# Primo compito di matematica discreta – 16/02/2012

**Prima parte** – 10 domande, 6/10 giuste per passare. Tempo: 20 minuti

1) D: Un grafo hamiltoniano di 13 nodi non può essere bipartito.
*R: VERO. G è bipartito, ho circuiti pari. Se n è dispari, G non è hamiltoniano. G è bipartito e hamiltoniano se e solo se # nodi è PARI.*

2) D: Ogni insieme non vuoto ha un numero dispari di sottoinsiemi non vuoti.
*R: VERO. $|P(A)| = 2^n$ (la cardinalità dell'insieme delle parti è $2^n$). In generale ci sono quindi $2^n$ sottoinsiemi. Dato che il sottoinsieme vuoto di ogni insieme è unico, esistono ($2^n$-1) sottoinsiemi NON vuoti. $2^n$-1 è dispari.*

3) D: Il numero n! è pari per ogni n positivo.
*R: FALSO. È vero per ogni n>1. Per n=1 ho 1! = 1, che è dispari.*

4) D: Ogni grafo non contenente cicli dispari è colorabile con 3 colori diversi.
*R: VERO. G contiene solo cicli pari, segue che è BIPARTITO, quindi bicolorabile, quindi tricolorabile.*

5) D: Sia A un insieme di cardinalità 6. Quante sono le funzioni biiettive f: A->A?
*R: 6!. Funzioni biiettive, quindi il dominio D=A, e il codomino C=A. A={1,2,3,4,5,6}, ogni permutazione del codominio dà luogo ad una nuova funzione f biiettiva. PERMUTAZIONE, quindi 6!.*

6) D: Ho più probabilità di fare 6 lanciando sei dadi in una sola volta o di lanciare un dado sei volte di seguito? (Scelta multipla)
*R: Ho la stessa probabilità. La probabilità che non esca un 6 lanciando un dado è 5/6, e dunque, la probabilità che sei dadi lanciati contemporaneamente o l'uno dopo l'altro non diano almeno un 6 è data da: $(5/6)^6$. Dunque, la probabilità che esca almeno un 6 è data da $1 - (5/6)^6$.*

7) Il resto delle domande (mancanti) erano su INSIEMI e PICCIONAIA.

**Seconda parte** – 5 esercizi. Tempo: 2 ore e 30 min

1) D: Un numero è detto PIRAMIDALE se, dato un valore di k, le cifre di quel numero sono crescenti fino alla k-esima cifra.
Es: 1248751 è piramidale per k=4.
Un numero è detto PALINDROMO se leggendolo da entrambi i lati risulta lo stesso numero. Calcola quanti numeri palindromi di 7 cifre sono anche piramidali.

