

Fuzzy Set

Logika Fuzzy

Fuzzy System

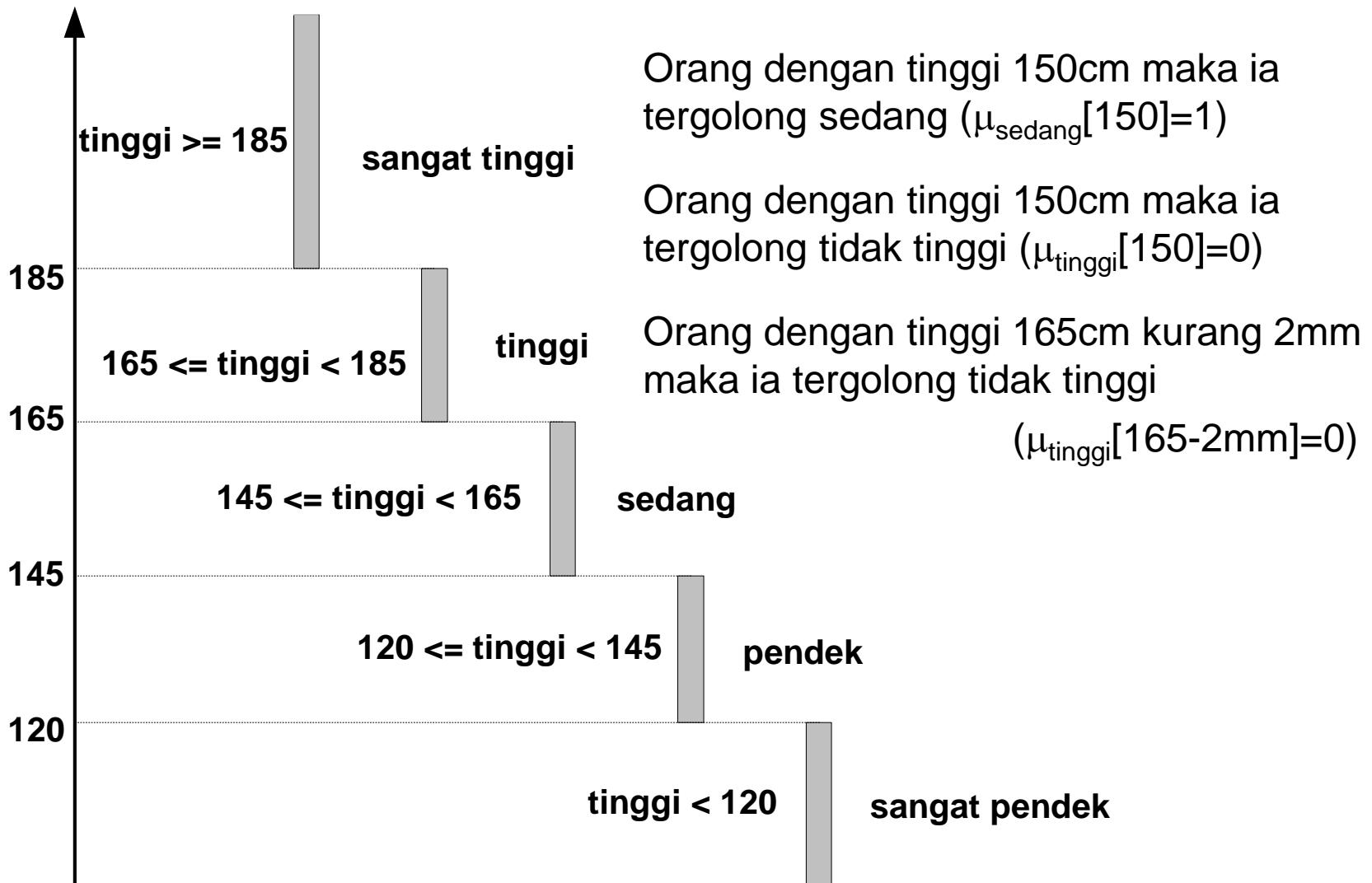
Crisp Set

- Crisp set membedakan anggota dan non anggota dengan batasan pasti
- Misalkan A sebuah crisp set dan x anggota A maka :

