Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Prova scritta del 15 luglio 2013

1. Un'urna contiene 10 palline nere e 90 bianche. Una seconda urna contiene 20 palline nere e 80 bianche. Una terza urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Una quarta urna contiene 90 palline nere e 10 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le quattro con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, quattro palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta **non** sia stata quella con 50 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, due nere e due bianche.

2. Una apparecchiatura dispone di tre resistenze. La vita operativa X_i $(i = 1, 2, 3)$ di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a 96 mesi, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre resistenze. Quando almeno una delle tre resistenze è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Si supponga, per semplicità, che le resistenze siano le uniche componenti soggette a guasto. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura, espresso in mesi. Si esprima T come funzione di X_1, X_2, X_3. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il decimo percentile di T (è il quantile-p con $p = 10/100$) e $P(T < 32)$.

3. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0, 1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = k(1 + x^2)$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante k. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottenga il valore atteso di X. Sia infine $T = 1 - X$; si calcoli la varianza di T.

4. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(1, 1/2)$ (legge binomiale con indice $n = 1$ e parametro $p = 1/2$) e distribuzioni condizionate che sono binomiali, $Y|X = x \sim Bi(1, (x+1)/4)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Si calcoli infine $P(X < Y)$.

5. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = exp(3(e^t - 1))$, dove $exp(z) = e^z$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $S_2 = Y_1 + Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di S_2. Si ottengano valore atteso e varianza di S_2.

6. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(50, 25)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(50, 25/n)$. Sia $n = 25$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{25} > 51)$ e $P(\bar{Y}_{25} < 48)$. Si ottenga infine il novantacinquesimo percentile di $\bar{Y}_{25}$ (è il quantile-p con $p = 95/100$).

Buon lavoro!