Corso di laurea in Informatica - Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Prova scritta del 18 settembre 2009

1. Un'urna contiene 2 palline nere e 8 bianche. Una seconda urna contiene 3 palline nere e 7 bianche. Una terza urna contiene 5 palline nere e 5 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le tre con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, tre palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 5 nere, se le palline estratte risultano tutte e tre nere.

2. Una apparecchiatura dispone di due resistenze. La vita operativa T_i ($i = 1, 2$) di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a 12 anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre resistenze. Quando almeno una delle due resistenze è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Si supponga, per semplicità, che le resistenze siano le uniche componenti soggette a guasto. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di T_1 e T_2. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il terzo quartile di T (è il quantile-p con $p = 0.75$) e $P(T = 1.7654)$.

3. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0, 2]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = kx^3$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante k. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano mediana e moda di X. Sia infine $T = -X$; si ottenga la distribuzione di probabilità di T (supporto e funzione di densità).

4. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(1, 1/2)$ (legge binomiale con indice $n = 1$ e parametro $p = 1/2$) e distribuzioni condizionate binomiali $Y|X = x \sim Bi(1, 1/4)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Sia $S = X + Y$, si calcoli $P(S = 1)$.

5. Sia Y una variabile casuale univariata con funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = (0.5 + 0.5e^t)^2$ per $t \in \mathbb{R}$. Siano poi $Y_1, \ldots, Y_4$ copie indipendenti di Y e si ponga $S_4 = \sum_{i=1}^4 Y_i$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di S_4. Si ottengano valore atteso e scarto quadratico medio di S_4.

6. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(2, 4)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(2, 4/n)$. Sia $n = 16$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{16} > 1.25)$ e $P(\bar{Y}_{16} < 2.7)$. Si ottenga infine il secondo decile di $\bar{Y}_{16}$ (è il quantile-p con $p = 2/10$).

Buon lavoro!