Esempio di svolgimento della prova scritta di Calcolo scientifico del 21 settembre 2020

Davide Liessi

23 gennaio 2021

1. *Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(2, t, e_{\max}, e_{\min})$ l'insieme di numeri di macchina con l'arrotondamento.*
   - *Determina gli interi t, $e_{\max}$, $e_{\min}$ in modo che* $\mathrm{realmin} = \frac{1}{32}$, $\mathrm{realmax} = 31$, *e* $Nu = 10$, *dove N è il numero degli elementi di $\mathcal{F}$ diversi da 0 e u è la precisione di macchina.*
   - *Siano dati $x = (1.\overline{101})_2$ e $y = (10.\overline{101})_2$. Determina $\tilde{x} = \mathrm{fl}(x) \in \mathcal{F}$, $\tilde{y} = \mathrm{fl}(y) \in \mathcal{F}$ e $\tilde{z} = \tilde{y}\, \mathrm{fl}(-)\tilde{x} \in \mathcal{F}$.*
   - ⋆ *Scrivi x, y e $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ come frazioni di numeri interi in base 10.*
   - *Determina l'esponente intero e tale che $\tilde{z} - 2^e \mathrm{realmin} = 2u$. Giustifica la risposta.*

Svolgimento.

- Osserviamo, che $N = |\mathcal{F} \setminus \{0\}| = |\mathcal{F}| - 1 = 2(B-1)B^{t-1}(e_{\max} + e_{\min} + 1)$ e ricordiamo che $\mathrm{realmin} = B^{-e_{\min}-1}$, $\mathrm{realmax} = (1 - B^{-t})B^{e_{\max}}$ e $u = \frac{B^{1-t}}{2}$ (per l'arrotondamento), dove B è la base. Imponendo le condizioni date e sostituendo $B = 2$, otteniamo il sistema
$$\begin{cases} 2^{-e_{\min}-1} = 2^{-5}, \\ (1 - 2^{-t})2^{e_{\max}} = 31, \\ 2^t(e_{\max} + e_{\min} + 1)2^{-t} = 10, \end{cases}$$
risolvendo il quale risultano $t = 5$, $e_{\max} = 5$, $e_{\min} = 4$.
- Ricordando che si usa l'arrotondamento, si hanno $\tilde{x} = \mathrm{fl}((0.1101\overline{101})_2 \cdot 2) = (0.11011)_2 \cdot 2$, $\tilde{y} = \mathrm{fl}((0.10101\overline{101})_2 \cdot 2^2) = (0.10110)_2 \cdot 2^2$ e $\tilde{z} = \mathrm{fl}((1.0110)_2 \cdot 2 - (0.11011)_2 \cdot 2) = \mathrm{fl}((0.10001)_2 \cdot 2) = (0.10001)_2 \cdot 2$.
- ⋆ Si hanno
$$\tilde{x} = 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\Big) = \frac{27}{16}, \qquad \tilde{y} = 4\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\Big) = \frac{11}{4}.$$
Per x e y possiamo usare la formula per la frazione generatrice,* ottenendo direttamente
$$x = (1.\overline{101})_2 = \frac{(1101)_2 - (1)_2}{(111)_2} = \frac{12}{7}, \qquad y = (10.\overline{101})_2 = \frac{(10101)_2 - (10)_2}{(111)_2} = \frac{19}{7}.$$

CD Lab – Computational Dynamics Laboratory, Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche, Università degli Studi di Udine, davide.liessi@uniud.it

*Se non ricordiamo la formula possiamo procedere in diversi modi equivalenti. Per completezza, scriviamo x e y come frazioni con due ulteriori procedimenti distinti. Ciascuno di essi può essere usato per dimostrare la formula per la frazione generatrice. Spostando il punto decimale di x verso destra di tante posizioni quante la lunghezza del periodo (in questo caso tre), osserviamo che $8x = (1101.\overline{101})_2 = (1100)_2 + x = 12 + x$, da cui ricaviamo che $x = \frac{12}{7}$.