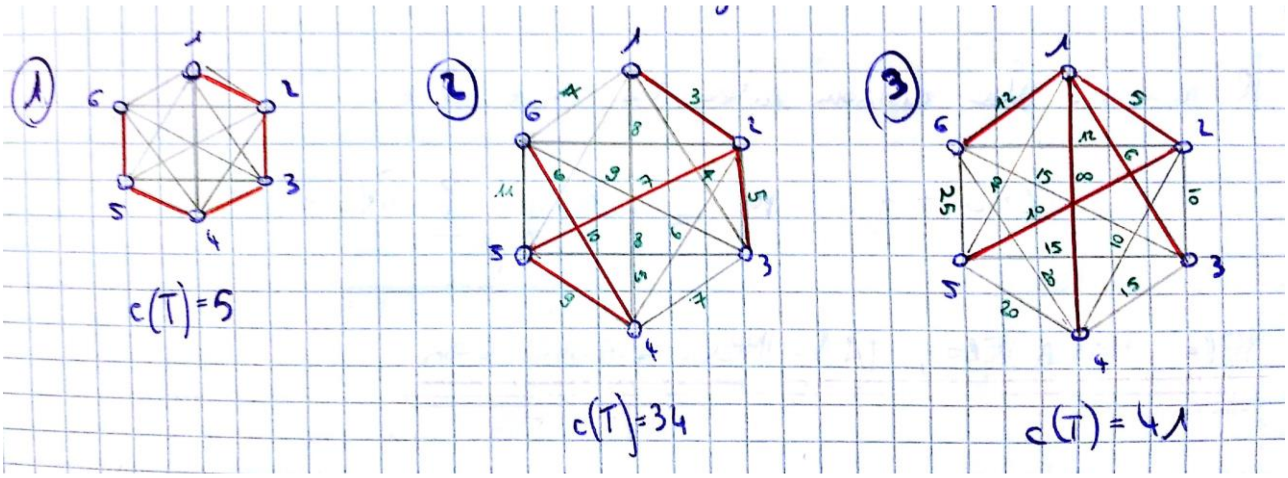
R: Essendo il numero di 7 cifre palindromo, k=4 per forza. Dopo la quarta cifra il numero è specchiato rispetto alle prime 3 cifre. Quindi ho 3 cifre da riempire come voglio.
Da 10 possibili cifre ne scelgo tre, e le metto in ordine crescente (l'ordinamento è unico). Devo però togliere tutti i possibili numeri che iniziano con 0.

I numeri che iniziano con 0 che entrano nella conta precedente sono 1*9*8 = 72 numeri (non ho incluso i numeri in cui una cifra si ripete). In questo caso ho contato due volte i numeri con le stesse cifre (esempio: 098 e 089) quindi devo dividere per 2.

Ho in totale 36 numeri da scartare. Ho quindi $\binom{10}{3}$ numeri a cui devo sottrarre i numeri che iniziano con 0, ovvero 36. 120-36=84 numeri palindromi piramidali.

2) D: Quanti quadrati contiene una griglia di lato 8?
R: Quadrato 8*8 ha un'area di $8^2$. Quindi ho $8^2$ quadrati singoli.
➔ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ = # TOTALE DEI QUADRATI. Nel nostro caso abbiamo: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204$ quadrati.

3) D: Si consideri un grafo completo di 6 nodi V={1,2,…,6}. Si trovi l'albero di supporto di costo minimo nei seguenti casi:
- Per ogni i,j appartenenti a V, il costo del lato tra i e j è |i-j|
- Per ogni i,j appartenenti a V, il costo del lato tra i e j è i+j
- Per ogni i,j appartenenti a V, il costo del lato tra i e j con i<j è max{5i,2j}
R: V={1,2,3,4,5,6} clique di 6 elementi. Albero, ➔ |V|-1 lati, ovvero 5.
APPLICO L'ALGORITMO DI PRIM: parto sempre da 1 nodo (scelgo il #1), e mi porto sul lato attualmente più conveniente. Un albero CRESCE e si "MANGIA" ad ogni iterazione un nodo.




4) D: Quante sono le permutazioni delle lettere della frase "MAMA O NON MAMA" che danno luogo a una sequenza palindroma?
R: M ripetuta 4 volte
A ripetuta 4 volte
M ripetuta 2 volte
A ripetuta 2 volte
Permutazioni palindrome = permutazioni di:
M ripetuta 2 volte
A ripetuta 2 volte
M ripetuta 1 volte
A ripetuta 1 volte
S={M,M,A,A,N,O} 6 elementi ➔ 6! permutazioni.

5) D: Si trovi (o si dimostri che esiste) un albero con 28 nodi, 20 foglie, ogni nodo è di grado 3.
R: Le foglie sono nodi di grado 1 ➔ NON esiste quell'albero. Inoltre 20 non è multiplo di 3 ➔ NON esiste quell'albero.

6) D: Il resto della divisione intera tra -6 e 5 è:
R: Ricordarsi che il resto è SEMPRE POSITIVO. Quindi -6 = -2*5 +4. Il resto è 4.