=> non è CF

ESAME 21 gennaio 2021

4. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se, fissato i, il seguente insieme A_i sia (o meno) regolare o libero dal contesto ($\#(a,x)$ denota il numero delle occorrenze del carattere a nella stringa x).

$$A_i = \{x \in \{0,1\}^* : \#(0,x) < \#(1,x) \wedge |x| \leq i!\}$$

Si dica (sempre motivando) lo stesso dell'insieme $A = \bigcup_{i>0} A_i$.

Tutti gli A_i sono FINITI ($|x| \leq i$) => sono REGOLARI

es. $i=2$ ha $|x| \leq 2! = 2$

A_2 accetta $\varepsilon, 1, 11$ $\quad L(A_2) = \{\varepsilon + 1 + 11\}$

es. $i=3$ ha $|x| \leq 3! = 6$

A_3 accetta $\varepsilon, 1, 11, 110, 101, 011, 111, 1011 \dots$

$L(A_3) = \{\varepsilon + 1 + 11 + \dots\}$

=> sono REGOLARI

L'UNIONE A è:

- REGOLARE: o linguaggio o AUTOMA
  ↳ sono ∞ → UNIONE ∞ va studiata!

$L(A) = \{x \in \{0,1\}^*, \#(0,x) < \#(1,x)\}$ → bisogna ricordarsi quanto siano gli 0 o gli 1 o la loro differenza → MEMORIA (non è REGOLARE, va dimostrato col PUMP.)

PUMP. LEMMA per i REGOLARI

↳ $z = 0^m 1^{m+1}$

$uv^iw \in L$

$|uv| \leq m$

$|v| > 0$

$|uvw| \geq m$

$\underbrace{0^m}_{uv} \underbrace{1^{m+1}}_{w}$

↳ se pompi v arrivi ad un: $u = 0^a$, $v = 0^{bi}$, $w = 0^{m-(a+bi)} 1^{m+1}$ $\quad$ se $i \geq 2$ si esce da $L(A)$

per definiz, senza SPOMPARE/POMPARE (ovvero $i=1$)

$0^m 1^{m+1} = uv^1w$

e con $i=2$ (POMPANDO) sforo fuori dal linguaggio

=> NON È REGOLARE

- CONTEXT FREE: devo poter scrivere una grammatica

term.

$S \rightarrow 1 \mid 1S \mid S1 \mid 1S0 \mid 0S1 \mid 01S \mid S01 \mid 10S \mid S10$

definiamo $G = \langle V, T, \delta, S \rangle$ (V: S; T: 1; S: S)

$\Rightarrow$ è CF

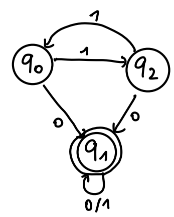
ESERCIZIARIO:

2.2) Determina i LINGUAGGI ACCETTATI $\qquad \Sigma = \{0,1\}$

A_1 :

	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
q_2	q_1	q_0

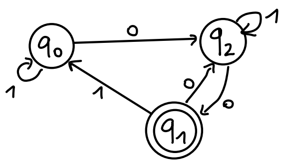
$F = \{q_1\}$



$L(A_1)$: insieme Lo degli elementi di Σ^* contenenti almeno uno ZERO

A_2 :

	0	1
q_0	q_2	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_1	q_2



$L(A_2)$: insieme delle stringhe che ha #pari di 0

$L(q_1) \Rightarrow Q_2 \cdot 0$

$\Rightarrow (Q_1 \cdot 0 + Q_2 \cdot 1 + Q_0 \cdot 0) \cdot 0$

$\Rightarrow \dots ?$

ESAME 18 FEBBRAIO 2021

4. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se i seguenti linguaggi A e B siano (o meno) regolari o liberi dal contesto

$$A = \left\{ 1x : \begin{array}{l} x \in \{0,1\}^* \wedge \\ 1x \text{ letto come numero binario vale } 2^n - 1, \text{ per } n \text{ opportuno} \end{array} \right\}$$
$$B = \{1x : x \in \{0,1\}^* \wedge |1x| = 2^n - 1 \text{ per } n \text{ opportuno}\}$$

A = tutte le stringhe di lunghezza 1 → REGEX: $(1)^+$ e quindi è REGOLARE

B = tutte le stringhe, che iniziano con 1, che hanno card. $2^n - 1$ (1, 3, 7, 15 ...)

→ non è REG. (non trovo un DFA che salta da 1 a 3 a 7 a 15 ...)