- Sostituendo i valori che abbiamo calcolato nei punti precedenti, otteniamo l'equazione $(0.10001)_2 \cdot 2 - 2^e 2^{-4-1} = 2 \cdot 2^{-5}$, che equivale a $1 + 2^{-4} - 2^{e-5} = 2^{-4}$, da cui ricaviamo $e = 5$. ◁

2. *Si vuole calcolare la funzione $y = F(x)$ con $F(x) = f(g(x))$.*
   - *Scrivi il numero di condizionamento di F in funzione di quello di f e g.*
   - *Siano $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^4 - 1$. Studia il condizionamento della funzione F con x che varia nel suo campo di esistenza.*
   - *Supponi che la funzione $\sqrt{x}$ fornisca un approssimazione il cui errore relativo è maggiorato dalla precisione di macchina u. Studia la stabilità in avanti dell'algoritmo che calcola la funzione F definita al punto precedente con x numero di macchina.*

Svolgimento.

- Se F, f e g sono differenziabili, il numero di condizionamento di F è
$$\operatorname{cond}_F(x) = \frac{|x||F'(x)|}{|F(x)|} = \frac{|x||f'(g(x))||g'(x)|}{|f(g(x))|}.$$
Moltiplicando e dividendo per $|g(x)|$ riconosciamo che $\operatorname{cond}_F(x) = \operatorname{cond}_f(g(x)) \operatorname{cond}_g(x)$. Ovviamente ciascun numero di condizionamento è definito nei punti del dominio della funzione corrispondente esclusi gli zeri della funzione.

- Il dominio di F è $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Calcoliamo i numeri di condizionamento di f e g:
$$\operatorname{cond}_g(x) = \frac{|x||4x^3|}{|x^4 - 1|} = \frac{4x^4}{|x^4 - 1|}, \qquad \operatorname{cond}_f(x) = \frac{|x|\left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$
Ricordiamo che $\operatorname{cond}_f(x)$ è definito solo per $x > 0$, nonostante la sua espressione sia costante e quindi sempre definita. Allora per il punto precedente
$$\operatorname{cond}_F(x) = \operatorname{cond}_f(g(x)) \operatorname{cond}_g(x) = \frac{1}{2}\frac{4x^4}{|x^4 - 1|} = \frac{2x^4}{|x^4 - 1|},$$
definito solo per $x^4 - 1 > 0$, ovvero in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Osservando che i limiti di $\operatorname{cond}_F(x)$ per $x \to 1$ e $x \to -1$ sono entrambi infiniti, possiamo dire che il calcolo di F è mal condizionato per valori di x vicini[*] a 1 e a -1; osservando che $\operatorname{cond}_F(x)$ è sempre positivo, strettamente crescente se $x < -1$ e strettamente decrescente se $x > 1$, possiamo concludere che il calcolo di F è ben condizionato nel resto del dominio di F, cioè per valori di x sufficientemente lontani da 1 e da -1.

- Ricordiamo i coefficienti di amplificazione della somma e osserviamo che il coefficiente di amplificazione di $\sqrt{\cdot}$ è $\frac{1}{2}$.[†] Costruiamo il grafo computazionale.

Possiamo scrivere $y = (10.\overline{101})_2 = (10)_2 + (0.\overline{101})_2$ e osservare che poiché $(0.101)_2 = \frac{5}{8}$ si ha
$$(0.\overline{101})_2 = (0.101\,101\,101\ldots)_2 = \frac{5}{8} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2^6} + \cdots = \frac{5}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{5}{7},$$
per cui $y = 2 + \frac{5}{7} = \frac{19}{7}$.

[*]Attenzione: è impreciso dire che il calcolo di F è mal condizionato (solo) per $x = 1$ e $x = -1$. Infatti in qualunque modo volessimo definire una soglia per il numero di condizionamento oltre la quale consideriamo il problema mal condizionato, ci sono infiniti valori di x nel dominio di F per cui $\operatorname{cond}_F(x)$ è maggiore della soglia.

[†]Osserviamo anche che il coefficiente di amplificazione della quarta potenza è 4, ma in realtà non serve usarlo, essendo la potenza applicata a un dato che ai fini dell'analisi dell'errore algoritmico si suppone avere errore 0.

$$\begin{tikzcd} \overset{0}{\boxed{x}} \arrow[r] & \overset{\delta_1}{\boxed{x^4}} \arrow[r, "\frac{x^4}{x^4-1}"] & \overset{\delta_2}{\boxed{x^4-1}} \arrow[r, "\frac{1}{2}"] & \overset{\delta_3}{\boxed{\sqrt{x^4-1}}} \\ \overset{0}{\boxed{1}} \arrow[urr] & & & \end{tikzcd}$$

