ESAME 15 GIUGNO 2021

1. Si enunci e dimostri il teorema di equivalenza tra formalismi DFA e NFA.
2. Si descriva una possibile tecnica per la enumerazione delle macchine di Turing e si dica (spiegando perchè) se $M_{28}(28)$ termina.
3. Si dia la definizione di di insieme produttivo e si mostri che ogni insieme produttivo ha un sottoinsieme r.e. e infinito.
4. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se i seguenti insiemi A_i e A siano (o meno) regolari o liberi dal contesto.

$$A_i = \left\{ v \in \{0,1,2\}^* : \begin{array}{l} |v| = i \wedge \\ v \text{ contiene (esattamente } \lfloor \frac{i}{4} \rfloor \text{ `0') o (almeno un `2')} \end{array} \right\}$$

   Mentre $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y \leq 10)(\varphi_x(y) = 5y)\} \\ C & = & \{\langle x, y\rangle : (\forall z \geq y)((z \text{ è pari}) \to \varphi_x(z) = 2z)\} \\ D & = & \{x : W_x \text{ è ricorsivo}\} \end{array}$$

Traccia della soluzione:
A_i è finito e dunque regolare. A non è regolare. Dato $n \in \mathbb{N}$ prendete ad esempio $z = 0^n 1^{3n}$ e $i = 2$. Ma sarà CF?
B è banalmente r.e. (proviamo $M_x(0), M_x(1), \ldots, M_x(10)$ e verifichiamo il risultato. Per la completezza, si pensi a $\psi(a, b) = 5y$ se $a \in K$, indefinito altrimenti.
C è produttivo come il suo complementare. Per le riduzioni, si pensi a $\psi(a, b) = 2b$ se $a \in K$, indefinito altrimenti, per un verso mentre $\psi(a, b) = 2b$ se $M_a(a)$ non termina in $\leq t$ passi, e indefinito altrimenti. Nella funzione di riduzione si userà ad esempio $(g(a), 0)$.
D è produttivo come il suo complementare. Pensateci.

ESAME 20 LUGLIO 2021

1. Si definisca la nozione di grammatica di tipo 1, si dia la corrispondente definizione di linguaggio generato $L(G)$ e si mostri che il test $x \in L(G)$ è decidibile.

2. Si enunci e dimostri il Teorema s-m-n.

3. Si definisca la classe P e si dica formalmente cosa significhi essere P completo. Si fornisca un esempio di problema P completo.

4. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se, una volta fissato un numero intero i, il seguente insieme A_i sia (o meno) regolare o libero dal contesto.

$$A_i = \left\{ v \in \{0,1\}^* : \begin{array}{l} v \text{ è la codifica binaria di un numero primo minore di } i \\ \text{(senza zeri inutili davanti al numero)} \end{array} \right\}$$

   Nel caso A_i fosse regolare si fornisca l'automa minimo per A_7.

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y \leq x!)(\varphi_x((2y)^2) = 3y)\} \\ C & = & \{\langle x, y\rangle : W_x = \emptyset \vee E_y \neq \emptyset\} \\ D & = & \{x : (\forall y > x)(\varphi_y(x) \downarrow \wedge \varphi_y(x) > x)\} \end{array}$$

6. Si analizzi l'insieme $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ (A_i dell'esercizio 4) e si motivi la sua collocazione nella gerarchia di Chomsky

Traccia della soluzione:
A_i è finito e dunque regolare.
Per mostrare che A non è regolare (similmente per mostrare che non è CF) dato n si scelga un numero primo di Mersenne (3, 7, 31, ...) maggiore di 2^n (dunque una stringa di 1 lunga almeno n). E poi?
B è banalmente r.e. (proviamo $M_x(0), M_x(1), \ldots, M_x(x!)$ e verifichiamo il risultato. Per la completezza, si pensi a $\psi(a,b) = 3\sqrt{b/2}$ se $a \in K$, indefinito altrimenti.
C è produttivo come il suo complementare.
$D = \emptyset$, ricorsivo.

ESAME 16 SETTEMBRE 2021

1. Si elenchino le proprietà di chiusura dei linguaggi liberi dal contesto e si dimostri che non sono chiusi per intersezione.

2. Si dia la definizione di insieme produttivo e si mostri che se A è produttivo, allora $\bar{A}$ è infinito

3. Si definisca il problema 3SAT e si mostri che è NP completo

4. Si dimostri che la seguente funzione è primitiva ricorsiva:

$$\begin{cases} f(0,y) & = & 0 \\ f(x+1,0) & = & x+1 \\ f(x+1,y+1) & = & f(x+1,y)+x+1 \end{cases}$$

   Quanto vale $f(100,99)$?

5. Sia $v \in \{0,1\}^*$. Si mostri che

$$A = \{s \in \{0,1\}^* : v \text{ non è sottostringa di } s\}$$

   è un linguaggio regolare.

   Si definisca il DFA minimo (e si dimostri che è il minimo) per A quando $v = 0010$.

