trabalho_06

July 8, 2019

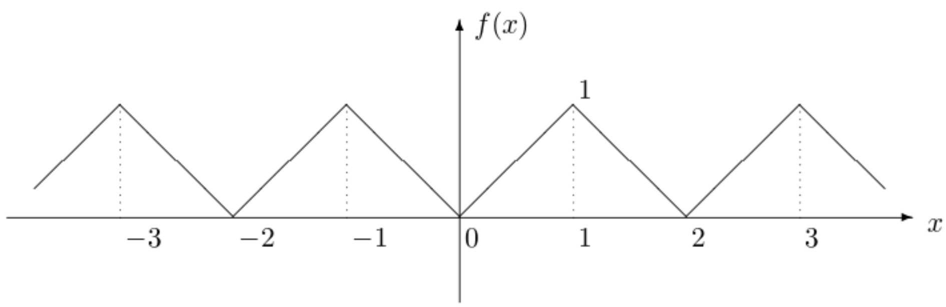
Aluno: Artur Chiaperini Grover.

1 Trabalho 6 - Transformada de Fourier e realce no domínio da frequência

Faça as seguintes simulações no jupyther notebook e aproveite os recursos disponíveis para explicar os fundamentos e resultados obtidos

1.0.1 (1) Série de Fourier de função unidimensional

A função triangular, representada pelo gráfico a seguir, é uma função periódica. Esta classe de funções pode ser representa através de uma série de Fourier.



A série de Fourier que representa esta função é dada pela seguinte equação:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\, sen\big[(2k-1)\pi x\big].$$

Varie o número de senóides para apresentar graficamente diferentes aproximações da função triangular.

Referência

1.0.2 (2) Prova empírica da propriedade translação e mudança de fase

- (2.1) - Crie duas imagens binárias contendo um mesmo objeto geométrico. A diferença entre as imagens é a translação em que o objeto aparece.

- (2.2) - Calcule o módulo da transformada de Fourier de cada uma das imagens
- (2.3) - Faça a subtração entre estas imagens e a utilize para demostrar a propriedade
  Referência: Gonzalez e Woods Processamento digital de Imagens

1.0.3 (3) Filtragem de Fourier pegue uma fotografia de sua autoria.

Execute a filtragem passa-baixa de Fourier desta imagem usando os filtros Butterworth e Ideal.
Compare os resultados obtidos em termos dos fundamentos teóricos correspondentes.
Referência: Gonzalez e Woods Processamento digital de Imagens

1.0.4 (4) Filtros espaciais aproximados

Utilizando a imagem e o filtro de Butterworth empregados no exercício anterior, obtenha filtros aproximados no domínio espacial de dimensões nxn . Para este valor de n calcule o somatório do erro quadrático da diferença entre os resultados obtidos pelo filtro exato e o aproximado. Repita este procedimento para diferentes valores de n e trace o gráfico n x SSE. Analise e explique os resultados obtidos.

1.0.5 Bibliotecas

In [1]:
```
import numpy as np
import cv2 as cv

import matplotlib as mpl
import matplotlib.pyplot as plt

%matplotlib inline
```

1.1 (1) Série de Fourier

Uma função periódica pode ser escrita por uma série de Fourier. A seguir mostraremos o resultado de uma série de Fourier, ao variar o número de senóides de sua expansão.

Partiremos da seguinte equação:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \sin[(2k-1)\pi x], \tag{1}$$