→ non è CF

PUMP. LEMMA per i CF: $\quad uv^iwx^iy = z \qquad |vwx| \leq m, \; |vx| \geq 1$

prendo $z = 1^{2^n - 1}$

$i = 0 \Rightarrow uv^0wx^0y$

$u = 1^a$
$v = 1^b$
$w = 1^c$
$x = 1^d$
$y = 1^{2^n - 1 - (a + bi + c + di)}$

$2^n \cancel{-1} + (b+d)(i-1) = 2^J \cancel{-1}$ e devo trovare un i che non

$2^m + (b+d)(i-1) = 2^J$ rende vera l'uguaglianza

$i = 2^{m+1} + 1$ $\quad 2^m + (b+d)2^{m+1} = 2^J$

$2^m(2(b+d)+1) = 2^J$

e $2(b+d)+1$ è DISPARI quindi non è CF

ESAME 28 giugno 2011

4. Si consideri, al variare di $i \in \mathbb{N}$ l'insieme

$$A_i = \left\{ x \in \{0,1,2\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \#(0,x) \leq i \wedge \#(1,x) \leq i \wedge \#(2,x) \leq i \wedge \\ \#(0,x) \leq \#(2,x) \wedge \#(2,x) \leq \#(1,x) \end{array} \right\}$$

ove $\#(a,x)$ denota il numero di occorrenze del simbolo a nella stringa x.

(a) Si dimostri che ciascun A_i è regolare e si definisca un DFA per uno dei linguaggi A_i che accetta in la stringa 2011.

(b) Si studi l'insieme $B = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ (qualora sia regolare si definisca un DFA che lo riconosce, qualora non lo sia, lo si dimostri; qualora sia libero dal contesto si scriva una grammatica che lo genera, qualora non lo sia, lo si dimostri)

a) $A_0 = \{\varepsilon\}$

anche le loro PERMUTAZ.

$A_1 = \{1, 21, 021, A_0\}$

$A_2 = \{A_0, A_1, 11, 211, 2211, 2011, \ldots\} \rightarrow$ 2011 è accettato da $A_2 \rightarrow$ ne faccio l'automa

$\downarrow$

$\Rightarrow$ A_i sono finiti $\Rightarrow$ REGOLARI

il DFA è albero bin. con 3^6 stati (dove 6 è la lun. max della stringa)

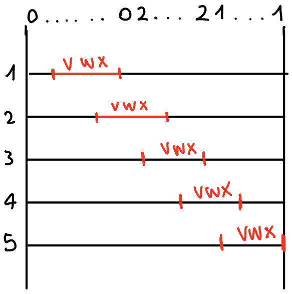
DFA

In realtà il prof. voleva l'automa per 201

b) $B = \bigcup_{i \geq 0} A_i$

dimostro che non è CF: PUMP. LEMMA CF

$z = 0^m 2^m 1^m \in L(B)$ $\quad z = uv^i w x^i y$ $\quad |vx| \geq 1$, $|vwx| \leq m$, $|z| \geq m$



qua pompo → così ho più zeri di 2 e 1 → $0^a 2^m 1^m$, $a > m$ $\notin L(B)$

qua pompo $\quad i = 2 \quad 0^a 2^b 1^m \quad a,b > m \rightarrow \#(0,2) > \#(1,2)$ e $\#(2,2) > \#(1,2)$

pompo $\quad i = 2 \quad uv^2wx^2y = 0^m 2^a 1^m \rightarrow a > m \quad z \notin L(B)$

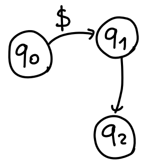
spompo ⎤ → $i = 0$ $\quad uv^0wx^0y = 0^m 2^a 1^b \quad a,b < m \quad z \notin L(B)$

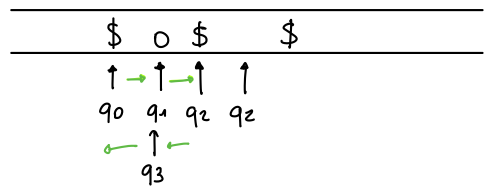
spompo ⎦ $\quad uv^0wx^0y = 0^m 2^m 1^a \quad a < m \quad z \notin L(B)$

ESAME 21 luglio 2011

4. Cosa calcola la seguente funzione di TURING? (calcola la funz. ZERO)

	\$	0
q_0	q_1 \$ R	
q_1	q_2 0 R	q_2 0 R
q_2	q_3 \$ L	q_3 \$ L
q_3	q_4 \$ L	q_4 0 L

