<u>CHAPITRE I:</u>
Réseau de pétri

S.Fellah

Introduction

Définition

Réseaux de Pétri (RDP) : outil qui permet :

- la **modélisation** des **systèmes** de différents domaines d'application (Informatique, Production, ...);
- **l'étude** de systèmes **dynamiques** et **discrets**.
- d'obtenir une **représentation mathématique** modélisant le système.

- **L'analyse** de cette représentation **peut révéler** des **caractéristiques** importantes du système concernant sa **structure** et son **comportement** dynamique.

- RDP est défini par Carl Adam Pétri dans les années 60.
- Carl Adam Pétri est un mathématicien allemand et un informaticien

Définitions

Les concepts du modèle

Condition *:* un prédicat logique d'un **état** du système. Elle est soit **vraie**, soit **fausse**.

Evénement *:* **action** qui se **déroule** dans le **système**.

Déclenchement, pré-condition, post-condition*:*

Les **conditions** nécessaires au **déclenchement** d' un **événement** sont les **pré-conditions** de l'événement.

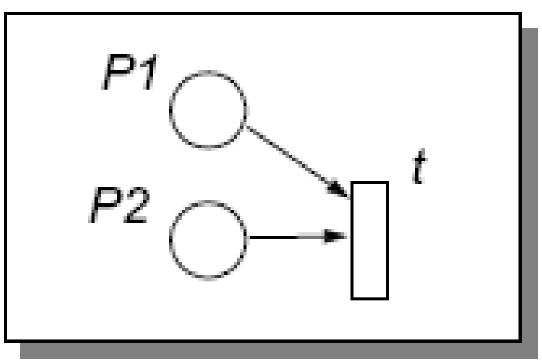
- Lorsqu'un **événement se produit**, d'autres conditions, appelées **post-conditions** de l'événement **deviennent vraies**.

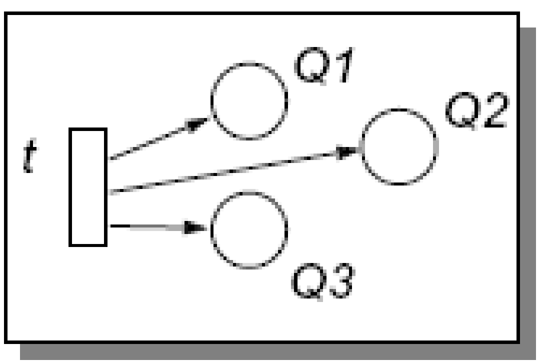
Définitions

Les concepts du modèle

- **Condition**: les places ○
- **Evénement**: les transitions —
- **Les arcs** ↓
- **Satisfaction d'une condition** : Les jetons •
- ***Condition vraie :*** Les marquages ⊙

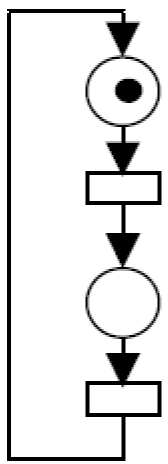
❖ Un Réseau de Petri (RdP) est une structure **graphique** comportant un ensemble de **places** et de **transitions**, reliées par des **arcs orientés**, éventuellement **porteurs** de **poids.**



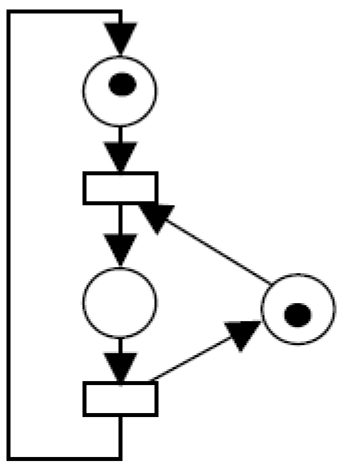


Définitions

Exemple



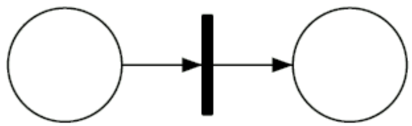
Un processus à deux états(Arrêt, Marche)



Le **passage** d'un état à l'autre **mobilise** une **ressource**, symbolisée par le jeton.

Définitions

Remarque



- Chaque place va contenir un nombre entier de **jetons** (ou **marques**)

- Le **marquage du réseau** est constitué de **toutes les marques** présentées dans le réseau à un **instant donné**.

- **L'état initial** du réseau est caractérisé par le **marquage initial**.

- Un **état** de l'automate est un **marquage**, c'est à dire un ensemble de places marquées.

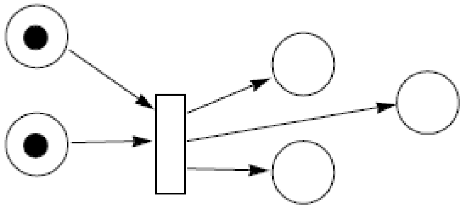
Définitions

Franchissement d'une transition

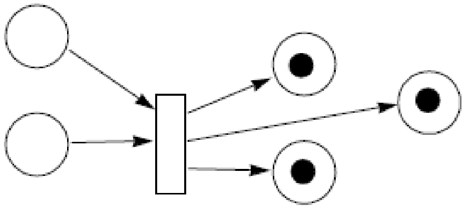
- Consiste à **retirer** un nombre de **jetons** de **chacune** des **places d'entrée** et à **rajouter** un nombre de jetons à **chacune** des **places de sortie** de la même transition.

Transition est **franchissable** ou **validée**

Si chacune des **places** en en **entrée** de cette transition contient **suffisamment** de **jetons** (>= au poids de l'arc).



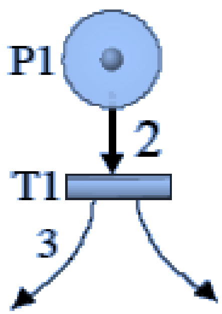
Situation avant...

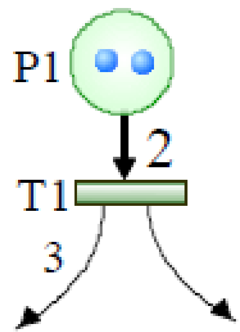


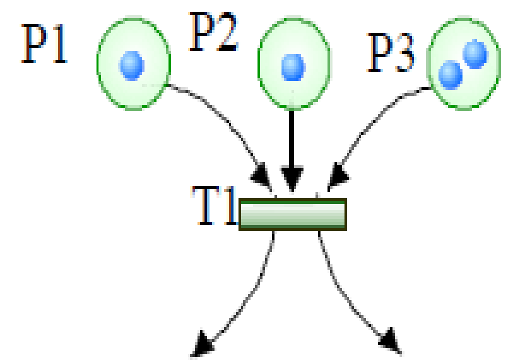
Situation après...

