PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN METODE ITERASI

Susilo Nugroho (M0105068)

1. Latar Belakang Masalah

Sistem persamaan linear yang terdiri dari n persamaan dengan n variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ dinyatakan dengan

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & + & . & + & ... & + & . & = & . \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & ... & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{1.1}$$

Sistem (1.1) dapat diekspresikan dengan bentuk perkalian matriks. Sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan metode langsung atau metode iterasi. Kedua metode tersebut mempunyai kelemahan dan keunggulan. Metode yang dipilih akan menentukan keakuratan penyelesaian sistem tersebut. Dalam kasus tertentu, yaitu sistem yang besar, metode iterasi lebih cocok digunakan. Dalam menentukan penyelesaian sistem persamaan linear, metode iterasi menggunakan algoritma secara rekursif. Algoritma tersebut dilakukan sampai diperoleh suatu nilai yang konvergen dengan toleransi yang diberikan. Ada dua metode iterasi yang sering digunakan, yaitu metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel. Metode Jacobi dikenalkan oleh Carl Jacobi (1804-1851) dan metode Gauss-Seidel dikenalkan oleh Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dan Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896).

2. Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang dibahas yaitu

(1) bagaimana penurunan algoritma metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel?

(2) bagaimana penerapan metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel pada suatu kasus?

(3) bagaimana menganalisis eror secara numerik metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel?

3. Tujuan

Tujuan makalah ini adalah

(1) menjelaskan tentang penurunan algoritma metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel

(2) menjelaskan tentang penerapan metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel pada suatu kasus

(3) menganalisis eror secara numerik metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel

4. Penurunan Algoritma

Dalam bagian ini, metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel diturunkan ulang. Penurunan tersebut mengacu pada May [3].

4.1. **Metode Jacobi.** Persamaan ke-i dalam sistem persamaan (1.1) dinyatakan sebagai

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ii}x_i + ... + a_{in}x_n = b_i, \text{ dimana } i = 1, 2, 3, ..., n. \tag{4.1}$$

Persamaan (4.1) dapat diekspresikan sebagai

$$a_{ii}x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j = b_i \tag{4.2}$$

Dari (4.2) dapat diperoleh penyelesaian persamaan ke-i yaitu

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j] \tag{4.3}$$

Dengan demikian, algoritma metode Jacobi diekspresikan sebagai

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}], \text{ dimana } k = 0, 1, 2, ... \tag{4.4}$$

Untuk menyelesikan sistem persamaan linear dengan metode Jacobi (maupun metode Gauss-Seidel) diperlukan suatu nilai pendekatan awal yaitu $x^{(0)}$. Nilai $x^{(0)}$ biasanya tidak diketahui dan dipilih $x^{(0)} = 0$.

4.2. Metode Gauss-Seidel. Metode Gauss-Seidel pada prinsipnya hampir sama dengan metode Jacobi. Pada metode Jacobi, $x_i^{(k+1)}$ dihitung dari $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}$, tetapi nilai estimasi baru dari $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_{i-1}^{(k+1)}$ sudah dihitung. Dalam metode Gauss-Seidel, nilai estimasi baru tersebut digunakan dalam perhitungan. Seperti dalam metode Jacobi, penyelesaian persamaan ke-i diekspresikan menjadi persamaan (4.3). Tetapi sekarang karena nilai estimasi baru yang digunakan dalam perhitungan maka penjumlahan pada persamaan (4.3) diekspresikan kembali menjadi dua bagian sehingga diperoleh

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j]. \tag{4.5}$$

Dengan demikian, algoritma matode Gauss-Seidel diekspresikan sebagai

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}]. \tag{4.6}$$

4.3. Konvergensi Metode Jacobi dan Metode Gauss-Seidel. Menurut May [3], untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode iterasi, koefisien matriks A dipecah menjadi dua bagian, N dan P, sedemikian sehingga $A = N - P$. Dengan demikian dapat diperoleh bahwa

$$\begin{gathered} N(\mathrm{x} - \mathrm{x}^{(k+1)}) = P(\mathrm{x} - \mathrm{x}^{(k)}) \text{ atau} \\ (\mathrm{x} - \mathrm{x}^{(k+1)}) = M(\mathrm{x} - \mathrm{x}^{(k)}) \text{ dengan } M = N^{-1}P. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Kemudian didefinisikan eror pada iterasi ke-k yaitu

$$e^{(k)} = \mathrm{x} - \mathrm{x}^{(k)}. \tag{4.8}$$

Sehingga eror pada iterasi ke-$(k+1)$ dapat dinyatakan sebagai

$$e^{(k+1)} = Me^{(k)}. \tag{4.9}$$

Oleh karena itu, dari persamaan (4.9) maka eror pada iterasi ke-k pada persamaan (4.8) dapat dituliskan kembali menjadi

$$e^{(k)} = M^k e^{(0)}. \tag{4.10}$$

Pada persamaan (4.10), tampak bahwa $e^{(k)} \to 0$ untuk $k \to \infty$ jika dan hanya jika $M^k \to 0$ untuk $k \to 0$. Hal ini ekuivalen dengan syarat cukup dan perlu metode iterasi konvergen untuk sebarang $\mathrm{x}^{(0)}$yang dipilih adalah

$$M^k \to 0 \text{ untuk } k \to \infty. \tag{4.11}$$

Dengan mengambil norm persamaan (4.10) diperoleh

$$\left\|e^{(k)}\right\| = \left\|M^k e^{(0)}\right\| \leq \left\|M^k\right\| . \left\|e^{(0)}\right\|$$