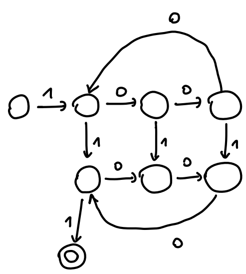




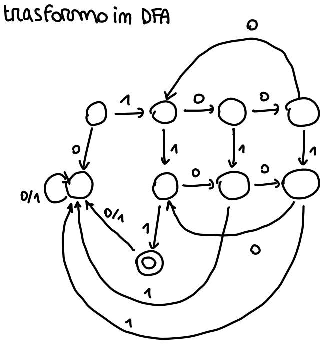
5. $A_i = \{1 0^x 1 0^y 1 \mid x, y \in \mathbb{N}, (x+y) \bmod 3 = 0, x+y \leq i\}$ è limitazione

⇒ A_i è FINITO ⇒ regolare

⇒ $B = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ $\quad$ $(x+y)$ multiplo di 3 ⇒



NFA e poi lo trasformo in DFA

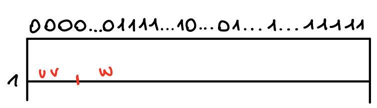


ESAME 21 settembre 2011

4. $A = \{0^n 1^m 0^m 1^{2n} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ dimostra che è CF ma non REGOLARE

non è regolare perché: $\quad z = uv^iw \quad |uv| \leq n$
$\quad |z| \geq n$

$z = 0^n 1^m 0^m 1^{2n}$



$i = 2 \quad uv^2w \Rightarrow 0^{2a} 1^m 0^m 1^{2n}, \; a > \frac{n}{2} \notin L(A)$ → non è regolare

è CONTEXT FREE perchè: $\quad S \rightarrow 0S11 \mid \varepsilon \mid A$ $\Big\}$ così copro $0^n 1^{2n}$

↳ ie # di 0 è la metà di quello di 1

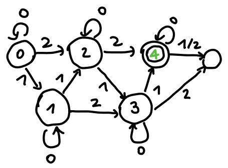
$A \to \varepsilon \mid 1A0$ } così copro $1^m 0^m$

$G = (V, T, P, S)$
$= (\{0,1\}, \varepsilon, \{S, A\}, S\}$

ESAME 24 gennaio 2012

4. $A = \{ x \in \{0,1,2\}^* \mid \sum_{i=1}^{|x|} x_i = 4 \}$ reg? CF?

A è INFINITO perchè posso aggiungere zeri in fondo → va studiato

DFA :  ⇒ è REGOLARE

ESAME 15 SETTEMBRE 2020

1. a grammatica CF e di linguaggio CF.
   b Dimostra che i linguaggi CF sono chiusi per concatenaz.

a. G: è una quadrupla e dichiarano come vengono costruite le stringhe FORMA $\alpha \to A$
   $G = (V, T, P, S)$ con V var, T ter, P ins. prod, S var. iniz.
   il linguaggio CF è l'insieme delle stringhe generate da una GCF.

b. prendo $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S_1)$ e G_2 e creo una nuova grammatica con

$$G = (V_1 \cup V_2 \cup S, T_1 \cup T_2, P = P_1 \cup P_2 \cup S \to S_1 S_2, S)$$

2. definisci la nozione di funz. prim. ric :

insiemi di funz ottenibili dalle funz. ric. di base usando COMPOSIZIONE e RIC. PRIMITIVE

COMP: $f(x_1, \dots, x_m) = h(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_k(x_1, \dots, x_m))$ con $g_1, \dots, g_k : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ e $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

RIC. PRIM: $g : \mathbb{N}^{m-1} \to \mathbb{N}$ e $h : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ $\begin{cases} f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{m-1}) \\ f(x_1, \dots, x_{m-1}, y+1) = h(x_1, \dots, x_{m-1}, y, f(x_1, \dots, x_{m-1}, y)) \end{cases}$

dimostra che $f(x,y,z) = x + y + z$ è PRIM. RIC.

noi abbiamo fatto la somma tra 2 el. che è RIC. BASE : $+(a, b+1) = \begin{cases} S(a) & \text{se } b=0 \\ S(+(a,b)) & \text{else} \end{cases}$ e devo comporla

$f(x,y,z) = +(+(x,y), Id(z))$

↳ non posso mettere una var.

3. Un insieme A è SEMPLICE se : - è R.E
- $\forall b$ R.E. ∞ allora $(A \cap B) \neq \emptyset$
- $|\bar{A}| = \infty$

se S è semplice
dimostra che non è COMPLETO : $K \leq A$ allora COMPLETO e quindi CREATIVO
allora $\bar{A}$ è produttivo significa che $\exists x : W_x \subseteq \bar{A}$ e $|W_x| = \infty$
e per insieme semplice $A \cap W_x \subseteq \bar{A} \neq 0$ ASSURDO.

4. CIRCUIT SAT è NP-COMPLETO
CIRCUIT VALUE è P-COMPLETO → teo COOK e LEVIN

dimostraz. che 3SAT è NP-completo

riduco SAT ≤ 3SAT ...