Franchissement d'une transition

Exemple



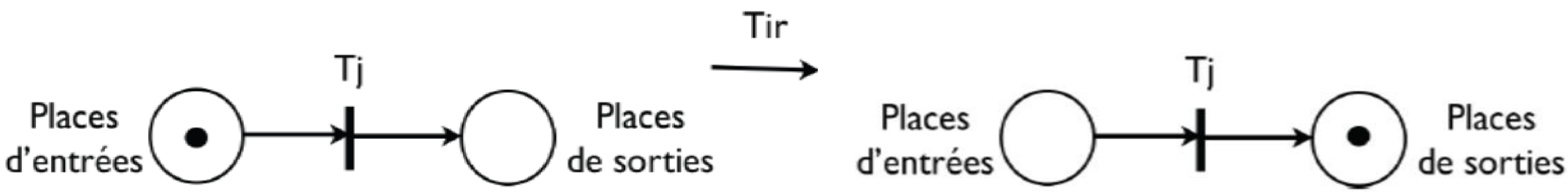


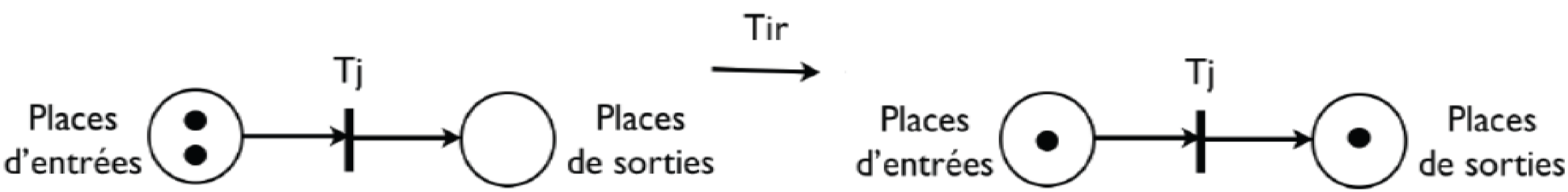


Franchissement d'une transition

Exemple

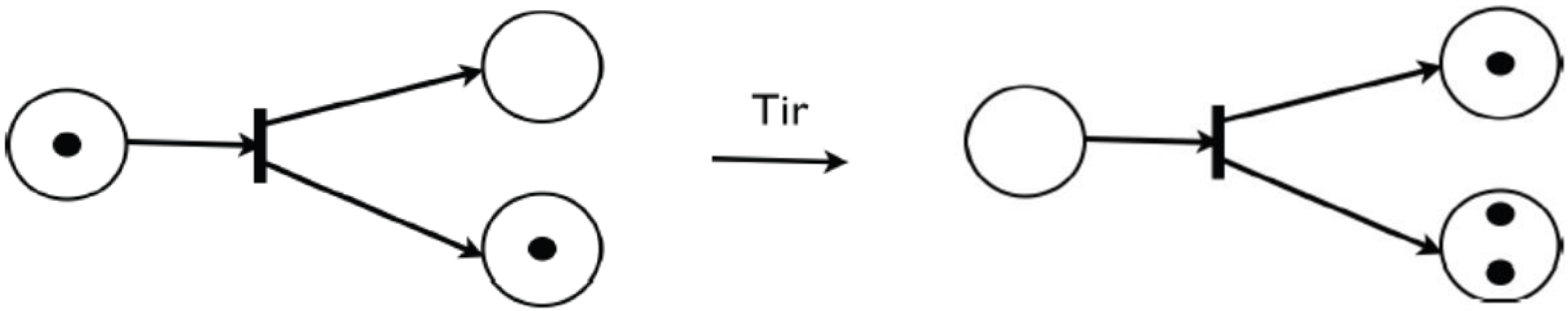
Le **tir** de la transition **enlève un /plusieurs jeton (s) de chaque place d’entrée** et ajoute **un /plusieurs jeton (s)** à (aux) place(s) de sortie(s).

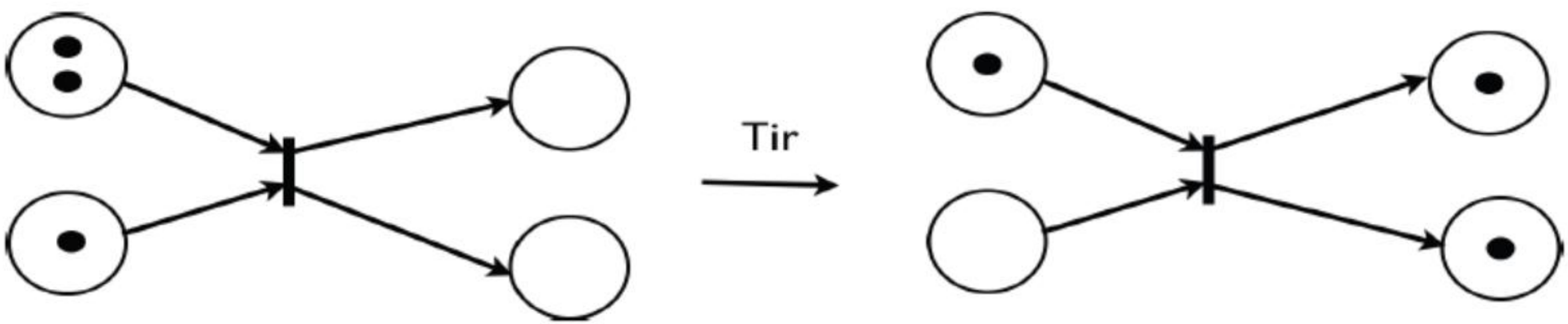




Franchissement d'une transition

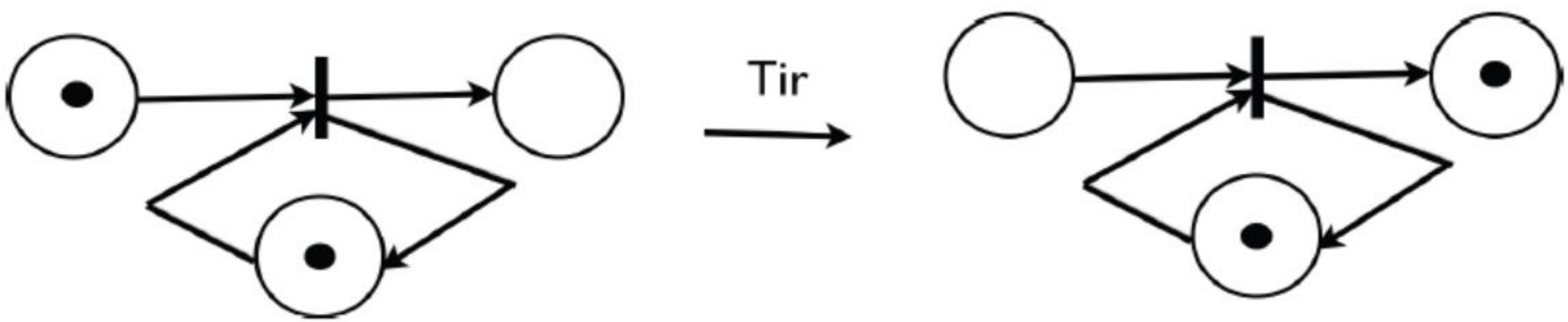
Exemple





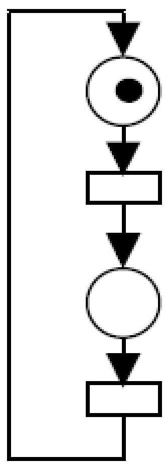
Franchissement d'une transition

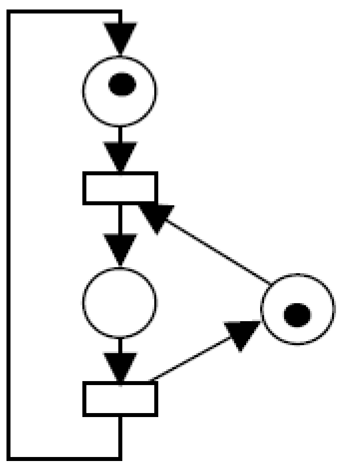
Exemple

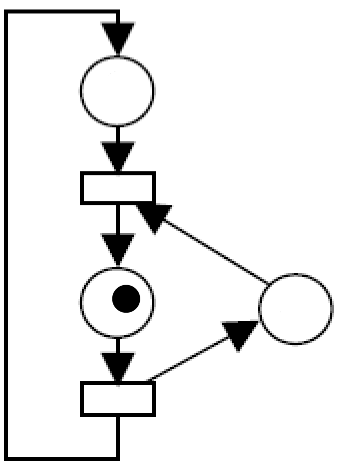


Définitions

Exemple







Un processus à deux états(Arrêt, Marche)

