MATHEMATIQUES

Chapitre 04

Ensembles de nombres

Capacités attendues

- Reconnaitre les relations entre les nombres et distinguer les différents ensembles de nombres.
- Déterminer l'écriture convenable d'une expression algébrique selon la situation étudiée.

Tronc commun scientifique

Rachid El Manssouri

Contenu du chapitre 04

I. Les ensembles $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ 1

II. Les opérations dans l'ensemble $\mathbb{R}$ 2

1. L'addition dans l'ensemble $\mathbb{R}$ 2
2. La multiplication dans l'ensemble $\mathbb{R}$ 2
3. Opérations sur les fractions dans l'ensemble $\mathbb{R}$ 2

III. Racines carrées 3

IV. Les puissances 3

1. Puissance d'un nombre réel 3
2. Écriture scientifique d'un nombre décimal 4

V. Les identités remarquables 4

I. Les ensembles $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Activité

Cocher les cases convenables :

Nombre	0	$\frac{14}{2}$	$-\sqrt{9}$	$21{,}33$	$\frac{5}{8}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{20}{14}$	$-\sqrt{5}$	π	Notation de l'ensemble
entier naturel										
entier relatif										
décimal										
rationnel										
réel										

Définition 1 :

- L'ensemble des nombres entiers naturels est noté par $\mathbb{N}$, et on a : $\mathbb{N} = \{\,0; 1; 2; 3; \ldots\,\}$.
- L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté par $\mathbb{Z}$, et on a : $\mathbb{Z} = \{\,\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\,\}$.
- L'ensemble des nombres décimaux est noté par $\mathbb{D}$, et on a : $\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n} \;/\; a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$.
- L'ensemble des nombres rationnels est noté par $\mathbb{Q}$, et on a : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \;/\; a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\right\}$.
- L'ensemble des nombres réels est noté par $\mathbb{R}$, c'est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels.

Remarques :

- Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif.
  On peut exprimer cette phrase en disant que « L'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ »,
  et on écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Application 1 :

1. Compléter en utilisant l'un des symboles $\in$ ou $\notin$:

$-12 \;\ldots\; \mathbb{N}$	$-4 \;\ldots\; \mathbb{Z}^+$	$-9 \;\ldots\; \mathbb{Z}^*$	$-4{,}15 \;\ldots\; \mathbb{D}^-$	$\sqrt{14} \;\ldots\; \mathbb{Z}$
$\frac{8}{10} \;\ldots\; \mathbb{D}$	$\frac{40}{3} \;\ldots\; \mathbb{D}$	$\frac{-1}{2} \;\ldots\; \mathbb{Q}^*$	$\frac{20}{3} \;\ldots\; \mathbb{Q}$	$\frac{\sqrt{44}}{8} \;\ldots\; \mathbb{Q}^*$
$\sqrt{15} \;\ldots\; \mathbb{D}$	$\sqrt{5} \;\ldots\; \mathbb{Q}$	$\sqrt{7} \;\ldots\; \mathbb{R}$	$-\sqrt{19} \;\ldots\; \mathbb{R}_+^*$	$-\sqrt{3} \;\ldots\; \mathbb{R}_-^*$

2. Compléter en utilisant l'un des symboles $\subset$ ou $\not\subset$:

$\mathbb{N} \;\ldots\; \mathbb{Z}^*$	$\mathbb{N}^* \;\ldots\; \mathbb{Z}^+$	$\mathbb{N} \;\ldots\; \mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Z}^- \;\ldots\; \mathbb{D}$	$\mathbb{Q} \;\ldots\; \mathbb{Q}^*$
$\mathbb{Q}^+ \;\ldots\; \mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+ \;\ldots\; \mathbb{Q}$	$\{0,1,3,5\} \;\ldots\; \mathbb{N}$	$\{0,1,3,5\} \;\ldots\; \mathbb{N}^*$	$\{1,2,5\} \;\ldots\; \mathbb{Q}^*$
$\left\{0,\frac{1}{3},2,3\right\} \;\ldots\; \mathbb{Z}$	$\left\{0,\frac{1}{4},2,3\right\} \;\ldots\; \mathbb{D}$	$\left\{0,\frac{1}{4},\frac{20}{3},3\right\} \;\ldots\; \mathbb{D}$	$\left\{0,\frac{1}{7},3,5\right\} \;\ldots\; \mathbb{Q}^+$	$\left\{-3,0,\frac{1}{2},2\right\} \;\ldots\; \mathbb{Q}_-^*$

II. Les opérations dans l'ensemble $\mathbb{R}$

1. L'addition dans l'ensemble $\mathbb{R}$

Propriété 1 :

Soient a, b et c trois nombres réels.

- $a + b = b + a$ (l'addition est **commutative** dans $\mathbb{R}$)
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ (l'addition est **associative** dans $\mathbb{R}$)
- $a + 0 = 0 + a = a$ (0 est **l'élément neutre** pour l'addition dans $\mathbb{R}$)
- $(-a) + a = a - a = 0$ ($-a$ est **l'opposé** de a)

2. La multiplication dans l'ensemble $\mathbb{R}$

Propriété 2 :

Soient a, b et c trois nombres réels.