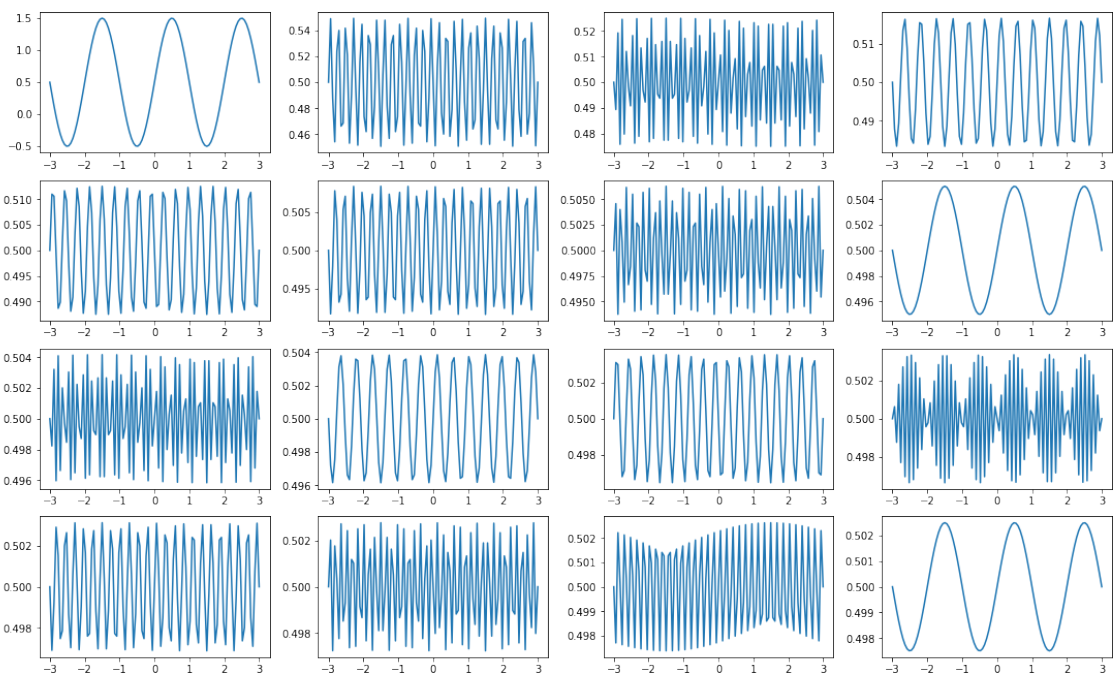
em que variar o número de senóides significa aumentar os termos do somatório.

In [2]:
```
def wn(n):
    return (2*n - 1) * np.pi
```

In [3]:
```
def bn(n):
    return (1 / (2*n  - 1)**2)
```

```
In [4]: def fourier_series(x, n):
            f = 0.5
            if n == 0:
                f = f - bn(n) * np.sin(wn(n) * x)
            else:
                for i in range(1, n):
                    f = f - bn(n) * np.sin(wn(n) * x)

            return f

In [5]: x_ = np.linspace(-3, 3, num = 101)

In [6]: n_max = 100
        Fn = np.zeros((n_max + 1, x_.size))

In [7]: for n in range(n_max + 1):
            for x in range(x_.size):
                Fn[n, x] = fourier_series(x_[x], n)

In [8]: fig = plt.figure(figsize = (15, 9), constrained_layout = True)

        grid = plt.GridSpec(4, 4, fig)

        ax0 = fig.add_subplot(grid[0, 0])
        ax1 = fig.add_subplot(grid[0, 1])#, sharey = ax0)
        ax2 = fig.add_subplot(grid[0, 2])#, sharey = ax0)
        ax3 = fig.add_subplot(grid[0, 3])#, sharey = ax0)

        ax0.plot(x_, Fn[0])
        ax1.plot(x_, Fn[5])
        ax2.plot(x_, Fn[10])
        ax3.plot(x_, Fn[15])

        ax4 = fig.add_subplot(grid[1, 0])#, sharey = ax0)
        ax5 = fig.add_subplot(grid[1, 1])#, sharey = ax0)
        ax6 = fig.add_subplot(grid[1, 2])#, sharey = ax0)
        ax7 = fig.add_subplot(grid[1, 3])#, sharey = ax0)

        ax4.plot(x_, Fn[20])
        ax5.plot(x_, Fn[30])
        ax6.plot(x_, Fn[40])
        ax7.plot(x_, Fn[50])

        ax8 = fig.add_subplot(grid[2, 0])#, sharey = ax0)
        ax9 = fig.add_subplot(grid[2, 1])#, sharey = ax0)
        ax10 = fig.add_subplot(grid[2, 2])#, sharey = ax0)
        ax11 = fig.add_subplot(grid[2, 3])#, sharey = ax0)

        ax8.plot(x_, Fn[60])
```

```
ax9.plot(x_, Fn[65])
ax10.plot(x_, Fn[70])
ax11.plot(x_, Fn[75])

ax12 = fig.add_subplot(grid[3, 0])#, sharey = ax0)
ax13 = fig.add_subplot(grid[3, 1])#, sharey = ax0)
ax14 = fig.add_subplot(grid[3, 2])#, sharey = ax0)
ax15 = fig.add_subplot(grid[3, 3])#, sharey = ax0)

ax12.plot(x_, Fn[80])
ax13.plot(x_, Fn[90])
ax14.plot(x_, Fn[95])
ax15.plot(x_, Fn[100])

plt.show()
```



