

Risolvi i seguenti esercizi giustificando sinteticamente le risposte.

1. Astrazione sui dati e dati procedurali

Si vuole introdurre in Scheme un dato astratto “*crivello di Eratostene*” per realizzare un modello del crivello utilizzato nell’algoritmo di Eratostene per determinare tutti i numeri primi che non superano un dato limite n . Più specificamente, il protocollo del dato astratto è definito dalle seguenti procedure:

```
(new-sieve)           ; crea un crivello con potezialmente tutti gli interi  $\geq 2$ 
(is-in-sieve p sieve) ; verifica se  $p$  è (ancora) presente nel crivello sieve
(remove-multiples-of p sieve) ; crivello con il contenuto di sieve tranne i multipli propri di  $p$ 
(sieve-list sieve n)  ; restituisce la lista dei numeri  $\leq n$  contenuti nel crivello sieve
```

Applicando questa struttura, l'algoritmo per generare i numeri primi non superiori a n può essere formulato così:

```
(define primes-list
  (lambda (n) (eratosthenes 2 n (new-sieve)) ))

(define eratosthenes
  (lambda (p n s)
    (cond ((> p n) (sieve-list s n))
          ((is-in-sieve p s) (eratosthenes (+ p 1) n (remove-multiples-of p s)))
          (else (eratosthenes (+ p 1) n s))
          )))
```

Completa la realizzazione del protocollo in modo tale che siano rispettate le specifiche illustrate sopra.

```
(define new-sieve                                ; val: crivello di Eratostene (nuovo)
  (lambda ()                                     ; “costruttore” senza argomenti
    (lambda (x) (> x 1))                       ; rappresentazione interna procedurale
    ))

(define is-in-sieve                              ; val: booleano
  (lambda (p sieve)                             ; p: intero, sieve: crivello di Eratostene
    (sieve p)
    ))

(define remove-multiples-of                    ; val: crivello di Eratostene
  (lambda (p sieve)                             ; p: intero > 1, sieve: crivello di Eratostene
    (lambda (x)
      (if ( ..... )
          (= x p)
          ..... )
      ))
    ))

(define sieve-list                            ; val: lista di interi
  (lambda (sieve n)                             ; sieve: crivello di Eratostene, n: intero
    (scan-sieve 2 n sieve)
    ))

(define scan-sieve
  (lambda (x y s)
    (cond ((> x y) ..... )
          .....
          .....
          .....
          )))
```

2. Programmazione dinamica

Applica la tecnica *bottom-up* di *programmazione dinamica* alla seguente procedura ricorsiva, al fine di trasformarla in un programma iterativo più efficiente.

```
public static long s( int n, int k ) {    //  $1 \leq k \leq n$ 
    if ( k == n ) {
        return 1;
    } else {
        long x = (n - 1) * s( n-1, k );
        if ( k == 1 ) {
            return x;
        } else {
            return x + s( n-1, k-1 );
        }
    }
}
```

3. Verifica formale della correttezza

Il metodo statico `lcm` calcola il minimo comune multiplo (*mcm*) di due interi positivi m, n . Nel programma sono riportate precondizione, postcondizione, invariante e funzione di terminazione. Dimostra la correttezza parziale del programma.

```
public static int lcm( int m, int n ) {  
  
    int x = m;                // Pre:    $m, n > 0$   
    int y = n;  
  
    while ( x != y ) {        // Inv:    $0 < x, y \leq mcm(m,n), x \% m = 0, y \% n = 0$   
                                // Term:  $2 \cdot mcm(m,n) - x - y$   
        if ( x < y ) {  
            int s = y + m - 1;  
            x = s - s % m;  
        } else {  
            int s = x + n - 1;  
            y = s - s % n;  
        }  
    }  
    return x;                // Post:  $x = mcm(m,n)$   
}
```

4. Programmazione in Scheme

Data una lista *ordinata* di numeri con almeno due elementi, la procedura `closest-pair` restituisce una coppia di numeri la cui differenza è minima. Esempio: `(closest-pair '(0.1 0.3 0.5 0.6 0.8 1.1)) → (0.5 0.6)`. Formalizza un programma in Scheme per `closest-pair`.

5. Ricorsione e iterazione

Dato un *albero di Huffman*, il metodo statico `longestCodeLength` determina la lunghezza del più lungo fra i codici di Huffman associati ai caratteri che compaiono in un documento di testo. Più specificamente, la visita dell'albero, finalizzata alla determinazione di tale lunghezza, è realizzata attraverso uno schema iterativo. Completa la definizione del metodo `longestCodeLength` riportata nel riquadro.

```
public static int longestCodeLength( Node root ) {

    int lc = _____ ;

    Stack<Node> stack = new Stack<Node>();
    Stack<Integer> depth = new Stack<Integer>();

    stack.push( root );
    depth.push( 0 );

    while ( _____ ) {

        Node n = _____ ;

        int d = _____ ;

        if ( n.isLeaf() ) {
            lc = Math.max( lc, d );
        } else {

            _____

            _____

            _____

            _____

        }
    }
    return lc;
}
```