- $a.b = b.a$ (la multiplication est **commutative** dans $\mathbb{R}$)
- $a.(b.c) = (a.b).c = a.b.c$ (la multiplication est **associative** dans $\mathbb{R}$)
- $a \times 1 = 1 \times a = a$ (1 est **l'élément neutre** pour la multiplication dans $\mathbb{R}$)
- Si $a \neq 0$, alors : $\frac{1}{a} \times a = a \times \frac{1}{a} = 1$ $\left(\frac{1}{a}\right.$ est **l'inverse** de $\left.a\right)$
- $a.(b + c) = a.b + a.c$ (la multiplication est **distributive** par rapport l'addition dans $\mathbb{R}$)
- $a.(b - c) = a.b - a.c$ (la multiplication est **distributive** par rapport la soustraction dans $\mathbb{R}$)

Application 2 :

Soient a, b et c trois nombres réels. Simplifier les expressions suivantes :

$A = (a - b + c) - (b - c - a) - [(c + b) - (a + b - c)]$.

$B = 2(a - b + c) - 3(a - b + c) - 4(-5a + b)$.

$C = (2a + b)(2b - a) - (2c - b)(2b + c) + (2a - c)(2c + a)$.

3. Opérations sur les fractions dans l'ensemble $\mathbb{R}$

Propriété 3 :

Soient a, b, c et d des nombres réels non nuls.

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Application 3 :

Calculer les nombres suivants :

$a = \frac{-4}{3} + \frac{7}{21}$; $b = \frac{20}{4} - \frac{17}{7}$; $c = \frac{14}{54} \times \frac{72}{-42}$; $d = \frac{3}{5} \div \left(2 - \frac{16}{3}\right)$; $e = \frac{17}{\frac{2}{3} + \frac{1}{7}}$; $f = \frac{\frac{2}{9} - \frac{7}{3}}{4}$

III. Racines carrées

Définition 2 :

Soit a un nombre réel positif.

La **racine carrée** de a notée $\sqrt{a}$ est le nombre réel positif dont le carré égal à a.

Remarques :

- Pour tout réel x, on a : $\begin{cases} \sqrt{x^2} = x & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{x^2} = -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.
- Soient a un nombre réel positif.
  On a : $x^2 = a$ si et seulement si $\left(x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}\right)$.

Exemples :

- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{(-11)^2} = \sqrt{11^2} = 11$.

Propriété 4 :

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls et n un nombre entier relatif. On a :

- $\sqrt{a^n} = \sqrt{a}^n$
- $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Remarque :

- En général : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$,
  à titre d'exemple : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

Application 4 :

Simplifier les expressions suivantes :

$$\mathrm{A} = \sqrt{5^3 \times 2^7 \times 1000}\ ; \quad \mathrm{B} = \sqrt{\frac{169}{64}}\ ; \quad \mathrm{C} = \sqrt{\frac{16}{25}} \times \sqrt{\frac{125}{32}}\ ; \quad \mathrm{D} = \sqrt{\frac{64}{49}} \times \sqrt{98}$$

$$\mathrm{E} = 3\sqrt{112} + 10\sqrt{175} - \sqrt{3} \times \sqrt{21}\ ; \quad \mathrm{F} = \sqrt{\frac{7}{5}} + 3\sqrt{\frac{28}{125}} - 5\sqrt{\frac{63}{3125}}$$

IV. Les puissances

1. Puissance d'un nombre réel

Définition 3 :

Soient a un nombre réel non nul et n un nombre entier relatif non nul.

On appelle **puissance** du nombre a d'exposant n le nombre noté a^n défini par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Remarques :

- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$
- L'écriture 0^0 n'a pas de sens.
- En général, il ne faut pas confondre les deux écritures $(-a)^n$ et $-a^n$.
- $10^n = 1\underbrace{00 \ldots 0}_{n \text{ zéros}}$ et $10^{-n} = \underbrace{0{,}00 \ldots 0}_{n \text{ zéros}}1$

Propriété 5 :

Soient a et b deux nombres réels non nuls, n et m deux nombres entiers relatifs, on a :

- $a^{n+m} = a^n.a^m$
- $a^{n.m} = (a^n)^m$
- $a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$
- $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$
- $a^n.b^n = (ab)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Application 5 :

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{(3^2 \times 2^{-1} \times 9^{-2})^3}{3^7 \times (2^{-6} \times 9^{-1})^2}\ ; \quad B = \frac{10^{-5} \times 25 \times 2}{5^4 \times (10^{-2})^3 \times 10^2}\ ; \quad C = \frac{10^8}{20^2 \times 4} \times \left(\frac{4^3 \times 5^{-3}}{2^4 \times 50}\right)^2$$

2. Écriture scientifique d'un nombre décimal

Définition 4 :

- Tout nombre décimal positif x peut s'écrire sous la forme $x = a \times 10^p$ où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et p un entier relatif.
- L'écriture $x = a \times 10^p$ est appelée l'**écriture** (ou notation) **scientifique** du nombre x.

Remarque :

Si le nombre décimal x est négatif, alors son écriture scientifique est $x = -a \times 10^p$ où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et p un entier relatif

Application 6 :

Déterminer les écritures scientifiques des nombres suivants :

- 37900000
- $0{,}000000095$
- 1989×10^{27}
- 512972×10^{51}
- 167252×10^{-1}
- $0{,}091095 \times 10^{-33}$

V. Les identités remarquables

Propriété 6 :

Soient a et b deux nombres réels, on a :

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$
- $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

Application 7 :

1. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$a = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{7}\right)^2\ ; \quad b = \left(5 - \sqrt{3}\right)^2\ ; \quad c = \left(2 + \sqrt{3}\right)^3\ ; \quad d = \left(5 - \sqrt{2}\right)^3$$

2. Factoriser les expressions suivantes : $a = x^2 - 18$; $b = x^3 - 27$ et $c = 8x^3 + 125$ où x est un nombre réel.