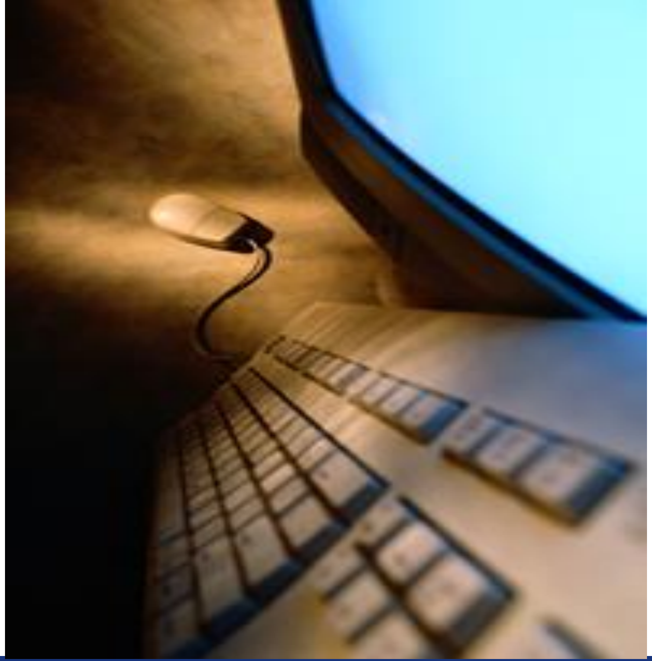
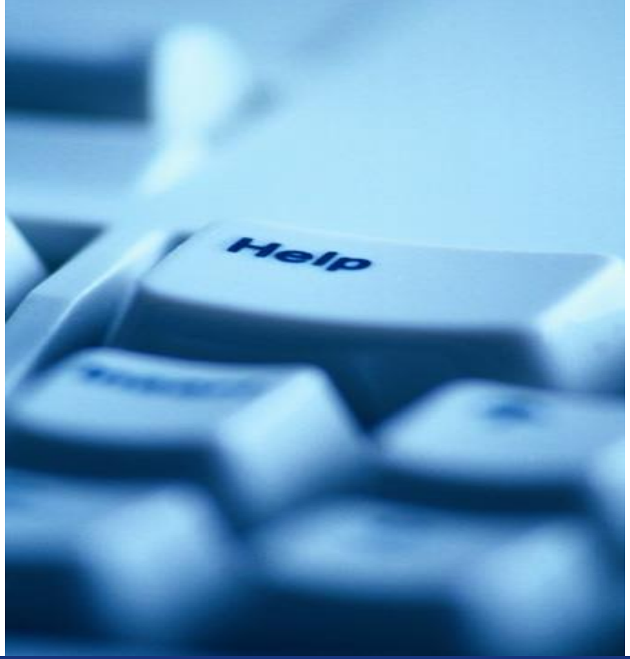
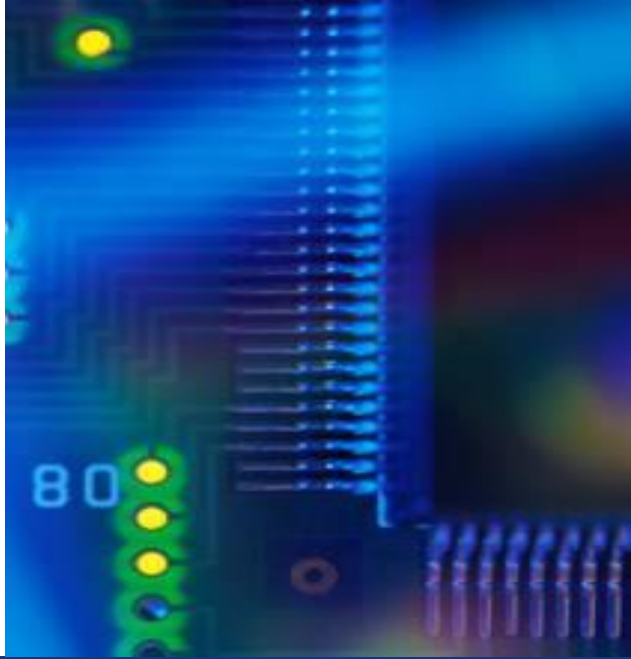
UNIVERSITAS
BUDI LUHUR







FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI

LOGIKA MATEMATIKA

[MI041/ 3 SKS]

Pertemuan 14

ALJABAR BOOLEAN

Tujuan Pembelajaran

- Mahasiswa dapat memahami konsep dasar aljabar boolen sampai dengan gambaran rangkaian logika.