Per l'errore algoritmico risulta quindi

$$\epsilon_{\text{alg}} = \delta_3 + \frac{1}{2}\Big(\delta_2 + \frac{x^4}{x^4-1}\delta_1\Big),$$

da cui, poiché gli errori sulle operazioni sono maggiorati in valore assoluto dalla precisione di macchina,

$$|\epsilon_{\text{alg}}| \leq |\delta_3| + \frac{1}{2}|\delta_2| + \frac{1}{2}\Big|\frac{x^4}{x^4-1}\Big||\delta_1| \leq u\Big(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Big|\frac{x^4}{x^4-1}\Big|\Big).$$

L'algoritmo risulta quindi instabile[*] per valori di x vicini a 1 e -1. ◁

3. *Sia* $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$.
   - • *Disegna il grafico di* f. *Determina le radici* α, β, *con* $\alpha < \beta$.
   - • *Studia la convergenza del metodo di Newton a* α *e* β.
   - •• *Considera le successioni ottenute con il metodo di Newton con i seguenti valori iniziali:*
     - *(a)* $x_0 = -3$,
     - *(b)* $x_0 = -1$,
     - *(c)* $x_0 = -\frac{2}{3}$,
     - *(d)* $x_0 = 3$,
     - *(e)* $x_0 = 1$,
     - *(f)* $x_0 = \frac{2}{3}$.

     Sono convergenti? Se convergenti, convergono a α *o a* β*? Qual è l'ordine di convergenza? Giustifica tutte le risposte.*

     Sia $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. *Verifica che* α, β *sono punti fissi di* g *e considera il metodo iterativo* $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$.
   - • *Determina* m *in modo che il metodo sia localmente convergente in maniera monotona a* β *con fattore asintotico di convergenza pari a* $\frac{1}{5}$. *La successione ottenuta con* $x_0 = 1$ *è convergente? Giustifica la risposta.*
   - ⋆ *Determina* m *in modo che il metodo sia localmente convergente a* β *con ordine di convergenza quadratico. La successione ottenuta con* $x_0 = 1$ *è convergente? Giustifica la risposta.*
   - • *Sia* $m = -3$. *Studia la convergenza locale ad* α *del metodo. La successione ottenuta con* $x_0 = -1$ *è convergente? Se convergente, qual è l'ordine di convergenza? Giustifica la risposta.*

[*] Un'idea per trovare un algoritmo stabile è scomporre $x^4 - 1$ in fattori (ricordare i prodotti notevoli!).

Svolgimento.

- Per tracciare il grafico procediamo allo studio della funzione f. Osserviamo che f è un polinomio di grado 3 e che il coefficiente del suo termine di grado massimo è positivo. Perciò i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$. Non ci sono asintoti. L'ordinata dell'intersezione del grafico con l'asse delle ordinate è $f(0) = -4$.

  La derivata prima è $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2$, che si annulla e cambia segno in $\frac{2}{3}$ e in -2: il primo è un minimo relativo ($f(\frac{2}{3}) = -\frac{128}{27}$), il secondo è un massimo relativo ($f(-2) = 0$) e risulta anche essere uno zero di f, più specificamente $\alpha = -2$. Osserviamo che α è una radice doppia di $f(x) = 0$ (infatti $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$). La funzione f è strettamente crescente in $(-\infty, \alpha)$ e in $(\frac{2}{3}, \infty)$, dove f' è positiva, e è decrescente in $(\alpha, \frac{2}{3})$, dove f' è negativa. Calcoliamo anche $f'(0) = -2$.

  La funzione f è negativa in $(-\infty, \beta) \setminus \{-2\}$ e positiva in $(\beta, +\infty)$.

  La derivata seconda è $f''(x) = 3x + 2$, che si annulla e cambia segno in $-\frac{2}{3}$, dove la funzione f ha un flesso con pendenza $f'(-\frac{2}{3}) = -\frac{8}{3}$; calcoliamo anche il valore $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{64}{27}$. Il grafico di f ha quindi la concavità rivolta verso il basso per $x < -\frac{2}{3}$, dove f'' è negativa, e rivolta verso l'alto per $x > -\frac{2}{3}$, dove f'' è positiva.

