

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG DUA
DIMENSI DENGAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT
CTCS (*Center Time Center Space*)**

SKRIPSI

**OLEH
ALLIFIA NUR CHASANAH
NIM. 13610067**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017**

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG DUA
DIMENSI DENGAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT
CTCS (*Center Time Center Space*)**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
ALLIFIA NUR CHASANAH
NIM. 13610067**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2017**

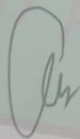
**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG DUA
DIMENSI DENGAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT
CTCS (*Center Time Center Space*)**

SKRIPSI

Oleh
Allifia Nur Chasanah
NIM. 13610067

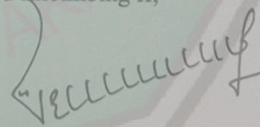
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
tanggal 23 Agustus 2017

Pembimbing I,



Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Pembimbing II,



Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG DUA
DIMENSI DENGAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT
CTCS (*Center Time Center Space*)**

SKRIPSI

Oleh
Allifia Nur Chasanah
NIM. 13610067

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 14 September 2017

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Anggota Penguji : Evawati Alisah, M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Allifia Nur Chasanah

NIM : 13610067

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi
dengan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit CTCS (*Center
Time Center Space*)

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pemikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya sendiri.

Malang, 23 Agustus 2017
Yang membuat pernyataan



Allifia Nur Chasanah
NIM.13610067

MOTO

“As I go on with life,I find that there can be bad moment, but I have to be positive and change so that the bad thing won't happen again”



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Kasanun, ibunda Nuryani,

dan kakak tersayang Andri Sulami dan Ari Rochmawati.

Serta sahabat-sahabat penulis Siti Zahrotul, Asyrifa, Umi Mufidah, dan Lailatul Badriyah.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warakhmatullahi Wabarakatuh

Segala puji syukur bagi Allah SWT atas rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapatkan bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan serta imunya kepada penulis.
5. Evawati Alisah, M.Pd selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademik Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Uniersitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan Ibu yang selalu memerikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2013 yang telah berjuang bersama, terima kasih atas masukan serta semangatnya.

9. Semua pihak yang secara langsung atau tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun material.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 28 Agustus 2017

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL.....	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
ملخص.....	xvii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Penurunan Persamaan Gelombang Dua Dimensi	8
2.2 Well Posed	12
2.3 Deret <i>Taylor</i>	13
2.4 Metode Beda Hingga.....	14
2.4.1 Skema Eksplisit	16
2.5 Masalah Syarat Batas	18
2.6 Kekonvergenan	19
2.6.1 Kestabilan	19
2.6.2 Konsistensi.....	20
2.7 <i>Error</i> atau Kesalahan (Galat).....	20

2.8	Pandangan Islam tentang Gelombang	21
-----	---	----

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Diskritisasi	25
3.1.1	Diskritisasi Persamaan Gelombang Dua Dimensi	25
3.1.2	Diskritisasi Kondisi Awal dan Kondisi Batas	26
3.2	Kekonvergenan	28
3.2.1	Kestabilan	28
3.2.2	Konsistensi	31
3.3	Simulasi Interpretasi Hasil	34
3.3.1	Simulasi Pertama	34
3.3.2	Simulasi Kedua	53
3.4	Integrasi dalam Islam	59

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan	63
4.2	Saran	63

DAFTAR RUJUKAN	64
-----------------------------	-----------

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Nilai $u(x_i, y_j, 0)$ saat $n = 1$	36
Tabel 3.2	Nilai $u(x_i, y_j, 0.25)$ saat $n = 2$	36
Tabel 3.3	Nilai $u(x_i, y_j, 0.25)$ saat $n = 2$	44
Tabel 3.4	Solusi Analitik $u(x, y, 0.25)$ saat $n = 2$	44
Tabel 3.5	Nilai $u(x_i, y_j, 0.5)$ saat $n = 3$	44
Tabel 3.6	Nilai $u(x, y, 0.5)$ saat $n = 3$	51
Tabel 3.7	Solusi Analitik $u(x, y, 0.5)$ saat $n = 3$	51
Tabel 3.8	Nilai <i>error</i> dari $u(x_i, y_j, 0.5)$ pada saat $n = 3$	51
Tabel 3.9	Nilai <i>Error</i> untuk $u(x, y, t)$ dengan variasi Δt dengan $t \in [0, 20]$..	56
Tabel 3.10	Nilai <i>Error</i> untuk $u(x, y, t)$ dengan variasi Δx dengan $t \in [0, 20]$..	57
Tabel 3.11	Nilai <i>Error</i> untuk $u(x, y, t)$ dengan variasi Δy dengan $t \in [0, 20]$..	58

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Bagian kecil membran	9
Gambar 2.2	Gaya yang bekerja pada komponen vertikal	10
Gambar 2.3	Gaya yang bekerja pada komponen vertikal sisi kanan dan kiri ..	11
Gambar 2.4	Jaringan titik hitung pada bidang x dan y	16
Gambar 2.5	Jaringan titik hitungan skema eksplisit	17
Gambar 3.1	Grafik solusi numerik $u(x, y, t)$ saat $t = 0$	52
Gambar 3.2	Grafik solusi numerik $u(x, y, t)$ saat $t = 0.25$	52
Gambar 3.3	Grafik solusi numerik $u(x, y, t)$ saat $t = 0.5$	52
Gambar 3.4	Simulasi Perubahan Gelombang Dua Dimensi saat $\Delta x = 0.25$, $\Delta y=1$ dan $\Delta t = 0.5$	54

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

i	: Indeks yang menyatakan ruang di x
j	: Indeks yang menyatakan ruang di y
n	: Indeks yang menyatakan ruang di t
$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}$: Turunan orde kedua terhadap x
$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}$: Turunan orde kedua terhadap y
$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}$: Turunan orde kedua terhadap t
$u(x, t)$: Perubahan gelombang yang dipengaruhi oleh ruang (x, y) pada waktu (t)
$u_{i,j}^n$: Perubahan gelombang yang dipengaruhi oleh ruang (i, j) pada waktu (t)
Δx	: Perubahan ruang di x
Δy	: Perubahan ruang di y
Δt	: Perubahan waktu di t

ABSTRAK

Chasanah, Allifia. 2017. **Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi dengan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit CTCS (*Center Time Center Space*)**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si (II) Evawati Alisah, M.Pd

Kata Kunci: Persamaan gelombang dua dimensi, metode beda hingga, skema eksplisit CTCS, syarat kestabilan, syarat konsistensi.

Persamaan gelombang dua dimensi merupakan persamaan diferensial parsial yang merupakan representasi dari gelombang permukaan yang dihasilkan oleh aliran air. Persamaan seperti ini cukup rumit untuk dikaji secara eksak. Penelitian ini berupaya untuk menganalisis solusi numerik dengan metode beda hingga skema eksplisit CTCS. Langkah awal adalah dilakukan diskritisasi pada persamaan gelombang dua dimensi dengan metode beda hingga pusat terhadap waktu dan ruang. Selanjutnya menentukan syarat kestabilan dan syarat konsistensi untuk menunjukkan bahwa metode yang digunakan tersebut memiliki solusi yang mendekati solusi analitiknya. Setelah diperoleh syarat kestabilan dan konsistensi dari skema yang digunakan maka simulasi dari skema yang digunakan dapat dilakukan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penggunaan metode beda hingga skema eksplisit CTCS pada persamaan gelombang dua dimensi stabil dengan syarat tertentu. Dari syarat kekonvergenannya skema eksplisit CTCS pada persamaan gelombang dua dimensi diperoleh order *error*-nya $\mathcal{O}(\Delta t^3, \Delta x^3, \Delta y^3)$. Selanjutnya untuk penelitian dapat meneliti tentang solusi analitik persamaan gelombang dua dimensi dengan menggunakan kondisi batas *Neumann*.

ABSTRACT

Chasanah, Allifia. 2017. **Numerical Solution of Two Dimentional Wave Equation Using CTCS (*Center Time Center Space*) of Explicit Scheme Finite Difference Method.** Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si (II) Evawati Alisah, M.Pd

Keywords: Two dimentional wave equation, finite different method, explicit scheme, stability, consistency.

The two-dimensional wave equation is a partial differential equation which is a representative of the surface wave generated by the flow. Such an equation is very complicated to be explored. This research attempts to analyze the numerical solutions using CTCS of explicit scheme finite different method. The first step is discretize two-dimensional wave equation using central of time and central of space from finite difference method. Next step, determine the stability and consistency to indicate that the method used has a solution approaching its analytical solution. Having obtained the stability and consistency requirements of the scheme used then the simulation of the scheme used can be done. The simulation results show that exexplicit scheme of finite different method in two dimensional wave persuasion is stable with certain conditions. For further research one can resolve the exact solution of two dimentional wave equation using *Neumann* conditions..

ملخص

تشاسانا, أليفيا ٢٠١٧. **الخل العددي المعادلة الموجات ثنائية الأبعاد باستخدام طريقة الفروق المحدودة مخطط واضح**. بحث جامعي شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا, الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالنج. مشفر: (1) محمد جمهوري الماجستير , (2) ايفاواقي عاليساة الماجستير

الكلمات الرئيسية: الحل العددي، المعادلات موجات، شروط الاستمرار، شروط الإتساق

ومعادلة موجة ثنائية الأبعاد هي معادلة تفاضلية جزئية تمثل تمثيل الموجة السطحية الناتجة عن التدفق. هذه المعادلة معقدة جدا ل يتم فحصها بالضبط, يحاول هذا البحث تحليل الحلول العددية بطرق مختلفة لمخطط كتس الصريح. وتتمثل الخطوة الأولى في تحريف معادلة الموجة ثنائية الأبعاد مع الأسلوب المركزي لفروق التوقيت والفضاء. التالي تحديد متطلبات الثبات والاتساق للإشارة إلى أن الطريقة المستخدمة لديها حل تقترب من حلها التحليلي. وبعد الحصول على متطلبات الاستقرار والاتساق في المخطط المستخدم, يمكن بعد ذلك محاكاة النظام المستخدم. وتبين نتائج المحاكاة أن استخدام أساليب مختلفة حتى مخطط كتس صريح في إقناع الموجة ثنائية الأبعاد مستقر مع ظروف معينة.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fenomena gelombang merupakan kejadian fisik yang sering ditemui dalam kehidupan sehari-hari. Gelombang merupakan suatu vibrasi merambat yang terjadi karena gangguan pada objek tertentu. Fenomena ini dapat ditemukan pada gelombang permukaan air. Selanjutnya analisa untuk gelombang permukaan air menjadi urgen untuk dikaji. Hal ini dimaksudkan agar fenomena gelombang yang terjadi dapat bermanfaat untuk kehidupan Allah berfirman pada Q.S Hud/11: 42 :

وَهِيَ تَجْرِي بِهِمْ فِي مَوْجٍ كَالْجِبَالِ وَنَادَى نُوحٌ ابْنَهُ وَكَانَ فِي مَعْزِلٍ اُرْكَبْ مَعَنَا وَلَا تَكُن مَعَ
الْكَافِرِينَ ٤٢

14. Dan Dialah, Allah yang menundukkan lautan (untukmu), agar kamu dapat memakan daripadanya daging yang segar (ikan), dan kamu mengeluarkan dari lautan itu perhiasan yang kamu pakai; dan kamu melihat bahtera berlayar padanya, dan supaya kamu mencari (keuntungan) dari karunia-Nya, dan supaya kamu bersyukur.(QS. Hud/11:42).

Berdasarkan tafsir Ibnu Katsir dijelaskan bahwa Allah memberi kabar tentang pengendalian-Nya terhadap lautan yang ombaknya bergemuruh dan Allah memberi anugerah kepada hamba-Nya dengan menundukkan lautan itu untuk mereka sehingga membuat mereka mudah mengaranginya, dan menjadikan di dalamnya ikan dan menjadikan dagingnya halal baik yang hidup maupun yang mati, serta diciptakanNya permata yang sangat berharga. Allah memberi anugerah kepada mereka dengan dengan menundukkan lautan untuk membawa perahu-perahu mengaranginya dan dikatakan pula angin yang menggerakannya.

Dengan merujuk pada Firman Allah di atas, maka dalam kaitannya dengan masalah gelombang permukaan air, terdapat model matematika yang dapat

mewakilinya. Gelombang permukaan air dua dimensi merupakan rambatan getaran pada sebuah membran permukaan air. Dalam penelitian ini membran diasumsikan berbentuk persegi panjang. Model dinyatakan dalam persamaan diferensial parsial.

Persamaan gelombang dua dimensi dapat diselesaikan secara eksak maupun numerik. Namun pada kenyataannya, dalam beberapa kasus untuk mencari penyelesaian secara eksak merupakan hal yang cukup rumit. Hal ini terjadi atas beberapa kemungkinan, yakni (1) model yang digunakan bersifat non linear dan (2) variabel yang terlibat cukup banyak. Oleh karena itu perlu dilakukan pendekatan numerik sebagai metode penyelesaiannya sehingga masuk akal untuk dikerjakan. Penelitian ini difokuskan pada skema eksplisit CTCS (*Central Time Central Space*). Skema CTCS merupakan pendekatan numerik dengan beda pusat terhadap waktu dan beda pusat terhadap ruang.

Metode ini telah banyak digunakan pada penelitian sebelumnya, diantaranya oleh Amanah (2010) yang membahas tentang metode beda hingga skema eksplisit CTCS pada persamaan *Forced* KdV dan Jumrotul Mikmah (2010) yang membahas metode beda hingga skema eksplisit CTCS pada persamaan telegraf. Langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mendiskritisasi persamaan gelombang dua dimensi dan syarat awal serta syarat batasnya. Selanjutnya memodifikasi bentuk diskrit persamaan gelombang dua dimensi dengan mensubstitusi bentuk syarat awalnya pada persamaan gelombang dua dimensi. Kedalaman analisis akan dilanjutkan sampai pada syarat kestabilan dan syarat konsistensi.

Selanjutnya analisis skema numerik tidak cukup menjamin solusi numerik dikatakan valid dan baik. Oleh karena itu kestabilan solusi numerik sangat diperlukan. Flaherty (1824) mengatakan bahwa kestabilan mengakibatkan solusi dari persamaan diferensial tidak sensitif terhadap gangguan kecil yang dimisalkan sebagai data initial. Selanjutnya Zauderer (2006) menyebutkan bahwa analisis kestabilan dari skema yang digunakan dapat dicari menggunakan stabilitas *von Neumann* dengan mensubsitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan beda yang digunakan. Syarat perlu dan cukup stabilitas *von Neumann* yaitu $|\rho| \leq 1$.

Selain itu ternyata analisis kekonvergenan juga diperlukan agar solusi yang diperoleh konvergen. Menurut Flaherty (1824) konsistensi mengakibatkan persamaan beda hingga yang terjadi merupakan aproksimasi terbaik bagi bentuk persamaan diferensial parsialnya. Analisis konsistensi dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret *Taylor*. Kriteria konsistensi akan terpenuhi jika Δx mendekati nol, Δy mendekati nol, dan Δt mendekati nol. Jika syarat kestabilan dan konsistensi terpenuhi maka solusi numerik tersebut akan mendekati solusi analitik.

Sering kali kasus matematika memiliki bentuk persamaan yang sulit untuk diselesaikan secara analitik. Sehingga metode aproksimasi skema eksplisit CTCS ini diharapkan dapat memberikan solusi atas permasalahan tersebut.

Berdasarkan latar belakang tersebut, dalam peneltian ini tema yang diangkat penulis adalah “Penyelesaian Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi dengan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit CTCS (*Central Time Central Space*)”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah penulisan penelitian ini adalah:

1. Bagaimana analisis penyelesaian numerik persamaan gelombang dua dimensi dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS?
2. Bagaimana analisis kestabilan persamaan gelombang dua dimensi dengan skema eksplisit CTCS?
3. Bagaimana analisis konsistensi persamaan gelombang dua dimensi dengan skema eksplisit CTCS?
4. Bagaimana simulasi persamaan gelombang dua dimensi dengan skema eksplisit CTCS?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penulisan penelitian ini adalah:

1. Menganalisis solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS (*Central Time Central Space*).
2. Menganalisis syarat kestabilan persamaan gelombang dua dimensi dengan skema eksplisit CTCS.
3. Menganalisis konsistensi persamaan gelombang dua dimensi dengan skema eksplisit CTCS.

4. Untuk menganalisis simulasi persamaan gelombang dua dimensi dengan skema eksplisit CTCS.

1.4 Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat yang etrdapat dalam penelitian ini, di antaranya sebagai berikut:

1. Memperoleh solusi numerik dari persamaan gelombang dua dimensi dan pengetahuan mengenai prosedur penyelesaian persamaan gelombang dua dimensi dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS.
2. Menjadi referensi bagi penelitian selanjutnya terkait syarat kestabilan.
3. Menjadi referensi bagi penelitian selanjutnya terkait langkah-langkah untuk menentukan solusi numerik persamaan diferensial tersebut konsistensi atau tidak.
4. Menjadi referensi bagi penelitian selanjutnya terkait simulasi persamaan gelombang dua dimensi.

1.5 Batasan Masalah

Adapun dalam penelitian ini masalah yang diteliti hanya dibatasi pada model persamaan gelombang dua dimensi berikut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \text{pada } \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, t > 0\} \quad (1.1)$$

dengan kondisi awal :

$$u(x, y, 0) = x^2 + y^2, \quad (1.2)$$

dengan kecepatan awal :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \quad (1.3)$$

Pada penelitian ini akan digunakan syarat batas *Neumann* berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0 \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial x}(1, y, t) = 2 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1, t) = 2 \quad (1.5)$$

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Analisis solusi numerik secara CTCS dikerjakan dengan langkah-langkah :
 - a. Diskritisasi persamaan gelombang dua dimensi dengan skema eksplisit CTCS.
 - b. Diskritisasi kondisi awal dengan skema eksplisit CTCS.
 - c. Diskritisasi kondisi batas dengan skema eksplisit CTCS.
2. Menentukan syarat kestabilan dengan langkah-langkah sebagai berikut :
 - a. Mensubstitusikan nilai $u_{i,j}^n = \rho^n e^{lai} e^{laj}$ ke dalam bentuk diskrit persamaan gelombang dua dimensi dengan skema CTCS yang telah diperoleh.
 - b. Menentukan syarat perlu dan cukup kestabilan *Von Neumann* yaitu $|\rho| \leq 1$.
3. Analisis konsistensi dengan langkah-langkah sebagai berikut :
 - a. Menjabarkan ekspansi deret Taylor $u_{i,j}^{n\pm 1}$, $u_{i\pm 1,j}^n$, dan $u_{i,j\pm 1}^n$ sampai orde dua.
 - b. Mensubstitusikan hasil ekspansi deret *Taylor* ke dalam bentuk diskrit persamaan gelombang dua dimensi.
4. Melakukan simulasi dari metode yang digunakan baik secara manual ataupun dengan menggunakan program.