Dengan sifat norm vektor seperti yang disebutkan oleh May [3] yaitu $\|AB\| \leq \|A\| . \|B\|$, maka dapat ditunjukkan bahwa $\left\|M^k\right\| \leq \|M\|^k$, sedemikian sehingga $\left\|e^{(k)}\right\| \leq \|M\|^k . \left\|e^{(0)}\right\|$. Oleh karena itu, dapat dituliskan bahwa syarat cukup agar metode iterasi konvergen adalah $\|M\| < 1$. Melihat kembali persamaan (4.4) , sistem tersebut dapat diekspresikan dengan

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -[\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}] + b_i,$$

sehingga dapat diperoleh

$$N = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}), \text{ dan}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & ... & -a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ -a_{n1} & -a_{n2} & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Karena $M = N^{-1}P$ maka

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & ... & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & ... & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ . & . & ... & . \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Dengan demikian, dapat diperoleh

$$\|M\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|.$$

Oleh karena itu, syarat cukup agar metode Jacobi konvergen adalah

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \text{ atau } a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left| a_{ij} \right|, i = 1, 2, ..., n. \tag{4.12}$$

Sebuah matriks yang memenuhi kondisi (4.12) disebut sebagai matriks yang dominan secara diagonal. Metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel akan konvergen jika koefisien matriks dominan secara diagonal. Dalam hal ini, perlu dicatat bahwa menyusun ulang persamaan akan membuat koefisien matriks dominan secara diagonal. Selanjutnya, dalam menganalisis eror metode iterasi, menurut May [3], untuk menjamin bahwa $\left\| \mathrm{x} - \mathrm{x}^{(k+1)} \right\| < \varepsilon$, iterasi dapat dihentikan jika

$$\frac{C}{1-C} \left\| \mathrm{x}^{(k+1)} - \mathrm{x}^{(k)} \right\| < \varepsilon, \tag{4.13}$$

dengan nilai rasio eror C adalah nilai maksimum dari beberapa nilai terakhir dari

$$\frac{\left\| \mathrm{x}^{(k+1)} - \mathrm{x}^{(k)} \right\|}{\left\| \mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}^{(k-1)} \right\|} \tag{4.14}$$

dan ε adalah toleransi yang diberikan.

5. Penerapan Dalam Kasus

Dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode iterasi, perhitungan secara manual sangat tidak efisien. Oleh karena itu, perlu dibuat program yang menggunakan *Mathematica* atau *Microsoft Excel*. Pada bagian ini, diberikan dua sistem persamaan linear yaitu sistem yang dominan secara diagonal dan yang tidak dominan secara diagonal yang diselesaikan dengan menggunakan metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel.

Kasus 5.1. Diberikan sistem persamaan linier diambil dari [1] yaitu

$$\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 1x_4 &= -2 \\ -1x_1 + 5x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 2x_2 - 1x_3 + 4x_4 &= 4 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Akan ditentukan penyelesaian sistem tersebut menggunakan metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel. Dapat dilihat bahwa koefisien-koefisien sistem tersebut memenuhi syarat cukup (4.12) sehingga dapat dipastikan penyelesaiannya konvergen. Diambil $x^{(0)} = 0$ sehingga diperoleh penyelesaian yang ditunjukkan dalam Tabel 1 dan Tabel 2 kolom ke-2, 3, 4, dan 5.

Tabel 1. Penyelesaian sistem (5.1) menggunakan metode Jacobi

k	x_1	x_2	x_3	x_4	C	Batas Eror
0	0	0	0	0	-	-
1	0.428571	-0.25	1.	1.	-	-
2	-0.0714286	-0.857143	0.685714	1.375	-	-
.	.	.	.	.	.	.
24	-0.175172	-0.533795	0.416554	1.37103	0,6	$4{,}5.10^{-6}$
25	-0.175173	-0.533794	0.416552	1.37104	3,33333	$-1{,}4.10^{-5}$
26	-0.175173	-0.533793	0.416551	1.37103	3,33333	$-1{,}4.10^{-5}$
27	-0.175172	-0.533793	0.416551	1.37103	1	-
28	-0.175172	-0.533793	0.416552	1.37103	1	-