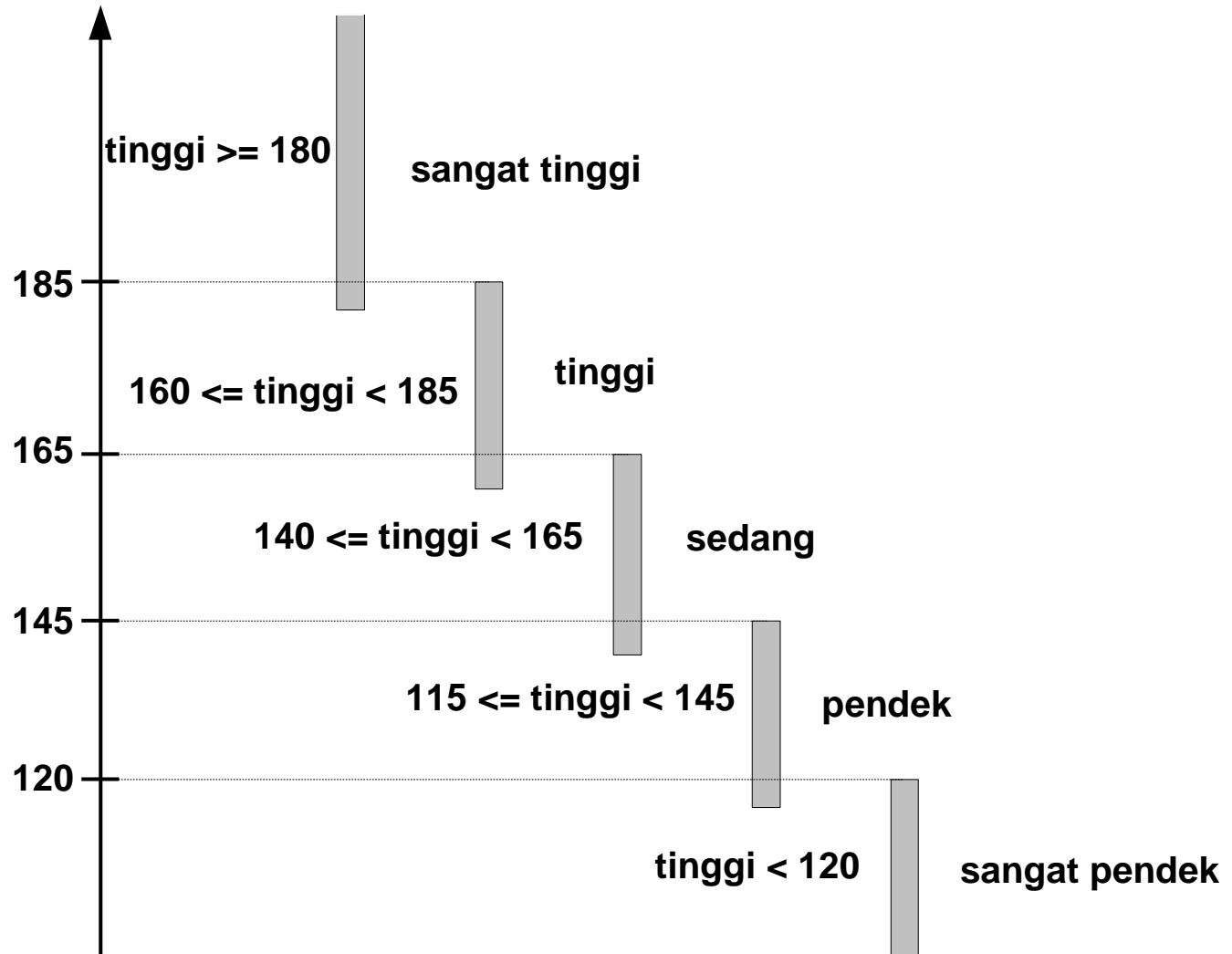
$$\mu_A[x]=1$$

Jika y bukan anggota A maka $\mu_A[y]=0$

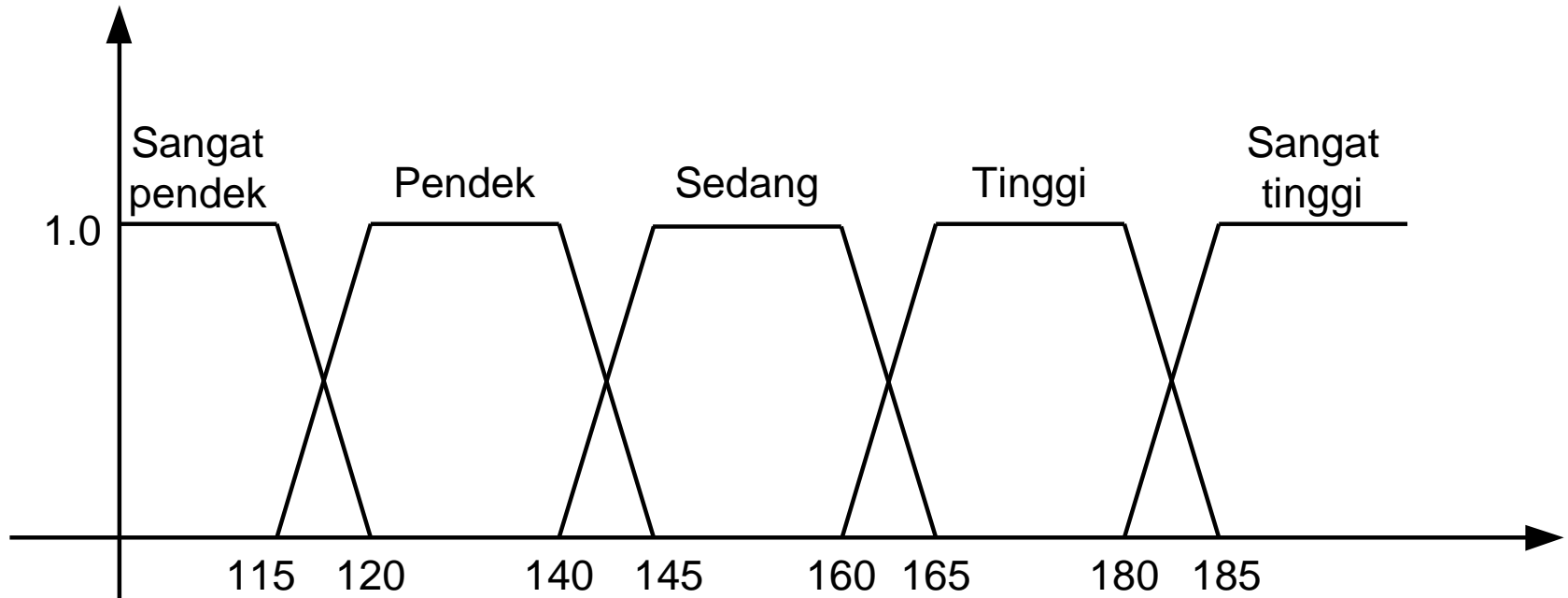
Contoh: Crisp Set