- a. Mengintrepetasikan hasil solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi dengan metode beda hingga skema eksplisit CTCS.
- b. Menganalisis pertumbuhan *error*.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami skripsi ini, peneliti membagi sistematika penulisan kedalam empat bab sebagai berikut :

Bab I : Pendahuluan

Bab ini meliputi beberapa sub bahasanyaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II : Kajian Pustaka

Pada bab ini akan dibahas terkait teori-teori yang berhubungan dengan hal-hal yang akan dibahas oleh peneliti diantaranya penurunan persamaan gelombang dua dimensi, *well posed*, deret *Taylor*, metode beda hingga, masalah syarat batas, kestabilan, konsistensi, dan pandangan islam tentang gelombang.

Bab III : Pembahasan

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang proses pendiskritan terhadap persamaan serta kondisi batasnya, kestabilan, konsistensi, simulasi dan interpretasi hasil, serta integrasinya dalam islam.

Bab IV : Penutup

Pada bab ini penulis memberikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan yang dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Penurunan Persamaan Gelombang Dua Dimensi

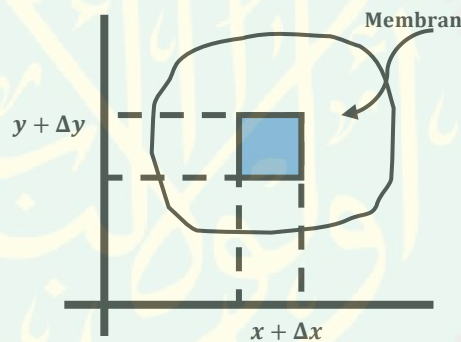
Penurunan persamaan gelombang dua dimensi telah banyak dilakukan oleh para peneliti sebelumnya, diantaranya Satriawan (2012:77-82) menyelesaikan masalah getaran dan gelombang, Strauss (2007:33-37) menyelesaikan masalah persamaan gelombang dan difusi, Soejati dan Djuhana (2004:60-64) menyelesaikan masalah gelombang serta Siti Zuhriyah (2015) menyelesaikan masalah gelombang secara numerik dengan fungsi radial basis.

Persamaan gelombang merupakan persamaan diferensial parsial yang dapat digunakan sebagai model untuk objek bergetar seperti pada tali atau senar dan membran atau pelat tipis. Fenomena fisik yang terjadi digunakan untuk membentuk model sehingga dapat diperoleh persamaan tersebut. Asumsi-asumsi diperlukan dalam membentuk model untuk menyederhanakan permasalahan. Pada penurunan persamaan gelombang dua dimensi digunakan asumsi-asumsi fisik sebagai berikut (Kreyszig, 2011):

1. Massa membran tiap satuan luas adalah konstan (membran homogen) dan membran elastis sempurna.
2. Jika membran direntangkan dan ditetapkan batasannya di bidang datar tegangan tiap satuan panjangnya yang disebabkan perentangan membran besarnya sama pada semua titik dan arah serta tidak berpengaruh pada saat pergerakannya.

3. Defleksi (penyimpangan) $u(x, y, t)$ dari membran selama pergerakan besarnya kecil menyamakan dengan ukuran membran dan semua sudut inklinasinya (kemiringan) juga kecil.

Pembentukan model didasarkan pada gaya-gaya yang bekerja pada bagian kecil dari membran. Karena defleksi (penyimpangan) dan sudut inklinasi (kemiringan) pada membran kecil, maka sisi-sisi dari bagian kecil tersebut mendekati Δx dan Δy . Pada sisi-sisi tersebut bekerja gaya tiap satuan panjang yang disebut tegangan (T) sehingga gaya yang terdapat pada sisi-sisi tersebut mendekati $T\Delta x$ dan $T\Delta y$. Gaya ini menyinggung pada saat pergerakan membran karena membran elastis sempurna



Gambar 2 1 Bagian kecil membran

Gaya yang bekerja pada bagian membran tersebut terdiri atas 2 komponen yaitu komponen horizontal dan komponen vertikal. Gaya pada komponen horizontal diperoleh dari perkalian gaya dengan cosinus sudut inklinasi. Karena sudut inklinasinya kecil, maka nilai cosinus sudut inklinasi tersebut mendekati 1. Hal yang sama juga berlaku pada sisi yang lain sehingga resultan gaya yang bekerja pada komponen horizontal sama dengan nol. Oleh karena itu, pergerakan partikel dari membran pada arah horizontal dapat diabaikan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa membran bergerak secara vertikal.

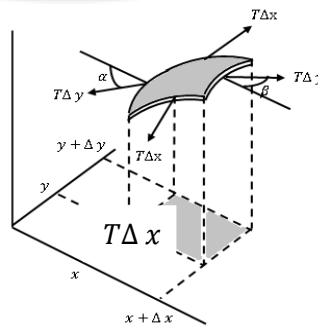
Gaya yang bekerja pada komponen vertikal pada sisi kanan dan sisi kiri adalah $T\Delta y \sin \beta$ dan $-T\Delta y \sin \alpha$. α dan β merupakan nilai dari sudut inklinasi di tengah dari tepian bagian membran. Tanda negatif muncul karena gaya pada sisi kiri arahnya kebawah. Karena sudut inklinasi tersebut kecil, maka sinus dari sudut dapat diganti dengan tangen dari sudut. Oleh karena itu, resultan gaya dari komponen vertikal tersebut adalah

$$\begin{aligned} T\Delta y \sin \beta - T\Delta y \sin \alpha &= T\Delta y (\sin \beta - \sin \alpha) \\ &\approx T\Delta y (\tan \beta - \tan \alpha) \\ &= T\Delta y [u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

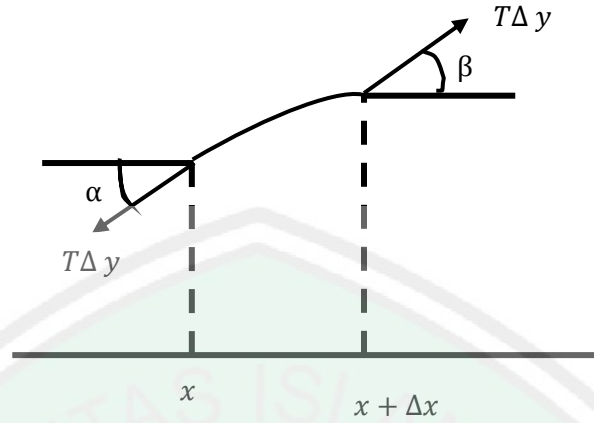
Dimana u_x menotasikan turunan parsial u terhadap x sedangkan y_1 dan y_2 merupakan nilai antara y dengan $y + \Delta y$. Hal yang sama juga berlaku untuk resultan gaya dari komponen vertikal yang bekerja pada dua sisi yang lain sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta x \sin \beta - T\Delta x \sin \alpha &= T\Delta x (\sin \beta - \sin \alpha) \\ &\approx T\Delta x (\tan \beta - \tan \alpha) \\ &= T\Delta x [u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dimana u_y menotasikan turunan parsial u terhadap y sedangkan x_1 dan x_2 merupakan nilai antara x dengan $x + \Delta x$.



Gambar 2.2 Gaya yang bekerja pada komponen vertikal



Gambar 2.3 Gaya yang bekerja pada komponen vertikal sisi kanan dan kiri

Untuk memperoleh persamaan gelombang yang berbentuk persamaan diferensial parsial digunakan hukum II Newton yaitu resultan gaya yang bekerja pada suatu benda sebanding dengan massa ($\rho\Delta x\Delta y$) dan percepatannya $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ yang dihitung pada titik antara y dan $y + \Delta y$. ρ merupakan massa membran persatuan luas, sedangkan Δx dan Δy adalah luas bagian membran. Dengan demikian diperoleh

$$\rho\Delta x\Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y[u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x[u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)] \quad (2.3)$$

Kemudian membagi persamaan (2.3) dengan $\rho\Delta x\Delta y$ sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[\frac{u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} \right] + \frac{T}{\rho} \left[\frac{u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y} \right]$$

$$= \frac{T}{\rho} \left[\frac{u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y + \Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y} \right] \quad (2.4)$$

Dari persamaan (2.4) jika Δx dan Δy mendekati 0, maka diperoleh persamaan diferensial parsial yaitu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad c^2 = \frac{T}{\rho} \quad (2.5)$$

Persamaan diferensial parsial ini disebut persamaan gelombang dua dimensi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ merupakan Laplacian $\nabla^2 u$ dari u sehingga persamaan (2.4) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad (2.6)$$

2.2 Well Posed

Strauss (2007:25) menyebutkan bahwa suatu persamaan diferensial parsial dengan syarat awal dan syarat batas dikatakan *well posed* jika memenuhi syarat :

1. Eksistensi : paling tidak terdapat satu solusi
2. Keunikan : hanya terdapat satu solusi
3. Stabilitas : jika data berubah sedikit, maka solusi akan berubah sedikit

Strauss (2007:25-26) menyebutkan bahwa para ilmuwan biasanya mencoba mengatur kondisi fisik dari suatu permasalahan yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial supaya masalah tersebut menjadi *well posed*, sedangkan matematikawan mencoba untuk membuktikan apakah model beserta kondisi yang diberikan tersebut *well posed* atau tidak. Jika kondisi yang diberikan

terlalu sedikit, maka kemungkinan akan terdapat lebih dari satu solusi (*nonuniqueness*) sedangkan jika kondisi yang diberikan terlalu banyak, maka kemungkinan tidak terdapat solusi (*nonexistence*).

2.3 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama persamaan diferensial. Deret *Taylor* menyediakan cara untuk memprediksi nilai fungsi pada suatu titik. Bambang (2002:7-11) Deret *Taylor* akan memberikan perkiraan suatu fungsi yang benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam prakteknya hanya beberapa suku pertama yang diperhitungkan, hal ini akan menyebabkan ketidaktepatan pada penyelesaian analitik. Sehingga kesalahan (*error*) yang terjadi disebut dengan kesalahan pemotongan (*truncation error, R_n*). Untuk menghitung turunan pertama dari persamaan diferensial berdasarkan deret *Taylor* dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned}
 u(x + \Delta x, y, t) &= u(x, y, t) + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Delta x \\
 &\quad + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 u(x, y, t)}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{6!} + \dots \\
 u(x, y + \Delta y, t) &= u(x, y, t) + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Delta y \\
 &\quad + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \frac{\partial^3 u(x, y, t)}{\partial y^3} \frac{\Delta y^3}{6!} + \dots \\
 u(x, y, t + \Delta t) &= u(x, y, t) + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + \\
 &\quad \frac{\partial^3 u(x, y, t)}{\partial t^3} \frac{\Delta t^3}{6!} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dan

$$\begin{aligned}
 u(x - \Delta x, y, t) &= u(x, y, t) - \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} - \\
 &\quad \frac{\partial^3 u(x, y, t)}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{6!} + \dots \\
 u(x, y - \Delta y, t) &= u(x, y, t) - \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} - \\
 &\quad \frac{\partial^3 u(x, y, t)}{\partial y^3} \frac{\Delta y^3}{6!} + \dots \\
 u(x, y, t - \Delta t) &= u(x, y, t) - \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} - \\
 &\quad \frac{\partial^3 u(x, y, t)}{\partial t^3} \frac{\Delta t^3}{6!} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.4 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial dengan menggunakan pendekatan deret *Taylor*. Bambang (2002:200) Penyelesaian persamaan diferensial merupakan perkiraan dari nilai δ pada titik-titik hitungan $U_{1,1}, U_{1,2}, \dots, U_{i,j}, \dots$ perkiraan dilakukan dengan mengganti turunan dari persamaan diferensial parsial dengan menggunakan perkiraan beda hingga.

Untuk menghitung turunan pertama untuk pendekatan beda maju untuk $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}$ dari persamaan diferensial berdasarkan deret *Taylor* dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta x} (u(x + \Delta x, y, t) - u(x, y, t)) \\
 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta y} (u(x, y + \Delta y, t) - u(x, y, t))
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t))$$

Untuk pendekatan beda mundur turunan pertama untuk $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}$ sebagai berikut :

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} (u(x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t))$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y} (u(x, y, t) - u(x, y - \Delta y, t))$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (u(x, y, t) - u(x, y, t + \Delta t))$$

Dan untuk beda pusat turunan pertama dari $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}$ sebagai berikut :

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} (u(x + \Delta x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t))$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta y} (u(x, y + \Delta y, t) - u(x, y - \Delta y, t))$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t} (u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t - \Delta t))$$

Untuk beda pusat pada orde kedua diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (u(x + \Delta x, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2} (u(x, y + \Delta y, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y - \Delta y, t))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2} (u(x, y, t + \Delta t) - 2u(x, y, t) + u(x, y, t - \Delta t))$$

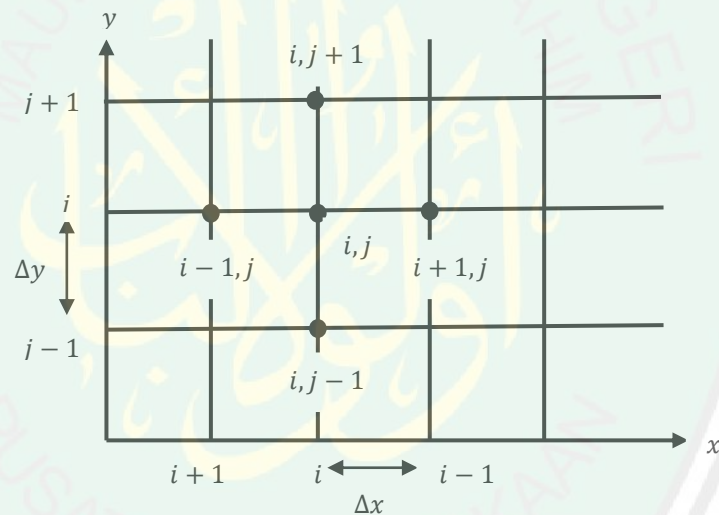
Jika digunakan indeks subskrip i untuk menyatakan titik diskrit pada x , subskrip j untuk menyatakan titik diskrit pada y , dan superskrip n untuk menyatakan titik diskrit pada t maka persamaan (2.12), (2.13), dan (2.14) dapat ditulis :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.11)$$

Jaringan titik hitungan pada bidang $x - y$ yang dapat dibagi menjadi sejumlah bias segi empat dengan sisi Δx dan Δy . Panjang bias dalam arah x adalah Δx dan dalam arah y adalah Δy . Jaringan titik hitungan tersebut jika digambarkan dalam bentuk grid dinyatakan dalam Gambar (2.4) berikut:

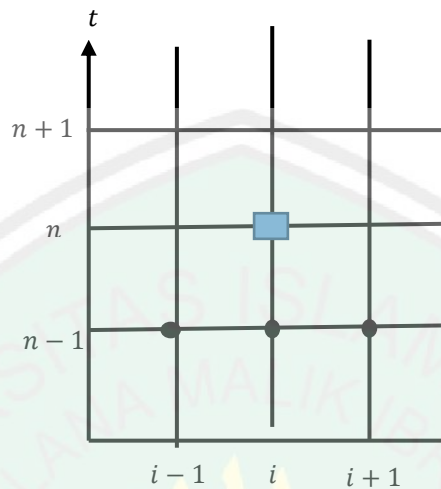


Gambar 2.4 Jaringan titik hitung pada bidang x dan y

2.4.1 Skema Eksplisit

(Bambang, 2002:206) menyebutkan bahwa dalam skema eksplisit nilai pada suatu titik dihitung secara langsung dari nilai di beberapa titik di sekitarnya pada waktu sebelumnya yang sudah diketahui nilainya atau nilai setiap besaran waktu yang lalu sudah diketahui, sehingga nilai $n + 1$ dapat dihitung. Dengan metode ini penurunan persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk beda hingga adalah mudah. Namun kendala utamanya adalah kemungkinan terjadinya

ketidakstabilan hitungan dalam skema yang digunakan, dan kemungkinan juga



stabil dengan syarat tertentu. Jaringan titik dari skema eksplisit ditunjukkan pada

Gambar (2.5) berikut :

Gambar 2.5 Jaringan titik hitungan skema eksplisit

Untuk mempermudah memahami konsep terkait skema eksplisit berikut contoh terkait solusi persamaan diferensial dengan penyelesaian numerik metode beda skema eksplisit.

Contoh :

$$\frac{1}{k} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Dari persamaan (2.18) akan ditentukan bentuk eksplisitnya dengan menggunakan aturan beda maju untuk $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n)$ dan aturan beda pusat untuk

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n)$ sehingga didapatkan hasil :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

Sehingga persamaan (2.18) didapatkan

$$\frac{1}{k} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

Solusi untuk u_i^{n+1} diperoleh

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k\Delta t}{\Delta x^2} [u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n]$$

2.5 Masalah Syarat Batas

Untuk memahami masalah syarat batas, dimisalkan x terletak pada interval $0 < x < a$ dan y terletak pada interval $0 < y < b$. Terdapat 3 kondisi batas yang dapat digunakan, yakni:

1. Syarat batas Dirichlet pada persamaan gelombang dengan interval diatas menurut Strauss (2007:84) diberikan sebagai berikut :

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0$$

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0$$

2. Syarat batas Neumann pada persamaan gelombang dengan interval diatas menurut Strauss (2007:89) diberikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(a, y, t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, b, t)}{\partial y} = 0$$

Dari persamaan diatas dapat didiskritisasi secara numerik dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dengan menggunakan metode hingga sehingga didapatkan hasil sebagai berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} = 0$$

Untuk turunan pertama beda mundur dapat ditulis

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} = 0$$

Untuk turunan pertama beda pusat dapat ditulis

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} = 0$$

3. Syarat batas Robin pada persamaan gelombang dengan interval diatas menurut Strauss (2007:89) diberikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial u(0,y,t)}{\partial x} - a_0 u(0,y,t) = 0 \quad , \text{ pada saat } x = 0$$

$$\frac{\partial u(a,y,t)}{\partial x} - a_l u(a,y,t) = 0 \quad , \text{ pada saat } x = a$$

$$\frac{\partial u(x,0,t)}{\partial y} - a_0 u(x,0,t) = 0 \quad , \text{ pada saat } y = 0$$

$$\frac{\partial u(x,b,t)}{\partial y} - a_0 u(x,b,t) = 0 \quad , \text{ pada saat } y = b$$

2.6 Kekonvergenan

2.6.1 Kestabilan

Zauderer (2006:793-795) menyebutkan bahwa suatu permasalahan persamaan diferensial parsial dapat menjadi stabil dan tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dan ketidakstabilan dapat diterapkan dalam skema beda hingga. Kestabilan skema beda hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi numerik kurang mendekati nilai eksak.

Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan skema adalah stabilitas *von Neumann* atau dikenal dengan stabilitas Fourier, dengan menerapkan stabilitas *von Neumann* terhadap skema beda hingga, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan $u_j^n = p^n e^{lai} e^{laj} = p^n e^{la(i+j)}$ ke dalam persamaan beda hingga yang akan dicari nilai kestabilannya. Syarat perlu dan cukup *von Neumann* adalah $|p| \leq 1$.

2.6.2 Konsistensi

Zauderer(2006:746-747) menyatakan bahwa suatu persamaan beda dikatakan konsisten dengan persamaan diferensial yang dihamperi jika selisih antara persamaan beda dengan persamaan diferensial menuju nilai nol ketika lebar grid yang digunakan juga menuju nol. Selisih antara persamaan diferensial parsial yang dihamperi dengan persamaan bedanya disebut *truncation term*. Jika nilai-nilai *truncation term* semakin menuju nol ketika $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ menuju nol maka dikatakan persamaan beda yang dibuat konsisten dengan persamaan yang dihamperi. Adapun ekspansi deret *taylor* dari $u_{i,j}^{n\pm 1}, u_{i\pm 1,j}^n, u_{i,j\pm 1}^n$ sebagai berikut

$$u_{i,j}^{n\pm 1} = u_{i,j}^n \pm \Delta t u_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{i,j}^n \pm \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{i,j}^n + \dots \quad (2.12)$$

$$u_{i\pm 1,j}^n = u_{i,j}^n \pm \Delta x u_x \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_{i,j}^n \pm \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_{i,j}^n + \dots \quad (2.13)$$

$$u_{i,j\pm 1}^n = u_{i,j}^n \pm \Delta y u_y \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy} \Big|_{i,j}^n \pm \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy} \Big|_{i,j}^n + \dots \quad (2.14)$$

2.7 Error atau Kesalahan (Galat)

Kesalahan numerik timbul dari penggunaan aproksimasi untuk menyatakan operasi dan besaran matematika yang pasti (Chapra dan Chanle, 1988:56). Ada

tiga macam kesalahan yaitu kesalahan bawaan, kesalahan pembulatan (*round-off error*), dan kesalahan pemotongan (*truncation error*) (Triatmodjo, 2002:2). Namun, dalam penelitian ini hanya ada kesalahan pembulatan dan kesalahan pemotongan.

Kesalahan pembulatan (*round-off error*) terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Kesalahan ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak (Triatmodjo, 2002:2-3). Kesalahan pemotongan (*truncation error*) terjadi karena tidak dilakukannya perhitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Misalnya suatu proses tak berhingga diganti dengan proses berhingga. Apabila hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja, maka hasilnya tidak sama dengan solusi eksak. Kesalahan karena hanya memperhitungkan beberapa suku pertama disebut dengan kesalahan pemotongan (Triatmodjo, 2002:3). Dalam penelitian ini kesalahan terjadi pada pemotongan orde pada penggunaan deret *Taylor*. Fungsi dari analisis galat adalah untuk mengetahui seberapa dekat solusi numerik dengan solusi eksaknya, sehingga digunakan kriteria

$$\mathcal{E} = |u_{\text{eksak}} - u_{\text{numerik}}|.$$

2.8 Pandangan Islam tentang Gelombang

Gelombang merupakan suatu getaran yang merambat, dimana dalam perambatannya membutuhkan suatu medium tertentu. Misalkan pada gelombang dua dimensi memiliki medium perambatan berupa panjang dan lebar. Fenomena gelombang dijelaskan dalam Q.S. Yunus/10:22 yang berbunyi :

هُوَ الَّذِي يُسَيِّرُكُمْ فِي الْبَرِّ وَالْأَحْمَرِ حَتَّىٰ إِذَا كُنْتُمْ فِي آلٍ فَفُلْكَ وَحَرَيْنَ بِهِم بِرِيحٍ طَيِّبَةٍ وَفَرِحُوا بِهَا
جَاءَتْهَا رِيحٌ عَاصِفٌ وَجَاءَهُمُ الْمَوْجُ مِنْ كُلِّ مَكَانٍ ۖ وَظُنُّوْا أَنَّهُمْ أُحِيطَ بِهِمْ دَعَوُا اللَّهَ مُخْلِصِينَ
لَهُ الدِّينَ لَئِنْ أَجَبْنَاهُمْ مِنْ هَٰذِهِ لَنَكُونَنَّ مِنَ الشَّاكِرِينَ ٢٢

22. Dialah Tuhan yang menjadikan kamu dapat berjalan di daratan, (berlayar) di lautan. Sehingga apabila kamu berada di dalam bahtera, dan meluncurlah bahtera itu membawa orang-orang yang ada di dalamnya dengan tiupan angin yang baik, dan mereka bergembira karenanya, datanglah angin badai, dan (apabila) gelombang dari segenap penjuru menimpanya, dan mereka yakin bahwa mereka telah terkepung (bahaya), maka mereka berdoa kepada Allah dengan mengikhlaskan ketaatan kepada-Nya semata-mata. (Mereka berkata): "Sesungguhnya jika Engkau menyelamatkan kami dari bahaya ini, pastilah kami akan termasuk orang-orang yang bersyukur".

Berdasarkan tafsir Al-Aisar, adapun ayat yang ke-22 ini memperlihatkan kelemahan, ketidakberdayaan, dan kebutuhan orang-orang musyik kepada Allah manakala mereka menghina Tuhannya, memperolok-olok ayat-ayat dan mendustakan Rasul-Nya. Kemudian Allah Ta'ala mengatakan "Dia yang kalian membuat tipu daya terhadap ayat-ayat-Nya adalah yang menjadikan kamu dapat berjalan didaratkan dengan menciptakan kendaraan baik onta, kuda, maupun keledai untuk kalian." Demikian juga dilautan, Dialah yang menundukkan untuk kalian sehingga kapal-kapal bisa berlayar dengan kehendak-Nya. Sehingga bila kalian berada di dalam bahtera, dan meluncurlah bahtera itu membawa orang-orang yang ada di dalamnya yakni kaum musyrikin yang dengan tiupan angin yang baik, yang sesuai dengan perjalanan bahtera tersebut, dan mereka bergembira karenanya. Seperti kebiasaan para nelayan, akan merasa senang dengan adanya angin yang bersahat, sebab hal itu bisa menyelamatkan mereka dari goncangan dan marabahaya. Lalu datanglah angin badai, angin yang bertiup keras yang menggoncangkan bahtera itu dan para penumpangnya takut tenggelam, dan datang pula gelombang dari segenap penjuru menimpa mereka yaitu orang-orang kafir yang menaiki bahtera tersebut.

Penjelasan tersebut merupakan salah satu contoh dari fenomena gelombang yang dapat kita temui. Fenomena gelombang yang telah dijelaskan yakni berupa angin yang akan menentukan perjalanan di bahtera yang mana bahtera dapat diartikan sebagai lautan yang mana lautan merupakan salah satu bentuk nyata fenomena gelombang yang ada. Pada QS. Yunus ayat 22 ini terdapat kata **الْمَوْجُ** yang dapat diartikan sebagai pasangannya air laut sebagaimana angin kencang berdebu yang ada di darat. Berdasarkan tafsir An-Nur (Tengku: 2000) pada ayat ini dijelaskan bahwa ketika mereka dalam perahu yang berlayar membawanya dengan memperoleh bantuan angin buritan yang baik, maka mereka pun beriang gembira. Tetapi, tiba-tiba datanglah angin badai yang hebat yang disertai gelombang ombak yang bergulung-gulung.

Pada Q.S. Yunus ayat 22 dijelaskan tentang bencana yang sewaktu-waktu datang di lautan. Adapun ayat lain yang menjelaskan masalah gelombang di lautan yakni Q.S An-Nahl/16:14, pada ayat ini dijelaskan tentang nikmat yang ada di lautan yang dapat dimanfaatkan oleh manusia. Sehingga dapat kita ketahui bahwa di lautan Allah tidak hanya menciptakan bencana namun juga nikmat yang berlimpah bagi hamba-Nya. Adapun Q.S An-Nahl/16:14 berbunyi:

وَهُوَ الَّذِي سَخَّرَ الْبَحْرَ لِتَأْكُلُوا مِنْهُ لَحْمًا طَرِيًّا وَتَسْتَخْرِجُوا مِنْهُ حِلْيَةً تَلْبَسُونَهَا وَتَرَى الْاَلُفْكَ مَوَاجِرَ فِيهِ وَلِتَبْتَغُوا مِنْ فَضْلِهِ ۚ وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ١٤

14. Dan Dialah, Allah yang menundukkan lautan (untukmu), agar kamu dapat memakan daripadanya daging yang segar (ikan), dan kamu mengeluarkan dari lautan itu perhiasan yang kamu pakai; dan kamu melihat bahtera berlayar padanya, dan supaya kamu mencari (keuntungan) dari karunia-Nya, dan supaya kamu bersyukur.

Berdasarkan tafsir Ibnu Katsir dijelaskan bahwa Allah memberi kabar tentang pengendalian-Nya terhadap lautan yang ombaknya bergemuruh dan Allah memberi anugerah kepada hamba-Nya dengan menundukkan lautan itu untuk

mereka sehingga membuat mereka mudah mengaranginya, dan menjadikan di dalamnya ikan dan menjadikan dagingnya halal baik yang hidup maupun yang mati, serta diciptakannya permata yang sngat berharga. Dan Allah memberi anugerah kepada mereka dengan dengan menundukkan lautan untuk membawa perahu-perahu mengaranginya dan dikatakan pula angin yang menggerakkannya. Dalam hal ini angin merupakan salah satu contoh dari gelombang elektromagnetik.

Sedangkan menurut Tafsir Al-Aisar , pada ayat ayat dijelaskan tentang sebab tunduknya lautan yaitu agar manusia dapat mencari ikan untuk dimakan, serta mengeluarkan mutiara dan permata sebagai perhiasan. Firman-Nya “*kamu melihat bahtera kapal berlayar padanya...*”. Maksudnya orang-orang yang memiliki mata lihatlah lautan, niscaya kamu akan melihat kapal-kapal pulang dan pergi yang membelah lautan. Dimana kapal-kapal tersebut dapat bergerak karena adanya gelombang air di lautan yang disertai dengan angin yang menggerakkannya.

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Diskritisasi

3.1.1 Diskritisasi Persamaan Gelombang Dua Dimensi

Penyelesaian numerik persamaan gelombang dua dimensi dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS dengan $x = \{x_i\} \in [-1,1]$, $y = \{y_j\} \in [-1,1]$ dan $t = \{t_n\} \in [0,1]$ untuk $i = 1,2, \dots, K-1$, $j = 1,2, \dots, L-1$, dan $n = 1,2, \dots, N-1$ pada persamaan (1.1) sehingga didapatkan hasil diskritisasi berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad (3.3)$$

Selanjutnya diskritisasi dapat dilakukan dengan mensubstitusikan persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3) kedalam persamaan (1.1) sehingga diperoleh

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (3.4)$$

dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1} &= \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + \\ &\quad \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

Misalkan $s = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$ dan $p = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta y^2}$ maka persamaan (3.5) menjadi

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1} &= s(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + p(u_{i,j+1}^n - \\
&\quad 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \\
u_{i,j}^{n+1} &= -u_{i,j}^{n-1} + 2u_{i,j}^n(1 - s - p) + s u_{i+1,j}^n + s u_{i-1,j}^n + \\
&\quad p u_{i,j+1}^n + p u_{i,j-1}^n \\
u_{i,j}^{n+1} &= -u_{i,j}^{n-1} + 2u_{i,j}^n(1 - s - p) + s(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \\
&\quad p(u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

3.1.2 Diskritisasi Kondisi Awal dan Kondisi Batas

Setelah diketahui bentuk diskrit dari persamaan gelombang dua dimensi, selanjutnya akan dilakukan pendiskritan terhadap kondisi awal, kecepatan awal, serta kondisi batas pada $x = \{x_i\} \in [0,1]$, $y = \{y_j\} \in [0,1]$ dan $t = \{t_n\} \in [0,1]$ untuk $i = 1, 2, \dots, K-1$, $j = 1, 2, \dots, L-1$, dan $n = 1, 2, \dots, N-1$. Adapun pendiskritan kondisi awal untuk persamaan (1.2) sebagai berikut :

$$u(x, y, 0) = u_{i,j}^1 = x^2 + y^2 \tag{3.7}$$

Selanjutnya untuk pendiskritan kecepatan awal yang telah dijelaskan pada persamaan (1.3) adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= 0 \\
\frac{u_{i,j}^2 - u_{i,j}^0}{2\Delta t} &= 0 \\
u_{i,j}^2 - u_{i,j}^0 &= 0 \\
u_{i,j}^2 &= u_{i,j}^0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Kondisi batas kiri pada persamaan (1.4) dapat didiskritkan mmenjadi :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) &= 0 \\
 \frac{u_{2,j}^n - u_{0,j}^n}{2\Delta x} &= 0 \\
 u_{2,j}^n - u_{0,j}^n &= 0 \\
 u_{2,j}^n &= u_{0,j}^n
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Untuk kondisi batas bawahnya dapat didiskritkan sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x}(1, y, t) &= 2 \\
 \frac{u_{K+1,j}^n - u_{K-1,j}^n}{2\Delta x} &= 2 \\
 u_{K+1,j}^n - u_{K-1,j}^n &= 4\Delta x \\
 u_{K+1,j}^n &= u_{K-1,j}^n + 4\Delta x
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Selanjutnya untuk kondisi batas kanan pada persamaan (1.5) diperoleh bentuk diskritnya sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) &= 0 \\
 \frac{u_{i,2}^n - u_{i,0}^n}{2\Delta y} &= 0 \\
 u_{i,2}^n - u_{i,0}^n &= 0 \\
 u_{i,2}^n &= u_{i,0}^n
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Untuk kondisi batas kiri pada persamaan (1.5) diperoleh bentuk diskritnya sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y}(x, 1, t) &= 0 \\
\frac{u_{i,L+1}^n - u_{i,L-1}^n}{2\Delta y} &= 2 \\
u_{i,L+1}^n - u_{i,L-1}^n &= 4\Delta y \\
u_{i,L+1}^n &= u_{i,L-1}^n + 4\Delta y
\end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2 Kekonvergenan

Teorema ekuivalensi lax menyebutkan bahwa untuk suatu masalah syarat awal yang *well posed*, dan jika suatu persamaan beda konsisten dan stabil, maka persamaan tersebut konvergen. Dalam hal ini akan digunakan analisis stabilitas *von Neumann* yang mana syarat kestabilannya adalah $|\rho| \leq 1$. Oleh karena itu, jika skema yang digunakan stabil dan konsisten maka konvergen dari skema tersebut akan terpenuhi.

3.2.1 Kestabilan

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui stabil atau tidaknya metode yang digunakan untuk mendekati persamaan gelombang dua dimensi tersebut. Dalam hal ini akan dilakukan uji kestabilan dengan menggunakan stabilitas *von Neumann*, dapat dicari dengan mensubsitusikan $u_{i,j}^n = \rho^n e^{lai} e^{laj} = \rho^n e^{la(i+j)}$ kedalam persamaan (3.6), sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}
\rho^{n+1} e^{lai} e^{laj} &= -\rho^{n-1} e^{lai} e^{laj} + 2\rho^n e^{lai} e^{laj} (1 - s - p) + \\
&\quad s(\rho^n e^{la(i+1)} e^{laj} + \rho^n \rho^n e^{la(i-1)} e^{laj}) + \\
&\quad r(\rho^n e^{lai} e^{la(j+1)} + \rho^n e^{lai} e^{la(j-1)})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Untuk penyederhanaan, persamaan (3.13) dibagi dengan $\rho^n e^{lai} e^{laj}$ sehingga diperoleh

$$\rho = -\rho^{-1} + 2(1 - s - p) + s(e^{la} + e^{-la}) + r(e^{la} + e^{-la}) \quad (3.14)$$

Karena $e^{\pm la} = \cos(a) \pm I \sin(a)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \rho &= -\rho^{-1} + 2(1 - s - r) + s(\cos(a) + I \sin(a) + \cos(a) - \\ &\quad I \sin(a)) + r(1 + \cos(a) + I \sin(a) + \cos(a) - I \sin(a)) \\ \rho &= -\rho^{-1} + 2(1 - s - r) + s(2 \cos(a)) + r(2 \cos(a)) \\ \rho &= -\rho^{-1} + 2(1 - s - r) + 2 \cos(a) (s + r) \\ \rho + \rho^{-1} - 2(1 - s - r) - 2 \cos(a) (s + r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dengan perhitunga aljabar maka diperoleh

$$\rho^2 + [-2(1 - s - r) - 2 \cos(a) (s + r)]\rho + 1 = 0 \quad (3.16)$$

Misalkan

$$-[2(1 - s - r) + 2 \cos(a) (s + r)] = \beta$$

maka persamaan (3.16) dapat ditulis

$$\rho^2 + \beta\rho + 1 = 0 \quad (3.17)$$

Sehingga akar-akar dari persamaan (3.17) adalah

$$p_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4}}{2}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{(2(1 - s - r) + 2 \cos(a) (s + r)) \pm \sqrt{[2(1 - s - r) + 2 \cos(a) (s + r)]^2}}{2} \\ &= (1 - s - r) + \cos(a) (s + r) \\ &\quad \pm \sqrt{1 - [(1 - s - r) + \cos(a) (s + r)]^2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dimana nilai ρ_1 dan ρ_2 adalah

$$\rho_1 =$$

$$(1 - s - r) + \cos(a) (s + r) + \sqrt{1 - 2[(1 - s - r) + \cos(a) (s + r)]^2}$$

$$\rho_2 =$$

$$-(1 - s - r) + \cos(a) (s + r) + \sqrt{1 - 2[(1 - s - r) + \cos(a) (s + r)]^2}$$

Misalkan

$$(1 - s - r) + \cos(a) (s + r) = A$$

maka nilai ρ_1 dan ρ_2 menjadi

$$\rho_1 = A + \sqrt{1 - 2A^2} \quad (3.19)$$

$$\rho_2 = A - \sqrt{1 - 2A^2} \quad (3.20)$$

Jika $\sqrt{1 - 2A^2}$ bernilai real maka $|\rho_1| = 1$, dan jika $\sqrt{1 - 2A^2}$ bernilai imajiner maka

$$|\rho_1| = \sqrt{(A + \sqrt{2A^2 - 1})^2}$$

$$|\rho_2| = \sqrt{(A - \sqrt{2A^2 - 1})^2}$$

Karena A masih mengandung nilai $\cos a$, dalam hal ini akan diambil titik diskritnya yaitu $\cos a = -1$, $\cos a = 0$, dan $\cos a = 1$, sehingga dapat diuraikan sebagai berikut.

