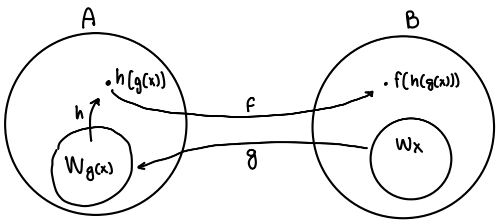
creo il grafo dove ho $(V \cup T)$ nodi e gli archi li ho per tutte le produz. se ho il nodo x devo
↳ le possibili stringhe

controllare che $\exists$ cammino $S \to \dots \to x$, se $\exists$ allora $\in$ sennò $\notin$.

2. A produttivo e $A \leq B$. Dimostra che B è produttiva

bisogna mostrare che se $W_x \subseteq B$ allora $f(h(g(x))) \in B \setminus W_x$

g RIC TOT e h funz. produz.
f è funz. riduz. da A a B



ho f funz. di riduz. da A a B che è RIC. PARZ.
per SMN $f = \varphi_{g(x)}$

guarda il foglio che è spiegata ...

3. definisci nozioni di k-mdT : mdT a k-nastri, limitata (nastro semi finiti), stati aggiuntivi e movimento nullo
- tempo necessario per M su input x : #passi che ci vogliono per calcolare la funz. della mdT su x
- classe in tempo : $TIME(f(n))$ e se L è deciso da un k-mdT che opera in tempo $f(n)$, allora $L \in TIME(f(n))$
- classe P : mdT det. che calcolano una funz. in tempo polin.

esempio di un linguaggio in P → CIRCUIT VALUE

4. si dica se fissato i A_i è regolare o CF

$$A_i = \{ x \in \{0,1\}^* : \#(0,x) < \#(1,x) \wedge |x| \leq i! \}$$

A_i è REGOLARE perché FINITO e quindi posso costruire i vari DFA che accettano i linguaggi

$A = \bigcup_{i>0} A_i$ → unione di INFINITI insiemi finiti

può essere CF? → PROVO prima se è REG (P.L. REG) se lo è APPOSTO
se non lo è allora potrebbe non essere C.F. (P.L. CF)
o potrebbe essere CF (trovo G)

$z = 0^n 1^{n+1}$ e vedo se REG

$z = uvx$ $\quad |uvx| \geq n$
$|uv| \leq n$
$|v| > 0$

$0^n 1^{n+1}$
u v x → $i=0$ $\quad uv^0x \to 0^{n-a} 1^{n+1} \in L$ con $a < n \to \in L$ perché $\#(0,x) < \#(1,x)$

⇒ per $\notin L$ devo arrivare a $\#(0,x) \geq \#(1,x)$

$0^n 1^{n+1}$
u v x
se $i = 1 \to 0^n 1^{n+1}$
se $i = 2 \to 0^{n+a} 1^{n+1}$ con $a > 1 \to \notin L$

allora A non è REG.

→ vedo se è CF: $A \to 0A1 | 1$ genera $0^n 1^{n+1}$ — ε non va bene

0 non va bene

$S \to 0S1 | 1 | 1S | S1$ — 1 solo va bene, anche 1111

$S \to 0S1 | S01 | 10S | 01S | S10 | 1S0 | 1 | 1S | S1$ → è CF e questa è la produzione

5. $- B = \{ x : \varphi_{\lceil \frac{x}{2} \rceil}(2^x) = x \}$ → non est.

sembra re. → $\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi_{\lceil \frac{x}{2} \rceil}(2^x) = x \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$

LEGO IL PEDICE all'OUTPUT, non considero l'INPUT

provo $K \leq B$

$\chi(a,b) = \begin{cases} \log_2 b & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ e per smn $\exists g$ ric tot $\varphi_{g(a)}(b)$

se $a \in K \to \forall b \ \varphi_{g(a)}(b) = \log_2 b$ e $b = 2^a \to \varphi_{g(a)}(2^a) = a$

$f(a) = 2 \cdot a$

$f(a) = 2 \cdot g(a) \to g(a) = \frac{f(a)}{2}$

$\Rightarrow \varphi_{\frac{f(a)}{2}}(2^{f(a)}) = f(a)$ → f funz. riduz. e B è R.E. COMPLETO → CREATIVO (per Myhiee)

