si dimostri che $P \subseteq NP$: se $A \in P$ allora $\exists$ K-mdT che decide A in tempo $O(n^h)$ per qualche h.
questa stessa mdT è anche una ND-mdT dove l'albero di computaz. genera una linea retta, quindi $A \in NP$

4. mostra senza riduzioni che $A = \{x \mid \varphi_x \text{ è TOTALE}\}$ non è RE: se totale $\rightarrow W_x = \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ non posso col padding dire che $A = \mathbb{N}$ perché $6 \notin A$

anche per RICE

A sembra estensionale e nessuna mdT ha dominio ∞ $\rightarrow$ per RICE/SHAP. non è R.E.

5. collocalo nella gerarchia di Chomsky:

$$B = \{0^n 1^{n-1} \underbrace{0^4 1^5}_{\text{REG}} \mid n \geq 1\}$$

$S \rightarrow AB$
$A \rightarrow 0A1 \mid 0$ $\Rightarrow$ è CF e $G = (V, T, \{S, A, B\}, S)$
$B \rightarrow 000011111$

dimostro che non è REGOLARE: PL. per i regolari

$\overline{0^n 1^{n-1}}$

uv se $i=2$ $\rightarrow$ $0^{n+a} 1^{n-1}$ $z = uvw$

uv se $i=0$ $0^{n-a} 1^{n-1}$ $a \neq 1$ $|z| \geq |n|$

$|uv| \leq n$

$|v| > 0$

6.
$- C = \{x \mid \varphi_{\lceil \frac{x}{2} \rceil}(x) = 2^x\}$

sembra R.E. completo $f_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ $\rightarrow$ semicaratt.

ora provo $K \leq C$:

$\psi(a,b) = \begin{cases} 2^b & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ per smn $\exists g$ RICTOT $\rightarrow \varphi_{g(a)}$

$\rightarrow$ se $a \in K$ $\forall b$ $\varphi_{g(a)}(b) = 2^b \rightarrow$ se $b = f(a) \cdot 2$ $f(a) = g(a) \cdot 2$ $\rightarrow \varphi_{\frac{f(a)}{2}}(f(a)) = 2^{f(a)} \rightarrow g(a) \in C$ $\Rightarrow$ $\bar{C}$ produttivo, C creativo

se $a \notin K \rightarrow \varphi_{g(a)}(b) \uparrow \rightarrow g(a) \notin C$

$- D = \{(x,y) \mid (\forall z > y)(\varphi_x(z) = z)\}$

∞ terminaz. $\rightarrow$ NON R.E.

$\bar{D} = \{(x,y) \mid (\exists z > y)(\varphi_x(z) \neq z)\}$ $\rightarrow$ ~~è R.E.~~ non R.E.

1 terminaz

$\varphi_x(z) \uparrow \vee \varphi_z(z) \neq z$

$K \leq \bar{D}$: uso dove-tail (con $\exists$ $\rightarrow$ UNA SOLA TERMINAZ, perché la x mi viene data e io lavoro solo su quella macchina)

R.E.

$\psi(a,b) = \begin{cases} \cancel{b+1}\ b & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ $\rightarrow$ smn $\rightarrow$ ~~se $a \in K$ $\forall b$ $\varphi_{g(a)}(b) = b+1$, quindi $b=0 \rightarrow \varphi_{g(a)}(0) = 1 \rightarrow g(a) \in \bar{D}$~~

~~se $a \notin K$ $\forall b$ $\varphi_{g(a)}(b) \uparrow \rightarrow g(a) \notin \bar{D}$~~ $\rightarrow$ NON VA BENE (?)

non riesco mai a finire in D

e non posso togliere ↑ sennò non è calcolabile

→ ottengo in realtà $K \le D$

$\bar{K} \le D$: $\quad x(a,b) = \begin{cases} b & Ma(a) \not\downarrow \text{ in } \le b \text{ passi} \\ b+1 & \cancel{a \in K}\ Ma(a)\downarrow \text{ in } \le b \text{ passi} \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$

allora SMN → $\varphi_{g(a)}$

se $a \in \bar{K} \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = b, \quad \forall b > y\ \varphi_{g(a)}(b) = b \rightarrow \overset{(g(a),0)}{\cancel{(0,g(a))}} \in D$

se $a \notin \bar{K} \rightarrow Ma(a)\downarrow$ in t passi, se $- t > b$ allora $\varphi_{g(a)}(b) = b+1$

$\Rightarrow (0, g(a)) \notin D$

$- t \le b$ allora $\varphi_{g(a)}(b)\uparrow$

D è PRODUTTIVO

$\bar{D}$ è ~~CREATIVO → R.E. completo~~

7. piazzalo nella gerarchia computaz.