1.2 (2) Prova empírica da propriedade translação e mudança de fase

(2.1) - Crie duas imagens binárias contendo um mesmo objeto geométrico. A diferença entre as imagens é a translação

```
In [9]: square_01 = np.uint8([[(x >= 10) & (x <= 30)
                                & (y >= 10) & (y <= 30)
                                for y in range(41)] for x in range(41)])
```

```
square_02 = np.uint8([[(x >= 10) & (x <= 30)
                      & (y - 5 >= 10) & (y - 5 <= 30)
                      for y in range(41)] for x in range(41)])

square_diff = square_01 - square_02
```

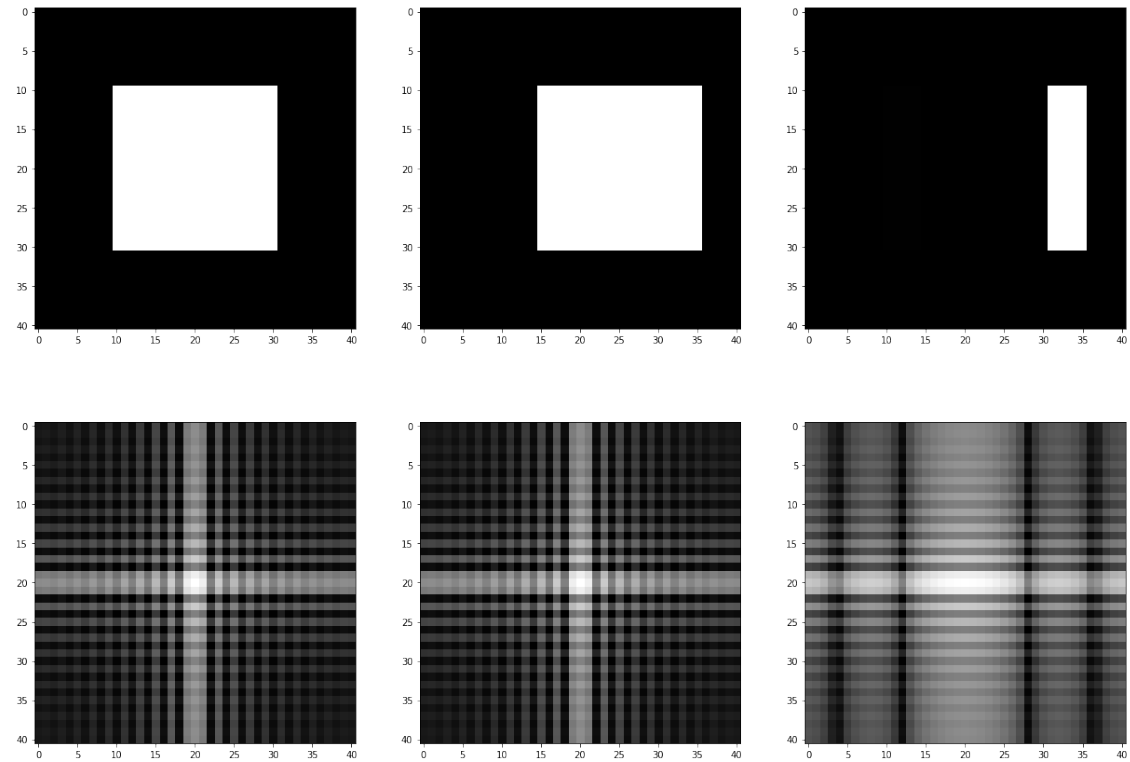
Acima criamos duas imagens com um quadrado em cada. Na primeira imagem temos um quadrado no centro, e, na segunda, temos o quadrado com as mesmas dimensões mais deslocado horizontalmente. Mais adiante podemos ver cada uma das imagens.