$\bar{B}$ è produttivo

$- D = \{ (x,y) : (\exists z > x)(\varphi_z(x) = y) \}$ se ho $\exists .. > ...$ → PADDING

$= \mathbb{N}$ perchè trovo a indice di φ_a t.c. funz. cost $= y$ → con PADDING ne trovo ∞

$\bar{D} = \emptyset$

Sia D che $\bar{D}$ sono RICORSIVI

$- C = \{ x : |E_x \cap W_x|$ è un numero pari maggiore di 0 $\}$

sembra non è R.E. → noi di ¬R.E. abbiamo fatto PRODUTTIVI e $\bar{K}$

provo $K \leq C$ e se vale allora $\bar{K} \leq \bar{C}$ e quindi $\bar{C}$ è produttivo:

$\chi(a,b) = \begin{cases} b & \text{se } a \in K \land b < 2 \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ → prendo i 1° 2 elementi — per SMN $\chi(a,b) = \varphi_{g(a)}$

allora $Dom = Cod = \{0,1\}$

se $a \in K \to W_{g(a)} = \{0,1\} \land E_{g(a)} = \{0,1\} \Rightarrow |W_{g(a)} \cap E_{g(a)}| = 2 \to g(a) \in C$

se $a \notin K \rightarrow W_{g(a)} = \emptyset \wedge E_{g(a)} = \emptyset \Rightarrow (\dots \cap \dots) = \emptyset \rightarrow g(a) \notin C$

$\bar{C}$ cosa puoi dire? $\rightarrow \bar{K} \leq C$

$$\psi(a,b) = \begin{cases} b & M_a(a) \not\downarrow \leq b \text{ passi} \wedge b<2 \\ 0 & M_a(a)\downarrow \text{ in} \leq b \text{ passi} \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$$

per SMN $\exists g$ ric tot t.c. $\psi(a,b) = \varphi_{g(a)}(b)$

se $a \in \bar{K} \rightarrow M_a(a) \not\downarrow$, $\varphi_{g(a)}(b)\downarrow$ solo in $b=0 \wedge b=1$, quindi $W_{g(a)} = \{0,1\}$, $E_{g(a)} = \{0,1\} \Rightarrow g(a) \in \bar{C}$

se $a \notin \bar{K} \rightarrow$ termina in t passi, tre casi:
- $t>b \rightarrow dom = range = \emptyset$ perché $\uparrow$
- $t \leq b \rightarrow dom = \{0,\dots,b\}$, $range = \{0\}$

$\rightarrow W_{g(a)} = \{0,\dots,b\}$, $E_{g(a)} = \{0\}$ $\Rightarrow |W \cap E| = 1 \rightarrow g(a) \notin \bar{C}$

$\bar{C}$ è produttivo

ESAME 18 febbraio 2021

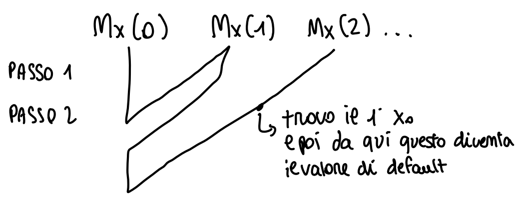
1. $A \subseteq \mathbb{N}$ se $A \neq \emptyset$,

- A è dom. di una funz. calc. (parz. o totale) $\rightarrow$ A è R.E., ha funz. semi caratt $\begin{cases} 1 & \text{se } M_a(x)\downarrow \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$

  se io considero la semi caratt. IDENTITÀ $\rightarrow \begin{cases} y & \text{se } M_x(y)\downarrow \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$

$(1 \rightarrow 2)$

- A è cod. di una funz. calc. TOTALE: USO DOVETAIL e definisco una funzione che ritorna l'ultimo valore trovato se $M_x(y)\uparrow$ in quel passo oppure il nuovo valore (così è TOTALE)



con DOVETAIL cerco il primo x_0
e dato che $A \neq \emptyset$ prima o poi lo trova

$$f \begin{cases} f(0) = x_0 \\ f(x+1) = \begin{cases} \varphi_x(y) & \text{se } M_x(y)\downarrow \\ f(x) & \text{else} \end{cases} \end{cases}$$

e così f è l'IDENTITÀ e TOTALE

se $A = E_{f(x)}$ t.c. $f(x)$ è CALC. TOT. e quindi $W_{f(x)} = \mathbb{N}$ perché è TOTALE