  Abbiamo già determinato α. Per determinare la radice β, riconosciamo che con un raccoglimento parziale e un prodotto notevole possiamo scomporre in fattori $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2(x-2)$, per cui $\beta = 2$ è l'altra radice (semplice) di $f(x) = 0$. Osserviamo che la pendenza del grafico nel punto di ascissa 2 è $f'(2) = 8$.

  Con queste informazioni possiamo tracciare un grafico approssimato (Figura 1).

- Osserviamo che f, essendo un polinomio, è di classe C^∞.

  Nell'intervallo $(2, +\infty)$ sia f sia f'' sono positive e f' non si annulla: per il teorema visto a lezione il metodo di Newton converge a β in modo monotono per ogni punto iniziale $x_0 > 2$ e l'ordine di convergenza è quadratico.

  In $(-\infty, -\frac{2}{3}) \setminus \{-2\}$ sia f sia f'' sono negative e f' non si annulla: il metodo di Newton converge a α in modo monotono per ogni punto iniziale x_0 in tale insieme e la convergenza è lineare, dato che α è una radice doppia.

  Se $x_0 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, con la prima iterazione si ha $x_1 \in (-\infty, -\frac{2}{3})$, per cui, se $x_1 \neq -2$, il metodo di Newton converge linearmente a α, in modo monotono a partire dalla seconda iterazione.

  Se $x_0 = [\frac{2}{3}, 2)$, con la prima iterazione si ha $x_1 \in (2, +\infty)$, per cui il metodo di Newton converge quadraticamente a α, in modo monotono a partire dalla seconda iterazione.

  Se $x_0 = \frac{2}{3}$ il metodo di Newton non si può applicare.

- •• Se $x_0 = -3$, $x_0 = -1$ o $x_0 = -\frac{2}{3}$, la successione converge a α con ordine 1. Se $x_0 = 3$ o $x_0 = 1$, la successione converge a β con ordine 2. Se $x_0 = \frac{2}{3}$, la successione non converge. Le risposte sono giustificate dal punto precedente.

  Si ha $g(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{m} = \alpha$ e lo stesso vale per β, per cui sono punti fissi di g. Osserviamo inoltre che $g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m}$.