$E = \{ x \in \{0,1\}^* \mid x$, letto come simboli ASCII, è un programma C che compila correttamente $\}$

è RICORSIVO, è un problema stile CIRCUIT VALUE (ovvero ho l'input e devo trovare se compila o no)

CIRCUIT VALUE $\le E$ → considero il circuito che compila come BLACK BOX e poi ogni volta che fornisco in input il codice ASCII allora mi ritorna TRUE se compila.

ESAME 14 giugno 2018

1. linguaggio CF generato da una grammatica CF $G = (V, T, P, S)$ con produzioni del tipo $\left[\begin{array}{l} A \rightarrow BC \\ \alpha \end{array}\right.$ con $A \in (V \cup T)$, $B \in (V \cup T)$

F.N. CHOMSKY

- dimostra che NON CHIUSI per INTERSEZ. e COMPLEMENTAZIONE

es. $A = \{0^n 1^n 0^n\}$ non è CF

ma $B = \{0^n 1^n 0^m ;\ n, m \ge 0\}$

$S \rightarrow XY$
$X \rightarrow 0X1 \mid \varepsilon$
$Y \rightarrow 0Y \mid \varepsilon$

è CF

$\Rightarrow B \cap C = A$ ma non è CF

$C = \{0^n 1^m 0^m ;\ n, m \ge 0\}$

$S \rightarrow UV$
$U \rightarrow 0U \mid \varepsilon$
$V \rightarrow 1V0 \mid \varepsilon$

è CF

se $\bar{A}$ fosse CF allora $A \cap B = \overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ dovrebbe essere CF. Assurdo

2. Un insieme A è semplice se: - A è R.E.
- $|\bar{A}| = \omega$
- per ogni R.E. ∞ allora $|A \cap W_x| \neq \emptyset$

$\downarrow$

$\forall x \in \mathbb{N}$ t.c. $|W_x| = \omega$

dimostra che non è ne RICORSIVO ne CREATIVO

A semplice $\rightarrow$ A NON RICORSIVO : se A è semplice allora è R.E. e per POST per essere A ricorsivo, $\bar{A}$ deve essere RE.
se consideriamo, per assurdo, $B = \bar{A}$ allora avremmo che $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$

A semplice $\rightarrow$ A NON CREATIVO : per essere creativo allora dovrebbe essere RE completo e $\bar{A}$ produttivo.
se $\bar{A}$ è produttivo allora con la funz. di produz. f trovo qualcosa fuori.
lo so che esiste un insieme $\subseteq \bar{A}$ che è R.E. infinito
ma $B \cap A \neq \emptyset$ è assurdo dato che $B \subseteq \bar{A}$

3. colloca nella gerarchia di Chomsky (nei REGOLARI sono CHIUSI per complementaz)

$A = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid x$ non contiene sottostringhe del tipo aabb ne bbcc ne aaaa$\}$

no caaaab, abbbcca

provo $\bar{A} = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid x$ contiene sottostringhe del tipo aabb ne bbcc ne aaaa$\}$

$a^+b^* + b^+c^+$ $\rightarrow$ mancano molte combinazioni (ovvero prefissi e suffissi) ed esempio ci servono PRECISAMENTE 4a

REGEX: $(a+b+c)^*(aaaa + aabb + bbcc)^{+}(a+b+c)^*$ e quindi A è REGOLARE perche CHIUSO per COMPL.

non è necessario

$B = \{x \in A \mid \#(a,x) = \#(b,x) = \#(c,x)\}$

4. p_i è l'i-esimo numero primo ($p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots$). Si mostri che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $W_m = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$

io devo trovare una funz. che termina solo con i numeri primi e poi SMN ed infine 1° TEO RIC

esiste una mdT che lo verifica

$$\psi(m,b) = \begin{cases} 0 & \text{se } b \text{ è PRIMO} \wedge b < p_m \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$$

sennò li mette tutti

, per SMN $\exists g$ RICTOT t.c. $\psi(m,b) = \varphi_{g(m)}(b)$

ho quindi che $W_{g(m)} = \{p_1, p_2, \dots, p_{g(m)}\}$ e per 1 TEO RIC, dato che g è TOTALE, allora $\exists m$ t.c. $\varphi_{g(m)} = \varphi_m \Rightarrow W_m = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$

5. $- C = \{ x \mid \varphi_{\lfloor \frac{x}{3} \rfloor}(\lfloor \frac{x}{3} \rfloor) = \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \}$

