

# Máquinas de Boltzmann

Aluno: Artur Chiaperini Grover

Orientadora: Dra. Roseli Suzi Wedemann

PPG-CComp

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

21 de novembro de 2019

# Sumário

## Introdução

## Redes Neurais Artificiais

- Conceitos

- Esquema

- Treinamento e Padrões

## Redes de Hopfield

- Definições

- Esquema

- Funcionamento

## Unidades Estocásticas

- Definições

- Esquema

## Máquina de Boltzmann

- Esquema

- Considerações

- Aprendizagem

- next one ...

# Introdução

Redes neuronais artificiais são algoritmos computacionais que se inspiram na rede neuronal biológica. Estes algoritmos podem ser usados para resolver problemas onde uma solução analítica é difícil de ser encontrada, por exemplo, no caso de reconhecimento de padrão em imagens.

A inspiração nas redes neuronais biológicas, é devido ao fato de que as redes neuronais artificiais tem dois elementos básicos: os neurónios (unidades) e as sinapses (conexões).

Há diferentes algoritmos de redes neuronais artificiais, suas diferenças estão relacionadas a forma como esses dois elementos básicos são agrupados (como são feitas as conexões entre eles), e como cada unidade opera. Alguns exemplos de redes neuronais conhecidas são: perceptron, MLP, CNN, redes de Hopfield, máquina de Boltzmann, entre outras ...

# Motivação e Objetivo

As diferentes redes neuronais possuem cada uma as suas peculiaridades, e problemas para os quais possuem melhor desempenho se comparadas com seus outros parentes.

Neste trabalho o nosso objetivo é entender o lado teórico da máquina de Boltzmann, e de suas derivadas, como a máquina restrita de Boltzmann, e aplicá-las em um problema simples afim de comprovar seu mecanismo de funcionamento.

# Redes Neuronais Artificiais (ANN)

Precisamos de dois elementos básicos para definir uma rede neuronal: as unidades (os neurônios) e as conexões (as sinápses).

# Redes Neurais Artificiais (ANN)

Precisamos de dois elementos básicos para definir uma rede neuronal: as unidades (os neurônios) e as conexões (as sinápses).  
Determinar como que as unidades ficam ativas ou não.

# Redes Neurais Artificiais (ANN)

Precisamos de dois elementos básicos para definir uma rede neuronal: as unidades (os neurônios) e as conexões (as sinápses). Determinar como que as unidades ficam ativas ou não. Isso vai do tipo de rede neuronal.

# ANN - A Unidade

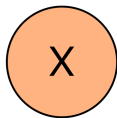


Figura 2.1: Neurônio



# ANN - A Unidade

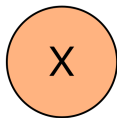


Figura 2.1: Neurônio

Neurônio – Unidade

## ANN - Unidades e Conexões

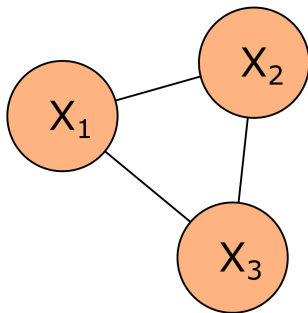


Figura 2.2: ANN

# ANN - Unidades e Conexões

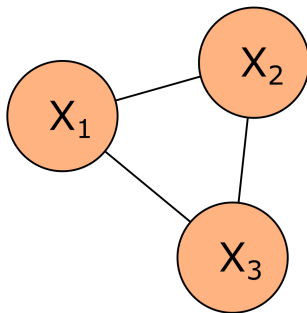


Figura 2.2: ANN

Conexões – Sináapse – Pesos

# Treinamento e Padrões

Treinar uma rede neuronal significa determinar o valor das conexões entre as unidades baseado num conjunto de observações que são mostrados para a rede.

O conjunto de treinamento é composto de padrões, que são estados (configurações) da rede.

