Mathématiques

Chapitre 03

La projection dans le plan

Capacités attendues

- Traduire vectoriellement le théorème de Thalès.

Tronc commun scientifique

Rachid El Manssouri

Contenu du chapitre 03

I. Projection sur une droite

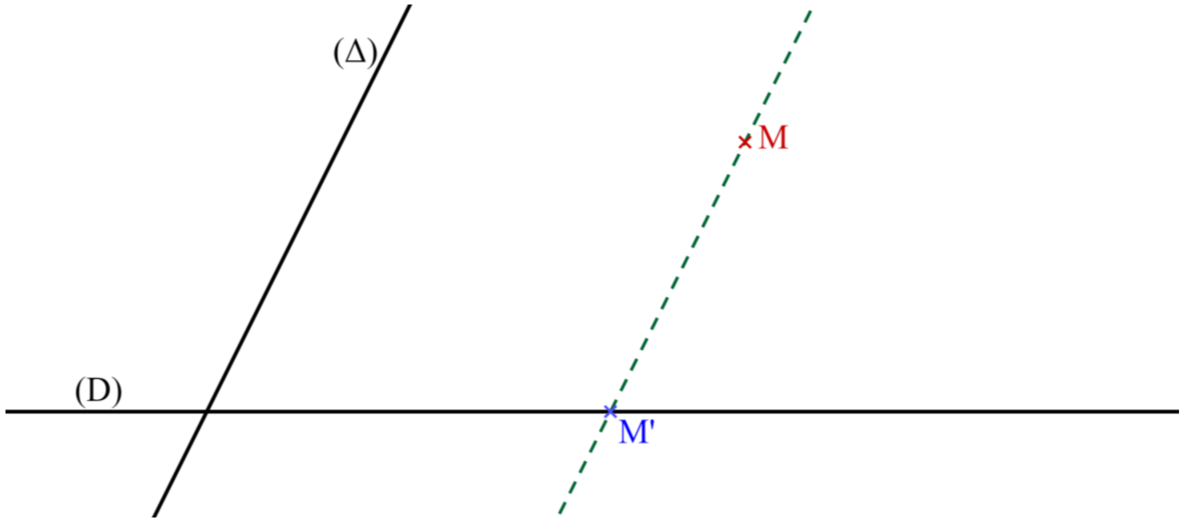
1. Projection sur une droite parallèlement à une autre droite

Définition 1 :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes.

- On appelle **projection** sur (D) parallèlement à (Δ), la relation p qui lie tout point M du plan au point M′ du même plan tel que :

  M′ est le point d'intersection de (D) et la parallèle à (Δ) passant par M.
- Le point M′ est appelé le **projeté** de M sur (D) parallèlement à (Δ) et on écrit : $p(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$.
- p est appelé la projection sur (D) parallèlement à (Δ), et le point M′ est appelé l'image de M par p.



Remarques :

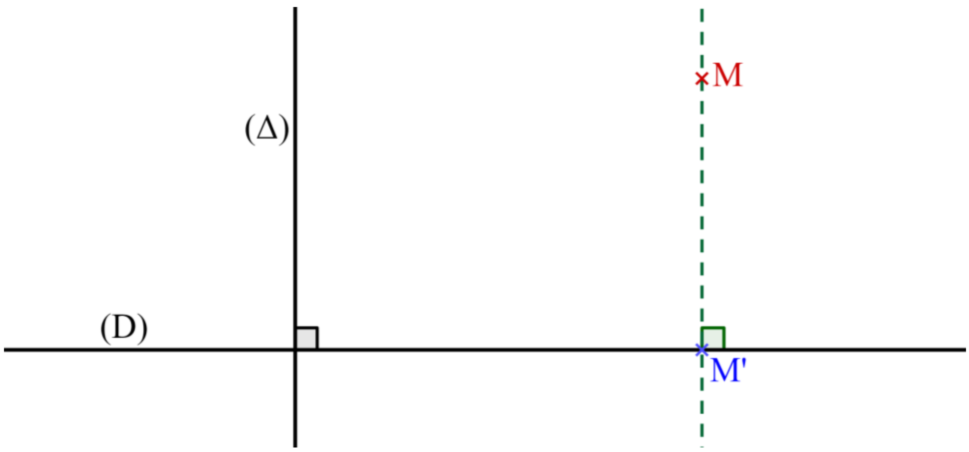
- Si $\mathrm{M} \in (D)$, alors : $p(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$, on dit dans ce cas que M est un **point fixe** ou **invariant**.
- Si (Δ') est une droite parallèle à (Δ) et A le point d'intersection de (D) et (Δ'), alors la projection de tout point M de (Δ') sur (D) parallèlement à (Δ) est le point A.

2. Projection orthogonale sur une droite

Définition 2 :

Soient (D) et (Δ) deux droites perpendiculaires.

- La projection sur (D) parallèlement à (Δ) est appelée la **projection orthogonale** sur (D).
- Le point M′ est appelé le **projeté orthogonal** de M sur (D).



II. Conservation du coefficient de colinéarité

Dans tout ce paragraphe : (D) et (Δ) sont deux droites sécantes et p est la projection sur (D) parallèlement à (Δ).