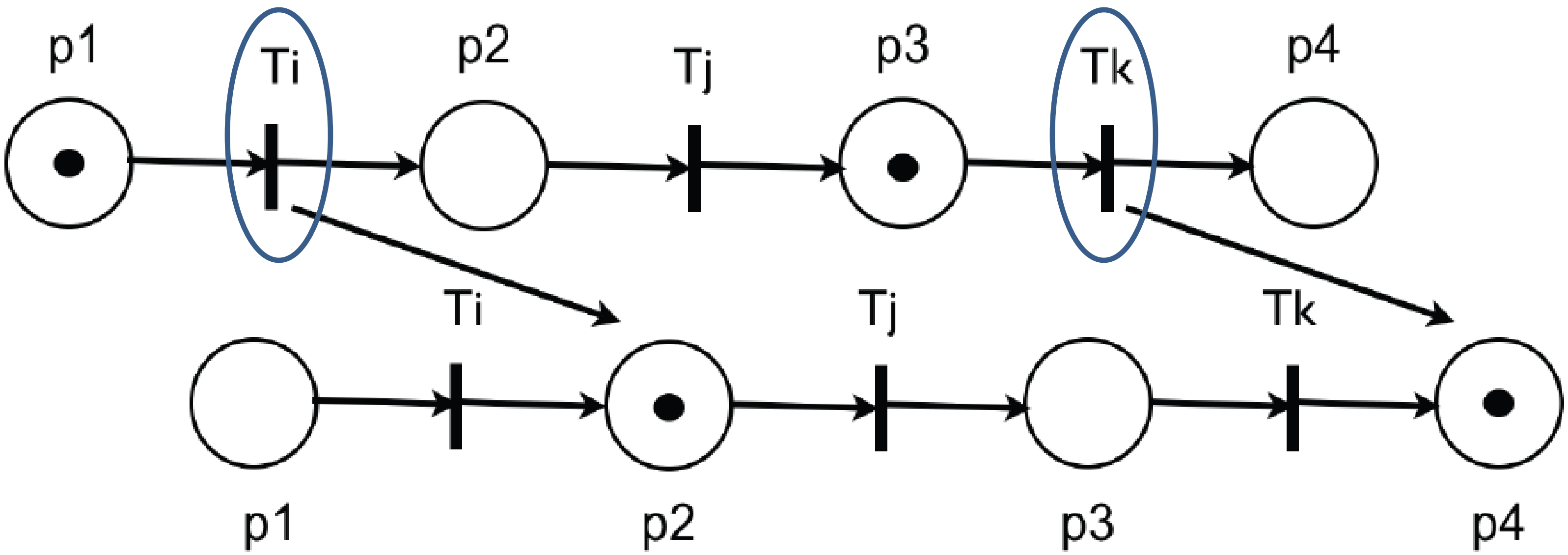
Le **passage** d'un état à l'autre **mobilise** une **ressource**, symbolisée par le jeton.

Franchissement d'une transition

Séquentiel

- Si dans le RDP, **plusieurs transitions sont valides**, leur tir doit être **successive**.

Exemple

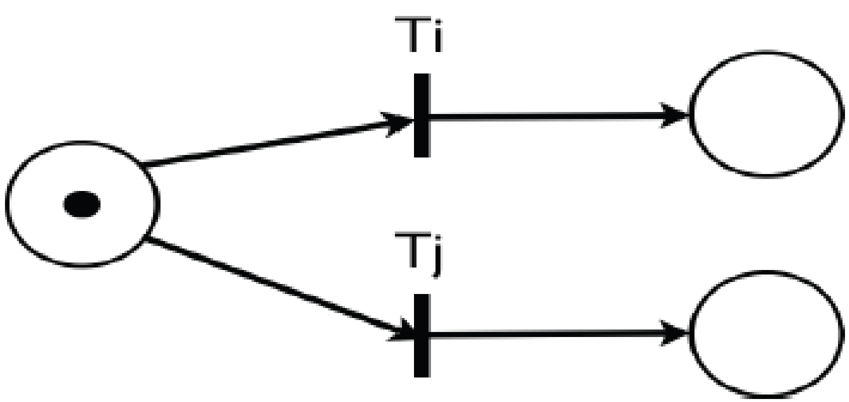


Franchissement d'une transition

Conflit

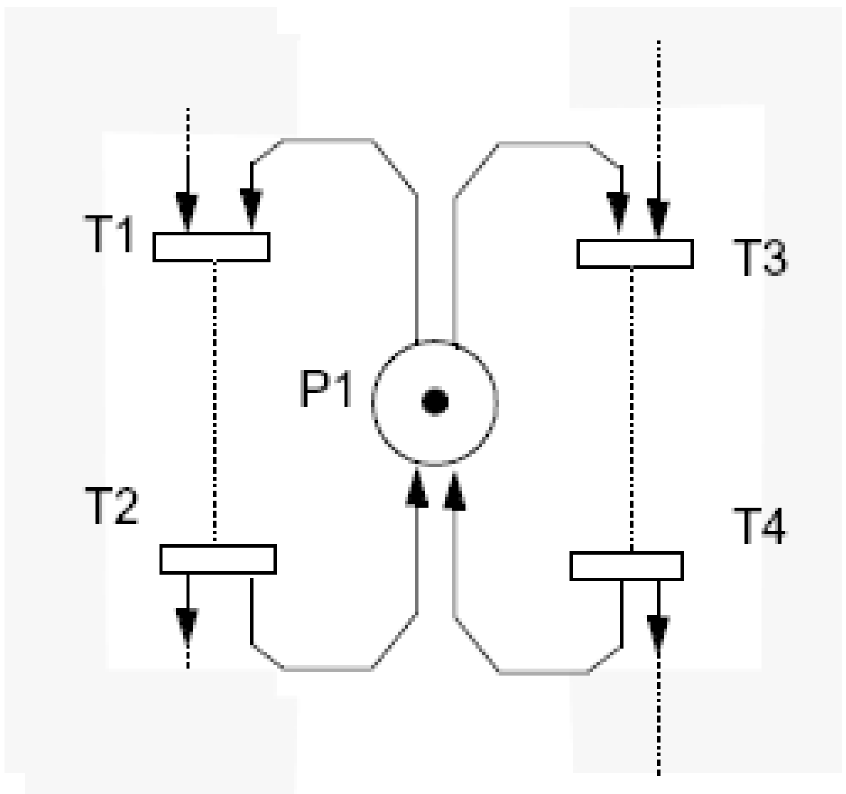
- Si 2 ou **plusieurs transitions** peuvent être **validées simultanément** à partir d’une **même place d’entrée** (place partagée), il y a **conflit si la** place partagée ne possède qu’un jeton.

