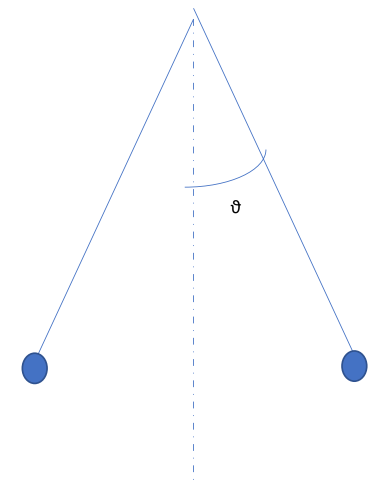
- Esercizio 20.1

Due pendoli semplici, di lunghezza L eguale, ma di masse M1 e M2 diverse, vengono spostati dalla verticale di un egual angolo ϑ, ma in verso opposto nello stesso piano verticale (vedi figura). Lasciati andare a partire da quiete, essi collidono quando arrivano nel punto più basso della traiettoria (sulla verticale del punto di sospensione) e da quel momento rimangono attaccati tra di loro. Determinare:

- L'energia persa nell'urto.
- La altezza massima, rispetto al punto di incontro, a cui arrivano i due punti materiali nel loro moto dopo l'urto.

Utilizzare per i calcoli i seguenti valori

M1 = 1.50 kg, M2 = 0.50 kg, L = 1.00 m, ϑ = 45°, g = 9.81 m/s^2



Ciascuno dei due pendoli, prima dell'urto si muovono sotto l'effetto di sole forze conservative: ne segue che l'energia meccanica in tale intervallo di tempo è conservata.

Introdotto un S.d.R. XY come in figura, possiamo scrivere

$$\Delta U + \Delta K = 0$$

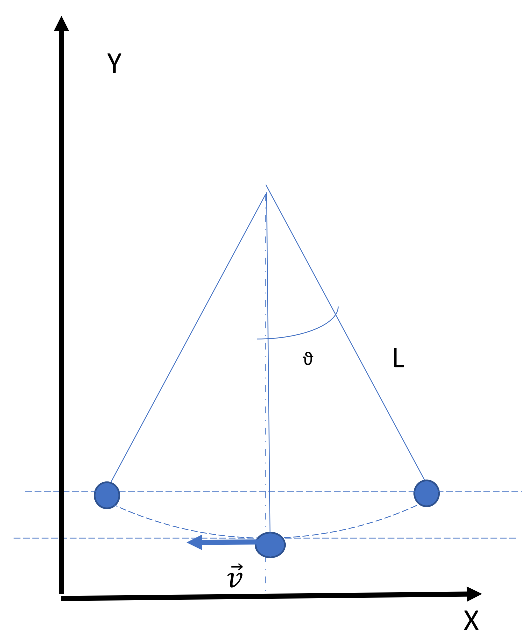
Ove risulta $\Delta U = M\, g\, \Delta y$,

$\Delta y = -\mathrm{L}(1 - \cos(\vartheta))$ e quindi

$$-M\, g\mathrm{L}(1 - \cos(\vartheta)) + \left(\frac{1}{2}Mv^2 - 0\right) = 0$$

$$v = \sqrt{2g\mathrm{L}(1 - \cos(\vartheta))}$$

per entrambi i pendoli



Nell'urto si conserva la quantità di moto (la forza peso e la tensione della fune ha effetto trascurabile nell'urto impulsivo) e quindi immediatamente dopo l'urto le masse dei due pendoli fuse si muove con una velocità pari a quella del centro di massa prima dell'urto