Himpunan Fuzzy

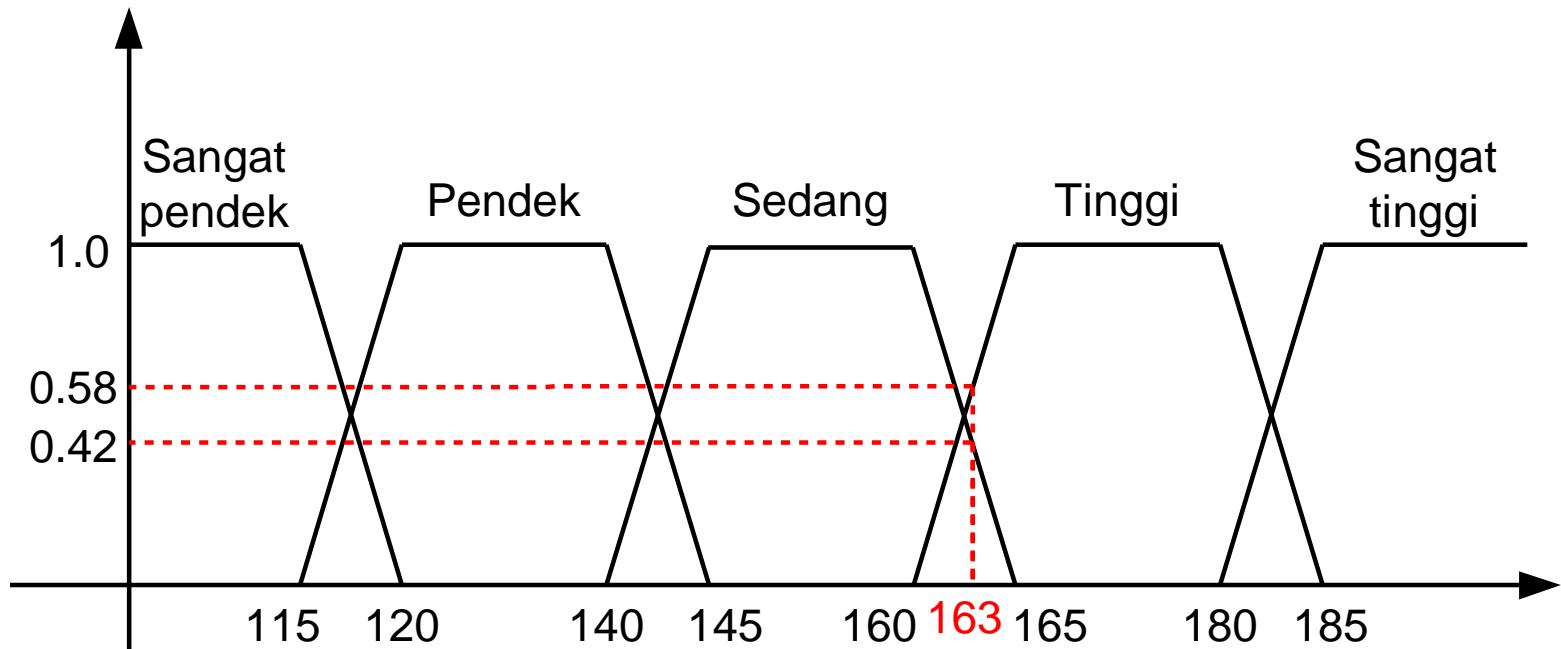


Contoh: Fungsi Keanggotaan (1)



$$\mu = [\mu_{sp}, \mu_p, \mu_s, \mu_t, \mu_{st}]$$

Fungsi Keanggotaan (2)