- Il faut définir une règle de **priorité.**



Franchissement d'une transition

Partage de ressource (Exclusion mutuelle **)**



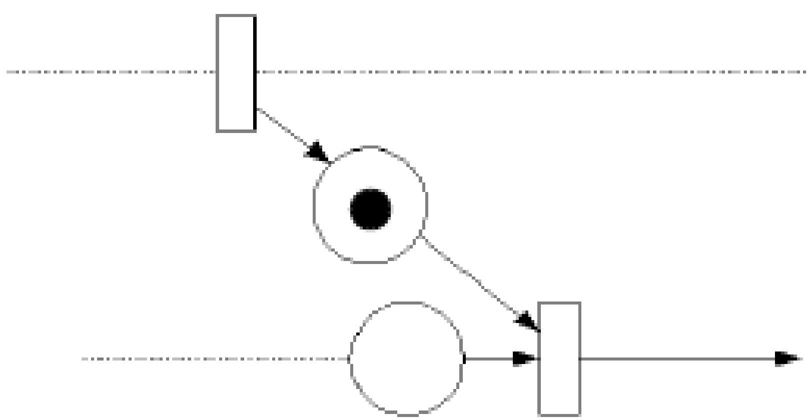
Exclusion mutuelle

Franchissement d'une transition

Le sémaphore

Le sémaphore est utilisé lorsqu’un processus **ne peut avancer** que si l’autre a déjà **franchi une transition** donnée.

Sémaphore



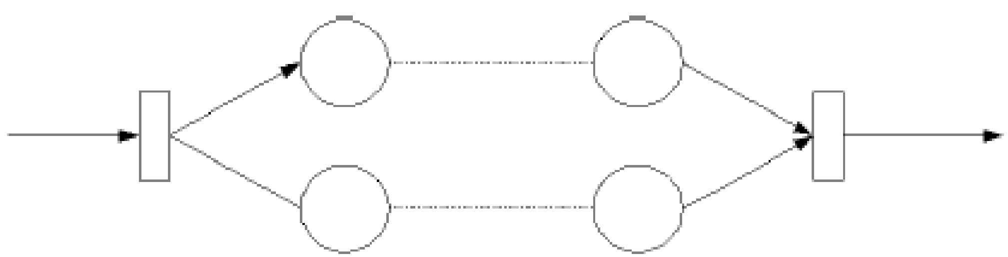
Franchissement d'une transition

Le parallélisme

- La décomposition parallèle signifie qu’un processus peut se décomposer en deux processus s'exécutant indépendamment l’un de l’autre.

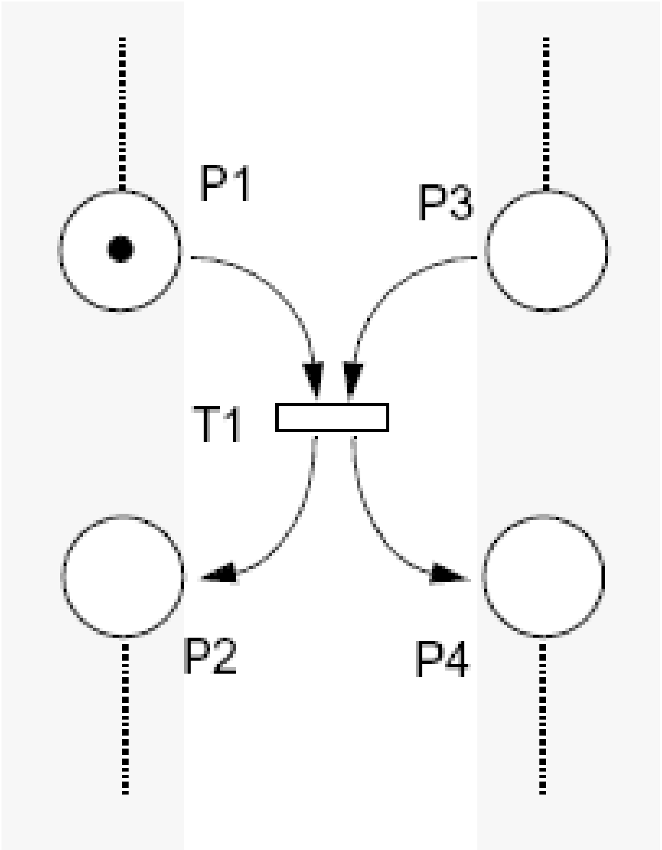
- Pour que le **processus** soit considéré **comme terminé** il faut que **les deux sous-processus soient terminés**, quel qu’ait été l’ordre de leur exécution.

Parallélisme



Franchissement d'une transition

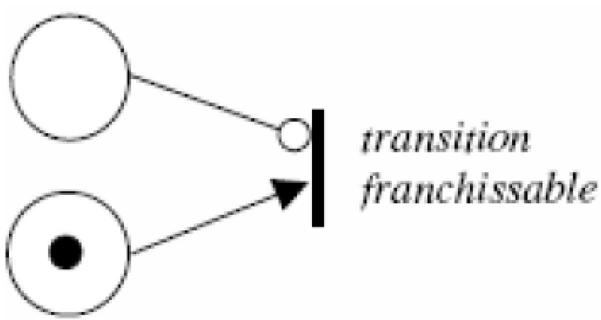
Rendez-vous

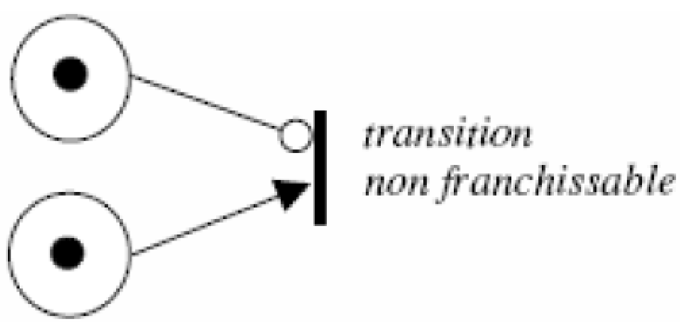


Franchissement d'une transition

Arc inhibiteur

- Un arc inhibiteur est un arc orienté qui ***part d'une place pour aboutir à une transition*** (et non l'inverse).
- Son extrémité est marquée par un petit cercle.
- La présence d'un arc *inhibiteur entre une place Pi et une transition Tj signifie que* ***la transition Tj n'est validée*** **que si la place *Pi* ne contient aucun jeton**.
- Le franchissement de la transition Tj consiste à retirer un jeton dans chaque place située en amont de la transition à l'exception de la place Pi , et à ajouter un jeton dans chaque place située en aval de la transition.





