

### Prova scritta di Calcolo Scientifico

Udine, 20 giugno 2022

• = 5/3

1. Sia  $\mathcal{F} := \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$  l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
  - Sia  $u$  la precisione di macchina. Determina gli interi  $t, e_{\max}, e_{\min}$  in modo che  $\text{realmax}/(1-u) = 8, e_{\max} + e_{\min} = 6, \text{realmax}/\text{realmin} = 112$ .
  - Definisci i numeri denormalizzati. Quanti sono i numeri denormalizzati relativi a  $\mathcal{F}$ ?
  - Siano dati  $x = (1.0\overline{11})_2$  e  $y = (10.\overline{01})_2$ . Determina  $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}, \tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$  e  $\tilde{z} = \tilde{y} fl(-)\tilde{x}$ .
2. Si vuole calcolare la funzione  $y = f(x)$ 
  - Definisci l'errore inerente e il concetto di condizionamento.
  - Sia  $f(x) = e^{g(x)}$ , con  $g$  funzione reale. Determina la relazione tra il numero di condizionamento di  $f$  e quello di  $g$ . Studia il condizionamento della funzione  $f(x) = e^{g(x)}$ , con  $g(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$  in  $x \in [-2, 2]$ .
  - Definisci l'errore algoritmico e il concetto di stabilità.
  - Sia  $g(x) = \sqrt{(1-x^2)} = \sqrt{(1-x)(1+x)}, x \in [-1, 1]$ . Studia l'errore dei due algoritmi per il calcolo di  $f$ . Quale algoritmo è più stabile? Giustifica tutte le risposte.
3. Sia  $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ .
  - Disegna il grafico di  $f$ . Siano  $\alpha, \beta, \alpha < \beta$ , le radici.  
Metodo di Newton
  - Studia la convergenza del metodo di Newton ad  $\alpha$ . Scegli un valore  $x_0$  che genera una successione convergente. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
  - Studia la convergenza del metodo di Newton a  $\beta$ . Scegli un valore  $x_0$  che genera una successione convergente. Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.  
Metodo a pendenza costante:  $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \dots$ , con  $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$ .
  - Studia la convergenza del metodo a  $\alpha$  e  $\beta$  per  $m = -3, 6, 9, 18$ . Per ogni valore  $m$ , in caso di convergenza a  $\alpha$  o  $\beta$ , proponi un valore  $x_0$  che genera una successione convergente, determina il fattore asintotico e l'ordine di convergenza. Giustifica tutte le risposte.
  - Definisci il concetto di fattore asintotico e ordine di convergenza per una generica successione  $x_k \rightarrow \alpha$  per  $k \rightarrow +\infty$ .
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 & 3 \\ 6 & \alpha/2 & -1 \\ \alpha & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
  - Calcola la fattorizzazione  $LU$  di  $A$ . Per quale scelta del parametri  $\alpha$  esiste tale fattorizzazione?
  - Disegna il grafico della funzione  $\alpha \rightarrow \|A\|_{\infty}$ .
  - Studia al variare di  $\alpha$  il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo.
  - Sia  $\alpha = -2$ . Calcola la fattorizzazione  $PA = LU$  con la tecnica del pivot parziale.
  - Scrivi la pseudocodifica dell'algoritmo di eliminazione di Gauss di base.
5. Sia  $f(x) = e^{g(x)}$ , con  $g(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x), x \in [-1, 2]$ . Assegnati i punti  $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ .
  - Determina il polinomio  $p$  di interpolazione di  $f$  relativo ai punti  $x_0, x_1, x_2$  nella forma di Newton.
  - Determina il polinomio  $q$  di primo grado di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati di  $f$  relativo ai punti  $x_0, x_1, x_2, x_3$ .
  - Determina il polinomio di interpolazione  $P$  di  $g$  relativo ai punti  $x_0, x_1, x_2$  nella forma di Newton
  - Come si comporta l'errore  $|e^{g(x)} - e^{P(x)}|$  in prima approssimazione? Stima l'errore in  $x = 1/2$
  - Definisci la funzione spline cubica naturale.