$$\mu[163] = [0, 0, 0.42, 0.58, 0]$$

atau

$$\mu_{\text{sedang}}[163] = 0.42, \mu_{\text{tinggi}}[163] = 0.58$$

Fuzzy vs Probabilitas

- Fuzzy \neq Probabilitas
- - Probabilitas berkaitan dengan ketidakmenentuan dan kemungkinan
- - Logika Fuzzy berkaitan dengan ambiguitas dan ketidakjelasan
- Contoh 1:
Billy memiliki 10 jari kaki. Probabilitas Billy memiliki 9 jari kaki adalah 0. Keanggotaan Fuzzy Billy pada himpunan orang dengan 9 jari kaki $\neq 0$
- Contoh 2:
 - Probabilitas botol 1 berisi air beracun adalah 0.5 dan 0.5 untuk isi air murni { **mungkin air tersebut tidak beracun** }
 - Isi botol 2 memiliki nilai keanggotaan 0.5 pada himpunan air berisi racun { **air pasti beracun** }

Himpunan Fuzzy

- **Variabel Fuzzy**

Variabel dalam suatu sistem fuzzy. Contoh : berat badan, tinggi badan, dsb

- **Himpunan Fuzzy (Fuzzy set)**

Himpunan fuzzy yang mewakili suatu kondisi pada suatu variabel fuzzy.

Contoh :

- Variabel suhu terbagi menjadi 3 himpunan fuzzy, yaitu : panas, hangat, dingin.
- Variabel nilai terbagi menjadi : tinggi, sedang, rendah

- Himpunan fuzzy memiliki 2 atribut, yaitu :

- **Linguistik**, yaitu penamaan suatu group yang mewakili suatu kondisi, misalnya panas, hangat, dingin
- **Numeris**, yaitu ukuran dari suatu variabel seperti : 17,19, 21, 33, dst

- **Himpunan Semesta**

keseluruhan nilai yang boleh dioperasikan dalam suatu variabel fuzzy.

Contoh:

- Semesta untuk variabel berat badan : $[1, 150]$
- Semesta untuk variabel suhu : $[0, 100]$.

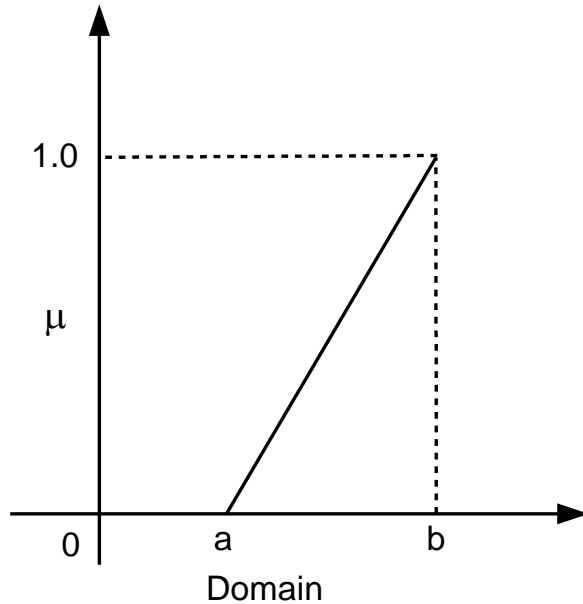
- **Domain**

Domain himpunan fuzzy adalah keseluruhan nilai yang diijinkan dalam Semesta dan boleh dioperasikan dalam suatu himpunan fuzzy.

Contoh :

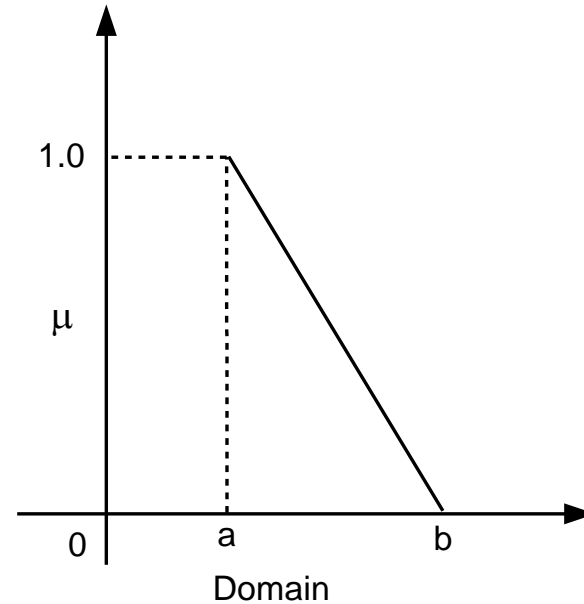
- DINGIN = $[0, 60]$
- HANGAT = $[50, 80]$
- PANAS = $[80, +\infty)$

