Corso di laurea in Informatica - Università di Udine

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA

Prova scritta del 20 luglio 2016

1. Un'urna contiene 10 palline nere e 90 bianche. Una seconda urna contiene 30 palline nere e 70 bianche. Una terza urna contiene 80 palline nere e 20 bianche. Una quarta urna contiene 90 palline nere e 10 bianche. Uno sperimentatore sceglie a caso un'urna fra le quattro con equiprobabilità, poi estrae a caso, con reinserimento, quattro palline dall'urna scelta. Si determini la probabilità che l'urna scelta sia stata quella con 10 nere, se le palline estratte risultano, senza tener conto dell'ordine di estrazione, una nera e tre bianche.

2. Una apparecchiatura dispone di tre resistenze. La vita operativa X_i $(i = 1, 2, 3)$ di ciascuna di esse ha distribuzione uniforme continua in $(0, b)$, dove $b > 0$, con valore atteso pari a 5 anni, indipendentemente dalla durata di corretto funzionamento dell'altra resistenza. Quando tutte le tre resistenze sono guaste, l'apparecchiatura non è più operativa. Si supponga, per semplicità, che le resistenze siano le uniche componenti soggette a guasto. Sia T il tempo di corretto funzionamento dell'apparecchiatura. Si esprima T come funzione di X_1, X_2, X_3. Si dica qual è il supporto di T. Si ottenga poi la funzione di ripartizione di T, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si calcolino le probabilità $P(0 \leq T \leq 3)$ e $P(T > 8)$.

3. Sia X una variabile casuale con supporto $S_X = [0, 1]$ e funzione di densità di probabilità di forma $p_X(x) = cx$ per $x \in S_X$ e 0 altrove. Si completi la definizione della funzione di densità di X, determinando il valore della costante di normalizzazione c. Si calcoli la funzione di ripartizione di X, esplicitandola in tutti i suoi tratti. Si ottengano valore atteso e varianza di X. Sia infine $T = 2X + 1$. Si ottenga il supporto di T e si calcoli la varianza di T.

4. Sia (X, Y) una variabile casuale bivariata con componente marginale $X \sim Bi(2, 1/2)$ (legge binomiale con indice $n = 1$ e parametro $p = 1/2$) e distribuzioni condizionate binomiali $Y|X = x \sim Bi(1, 1/2)$, per $x \in S_X$. Si determinino il supporto congiunto di (X, Y), la funzione di probabilità congiunta di (X, Y), il supporto marginale di Y, la funzione di probabilità marginale di Y. Si dica, motivando, se (X, Y) ha componenti indipendenti. Si calcoli infine $P(X + Y > 0)$.

5. Sia Y una variabile casuale univariata avente quale funzione generatrice dei momenti $M_Y(t) = (1 + exp(t))/2$, dove $exp(z) = e^z$. Siano poi Y_1, Y_2, Y_3 copie indipendenti di Y e si ponga $W = Y_1 + Y_2 + Y_3$. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di W. Si ottengano valore atteso e varianza di W.

6. La variabile casuale multivariata $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ha componenti indipendenti e identicamente distribuite con legge marginale normale, in particolare $Y_1 \sim N(2, 0.25)$. Si mostri che la variabile casuale $\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$ ha legge normale, $\bar{Y}_n \sim N(2, 0.25/n)$. Sia $n = 25$. Si calcolino $P(\bar{Y}_{25} > 2.3)$ e $P(\bar{Y}_{25} < 1.8)$. Si ottenga infine il decimo percentile di $\bar{Y}_{25}$ (è il quantile-p con $p = 10/100$).

Buon lavoro!