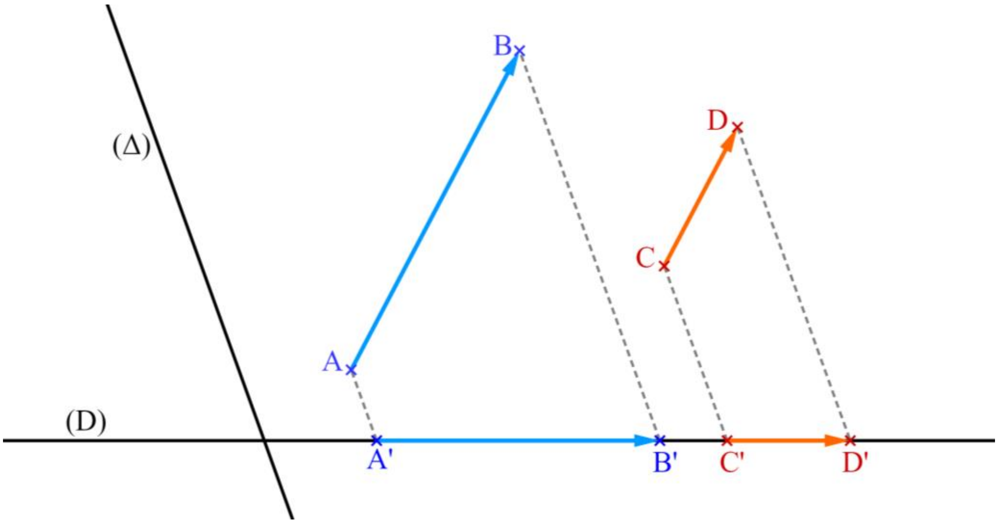
1. Projection et coefficient de colinéarité

Propriété 1 :

Soient A, B, C, D quatre points, et A', B', C', D' leurs images par la projection p.

Si : $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$, alors : $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{C'D'}$.

On dit que **la projection conserve le coefficient de colinéarité** de deux vecteurs.



Application 1 :

Soient ABCD un parallélogramme de centre O, et K le point vérifiant : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{OK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.
2. Soient M et N les projetés respectifs de K et O sur (BC) parallélement à (AB).

   Montrer que : $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{NB}$.

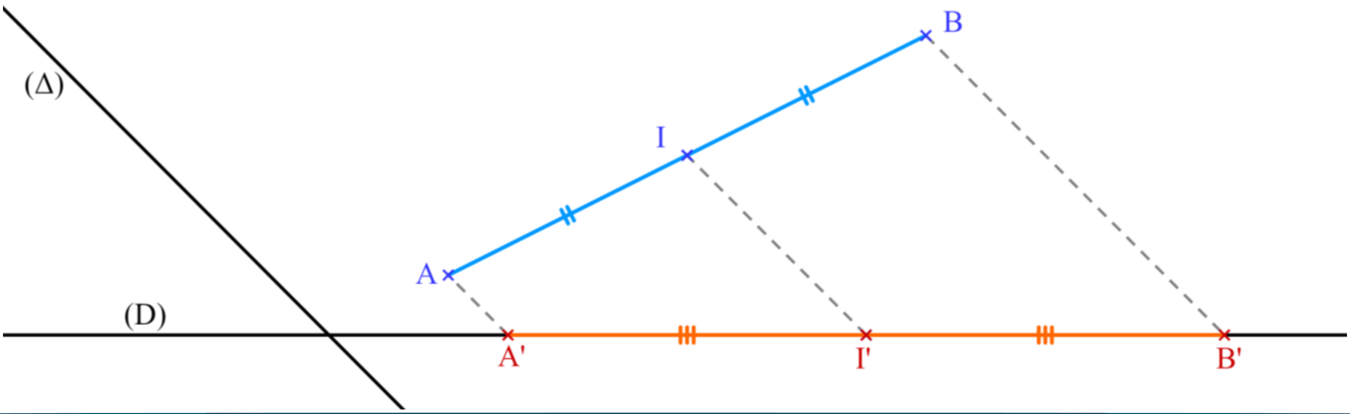
2. Projection et milieu d'un segment

Propriété 2 :

Soient A, B, I trois points, et A', B', I' leurs images par la projection p.

Si : I est le milieu du segment [AB], alors : I' est le milieu du segment $[A'B']$.

On dit que **la projection conserve le milieu** d'un segment.



Application 2 :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

A' et C' sont respectivement les projetés orthogonaux de A et C sur (BD).

B' et D' sont respectivement les projetés orthogonaux de B et D sur (AC).

Montrer que les segments $[A'C']$ et $[B'D']$ ont le même milieu.

3. Projection et somme de deux vecteurs

Propriété 3 :

Soient A, B, C, D, E, F six points, et A', B', C', D', E', F' leurs images par la projection p.

Si : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$, alors : $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{E'F'}$.

Application 3 :

ABC est un triangle.

Soient E, F et D les points définis par : $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

La parallèle à (BC) qui passe par E coupe (AD) en H.

La parallèle à (BC) qui passe par F coupe (AD) en K.