Fungsi Keanggotaan: Fungsi Linier



Linier Naik

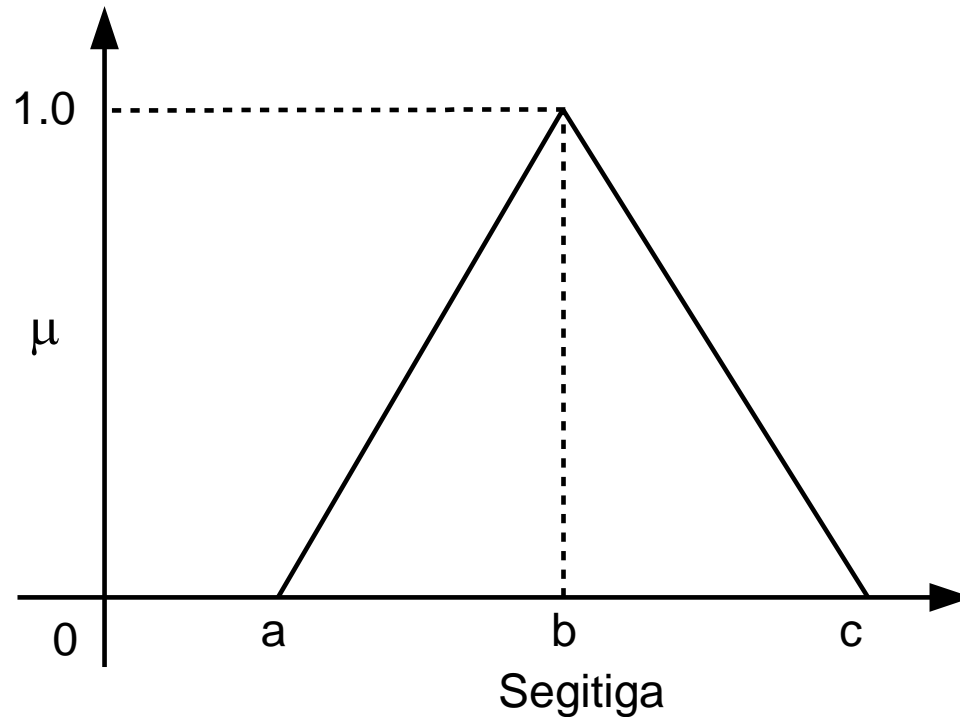
$$\mu[x] = \begin{cases} 0; & x \leq a \\ (x-a)/(b-a); & a < x \leq b \\ 1; & x > b \end{cases}$$



Linier Turun

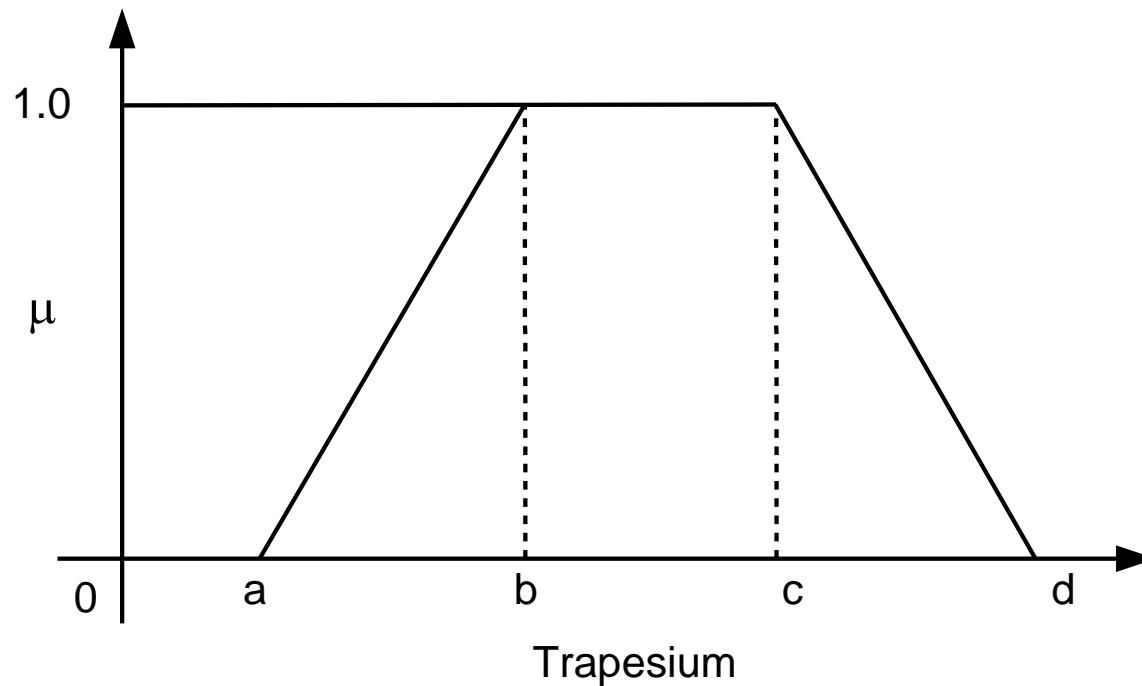
$$\mu[x] = \begin{cases} (b-x)/(b-a); & a \leq x < b \\ 0; & x \geq b \end{cases}$$