(2.2) - Calcule o módulo da transformada de Fourier de cada uma das imagens

```
In [10]: fft_square_01 = np.fft.fft2(square_01)
         fftshift_square_01 = np.fft.fftshift(fft_square_01)

         fft_square_02 = np.fft.fft2(square_02)
         fftshift_square_02 = np.fft.fftshift(fft_square_02)

         fft_square_diff = np.fft.fft2(square_diff)
         fftshift_square_diff = np.fft.fftshift(fft_square_diff)
```

```
In [11]: magspec_fftshift_square_01 = 20 * np.log(np.abs(fftshift_square_01))
         magspec_fftshift_square_02 = 20 * np.log(np.abs(fftshift_square_02))
         magspec_fftshift_square_diff = 20 * np.log(np.abs(fftshift_square_diff))
```

```
In [12]: fig = plt.figure(figsize = (21, 15))

         grid = plt.GridSpec(2, 3, fig)

         ax0 = fig.add_subplot(grid[0, 0])
         ax1 = fig.add_subplot(grid[0, 1])
         ax2 = fig.add_subplot(grid[0, 2])

         ax3 = fig.add_subplot(grid[1, 0])
         ax4 = fig.add_subplot(grid[1, 1])
         ax5 = fig.add_subplot(grid[1, 2])

         ax0.imshow(square_01, cmap = 'gray')
         ax1.imshow(square_02, cmap = 'gray')
         ax2.imshow(square_diff, cmap = 'gray')

         ax3.imshow(magspec_fftshift_square_01, cmap = 'gray')
         ax4.imshow(magspec_fftshift_square_02, cmap = 'gray')
         ax5.imshow(magspec_fftshift_square_diff, cmap = 'gray')

         plt.show()
```



1.3 (3) Filtragem de Fourier

Agora iremos aplicar o filtro passa baixa em uma imagem. Faremos o uso de dois filtros diferentes: o passa baixa ideal, passa baixa butterworth.

Um filtro idel é definido da seguinte forma:

$$H(u,v) = 1, se \qquad D \leq D_0 \tag{2}$$

ou

$$H(u,v) = 0, se \qquad D > D_0, \tag{3}$$

onde

$$D = ((u - u_0)^2 + (v - v_0)^2)^{1/2} \tag{4}$$

$$u_0 = \lfloor \frac{M}{2} \rfloor \tag{5}$$

$$v_0 = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \tag{6}$$

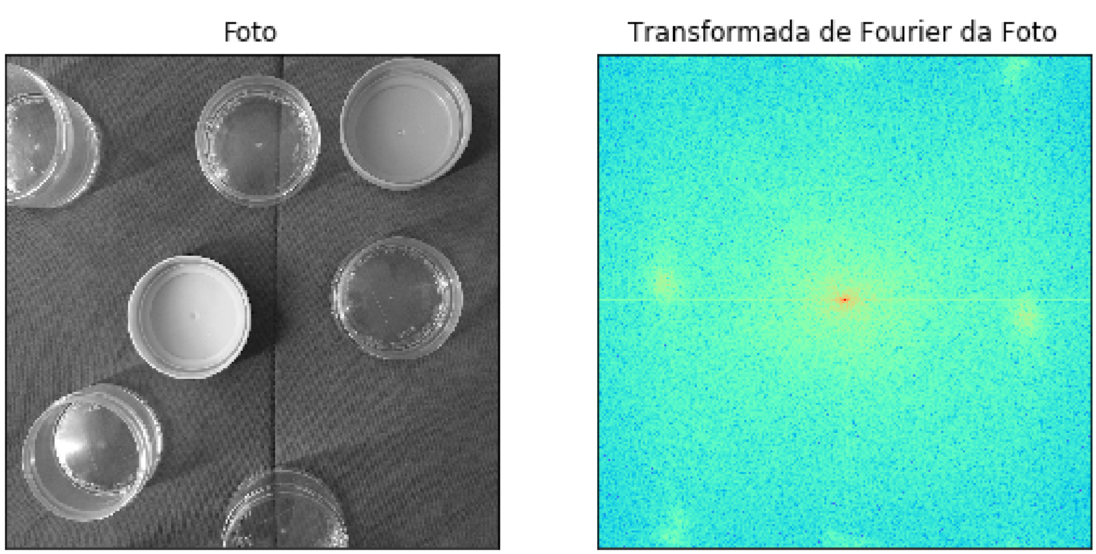
e M e N são as dimensões da imagem de entrada, e D_0 é a frequência de corte.

