Prova scritta di Calcolo Scientifico

Udine, 22 giugno 2021

1. Sia $\mathcal{F} := \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $e_{\max} = e_{\min}$, la precisione di macchina u sia $1/32$ e $realmax/realmin = 31$.
   - Siano dati $x = (1.\overline{0111})_2$ e $y = (10.\overline{0111})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y}$.
   - ⋆ Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
   - Definisci i numeri denormalizzati per $\mathcal{F}$ e determina il numero denormalizzato positivo più piccolo. Giustifica la risposta.
2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$.
   - Sia $f(x) = \sqrt{g(x)}$, con g funzioni reale non negativa. Determina la relazione tra il numero di condizionamento di f e quello di g. Studia il condizionamento della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2}{x+1}}$ con x che varia nel campo di esistenza di f.
   - Sia $p(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$, con $n = 2$ e x numero di macchina. Per calcolare $p(x)$ usa l'algoritmo di Horner e studia la stabilità.
   - Scrivi la pseudocodifica dell'algoritmo di Horner per $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, con n intero qualsiasi. Analizza la sua complessità computazionale.
3. Sia $f(x) = x^4 - 11x^2 + 18x - 8$.
   - Disegna il grafico di f. Determina le radici α, β, γ con $\alpha < \beta < \gamma$ (Suggerimento: valuta $f(1)$).
   - Studia la convergenza del metodo di Newton ad α e a γ.
   - ⋆ Siano $z_1, z_2, z_1 < z_2$, i due punti di flesso della funzione f. Studia la convergenza del metodo di Newton a β quando $x_0 \in (z_1, z_2)$
   - Considera le successioni ottenute con il metodo di Newton con i seguenti valori iniziali
     (a) $x_0 = -5$
     (b) $x_0 = -3$
     (c) $x_0 = 0$
     (d) $x_0 = 3$

     Sono convergenti? Se convergenti, convergono ad α, β o a γ? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
   - Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Considera il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$. Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente in maniera monotona a α con ordine di convergenza quadratico. La successione ottenuta con $x_0 = -3$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - Studia la convergenza locale a γ del metodo iterativo al punto precedente con $m = 120$. La successione ottenuta con $x_0 = 3$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -9 & \alpha \\ 2 & 3 & 4 \\ 2\alpha & 13 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quale scelta del parametri α esiste tale fattorizzazione?
   - Studia al variare di α il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo.
   - Sia $\alpha = 4$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
5. Sia $f(x) = \log_2(1 + 4x^2)$. Dati i punti $P_0 = (-1/2, f(-1/2))$, $P_1 = (0, f(0))$, $P_2 = (1/2, f(1/2))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i tre punti e tale che $\tilde{p}'(0) = f'(0)$ nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti P_0, P_1, P_2 e $P_3 = (\sqrt{3}/2, f(\sqrt{3}/2))$ nel senso dei minimi quadrati.

⋆ Scrivi la pseudocodifica dell'algoritmo di eliminazione di Gauss di base. Modificala per applicare la tecnica del pivot parziale.