Fungsi Keanggotaan: Segitiga



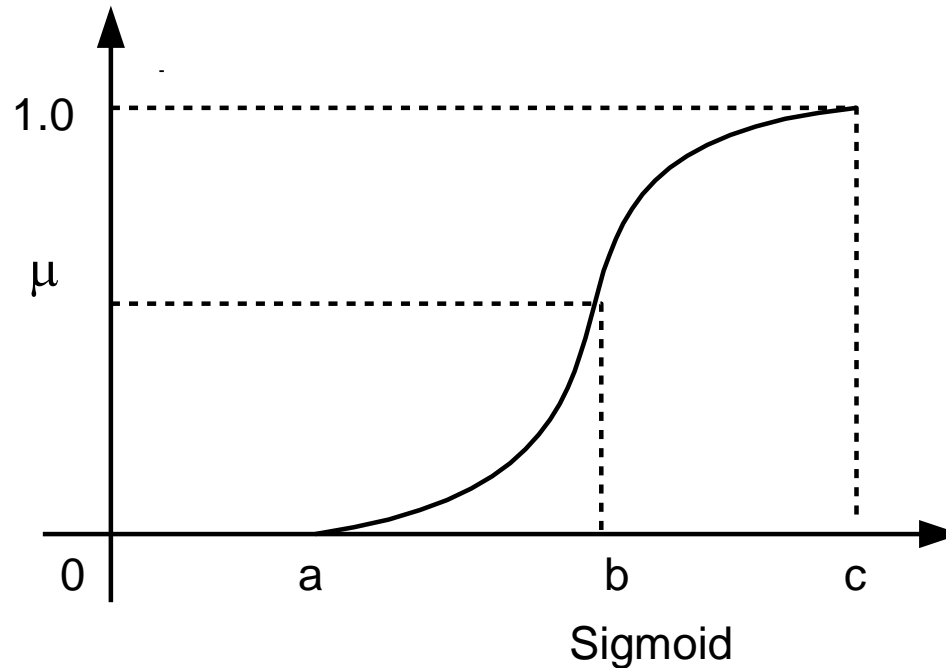
$$\begin{aligned}\mu[x] &= 0; \quad x \leq a \text{ atau } x \geq c \\ &= (x-a)/(b-a); \quad a < x \leq b \\ &= (c-x)/(c-b); \quad b < x < c\end{aligned}$$

Fungsi Keanggotaan: Trapezium



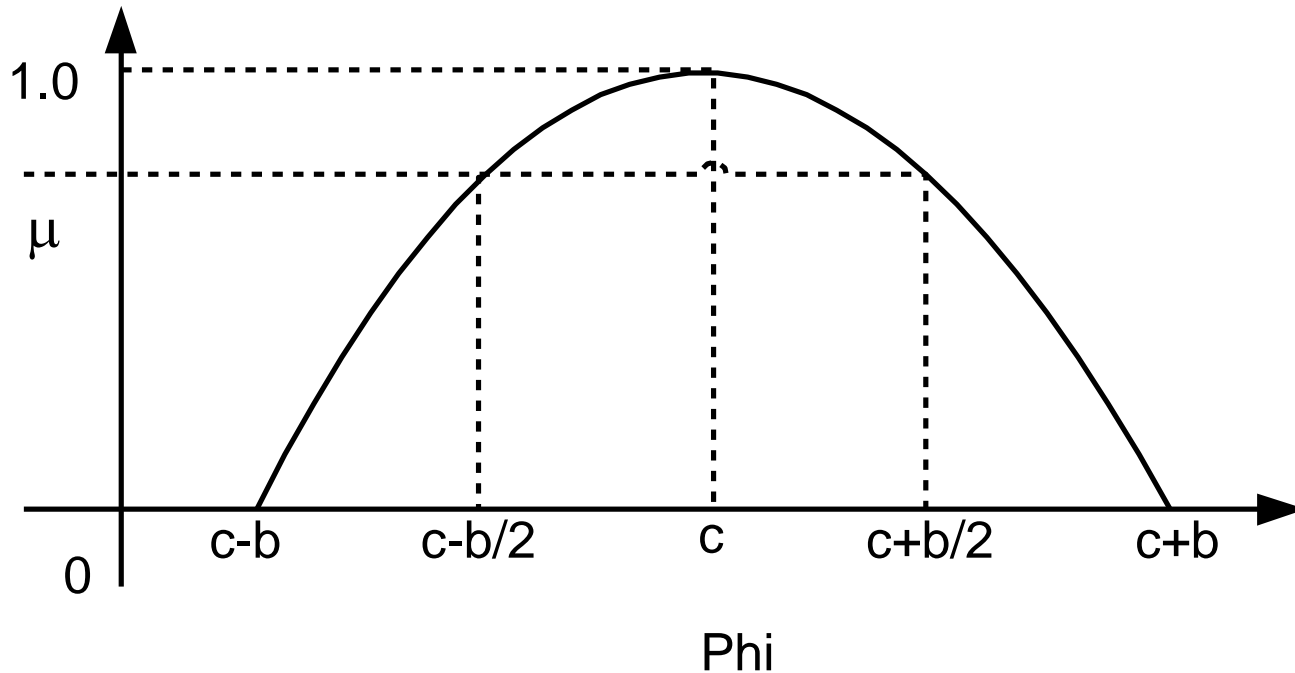
$$\begin{aligned}\mu[x] = & 0; \quad x \leq a \text{ atau } x \geq d \\ & (x-a)/(b-a); \quad a < x \leq b \\ & 1; \quad b < x \leq c \\ & (d-x)/(d-c); \quad c < x < d\end{aligned}$$

