Primo compito di matematica discreta – 18/02/2014

Prima parte – 10 domande, 6/10 giuste per passare. Tempo: 20 minuti

1) D: Sia A un insieme di cardinalità 6. Quante sono le funzioni biiettive f: A ⟶ A? (Scelta multipla)
R: Sono 6! Infatti se sono biiettive vuol dire che hanno per dominio esattamente A, e per codominio A. Inoltre f(x1) != f(x2) ⇔ x1 != x2. Immaginiamo il dominio e il codominio come sequenze ordinate: A = {1,2,3,4,5,6}; dominio = (1,2,3,4,5,6); codominio = (1,2,3,4,5,6). Ogni permutazione del codominio dà luogo ad una nuova funzione biiettiva quindi il numero di funzioni biiettive da A in A vale 6!

2) D: Sia A un insieme di n elementi con n≥2, e B un insieme di 2 elementi. Quante sono le funzioni suriettive da A in B? (Scelta multipla)
R: Sono (2^n -2). Basta applicare il principio di inclusione-esclusione. Per esempio, se n=2 ci sono due funzioni suriettive. La risposta "2n" è sbagliata perché con n=2 verrebbero 4 funzioni suriettive (sbagliato!). Per capire il procedimento vedere l'esempio a pag. 107 della Dispensa MD1 2013-2014.

3) D: "Se 1=0, allora 2=1." Quest'affermazione è: (V/F)
R: Vera. Dato che Falso implica qualsiasi cosa, l'affermazione è vera.

4) Mancante (da inserire per favore)

5) D: Esistono relazioni d'equivalenza che non sono riflessive. (V/F)
R: Falso. Per definizione una relazione d'equivalenza è riflessiva, simmetrica e transitiva. Quindi l'affermazione è falsa.

6) D: Ho più probabilità di fare 6 lanciando sei dadi in una sola volta o di lanciare un dado sei volte di seguito? (Scelta multipla)
R: Ho la stessa probabilità. La probabilità che non esca un 6 lanciando un dado è 5/6, e dunque, la probabilità che sei dadi lanciati contemporaneamente o l'uno dopo l'altro non diano almeno un 6 è data da: $(5/6)^6$. Dunque, la probabilità che esca almeno un 6 è data da 1 – $(5/6)^6$.

7) D: Ogni grafo che non contiene cicli dispari è colorabile con 3 colori (V/F)
R: Vero. Se un grafo non contiene cicli dispari è bipartito, e un grafo bipartito è sempre bicolorabile. Quindi è anche tricolorabile.

8) D: Ho un insieme A={1,2,…,n} dei numeri naturali, e B={MCD(i,j), i=(1,2,…,n), j=(1,2,…,n)} insieme dei massimi comuni divisori tra gli elementi dell'insieme A. Quante di queste affermazioni sono vere?
   -Ho sempre che |A|>|B|
   -Può essere che |A|=|B|
   -In alcuni casi ho che |A|<|B|
(Scelta multipla, 0, 1 o 2)
R: 2. Se A={1}, B={1} e quindi |A|=|B|. Se A={1,2,3}, B={MCD(1,1),MCD(1,2),MCD(1,3),MCD(2,2),MCD(2,3),MCD(3,3)}, quindi evidentemente |A|<|B| in questo caso dato che B è l'insieme dei MCD tra gli elementi dell'insieme.

9) D: Un grafo è sicuramente connesso se |E|=2|V|. (V/F)
R: Falso. Nella dispensa (es. 7.7) si è dimostrato che il numero massimo di lati per cui un grafo G NON è connesso è (n-1)(n-2)/2. In questo esercizio ho 2n lati, ma È POSSIBILE CHE 2n<(n-1)(n-2)/2. Quindi l'affermazione è falsa.

10) D: Quante sono le funzioni da A in B, con |A|=a e |B|=b? (Scelta multipla)
R: Le funzioni sono b^a

Seconda parte – 2 esercizi. Tempo: 2 ore

1) D: Diamo le seguenti definizioni:
- Un numero si dice *mancino* quando le sue cifre sono tutte numeri dispari. (es: 13791, 35719, ecc.)
- Un numero di dice *palindromo* quando può essere letto in egual modo da sinistra verso destra e viceversa. (es: 13431, 135531, 1456541, ecc.)
- Un numero si dice *convesso* quando esiste una posizione (2≤k≤n-1) in cui le cifre a sinistra della cifra k sono strettamente decrescenti (da 1 a k sono decrescenti), e a destra della cifra k sono strettamente crescenti (da k a n sono crescenti).

Determinare:
(a) Quanti sono i numeri mancini di 7 cifre?
(b) Quanti sono i numeri palindromi di 6 cifre?
(c) Quanti sono i numeri convessi di 5 cifre che sono mancini?
(d) Quanti sono i numeri convessi di 8 cifre?

R: (a) Le cifre dispari sono 5 (1,3,5,7,9). Le cifre del numero devono essere 7. Quindi ho 5*5*5*5*5*5*5 possibilità, quindi **5^7 possibilità**.
(b) Un numero palindromo di 6 cifre ripete le prime 3 cifre specchiate. Quindi i numeri palindromi di 6 cifre sono tutti i numeri con 3 cifre (abccba). Ho 9*10*10 possibilità in quanto la prima cifra non può essere uno 0, quindi ho **900 numeri palindromi**.
(c e d)
Dim: Ho un insieme T di cifre disponibili, e ho un insieme S di cifre che ho preso. |S|=n.
<u>Per (c):</u> T={1,3,5,7,9} e S={1,3,5,7,9}
Fissato k, so che LÀ ci va il **minimo di S**. Chiamo la cifra in posizione k come **pivot**.
Ricapitoliamo le varie possibilità:
<u>|S|=|T|</u>: ho 1 modo per scegliere le cifre da prendere.
<u>PIVOT</u>: 1 scelta (ho 5 elementi in S, 5 cifre, un solo minimo cioè 1.)
<u>Cifre prima di k</u>: $\binom{n-1}{k-1}$ modi di scegliere le cifre (NON CI SONO PERMUTAZIONI)
<u>Cifre dopo k</u>: 1 modo (mi rimangono solo 2 cifre)

In definitiva ho 1*(∑(da k=2 a 4) $\binom{4}{k-1}$)= **14 numeri concavi mancini**.

Per (d): |T|=10, |S|=8. Ho quindi $\binom{10}{8}$ modi di prendere le cifre. Con lo stesso metodo di (c), ho: $\binom{10}{8}$***(∑(da k=2 a 7)** $\binom{7}{k-1}$ **numeri concavi di 8 cifre**.

2) D: Una squadra di basket è così composta

- {a, b, c, d} Guardie
- {e, f, g} Ali
- {e, f, g, h} Playmaker

(a) Ignorando le competenze, in quanti modi posso scegliere 5 giocatori?

(b) Se invece tengo conto delle competenze, in quanti modi posso comporre una squadra di 2 "guardie", 2 "ali" e 1 playmaker?