Definisi Aljabar Boolean

- Misalkan *B* merupakan tupel <*B*, +, ., ‵, 0, 1> disebut aljabar *Boolean* jika untuk setiap *a*, *b*, *c* ∈ *B* berlaku aksioma (sering dinamakan juga postulat *Huntington*) berikut :

1. Identitas

(i) $a + 0 = a$

(ii) $a \cdot 1 = a$

2. Komutatif

(i) $a + b = b + a$

(ii) $a \cdot b = b \cdot a$

Definisi Aljabar Boolean

3. Distributif

(i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

(ii) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

4. Komplemen

Untuk setiap $a \in B$ terdapat elemen unik $a' \in B$ sehingga

(i) $a + a' = 1$

(ii) $a \cdot a' = 0$

Definisi Aljabar Boolean

untuk mempunyai sebuah aljabar *Boolean*, harus diperlihatkan:

1. elemen–elemen himpuan *B*,
2. kaidah/aturan operasi untuk dua operator biner dan operator uner,
3. himpunan *B*, bersama–sama dengan dua operator tersebut, memenuhi keempat aksioma di atas.

Jika ketiga persyaratan di atas dipenuhi, maka aljabar yang didefinisikan dapat dikatakan sebagai aljabar *Boolean*.

Aljabar Boolean Dua Nilai

Aljabar Boolean dua-nilai:

-B = {0, 1}

-operator biner, + dan .

-operator uner, ’

-Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a	a'
0	1
1	0

Aljabar Boolean Dua Nilai

- Harus diperhatikan bahwa keempat aksioma di dalam terpenuhi pada himpunan $B = \{0, 1\}$ dengan dua operator biner dan satu operator uner yang didefinisikan di atas.

1. Identitas: jelas berlaku karena dari tabel:

(i) $0 + 1 = 1 + 0 = 1$

(ii) $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$

yang memenuhi elemen identitas 0 dan 1 seperti yang didefinisikan pada postulat *Huntington.*

Aljabar Boolean Dua Nilai

2. Komutatif : jelas berlaku dengan melihat simetri tabel operator biner.
3. Distributif : (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

a	b	c	$b + c$	$a \cdot (b + c)$	$a \cdot b$	$a \cdot c$	$(a \cdot b) + (a \cdot c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Aljabar Boolean Dua Nilai

(ii) Hukum distributif $a + (b \,.\, c) = (a + b) \,.\, (a + c)$ dapat ditunjukkan benar dengan membuat tabel kebenaran dengan cara yang sama seperti (i).

4. Komplemen : jelas berlaku karena Tabel 2.4 memperlihatkan bahwa :

(i)$a + a' = 1$, karena $0 + 0' = 0 + 1 = 1$ dan

$1 + 1' = 1 + 0 = 1$

(ii) $a \,.\, a = 0$, karena $0 \,.\, 0' = 0 \,.\, 1$ dan $1 \,.\, 1' = 1 \,.\, 0 = 0$

Karena keempat aksioma terpenuhi, maka terbukti bahwa $B = \{0 , 1\}$ merupakan aljabar *Boolean*.

Ekspresi Boolean

Misalkan (*B*, +, ., ‵, 0, 1) adalah sebuah aljabar *Boolean*.

Suatu ekspresi *Boolean* dalam (*B*, +, ., ‵) adalah:

(i)Setiap elemen di dalam B,

(ii)Setiap peubah,

(iii) Jika e_1 dan e_2 adalah ekspresi Boolean maka $e_1 + e_2$,
$e_1 \cdot e_2$, e_2 , e_1' adalah ekspresi Boolean

Contoh lain adalah

0

1

Ekspresi Boolean

$a\ b\ c$

$a + b$

$a \cdot b$

$a' \cdot (b + c)$

$a \cdot b' + a \cdot b$

$c + b'$, dst

Fungsi Boolean

- **Fungsi Boolean** (disebut juga fungsi biner) adalah pemetaan dari B^n ke B melalui ekspresi Boolean, kita menuliskannya sebagai

  $$f : B^n \to B$$

  yang dalam hal ini B^n adalah himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda-n (*ordered n-tuple*) di dalam daerah asal B.

- Setiap ekspresi Boolean tidak lain merupakan fungsi Boolean.

Contoh Fungsi Boolean

- Misalkan sebuah fungsi Boolean adalah

$$f(x, y, z) = xyz + x'y + y'z$$

Fungsi f memetakan nilai-nilai pasangan terurut ganda-3 (x, y, z) ke himpunan $\{0, 1\}$.
Contohnya, (1, 0, 1) yang berarti $x = 1$, $y = 0$, dan $z = 1$
sehingga $f(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1' \cdot 0 + 0' \cdot 1 = 0 + 0 + 1 = 1$.

