Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Esercizi per la prova scritta – 24 giugno 2019

(i frequentanti dell'a.a. 15/16 o precedenti omettono l'esercizio 6)

1. Un'urna contiene 5 palline nere e 95 bianche. Una seconda urna contiene 50 palline nere e 50 bianche. Una terza urna contiene ancora 50 palline nere e 50 bianche. Una quarta urna contiene 85 palline nere e 15 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le quattro con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, sei palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 5 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, una nera e cinque bianche.

2. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [-1, 0]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = c|x|$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante di normalizzazione c. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e varianza di X. Sia infine $T = -X$. Si ottengano supporto e funzione di ripartizione di T e si calcoli $P(T = 0.5)$.

3. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(1, 1/2)$ (legge binomiale con indice $n = 1$ e parametro $p = 1/2$) e distribuzioni condizionate binomiali $Y|X = x \sim Bi(1 + 2x, 1/2)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Si calcoli infine $P(X = Y)$.

4. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = \exp(e^t - 1)$, dove $\exp(z) = e^z$. Siano poi Y_1, Y_2 copie indipendenti di Y e si ponga $W = Y_1 + Y_2$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di W. Si ottengano valore atteso e varianza di W.

5. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(10, 9)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(10, 9/n)$. Sia $n = 100$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{100} > 10.9)$ e $P(9.1 < \bar{Y}_{100} < 10.9)$. Si ottenga infine il primo percentile di $\bar{Y}_{100}$ (è il quantile-p con $p = 1/100$).

6. Dato un campione $y_1, \ldots, y_n$, realizzazione di variabili casuali $Y_1, \ldots, Y_n$, $n > 1$, indipendenti con legge $Bi(1, p)$ di media $p \in (0, 1)$ ignota, si reperisca una stima di p, e si indaghino le proprietà campionarie dello stimatore considerato, calcolandone anche lo *standard error*.

Buon lavoro!