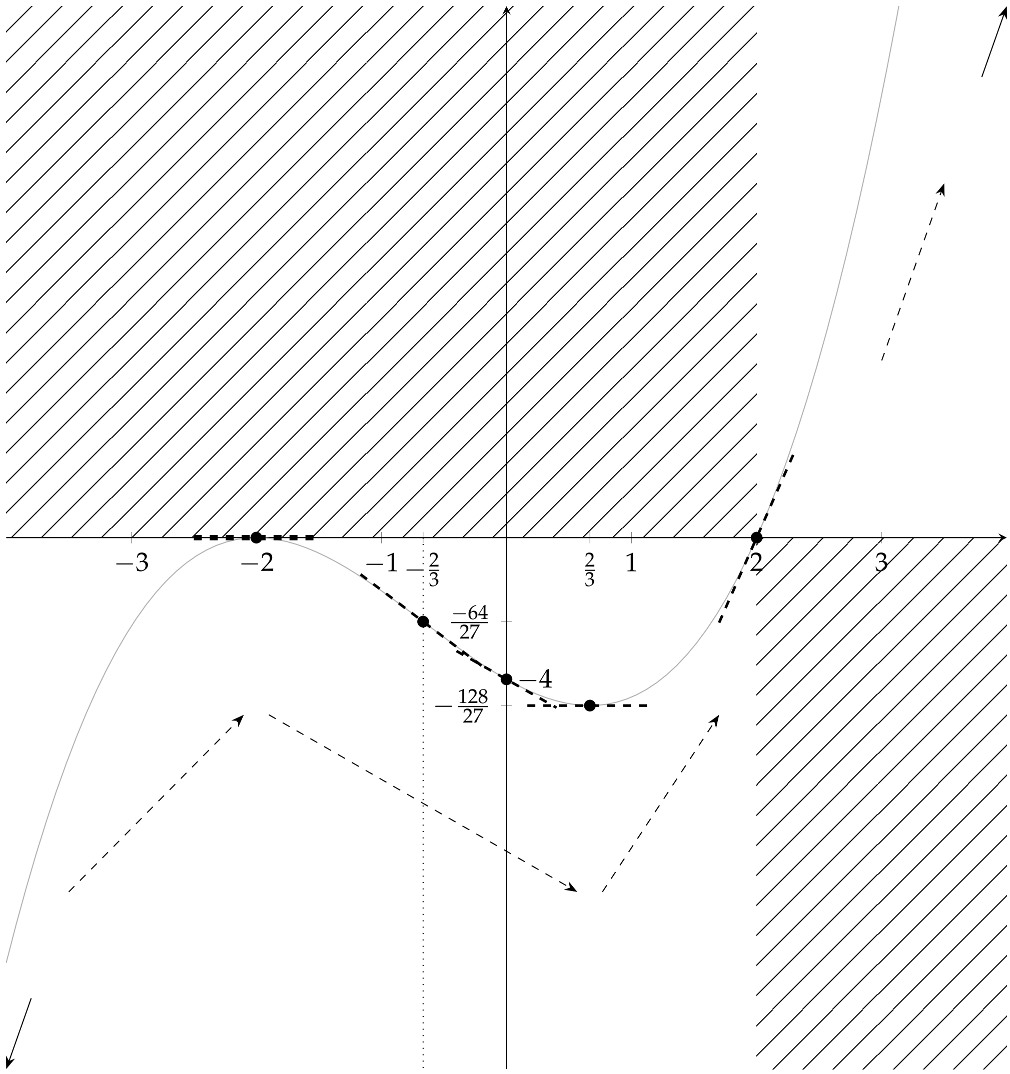

Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$. In nero sono rappresentate le informazioni esatte che abbiamo calcolato, in grigio il grafico approssimato. Le linee tratteggiate sono le tangenti ai punti notevoli evidenziati, quella puntinata il cambio di concavità; le frecce tratteggiate indicano la monotonia, quelle continue i limiti; le aree tratteggiate indicano parti del piano non contenenti il grafico per via del segno della funzione.

- Vogliamo deteremінare m tale che $g'(\beta) = g'(2) = \frac{1}{5}$: risulta $m = 10$. La funzione g' è decrescente nell'intervallo $[1,2]$: infatti $g''(x) = -\frac{f''(x)}{10} = \frac{-3x-2}{10}$ è negativa per $x > -\frac{2}{3}$. Inoltre $g'(1)$ è minore di 1, pertanto $0 < g'(x) < 1$ per ogni $x \in [1,2]$ e la successione ottenuta con $x_0 = 1$ è convergente.

⋆ Vogliamo deteremінare m tale che $g'(\beta) = g'(2) = 0$: risulta $m = 8$.* Come nel punto precedente, la funzione g' è decrescente nell'intervallo $[1,2]$: infatti $g''(x) = -\frac{f''(x)}{8}$ ha gli stessi segni del caso precedente. Anche in questo caso $g'(1)$ è minore di 1, quindi $0 < g'(x) < 1$ per ogni $x \in [1,2]$ e la successione ottenuta con $x_0 = 1$ converge.

- Osserviamo che $g'(\alpha) = g'(-2) = 1 + \frac{f'(-2)}{3} = 1$. Perciò se la successione ottenuta con $x_0 = 1$ converge, la convergenza è sublineare. La funzione g' è (strettamente) decrescente in $(-2, -\frac{2}{3}]$ e crescente in $[-\frac{2}{3}, 1)$, come si dimostra studiando il segno di $g''(x) = \frac{f''(x)}{3} = x + \frac{2}{3}$. Inoltre $g'(-\frac{2}{3}) = -\frac{8}{9}$ e $g'(1) = 1/2$, e come già osservato $g'(-2) = 1$: si ha quindi $|g'(x)| < 1$ per ogni $x \in (-2, 1]$, per cui la successione converge. ◁

4. *Sia data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 3 & 2 & 6 - \alpha \\ 2 & 1 & -2 \\ 6 - \alpha & -2 & -12 \end{pmatrix}.$$

- *Calcola la fattorizzazione LU di A. Per quale scelta del parametro α esiste tale fattorizzazione?*
- *Studia al variare di α il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo.*
- *Sia $\alpha = 4$. Calcola la fattorizzazione $PA = LU$ con la tecnica del pivot parziale.*

⋆ *Proponi un algoritmo per risolvere il sistema $Lx = b$. Scrivi la sua pseudocodifica e analizzane la complessità computazionale.*