Kasus 1 : saat $\cos a = -1$

Jika $\cos a = -1$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.20) akan diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 A &= (1 - s - r) + (-1)(s + r) \\
 &= 1 - 2(s + r)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Kasus 2 : saat $\cos a = 0$

Jika $\cos a = 0$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.20) akan diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 A &= (1 - s - r) + (0)(s + r) \\
 &= 1 - (s + r)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Kasus 3 : $\cos a = 1$

Jika $\cos a = 1$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.20) akan diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 A &= (1 - s - r) + (s + r) \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pada ketiga kasus diatas diketahui bahwa nilai maksimumnya adalah 1 serta nilai minimumnya adalah $1 - 2(s + r)$. Untuk kondisi $1 - 2(s + r) \geq -1$ akan terpenuhi apabila nilai $s + r \leq 1$. Karena nilai $s = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$ dan $r = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta y^2}$ maka didapatkan syarat kestabilan $\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} \leq 1$.

3.2.2 Konsistensi

Dalam mencari konsistensi metode beda hingga skema eksplisit dapat menggunakan ekspansi deret *Taylor* yang diuraikan pada persamaan (2.12), (2.13), dan (2.14) yang berbentuk

$$u_{i,j}^{n\pm 1} = u_{i,j}^n \pm \Delta t u_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{i,j}^n \pm \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{i,j}^n +$$

$$\frac{1}{24}\Delta t^4 u_{tttt} \Big|_{i,j}^n \pm \dots \quad (3.24)$$

$$u_{i\pm 1,j}^n = u_{i,j}^n \pm \Delta x u_x \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx} \Big|_{i,j}^n \pm \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{24}\Delta x^4 u_{xxxx} \Big|_{i,j}^n \pm \dots \quad (3.25)$$

$$u_{i,j\pm 1}^n = u_{i,j}^n \pm \Delta y u_y \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2}\Delta y^2 u_{yy} \Big|_{i,j}^n \pm \frac{1}{6}\Delta y^3 u_{yyy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{24}\Delta y^4 u_{yyyy} \Big|_{i,j}^n \pm \dots \quad (3.26)$$

Selanjutnya dari ekspansi deret Taylor di atas didapatkan hasil perhitungan sebagai berikut :

$$u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n-1} = 2u_{i,j}^n + \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12}\Delta t^4 u_{tttt} \Big|_{i,j}^n + \dots \quad (3.27)$$

$$u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n = 2u_{i,j}^n + \Delta x^2 u_{xx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12}\Delta x^4 u_{xxxx} \Big|_{i,j}^n + \dots \quad (3.28)$$

$$u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n = 2u_{i,j}^n + \Delta y^2 u_{yy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12}\Delta y^4 u_{yyyy} \Big|_{i,j}^n + \dots \quad (3.29)$$

Selanjutnya persamaan (3.27), (3.28), dan (3.29) masing-masing disubstitusikan ke setiap suku pada persamaan (3.6) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= \frac{\Delta t^2 u_{tt} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12}\Delta t^4 u_{tttt} \Big|_{i,j}^n + \dots}{\Delta t^2} \\ &= u_{tt} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12}\Delta t^2 u_{tttt} \Big|_{i,j}^n + \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} &= \frac{\Delta x^2 u_{xx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12}\Delta x^4 u_{xxxx} \Big|_{i,j}^n + \dots}{\Delta x^2} \\ &= u_{xx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12}\Delta x^2 u_{xxxx} \Big|_{i,j}^n + \dots \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} = \frac{\Delta y^2 u_{yy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12}\Delta y^4 u_{yyyy} \Big|_{i,j}^n + \dots}{\Delta y^2}$$

$$= u_{yy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12} \Delta y^2 u_{yyyy} \Big|_{i,j}^n + \dots \quad (3.32)$$

Selanjutnya persamaan persamaan (3.30), (3.31), dan (3.32) disubsitusikan ke dalam persamaan (3.9) sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:

$$u_{tt} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12} \Delta t^2 u_{tttt} \Big|_{i,j}^n + \dots = c^2 \left(u_{xx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 u_{xxxx} \Big|_{i,j}^n + \dots \right) + c^2 \left(u_{yy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{12} \Delta y^2 u_{yyyy} \Big|_{i,j}^n + \dots \right) \quad (3.33)$$

Dengan perhitungan aljabar diperoleh hasil

$$\begin{aligned} & u_{tt} \Big|_{i,j}^n - c^2 u_{xx} \Big|_{i,j}^n - c^2 u_{yy} \Big|_{i,j}^n \\ & + \frac{1}{12} \left(\Delta t^2 u_{tttt} \Big|_{i,j}^n - c^2 \Delta x^2 u_{xxxx} \Big|_{i,j}^n - c^2 \Delta y^2 u_{yyyy} \Big|_{i,j}^n \right) + \dots \\ & = 0 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} & u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) \Big|_{i,j}^n \\ & + \frac{1}{12} \left(\Delta t^2 u_{tttt} - c^2 \Delta x^2 u_{xxxx} - c^2 \Delta y^2 u_{yyyy} \right) \Big|_{i,j}^n + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dari persamaan (3.34) dapat diketahui bahwa *truncation error* yang dihasilkan mempunyai orde $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$. Persamaan (3.34) dikatakan konsisten jika:

$$\begin{aligned} & \lim_{(\Delta t, \Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{12} \Delta t^2 u_{tttt} + c^2 \left(\frac{1}{12} \Delta x^2 u_{xxxx} + \frac{1}{12} \Delta y^2 u_{yyyy} \right) \right) \Big|_{i,j}^n = \\ & \left(-\frac{1}{12} 0^2 u_{tttt} + c^2 \left(\frac{1}{12} 0^2 u_{xxxx} + \frac{1}{12} 0^2 u_{yyyy} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi ini dapat dikatakan valid dengan melihat syarat kestabilan serta orde *error*nya. Dimana dari perhitungan (3.35) di atas didapatkan orde *error*nya $\mathcal{O}(\Delta t^3, \Delta x^3, \Delta y^3)$ yang

berarti bahwa kesalahan pemotongan mempunyai orde $\Delta t^3, \Delta x^3, \Delta y^3$ atau kesalahan sebanding dengan langkah ruang pangkat tiga.

Jika $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ sangat kecil, maka jumlah dari limit persamaan (3.35) akan semakin kecil, karena berapapun nilai u_{tt}, u_{xx}, u_{yy} jika dikalikan dengan nilai dari $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ akan ikut mengecil. Sehingga *truncation error* akan menuju nol untuk $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode yang digunakan adalah konsisten.

3.3 Simulasi Interpretasi Hasil

3.3.1 Simulasi Pertama

Pada simulasi pertama ini akan dilakukan proses perhitungan solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi dengan metode beda hingga skema eksplisit yang telah didapatkan pada persamaan (3.6) secara manual. Selanjutnya dari proses perhitungan manual tersebut akan dibandingkan nilai solusi numeriknya dengan solusi analitiknya. Karena sebelumnya belum pernah diketahui solusi eksak dari persamaan gelombang dua dimensi menggunakan kondisi batas *Neumann*, maka pada penelitian ini akan digunakan solusi alternatifnya dimana solusi eksak persamaan gelombang dua dimensi pada persamaan (1.1) sebagai berikut:

$$u(x, y, t) = x^2 + y^2 + 2t^2 \quad (3.36)$$

Langkah selanjutnya solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi tersebut akan diinterpretasikan hasil perhitungan yang telah didapatkan ke dalam grafik solusi untuk $u(x, y, t)$.

Setelah diperoleh syarat kestabilan dari skema yang digunakan, maka dapat dipilih nilai dari Δx , Δy , dan Δt yang memenuhi syarat kestabilan yang akan digunakan dalam simulasi Persamaan yang digunakan untuk simulasi adalah persamaan (1.1) berikut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

yang terletak pada domain $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ dan $0 < t \leq 0.5$ dengan kondisi awal sebagai berikut :

$$u(x, y, 0) = x^2 + y^2, \quad \text{pada } 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

dan kecepatan awal

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0, \quad \text{pada } 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

serta kondisi batas sebagai berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad \text{pada } 0 < y < 1, 0 < t \leq 0.5$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, y, t) = 2, \quad \text{pada } 0 < y < 1, 0 < t \leq 0.5$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad \text{pada } 0 < x < 1, 0 < t \leq 0.5$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 1, t) = 2, \quad \text{pada } 0 < x < 1, 0 < t \leq 0.5$$

Kemudian untuk menghitung nilai-nilai diskrit $u_{i,j}^{n+1}$ dari persamaan (3.6) akan dipilih nilai $c = 1$, $\Delta x = 0.5$, $\Delta y = 1$ dan $\Delta t = 0.25$, pemilihan nilai Δx , Δy , dan Δt yang cukup besar ini dimaksudkan agar mempermudah mencari solusi numerik secara manual yang akan dilakukan secara bertahap. Selanjutnya dari Δx , Δy , dan Δt tersebut didiskritkan sehingga diperoleh nilai $x = \{0, 0.25, 0.5, 1\}$, $y = \{0, 0.5, 1\}$, dan $t = \{0, 0.125, 0.25\}$ yang mana nilai-nilai tersebut telah

memenuhi syarat kestabilan dimana $\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} = \frac{1^2 0.25^2}{0.5^2} + \frac{1^2 0.25^2}{1^2} = 0.3125 \leq$

1.

Selanjutnya penyelesaian numerik persamaan gelombang dua dimensi dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS dengan

$$s = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} = \frac{1^2 0.25^2}{0.5^2} = 0.25 \quad \text{dan} \quad p = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} = \frac{1^2 0.25^2}{1^2} = 0.0625 \quad \text{akan dilakukan}$$

langkah-langkah perhitungan manualnya sebagai berikut :

1. Untuk $t = 0$ berdasarkan kondisi awal pada persamaan (3.7) didapatkan hasil perhitungan yang ditunjukkan pada Tabel (3.1) berikut:

Tabel 3.1 Nilai $u(x_i, y_j, 0)$ saat $n = 1$

$u(x_i, y_j, 0)$	$y_1 = 0$	$y_1 = 0.5$	$y_3 = 1$
$x_1 = 0$	0	0.2500	1.0000
$x_2 = 0.25$	0.0625	0.3125	1.0625
$x_3 = 0.5$	0.2500	0.5000	1.2500
$x_4 = 0.75$	0.5625	0.8125	1.5625
$x_5 = 1$	1.0000	0.1250	2.0000

2. Untuk $t = 0.25$, solusi $u(x, y, 0.25)$ yang akan dicari dapat dituliskan dalam tabel solusi berikut:

Tabel 3.2 Nilai $u(x_i, y_j, 0.25)$ saat $n = 2$

$u(x_i, y_j, 0.25)$	$y_1 = 0$	$y_2 = 0.5$	$y_3 = 1$
$x_1 = 0$	$u_{1,1}^2$	$u_{1,2}^2$	$u_{1,3}^2$
$x_2 = 0.25$	$u_{2,1}^2$	$u_{2,2}^2$	$u_{2,3}^2$
$x_3 = 0.5$	$u_{3,1}^2$	$u_{3,2}^2$	$u_{3,3}^2$
$x_4 = 0.75$	$u_{4,1}^2$	$u_{4,2}^2$	$u_{4,3}^2$
$x_5 = 1$	$u_{5,1}^2$	$u_{5,2}^2$	$u_{5,3}^2$

Selanjutnya nilai $u_{1,1}^2, u_{1,2}^2, u_{1,3}^2, u_{2,1}^2, u_{2,2}^2, u_{2,3}^2, u_{3,1}^2, u_{3,2}^2, u_{3,3}^2, u_{4,1}^2, u_{4,2}^2, u_{4,3}^2, u_{5,1}^2, u_{5,2}^2$, dan $u_{5,3}^2$ yang ditunjukkan pada Tabel (3.2) diatas akan dicari berdasarkan persamaan (3.6) dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Untuk $n = 1, i = 1$, dan $j = 1$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{1,1}^2 = -u_{1,1}^0 + 2u_{1,1}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{2,1}^1 + u_{0,1}^1) \\ + 0.0625(u_{1,2}^1 + u_{1,0}^1)$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{1,1}^0 = u_{1,1}^2$,

selanjutnya dari kondisi batas pada persamaan (3.9) diperoleh $u_{0,1}^1 = u_{2,1}^1$,

dan dari kondisi batas kanan persamaan (3.11) diperoleh, $u_{1,0}^1 = u_{1,2}^1$

sehingga $u_{1,1}^2$ menjadi

$$u_{1,1}^2 = -u_{1,1}^0 + 2u_{1,1}^1(0.6875) + 0.25(u_{2,1}^1 + u_{2,1}^1) + 0.0625(u_{1,2}^1 + u_{1,2}^1) \\ 2u_{1,1}^2 = 2u_{1,1}^1(0.6875) + 0.25(2 \times u_{2,1}^1) + 0.0625(2 \times u_{1,2}^1) \\ u_{1,1}^2 = \frac{[2(0)(0.6875) + 0.25(2 \times 0.0625) + 0.0625(2 \times 0.25)]}{2} \\ = 0.03125$$

- b. Untuk $n = 1, i = 1$, dan $j = 2$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{1,2}^2 = -u_{1,2}^0 + 2u_{1,2}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{2,2}^1 + u_{0,2}^1) \\ + 0.0625(u_{1,3}^1 + u_{1,1}^1)$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{1,2}^0 = u_{1,2}^2$,

dan dari kondisi batas persamaan (3.9) diperoleh $u_{0,2}^1 = u_{2,2}^1$, sehingga

$u_{1,2}^1$ menjadi

$$u_{1,2}^2 = -u_{1,2}^0 + 2u_{1,2}^1(0.6875) + 0.25(u_{2,2}^1 + u_{2,2}^1) + 0.0625(u_{1,1}^1 \\ + u_{1,3}^1) \\ 2u_{1,2}^2 = 2u_{1,2}^1(0.6875) + 0.25(2 \times u_{2,2}^1) + 0.0625(u_{1,1}^1 + u_{1,3}^1) \\ u_{1,2}^2 = \frac{[2(0.25)(0.6875) + 0.25(2 \times 0.3125) + 0.0625(0 + 1)]}{2} \\ = 0.28125$$

- c. Untuk $n = 1, i = 1$, dan $j = 3$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{1,3}^2 = -u_{1,3}^0 + 2u_{1,3}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{2,3}^1 + u_{0,3}^1) + 0.0625(u_{1,4}^1 + u_{1,2}^1)$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{1,3}^0 = u_{1,3}^2$,

selanjutnya dari kondisi batas pada persamaan (3.9) diperoleh $u_{0,3}^1 = u_{2,3}^1$,

serta dari kondisi batas pada persamaan (3.12) diperoleh $u_{1,4}^1 = u_{1,2}^1 + 4\Delta y$ sehingga $u_{1,3}^2$ menjadi

$$\begin{aligned} u_{1,3}^2 &= -u_{1,3}^0 + 2u_{1,3}^1(0.6875) + 0.25(u_{2,3}^1 + u_{2,3}^1) + 0.0625(u_{1,2}^1 + 4\Delta y + u_{1,2}^1) \\ 2u_{1,3}^2 &= 2u_{1,3}^1(0.6875) + 0.25(2 \times u_{2,3}^1) + 0.0625(2 \times u_{1,2}^1 + 4\Delta y) \\ u_{1,3}^2 &= \frac{[2(1)(0.6875) + 0.25(2 \times 1.0625) + 0.0625(2 \times 0.25 + 4 \times 0.5)]}{2} \\ &= 1.03125 \end{aligned}$$

- d. Untuk $n = 1, i = 2$, dan $j = 1$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{2,1}^2 = -u_{2,1}^0 + 2u_{2,1}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{3,1}^1 + u_{1,1}^1) + 0.0625(u_{2,2}^1 + u_{2,0}^1)$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{2,1}^0 = u_{2,1}^2$,

dan dari kondisi batas kanan persamaan (3.9) diperoleh $u_{2,0}^1 = u_{2,2}^1$

sehingga $u_{2,1}^2$ menjadi

$$\begin{aligned} u_{2,1}^2 &= -u_{2,1}^0 + 2u_{2,1}^1(0.6875) + 0.25(u_{3,1}^1 + u_{1,1}^1) + 0.0625(u_{2,2}^1 + u_{2,2}^1) \\ 2u_{2,1}^2 &= 2u_{2,1}^1(0.6875) + 0.25(u_{3,1}^1 + u_{1,1}^1) + 0.0625(2 \times u_{2,2}^1) \\ u_{2,1}^2 &= \frac{[2(0.6875)(0.6875) + 0.25(0.25 + 0) + 0.0625 \times 2 \times 0.3125]}{2} \\ &= 0.09375 \end{aligned}$$

