Exercice 1

Soit x un réel strictement positif.

Comparer les réels A et B dans les cas suivants :

1. $A=\dfrac{2}{3}$ et $B=\dfrac{x}{2x+1}$
2. $A=\dfrac{6}{x}$ et $B=\dfrac{5}{x+2}$
3. $A=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $B=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Exercice 2

Soient x et y deux réels strictement positifs.

1. Montrer que : $x+y\geq 2\sqrt{xy}$.
2. En déduire que :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \text{ et que } (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4$$

Exercice 3

Soit x un nombre réel tel que : $-2\leq x\leq -1$.

On considère : $A=\dfrac{1-3x}{2x+1}$.

1. a. Encadrer : $1-3x$ et $2x+1$.

1. b. En déduire que : $-7\leq A\leq -\dfrac{4}{3}$.

2. a. Vérifier que : $A=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2(2x+1)}$.

2. b. En déduire que : $-4\leq A\leq -\dfrac{7}{3}$.

3. Quel est l'encadrement le plus précis de A ?

Exercice 4

Soient x et y deux nombres réels tels que :

$$-1<x<2 \text{ et } -4<y<-2$$

1. Encadrer chacun des nombres suivants :

$$x+2y \text{ et } xy \text{ et } \frac{x}{y+1}$$

On considère : $A=x^2-x-2$.

2. Encadrer x^2 et $x+2$, puis en déduire un encadrement de A.
3. Vérifier que $A=(x+1)(x-2)$, puis encadrer A.
4. Vérifier que $A=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$, puis encadrer A.
5. Quel est l'encadrement le plus précis de A ?

Exercice 5

Déterminer l'intervalle ou l'union d'intervalles auxquels appartient le nombre réel x dans chacun des cas suivants :

a. $x\leq -2$ ou $x>0$ b. $x\geq -2$ et $x<0$

c. $|x+1|\leq 1$ d. $|x-2|<3$

e. $|x+3|\geq 5$ f. $2\leq |3x-5|\leq 5$

Exercice 6

Soient a et b deux nombres réels tels que :

$$a\in[-2{,}5] \text{ et } b\in[-3,-1]$$

Écrire le nombre suivant sans valeur absolue :

$$A=2|2a+7|-|3b|+2|b+8|-|2b-a|$$

Exercice 7

Soient x et y deux réels tels que :

$$x\geq\frac{1}{2} \text{ et } y\leq 1 \text{ et } x-y=3$$

1. Montrer que : $\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}=7$.
2. Montrer que : $\dfrac{1}{2}\leq x\leq 4$ et $-\dfrac{5}{2}\leq y\leq 1$
3. Déterminer la valeur du nombre H tel que :

$$H=|x+y-5|+|x+y+4|$$

Exercice 8

Soient a et b deux réels tels que :

$$a\geq -2 \text{ et } b\leq -1 \text{ et } a-b=6$$

1. Déterminer la valeur du nombre A tel que :

$$E=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(b+1)^2}$$

2. Montrer que : $a\leq 5$ et $b\geq -8$
3. Calculer la valeur du nombre F tel que :

$$F=|a+b-4|+|a+b+10|$$

Exercice 9

Soient a et b deux nombres réels tels que :

$$|a+2|\leq 3 \text{ et } -1\leq b\leq 4$$

1. Etablir que $-5\leq a\leq 1$.
2. Montrer que $|a+b-1|\leq 7$

On pose $E=ab+6b-5a$.

3. Vérifier que $E=(a+6)(b-5)+30$.
4. En déduire un encadrement de E et déterminer l'amplitude de cet encadrement.

Exercice 10

Soient a et b deux réels tels que :

$$|2a-b|<3 \text{ et } 2<b<5.$$

1. Montrer que : $-\dfrac{1}{2}<a<4$
2. Encadrer les nombres suivants :

$$x=2b-a\,;\quad y=a^2+b^2\,;\quad z=ab$$

3. a. Développer le produit $(2a-b)(2b-a)$.

3. b. Montrer que : $\left|5ab-2\left(a^2+b^2\right)\right|<\dfrac{63}{2}$.

Exercice 11

On pose pour tout réel x de l'intervalle $[1,+\infty[$:

$$A=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

1. Montrer que : $A-1=\dfrac{1}{x(A+1)}$
2. Montrer que : $2<A+1<3$ puis en déduire que : $1+\dfrac{1}{3x}<A<1+\dfrac{1}{2x}$
3. En déduire que $\dfrac{11}{10}$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{1{,}2}$ à $\dfrac{1}{30}$ près.

Exercice 12

Soit x un réel strictement positif.

On considère : $A=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que : $A-1=\dfrac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}+1+x^2}$.
2. Montrer que : $\sqrt{1+x^2}+1+x^2\geq 2$.
3. Déduire que : $|A-1|\leq\dfrac{1}{2}x^2$.
4. Déterminer une valeur approchée du nombre $\dfrac{1}{\sqrt{1{,}0004}}$ à 2×10^{-4} prés.

Exercice 13

Soit x un réel non nul.

On considère : $B=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

1. Montrer que : $B-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$.
2. Montrer que : $\sqrt{1+x^2}+1\geq 2$.
3. Déduire que : $|B-1|\leq\dfrac{1}{2}|x|$.
4. Déterminer une valeur approchée du nombre $\dfrac{\sqrt{1{,}0001}}{0{,}01}$ à 5×10^{-3} prés.

Exercice 14

Soient x et y deux nombre réels tels que :

$$0<x<1 \text{ et } y=\frac{1+\sqrt{x}}{2}$$

1. Compare x et y.
2. Montrer que : $\dfrac{1}{2}<y<1$

3. a. Montrer que : $y-1=\dfrac{x-1}{2(1+\sqrt{x})}$

3. b. En déduire que : $|y-1|<\dfrac{1}{2}|x-1|$

4. En déduire une valeur approchée du nombre $\dfrac{1+\sqrt{0{,}6}}{2}$ à 2×10^{-1} près.

Exercice 15

Soit x un réel strictement positif.

1. Montrer que : $1<\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$.
2. En déduire un encadrement de $\sqrt{1{,}004}$

Exercice 16

1. Montrer que pour tout x de $[0,1]$,ona :

$$2+\frac{x}{6}\leq\sqrt{4+x}\leq 2+\frac{x}{4}$$

2. En déduire un encadrement de $\sqrt{4{,}36}$ d'amplitude 3×10^{-2}.

Exercice 17

Soient x et y deux réels strictement positifs.

1. Comparer : $x+y$ et $2\sqrt{xy}$.
2. En déduire que :

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\geq 8$$

3. Soient a et b deux réels strictement positifs.

Montrer que :

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geq\frac{(ab+1)^2}{ab}$$