è R.E. $K \le C \to \psi(a,b) = \begin{cases} b & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$, per SMN $\exists g$ RIC TOT, $\psi(a,b) = \varphi_{g(a)}$

se $a \in K \to \forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = b$ $g(a) = \lfloor 3 \cdot f(a) \rfloor$ e $b = g(a) \Rightarrow \varphi_{\lfloor \frac{f(a)}{3} \rfloor}(\lfloor \frac{f(a)}{3} \rfloor) = \lfloor \frac{f(a)}{3} \rfloor \to g(a) \in C$ → COMPLETO, CREATIVO e $\bar{C}$ PROD.

se $a \notin K \to \forall b\ \varphi_{g(a)}(b) \uparrow \to g(a) \notin C$

$- D = \{ x \mid (\forall y > x)(\exists z > y)(\varphi_x(z)\downarrow) \}$ $\bar{D} = \{ x \mid (\exists y > x)(\forall z > y)(\varphi_x(z)\uparrow) \}$

per tutte le y (∞) esiste $1\, z > y$ t.c. $\varphi_x(z)\downarrow \to \infty$ terminaz. $\hookrightarrow \infty$ NON TERMINAZ.

non sembra R.E.

$K \le D$

$\psi(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ SMN $\to \exists g$ RIC TOT t.c. $\psi(a,b) = \varphi_{g(a)}(b)$

se $a \in K \to \forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = 0$, in particolare $b > x$ $\varphi_{g(a)}(b)\downarrow \to g(a) \in C$

se $a \notin K \to \forall b\ \varphi_{g(a)}(b)\uparrow \to g(a) \notin C$ $\to \bar{C}$ è PRODUTTIVO

$D = \{ x \mid (\forall y > x)(\exists z > y)(\varphi_x(z)\downarrow) \}$

$\bar{K} \le D$ (per dire qualcosa su D)

$\psi(a,b) = \begin{cases} 0 & M_a(a) \not\downarrow \text{ in } \le b \text{ passi} \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ se $a \in \bar{K} \to \forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = 0$ e quindi $\forall b > x \to \varphi_{g(a)}(b)\downarrow \to g(a) \in D$

se $a \notin \bar{K} \to M_a(a)\downarrow$ in t passi, se $- t \le b$: $\forall b\ \varphi_{g(a)}(b)\uparrow$

$- t > b$: $\varphi_{g(a)}(b)\downarrow$ ma al massimo $W_{g(a)} = \{0, \dots, b\}$ $\to g(a) \notin D$

$\Rightarrow D$ è produttivo

$- E = \{(x,y) : W_x \not\subseteq E_y\}$

fisso $y = 6 \to$ così $E_6 = \emptyset$ e cerco tutte le macchine che terminano in almeno 1 punto

$K \le E \to \psi(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$, SMN, se $a \in K \to \forall b\ \varphi_{g(a)}\downarrow \to (g(a), 6) \in E$

$\to \bar{E}$ produttivo

se $a \notin K \to \forall b\ \varphi_{g(a)}\uparrow \to (g(a), 6) \notin E$

$\bar{E} = \{(x,y) : W_x \subseteq E_y\}$

$K \leq \bar{E}$, fisso x=6 in modo che va bene qualsiasi y

$\chi(a,b) = \begin{cases} 1 & se\ a \in K \\ \uparrow & else \end{cases}$ $\rightarrow$ se $a \in K \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = 1 \rightarrow W_{g(a)} = \{1\}$ e $\emptyset \subseteq W_{g(a)} \rightarrow (6, g(a)) \in \bar{E}$ $\rightarrow$ E produttivo

$a \notin K \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)} \uparrow \rightarrow (6, g(a)) \notin \bar{E}$

6. Si dimostri che $NP \subseteq PSPACE$

io so che $NP = \bigcup_{k \geq 0} NTIME(n^k)$ per qualche K, so che $NTIME(n^k) \leq \bigcup_{c>0} TIME(c^{n^k})$

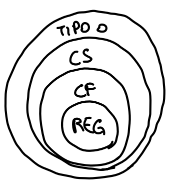
So che $TIME(f(n)) = PSACE(f(n)) \Rightarrow NP = \bigcup_{k \geq 0} NTIME(n^k) = \bigcup_{c>0} TIME(c^{n^k}) = \bigcup_{k>0} SPACE(c^{n^k}) =$ ~~EXPSPACE~~ $\rightarrow$ NO

qualsiasi ND-mdT può essere simulata con una 2-mdT det.,
$\downarrow$ NTIME(f(n)) $\downarrow$ TIME(

$\Rightarrow$ so che NPSPACE = PSPACE e quindi $NP = \bigcup NTIME(n^k)$ $\Rightarrow$ $NP \subseteq NPSPACE$ e $NPSPACE = PSPACE$
$= \bigcup NPSPACE(n^k)$

ESAME 24 luglio 2018

1. definisci la gerarchia di Ch.