- e. Untuk $n = 1, i = 2$, dan $j = 2$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{2,2}^2 = -u_{2,2}^0 + 2u_{2,2}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{3,2}^1 + u_{1,2}^1) \\ + 0.0625(u_{2,3}^1 + u_{2,1}^1)$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{2,2}^0 = u_{2,2}^2$,
sehingga $u_{2,2}^2$ menjadi

$$u_{2,2}^2 = -u_{2,2}^2 + 2u_{2,2}^1(0.6875) + 0.25(u_{3,2}^1 + u_{1,2}^1) + 0.0625(u_{2,3}^1 + u_{2,1}^1) \\ 2u_{2,2}^2 = 2u_{2,2}^1(0.6875) + 0.25(u_{3,2}^1 + u_{1,2}^1) + 0.0625(u_{2,3}^1 + u_{2,1}^1) \\ u_{2,2}^2 = \frac{[2(0.3125)(0.6875) + 0.25(0.5 + 0.25) + 0.0625(1.0625 + 0.0625)]}{2} \\ = 0.34375$$

- f. Untuk $n = 1, i = 2$, dan $j = 3$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{2,3}^2 = -u_{2,3}^0 + 2u_{2,3}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{3,3}^1 + u_{1,3}^1) \\ + 0.0625(u_{2,4}^1 + u_{2,2}^1)$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{2,2}^0 = u_{2,2}^2$,
dan dari kondisi batas kiri persamaan (3.12) diperoleh $u_{2,4}^1 = u_{2,2}^1 + 4\Delta y$
sehingga $u_{2,3}^2$ menjadi

$$u_{2,3}^2 = -u_{2,3}^2 + 2u_{2,3}^1(0.6875) + 0.25(u_{3,3}^1 + u_{1,3}^1) + 0.0625(u_{2,2}^1 + u_{2,2}^1 + 4\Delta y) \\ 2u_{2,3}^2 = 2u_{2,3}^1(0.6875) + 0.25(u_{3,3}^1 + u_{1,3}^1) + 0.0625(2 \times u_{2,2}^1 + 4\Delta y) \\ u_{2,3}^2 = \frac{[2(1.0625)(0.6875) + 0.25(1.25 + 1) + 0.0625(2 \times 0.3125 + 4 \times 0.5)]}{2} \\ = 1.09375$$

- g. Untuk $n = 1, i = 3$, dan $j = 1$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{3,1}^2 = -u_{3,1}^0 + 2u_{3,1}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{4,1}^1 + u_{2,1}^1) \\ + 0.0625(u_{3,2}^1 + u_{3,0}^1)$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{3,1}^0 = u_{3,1}^2$,
dan dari kondisi batas kanan persamaan (3.9) diperoleh $u_{3,0}^1 = u_{3,2}^1$
sehingga $u_{3,1}^2$ menjadi

$$\begin{aligned} u_{3,1}^2 &= -u_{3,1}^2 + 2u_{3,1}^1(0.6875) + 0.25(u_{4,1}^1 + u_{2,1}^1) + 0.0625(u_{3,2}^1 + u_{3,2}^1) \\ 2u_{3,1}^2 &= 2u_{3,1}^1(0.6875) + 0.25(u_{4,1}^1 + u_{2,1}^1) + 0.0625(2 \times u_{3,2}^1) \\ u_{3,1}^2 &= \frac{[2(0.25)(0.6875) + 0.25(0.5625 + 0.0625) + 0.0625(2 \times 0.5)]}{2} \\ &= 0.28125 \end{aligned}$$

h. Untuk $n = 1, i = 3$, dan $j = 2$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} u_{3,2}^2 &= -u_{3,2}^0 + 2u_{3,2}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{4,2}^1 + u_{2,2}^1) \\ &\quad + 0.0625(u_{3,3}^1 + u_{3,1}^1) \end{aligned}$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{3,2}^0 = u_{3,2}^2$,
sehingga $u_{3,2}^2$ menjadi

$$\begin{aligned} u_{3,2}^2 &= -u_{3,2}^2 + 2u_{3,2}^1(0.6875) + 0.25(u_{4,2}^1 + u_{2,2}^1) + 0.0625(u_{3,3}^1 + u_{3,1}^1) \\ 2u_{3,2}^2 &= 2u_{3,2}^1(0.6875) + 0.25(u_{4,2}^1 + u_{2,2}^1) + 0.0625(u_{3,3}^1 + u_{3,1}^1) \\ u_{3,2}^2 &= \frac{[2(0.5)(0.6875) + 0.25(0.8125 + 0.3125) + 0.0625(1.25 + 0.25)]}{2} \\ &= 0.53125 \end{aligned}$$

i. Untuk $n = 1, i = 3$, dan $j = 3$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} u_{3,3}^2 &= -u_{3,3}^0 + 2u_{3,3}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{4,3}^1 + u_{3,3}^1) \\ &\quad + 0.0625(u_{3,4}^1 + u_{3,2}^1) \end{aligned}$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{3,3}^0 = u_{3,3}^2$,
selanjutnya dari kondisi batas kiri pada (3.12) diperoleh $u_{3,4}^1 = u_{3,2}^1 + 4\Delta y$ sehingga $u_{3,3}^2$ menjadi

$$u_{3,3}^2 = -u_{3,3}^2 + 2u_{3,3}^1(0.6875) + 0.25(u_{4,3}^1 + u_{2,3}^1) + 0.0625(u_{3,2}^1 + u_{3,2}^1)$$

$$2u_{3,3}^2 = 2u_{3,3}^1(0.6875) + 0.25(u_{4,3}^1 + u_{2,3}^1) + 0.0625(2 \times u_{3,2}^1 + 4\Delta y)$$

$$u_{3,3}^2 = \frac{[2(1.25)(0.6875) + 0.25(1.5625 + 1.0625) + 0.0625(2 \times 0.5 + 2)]}{2}$$

$$= 1.28125$$

j. Untuk $n = 1, i = 4$, dan $j = 1$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{4,1}^2 = -u_{4,1}^0 + 2u_{4,1}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{5,1}^1 + u_{3,1}^1) + 0.0625(u_{4,2}^1 + u_{4,0}^1)$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{4,1}^0 = u_{4,1}^2$

dan dari kondisi batas kanan pada persamaan (3.9) diperoleh $u_{4,0}^1 = u_{4,2}^1$

sehingga $u_{4,1}^2$ menjadi

$$u_{4,1}^2 = -u_{4,1}^2 + 2u_{4,1}^1(0.6875) + 0.25(u_{5,1}^1 + u_{3,1}^1) + 0.0625(u_{4,2}^1 + u_{4,2}^1)$$

$$2u_{4,1}^2 = 2u_{4,1}^1(0.6875) + 0.25(u_{5,1}^1 + u_{3,1}^1) + 0.0625(2 \times u_{4,2}^1)$$

$$u_{4,1}^2 = \frac{[2(0.5625)(0.6875) + 0.25(1 + 0.25) + 0.0625(2 \times 0.8125)]}{2}$$

$$= 0.59375$$

k. Untuk $n = 1, i = 4$, dan $j = 2$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{4,2}^2 = -u_{4,2}^0 + 2u_{4,2}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{5,2}^1 + u_{3,2}^1) + 0.0625(u_{4,3}^1 + u_{4,1}^1)$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{4,2}^0 = u_{4,2}^2$

sehingga $u_{4,2}^2$ menjadi

$$u_{4,2}^2 = -u_{4,2}^2 + 2u_{4,2}^1(0.6875) + 0.25(u_{5,2}^1 + u_{3,2}^1) + 0.0625(u_{4,3}^1 + u_{4,1}^1)$$

$$2u_{4,2}^2 = 2u_{4,2}^1(0.6875) + 0.25(u_{5,2}^1 + u_{3,2}^1) + 0.0625(u_{4,3}^1 + u_{4,1}^1)$$

$$u_{4,2}^2 = \frac{[2(0.8125)(0.6875) + 0.25(1.25 + 0.5) + 0.0625(1.5625 + 0.5625)]}{2}$$

$$= 0.84375$$

- l. Untuk $n = 1, i = 4$, dan $j = 3$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{4,3}^2 = -u_{4,3}^0 + 2u_{4,3}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{5,3}^1 + u_{3,3}^1) \\ + 0.0625(u_{4,4}^1 + u_{4,2}^1)$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{4,3}^0 = u_{4,3}^2$,

dan dari kondisi batas kiri pada persamaan (3.12) diperoleh $u_{4,4}^1 = 4\Delta y$

sehingga $u_{4,3}^2$ menjadi

$$u_{4,3}^2 = -u_{4,3}^2 + 2u_{4,3}^1(0.6875) + 0.25(u_{5,3}^1 + u_{3,3}^1) + 0.0625(u_{4,2}^1 \\ + u_{4,2}^1 + 4\Delta y) \\ 2u_{4,3}^2 = 2u_{4,3}^1(0.6875) + 0.25(u_{5,3}^1 + u_{3,3}^1) + 0.0625(2u_{4,2}^1 + 4\Delta y) \\ u_{4,3}^2 = \frac{[2(1.5625)(0.6875) + 0.25(2 + 1.25) + 0.0625(2 \times 0.8125 + 4 \times 0.5)]}{2} \\ = 1.59375$$

- m. Untuk $n = 1, i = 5$, dan $j = 1$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{5,1}^2 = -u_{5,1}^0 + 2u_{5,1}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{6,1}^1 + u_{4,1}^1) \\ + 0.0625(u_{5,2}^1 + u_{5,0}^1)$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{5,1}^0 = u_{5,1}^2$,

selanjutnya dari kondisi batas dari persamaan (3.10) diperoleh $u_{6,1}^1 =$

$u_{4,1}^1 + 4\Delta x$, dan dari kondisi batas pada persamaan (3.11) diperoleh

$u_{5,0}^1 = u_{5,2}^1$ sehingga $u_{5,1}^2$ menjadi

$$u_{5,1}^2 = -u_{5,1}^2 + 2u_{5,1}^1(0.6875) + 0.25(2u_{4,1}^1 + 4\Delta x) + 0.0625(u_{5,2}^1 + u_{5,2}^1) \\ 2u_{5,1}^2 = 2u_{5,1}^1(0.6875) + 0.25(2 \times u_{4,1}^1 + 4\Delta x) + 0.0625(2 \times u_{5,2}^1) \\ u_{5,1}^2 = \frac{[2(1)(0.6875) + 0.25(2 \times 0.5625 + 4 \times 0.25) + 0.0625(2 \times 1.25)]}{2}$$

$$= 1.03125$$

n. Untuk $n = 1, i = 5$, dan $j = 2$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} u_{5,2}^2 = & -u_{5,2}^0 + 2u_{5,2}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{6,2}^1 + u_{4,2}^1) \\ & + 0.0625(u_{5,3}^1 + u_{5,1}^1) \end{aligned}$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{5,1}^0 = u_{5,1}^2$,

dan dari kondisi batas pada persamaan (3.10) diperoleh $u_{6,2}^1 = u_{4,2}^1 + 4\Delta x$ sehingga $u_{5,2}^2$ menjadi

$$\begin{aligned} u_{5,2}^2 = & -u_{5,2}^0 + 2u_{5,2}^1(0.6875) + 0.25(u_{4,2}^1 + u_{4,2}^1 + 4\Delta x) \\ & + 0.0625(u_{5,3}^1 + u_{5,1}^1) \\ 2u_{5,2}^2 = & 2u_{5,2}^1(0.6875) + 0.25(2 \times u_{4,2}^1 + 4\Delta x) + 0.0625(u_{5,3}^1 + u_{5,1}^1) \\ u_{5,2}^2 = & \frac{[2(1.25)(0.6875) + 0.25(2 \times 0.8125 + 4 \times 0.25) + 0.0625(2 + 1)]}{2} \\ = & 1.28125 \end{aligned}$$

o. Untuk $n = 1, i = 5$, dan $j = 3$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} u_{5,3}^2 = & -u_{5,3}^0 + 2u_{5,3}^1(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{6,3}^1 + u_{4,3}^1) \\ & + 0.0625(u_{5,4}^1 + u_{5,2}^1) \end{aligned}$$

Berdasarkan kecepatan awal pada persamaan (3.8) diperoleh $u_{5,3}^0 = u_{5,3}^2$,

dari kondisi batas pada persamaan (3.10) diperoleh $u_{6,3}^1 = u_{4,3}^1 + 4\Delta x$,

dan dari kondisi batas kiri pada persamaan (3.12) diperoleh $u_{5,4}^1 = u_{5,2}^1 + 4\Delta y$ sehingga $u_{5,3}^2$ menjadi

$$\begin{aligned} u_{5,3}^2 = & -u_{5,3}^0 + 2u_{5,3}^1(0.6875) + 0.25(u_{4,3}^1 + u_{4,3}^1 + 4\Delta x) + 0.0625(u_{5,2}^1 \\ & + u_{5,2}^1 + 4\Delta y) \\ 2u_{5,3}^2 = & 2u_{5,3}^1(0.6875) + 0.25(2u_{4,3}^1 + 4\Delta x) + 0.0625(2u_{5,2}^1 + 4\Delta y) \end{aligned}$$

$$u_{5,1}^2 = \frac{[2(2)(0.6875) + 0.25(2 \times 1.5625 + 1) + 0.0625(2 \times 1.25 + 2)]}{2}$$

$$= 2.0313$$

Dari perhitungan di atas akan didapatkan hasil hitungan yang ditunjukkan pada Tabel (3.2) berikut:

Tabel 3.3 Nilai $u(x, y, 0.125)$ saat $n = 2$

$u(x_i, y_j, 0.125)$	$y_1 = 0$	$y_2 = 0.5$	$y_3 = 1$
$x_1 = 0$	0.03125	0.28125	1.03125
$x_2 = 0.25$	0.09375	0.34375	1.09375
$x_3 = 0.5$	0.28125	0.53125	1.28125
$x_4 = 0.75$	0.59375	0.84375	1.59375
$x_5 = 1$	0.96093	1.28125	2.03125

Dengan menggunakan solusi eksak pada persamaan (3.41) maka diketahui nilai dari $u(x, y, 0.25)$ yang ditunjukkan pada Tabel (3.4) berikut:

Tabel 3.4 Solusi Analitik $u(x, y, 0.125)$ saat $n = 2$

$u(x_i, y_j, 0.125)$	$y_1 = 0$	$y_2 = 0.5$	$y_3 = 1$
$x_1 = 0$	0.03125	0.28125	1.03125
$x_2 = 0.25$	0.09375	0.34375	1.09375
$x_3 = 0.5$	0.28125	0.53125	1.28125
$x_4 = 0.75$	0.59375	0.84375	1.59375
$x_5 = 1$	1.03125	1.28125	2.03125

3. Saat $n = 3$, berdasarkan persamaan (3.6) diperoleh titik-titik diskrit $u(x_i, y_j, t_3)$ yang ditunjukkan pada Tabel 3.4 berikut

Tabel 3.5 Nilai $u(x_i, y_j, 0.5)$ saat $n = 3$

$u(x_i, y_j, 0.5)$	$y_1 = -1$	$y_2 = 0$	$y_3 = 1$
$x_1 = -1$	$u_{1,1}^3$	$u_{1,2}^3$	$u_{1,3}^3$
$x_2 = -0.5$	$u_{2,1}^3$	$u_{2,2}^3$	$u_{2,3}^3$
$x_3 = 0$	$u_{3,1}^3$	$u_{3,2}^3$	$u_{3,3}^3$
$x_4 = 0.5$	$u_{4,1}^3$	$u_{4,2}^3$	$u_{4,3}^3$
$x_5 = 1$	$u_{5,1}^3$	$u_{5,2}^3$	$u_{5,3}^3$

Selanjutnya nilai $u_{1,1}^3, u_{1,2}^3, u_{1,3}^3, u_{2,1}^3, u_{2,2}^3, u_{2,3}^3, u_{3,1}^3, u_{3,2}^3, u_{3,3}^3, u_{4,1}^3, u_{4,2}^3, u_{4,3}^3, u_{5,1}^3, u_{5,2}^3$, dan $u_{5,3}^3$ yang ditunjukkan pada Tabel (3.5) di atas akan dicari berdasarkan persamaan (3.6) yang didapatkan hasil hitungannya sebagai berikut:

- a. Untuk $n = 2, i = 1$, dan $j = 1$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{1,1}^3 = -u_{1,1}^1 + 2u_{1,1}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{2,1}^2 + u_{0,1}^2) + 0.0625(u_{1,2}^2 + u_{1,0}^2)$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan (3.9) diperoleh $u_{0,1}^2 = u_{2,1}^2$

dan dari persamaan (3.11) diperoleh $u_{1,0}^2 = u_{1,2}^2$ sehingga $u_{1,1}^3$ menjadi

$$u_{1,1}^3 = -u_{1,1}^1 + 2u_{1,1}^2(0.6875) + 0.25(u_{2,1}^2 + u_{2,1}^2) + 0.0625(u_{1,2}^2 + u_{1,2}^2)$$

$$u_{1,1}^3 = -u_{1,1}^1 + 2u_{1,1}^2(0.6875) + 0.25(2 \times u_{2,1}^2) + 0.0625(2 \times u_{1,2}^2)$$

$$\begin{aligned} u_{1,1}^3 &= -0 + 2(0.03125)(0.6875) + 0.25(2 \times 0.09372) + 0.0625(2 \\ &\quad \times 0.28125) \\ &= 0.125 \end{aligned}$$

- b. Untuk $n = 2, i = 1$, dan $j = 2$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{1,2}^3 = -u_{1,2}^1 + 2u_{1,2}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{2,2}^2 + u_{0,2}^2) + 0.0625(u_{1,3}^2 + u_{1,1}^2)$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan (3.9) diperoleh $u_{0,2}^2 = u_{2,2}^2$,

sehingga $u_{1,2}^3$ menjadi

$$u_{1,2}^3 = -u_{1,2}^1 + 2u_{1,2}^2(0.6875) + 0.25(2 \times u_{2,2}^2) + 0.0625(u_{1,3}^2 + u_{1,1}^2)$$

$$\begin{aligned} u_{1,2}^3 &= -0.25 + 2(0.28125)(0.6875) + 0.25(2 \times 0.34375) + 0.0625 \\ &\quad (1.03125 + 0.03125) \\ &= 0.3750 \end{aligned}$$

