Prova scritta di Calcolo Scientifico

`Udine, 13 luglio 2021`

1. Sia $\mathcal{F} := \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento, che contiene anche i numeri denormalizzati. Sia d il più piccolo numero denormalizzato positivo di $\mathcal{F}$ e u la precisione di macchina.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $e_{\max} + e_{\min} = 5$, $\frac{u}{d} = 4$ e $\frac{realmax}{realmin} = 60$.
   - Quanti sono i numeri di $\mathcal{F}$?
   - Siano dati $x = (1.\overline{011})_2$ e $y = (10.\overline{011})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = \tilde{x} fl(-) \tilde{y}$.
   - Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.

2. Si vuole calcolare $y = F(x)$ con $F(x) = f(g(x))$, con f, g funzioni date.
   - Determina la relazione tra il numero di condizionamento di F e quelli di f e g.
   - Studia il condizionamento della funzione $F(x)$ quando $f(x) = e^x, g(x) = x^2 - 1$, e $f(x) = x^2 - 1, g(x) = e^x$.

   Sia $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ con x che varia nel campo di definizione. Confronta la stabilità dei due algoritmi
   - $\sqrt{x^2 - 1}$
   - $\sqrt{(x-1)(x+1)}$

   al variare di x numero di macchina.

3. Sia $f(x) = -\frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{4} + 2x + 3$.
   - Disegna il grafico di f. Determina le radici α, β con $\alpha < \beta$.
   - Studia la convergenza del metodo di Newton ad α e a β.
   - •• Considera le successioni ottenute con il metodo di Newton con i seguenti valori iniziali
     (a) $x_0 = -1$
     (b) $x_0 = -3$
     (c) $x_0 = 0$
     (d) $x_0 = 4/3$
     (e) $x_0 = 2$
     (f) $x_0 = 4$

     Sono convergenti? Se convergenti, convergono ad α o a β? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
   - Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Considera il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$. Studia la convergenza locale ad α del metodo iterativo al punto precedente con $m = 2$. La successione ottenuta con $x_0 = -1$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - Determina m in modo che la convergenza locale a β sia superlineare. La successione ottenuta con $x_0 = 2$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
   - Scrivi la pseudocodifica del metodo di bisezione che fornisce una stima di una radice di una generica funzione f con una precisione prefissata TOL.

4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -7 & -6 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 2\alpha & 13 & 17 \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quale scelta del parametri α esiste tale fattorizzazione?
   - Studia al variare di α il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo.
   - Sia $\alpha = 4$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.

5. Sia $f(x) = \log_2(1 + 4x^2)$. Dati i punti $P_0 = (-\sqrt{3}/2, f(-\sqrt{3}/2))$, $P_1 = (0, f(0))$, $P_2 = (1/2, f(1/2))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton (suggerimento: usa la razionalizzazione).
   - Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i tre punti e $P_3 = (-1/2, f(-1/2))$ nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti P_0, P_1, P_2 e $P_4 = (\sqrt{3}/2, f(\sqrt{3}/2))$ nel senso dei minimi quadrati.

6. Sia $Ax = b$ un sistema lineare di dimensione n.
   - Scrivi la pseudocodifica dell'algoritmo di eliminazione di Gauss di base.
   - Modifica lo pseudocodice per applicare la tecnica del pivot parziale.