Fungsi Keanggotaan: Sigmoid



$$\mu[x;a,b,c]_{\text{sigmoid}} = \begin{cases} 0; & x \leq a \\ 2 \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^2; & a < x \leq b \\ 1 - 2 \left(\frac{c-x}{c-a} \right)^2; & b < x < c \\ 1; & x \geq c \end{cases}$$

Fungsi Keanggotaan: Phi



$$\mu[x;a,b,c]_{\text{phi}} = \mu[x;c-b,c-b/2,c]_{\text{sigmoid}}; \quad x \leq c$$

$$\mu[x;c,c+b/2,c+b]_{\text{sigmoid}}; \quad x > c$$

Operator Dasar

Nilai keanggotaan sebagai hasil dari operasi 2 himpunan: fire strength atau α -predikat

AND

$$\mu_{A \cap B} [x] = \min(\mu_A[x], \mu_B[x])$$

Misalkan nilai keanggotaan IP 3.2 pada himpunan **IPtinggi** adalah 0.7 dan nilai keanggotaan 8 semester pada himpunan **LulusCepat** adalah 0.8 maka α -predikat untuk IPtinggi **dan** LulusCepat:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{IPtinggi} \cap \text{LulusCepat}} &= \min(\mu_{\text{IPtinggi}}[3.2], \mu_{\text{LulusCepat}}[8]) \\ &= \min(0.7, 0.8) = 0.7\end{aligned}$$

OR

$$\mu_{A \cup B} [x] = \max(\mu_A[x], \mu_B[x])$$

α -predikat untuk IPtinggi **atau** LulusCepat:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{IPtinggi} \cup \text{LulusCepat}} &= \max(\mu_{\text{IPtinggi}}[3.2], \mu_{\text{LulusCepat}}[8]) \\ &= \max(0.7, 0.8) = 0.8\end{aligned}$$

NOT (Complement)

$$\mu_A'[x] = 1 - \mu_A[x]$$

α -predikat untuk **BUKAN IPtinggi** :

$$\mu_{\text{IPtinggi}}' = 1 - \mu_{\text{IPtinggi}}[3.2] = 1 - 0.7 = 0.3$$

Approximate Reasoning

A : 'Apakah dia anak yang **pintar**?'

B : '**Sepertinya begitu.**'

A : 'Apakah Indeks Prestasi dan hasil tes psikologinya **bagus**?'

B : 'Ya, keduanya **sangat bagus.**'

A : 'Apakah dia layak mendapatkan beasiswa?'

B : 'Ya, **sepertinya** itu adalah keputusan yang **baik.**'

