Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Prova scritta del 21 febbraio 2022

1. Un'urna contiene 20 palline nere e 80 bianche. Una seconda urna contiene 40 palline nere e 60 bianche. Una terza urna contiene 80 palline nere e 20 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le tre con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, cinque palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 80 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, quattro nere e una bianca.

2. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0,1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = cx$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante di normalizzazione c. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e mediana di X. Sia infine $T = 1 - X$. Si ottengano supporto, valore atteso e mediana di T.

3. Una apparecchiatura ha solo tre componenti che si possono guastare. La vita operativa X_i della componente i ($i = 1, 2, 3$) ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a 3 anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre. Quando almeno una delle tre è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2, X_3. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il novantesimo percentile di T (è il quantile-p con $p = 90/100$) e la probabilità condizionale $P(T > 2 \mid T > 1)$.

4. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = 1/(1-t)$, per $t < 1$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $W = Y_1 + Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di W. Si ottengano valore atteso e varianza di W.

5. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(3,1)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(3, 1/n)$. Sia $n = 100$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{100} > 3.2)$ e $P(\bar{Y}_{100} < 2.9)$. Si ottenga infine il novantacinquesimo percentile di $\bar{Y}_{100}$ (è il quantile-p con $p = 95/100$).

6. Dato un campione $y_1, \ldots, y_n$, realizzazione di variabili casuali $Y_1, \ldots, Y_n$, $n > 1$, indipendenti con legge normale con valore atteso $\mu \in \mathbb{R}$ ignoto e varianza nota pari a 1, si reperisca una stima di μ e si indaghino le proprietà campionarie dello stimatore corrispondente.

Buon lavoro!