Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Répondre par Vrai ou Faux.

- Zéro est un nombre pair.
- Le prédécesseur d'un impair est pair.
- Le prédécesseur de $n+1$ est $n-1$.
- Le nombre $n+7$ se termine par 7.
- Le nombre $21n+7$ est un multiple de 7.
- $n+1$ est un diviseur de n^2+n .
- La somme de deux nombres successifs est un nombre impair.
- Le produit de deux nombres successifs est un nombre impair.
- Le produit de deux nombres pairs est divisible par 4.
- Un nombre qui se termine par 6 est divisible par 3.
- Si n est un nombre premier alors la somme de ses diviseurs est $n+1$.

Exercice 2

Montrer que :

1. La somme d'un nombre pair et un nombre impair est un nombre impair.
2. Le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.
3. Le produit d'un multiple de 4 par un multiple de 3 est un multiple de 12.
4. La somme des trois nombres successifs est un nombre multiple de 3.
5. Le produit de deux nombres successifs est un nombre pair.

Exercice 3

Soit n un entier naturel.

Étudier la parité des nombres suivants :

$A = 759 \times 7685$; $B = 5^{38} + 8^{71}$

$C = 8n^3 + 4n$; $D = 2^{3n+1} + 3$

$E = (4n+5)^6$; $F = (2n-1)^6 + 2n + 1$

Exercice 4

Soit n un entier naturel.

Étudier la parité des nombres suivants :

$A = n(n+1)$; $B = (n+4)(n+3)$

$C = n^2 + 3n$; $D = n^2 + 5n + 6$

$E = n^2 + 9n + 5$; $F = 3n^2 + n$

$G = 3n^2 + 15n + 7$; $H = n^5 + n^4$

Exercice 5

1. n est un entier naturel impair.

1\. a. Montrer que $n^2 - 1$ est divisible par 8.

1\. b. En déduire que 16 divise $n^4 - 1$.

2\. n est un entier naturel tel que $n \geq 4$ et $n-4$ est un multiple de 5.
Montrer que $n^2 - 1$ est un multiple de 5.

Exercice 6

Déterminer les nombres premiers parmi les nombres suivants :

97 ; 117 ; 111 ; 181 ; 349 ; 543 ; 741 ; 1033.

Exercice 7

Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $n^4 + 64 = (n^2+8)^2 - (4n)^2$.
2. En déduire que $n^4 + 64$ n'est pas premier.

Exercice 8

On pose : $a = 2 \times 3^2 \times 7^3$.

1. Déterminer le nombre de diviseur de a.
2. Déterminer tous les diviseurs de a.
3. Déterminer le plus petit entier k tel que ka soit un carré parfait.

Exercice 9

On pose $a = 52\,272$ et $b = 607\,500$.

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a et b.
2. En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres suivants
   $a^3 \times b^2$ et $a^2 \times b^3$.
3. Déterminer $pgcd(a;b)$ et $ppcm(a;b)$.
4. Écrire le nombre $\dfrac{a}{b}$ sous forme de fraction irréductible.
5. Simplifier $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.
6. Montrer que $\sqrt{a.b}$ est un entier naturel.

Exercice 10

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$a = 7^{n+2} - 7^n \quad \text{et} \quad b = 3.7^{n+1} + 5.7^n$$

1. Montrer que a est un multiple de 3 et que b est un multiple de 13.
2. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b en fonction de n.
3. En déduire $pgcd(a;b)$ et $ppcm(a;b)$ en fonction de n.

Exercice 11

On pose $a = 41 \times 2^n + 2^{n+2}$ et $b = 60$ tel que $n \in \mathbb{N}$.

1. Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre b.
2. Quel est le plus petit entier naturel m pour que mb soit un carré parfait.
3. Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre a en fonction de n.
4. Déterminer $pgcd(a;b)$ et $ppcm(a;b)$ en fonction de n.

Exercice 12

1. a. Déterminer les diviseurs de 22.

1. b. En déduire tous les entiers naturels x et y vérifiant $(x+2)(y+1) = 22$.

2. Déterminer tous les entiers naturels x et y vérifiant $xy + x + y = 30$.

Exercice 13

1. Soient x et y deux entiers naturels tels que $x > y$.
   Montrer que les nombres $x + y$ et $x - y$ sont de même parité.
2. Décomposer le nombre 28 en produit de facteurs premiers, puis déterminer tous ses diviseurs pairs.
3. Soient x et y deux entiers naturels tels que
   $$x^2 - y^2 = 28 \ (1)$$
   Déterminer tous les entiers naturels x et y qui vérifient la relation (1).

Exercice 14

1. Vérifier que 401 est un nombre premier.
2. Déterminer les entiers naturels x et y vérifiant
   $$x^2 - y^2 = 401.$$
3. À l'aide de calculatrice, vérifier que :
   $$43\,702\,659 = 3^4 \times 7^3 \times 11^2 \times 13$$
   $$275\,517 = 3^2 \times 11^3 \times 23$$
4. En déduire une écriture simplifiée des nombres suivants :
   $$\sqrt{43\,702\,659} \text{ et } \sqrt{275\,517} \text{ et } \frac{275\,517}{43\,702\,659}$$

Exercice 15

Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit.

La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1. Y-a-t-il des moments (autres que le départ) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?
2. Calculer alors le nombre de tours effectués par chaque voiture.

Exercice 16

1. 126 et 210 sont-ils premiers entre eux ?
2. Calculer le $pgcd$ des nombres 126 et 210.
3. Un fleuriste dispose de 126 iris et 210 roses.

Il veut, en utilisant toutes ses fleurs, réaliser des bouquets contenants tous le même nombre d'iris et le même nombre de roses.

3. a. Quel nombre maximal de bouquets peut-il réaliser ?

3. b. Donner la composition de chacun d'eux.

Exercice 17

Un confiseur a un lot de 3150 bonbons et 1350 sucettes.

Il veut réaliser des paquets contenants tous le même nombre de bonbons et le même nombre de sucettes, en utilisant tous les bonbons et toutes les sucettes.

1. Combien de tels paquets pourra-t-il réaliser au maximum ?
2. Chaque bonbon sera vendu 0,5 dirham et chaque sucette 1,5 dirham.
   Quel sera le prix d'un paquet ?

Exercice 18

Le long de la route à l'école, il y a quatre arbres : 430m sépare le premier et le second ; 645m sépare le second et le troisième et 516m est la distance entre le troisième et le quatrième.

Les responsables de l'environnement décident de planter d'autres arbres le long de la route de telle sorte que les arbres « voisins » soient séparés par la même distance.

1. Quelle est la distance qu'il faut laisser entre deux arbres consécutifs ?
2. Quel est le nombre de nouveaux arbres que l'on doit planter ?