5. $A = \{1 0^n 1 : n \text{ dispari } \vee n \text{ pot. di } 2\}$ è REG o CF?

sembra CF (perchè REG.) — non sembra CF

$S \to 1A1$ $A \to 00A1\varepsilon$ ⇒ non va bene, sembra non CF

provo P.L. per CF → $z = 10^{2^n}1$ $z = uv^iwx^iy$ con $|uvwxy| > m$
$|vx| > 0$
$|vwx| \leq m$

$a < m$

$\underline{1\ 0\ldots 0\ 1}^{\;2^n}$
$v^i w x^i y \to i=0 \to 0^{2^n - a} 1 \notin L$
$u\ vwx \to i=1\ \ 10^{2^n + (i-1)\cdot a} 1 \notin L$
$u\ vw\ x \to i=0\ \ 10^{2^n} \notin L$

6. - $B = \{x : \varphi_x(0) = 5 \vee \varphi_x(1) = 3\}$

B sembra R.E., provo se è completo : $K \leq B$

$$\psi(a,b) = \begin{cases} 5 & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$$ per SMN $\exists g$ n.t. t.c. $\psi(a,b) = \varphi_{g(a)}(b)$

se $a \in K \to \forall b\ \ \varphi_{g(a)}(b) = 5 \Rightarrow$ se $b = 0$ allora $g(a) \in B$

se $a \notin K \to \forall b\ \ \varphi_{g(a)}(b)\uparrow \Rightarrow g(a) \notin B$

per il complementare so che $K \leq B \Rightarrow B$ è R.E. COMPLETO CREATIVO
$\bar{B}$ è PRODUTTIVO e quindi NON R.E.

- $C = \{x : (\exists y > x)(\varphi_y(x) = x!)\} = \mathbb{N}$ perchè col PADDING trovo ∞ macchine da quella di indice i che calcola il fattoriale

$\bar{C} = \emptyset$

K contiene indici t.c. $\varphi_x(x)\downarrow$

- $D = \{x : W_x = K\}$

$K \leq D$: $\psi(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ SMN $\rightarrow g(a)$

se $a \in K \rightarrow \forall b \; \varphi_{g(a)}(b) = 0$ se $b = g(a) \rightarrow \cancel{\varphi_{g(a)}(g(a))\downarrow} \rightarrow g(a) \in K \rightarrow W_{g(x)} = \mathbb{N}$

$\psi(a,b) = \begin{cases} \varphi_b(b) & \text{se } a \in K \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ SMN $\rightarrow g(a)$

se $a \in K \rightarrow \forall b \; \varphi_{g(a)}(b) = \varphi_b(b)$ e quindi $W_{g(a)} = K \rightarrow g(a) \in D$

se $a \notin K \rightarrow \varphi_{g(a)}(b)\uparrow \rightarrow g(a) \notin D$

$\Rightarrow$ non serve che studio $\bar{D}$ $\quad K \leq D \Leftrightarrow \bar{K} \leq \bar{D}$ $\rightarrow \bar{D}$ è produttivo perchè $\bar{K}$ si riduce ad esso

ora provo:

$\bar{K} \leq D$

MAPPO gli elementi $a \in \bar{K}$ in una funz che ha dom = K

$\psi(a,b) = \begin{cases} \varphi_b(b) & M_a(a)\not\downarrow \leq b \text{ passi} \\ \uparrow & \text{else} \end{cases}$ SMN $\varphi_{g(a)}$

se $a \in \bar{K} \rightarrow \forall b \; M_a(a)\not\downarrow$ dopo b passi e $\varphi_{g(a)}(b) = \varphi_b(b) \rightarrow W_{g(a)} = K \rightarrow g(a) \in D$

se $a \notin \bar{K} \rightarrow M_a(a)\downarrow$ in p passi $\rightarrow$ se: - $p > b$ allora restituisce $\varphi_b(b) \rightarrow$ $W_{g(a)} = K \setminus \{0, \ldots, b\}$ (indici che terminano in $\leq b$ passi) $\rightarrow W_{g(a)} \neq K \rightarrow g(a) \notin D$
- $p \leq b$ restituisce $\uparrow \rightarrow$

$\Rightarrow D$ è PRODUTTIVO

ESAME 21 gennaio 2021

1. grammatica di tipo 1 (CS)
é una QUADRUPLA $G = (V, T, P, S)$ con P del tipo $\alpha \rightarrow \beta$ con $\alpha \in (V \cup T)^+$ e $\beta \in (V \cup T)^+$ e $|\alpha| \leq |\beta|$

e il linguaggio di tipo 1 è generato da G di tipo 1

Dimostra che dato G_1 e data x, $x \in L(G)$ è decidibile.