

MATHEMATIQUES

CHAPITRE 02

Calcul vectoriel dans le plan

Capacités attendues

- Construire un vecteur de la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$.
- Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine en utilisant l'outil vectoriel et réciproquement.
- Résoudre des problèmes géométriques en utilisant l'outil vectoriel.

Tronc commun scientifique

Rachid El Manssourí

Contenu du chapitre 02

I. Vecteurs du plan	1
1. Éléments caractéristiques d'un vecteur.....	1
2. Égalité de deux vecteurs.....	1
3. Somme de deux vecteurs.....	2
3.1. Règle du parallélogramme	2
3.2. Relation de Chasles	2
II. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel	2
III. Colinéarité de deux vecteurs	3
1. Colinéarité de deux vecteurs	3
2. Milieu d'un segment	3

I. Vecteurs du plan

1. Éléments caractéristiques d'un vecteur

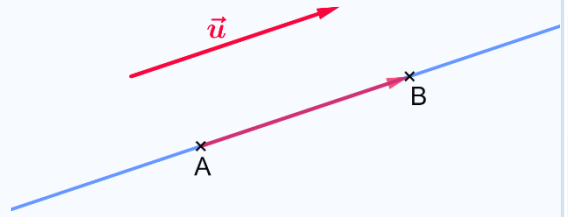
Définition 1 :

Soient A et B deux points distincts du plan.

➤ Si on note le vecteur \overrightarrow{AB} par \vec{u} , alors :

- La **direction** de \vec{u} est : la droite (AB).
- Le **sens** de \vec{u} est : du point A vers le point B.
- La **norme** de \vec{u} est : la distance AB, et on écrit : $\|\vec{u}\| = AB$.

➤ Le vecteur \overrightarrow{AA} est appelé le **vecteur nul** qu'on note $\vec{0}$, et on écrit : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.



Remarque :

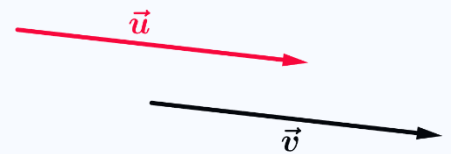
Le vecteur nul n'a pas de direction, pas de sens et sa norme est égale à 0.

2. Égalité de deux vecteurs

Définition 2 :

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont **égaux** s'ils ont la même direction, la même norme et le même sens.

On écrit : $\vec{u} = \vec{v}$.

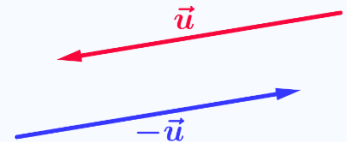


Remarque :

Il existe une infinité de vecteurs égaux à un vecteur donné \vec{u} .

Définition 3 :

On dit que deux vecteurs non nuls sont **opposés** s'ils ont la même direction, la même norme, mais sont de sens opposés.



Remarque :

L'opposé du vecteur \overrightarrow{AB} est le vecteur \overrightarrow{BA} , et on a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Propriété 1 :

Pour tout vecteur \vec{u} et tout point A du plan, il existe un point unique B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Conséquence :

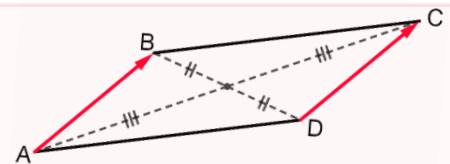
Pour tous points A, M et N du plan, on a :

- $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ si et seulement si $A = M$.
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ si et seulement si $M=N$ (les points M et N sont confondus).

Propriété 2 :

Soient A, B, C et D quatre points du plan. On a :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si ABCD est un parallélogramme.



Application 1 :

Soient ABCD et ABEF deux parallélogrammes.

Montrer que DCEF est un parallélogramme.

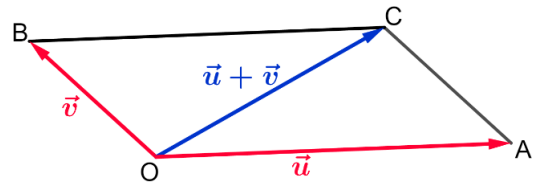
3. Somme de deux vecteurs

3.1. Règle du parallélogramme

Soient O, A et B trois points non alignés du plan.

La somme des deux vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} est le vecteur \overrightarrow{OC} tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme.

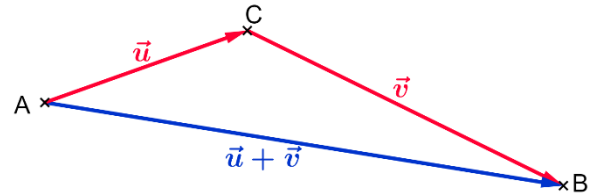
On écrit : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.



3.2. Relation de Chasles

Soient A et B deux points du plan.

Pour tout point C du plan, on a : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.



Remarque :

Construire $\vec{u} - \vec{v}$ revient à construire $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Application 2 :

Soit ABCD un parallélogramme.

Exprimer chacun des vecteurs \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{BD} en fonction des deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .

Application 3 :

Soit ABC un triangle. On considère le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Montrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{ME}$.

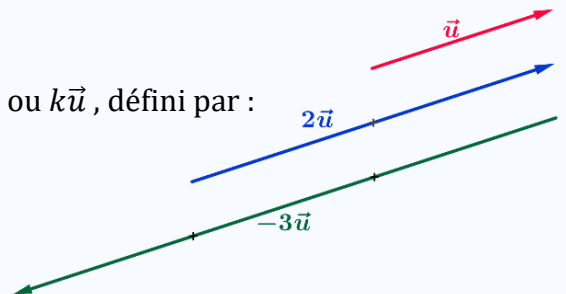
II. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition 4 :

Soient \vec{u} un vecteur non nul, et k un réel non nul.