- c. Untuk $n = 2, i = 1$, dan $j = 3$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{1,3}^3 = -u_{1,3}^1 + 2u_{1,3}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{2,3}^2 + u_{0,3}^2) \\ + 0.0625(u_{1,4}^2 + u_{1,2}^2)$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan (3.9) diperoleh $u_{0,3}^2 = u_{2,3}^2$

dan dari persamaan (3.12) diperoleh $u_{1,4}^2 = u_{1,2}^2 + 4\Delta y$ sehingga $u_{1,3}^3$ menjadi

$$u_{1,3}^3 = -u_{1,3}^1 + 2u_{1,3}^2(0.6875) + 0.25(u_{2,3}^2 + u_{2,3}^2) + 0.0625(u_{1,2}^2 + u_{1,2}^2 + 4\Delta y)$$

$$u_{1,3}^3 = -u_{1,3}^1 + 2u_{1,3}^2(0.6875) + 0.25(2 \times u_{2,3}^2) + 0.0625(2u_{1,2}^2 + 4\Delta y)$$

$$u_{1,3}^2 = -1 + 2(1.03125)(0.6875) + 0.25(2 \times 1.09375) + 0.0625(2 \times 0.28125 \\ + 4 \times 0.5) \\ = 1.1250$$

- d. Untuk $n = 2, i = 2$, dan $j = 1$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{2,1}^3 = -u_{2,1}^1 + 2u_{2,1}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{3,1}^2 + u_{1,1}^2) \\ + 0.0625(u_{2,2}^2 + u_{2,0}^2)$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan (3.9) diperoleh $u_{2,0}^2 = u_{2,2}^2$

sehingga $u_{2,1}^3$ menjadi

$$u_{2,1}^3 = -u_{2,1}^1 + 2u_{2,1}^2(0.6875) + 0.25(u_{3,1}^2 + u_{1,1}^2) + 0.0625(u_{2,2}^2 + u_{2,2}^2)$$

$$u_{2,1}^2 = -0.0625 + 2(0.09375)(0.6875) + 0.25(0.28125 + 0.03125) \\ + 0.0625(0.34375 + 0.34375) \\ = 0.18750$$

- e. Untuk $n = 2, i = 2$, dan $j = 2$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{2,2}^3 = -u_{2,2}^1 + 2u_{2,2}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{3,2}^2 + u_{1,2}^2) \\ + 0.0625(u_{2,3}^2 + u_{2,1}^2)$$

$$\begin{aligned}
u_{2,2}^2 &= -0.3125 + 2(0.34375)(0.6875) + 0.25(0.53125 + 0.28125) \\
&\quad + 0.0625(1.09375 + 0.09375) \\
&= 0.43750
\end{aligned}$$

f. Untuk $n = 2, i = 2$, dan $j = 3$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned}
u_{2,3}^3 &= -u_{2,3}^1 + 2u_{2,3}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{3,3}^2 + u_{1,3}^2) \\
&\quad + 0.0625(u_{2,4}^2 + u_{2,2}^2)
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan (3.12) diperoleh $u_{2,4}^2 = u_{2,2}^2 + 4\Delta y$ sehingga $u_{2,3}^3$ menjadi

$$\begin{aligned}
u_{2,3}^3 &= -u_{2,3}^1 + 2u_{2,3}^2(0.6875) + 0.25(u_{3,3}^2 + u_{1,3}^2) + 0.0625((u_{2,2}^2 + u_{2,2}^2 + 4\Delta y)) \\
u_{2,3}^2 &= -1.0625 + 2(1.09375)(0.6875) + 0.25(1.28125 + 1.03125) \\
&\quad + 0.0625(2 \times 0.34375 + 4 \times 0.5) \\
&= 1.18750
\end{aligned}$$

g. Untuk $n = 2, i = 3$, dan $j = 1$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned}
u_{3,1}^3 &= -u_{3,1}^1 + 2u_{3,1}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{4,1}^2 + u_{2,1}^2) \\
&\quad + 0.0625(u_{3,2}^2 + u_{3,0}^2)
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas persamaan (3.11) diperoleh $u_{3,0}^2 = u_{3,2}^2$ sehingga $u_{3,1}^3$ menjadi

$$\begin{aligned}
u_{3,1}^3 &= -u_{3,1}^1 + 2u_{3,1}^2(0.6875) + 0.25(u_{4,1}^2 + u_{2,1}^2) + 0.0625(u_{3,2}^2 + u_{3,2}^2) \\
u_{3,1}^2 &= -0.25 + 2(0.28125)(0.6875) + 0.25(0.59375 + 0.09375) \\
&\quad + 0.0625(0.53125 + 0.53125) \\
&= 0.669921
\end{aligned}$$

h. Untuk $n = 2, i = 3$, dan $j = 2$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{3,2}^3 = -u_{3,2}^1 + 2u_{3,2}^2(1 - s - p) + s(u_{4,2}^2 + u_{2,2}^2) + p(u_{3,3}^2 + u_{3,1}^2)$$

$$\begin{aligned}
 u_{3,2}^2 &= -0.5 + 2(0.53125)(0.6875) + 0.25(0.84375 + 0.34375) \\
 &\quad + 0.0625(1.28125 + 0.28125) \\
 &= 0.6250
 \end{aligned}$$

i. Untuk $n = 2, i = 3$, dan $j = 3$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned}
 u_{3,3}^3 &= -u_{3,3}^1 + 2u_{3,3}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{4,3}^2 + u_{2,3}^2) \\
 &\quad + 0.0625(u_{3,4}^2 + u_{3,2}^2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan (3.12) diperoleh $u_{3,4}^2 = u_{3,2}^2 + 4\Delta y$ sehingga $u_{3,3}^3$ menjadi

$$\begin{aligned}
 u_{3,3}^3 &= -u_{3,3}^1 + 2u_{3,3}^2(0.6875) + 0.25(u_{4,3}^2 + u_{2,3}^2) + 0.0625(u_{3,2}^2 + u_{3,2}^2 + 4\Delta y) \\
 u_{3,3}^2 &= -1.250 + 2(1.28125)(0.6875) + 0.25(1.59375 + 1.09375) \\
 &\quad + 0.0625(2 \times 0.53125 + 4 \times 0.5) \\
 &= 1.3750
 \end{aligned}$$

j. Untuk $n = 2, i = 4$, dan $j = 1$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned}
 u_{4,1}^3 &= -u_{4,1}^1 + 2u_{4,1}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{5,1}^2 + u_{3,1}^2) \\
 &\quad + 0.0625(u_{4,2}^2 + u_{4,0}^2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan (3.11) diperoleh $u_{4,0}^2 = u_{4,2}^2$ sehingga $u_{4,1}^3$ menjadi

$$\begin{aligned}
 u_{4,1}^3 &= -u_{4,1}^1 + 2u_{4,1}^2(0.6875) + 0.25(u_{5,1}^2 + u_{3,1}^2) + 0.0625(u_{4,2}^2 + u_{4,2}^2) \\
 u_{4,1}^3 &= -0.28041 + 2(0.31286)(0.6875) + 0.25(0.14492 + 0.42130) \\
 &\quad + 0.0625(2 \times 0.84128) \\
 &= 0.6699
 \end{aligned}$$

k. Untuk $n = 2, i = 4$, dan $j = 2$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{4,2}^3 = -u_{4,2}^1 + 2u_{4,2}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{5,2}^2 + u_{5,2}^2) \\ + 0.0625(u_{4,3}^2 + u_{4,1}^2)$$

$$u_{4,2}^3 = -0.94001 + 2(0.84128)(0.6875) + 0.25(0.52815 + 0.94875) \\ + 0.0625(0.31286 + 0.31286) \\ = 0.9375$$

- l. Untuk $n = 2, i = 4$, dan $j = 3$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{4,3}^3 = -u_{4,3}^1 + 2u_{4,3}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{5,3}^2 + u_{5,3}^2) \\ + 0.0625(u_{4,4}^2 + u_{4,2}^2)$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan (3.12) diperoleh $u_{4,4}^2 = u_{4,2}^2 + 4\Delta y$ sehingga $u_{4,3}^3$ menjadi

$$u_{4,3}^3 = -u_{4,3}^1 + 2u_{4,3}^2(0.6875) + 0.25(u_{5,3}^2 + u_{5,3}^2) + 0.0625(u_{4,2}^2 + u_{4,2}^2) \\ u_{4,3}^3 = -0.28041 + 2(0.31286)(0.6875) + 0.25(0.14492 + 0.42130) \\ + 0.0625(2 \times 0.84128) \\ = 1.6875$$

- m. Untuk $n = 2, i = 5$, dan $j = 1$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$u_{5,1}^3 = -u_{5,1}^1 + 2u_{5,1}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{6,1}^2 + u_{4,1}^2) \\ + 0.0625(u_{5,2}^2 + u_{5,0}^2)$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan (3.10) diperoleh $u_{6,1}^2 = u_{4,1}^2 + 4\Delta x$ dan dari persamaan (3.15) diperoleh $u_{5,0}^2 = u_{5,2}^2$ sehingga $u_{5,1}^3$ menjadi

$$u_{5,1}^3 = -u_{5,1}^1 + 2u_{5,1}^2(0.6875) + 0.25(u_{4,1}^2 + u_{4,1}^2) \\ + 0.0625(u_{5,2}^2 + u_{5,2}^2)$$

$$u_{5,1}^3 = -u_{5,1}^1 + 2u_{5,1}^2(0.6875) + 0.25(2 \times u_{4,1}^2) + 0.0625(2 \times u_{5,2}^2)$$

$$\begin{aligned} u_{5,1}^3 &= -0.07065 + 2(0.14492)(0.6875) + 0.25(2 \times 0.31286) \\ &\quad + 0.0625(2 \times 0.52815) \\ &= 1.0283 \end{aligned}$$

n. Untuk $n = 2, i = 5$, dan $j = 2$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} u_{5,2}^3 &= -u_{5,2}^1 + 2u_{5,2}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{6,2}^2 + u_{4,2}^2) \\ &\quad + 0.0625(u_{5,3}^2 + u_{5,1}^2) \end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan (3.10) diperoleh $u_{6,2}^2 = u_{4,2}^2 +$

$4\Delta x$ sehingga $u_{5,2}^3$ menjadi

$$\begin{aligned} u_{5,2}^3 &= -u_{5,2}^1 + 2u_{5,2}^2(0.6875) + 0.25(u_{4,2}^2 + u_{4,2}^2) \\ &\quad + 0.0625(u_{5,3}^2 + u_{5,1}^2) \\ u_{5,1}^3 &= -0.41997 + 2(0.52815)(0.6875) + 0.25(2 \times 0.84128) \\ &\quad + 0.0625(0.14492 + 0.14492) \\ &= 1.3706 \end{aligned}$$

o. Untuk $n = 2, i = 5$, dan $j = 3$ maka persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} u_{5,3}^3 &= -u_{5,3}^1 + 2u_{5,3}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{6,3}^2 + u_{4,3}^2) \\ &\quad + 0.0625(u_{5,4}^2 + u_{5,2}^2) \end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas pada persamaan (3.10) diperoleh $u_{6,3}^2 = u_{4,3}^2 +$

$4\Delta x$ dan dari persamaan (3.12) diperoleh $u_{5,4}^2 = u_{5,2}^2 + 4\Delta y$ sehingga

$u_{5,3}^3$ menjadi

$$\begin{aligned} u_{5,3}^3 &= -u_{5,3}^1 + 2u_{5,3}^2(1 - 0.25 - 0.0625) + 0.25(u_{4,3}^2 + u_{4,3}^2) \\ &\quad + 0.0625(u_{5,2}^2 + u_{5,2}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{5,3}^3 &= -u_{5,3}^1 + 2u_{5,3}^2(0.6875) + 0.25(2 \times u_{4,3}^2) + 0.0625(2 \times u_{5,2}^2) \\
 u_{5,3}^3 &= -0.07065 + 2(0.14492)(0.6875) + 0.25(2 \times 0.31286) \\
 &\quad + 0.0625(2 \times 0.52815) \\
 &= 2.1250
 \end{aligned}$$

Dari perhitungan di atas akan didapatkan hasil hitungan yang ditunjukkan pada Tabel (3.6) berikut:

Tabel 3.6 Nilai $u(x, y, 0.5)$ saat $n = 3$

$u(x_i, y_j, 0.5)$	$y_1 = 0$	$y_2 = 0.5$	$y_3 = 1$
$x_1 = 0$	0.1250	0.3750	1.1250
$x_2 = 0.25$	0.1875	0.4375	1.1875
$x_3 = 0.5$	0.3735	0.6250	1.3750
$x_4 = 0.75$	0.6699	0.9375	1.6875
$x_5 = 1$	1.0283	1.3706	2.1250

Dengan menggunakan solusi eksak pada persamaan (3.41) maka diketahui nilai dari $u(x, y, 0.5)$ yang ditunjukkan pada Tabel (3.7) berikut:

Tabel 3.7 Solusi Analitik $u(x, y, 0.5)$ saat $n = 3$

$u(x_i, y_j, 0.5)$	$y_1 = 0$	$y_2 = 0.5$	$y_3 = 1$
$x_1 = 0$	0.1250	0.3750	1.1250
$x_2 = 0.25$	0.1875	0.4375	1.1875
$x_3 = 0.5$	0.3735	0.6250	1.3750
$x_4 = 0.75$	0.6875	0.9375	1.6875
$x_5 = 1$	1.1250	1.3750	2.1250

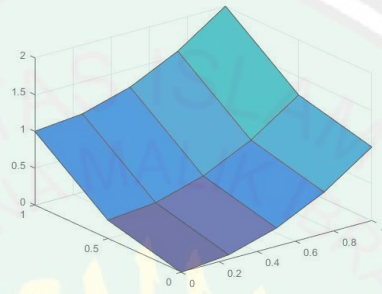
Dari Tabel (3.6) dan Tabel (3.7) maka diketahui perbandingan *error* antara solusi numerik dan solusi eksak yang ditunjukkan pada Tabel (3.8) berikut:

Tabel 3.8 Nilai *error* dari $u(x_i, y_j, 0.5)$ pada saat $n = 3$

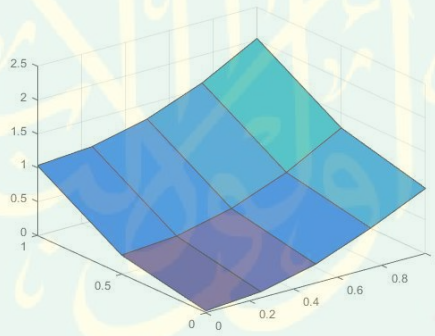
$u(x_i, y_j, 0.5)$	$y_1 = 0$	$y_2 = 0.5$	$y_3 = 1$
$x_1 = 0$	0	0	0
$x_2 = 0.25$	0	0	0
$x_3 = 0.5$	0	0	0
$x_4 = 0.75$	0.17578	0	0

$x_5 = 1$	0.09667	0.004394	0
-----------	---------	----------	---

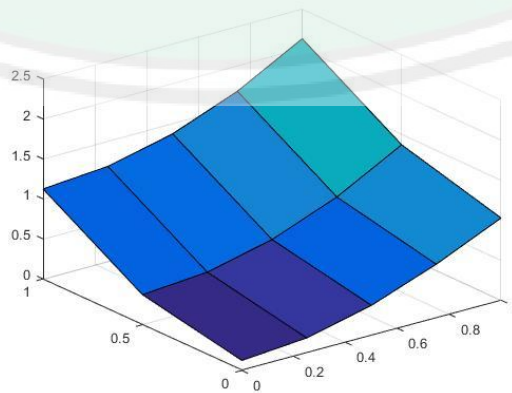
Selanjutnya untuk nilai $u_{i,j}^n$ pada Tabel (3.1), (3.3), dan (3.6) di atas disimulasikan dalam bentuk grafik tiga dimensi yang ditunjukkan pada Gambar (3.1) berikut :



Gambar 3 1 Grafik solusi numerik $u(x, y, t)$ saat $t = 0$



Gambar 3 2 Grafik solusi numerik $u(x, y, t)$ saat $t = 0.25$



Gambar 3 3 Grafik solusi numerik $u(x, y, t)$ saat $t = 0.5$

Gambar 3.1 menunjukkan hasil simulasi dari persamaan (3.6) terhadap ruang (x, y) dan gelombang $u(x, y, t)$. Dari Gambar (3.1) dari $t = 0$ menuju $t = 0.25$, saat $(x, y) = (0, 0)$ gelombang perlahan mengalami kenaikan gelombang dari 0 menuju 0.1250 kemudian dari $t = 0.25$ menuju $t = 0.5$, saat $(x, y) = (0, 0)$ gelombang perlahan mengalami kenaikan gelombang dari 0.1250 menuju 0.5000. Kemudian saat $(x, y) = (0, 1)$ pada $t = 0$ menuju $t = 0.5$ gelombang perlahan mengalami kenaikan dari 1 menuju 1.5. Selanjutnya saat $(x, y) = (0.5, 0)$ pada $t = 0$ menuju $t = 0.5$ gelombang perlahan mengalami kenaikan gelombang dari 0.25 menuju 0.7422.