1. Montrer que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AK}$.
2. Soit R le point d'intersection des droites (BC) et (AD).

   Montrer que : $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$.

III. Théorème de Thalès

1. Théorème direct de Thalès

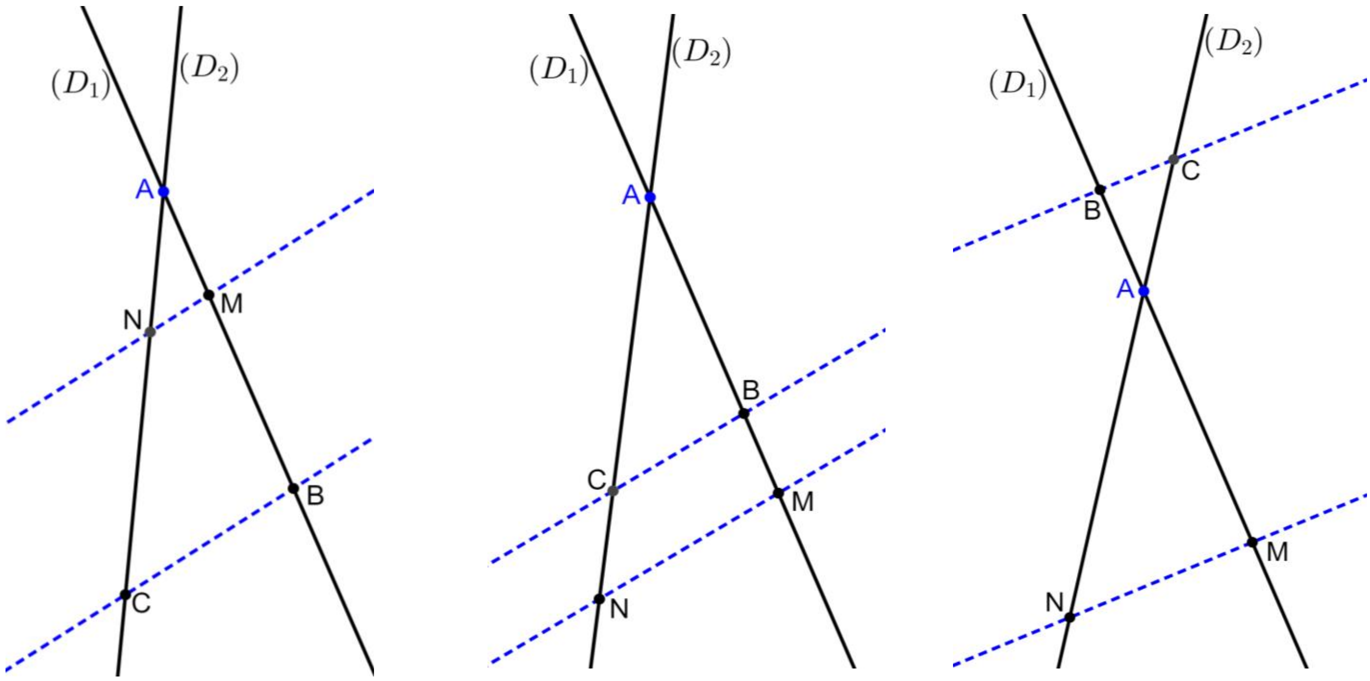
Propriété 4 :

Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A .

Soient B et M deux points de la droite (D_1), distincts de A .

Soient C et N deux points de la droite (D_2), distincts de A .

Si $(MN)//(BC)$, alors : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.



Propriété 5 :

Si : $\begin{cases} \bullet \text{ A, B, M sont des points alignés} \\ \bullet \text{ A, C, N sont des points alignés} \\ \bullet \text{ (MN)//(BC)} \end{cases}$, alors : $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB} \\ \text{et } \overrightarrow{AN} = k.\overrightarrow{AC} \\ \text{et } \overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BC} \end{cases}$

où k est le même nombre réel dans les trois égalités vectorielles.

Application 4 :

Soit ABCD un parallélogramme.

Soit M un point de la demi-droite [DB) en dehors du parallélogramme.

La droite (AM) coupe les droites (BC) et (CD) respectivement en E et F.

Montrer que : $MA^2 = ME \times MF$.

2. Réciproque du théorème de Thalès

Propriété 6 :

Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de la droite (D_1), distincts de A.

Soient C et N deux points de la droite (D_2), distincts de A.

Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre,

Alors : (MN)//(BC).

Propriété 7 :

Soient A, B, C trois points non alignés, M, N deux points et k un nombre réel.

Si : $\begin{cases} \bullet\ \overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB} \\ \bullet\ \overrightarrow{AN} = k.\overrightarrow{AC} \end{cases}$, alors : (MN)//(BC)

Application 5 :

Soit ABC un triangle.

D est un point de la droite (BC) n'appartenant pas à [BC].

Soit O le point défini par : $\overrightarrow{AO} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

Soient E le projeté de D sur (AC) parallélement à (OC)

et F le projeté de D sur (AB) parallélement à (OB).

1. Montrer que : $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AF}$.
2. Montrer que : (EF)//(BC) .