$$v_{CM} = \frac{M1\, v\ - M2\, v}{M1 + M2} = \frac{M1 - M2}{M1 + M2} v$$

La perdita di energia nell'urto sarà allora

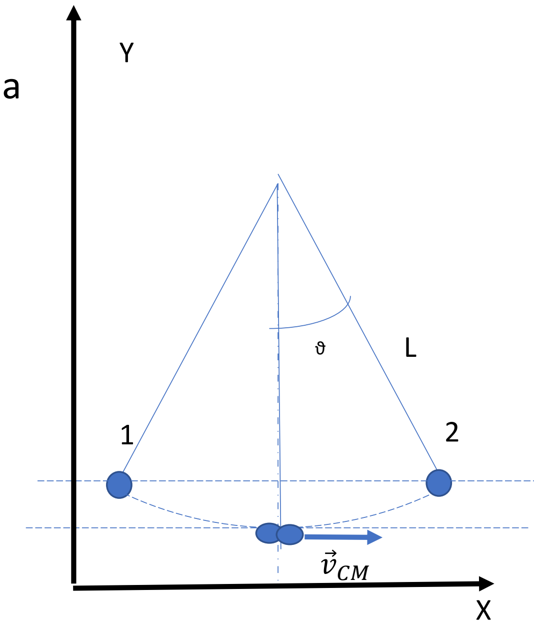
$$\Delta K = \frac{1}{2}(M1 + M2)v_{CM}^2 - \left(\frac{1}{2}M1v^2 + \frac{1}{2}M2v^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(M1 - M2)^2}{M1 + M2} - (M1 + M2)\right]v^2$$

$$= -2\ \frac{M1\ M2}{M1 + M2} g\ L(1 - \cos(\vartheta))$$

Numericamente

$$\Delta K = -8.6\ J$$



Dopo l'urto, il pendolo costituito dalle due masse fuse, sarà di nuovo sottoposto a solo forze di tipo conservativo. La sua quota massima di oscillazione può essere quindi determinata a partire dalla conservazione dell'energia meccanica

$$\Delta U + \Delta K = 0$$

Ove $\Delta U = (M1 + M2)\ g\ \Delta y$, $\Delta y = y_{MAX}$ e quindi

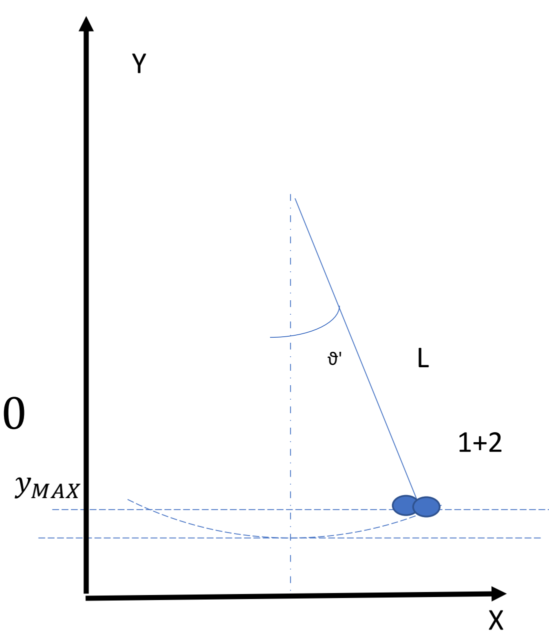
$$(M1 + M2)g\ y_{MAX} + \left(0 - \frac{1}{2}(M1 + M2)v_{CM}^2\right) = 0$$

$$y_{MAX} = \frac{1}{2g}\left(\frac{M1\ - M2}{M1 + M2}\right)^2 v^2$$

$$= \left(\frac{M1\ - M2}{M1 + M2}\right)^2 \mathrm{L}(1 - \cos(\vartheta))$$

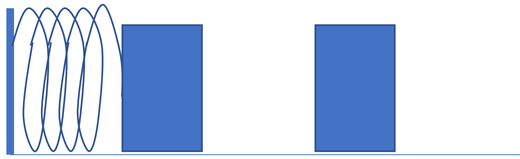
Numericamente

$$y_{MAX} = 0.073\ m$$



- Esercizio 20.2

Una molla di costante elastica K è vincolata su un piano orizzontale ad una estremità, mentre all'altra estremità è attaccata una massa M1. La massa M1 viene messa in moto a partire dalla posizione di riposo della molla (non deformata) con velocità V. Dopo aver percorso un tratto lungo L essa colpisce una seconda massa M2 (eguale), inizialmente in quiete. L'urto è elastico ed impulsivo (avviene in un intervallo di tempo trascurabile).



