Corso di laurea in Informatica - Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Prova scritta del 23 febbraio 2010

1. Un'urna contiene 1 pallina nera e 99 bianche. Una seconda urna contiene 60 palline nere e 40 bianche. Una terza urna contiene 99 palline nere e 1 bianca. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le tre con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, tre palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 60 nere, se le palline estratte risultano una nera e due bianche.

2. Una apparecchiatura dispone di due resistenze. La vita operativa T_i ($i = 1, 2$) di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a 4 anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre resistenze. Quando almeno una delle due resistenze è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Si supponga, per semplicità, che le resistenze siano le uniche componenti soggette a guasto. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di T_1 e T_2. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino la moda di T e $P(T = 5)$.

3. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [1, \infty)$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = k/x^2$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante k. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottenga la mediana di X. Sia infine $T = \log(X)$; si ottenga la distribuzione di probabilità di T (supporto e funzione di densità).

4. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(1, 1/2)$ (legge binomiale con indice $n = 1$ e parametro $p = 1/2$) e distribuzioni condizionate binomiali elementari $Y|X = x \sim Bi(2, 1/2)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Sia $S = X + Y$, si calcolino $E(S)$ e $V(S)$.

5. Sia Y una variabile casuale univariata avente funzione generatrice dei momenti pari a $M_Y(t) = \exp(e^t - 1)$ per $t \in \mathbb{R}$. Siano poi Y_1, Y_2, Y_3 copie indipendenti di Y e si ponga $S_3 = \sum_{i=1}^{3} Y_i$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di S_3. Si ottenga il valore atteso di S_3. (N.b.: $\exp(x) = e^x$).

6. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(10, 100)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(10, 100/n)$. Sia $n = 25$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{25} > 16)$ e $P(\bar{Y}_{25} < 6)$. Si ottenga infine il novantacinquesimo percentile di $\bar{Y}_{25}$ (è il quantile-p con $p = 95/100$).

Buon lavoro!