REG: es. $0^n 1$ e sono riconosciuti da un DFA

CF: es. $0^n 1^n$ e sono generati da una grammatica CF

CS: es. $0^n 1^n 2^n$ e sono generati da una grammatica con produzioni $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in (V \cup T)^+$, $\beta \in (V \cup T)^+$, $|\alpha| \leq |\beta|$

TIPO 0: e sono generati da una grammatica con produzioni $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in (V \cup T)^+$, $\beta \in (V \cup T)^*$

2. Enuncia e dimostra il TEO RICE:

Π è una proprietà ESTENSIONALE. Questa è RICORSIVA sse è BANALE ($\emptyset$ o $\mathbb{N}$)

DIM: se Π fosse RIC. allora sia g la sua funz. caratteristica

$g(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in \Pi \\ 0 & se\ x \notin \Pi \end{cases}$ e supponendo ASSURDO che Π non sia banale $\Rightarrow \exists\, a, b$ t.c. $a \in \Pi \wedge b \notin \Pi$

Definisco h come segue

$h(x) = \{ a$ se $g(x) = 0$ $\Rightarrow$ h è RIC TOT perciò per 1 TEO RIC $\exists\, n_0$ t.c. $\varphi_{..} = \varphi$

$\quad b \quad$ se $g(x)=1$

ora se $m_0 \in \Pi$ allora $g(m_0)=1 \Rightarrow h(m_0)=b$ ma $b \notin \Pi$.
se $m_0 \notin \Pi$ allora $g(m_0)=0 \Rightarrow h(m_0)=a$ ma $a \in \Pi$. $\Rightarrow$ ASSURDO

4. enumeraz. vista a lezione, $27 \in K$? (ovvero $\varphi_{27}(27)\downarrow$?)

in generale stabilire se una mdT $\in K$ è SEMIDECIDIBILE
con l'enumeraz. vista a lez. le mdT a 1 stato sono $[0 \dots 24]$ e 0 è l'identità

per quelle a 2 stati:

25	\$	0
q_0	\$\$\$	\$\$\$
q_1	\$\$\$	\$\$\$

26	\$	0
q_0	\$\$\$	\$\$\$
q_1	\$\$\$	q_0\$L

27	\$	0
q_0	\$\$\$	\$\$\$
q_1	\$\$\$	q_0\$R

$\Rightarrow$ sono tutte equivalenti perché non raggiungo mai $q_1 \Rightarrow$ IDENTITÀ $\Rightarrow \in K$

5. $- B = \{x : (\exists y > x)\, \varphi_x(y) = 2y\}$

B è R.E. $\rightarrow f(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > x \wedge \varphi_x(y) = 2y \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ è la funz. semicar.

$K \leq B$: $\psi(a,b) = \begin{cases} 2b & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ $\rightarrow$ SMN $\exists g(a)$; se $a \in K \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)}(b)\downarrow$, in particolare se $b > g(a)$, $\varphi_{g(a)}(b) = 2b \rightarrow g(a) \in B$

se $a \notin K \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)}(b)\downarrow$, " " , $\varphi_{g(a)}(b)\uparrow \rightarrow g(a) \notin B$

B è R.E. completo $\rightarrow$ CREATIVO e $\overline{B}$ produttivo

$- C = \{x : \text{EVEN} \subseteq E_x\}$ $\rightarrow$ sono ∞ terminaz, NO R.E.

↱ $\varphi_x(y) = 2y$ (non può contenere solo 1 pari)

↳ NUMERI PARI

$K \leq C$: $\psi(a,b) = \begin{cases} 2b & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ $\rightarrow$ SMN $\rightarrow$ se $a \in K \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = 2b \rightarrow E_{g(a)} = \text{EVEN} \rightarrow g(a) \in C$

se $a \notin K \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)}(b)\uparrow \rightarrow E_{g(a)} = \emptyset \rightarrow g(a) \notin C$

