = 1, 2$) di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a un anno, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento dell'altra resistenza. Quando tutte e due le resistenze sono guaste, l'apparecchiatura non è più operativa. Si supponga, per semplicità, che le resistenze siano le uniche componenti soggette a guasto. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino la mediana di T e la probabilità condizionale $P(T > 3|T > 2)$.

3. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0, 1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = k + x$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante k. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e mediana di X. Sia infine $T = 1 - X$. Si ottenga il supporto di T e si calcoli $P(T = 0.25)$.

4. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(1, 1/4)$ (legge binomiale con indice $n = 1$ e parametro $p = 1/4$) e distribuzioni condizionate binomiali $Y|X = x \sim Bi(1, 1/4)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Si ottengano infine il supporto di $T = X + Y$ e la moda di T.

5. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = exp(0.25t^2)$, dove $exp(z) = e^z$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $W = Y_1 - Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di W. Si ottengano valore atteso e varianza di W.

6. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(57, 400)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(57, 400/n)$. Sia $n = 100$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{100} > 57)$ e $P(\bar{Y}_{100} < 56)$. Si ottenga infine il novantacinquesimo percentile di $\bar{Y}_{100}$ (è il quantile-p con $p = 95/100$).

Buon lavoro!

1) FORMULA DELLA PROBABILITÀ TOTALE: ENUNCIATO E DIMOSTRAZIONE

2) LA FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI: DEFINIZIONE E PROPRIETÀ PRINCIPALI