6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y \leq x)(\varphi_x(y) > y)\} \\ C & = & \{x : |E_x \cap \{0,1,2\}| < 3\} \\ D & = & \{x : (\forall y \geq x)(\varphi_y(x) > x)\} \end{array}$$

Traccia della soluzione:
I primi tre esercizi sono argomenti di teoria visti a lezione.
Se il primo argomento è 0 restituisce 0. Per capire cosa succede quando è maggiore di 0, proviamo un esempio $f(5,3) = f(5,2)+5 = f(5,1)+5+5 = f(5,0)+5+5+5 = 5+5+5+5 = 5 \times 4 = 20$ Si provi per induzione su y che se $x > 0$ allora $f(x,y) = x(y+1)$. Che funziona poi anche nel caso $x = 0$ come detto sopra.
Per A si ragioni sul duale, la proprietà vale poi per complementazione.
B npn è estensionale (perchè?), è r.e. completo. Anche $\bar{C}$ è r.e. completo, mentre D e $\bar{D}$ sono produttivi.

ESAME 17 GENNAIO 2022

1. Si enuncino e dimostrino le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari
2. Si enunci e dimostri l'indecidibilità del problema dell'arresto
3. Si definisca la classe NP e si dica esattamente cosa significa essere NP-completo
4. Si studi il seguente linguaggio e lo si collochi opportunamente nella gerarchia di Chomsky e nella opportuna classe di complessità

$$A = \left\{ v \in \{0,1,2\}^* : \begin{array}{l} v \text{ contiene esattamente una occorrenza di '2' e} \\ \text{Tolto il 2 da } v \text{ rimane una stringa } 0^n1^n \text{ per qualche } n \end{array} \right\}$$

5. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y \in \{1,2,\ldots,x\})(\varphi_x(y) = 5y) \wedge \varphi_x(0) = 5\} \\ C & = & \{\langle x,y \rangle : W_x = \emptyset \vee (E_x \subset E_y)\} \\ D & = & \{x : (\forall y \leq x)(\varphi_y(y) = y)\} \end{array}$$

$\subset$ sta per l'inclusione stretta.

Traccia della soluzione:
I primi tre esercizi sono argomenti di teoria visti a lezione.
4) Con il PL per i regolari si prova facilmente che non è regolare (si prenda la stringa 0^n21^n). A è CF e sta in P.
B è r.e. completo. Per la completezza si pensi a $\psi(a,0) = 5, \psi(a,b) = 5b$ se $b > 0 \wedge a \in K$, indefinito altrimenti.
C e $\bar{C}$ sono produttivi. Ad esempio sia n indice della funzione $f(a) = a\mathbf{mod}2$. Definiamo $\psi(a,b) = b$ se $a \in K$, indefinito altrimenti.
$K \leq C$. Avremo che se $a \in K$, $\emptyset \neq W_n = \mathbb{N}$, $E_n = \{0,1\} \subset \mathbb{N} = E_{g(a)}$, dunque $(n, g(a)) \in C$.
Se $a \notin K$, $\emptyset \neq W_n = \mathbb{N}$, $E_n = \{0,1\} \not\subset \emptyset = E_{g(a)}$, dunque $(n, g(a)) \notin C$.
$\bar{K} \leq C$. Si definisca ora $\psi(a,0) = 0$, $\psi(a,b) \uparrow$ se $M_a(a)$ non termina in $\leq b$ passi, b altrimenti.
Avremo che se $a \in \bar{K}$, $\emptyset \neq W_{g(a)} = \{0\}, E_g(a) = \{0\} \subset \{0,1\} = E_n$, dunque $(g(a), n) \in C$.
Se $a \in K$, $\emptyset \neq W_{g(a)} = \{0, t, t+1, \ldots\}, E_g(a) = \{0, t, t+1, \ldots\} \not\subset \{0,1\} = E_n$, dunque $(g(a), n) \notin C$.
Poichè $\varphi_6(6) \uparrow$, D è un sottoinsieme di $\{0,1,2,3,4,5\}$ dunque finito e pertanto ricorsivo.

ESAME 15 FEBBRAIO 2022

1. Si enunci e dimostri il teorema di equivalenza tra formalismi DFA e NFA.
2. Si scrivano le proprietà che caratterizzano un insieme semplice e si dimostri che un insieme semplice non può essere r.e. completo.
3. Si definisca la funzione di Ackermann e si mostri che è calcolabile e totale.
4. Si definisca la classe P e si dica formalmente cosa significhi essere P completo. Si fornisca un esempio di problema P completo.
5. Si studi il seguente linguaggio e lo si collochi opportunamente nella gerarchia di Chomsky e nella opportuna classe di complessità

$$A = \left\{ v \in \{0,1,2\}^* : \begin{array}{l} v \text{ NON inizia con lo '0' e} \\ v \text{ letto come numero in base 3 è un multiplo di 4} \end{array} \right\}$$

6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : \varphi_x(2x) = 5x\} \\ C & = & \{\langle x, y\rangle : (\forall z \geq x)(\varphi_y(z) = z)\} \\ D & = & \left\{x : \varphi_{\varphi_x(x)}(\varphi_x(x)) = x! \land (\forall y < x)(\varphi_y(y) = 5)\right\} \end{array}$$