- Determinare le velocità delle due masse prima e dopo l'urto
- Determinare la velocità della massa M1 quando ripassa per la posizione di riposo della molla, dopo l'urto.

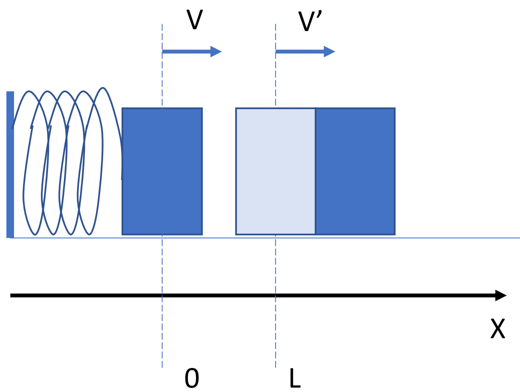
Utilizzare per i calcoli i seguenti valori: K = 75. N/m, L = 0.100 m, M1 = M2 = 1.00 kg, V = 1.00 m/s.

La massa M1, prima di urtare la M2, subisce l'effetto della forza elastica della molla e quindi riduce la sua velocità. Poiché compiono lavoro solo forze conservative, abbiamo la conservazione dell'energia meccanica nel moto di M1 fino all'urto

$$\Delta U + \Delta K = 0$$

con $U = \frac{1}{2}\, k\, x^2$. Ne segue

$$\left(\frac{1}{2}kL^2 - 0\right) + \left(\frac{1}{2}M1V'^2 - \frac{1}{2}M1V^2\right) = 0$$



avendo indicato con V' la velocità di M1 immediatamente prima dell'urto. Risolvendo rispetto V' otteniamo

$$V' = \sqrt{V^2 - \frac{k}{M1}L^2}$$

La velocità della massa M2 immediatamente prima dell'urto è nulla.

Poiché le due masse sono eguali e l'urto è elastico, le due masse nell'urto si scambiano le velocità: quindi dopo l'urto la massa M2 si muoverà verso destra con velocità V', mentre la M1 rimarrà istantaneamente ferma.

Numericamente avremo

V' = 0.50 m/s

Dopo l'urto, la massa M1 ha velocità nulla. Nel moto successivo possiamo ancora utilizzare la conservazione dell'energia meccanica per determinare il valore della velocità V'' con cui M1 ripassa per l'origine

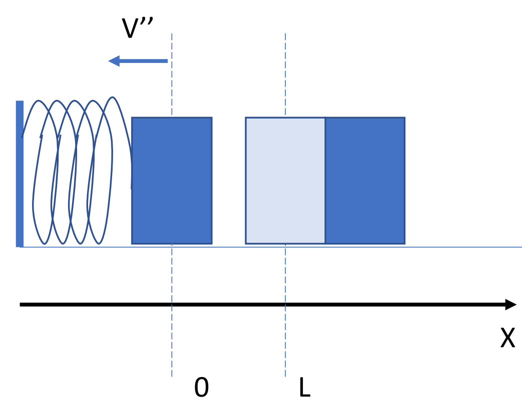
$$\Delta U + \Delta K = 0$$

$$\left(0 - \frac{1}{2}kL^2\right) + \left(\frac{1}{2}M1V''^2 - 0\right) = 0$$

ottenendo

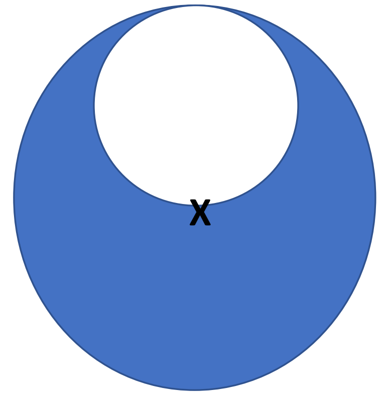
$$V'' = \sqrt{\frac{k}{M1}}L$$

Numericamente V'' = 0.29 m/s



- Esercizio 20.3

Una sagoma piana è formata da un cerchio di raggio R, in cui è stata ritagliata una forma circolare, di diametro R. Il tutto è disposto verticalmente ed è vincolato a ruotare attorno un asse orizzontale, passante per il centro della sagoma (vedi figura).