Svolgimento. • Applichiamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss. La matrice elementare di Gauss al primo passo si può definire solo se $\alpha \neq 3$:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\alpha-3} & 1 & 0 \\ -\frac{6-\alpha}{\alpha-3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_1 A = \begin{pmatrix} \alpha - 3 & 2 & 6 - \alpha \\ 0 & \frac{\alpha-7}{\alpha-3} & \frac{-6}{\alpha-3} \\ 0 & \frac{-6}{\alpha-3} & -\frac{\alpha^2}{\alpha-3} \end{pmatrix}.$$

La matrice elementare di Gauss al secondo passo si può definire solo se $\alpha \neq 7$:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{6}{\alpha-7} & 1 \end{pmatrix}.$$

*Osserviamo che in effetti la convergenza è quadratica perché $g''(\beta) = g''(2) = -\frac{f''(2)}{8} = -1 \neq 0$.

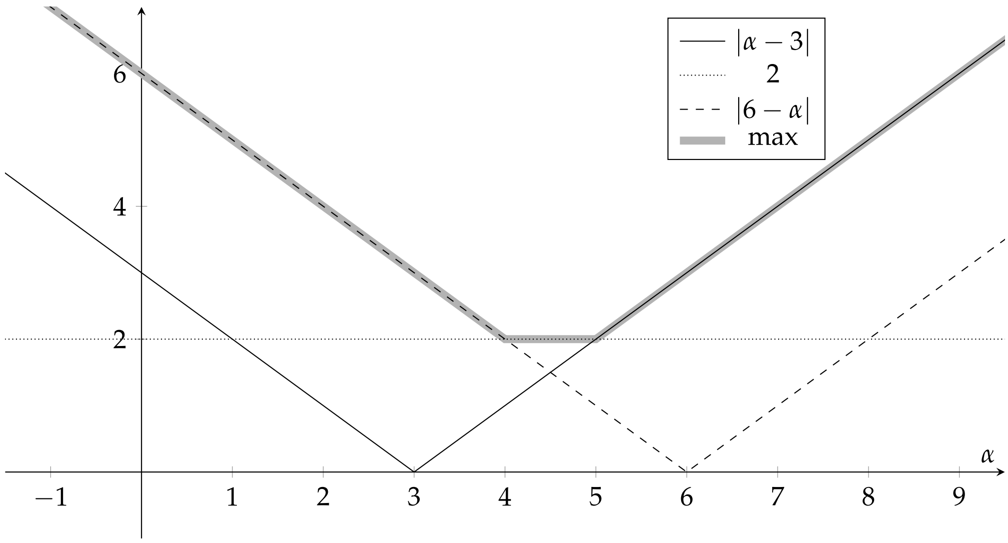

Figura 2: Studio grafico di $\max\{|\alpha-3|, 2, |6-\alpha|\}$.

Perciò per $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3, 7\}$ la fattorizzazione LU esiste ed è

$$L = G_1^{-1}G_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\alpha-3} & 1 & 0 \\ \frac{6-\alpha}{\alpha-3} & \frac{-6}{\alpha-7} & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = G_2G_1A = \begin{pmatrix} \alpha-3 & 2 & 6-\alpha \\ 0 & \frac{\alpha-7}{\alpha-3} & \frac{-6}{\alpha-3} \\ 0 & 0 & \frac{-36}{(\alpha-7)(\alpha-3)} - \frac{\alpha^2}{\alpha-3} \end{pmatrix}.$$

- Il comportamento del metodo di Gauss con il pivot parziale al primo passo dipende da quale valore della prima colonna di A è massimo in valore assoluto. Studiamo pertanto $\max\{|\alpha-3|, 2, |6-\alpha|\}$. Per quanto osserviamo in Figura 2, al primo passo non si effettuano scambi di righe se $\alpha \geq 5$, si scambiano la prima e la seconda riga se $4 \leq \alpha < 5$ e si scambiano la prima e la terza se $\alpha < 4$.
- Se $\alpha = 4$, la matrice A è
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -12 \end{pmatrix}.$$
Al primo passo bisogna scambiare la prima e la seconda riga, per cui
$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_1P_1A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & -3 & -10 \end{pmatrix}.$$

Al secondo passo bisogna scambiare la seconda e la terza riga, per cui

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = G_2P_2G_1P_1A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad P = P_2P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = P_2G_1^{-1}P_2^{-1}G_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