Marquage

Définition

RdP est composé de deux types de nœuds:

- **Les places** (Pi) qui permettent de décrire les états du système modélisé.
  L'ensemble de ces places est noté **P={P1, P2, ...}.**

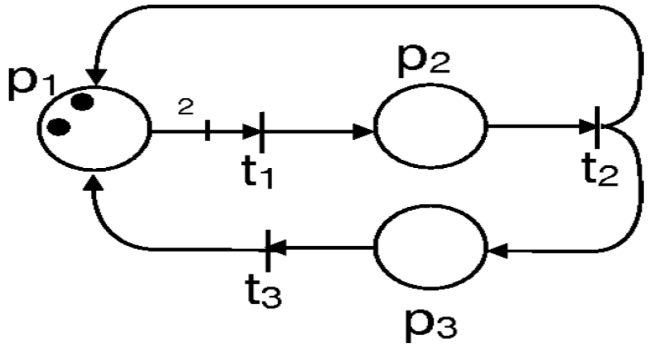
- **Les transitions** (Ti) qui représentent les changements d'états.
  L'ensemble de ces transitions est noté **T={T1, T2, ...}.**

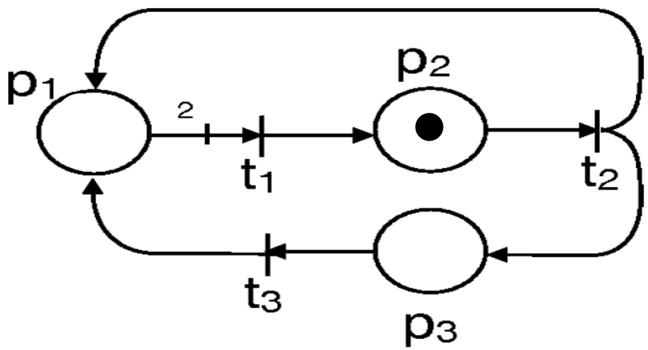
- Un **marquage** est un vecteur $M : P \rightarrow N$ qui **assigne à chaque place un entier** non négatif de jetons;

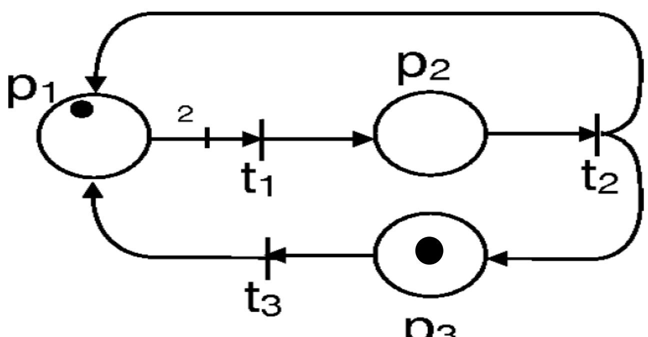
Le **marquage** d'une **place** p est indiqué comme **M(p)**.

Marquage

Exemple







M0	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
M1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
M2	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Marquage