3.3.2 Simulasi Kedua

Pada simulasi kedua ini akan dilakukan simulasi dengan memilih nilai $\Delta x, \Delta y$, dan Δt yang lebih kecil. Persamaan yang digunakan untuk simulasi adalah persamaan (1.1) berikut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Yang terletak pada domain $\{0 \leq x \leq 1\}, \{0 \leq y \leq 1\}$, dan $\{0 \leq t \leq 5\}$ dengan kondisi awal sebagai berikut :

$$u(x, y, 0) = x^2 + y^2$$

Dan kecepatan awal

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0$$

Serta kondisi batas sebagai berikut :

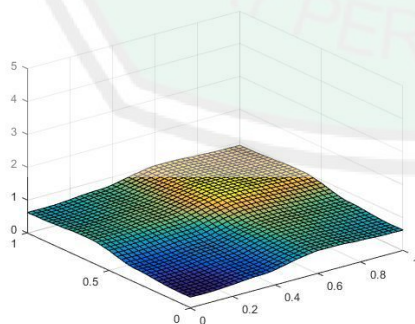
$$\frac{\partial u}{\partial x}(-5, y, t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(5, y, t) = 2$$

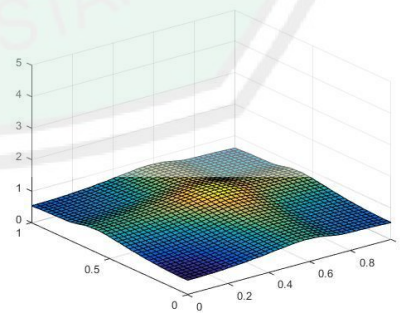
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, -5, t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 5, t) = 2$$

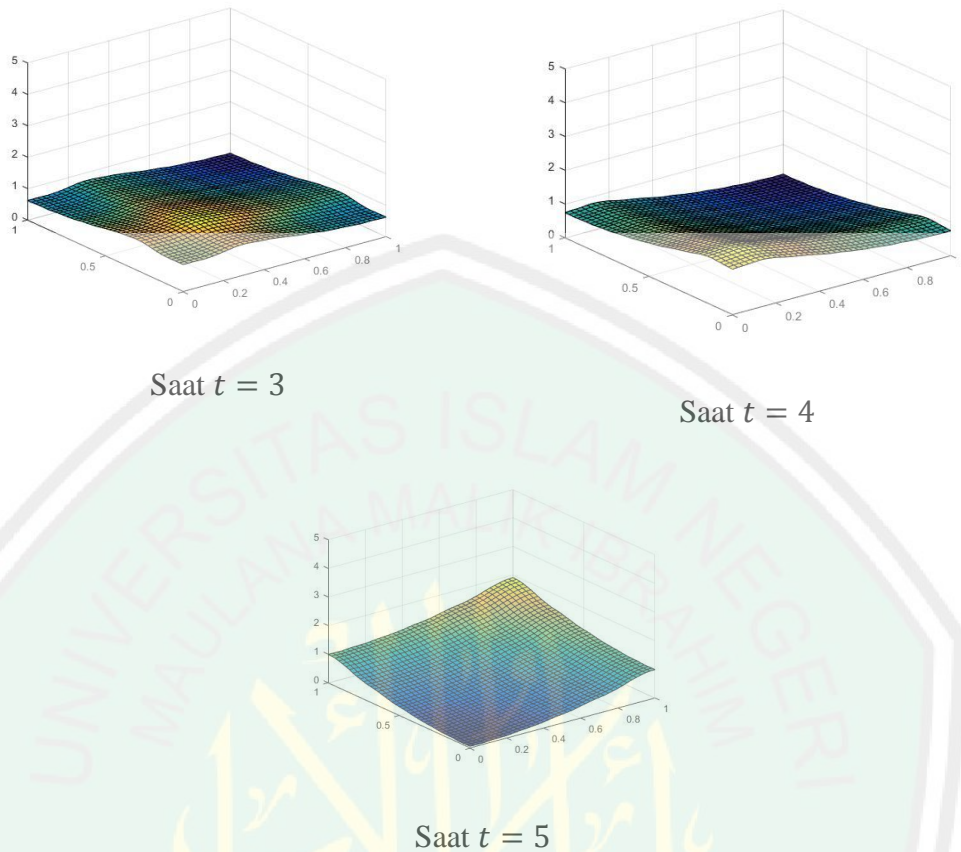
Pada subbab ini simulasi dilakukan dengan menggunakan program MATLAB. Metode beda hingga skema eksplisit CTCS pada persamaan gelombang dua dimensi diketahui stabil dengan syarat $\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} \leq 1$ sehingga akan dipilih nilai $\Delta x, \Delta y$, dan Δt yang memenuhi. Simulasi ini dilakukan untuk analisis uji kestabilan dan kekonvergenan yang menunjukkan bahwa grafik stabil dalam kriteria kestabilan yang ditetapkan dan konvergen. Kestabilan ini juga dapat digunakan sebagai acuan bahwa *error* tidak berkembang saat diterapkan kriteria kestabilan. Simulasi selanjutnya dilakukan dari persamaan beda (3.6) dengan mengambil nilai $\Delta x = 0.025$, $\Delta y = 0.025$, $\Delta t = 0.005$, dan $c = 1$. gerak gelombang yang terjadi pada persamaan gelombang dua dimensi dapat dilihat sebagai berikut:



Saat $t = 0$



Saat $t = 1$



Gambar 3 4 Simulasi Perubahan Gelombang Dua Dimensi saat $\Delta x = 0.25, \Delta y = 1$ dan $\Delta t = 0.5$

Gambar 3.4 menunjukkan hasil simulasi dari persamaan (3.6) terhadap ruang (x, y) dan gelombang $u(x, y, t)$. Gambar tersebut diketahui bahwa grafik terletak pada $x = \{-5, -4, -3, \dots, 3, 4, 5\}$, $y = \{-5, -4, -3, \dots, 3, 4, 5\}$ serta $t = \{0, 0.05, 0.1, 0.15, \dots, 20\}$. Pada Gambar (3.2) gelombang perlahan mengalami penurunan dari $t = 0$ sampai pada $t = 1$. Selanjutnya dari $t = 0$ gelombang mulai bergerak menuju titik batas dari (x, y) . Gelombang mencapai titik batas pada saat $t = 6$, setelah mencapai batas dari (x, y) gelombang memantul dan bergerak kembali menuju pusat gelombang. Dari pusat gelombang gelombang kembali mengalami perambatan menuju titik batas, dan gerak gelombang tersebut akan terus mengalami perulangan hingga waktu yang ditentukan.

Selanjutnya akan dibahas mengenai galat (*error*) dari solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi menggunakan skema eksplisit CTCS. Fungsi dari analisis galat adalah untuk mengetahui seberapa dekat solusi numerik dengan solusi eksaknya, sehingga digunakan kriteria $\mathcal{E} = |u_{eksak} - u_{numerik}|$.

Karena sebelumnya belum pernah diketahui solusi eksak dari persamaan gelombang dua dimensi menggunakan kondisi batas *Neumann*, maka pada penelitian ini akan digunakan solusi alternatifnya dimana solusi eksak persamaan gelombang dua dimensi pada persamaan (1.1) sebagai berikut:

$$u(x, y, t) = x^2 + y^2 + 2t^2$$

Setelah diketahui solusi eksak dan solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi langkah selanjutnya adalah mencari galat persamaan gelombang dua dimensi. Selanjutnya akan dilakukan perbandingan pertumbuhan nilai *error* maksimum dengan Δt yang berbeda-beda, dimana hasilnya ditunjukkan pada Tabel (3.6) berikut :

Tabel 3.9 Nilai *Error* untuk $u(x, y, t)$ dengan variasi Δt dengan $t \in [0, 20]$.

Δt	$ u_{eksak} - u_{numerik} $			
	$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$	$t = 20$
0.01	0.0192	0.0169	0.0208	0.0152
0.025	0.2964	0.2632	0.3247	0.2231

Nilai *error* pada Tabel (3.6) yang ditampilkan diambil dari titik diskrit u pada interval $t \in [0, 20]$. Perhitungan nilai *error* tersebut didapatkan berdasarkan selisih antara nilai hampiran sebelumnya dengan nilai sekarang diabsolutkan. Berdasarkan nilai-nilai tersebut dapat dilihat bahwa nilai *error* tidak melebihi 1 atau dalam artian $e \leq 1$.

Selanjutnya orde kesalahan pada analisis kekonvergenan yang telah dilakukan digunakan untuk menguji apakah *error* iterasi skema eksplisit CTCS

memenuhi kriteria $\mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta y^3)$. Sebagai contoh, analisis orde *error* terhadap waktu dilakukan ketika $\Delta t = 0,01$ dan $\Delta t = 0,025$ pada waktu ke-15 yang akan diuji apakah hasil iterasi yang memenuhi orde *error* $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ atau tidak. Dari Tabel (3.6) nilai *error* maksimum dapat dihitung $\left(\frac{0.0192}{0.2964}\right) = 0.06477$ dimana $\left(\frac{0.01}{0.025}\right)^3 \approx (0.4)^3 = 0.064$. Hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema eksplisit CTCS pada persamaan gelombang dua dimensi memenuhi kriteria $\mathcal{O}(\Delta t^3)$.

Selanjutnya analisis *error* untuk suatu Δx dapat dilihat pada Tabel 3.7 sebagai berikut:

Tabel 3.10 Nilai *Error* untuk $u(x, y, t)$ dengan variasi Δx dengan $t \in [0, 20]$.

Δx	$ u_{\text{eksak}} - u_{\text{numerik}} $			
	$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$	$t = 20$
0.1	0.0192	0.0169	0.0208	0.0152
0.25	0.2812	0.2657	0.3173	0.2375

Secara sama, perhitungan nilai *error* tersebut didapatkan berdasarkan selisih antara nilai hampiran sebelumnya dengan nilai sekarang yang absolut. Nilai *error* tersebut diambil dari titik diskrit u pada interval waktu $t \in [0, 20]$. Berdasarkan nilai pada Tabel 3.7 di atas, dapat dilihat bahwa besarnya nilai *error* tidak melebihi 1 atau dalam artian $e \leq 1$.

Selanjutnya orde kesalahan pada analisis kekonvergenan yang telah dilakukan digunakan untuk menguji apakah *error* iterasi skema eksplisit CTCS memenuhi kriteria $\mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta y^3)$. Sebagai contoh, analisis orde *error* terhadap waktu dilakukan ketika $\Delta x = 0,1$ dan $\Delta x = 0,25$ pada waktu ke-20 yang akan diuji apakah hasil iterasi yang memenuhi orde *error* $\mathcal{O}(\Delta x^3)$ atau

tidak. Dari Tabel (3.6) nilai *error* maksimum dapat dihitung $\left(\frac{0.0152}{0.2375}\right) = 0.064$ dimana $\left(\frac{0.1}{0.25}\right)^3 \approx (0.4)^3 = 0.064$. Hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema eksplisit CTCS pada persamaan gelombang dua dimensi memenuhi kriteria $\mathcal{O}(\Delta x^3)$.

Kemudian analisis *error* untuk suatu Δy dapat dilihat pada Tabel 3.8 sebagai berikut:

Tabel 3.11 Nilai *Error* untuk $u(x, y, t)$ dengan variasi Δy dengan $t \in [0, 20]$.

Δy	$ u_{\text{eksak}} - u_{\text{numerik}} $			
	$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$	$t = 20$
0.1	0.0192	0.0169	0.0208	0.0152
0.25	0.2812	0.2657	0.3173	0.2375

Secara sama, perhitungan nilai *error* tersebut didapatkan berdasarkan selisih antara nilai hampiran sebelumnya dengan nilai sekarang yang diabsolutkan. Nilai-nilai *error* tersebut diambil dari setiap titik diskrit u pada interval waktu $t \in [0, 20]$. Berdasarkan nilai pada Tabel 3.8 di atas, dapat dilihat bahwa besarnya nilai *error* tidak melebihi 1 atau dalam artian $e \leq 1$.

Selanjutnya orde kesalahan pada analisis kekonvergenan yang telah dilakukan digunakan untuk menguji apakah *error* iterasi skema eksplisit CTCS memenuhi kriteria $\mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta y^3)$. Sebagai contoh, analisis orde *error* terhadap waktu dilakukan ketika $\Delta x = 0,1$ dan $\Delta x = 0,25$ pada waktu ke-20 yang akan diuji apakah hasil iterasi yang memenuhi orde *error* $\mathcal{O}(\Delta y^3)$ atau tidak. Dari Tabel (3.6) nilai *error* maksimum dapat dihitung $\left(\frac{0.0152}{0.2375}\right) = 0.064$ dimana $\left(\frac{0.1}{0.25}\right)^3 \approx (0.4)^3 = 0.064$. Hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi

dengan skema eksplisit CTCS pada persamaan gelombang dua dimensi memenuhi kriteria $\mathcal{O}(\Delta y^3)$.

3.4 Integrasi dalam Islam

Gelombang merupakan suatu getaran yang merambat pada suatu medium perambatan. Pada kasus gelombang dua dimensi getaran tersebut melewati dua medium perambatan berupa panjang dan lebar. Fenomena gelombang dua dimensi seringkali kita temui pada kehidupan sehari-hari yakni merupakan riak air dan gelombang di lautan. Fenomena gelombang ini juga dijelaskan dalam Q.S Luqman ayat 32 berikut :

وَإِذَا غَشِيَهُمْ مَوَّجٌ كَالظُّلَلِ دَعَوْا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ فَلَمَّا نَجَّاهُمْ إِلَى الْبَرِّ فَمِنْهُمْ مُّقْتَصِدٌ وَمَا يَجْحَدُ بِآيَاتِنَا إِلَّا كُلُّ خَتَّارٍ كَفُورٍ ٣٢

32. Dan apabila mereka dilamun ombak yang besar seperti gunung, mereka menyeru Allah dengan memurnikan ketaatan kepada-Nya maka tatkala Allah menyelamatkan mereka sampai di daratan, lalu sebagian mereka tetap menempuh jalan yang lurus. Dan tidak ada yang mengingkari ayat-ayat Kami selain orang-orang yang tidak setia lagi ingkar

Ayat ini menunjukkan salah satu kebesaran Allah SWT berfirman “*dan apabila mereka dilamun ombak yang besar seperti gunung...*” yakni apabila orang-orang musyrik tersebut di timpa ombak ketika berlayar dan mereka takut. Ombak besar laksana gunung ini bisa diartikan sebagai banjir bandang atau tsunami. Tsunami sendiri merupakan suatu kekuasaan Allah SWT yang mana merupakan salah satu contoh fenomena gelombang dua dimensi.

Fenomena gelombang juga dijelaskan dalam Q.S Ar-Ruum/30:46 berikut:

وَمِنْ آيَاتِهِ أَنْ يُرْسِلَ الرِّيَّاحَ مُبَشِّرَاتٍ وَلِيُذِيقَكُمْ مِنْ رَحْمَتِهِ وَلِتَجْرِيَ الْفُلُكُ بِأَمْرِهِ وَلِتَبْتَغُوا مِنْ فَضْلِهِ وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ٤٦

46. Dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya adalah bahwa Dia mengirimkan angin sebagai pembawa berita gembira dan untuk merasakan kepadamu sebagian dari rahmat-

Nya dan supaya kapal dapat berlayar dengan perintah-Nya dan (juga) supaya kamu dapat mencari karunia-Nya; mudah-mudahan kamu bersyukur.

Berdasarkan ayat di atas diantara tanda-tanda keesaan dan kekuasaan Allah serta bukti yang kuat untuk menyatakan bahwa Allah telah meniupkan “angin” menghalau awan ke suatu tempat, kemudian awan itu semakin berat sehingga menjadi mendung yang akan menurunkan hujan dalam tafsir Al-Misbah ayat tersebut berbicara tentang angin yang menggambarkan nikmat dan kuasa Allah SWT. yang ada di darat maupun di laut. Angin ada yang membawa manfaat dan ada yang menyebabkan bencana. Makna “angin” dalam ayat ini adalah gelombang, bukan saja gelombang bunyi yang dapat membawa kabar tetapi juga gelombang radio yang merupakan gelombang elektromagnetik yang dapat dipancarkan segala penguji dunia.

Pada subbab sebelumnya telah diketahui hasil penyelesaian numerik dari persamaan gelombang dua dimensi dengan metode beda hingga skema eksplisit CTCS (*Central Time Central Space*). Pada matematika jika suatu persamaan diferensial tidak dapat dicari dengan solusi eksaknya maka dapat dicari dengan solusi numeriknya. Hal ini membuktikan bahwa setiap masalah ada penyelesaian yang menyertai yang dijelaskan pada Q.S. Al-Insyirah/94:5-6 berikut:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۝ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۝

5. Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan

6. sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.

Agaknya Allah SWT. dalam ayat 5 dan 6 ini bermaksud menjelaskan salah satu sunnah-Nya yang bersifat umum dan konsisten yaitu “*setiap kesulitan pasti disertai oleh kemudahan selama yang bersangkutan bertekad untuk manggulangnya*”. Pada ayat 5 dan 6 ini menjelaskan bahwa betapapun beratnya kesulitan (permasalahan) yang dihadapi pasti ada celah-celah baik manusia yang

berusaha menemukan segi-segi positif yang dapat dimanfaatkan dari setiap kesulitan, karena bersama kesulitan terdapat kemudahan.

Suatu permasalahan juga kerap kali ditemui dalam bidang ilmu matematika. Salah satu contohnya yakni solusi permasalahan dalam matematika yang tidak semuanya dapat diselesaikan secara analitik. Jika dari suatu model matematika sulit diperoleh solusi analitiknya, maka tetap harus berusaha dicari solusinya. Penyelesaian yang digunakan untuk mempermudah mencari solusi dari model matematika yakni dengan pendekatan. Solusi pendekatan untuk model matematika adalah solusi yang digunakan untuk menghampiri atau mendekati hasil daripada solusi analitiknya, sehingga terdapat beda antara solusi analitik dengan solusi pendekatannya yang disebut dengan *error* (Munir, 2010:5). Solusi pendekatan tersebut dapat diperoleh dengan metode yang dinamakan metode numerik.

Inti dari Q.S. Al-Insyirah:5-6 tersebut juga dijelaskan dalam Q.S.Al-Ankabut ayat 69 berikut :

وَالَّذِينَ جَاهَدُوا فِينَا لَنَهْدِيَنَّهُمْ سُبُلَنَا وَإِنَّ اللَّهَ لَمَعَ الْمُحْسِنِينَ ٦٩

69. Dan orang-orang yang berjihad untuk (mencari keridhaan) Kami, benar-benar akan Kami tunjukkan kepada mereka jalan-jalan Kami. Dan sesungguhnya Allah benar-benar beserta orang-orang yang berbuat baik.

Dalam ayat tersebut Allah menerangkan kepada manusia bahwa ketika orang itu bersungguh-sungguh maka pasti akan ditunjukkan cara-cara untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang dihadapi. Permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitung jika tidak dapat dicari solusinya maka dapat diselesaikan dengan pendekatan hasil analitiknya dengan menggunakan metode numerik. Dalam metode numerik terdapat berbagai macam metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan

permasalahan matematis sesuai dengan kondisi permasalahannya. Karena tidak semua metode dapat digunakan dan disesuaikan untuk di aplikasikan dalam permasalahan yang diteliti.