- Per risolvere il sistema $Lx = b$ con $L = (l_{i,j})_{i,j}$ triangolare inferiore di dimensione $n \times n$, si può usare l'algoritmo di sostituzione in avanti, che può essere implementato in MATLAB come segue:

```
x(1) = b(1) / l(1,1);
for i = 2:n
  x(i) = l(i,1)*x(1);
  for j = 2:(i-1)
    x(i) = x(i) + l(i,j)*x(j);
  end
  x(i) = (b(i)-x(i)) / l(i,i);
end
```

Per calcolare x_i servono quindi $i-1$ moltiplicazioni, $i-1$ somme e una divisione, in totale

$$\sum_{i=1}^{n}(1+2(i-1)) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

operazioni. ◁

5. *Sia $f(x) = \log_3(1+2x^2)$. Dati i punti $P_0 = (-1, f(1))$, $P_1 = (1, f(1))$ e $P_2 = (2, f(2))$.*
   - *Determina il polinomio p che interpola i tre punti nella forma di Newton.*
   - *Determina il polinomio $\tilde{p}$ che interpola i tre punti e $P_3 = (-2, f(-2))$ nella forma di Newton.*
   - *Determina il polinomio q di primo grado di miglior approssimazione dei quattro punti P_0, P_1, P_2 e P_3 nel senso dei minimi quadrati.*

Svolgimento. Calcoliamo le coordinate dei punti $P_0 = (-1,1)$, $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (2,2)$ e $P_3 = (-2,2)$.

- Calcoliamo le differenze finite per i primi tre punti.

	t_i	$f[t_i]$	$f[t_{i-1}, t_i]$	$f[t_{i-2}, t_{i-1}, t_i]$
$i=0$	-1	1		
$i=1$	1	1	$\frac{1-1}{1+1} = 0$	
$i=2$	2	2	$\frac{2-1}{2-1} = 1$	$\frac{1-0}{2+1} = \frac{1}{3}$

Perciò $p(x) = 1 + 0 \cdot (x+1) + \frac{1}{3}(x+1)(x-1)$.

- Aggiungiamo alla tabella delle differenze divise una riga per il punto P_3.

$$\begin{array}{cccccc}
 & t_i & f[t_i] & f[t_{i-1}, t_i] & f[t_{i-2}, t_{i-1}, t_i] & f[t_{i-3}, t_{i-2}, t_{i-1}, t_i] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
i = 3 & -2 & 2 & \frac{2-2}{-2-2} = 0 & \frac{0-1}{-2-1} = \frac{1}{3} & \frac{1/3-1/3}{-2+1} = 0
\end{array}$$

Si ha quindi $\tilde{p} = p$.

- Per calcolare i coefficienti di $q(x) = a + bx$ risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui $a = \frac{3}{2}$ e $b = 0$, quindi $q(x) \equiv \frac{3}{2}$. ◁

⋆ *Sia data una matrice A di dimensione n che ammette la fattorizzazione LU. Scrivi la pseudocodifica che calcola L e U mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss gestendo in maniera efficiente la memoria.*

Svolgimento. A ogni passo, l'algoritmo di Gauss determina una riga di U e una colonna di L; le corrispondenti righe e colonne della matrice A originale non sono più necessarie nei passi successivi. Considerando che gli elementi sotto la diagonale di U e quelli sopra la diagonale di L sono tutti nulli, e che gli elementi diagonali di L sono tutti 1 e quindi non è necessario memorizzarli, osserviamo che gli elementi da memorizzare compongono una matrice delle stesse dimensioni di A. Pertanto, gli elementi delle matrici L e U possono essere memorizzati nello spazio già occupato dalla matrice A, sostituendo di volta in volta il corrispondente elemento di quest'ultima.

Se $A = (a_{i,j})_{i,j}$ ha dimensione n, l'algoritmo implementato in MATLAB è

```
for j = 1:(n-1)
  for i = (j+1):n
    a(i,j) = a(i,j) / a(j,j);
    for k = (j+1):n
      a(i,k) = a(i,k) - a(i,j)*a(j,k);
    end
  end
end
```

Le matrici $U = (u_{i,j})_{i,j}$ e $L = (l_{i,j})_{i,j}$ sono date da

$$u_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{se } i \leq j, \\ 0 & \text{se } i > j, \end{cases} \qquad l_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i < j, \\ 1 & \text{se } i = j, \\ a_{i,j} & \text{se } i > j. \end{cases}$$ ◁