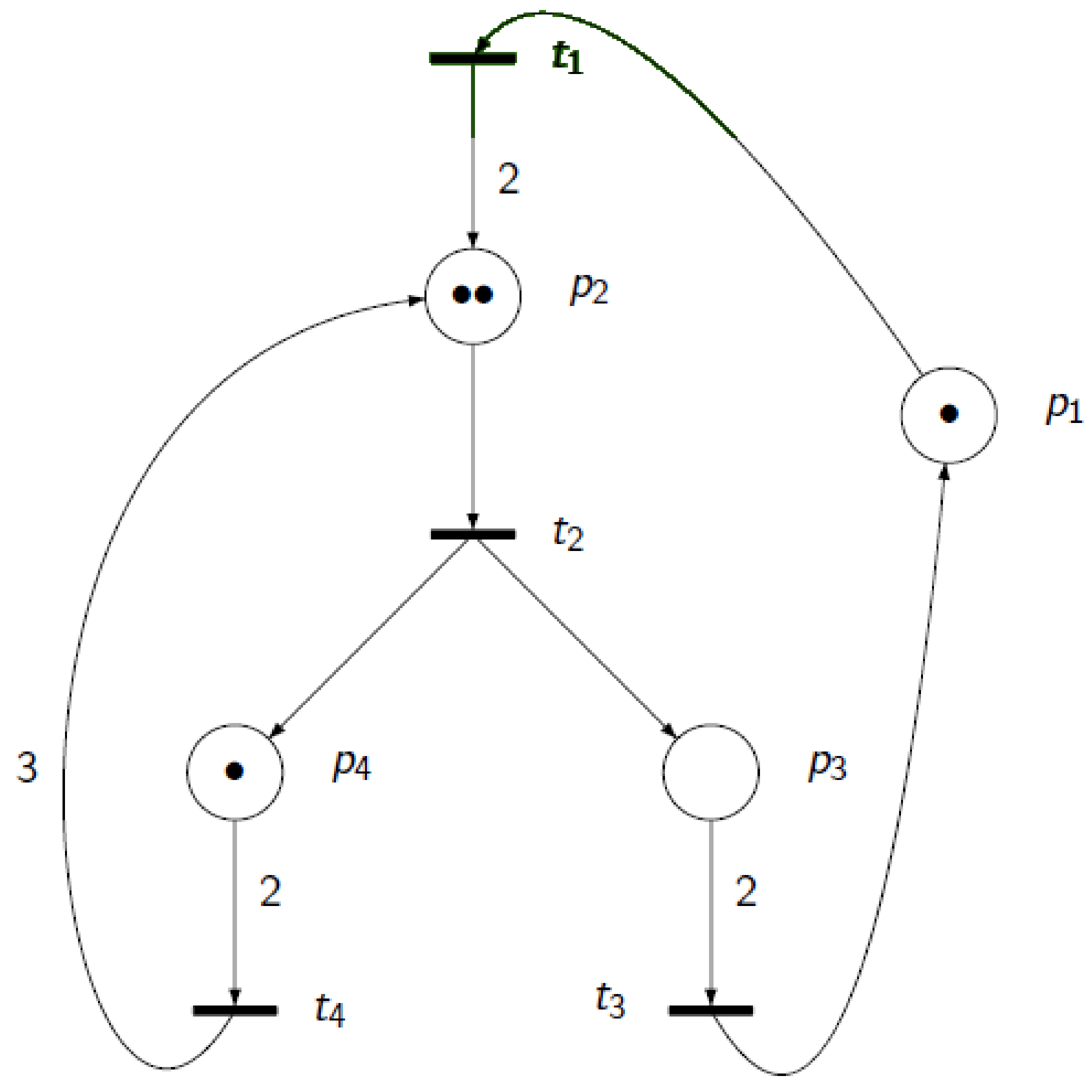
Exemple

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$

$M(p_1) = 1,\ M(p_2) = 2,$
$M(p_3) = 0,\ M(p_4) = 1$

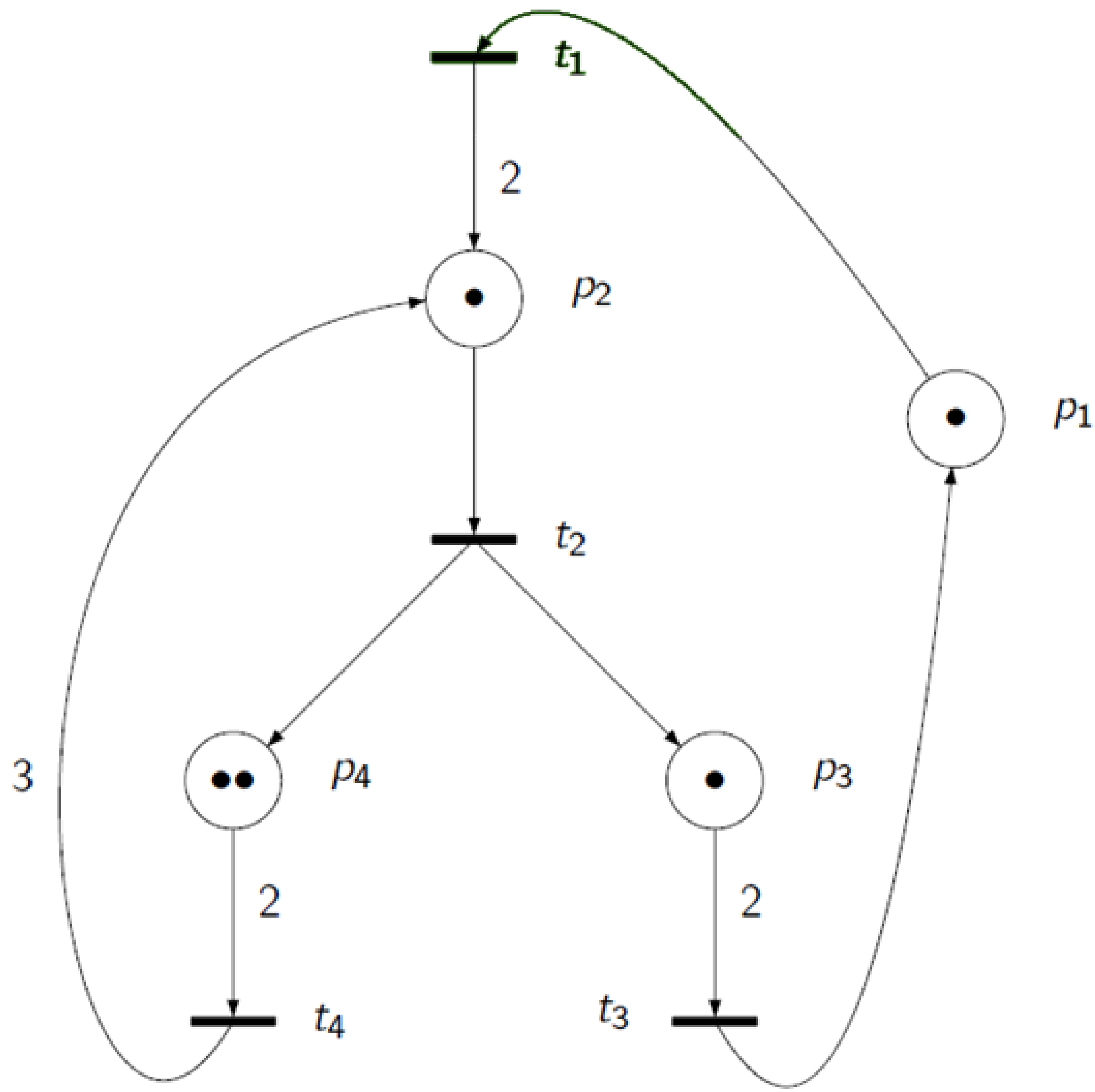
$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Marquage

Exemple

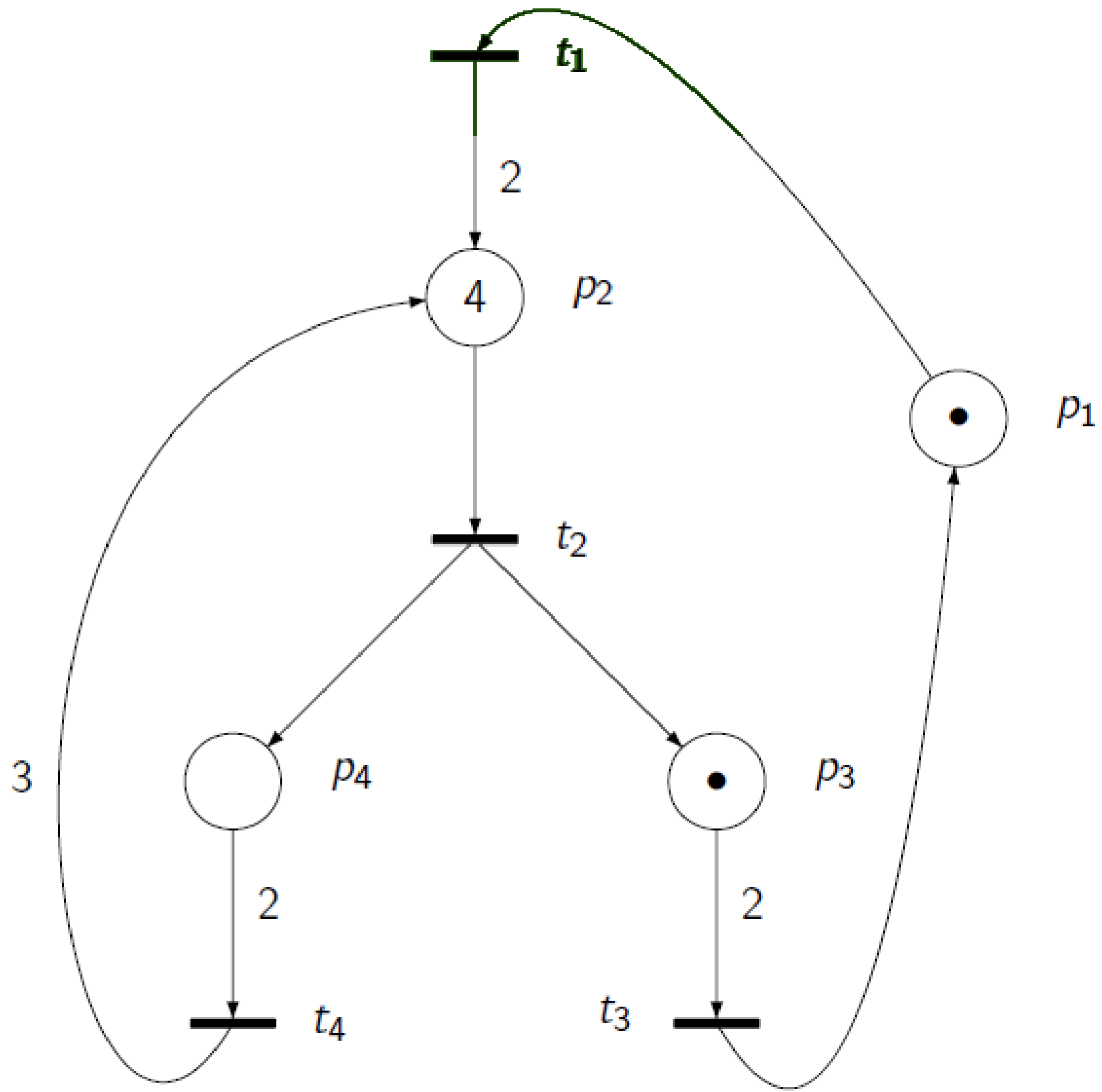
Tir de t2



Marquage

Exemple

Tir de t4



Marquage

Définitions

RdP est un quadruplet N = (P, T, Pré, Post) tel que :

- P = {Pi}, i $\in$ {1,...,n} : ensemble de **places**
- T = {Tj}, j $\in$ {1,...,m} : ensemble de **transitions**
- **Pré** est une application de P X T $\rightarrow \mathbb{N}$: dite **d'incidence avant**.
- **Post** est une application de P X T $\rightarrow \mathbb{N}$: dite **d'incidence arrière**.

Marquage

Matrice Post-incidence

Matrice Post-incidence :

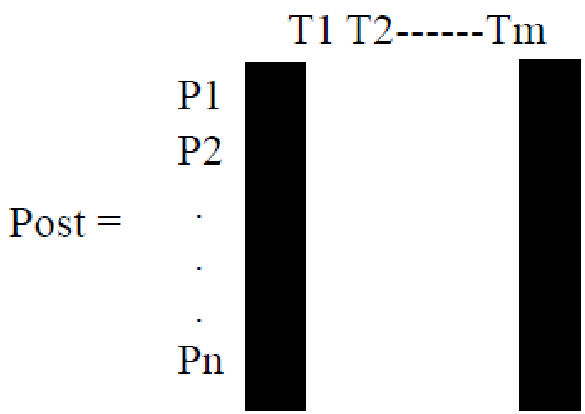
$$Post = \begin{array}{cc} & T1\ T2\text{------}Tm \\ \begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ . \\ . \\ . \\ Pn \end{array} & \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \end{array}$$

• Chaque élément de cette matrice **Post (Pi, Tj)** correspond au **nombre** de **jetons** à **rajouter** dans **Pi en franchissant Tj**.