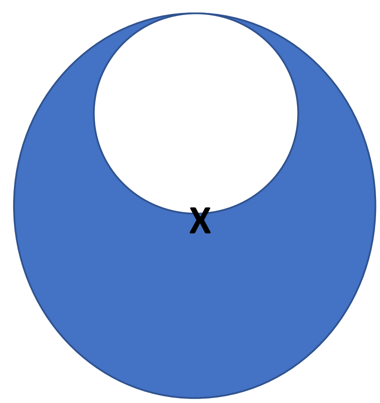


Partendo dalla disposizione in figura, si vuole ruotare di 180° la sagoma nel piano verticale, in modo da portare la zona ritagliata nella posizione più bassa possibile.

- Determinare il minimo valore di lavoro esterno necessario per effettuare tale rotazione

Utilizzare per i calcoli i seguenti valori: M = 1.00 kg, R = 0.10 m, 9.81 m/s^2

Le forze che agiscono sulla sagoma sono la forza peso, la forza vincolare applicata dal perno attorno a cui essa ruota e un forza esterna (ad esempio quella applicata da una mano) che viene usata per muovere l'oggetto.



Dal teorema dell'energia cinetica avremo, dallo stato iniziale allo stato finale del moto

$$L_{mano} + L_{peso} + L_{F\ vinc} = \Delta K$$

Il lavoro della forza vincolare è però nullo, per cui avremo

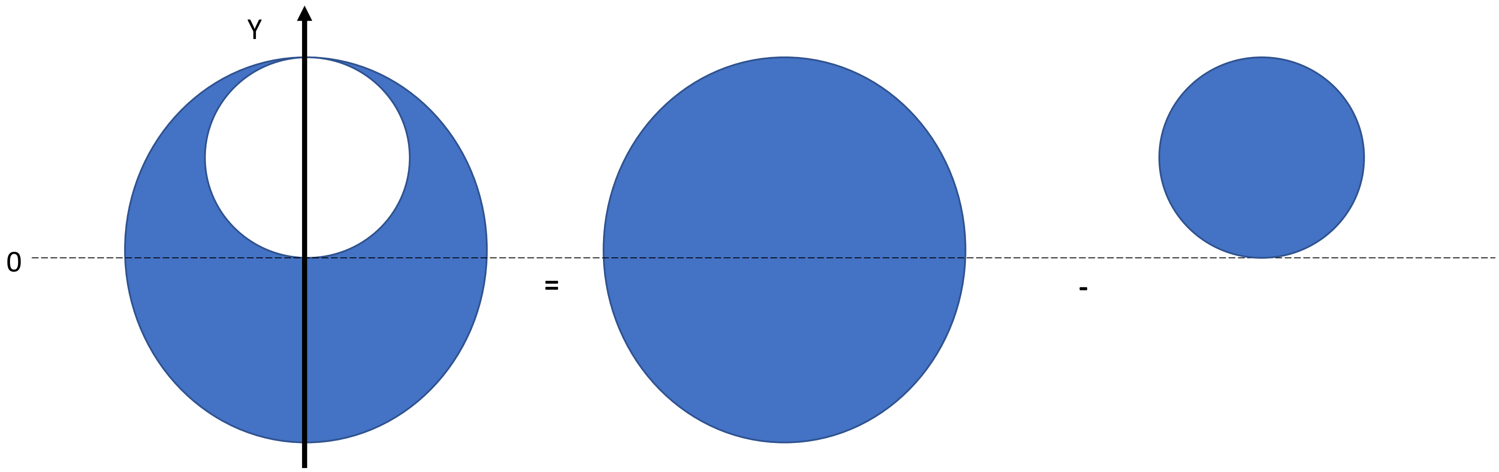
$$L_{mano} = \Delta U_{peso} + \Delta K$$