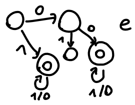
$(2 \rightarrow 1)$

```
definisco g(x){ i=0
          while (f(i) ≠ x)
              i++
          return 1
}
```

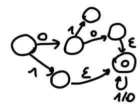
e A è il dominio di g semi-calc

2. automa con ε transiz, ε-NFA : automa che permette la transizione di stato anche senza input
il linguaggio accettato da un ε-NFA = NFA = DFA e accetta lin. regolari

dimostra che $\forall$ DFA M $\exists$ ε-NFA M' con un SOLO STATO FINALE t.c. $L(M) = L(M')$



e creo un solo stato finale e tutti quelli che erano finali prima li collego con ε-arco



3. $f(\cdot)$ è calc. TOT. Si mostri che $NTIME(f(n)) \leq TIME(c^{f(n)})$

max grado di NON-DET

NTIME(f(n)) vuol dire che non è deterministico, quindi ad ogni passo ha c scelte possibili e quindi se ci sono $f(n)$ passi per 1 scelta allora $c^{f(n)}$ è il # totale di passi $NTIME \leq TIME(c^{f(n)})$
↳ SOVRASTIMA

4. Si dica se A e B sono o meno CF o reg.

$A = \{1x : x \in \{0,1\}^* \wedge 1x$ letto in binario vale 2^{n-1}, per n opportuno$\}$
↳ leggerlo con tutti 1

$A = \{1^+\}$ → è REGOLARE (sono solo tutti 1)

$B = \{1x : x \in \{0,1\}^* \wedge |1x| = 2^n - 1$ per n opportuno$\}$
↳ stringhe che iniziano per 1 e che hanno lunghezza $2^n - 1$

non sembra CF perché non sembrano esserci relaz. tra 0 e 1

provo P.L. per i CF: $z = 1^{2^n-1}$

1 $z = |uv^iwx^iy|$
2 $|vwx| \leq n$
3 $|vx| > 0$

1^{2^n-1}

$n=3$ $8-1=7$
$n=4$ 15

$i=2 \Rightarrow uv^2wx^2y \Rightarrow 1^{2^n-1+a} \notin L$ se $0 < a < 2^n$ $2^n - 1 + 2^n$ e vado alla potenza di 2 successiva -1
↳ $a \leq n$ per condiz. 2

$\Rightarrow$ non è CF

5. $- C = \{x : \varphi_{\lceil \frac{x}{10} \rceil}(x!+1) = x\}$

C è R.E. → COMPLETO $K \leq C$ → CREATIVO

$\psi(a,b) = \begin{cases} \frac{b}{(b-1)!}^{-1} & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ per SMN $\exists g$ RIC TOT → $\varphi_{g(a)}(b) = \psi(a,b)$ → NO

$\psi(a,b) = \begin{cases} f(x) & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ SMN

se $a \in K \rightarrow \forall b$ $\varphi_{g(a)}(b) = f(x)$ → $f(x) = \mu y(x - (y!+1) = 0)$ se $b = h(a)!+1$ allora $\varphi_{\lceil \frac{h(a)}{10} \rceil}(h(a)!+1) = h(a)$ e $h(a) = 10 \cdot g(a)$ $\Rightarrow h(a) \in C$

se $a \notin K \rightarrow \varphi_{..}(b)\uparrow \rightarrow g(a) \notin C$

$\overline{C}$ è PRODUTTIVO

- $E = \{(x,y) : (\forall z > x)(\varphi_z(x) = y)\} = \emptyset$ non esiste → RICORSIVO

$\overline{E} = \{(x,y) : (\exists z > x)(\varphi_z(x) \neq y)\} = \mathbb{N}$ perché sicuramente ne esiste una di mdT e col PADDING ne trovo ∞

↳ È MEGLIO RIDURRE DA $K, \overline{K}$ piuttosto che il complementare (valuta quale è più difficile)

- $D = \{(x,y,z) : z$ è PARI e (φ_x oppure φ_y è TOTALE)$\}$ $\overline{D} = \{(x,y,z) : \neg(z \text{ PARI} \wedge (\varphi_x \text{ TOTALE} \vee \varphi_y \text{ TOTALE}))\}$

