25.5

Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Sei esercizi – 10 luglio 2020

(i frequentanti dell'a.a. 15/16 o precedenti omettono l'esercizio 6)

Nel seguito a, b, c sono, rispettivamente, la terza, la quarta, la quinta cifra del Tuo numero di matricola; ad esempio, matricola 142431 $\Longrightarrow a = 2$, $b = 4$, $c = 3$

1. Un'urna contiene $20 + a$ palline nere e $80 - a$ bianche. Una seconda urna contiene 30 palline nere e 70 bianche. Una terza urna contiene 40 palline nere e 60 bianche. Una quarta urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le quattro con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, otto palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 50 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, quattro nere e quattro bianche.

2. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0, 1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = k + x$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante k. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano moda e mediana di X. Sia infine $T = b + X$. Si ottengano supporto, valore atteso e funzione di ripartizione di T e si calcoli $P(T > b + 0.5)$.

3. Una apparecchiatura ha solo tre componenti che si possono guastare. La vita operativa X_i ($i = 1, 2, 3$) di ciascuna di esse ha distribuzione esponenziale con valore atteso pari a $6 + c$ anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento delle altre. Quando almeno una delle tre è guasta, l'apparecchiatura non è più operativa. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2, X_3. Si dica qual è il supporto di T. Si ottengano poi la funzione di ripartizione e la funzione di densità di probabilità di T, esplicitandole in tutti i loro tratti. Si calcolino il novantacinquesimo percentile di T (è il quantile-p con $p = 95/100$) e la probabilità condizionale $P(T = 3 | T > 2)$.

4. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = \exp((1+b)(e^t - 1))$, dove $\exp(z) = e^z$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $W = Y_1 + Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di W. Si ottengano valore atteso e varianza di W.

5. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(3, 25)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i / n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(3, 25/n)$. Sia $n = 100$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{100} > 3.2)$ e $P(\bar{Y}_{100} < 2.5)$. Si ottenga infine il novantesimo percentile di $\bar{Y}_{100}$ (è il quantile-p con $p = 90/100$).

6. Dato un campione $y_1, \ldots, y_n$, realizzazione di variabili casuali $Y_1, \ldots, Y_n$, $n > 1$, indipendenti con legge normale di media nota pari ad a e varianza $\sigma^2 > 0$ ignota, si reperisca una stima di σ^2 e si indaghino le proprietà campionarie dello stimatore corrispondente.

Buon lavoro!