25.3

Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Prova scritta del 17 febbraio 2020

(i frequentanti dell'a.a. 15/16 o precedenti omettono l'esercizio 6)

1. Un'urna contiene 5 palline nere e 95 bianche. Una seconda urna contiene 30 palline nere e 70 bianche. Una terza urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le tre con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, sei palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 5 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, una nera e cinque bianche.

2. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0,1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = cx(1-x)$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante di normalizzazione c. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e mediana di X. Sia infine $T = 1 - X$. Si ottengano supporto e funzione di ripartizione di T e si calcoli il valore atteso di T.

3. Una apparecchiatura ha solo tre componenti che si possono guastare. La vita operativa X_i della componente i ($i = 1,2,3$) ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a $3i$ anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre. Quando almeno una delle tre è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2, X_3. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il cinquantesimo percentile di T (è il quantile-p con $p = 50/100$) e la probabilità condizionale $P(T > 4 | T > 2)$.

4. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = 1/(1-2t)$, per $t < 1/2$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $W = Y_1 + Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di W. Si ottengano valore atteso e varianza di W.

5. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(7,1)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(7, 1/n)$. Sia $n = 16$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{16} > 7.5)$ e $P(\bar{Y}_{16} < 6)$. Si ottenga infine il novantanovesimo percentile di $\bar{Y}_{16}$ (è il quantile-p con $p = 99/100$).

6. Dato un campione $y_1, \ldots, y_n$, realizzazione di variabili casuali $Y_1, \ldots, Y_n$, $n > 1$, indipendenti con legge di Poisson con valore atteso $\lambda > 0$ ignoto, si reperisca una stima di λ e si indaghino le proprietà campionarie dello stimatore corrispondente.

Buon lavoro!