# Redes de Hopfield

Uma rede de Hopfield é uma rede que armazena padrões de tal forma que quando um padrão novo é mostrado para a rede, ela responde devolvendo o padrão que ela tem armazenado mais próximo ao novo padrão.

Hopfield é uma rede determinística.

## Quais os elementos básicos para Hopfield?

Vamos considerar que cada uma das **unidades** da rede é denominada por  $x_i$ , onde  $i = 1, \dots, N$ , para uma rede com  $N$  unidades. Em Hopfield, cada  $x_i$  pode assumir um dos valores  $x_i \in \{0, 1\}$ .  
Rede binária!

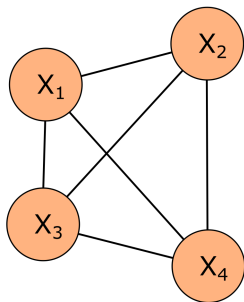
Se  $x_i = 0$ , a unidade  $i$  desativada; se  $x_i = 1$ , unidade  $i$  ativada.

## Quais os elementos básicos para Hopfield?

Os **pesos** chamaremos de  $\omega$ .

Na rede de Hopfield os pesos são simétricos, isto é,  $\omega_{ij} = \omega_{ji}$  (conexão entre as unidades  $i$  e  $j$ ).

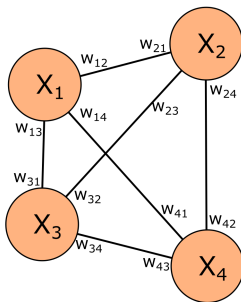
## Rede de Hopfield diagrama



**Figura 3.3:** Distribuição dos neurônios de uma rede de Hopfield com 4 unidades.



## Rede de Hopfield diagrama



**Figura 3.4:** Identificação das conexões de uma rede de Hopfield com 4 unidades.

# Estado da Rede

Exemplo de um estado  $\mathbf{x}$  para uma rede com 4 unidades:

# Estado da Rede

Exemplo de um estado  $\mathbf{x}$  para uma rede com 4 unidades:

$$\mathbf{x} = (0, 1, 1, 0) \quad (3.1)$$

## Função de Energia

Segundo **HOPFIELD (1982)**, como as conexões são simétricas, existe uma função de energia  $H$  para a rede, dado o estado  $\mathbf{x}$  em que ela se encontra.

$$H(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \omega_{ij} x_i x_j - \sum_i \phi_i x_i, \quad (3.2)$$

Equação (3.2) depende da correlação entre as unidades (primeiro termo), e depende do limiar de ativação de cada unidade (segundo termo). Por simplificação podemos considerar apenas o primeiro termo.

A energia sempre decresce ou permanece constante conforme o sistema evolui. Sistema é estacionário quando a energia é menor. Achou um mínimo.

# Aprendizagem

Fazer a rede de Hopfield aprender corresponde a determinar os valores das conexões  $\omega_{ij}$ , a partir de um conjunto de padrões apresentado para a rede. Isto é, aprender quais são os mínimos da rede para o conjunto de treinamento em questão.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{N} x_i x_j, \quad (3.3)$$

considerando que a rede aprende apenas um padrão.

# Função de Ativação

O valor  $x_i$  que a unidade  $x_i$  possui é dada pela função degrau.



Figura 3.5: Função de ativação de uma unidade na rede de Hopfield.

$$x_i = \Theta \left( \sum_j \omega_{ij} x_j \right) \quad (3.4)$$

## Procedimento

Uma vez que a rede determinou o valor de suas conexões, podemos mostrar um novo estado para a rede, por exemplo,  $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0)$ .

Partindo de uma unidade escolhida aleatoriamente, determinamos se a unidade fica ativa ou não (muda de valor) avaliando a diferença de energia

$$\Delta H_i = H_i(x_i = 0) - H_i(x_i = 1). \quad (3.5)$$

Hopfield tem característica determinista porque a rede sempre opera indo em direção a menor energia. Pode acontecer de ficar preso em mínimo local. Para um problema com muitas variáveis, isso pode ser tornar um problema, pois podemos não chegar ao melhor resultado. Há outras formas de se contornar isso.

