Prova scritta di Calcolo Scientifico

`Udine, 23 luglio 2020`

1. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.
   - Determina gli interi $t, e_{\max}, e_{\min}$ in modo che $e_{\max} = e_{\min}$, la precisione di macchina u sia $1/8$ e $realmax/realmin = 112$.
   - Siano dati $x = (1.\overline{011})_2$ e $y = (10.\overline{011})_2$. Determina $\tilde{x} = fl(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = fl(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = \tilde{x} fl(+) \tilde{y} \in \mathcal{F}$.
   - ⋆ Scrivi x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.
   - Determina l'esponente intero e tale che $\tilde{z} \cdot 2^e = realmin$. Qual è il risultato di $realmax - \tilde{z}$? Giustifica la risposta.
2. Si vuole calcolare la funzione $y = f(x)$ con $f(x) = \ln(g(x))$, g funzione reale, nel campo di esistenza di f.
   - Scrivi il numero di condizionamento di f in funzione di quello di g. Sia $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Studia il condizionamento della funzione $f(x)$ con x che varia nel campo di esistenza di f.
   - Supponi che le funzioni $\ln(x), \sqrt{x}$ forniscano delle approssimazioni i cui errori relativi sono maggiorati dalla precisione di macchina u. Studia la stabilitá dell'algoritmo che calcola la funzione f con x numero di macchina.
3. Sia $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$.
   - Disegna il grafico di f. Determina le radici α, β, con $\alpha < \beta$.
   - Studia la convergenza del metodo di Newton ad α e β.
   - Considera le successioni ottenute con il metodo di Newton con i seguenti valori iniziali
     (a) $x_0 = -2$
     (b) $x_0 = -0.5$
     (c) $x_0 = -4/3$
     (d) $x_0 = 1/3$
     (e) $x_0 = 3$
     (f) $x_0 = 0$

     Sono convergenti? Se convergenti, convergono ad α o a β? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.
   - Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Verifica che α, β sono punti fissi di g e considera il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k), k = 0, 1, \ldots$.
   - Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente in maniera monotona ad α con fattore asintotico di convergenza pari a $\frac{1}{4}$. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - ⋆ Determina m in modo che il metodo sia localmente convergente ad α con ordine di convergenza quadratico. La successione ottenuta con $x_0 = -2$ è convergente? Giustifica la risposta.
   - Sia $m = -8$. Studia la convergenza locale a β del metodo. La successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.
4. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -\alpha + 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -\alpha + 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
   - Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quale scelta del parametri α esiste tale fattorizzazione?
   - Studia al variare di α il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo.
   - Sia $\alpha = 5$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.
   - Proponi un algoritmo per risolvere il sistema $Lz = d$. Scrivi la sua pseudocodifica e analizzane la complessità computazionale.
5. Sia $f(x) = \log_3(1 + 2x^2)$. Dati i punti $P_0 = (-1, f(-1))$, $P_1 = (0, f(0))$, $P_2 = (1, f(1))$.
   - Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i tre punti e $P_3 = (2, f(2))$ nella forma di Newton.
   - Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti P_0, P_1, P_2 e P_3 nel senso dei minimi quadrati.

⋆ Si vogliono stimare i parametri r, I_0 della funzione $I(t) = e^{rt} I_0, t \geq 0$ che descrive la crescita del numero degli infetti nello sviluppo di un'epidemia nella fase iniziale. Siano I_k, il numero degli infetti rilevati al tempo $t_k > 0, k = 1, 2, \ldots, N$. Ponendo $I_0 = e^{\ell}$, scrivi il sistema sovradeterminato da risolvere per determinare r, ℓ. (Suggerimento: scrivi $I(t) = e^{f(t)}$.)