Tabel 2. Penyelesaian sistem (5.1) menggunakan metode Gauss-Seidel

k	x_1	x_2	x_3	x_4	C	Batas Eror
0	0	0	0	0	-	-
1	0.428571	-0.357143	1.08571	1.45	-	-
2	-0.242857	-0.777679	0.371429	1.4817	-	-
.	.	.	.	.	.	.
10	-0.175197	-0.53377	0.416535	1.37102	0.467413	$9{,}57.10^{-5}$
11	-0.175159	-0.533788	0.416561	1.37103	0.348624	$2{,}03.10^{-5}$
12	-0.175172	-0.533796	0.416552	1.37104	0.348624	$6{,}96.10^{-6}$
13	-0.175174	-0.533793	0.416551	1.37103	0.769231	$3{,}33.10^{-5}$
14	-0.175172	-0.533793	0.416552	1.37103	0.769231	$6{,}67.10^{-6}$

Dengan metode Jacobi maupun metode Gauss-seidel, diperoleh penyelesaian yang sangat akurat yaitu $x_1 = -0.175172, x_2 = -0.533793, x_3 = 0.416552$, dan $x_4 = 1.37103$. Untuk memperoleh penyelesaian yang dimaksud, metode Jacobi memerlukan 28 iterasi sedangkan metode Gauss-Seidel hanya memerlukan 14 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode Gauss-seidel mempunyai laju konvergensi yang lebih cepat dari pada metode Jacobi. Kemudian dengan menerapkan persamaan (4.13) dan (4.14), diperoleh nilai rasio eror C dan estimasi batas eror seperti pada Tabel 1 dan Tabel 2 kolom ke-6 dan 7. Dengan metode Jacobi, rasio eror C yang terjadi adalah 1 sedangkan dengan metode Gauss-seidel, rasio erornya adalah 0.769231. Hal ini menunjukkan bahwa laju konvergensi metode Jacobi maupun metode Gauss-seidel adalah linear. Batas eror untuk metode Jacobi maupun metode Gauss-Seidel masing-masing adalah $-1, 4.10^{-5}$ dan $6, 67.10^{-6}$.

Kasus 5.2. Diberikan sistem persamaan linier diambil dari [2] yaitu

$$\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 20 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_3 + 5x_4 &= 10 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dengan menerapkan algoritma metode Jacobi dan Gauss-Seidel, kemudian diambil sebarang nilai $x^{(0)}$ dapat diketahui bahwa penyelesaian sistem (5.2) tidak konvergen. Hal ini dikarenakan, sistem (5.2) tidak memenuhi syarat cukup (4.12). Oleh karena itu, agar diperoleh penyelesaian yang konvergen, sistem (5.2) perlu diatur kembali agar memenuhi syarat (4.12) menjadi

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 20 \\ 2x_1 - 2x_3 + 5x_3 &= 10. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Sistem (5.3) memenuhi syarat cukup (4.12) sehingga dapat dipastikan penyelesaiannya konvergen. Dengan menerapkan algoritma metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel dan mengambil nilai pendekatan awal $x^0 = 0$ diperoleh penyelesaian yang sangat akurat yaitu $x_1 = 1.50602, x_2 = 3.13253$, dan $x_3 = 2.6506$. Untuk memperoleh penyelesaian yang dimaksud, metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel masing-masing memerlukan 18 dan 13 iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode Gauss-Seidel mempunyai laju konvergensi yang lebih cepat dari metode Jacobi. Kemudian untuk menentukan rasio eror dan estimasi batas eror, diterapkan persamaan (4.13) dan (4.14). Rasio eror yang terjadi pada metode Jacobi dan metode Gauss-seidel masing-masing adalah 0,6 dan 1. Hal ini menunjukkan bahwa kedua metode tersebut mempunyai laju konvergensi linear. Sedangkan batas eror yang terjadi dengan metode Jacobi maupun metode Gauss-seidel masing-masing adalah $1,5.10^{-5}$ dan 5.10^{-6}.

6. Kesimpulan

Berdasarkan penurunan algoritma dan penerapan dalam Kasus 5.1 dan 5.2, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

(1) Algoritma metode Jacobi adalah

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}].$$

Sedangkan algoritma metode Gauss-Seidel adalah

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}]$$

dimana $k = 0, 1, 2, ...,$ dengan nilai pendekatan awal biasanya diambil $x^{(0)} = 0$.

(2) Suatu kasus sistem persamaan linear akan mempunyai penyelesaian yang konvergen jika memenuhi syarat cukup

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \text{ atau } a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\,, i = 1, 2, ..., n.$$

(3) Metode Gauss-Seidel mempunyai laju konvergensi yang lebih cepat dari pada metode jacobi. Pada Kasus 5.1, batas eror yang terjadi untuk metode Jacobi dan metode Gauss-Seidel masing-masing adalah $-1,4.10^{-5}$ dan $6,67.10^{-6}$. sedangkan pada Kasus 5.2 adalah $1,5.10^{-5}$ dan 5.10^{-6}.

Daftar Pustaka

1. *Module for jacobi and gauss-seidel iteration*, http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/gaussseidelMod.html.
2. *Sistem persamaan linear*, http://ft.uns.ac.id/ts/kul_ol/numerik/numerik05_LPc.htm.
3. R. L. May, *Numerical linear algebra*, Royal Melbourne Institude of Technology Ltd., Melbourne, 1992.