Marquage

Matrice Pré-incidence

Matrice Pré-incidence :



- Chaque élément de cette matrice **Pré (Pi, Tj)** correspond au **nombre de jetons** à **enlever** de Pi en franchissant Tj.

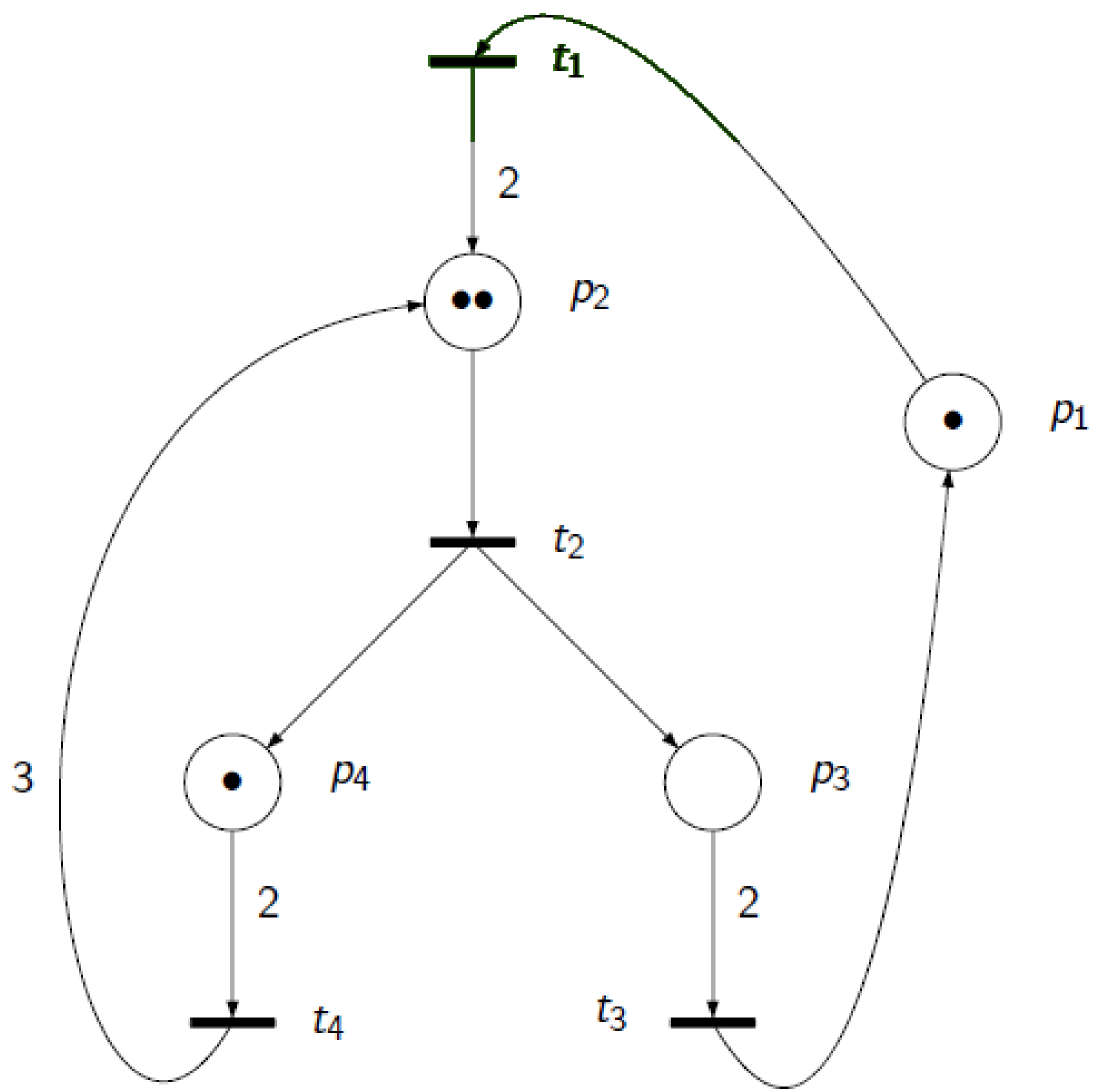
Marquage

Matrice Post-incidence

Exemple

$$Pre = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Post = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Marquage

Matrice d'incidence

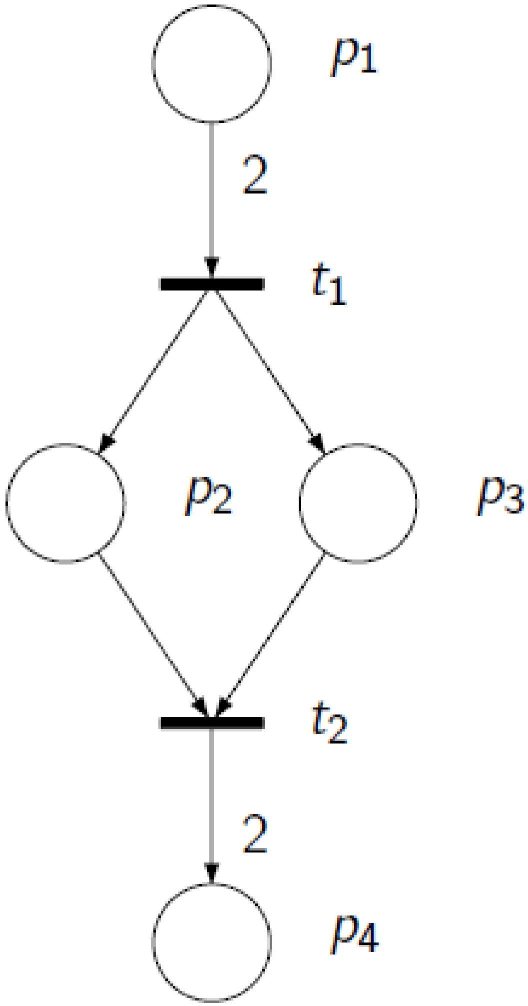
$$C = \text{Post - Pré} = \begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ . \\ . \\ . \\ Pn \end{array} \begin{array}{c} T1\ T2 \text{------} Tm \\ \left[\begin{array}{ccc} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \end{array}$$

• Chaque élément de cette matrice **C(Pi, Tj)** correspond au **nombre de jetons à rajouter moins celui à enlever dans** Pi en franchissant Tj.

