Corso di laurea in Informatica - Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Prova scritta del 20 settembre 2010

1. Un'urna contiene 2 palline nere e 8 bianche. Una seconda urna contiene 5 palline nere e 5 bianche. Una terza urna contiene 8 palline nere e 2 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le tre con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, sei palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 5 nere, se le palline estratte risultano tre nere e tre bianche.

2. Una apparecchiatura dispone di due resistenze. La vita operativa X_i $(i = 1, 2)$ di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a 2 anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento dell'altra resistenza. Quando almeno una delle due resistenze è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Si supponga, per semplicità, che le resistenze siano le uniche componenti soggette a guasto. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino la moda di T e $P(T = 1)$.

3. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0, 1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = k(1 + x)$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante k. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano moda, mediana e valore atteso X. Sia infine $T = 1 - X$; si ottenga la varianza di T.

4. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(1, 1/4)$ (legge binomiale con indice $n = 1$ e parametro $p = 1/4$) e distribuzioni condizionate binomiali $Y|X = x \sim Bi(1, 1/2)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Si calcoli infine $P(X = Y)$.

5. Sia Y una variabile casuale univariata avente funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = 1/(1-t)$ per $t < 1$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $S = Y_1 + Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di S. Si ottengano valore atteso e varianza di S.

6. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(2, 4)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(2, 4/n)$. Sia $n = 4$. Si calcolino $P(\bar{Y}_4 > 2)$ e $P(\bar{Y}_4 < 1)$. Si ottenga infine il novantesimo percentile di $\bar{Y}_4$ (è il quantile-p con $p = 90/100$).

Buon lavoro!