# Unidades Estocásticas

Podemos considerar também o caso em que as unidades  $x_i$  de uma rede são variáveis aleatórias. É o que acontece se considerarmos unidades estocásticas.

A unidade  $x_i$  tem agora certa probabilidade  $P$  de ser encontrado com valor  $x_i = 1$ , e probabilidade  $1 - P$ , com valor  $x_i = 0$ .



# Função de Ativação

Outra forma para a função de ativação:

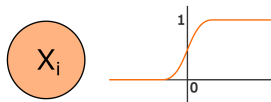


Figura 4.6: Função de ativação de uma unidade estocástica.

# Função de Ativação

Função logística, ao invés de função degrau ...

$$x_i = P(h_i) = \frac{1}{1 + e^{(-2\beta h_i)}} \quad (4.1)$$

$$h_i = \sum_j \omega_{ij} x_j \quad (4.2)$$

## Temperatura – Ruído

Na equação (4.1), temos o parâmetro  $\beta$ , que corresponde ao inverso da temperatura  $T$ .

Esta temperatura não tem o mesmo significado físico, mas é usado aqui para introduzir ruído. Controlar a inclinação da função logística.

Se  $\beta$  for muito grande, ou seja, temperatura muito baixa, o sistema retorna à situação determinística. A função logística passa a ser a função degrau.

## Rede com Unidades Estocásticas diagrama

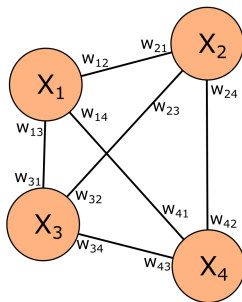


Figura 4.7: Rede com 4 unidades estocásticas e seus respectivos pesos.

# Máquina de Boltzmann

Rede estocástica com  $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ .

Possui dois tipos de unidades distintas: unidades **visíveis** e unidades **escondidas**.

**Visíveis:** ligadas ao meio externo; correspondentes as variáveis do problema.

**Escondidas:** não tem ligação do o meio externo; determinam a relação entre as variáveis do problema.

# Arquitetura de BMs

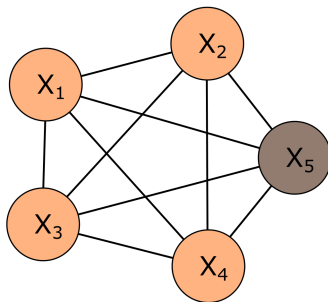
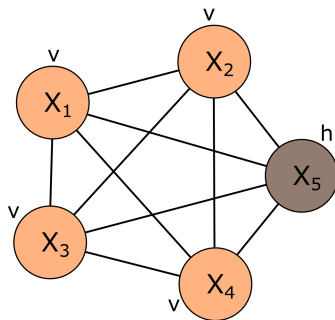


Figura 5.8: Diagrama de uma máquina de Boltzmann.

# Arquitetura de BMs



**Figura 5.9:** Diagrama de uma máquina de Boltzmann; unidades mais claras são as visíveis, e unidades mais escuras, as escondidas.

## O sistema

Vamos considerar que temos uma rede com  $N$  unidades visíveis,  
e  $K$  unidades escondidas,



## O sistema

Vamos considerar que temos uma rede com  $N$  unidades visíveis, e  $K$  unidades escondidas, em que as unidades visíveis estão no estado  $v$ , e as escondidas, no estado  $h$ .

## O sistema

Vamos considerar que temos uma rede com  $N$  unidades visíveis, e  $K$  unidades escondidas, em que as unidades visíveis estão no estado  $v$ , e as escondidas, no estado  $h$ .

Temos  $2^{(N+K)}$  possibilidades de estados em que a rede pode ser encontrada.

## O sistema

Vamos considerar que temos uma rede com  $N$  unidades visíveis, e  $K$  unidades escondidas, em que as unidades visíveis estão no estado  $v$ , e as escondidas, no estado  $h$ .

