**Prova scritta di Calcolo Scientifico**

Udine, 24 gennaio 2022

$\bullet$,$\star$=5/3

1. Sia $\mathcal{F} := \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Sia $u$ la precisione di machina. Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $realmax + u \cdot 2^{e_{\max}} = 8$, $e_{\max} + e_{\min} = 5$, $realmax \cdot realmin = \frac{31}{32}$.
   - Siano dati $x = (1.\overline{011})_2$ e $y = (10.\overline{0111})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = \tilde{y} fl(-) \tilde{x}$.
   - $\star$ Scrivi $x, y$ e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
   - Definisci i numeri denormalizzati per $\mathcal{F}$ e determina il numero denormalizzato positivo più piccolo. Giustifica la risposta.
2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$.
   - Sia $f(x) = e^{g(x)}$, con $g$ funzione reale. Determina la relazione tra il numero di condizionamento di $f$ e quello di $g$. Studia il condizionamento della funzione $f(x) = e^{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = e^{\cos(2x)}$ con $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
   - Studia l'errore dei due algoritmi per il calcolo di $f$. Si può assumere che l'errore della moltiplicazione di $x$ per 2 sia nullo? Quale algoritmo è più stabile? Giustifica tutte le risposte.
3. Sia $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$.
   - Disegna il grafico di $f$. Determina le radici $\alpha, \beta, \gamma$ con $\alpha < \beta < \gamma$.

     Metodo di Newton
   - Studia la convergenza del metodo di Newton ad $\alpha$. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
   - Sia $z$ il punto di flesso di $f$. Studia la convergenza del metodo di Newton a $\beta$ per $x_0 \in [z, \beta)$. Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
   - Studia la convergenza del metodo di Newton a $\gamma$. La successione ottenuta con $x_0 = 2.5$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.

     Metodo a pendenza costante: $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots,$ con $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$.
   - Sia $m = 33$. Studia la convergenza del metodo ad $\alpha$. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
   - Determina $m$ in modo che il metodo sia localmente convergente a $\gamma$ con ordine di convergenza quadratico. La successione ottenuta con $x_0 = 2$ è convergente? Giustifica tutte le risposte.
   - $\star$ Proponi e analizza un criterio d'arresto.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha - 2 & 2 - \alpha \\ 2 - \alpha & 1 & -1 \\ -1 & 2 - \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione $LU$ di $A$. Per quale scelta del parametri $\alpha$ esiste tale fattorizzazione?
   - Disegna il grafico della funzione $\alpha \to ||A||_\infty$.
   - Studia al variare di $\alpha$ il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo.
   - Sia $\alpha = 3$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - $\star$ Scrivi la pseudocodifica dell'algoritmo di eliminazione di Gauss di base.
5. Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-2, 2]$. Dati i punti $P_0 = (-2, f(-2))$, $P_1 = (0, f(0))$, $P_2 = (1, f(1))$.
   - Determina il polinomio $p$ che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i tre punti e tale che $\tilde{p}'(0) = f'(0)$ nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio $q$ di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti $P_0, P_1, P_2$ e $P_3 = (2, f(2))$ nel senso dei minimi quadrati.