Marquage

Matrice d'incidence

Exemple



$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$
$$T = \{t_1, t_2\}$$

$$Pre = \left(\; ? \; \right)$$

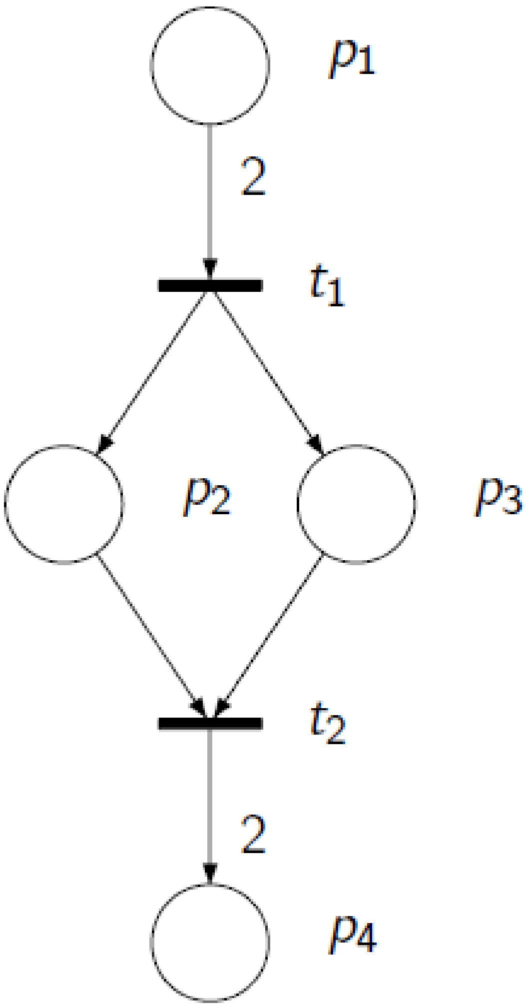
$$Post = \left(\; ? \; \right)$$

$$C = \left(\; ? \; \right)$$

Marquage

Matrice d'incidence

Exemple



$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$
$$T = \{t_1, t_2\}$$

$$Pre = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Post = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\forall p \in P$, $\forall t \in T$, $M1(p) = M(p) + C(p, t)$

Evolution du marquage

Principe

❖ Le franchissement d'une transition **t** de T validée dans le marquage **M** conduit au marquage **M1** :

$$\forall p \in P,\ \forall t \in T,\ M1(p) = M(p) + C(p, t)$$

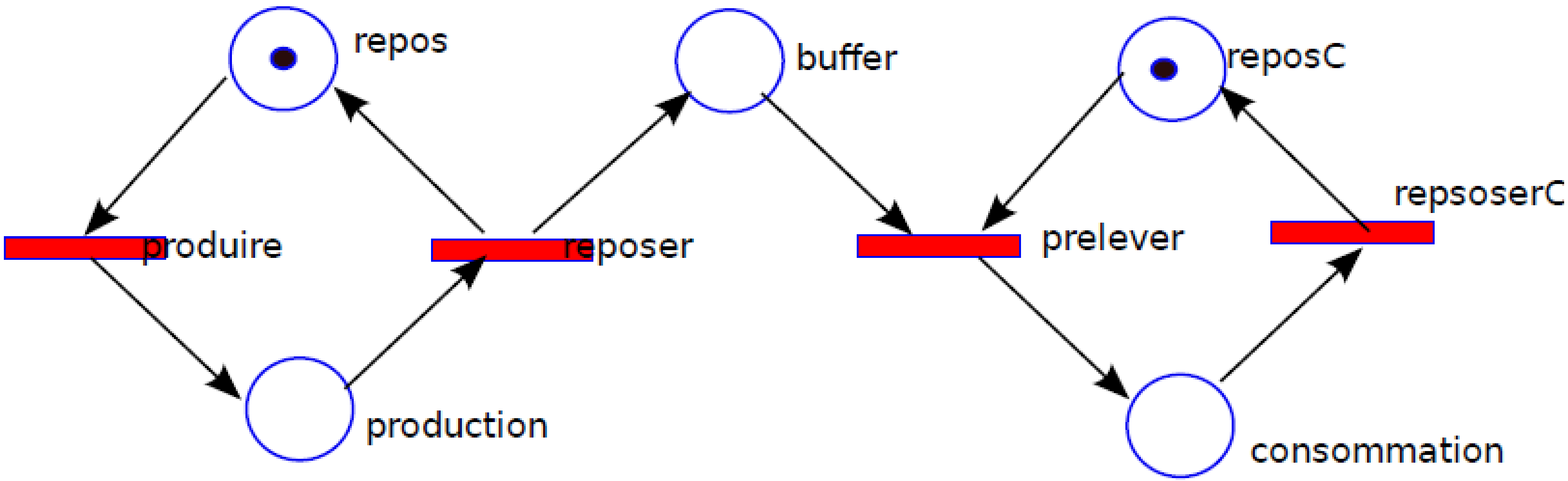
Exercice

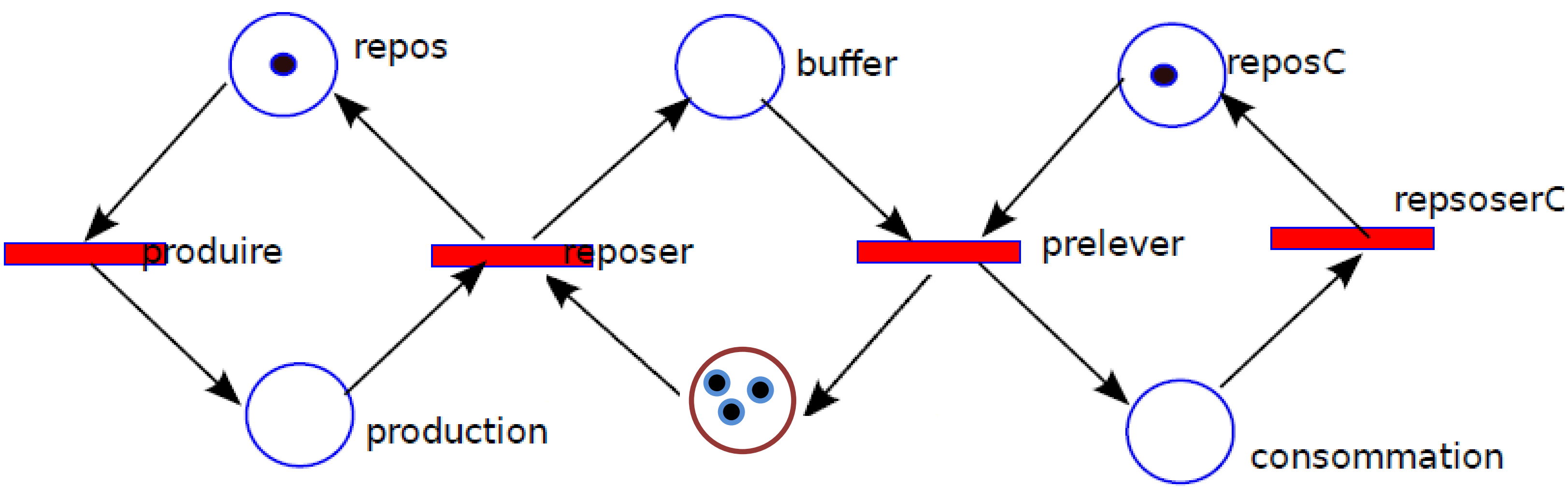
- Représenter le modèle producteur/consommateur qui correspond à une situation où l'un des processus produit des ressources nécessaires à l'autre.

- On utilise une place « tampon » pour matérialiser le nombre de ressource produites mais pas encore consommées.

- On peut limiter la capacité du tampon pour éviter que le producteur ne « prenne trop d'avance » sur le consommateur.

Exercice


repos
buffer
reposC
repsoserC
produire
reposer
prelever
production
consommation


repos
buffer
reposC
repsoserC
produire
reposer
prelever
production
consommation