Le produit du vecteur \vec{u} par le réel k est le vecteur noté $k \cdot \vec{u}$ ou $k\vec{u}$, défini par :

- Si $k > 0$, alors $k \cdot \vec{u}$ et \vec{u} ont la même direction, le même sens et $\|k \cdot \vec{u}\| = k \cdot \|\vec{u}\|$.
- Si $k < 0$, alors $k \cdot \vec{u}$ et \vec{u} ont la même direction, deux sens opposés et $\|k \cdot \vec{u}\| = -k \cdot \|\vec{u}\|$.



Application 4 :

Soit ABC un triangle. Construire les points : P, Q, R, S et T tels que :

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} ; \quad \overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{BC} ; \quad \overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} ; \quad \overrightarrow{CS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} ; \quad \overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$$

Propriété 3 :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs, α et β deux réels. On a :

- $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$
- $\alpha \cdot (\beta \vec{u}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{u}$
- $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $(\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Application 5 :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs.

Écrire le plus simplement possible le vecteur : $\vec{w} = \frac{3}{7} \left(7\vec{u} - \frac{5}{6}\vec{v} \right) - 9 \left(\vec{u} - \frac{1}{14}\vec{v} \right)$.

III. Colinéarité de deux vecteurs

1. Colinéarité de deux vecteurs

Définition 5 :

On dit que deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.

Autrement dit : deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires si $(AB) // (CD)$.

Propriété 4 :

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que : $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.

Remarque :

Le vecteur nul est colinéaire avec tout vecteur \vec{u} du plan, car : $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$.

Propriété 5 :

Soient A, B, C et D quatre points distincts et k un réel. On a :

- $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $(AB) // (CD)$.
- $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ si et seulement si les points A, B et C sont alignés.

Application 6 :

Soient ABCD un parallélogramme, E et F les points définis par : $\overrightarrow{DE} = \frac{5}{2} \overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{5}{3} \overrightarrow{DC}$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$.
2. Exprimer les vecteurs \overrightarrow{BE} et \overrightarrow{BF} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} .
3. Montrer que $2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BF}$.
4. En déduire que les points B, E et F sont alignés.

2. Milieu d'un segment

Propriété 6 :

Pour qu'un point I soit le milieu du segment [AB], il faut et il suffit que l'une des relations suivantes soit réalisée :

$$\begin{array}{lll} \text{➤ } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} & \text{➤ } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} & \text{➤ } \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \end{array}$$

Propriété 7 :

Si I est le milieu du segment [AB], alors pour tout point M du plan on a :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

Application 7 :

Soient ABCD un parallélogramme et I et J deux points tels que :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{BC}$$

1. Construire une figure.
2. Montrer que : $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DJ} = -\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$.
3. Déduire que les points D, I et J sont alignés.

Soit E le milieu du segment [CJ] et F un point tel que : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AF}$.

4. Montrer que D est le milieu de [EF].
5. Montrer que : $(EF) // (AC)$.

EXERCICE 1

Soit ABCD un quadrilatère.

1. Construire les points E et F tels que :
 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que : $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

EXERCICE 2

Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$-2\vec{u} + 3(\vec{u} - \vec{v}) ; \quad 2\vec{u} - \frac{4}{5}(\vec{u} - 2\vec{v}) - \frac{2}{5}\vec{v}$$

$$\frac{1}{2}(\vec{u} + 2\vec{v}) - \frac{1}{4}(\vec{u} - 2\vec{v})$$

EXERCICE 3

ABC est un triangle.

Construire les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} définis par :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}$$

$$\vec{w} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$$

EXERCICE 4

Soit ABCD un parallélogramme, E et F deux points tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$$

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que : [EF] et [BD] ont le même milieu.

EXERCICE 5

Soit ABC un triangle, E et F deux points tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

1. Montrer que :
 $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
2. Construire une figure convenable.
- 3 Montrer que B est le milieu du segment [EF].

EXERCICE 6

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points M, N et P tels que :
 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que :
 $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$.
- 3 Que peut-on déduire ?

EXERCICE 7

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points M et N tels que :
 $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.
2. Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

EXERCICE 8

Soit ABCD un parallélogramme.

1. Construire les points E et F tels que :
 $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. Montrer que :
 $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
3. En déduire que les points C, E et F sont alignés.

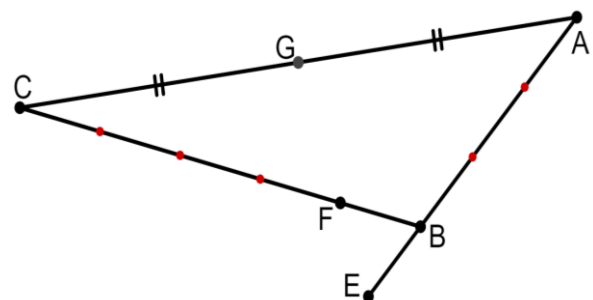
EXERCICE 9

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points M, N et P tels que :
 $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. Exprimer les vecteurs \overrightarrow{AN} , \overrightarrow{BP} et \overrightarrow{CM} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
3. En déduire que les droites (AN), (BP) et (CM) sont parallèles.

EXERCICE 10

On considère le triangle ABC. E est un point de la droite (AB), F un point du segment [BC] et G un point du segment [AC].



1. À partir de la figure, déterminer les valeurs des réels x , y et z tels que :
 $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = y\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG} = z\overrightarrow{AC}$.
2. Exprimer \overrightarrow{EF} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
3. Exprimer \overrightarrow{EG} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
4. Montrer que les points E, F et G sont alignés.