$= z$ DISPARI $\vee$ (φ_x NON TOTALE $\wedge$ φ_y NON TOTALI))

$\overline{D} = \{(x,y,z) : z$ è DISPARI oppure (φ_x NON TOTALE $\wedge$ φ_y NON TOTALE)$\}$

$\exists z\ \varphi_x(z)\uparrow$ $\exists v\ \varphi_v(z)\uparrow$

provo $K \leq D$:

$$\psi(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$$ per SMN $\exists g$ ric tot t.c. $\varphi_{g(a)}$

se $a \in K \to \forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = 1 \to (2, g(a), g(a)) \in D$

se $a \notin K \to \varphi_{g(a)}(b)\uparrow \to (1, g(a), g(a)) \notin D$

allora $\overline{D}$ è produttivo

provo $\overline{K} \leq D$:

$$\psi(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{se } Ma(a) \not\downarrow \text{ in} \leq b \text{ passi} \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$$ per SMN $\exists g$ ric tot

se $a \in \overline{K}$: $\forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = 1$ e quindi $(2, g(a), g(a)) \in D$

se $a \notin \overline{K}$: $Ma(a)$ termina in t passi : - se $t \geq b$ $\varphi_{g(a)}\uparrow$ → $\varphi_{g(a)}$ NON TOTALE → $g(a) \notin D$

- se $t < b$ $\varphi_{g(a)} = 1$

ESAME 24 gennaio 2018

2. scrivi e dimostra 1° teo RIC.

TEO: Sia t una funz. RIC TOT, allora $\exists n$ t.c. $\varphi_{t(n)} = \varphi_n$

DIM: Data una mdt generica φ_u, sia ψ definita come segue: $$\psi(u,x) = \begin{cases} \varphi_{\varphi_u(u)}(x) & \text{se } \varphi_u(u)\downarrow \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$$, per SMN ottengo g ric. tot.

compongo $t, g \Rightarrow t \circ g$ ed $\exists$ una mdT che la calcola → $\varphi_v(v) = (t \circ g)(v)$

sostituisco u con v nella definiz: $$\psi(v,x) = \begin{cases} \varphi_{\varphi_v(v)}(x) & \text{se } \varphi_v(v)\downarrow \\ \uparrow & \text{else} \end{cases} \to \begin{cases} \varphi_{t(g(v))}(x) & \text{se } \varphi_v(v)\downarrow \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$$ e poiché $t(g(v))$ è TOTALE allora $\varphi_v(v)$ è TOTALE e termina sempre. $\Rightarrow \varphi_{g(v)}(x) = \varphi_{t(g(v))}(x)$

3. la funzione è PRIM. RIC?

$$f(a,b) = \begin{cases} a & \text{se } b=0 \\ Ack(2,b) & \text{se } a=0 \wedge b>0 \\ f(a-1,b+1) & \text{se } a>0 \wedge b>0 \end{cases} \rightarrow \quad 2b+3 \quad \rightarrow \text{è LINEARE}$$

$f(0,0) = 0$

$f(0,1) = Ack(2,1) = 3$ . . .

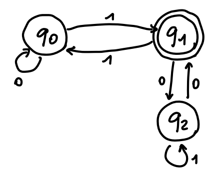
$f(1,0) = 1$

$f(1,1) = f(0,2) = Ack(2,2)$

4. collocalo nella gerarchia di Chomsky

$A = \{ u_m \dots u_0 \in \{0,1\}^* \mid m \geq 0, \sum_{i=0}^{m} u_i \cdot 2^i \bmod 3 \neq 0 \}$ numeri binari che convertiti in base 10 non sono multipli di 3

un numero è divisibile per 3 se la somma delle cifre è multiplo di 3 → è REGOLARE



resto	num
0	0
1	1 = 1
2	2 = 10
0	3 = 11
1	4 = 100
2	5 = 101
⋮	

$q_0 \rightarrow$ resto 0

$q_1 \rightarrow$ resto 1

$q_2 \rightarrow$ resto 2

5. studia gli insiemi

- $D = \{x : x \text{ è PARI e } (\exists y > x)(\varphi_y(x) = 0)\} = \mathbb{N}$ per PADDING → RICORSIVO e $\overline{D} = \emptyset$ RICORSIVO

- $B = \{(x,y) \mid \varphi_x(y^2) = 2y\}$

$z \Rightarrow x = (z)_1 \quad y = (z)_2$ e sembra R.E.