avendo sostituito $L_{peso} = -\Delta U_{peso}$

Poiché le configurazioni iniziale e finale della sagoma è la stessa, ΔU_{peso} è sempre la stessa, in qualunque modo facciamo procedere il moto con la mano. Per diminuire L_{mano} è quindi necessario diminuire ΔK: al minimo essa sarà zero, quando il corpo arriva a velocità nulla nella posizione finale.

Ne segue che $\quad \min(L_{mano}) = \Delta U_{peso}$

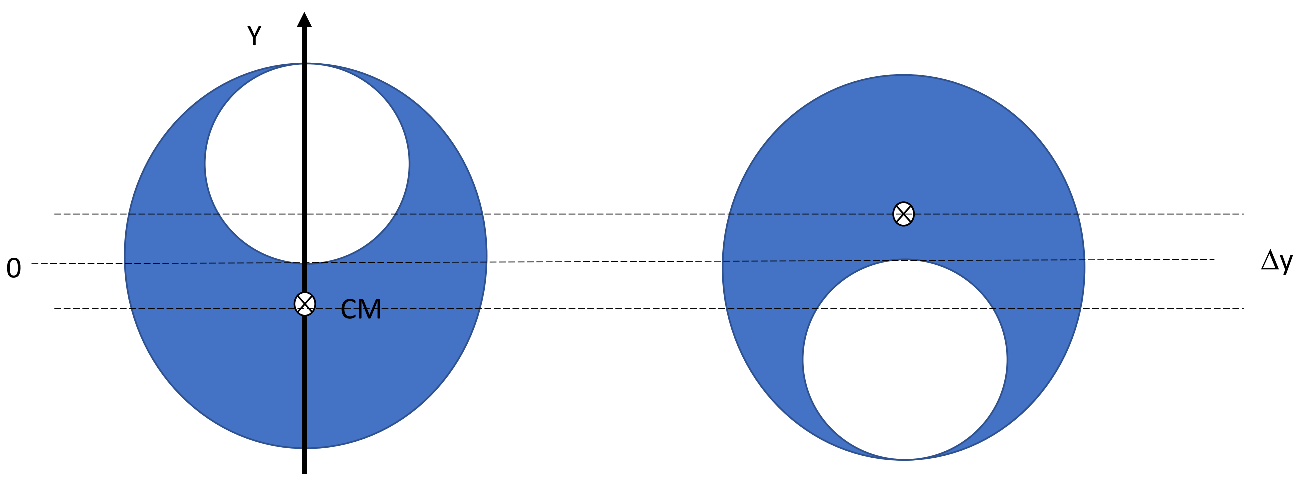
Poiché l'energia potenziale della forza peso dipende dalla posizione del centro di massa del corpo, dobbiamo determinare quest'ultima.



La sagoma ha una simmetria rispetto all’asse Y di figura: ne segue che il centro di massa deve giacere su tale asse. Determiniamone la quota

$$y_{CM} = \frac{0\ m_{grande} - \frac{R}{2} m_{piccola}}{m_{sagoma}} = \frac{-\frac{R}{2}\frac{1}{3} m_{sagoma}}{m_{sagoma}} = -\frac{1}{6}\mathrm{R}$$

avendo indicato con m_{grande} e $m_{piccola}$ le masse delle sagome circolari grande e piccola e tenendo presente che $m_{piccola} = (\frac{R/2}{R})^2 m_{grande}$



La variazione di quota del centro di massa risulta così $2\ |y_{CM}|$ ed alla fine

$$\min(L_{mano}) = \Delta U_{peso} = m\ g\ 2\ |y_{CM}| = \frac{1}{3} m\ g\ R$$

Numericamente

$$\min(L_{mano}) = 0.33\ J$$