Já o filtro butterworth é definido da seguinte forma:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + (\frac{D}{D_0})^{2n}} \tag{7}$$

, onde n é a ordem do filtro.

```
In [13]: foto = cv.imread('../images/minha_foto.jpg')
         foto = cv.cvtColor(foto, cv.COLOR_BGR2GRAY)

In [14]: foto_fft = np.fft.fft2(foto)
         foto_fft = np.fft.fftshift(foto_fft)

In [15]: fig = plt.figure(figsize = (9, 6))

         grid = plt.GridSpec(1, 2, fig)

         ax0 = fig.add_subplot(grid[0, 0])
         ax1 = fig.add_subplot(grid[0, 1])

         ax0.imshow(foto, cmap = 'gray')
         ax0.set_title('Foto')
         ax0.set_xticks([])
         ax0.set_yticks([])

         ax1.imshow(20 * np.log(np.abs(foto_fft) + 1), cmap = 'rainbow')
         ax1.set_title('Transformada de Fourier da Foto')
         ax1.set_xticks([])
         ax1.set_yticks([])

         plt.show()
```



A seguir estão as funções para o passa baixa ideal e o passa baixa butterworth.

```
In [16]: def passa_baixa_ideal(img, freq = 10):
             m, n = img.shape

             u0 = np.floor(m/2)
             v0 = np.floor(n/2)

             H = np.uint8([[np.sqrt((u - u0)**2 + (v - v0)**2) <= freq
                            for v in range(n)] for u in range(m)])

             img_fft = np.fft.fftshift(np.fft.fft2(img))
             img_fft = img_fft * H
             return np.fft.ifft2(np.fft.ifftshift(img_fft)).real
```

```
In [17]: def passa_baixa_butterworth(img, freq = 10, nn = 4):
             m, n = img.shape
             u0 = np.floor(m/2)
             v0 = np.floor(n/2)

             H = [[(1/(1 + (np.sqrt((u - u0)**2 + (v - v0)**2)/freq)**(2*nn)))
                   for v in range(n)] for u in range(m)]

             img_fft = np.fft.fftshift(np.fft.fft2(img))
             img_fft = img_fft * H
             return np.fft.ifft2(np.fft.ifftshift(img_fft)).real
```

```
In [18]: img_lp = passa_baixa_ideal(foto, 18)
         img_butter = passa_baixa_butterworth(foto, 18, 4)
```

```
In [19]: fig = plt.figure(figsize = (15, 9))

         grid = plt.GridSpec(1, 3, fig)

         ax0 = fig.add_subplot(grid[0, 0])
         ax1 = fig.add_subplot(grid[0, 1])
         ax2 = fig.add_subplot(grid[0, 2])

         ax0.imshow(foto, cmap = 'gray')
         ax0.set_title('Imagem de entrada')
         ax0.set_xticks([])
         ax0.set_yticks([])

         ax1.imshow(img_lp, cmap = 'gray')
         ax1.set_title('Passa baixa ideal 18 px')
         ax1.set_xticks([])
         ax1.set_yticks([])
```

```
ax2.imshow(img_butter, cmap = 'gray')
ax2.set_title('Passa baixa Butterworth 18 px')
ax2.set_xticks([])
ax2.set_yticks([])

plt.show()
```

Considerando uma frequência de corte de 18px, e aplicando na imagem de entrada, podemos ver acima o resultado de cada um dos filtros.

Podemos ver no resultado do filtro passa baixa ideal o efeito das *ripples* (fenômeno de Gibbs), que acontece por conta do truncamento da série. Ao contrário do passa baixa ideal, o filtro butterworth não possui o efeito das *ripples*.

1.4 (4) Filtros espaciais aproximados

Não consegui fazer essa etapa, pois não ficou claro para mim como criar o filtro espacial.