Contoh Fungsi Boolean

Contoh-contoh fungsi Boolean yang lain:

1. $f(x) = x$
2. $f(x, y) = x'y + xy' + y'$
3. $f(x, y) = x'\,y'$
4. $f(x, y) = (x + y)'$
5. $f(x, y, z) = xyz'$

- Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplemennya, disebut **literal**.

  Contoh: Fungsi $h(x, y, z) = xyz'$ pada contoh di atas terdiri dari 3 buah literal, yaitu x, y, dan z'.

Contoh Fungsi Boolean dengan Tabel Kebenaran

Diketahui fungsi Booelan $f(x, y, z) = xy\,z'$, nyatakan h dalam tabel kebenaran.

<u>Penyelesaian</u>:

x	y	z	$f(x, y, z) = xy\,z'$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Komplemen Fungsi Boolean

1. Cara pertama: menggunakan hukum De Morgan
   Hukum De Morgan untuk dua buah peubah, x_1 dan x_2, adalah

Contoh. Misalkan $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, maka

$$
\begin{aligned}
f'(x, y, z) &= (x(y'z' + yz))' \\
&= x' + (y'z' + yz)' \\
&= x' + (y'z')' (yz)' \\
&= x' + (y + z) (y' + z')
\end{aligned}
$$

Komplemen Fungsi Boolean

2. Cara kedua: menggunakan prinsip dualitas.
   Tentukan dual dari ekspresi Boolean yang merepresentasikan *f*, lalu komplemenkan setiap literal di dalam dual tersebut.

Contoh. Misalkan $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, maka

dual dari *f*: $x + (y' + z')\,(y + z)$

komplemenkan tiap literalnya: $x' + (y + z)\,(y' + z') = f'$

Jadi, $f'(x, y, z) = x' + (y + z)(y' + z')$

Bentuk Kanonik

- Jadi, ada dua macam bentuk kanonik:
  1. Penjumlahan dari hasil kali (*sum-of-product* atau SOP)
  2. Perkalian dari hasil jumlah (*product-of-sum* atau POS)

Contoh: 1. $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$ → SOP

Setiap suku (*term*) disebut *minterm*

2. $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$
$(x' + y + z')(x' + y' + z)$ → POS

Setiap suku (*term*) disebut *maxterm*

Bentuk Kanonik

- Setiap *minterm/maxterm* mengandung literal lengkap

		Minterm		*Maxterm*	
x	y	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	$x\,y$	m_3	$x' + y'$	M_3

			Minterm		*Maxterm*	
x	y	z	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'y\,z'$	m_2	$x + y'+z$	M_2
0	1	1	$x'y\,z$	m_3	$x + y'+z'$	M_3
1	0	0	$x\,y'z'$	m_4	$x'+ y + z$	M_4
1	0	1	$x\,y'z$	m_5	$x'+ y + z'$	M_5
1	1	0	$x\,y\,z'$	m_6	$x'+ y'+ z$	M_6
1	1	1	$x\,y\,z$	m_7	$x'+ y'+ z'$	M_7

Contoh bentuk kanonik

Nyatakan tabel kebenaran di bawah ini dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Penyelesaian:

(a) SOP

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah 001, 100, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah

$$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$$

atau (dengan menggunakan lambang *minterm*),

$$f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_7 = \sum (1, 4, 7)$$

Contoh bentuk kanonik

(b) POS

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah 000, 010, 011, 101, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$$

atau dalam bentuk lain,

$$f(x, y, z) = M_0 M_2 M_3 M_5 M_6 = \prod(0, 2, 3, 5, 6)$$

Disjungsif Normal Form (DNF)

a. **Penjelasan**

DNF terdiri dari penjumlahan dari beberapa perkalian (sum of products = SOP). Dalam tabel kebenaran, DNF merupakan perkalian-perkalian yang menghasilkan nilai 1. Contoh: $xy + x'y$ Setiap suku (term) disebut minterm

b. **Contoh :**

Jadikan ekspresi $E = (x \vee yz')(yz)'$ dalam bentuk DNF!

$(x \vee yz')(yz)' = (x \vee yz')\,(y' \vee z')$

$= x(y' \vee z') \vee (yz')\,(y' \vee z')$

$= (xy' \vee xz') \vee (yz'y' \vee yz')$

$= xy' \vee xz' \vee yz'$

SELESAI