

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Prova scritta del 31 gennaio 2011

1. Un'urna contiene 5 palline nere e 95 bianche. Una seconda urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Una terza urna contiene 95 palline nere e 5 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le tre con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, cinque palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 50 nere, se le palline estratte risultano due nere e tre bianche.
2. Una apparecchiatura dispone di tre resistenze. La vita operativa X_i ($i = 1, 2, 3$) di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a 12 anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre resistenze. Quando almeno una delle tre resistenze è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Si supponga, per semplicità, che le resistenze siano le uniche componenti soggette a guasto. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2, X_3 . Si dica qual è il supporto di T . Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T , esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino la moda di T e $P(T = 1)$.
3. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0, 1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = kx(1-x)$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X , determinando il valore della costante k . Si calcoli la funzione di ripartizione di X , esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e varianza di X . Sia infine $T = 1 - X$; si ottenga la moda di T .
4. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(1, 3/4)$ (legge binomiale con indice $n = 1$ e parametro $p = 3/4$) e distribuzioni condizionate binomiali $Y|X = x \sim Bi(1, 1/4)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y) , la funzione di probabilità congiunta di (X, Y) , il supporto marginale di Y , la funzione di probabilità marginale di Y . Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Si calcoli infine $P(X > Y)$.
5. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = \exp(e^t - 1)$, dove $\exp(z) = e^z$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $S = Y_1 + Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di S . Si ottengano valore atteso e varianza di S .
6. La variabile casuale multivariata (Y_1, \dots, Y_n) ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(10, 1)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(10, 1/n)$. Sia $n = 100$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{100} > 10.1)$ e $P(\bar{Y}_{100} < 9.7)$. Si ottenga infine il novantesimo percentile di \bar{Y}_{100} (è il quantile- p con $p = 90/100$).

Buon lavoro!