$K \leq B \rightarrow$

$$\psi(a,b) = \begin{cases} 2\sqrt{b} & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$$ per SMN $\exists g$ ric. tot $\varphi_{g(a)}(b) = \psi(a,b)$

se $a \in K$: $\forall b \; \varphi_{g(a)}(b)\downarrow \Rightarrow b = y^2 \quad \varphi_{g(a)}(y^2) = 2\sqrt{y^2} = 2y \rightarrow (g(a), y^2) \in B$

se $a \notin K$: $\forall b \; \varphi_{g(a)}(b)\uparrow \rightarrow (g(a), y^2) \notin B \quad \rightarrow \overline{B}$ è produttivo B è creativo

- $C = \{x : \emptyset \subset W_x \subset \mathbb{N}\}$ → macchina non totale non vuota

$= \{x : \exists y \; \varphi_x(y)\downarrow \wedge \exists z \; \varphi_x(z)\uparrow\}$

$\overline{C} = \{x : \forall y \; \varphi_x(y)\uparrow \vee \forall z \; \varphi_x(z)\downarrow\}$

$\emptyset$ $\mathbb{N}$

$K \leq C \rightarrow \psi(a,b) = \begin{cases} \varphi_b(b) & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$

se $a \in K \rightarrow \forall b\ \varphi_{g(a)}(b) = \varphi_b(b) \rightarrow W_{g(a)} = K \rightarrow g(a) \in C$

$\rightarrow \bar{C}$ è produttivo

se $a \notin K \rightarrow \varphi_{g(a)}(b)\uparrow \rightarrow W_{g(a)} = \emptyset \rightarrow g(a) \in \bar{C}$

$K \leq \bar{C} \rightarrow \psi(a,b) = \begin{cases} & M_a(a)\not\downarrow \text{ in} \leq b \text{ passi} \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$

ESAME 21 febbraio 2018

1. grammatica monotona: grammatica in cui in ogni produz. si "toglie" un terminale, con produz. del tipo $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in (V \cup T)^+, \beta \in (V \cup T)^+$ e $|\alpha| \leq |\beta|$

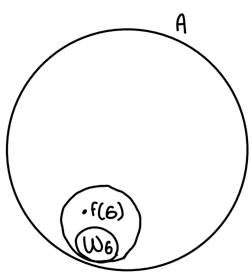
↳ gramm. di tipo 1

banalmente se da CF la porto in F.N. GREIBACH ($A \rightarrow a\alpha$) diventa di TIPO 1
↳ stringa

il test $x \in L(G)$ è decidibile attraverso il grafo definito dai nodi $V = \{$stringhe generate da $G\}$ e gli archi sono le produzioni e cerco se esiste un cammino di lunghezza x, dalla start e se termina in x.

2. insieme PRODUTTIVO: insieme A in cui esiste una funz$^{\text{PRODUTTIVA}}$ f_A TOT RIC t.c. $\forall x \in \mathbb{N}$ $W_x \subseteq A$ allora $f(x) \in A \setminus W_x$

ogni ins. prod. ha un sottoinsieme R.E. infinito. prendo $W_6 = \emptyset$ e con $f(6)$ vado in $A \setminus W_6$ e costruisco un nuovo insieme. questo è il dom di un'altra mdT, analogamente prendo un altro elemento fuori e ripeto



$\Rightarrow$ TROVO ∞ ins. finiti e considero l'ultimo $\rightarrow$ è R.E. ∞

3. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

definisci le classi TIME $(f(n))$, NTIME $(f(n))$:
- TIME $(f(n))$: insieme di linguaggi che possono essere decisi in $f(n)$ passi in maniera determ. da una K-mdT
- NTIME $(f(n))$: insiemi di linguaggi che possono essere decisi in $f(n)$ passi in maniera non det. da una ND-mdT.

definisci le classi P e NP:
- P: insieme dei problemi risolvibili da un algo. det. che opera in tempo polinomiale $\rightarrow P = \bigcup_{k>0} \text{TIME}(n^k)$
- NP: $\bigcup_{k>0} \text{NTIME}(n^k)$