Temos  $2^{(N+K)}$  possibilidades de estados em que a rede pode ser encontrada.

Uma unidade  $x_i = x_i$ , sendo que  $x_i \in \{0, 1\}$ .

# Objetivo da Máquina de Boltzmann

Na máquina de Boltzmann fazemos o ajuste das conexões  $\omega_{ij}$  para termos um certo estado nas unidades visíveis com uma distribuição de probabilidade desejada.

Se precisamos determinar as conexões  $\omega_{ij}$ , precisamos de um mecanismo para atualizar os pesos, temos que resolver:

# Objetivo da Máquina de Boltzmann

Na máquina de Boltzmann fazemos o ajuste das conexões  $\omega_{ij}$  para termos um certo estado nas unidades visíveis com uma distribuição de probabilidade desejada.

Se precisamos determinar as conexões  $\omega_{ij}$ , precisamos de um mecanismo para atualizar os pesos, temos que resolver:

$$\omega_{ij}^{(final)} = \omega_{ij}^{(inicial)} + \Delta\omega_{ij}. \quad (5.1)$$

# Objetivo da Máquina de Boltzmann

Na máquina de Boltzmann fazemos o ajuste das conexões  $\omega_{ij}$  para termos um certo estado nas unidades visíveis com uma distribuição de probabilidade desejada.

Se precisamos determinar as conexões  $\omega_{ij}$ , precisamos de um mecanismo para atualizar os pesos, temos que resolver:

$$\omega_{ij}^{(final)} = \omega_{ij}^{(inicial)} + \Delta\omega_{ij}. \quad (5.1)$$

Lembrando que os pesos são ajustados baseados nos exemplos de treinamento que a rede recebe.

# Grandezas Importantes

Energia para rede com unidades visíveis no estado  $v$ , e escondidas, no estado  $h$ :

$$H_{vh} = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \omega_{ij} x_i x_j - \sum_i \phi_i x_i. \quad (5.2)$$

Podemos calcular a soma de todos os possíveis estados da rede pela função partição:

$$Z = \sum_u \sum_k e^{(-\beta H_{uk})}. \quad (5.3)$$

# Grandezas Importantes

A probabilidade  $P_v$  de achar as unidades visíveis de uma máquina de Boltzmann em um determinado estado  $v$ , é

$$P_v = \sum_h \frac{1}{Z} e^{-\beta H_{vh}} \quad (5.4)$$



## Entropia Relativa - Divergência Kullback-Leibler

Se temos duas distribuições de probabilidade distintas, por exemplo,  $P$  e  $R$ , sobre um mesmo espaço de estados, podemos calcular a diferença entre estas distribuições pela entropia relativa,  $E$ , (ou divergência de Kullback-Leibler,  $D_{KL}(R||P)$ ).

## Entropia Relativa - Divergência Kullback-Leibler

Com as máquinas de Boltzmann queremos determinar a probabilidade  $P_v$  de achar as unidades visíveis em determinado estado  $v$ , como mostra a equação (5.4). Porém para este estado temos uma probabilidade desejada  $R_v$ .

$$E = \sum_v R_v \ln \left[ \frac{R_v}{P_v} \right] \quad (5.5)$$

## Atualização de $\Delta\omega_{ij}$

Usamos a nossa entropia relativa como função custo.

Pelo método do gradiente descendente, podemos calcular  $\Delta\omega_{ij}$ ,

$$\Delta\omega_{ij} = -\eta \frac{\partial E}{\partial \omega_{ij}}. \quad (5.6)$$

$E$  é função de  $P_v$ .  $P_v$  é função dos pesos  $\omega_{ij}$ .

## Atualização de $\Delta\omega_{ij}$

Por simplificação, vamos considerar que a função de energia para a rede no estado  $v$  e  $h$  é dada apenas pela correlação entre as unidades (primeiro termo da equação (5.2)).

frame teste