$\Rightarrow \overline{C}$ è produttivo

$\overline{K} \leq C$: $\psi(a,b) = \begin{cases} 2b & \text{se } M_a(a)\not\downarrow \text{ in } \leq b \text{ passi} \\ \cancel{1 \text{ se } M_a(a)\downarrow \text{ in } \leq b \text{ passi}} \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ $\rightarrow$ SMN $\rightarrow$ se $a \in \overline{K} \rightarrow M_a(a)\not\downarrow \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = 2b \rightarrow E_{g(a)} = \text{EVEN} \rightarrow g(a) \in \overline{C}$

se $a \in K \rightarrow M_a(a)\downarrow$ in t passi $\rightarrow$ se $t \leq b \rightarrow \varphi_{g(a)}(b) = 1$ $\quad E_{g(a)} = \emptyset$

se $t > b \rightarrow \varphi_{g(a)}(b) = 2b$ $\quad E_{g(a)} = \{0, \dots 2t\}$ e EVEN $\not\subseteq$ perché t è finito e non prenderà mai i pari

$\rightarrow g(a) \in C$

$\Rightarrow$ C PRODUTTIVO

- $D = \{ (x,y) : (W_x \subseteq E_y) \land (\forall z > y)(\varphi_z(x)\downarrow) \}$ fisso $x=6$ t.c. $W_0 = \emptyset$ D non sembra R.E.

$\hookrightarrow \forall z\ \varphi_z(0)\downarrow$ ∞ terminaz → DOVE TAIL

$\bar{D} = \{ (x,y) : (W_x \not\subseteq E_y) \lor (\exists z > y)(\varphi_z(x)\uparrow) \}$

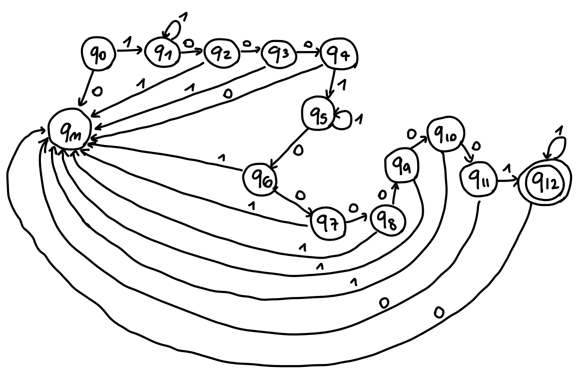
fisso $y=6$ ↳ NON TERMINAZ.

~~$K \leq D$: $\psi(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ → SMN → $\exists g(a)$ RIC. TOT. → se $a \in K$ → $\forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = 0$ $E_{g(a)} = \{0\}$ $W_0 = \emptyset$ $W_0 \subseteq E_{g(a)}$~~

per D fisso la $x=0$, col PADDING posso ottenere ∞ mdT $= \varphi_6$ e quindi $(\forall z > y)(\varphi_z(x)\downarrow)$ è FALSA → $\emptyset$ ⇒ D è $\emptyset$ e RICORSIVO

$\bar{D}$ allora è $\mathbb{N}$ e RICORSIVO. perché $(\exists z > y)(\varphi_z(x)\uparrow)$ è sempre VERA in quanto $\exists\ \infty$ mdT $= \varphi_6$ e quindi per $z > 6$ → $\mathbb{N}$

3. Fissato $x \in \mathbb{N}$, considera $A_x = \{ 1^a 0^x 1^b 0^{x!} 1^c : a>0, b>0, c>0 \}$. Se A è REG, definisci l'automa minimo per $x=3$ $(1^a 0^3 1^b 0^6 1^c)$ altrimenti dimostra che non lo è



⇒ $1^+(000) \cdot 1^+(000000) \cdot 1^+$ è la regex

⇒ A_x è REGOLARE perché se so x (FINITO) allora esiste un DFA

Uno generico allora ∄

$A = \bigcup_{x \geq 0} A_x$, se è CF definisci una g che lo genera in f.n. chomsky, altrimenti dimostra che NON È CF.

UNIONE INFINITA → va studiata.

$S \to ABAC$

$A \to 1A|1$

$B \to 0$

NON la trovo

$A \to 1A|1$

$0^x 0^{x!}$

provo a vedere se NON È CF: $z = uvwxy$ con $|z| \geq m$, $|vwx| \leq m$, $|vx| > 0$

$z = 1^a 0^m 1^b 0^{m!} 1^c$

$1^a 0^m 1^b 0^{m!} 1^c$

vwx, y → $i=0$ $1^a 0^{m-d} 1^b 0^m 1^c$, $d>0$ → $z \notin L$

u, vwx → $i=0$ $1^a 0^m 1^b 0^{m!-d} 1^c$, $d>0$ → $z \notin L$

nei casi intermedi è $1^{a-d}, 1^{b-d}, 1^{c-d}$ → $\notin L$

⇒ non è CF

6. dato un grafo NON ORIENTATO $G=(N,E)$, dimostra che 2-coloring è NP