Hasil dari metode numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitiknya atau yang sering disebut dengan solusi numerik. Solusi numerik tergolong kategori *zan* (perkiraan) dan bukan kategori *yakin* (pasti) sebagaimana dijelaskan dalam Q.S. Luqman ayat 34 berikut :

إِنَّ اللَّهَ عِنْدَهُ عِلْمُ السَّاعَةِ وَيُنَزِّلُ الْغَيْثَ وَيَعْلَمُ مَا فِي الْأَرْحَامِ وَمَا تَدْرِي نَفْسٌ مَّاذَا تَكْسِبُ غَدًا وَمَا تَدْرِي نَفْسٌ بِأَيِّ أَرْضٍ تَمُوتُ إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ٣٤

34. Sesungguhnya Allah, hanya pada sisi-Nya sajalah pengetahuan tentang Hari Kiamat; dan Dialah Yang menurunkan hujan, dan mengetahui apa yang ada dalam rahim. Dan tiada seorangpun yang dapat mengetahui (dengan pasti) apa yang akan diusahakannya besok. Dan tiada seorangpun yang dapat mengetahui di bumi mana dia akan mati. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal

Dari ayat diatas kita tahu bahwa hasil yang diperoleh dari perhitungan solusi numeriknya merupakan pendekatan yang tidak tepat sama dengan solusi analitiknya, karena antara solusi analitik dengan solusi numerik pasti terdapat kesalahan atau *error* yang menyertainya. Oleh karena itu, solusi numerik dari persamaan gelombang sua dimensi yang diteliti ini tergolong dalam kategori *zan* (perkiraan) dari solusi analitiknya.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Skema numerik eksplisit CTCS (*Center Times Center Space*) untuk persamaan Gelombang dua dimensi memiliki bentuk diskrit sebagaimana disebutkan pada persamaan (3.6) sebagai berikut : $u_{i,j}^{n+1} = -u_{i,j}^{n-1} + 2u_{i,j}^n(1 - s - p) + s(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n) + p(u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n)$.
2. Metode beda hingga skema eksplisit CTCS pada persamaan Gelombang dua dimensi bersifat stabil dengan syarat kestabilan $\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta y^2} \leq 1$.
3. Metode beda hingga skema eksplisit CTCS pada persamaan gelombang dua dimensi konsisten dengan orde *error* $\mathcal{O}(\Delta t^3, \Delta x^3, \Delta y^3)$ dan konvergen jika mendekati nol.

4.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, maka untuk selanjutnya penulis menyarankan untuk meliti terkait solusi eksak dari persamaan Gelombang dua dimensi menggunakan kondisi batas Neumann sehingga nanti hasilnya dapat dibandingkan dengan penelitian ini.

DAFTAR RUJUKAN

- Al-Jazairi, J. 2004. *Tafsir Al-Aisar* . Jakarta Timur: Darrus Sunnah Press.
- Alman. 2013. Penyelesaian Numerik Persamaan Adveksi Difusi 2D untuk Model Transportasi Polutan dengan Menggunakan Metode Beda Hingga Dufort Frankel . Makassar: Universitas Hasanuddin.
- Alonso, M. Dan Finn, J.E. 1994. Dasar-dasar Fisika dan Gelombang Universitas Jilid 2 Medan. Jakarta: Erlangga.
- Bambang, Triatmodjo. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Progam Komputer* . Yogyakarta: Beta Offset.
- Chapra, S.C. dan Canale R.P. 1998. *Metode Numerik Jilid 1 Edisi Kedua*. Terjemahan I. Nyoman Susila . Jakarta: Erlangga.
- Katsir, I. 2006. *Tafsir Al-Qur'an* . Bairut: Darul Kutub Ilmiah.
- Kreiss & Petersson, A. 2004. Difference Approximation of The Neumann Problem For The Second Order Wave Equation. *Society for Industrial and Applied Mathematics* . 42(3) : 1292-1323.
- Kreyziq, E. 2006. *Advanced Engineering Mathematics*. New York. John Waley and Sons, Inc.
- Rinaldi, M. 2003. *Metode Numerik*. Bandung: Penerbit Informatika.
- Setiawan, M. 2012. Fisika Dasar. (Online), (<http://mirza.staff.ugm.ac.id>), diakses 6 Februari 2017.
- Soejati,S., Djuahana, D., dan Sugihartono,I. 2004. *Catatan Kuliah Gelombang* . Depok: Que Project Departemen Fisika.
- Strauss, W.A. 2007. *Partial Differential Equation An Introduction*. New York. John Waley and Sons, In

Lampiran 1. Program Contoh Aplikasi Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi dengan Metode Eksplisit CTCS

```

clc,clear, clf
%fix terakhir cek
c = 1;
dx = 0.5;
dy = 1;
dt = 0.25;

l = 1;
x = 0:dx:1;
y = 0:dy:1;
t = 0:dt:0.5;

K = length(x);
L = length(y);
M = length(t);

u = zeros(K,L,M);
[X,Y] = meshgrid(x,y)
a = X'
b = Y'

for i=1:K
    for j=1:L
        u(i,j,1) = x(i).^2+y(j).^2
    end
end

surf(a,b,u(:, :, 1))
grid on
pause(0.01)

s = c.^2*dt.^2/dx.^2
p = c.^2*dt.^2/dy.^2

for i = 1:K
    for j = 1:L
        if j==1 & i==1
            u(i,j,2) = (2*u(1,1,1)*(1-s-p) + 2*s*u(2,1,1) ...
                + 2*p*u(1,2,1))/2;
        elseif j==L & i==1
            u(i,j,2) = (2*u(1,L,1)*(1-s-p) + 2*s*u(2,L,1) ...
                + 2*p*(u(1,L-1,1)+2*dy))/2;
        elseif i==K & j==1
            u(i,j,2) = (2*u(K,1,1)*(1-s-p) + s*(4*dx+u(K-1,1,1)) ...
                + p*(u(K,2,1)+u(K,2,1)))/2;

            elseif i==K & j==L
                u(i,j,2) = (2*u(K,L,1)*(1-s-p) + s*(4*dx+2*u(K-
1,L,1)) ...
                    + p*(4*dy+2*u(K,L-1,1)))/2;

```

```

elseif j==1
    u(i,j,2)= (2*u(i,1,1)*(1-s-p) +s*(u(i+1,1,1) +u(i-
1,1,1)) ...
            +2*p*u(i,2,1))/2;

elseif i==1
    u(i,j,2)= (2*u(1,j,1)*(1-s-p) +2*s*u(2,j,1) ...
            +p*(u(1,j+1,1)+u(1,j-1,1)))/2;
elseif i==K
    u(i,j,2)= (2*u(K,j,1)*(1-s-p) +s*(4*dx+2*u(K-
1,j,1)) ...
            +p*(u(K,j+1,1)+u(K,j-1,1)))/2;
elseif j==L
    u(i,j,2)= (2*u(i,L,1)*(1-s-p) +s*(u(i+1,L,1) +u(i-
1,L,1)) ...
            +p*(4*dy+2*u(i,L-1,1)))/2;
else
    u(i,j,2) = (2*u(i,j,1)*(1-s-p) +s*(u(i+1,j,1) +u(i-
1,j,1)) ...
            +p*(u(i,j+1,1)+u(i,j-1,1)))/2;
end
end
end

surf(a,b,u(:,:,1))
grid on
pause(0.01)

for n = 2:M-1
    for j = 1:L
        for i = 1:K
            if j==1 & i==1
                u(i,j,n+1)= 2*u(1,1,n)*(1-s-p) +s*(u(2,1,n)
+u(2,1,n)) ...
                    +2*p*u(1,2,n)-u(1,1,n-1);
            elseif j==L & i==1
                u(i,j,n+1)= 2*u(1,L,n)*(1-s-p) +2*s*u(2,L,n) ...
                    +p*(2*u(1,L-1,n)+4*dy)-u(1,L,n-1);
            elseif i==K & j==1
                u(i,j,n+1)= (2*u(K,1,n)*(1-s-p) + s*(2*u(K-
1,1,n)+4*dx) ...
                    +p*(u(K,2,n)+u(K,2,n)))-u(K,1,n-1);

            elseif i==K & j==L
                u(i,j,n+1)= (2*u(K,L,n)*(1-s-p) +s*(2*u(K-
1,L,n)+4*dx) ...
                    +p*(2*u(K,L-1,n)+4*dy))-u(K,L,n-1);

            elseif i==1
                u(i,j,n+1)= 2*u(1,j,n)*(1-s-p) +2*s*u(2,j,n) ...
                    +p*(u(1,j+1,n)+u(1,j-1,n))-u(1,j,n-1);
            elseif j==1
                u(i,j,n+1)= (2*u(i,1,n)*(1-s-p) +s*(u(i+1,1,n) +u(i-
1,1,n)) ...
                    +2*p*u(i,2,n))-u(i,1,n-1);
            elseif i==K

```

```

        u(i,j,n+1)= (2*u(K,j,n)*(1-s-p) +s*(2*u(K-
1,j,n)+4*dx) ...
        +p*(u(K,j+1,n)+u(K,j-1,n)))-u(K,j,n-1);
    elseif j==L
        u(i,j,n+1)= (2*u(i,L,n)*(1-s-p) +s*(u(i+1,L,n) +u(i-
1,L,n)) ...
        +p*(2*u(i,L-1,n)+4*dy))-u(i,L,n-1);
    else
        u(i,j,n+1) = -u(i,j,n-1) +2*u(i,j,n)*(1-s-p)
+s*(u(i+1,j,n) +u(i-1,j,n)) ...
        +p*(u(i,j+1,n)+u(i,j-1,n));
    end
end
end
surf(a,b,u(:,:,n))
grid on
pause(0.01)
end

surf(a,b,u(:,:,n+1))
grid on
pause(0.01)

for i=1:K
    for j=1:L
        for n=1:M
            uk(i,j,n)=x(i).^2+y(j).^2+2*t(n).^2;
        end
    end
end

error(:,:,n)= abs(uk(:,:,n)-u(:,:,n));

```

Dari program contoh aplikasi tersebut diperoleh nilai iterasi pertama, kedua, dan ketiga sebagai berikut:

Solusi numerik $u(x,y,t)$

$u(:,:,1) =$

0	1.0000
0.2500	1.2500
1.0000	2.0000

$u(:,:,2) =$

0.1250	1.1250
0.3750	1.3750
1.0938	2.1250

$u(:, :, 3) =$

0.5000	1.5000
0.7422	1.7500
1.4570	2.4961

Solusi Analitik $u(x, y, t)$

$uk(:, :, 1) =$

0	1.0000
0.2500	1.2500
1.0000	2.0000

$uk(:, :, 2) =$

0.1250	1.1250
0.3750	1.3750
1.1250	2.1250

$uk(:, :, 3) =$

0.5000	1.5000
0.7500	1.7500
1.5000	2.5000

Lampiran 2. Program Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi dengan Metode Eksplisit CTCS

```
clc,clear, clf
%fix terakhir cek
c = 1;
dx = 0.1;
dy = 0.1;
dt = 0.05;

l = 5;
x = -l:dx:l;
y = -l:dy:l;
t = 0:dt:20;

K = length(x);
L = length(y);
M = length(t);

for i=1:K
    for j=1:L
        u(i,j,1) = x(i).^2+y(j).^2;
    end
end

surf(x,y,u(:,:,1))
grid on
pause(0.01)

s = c.^2*dt.^2/dx.^2;
p = c.^2*dt.^2/dy.^2;

for j = 1:L
    for i = 1:K
        if j==1 & i==1
            u(i,j,2)= (2*u(1,1,1)*(1-s-p) +s*(u(2,1,1)
+u(2,1,1)) ...
                +2*p*u(1,2,1))/2;
        elseif j==L & i==1
            u(i,j,2)= (2*u(1,L,1)*(1-s-p) +2*s*u(2,L,1) ...
                +p*(4*dy+2*u(1,L-1,1)))/2;
        elseif i==K & j==1
            u(i,j,2)= (2*u(K,1,1)*(1-s-p) +s*(4*dx+u(K-1,1,1)) ...
                +p*(u(K,2,1)+u(K,2,1)))/2;

            elseif i==K & j==L
            u(i,j,2)= (2*u(K,L,1)*(1-s-p) +s*(4*dx+u(K-1,L,1)
+u(K-1,L,1)) ...
                +p*(4*dy+u(K,L-1,1)+u(K,L-1,1)))/2;
        elseif j==1
```

```

        u(i,j,2)= (2*u(i,1,1)*(1-s-p) +s*(u(i+1,1,1) +u(i-
1,1,1)) ...
        +2*p*u(i,2,1))/2;

elseif i==1
    u(i,j,2)= (2*u(1,j,1)*(1-s-p) +2*s*u(2,j,1) ...
    +p*(u(1,j+1,1)+u(1,j-1,1)))/2;
elseif i==K
    u(i,j,2)= (2*u(K,j,1)*(1-s-p) +s*(4*dx+u(K-1,j,1)
+u(K-1,j,1)) ...
    +p*(u(K,j+1,1)+u(K,j-1,1)))/2;
elseif j==L
    u(i,j,2)= (2*u(i,L,1)*(1-s-p) +s*(u(i+1,L,1) +u(i-
1,L,1)) ...
    +p*(4*dy+u(i,L-1,1)+u(i,L-1,1)))/2;
else
    u(i,j,2) = (2*u(i,j,1)*(1-s-p) +s*(u(i+1,j,1) +u(i-
1,j,1)) ...
    +p*(u(i,j+1,1)+u(i,j-1,1)))/2;
end
end
end

surf(x,y,u(:,:,1))
grid on
pause(0.01)

for n = 2:M-1
    for j = 1:L
        for i = 1:K
            if j==1 & i==1
                u(i,j,n+1)= 2*u(1,1,n)*(1-s-p) +s*(u(2,1,n)
+u(2,1,n)) ...
                +2*p*u(1,2,n)-u(1,1,n-1);
            elseif j==L & i==1
                u(i,j,n+1)= 2*u(1,L,n)*(1-s-p) +2*s*u(2,L,n) ...
                +2*p*u(1,L-1,n)-u(1,L,n-1);
            elseif i==K & j==1
                u(i,j,n+1)= (2*u(K,1,n)*(1-s-p) +2*s*u(K-1,1,n) ...
                +p*(u(K,2,n)+u(K,2,n)))-u(K,1,n-1);

            elseif i==K & j==L
                u(i,j,n+1)= (2*u(K,L,n)*(1-s-p) +s*(u(K-1,L,n) +u(K-
1,L,n)) ...
                +p*(u(K,L-1,n)+u(K,L-1,n)))-u(K,L,n-1);

            elseif i==1
                u(i,j,n+1)= 2*u(1,j,n)*(1-s-p) +2*s*u(2,j,n) ...
                +p*(u(1,j+1,n)+u(1,j-1,n))-u(1,j,n-1);
            elseif j==1
                u(i,j,n+1)= (2*u(i,1,n)*(1-s-p) +s*(u(i+1,1,n) +u(i-
1,1,n)) ...
                +2*p*u(i,2,n))-u(i,1,n-1);
            elseif i==K

```

```

        u(i,j,n+1)= (2*u(K,j,n)*(1-s-p) +s*(u(K-1,j,n) +u(K-
1,j,n)) ...
        +p*(u(K,j+1,n)+u(K,j-1,n)))-u(K,j,n-1);
    elseif j==L
        u(i,j,n+1)= (2*u(i,L,n)*(1-s-p) +s*(u(i+1,L,n) +u(i-
1,L,n)) ...
        +p*(u(i,L-1,n)+u(i,L-1,n)))-u(i,L,n-1);
    else
        u(i,j,n+1) = -u(i,j,n-1) +2*u(i,j,n)*(1-s-p)
+s*(u(i+1,j,n) +u(i-1,j,n)) ...
        +p*(u(i,j+1,n)+u(i,j-1,n));
    end
end
end
surf(x,y,u(:,:,n)), zlim([0,50])
pause(0.01)
end

surf(x,y,u(:,:,n+1)), zlim([0,50])
pause(0.01)

for i=1:K
    for j=1:L
        for n=1:M
            uk(i,j,n)=x(i).^2+y(j).^2+2*t(n).^2;
        end
    end
end

error(:,:,n)= abs(uk(:,:,n)-u(:,:,n));

```

RIWAYAT HIDUP



Allifia Nur Chasanah lahir di Ponorogo tanggal 7 September 1996. Anak ketiga dari tiga bersaudara, pasangan Bpk. H. Kasanun dan Ibu Hj. Nuryani. Memiliki dua orang kakak bernama Andri Sulami dan Ari Rochmawati.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Muhammadiyah 1 Ponorogo yang ditamatkan pada tahun 2008. Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTsN 1 Ponorogo yang ditamatkan pada tahun 2011. Kemudian dia melanjutkan pendidikan menengah atas di MAN 2 Madiun yang ditamatkan pada tahun 2013. Selanjutnya, pada tahun 2013 pendidikan berikutnya dia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Allifia Nur Chasanah
NIM : 13610067
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi dengan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit CTCs (Center Time Center Space)
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	9 Februari 2017	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.	
2	3 Maret 2017	Konsultasi Bab III		2.
3	24 Maret 2017	ACC Bab I, Bab II	3.	
4	30 Maret 2017	Konsultasi Agama Bab I dan Bab II		4.
5	20 April 2017	Revisi Agama Bab I dan Bab II	5.	
6	27 April 2017	ACC Agama Bab I dan Bab II		6.
7	27 April 2017	ACC Seminar Proposal	7.	
8	28 April 2017	ACC Seminar Proposal		8.
9	27 Juli 2017	Konsultasi Bab III Subbab 3.2.2	9.	
10	2 Agustus 2017	Konsultasi Bab III Subbab 3.3		10.
11	3 Agustus 2017	Konsultasi Agama Bab III	11.	
12	8 Agustus 2017	Konsultasi Bab III Subbab 3.3.1		12.
13	11 Agustus 2017	Konsultasi Bab III Subbab 3.3.2	13.	
14	22 Agustus 2017	Konsultasi Bab IV		14.
15	23 Agustus 2017	ACC Keseluruhan	15.	
16	23 Agustus 2017	ACC Agama Keseluruhan		16.

Malang, 28 Agustus 2017
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay M.Si
NIP. 1965414 200312 1 001