Approximate Reasoning

P_1 : Sebagian besar mahasiswa suka membaca

P_2 : Dani adalah mahasiswa

P_3 : Sepertinya Dani suka membaca

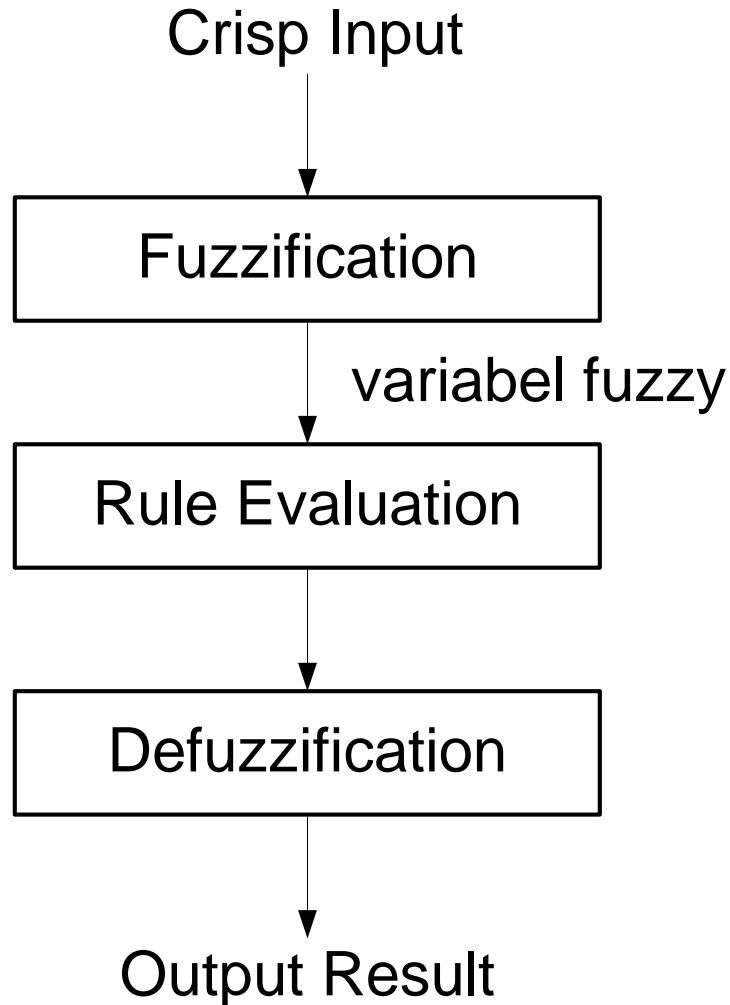
Reasoning yang Pasti

P_1 : Semua manusia pasti akan mati

P_2 : Dani adalah manusia

P_3 : Dani pasti akan mati

Fuzzy Rule Based System



Contoh 1:

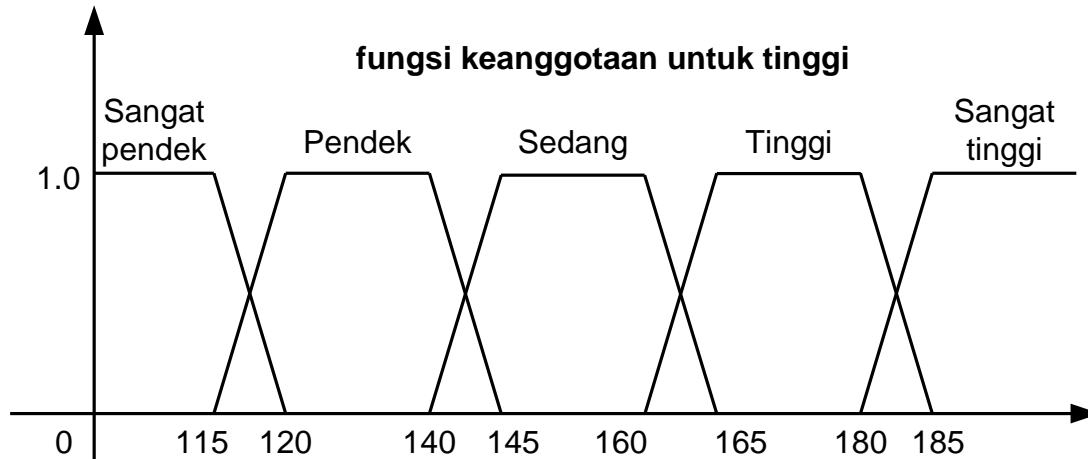
Mengevaluasi kesehatan orang berdasarkan tinggi dan berat badannya

Input: tinggi dan berat badan

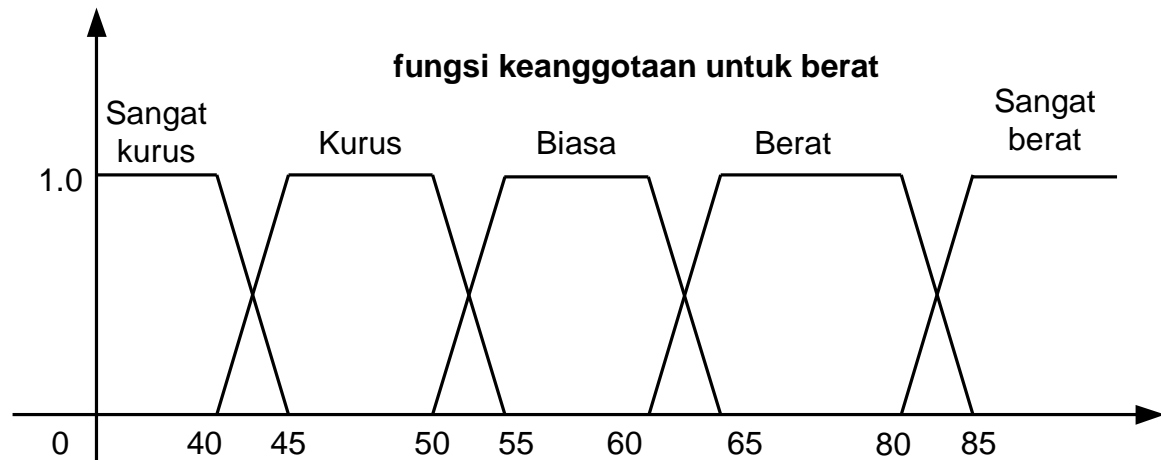
Output: kategori sehat

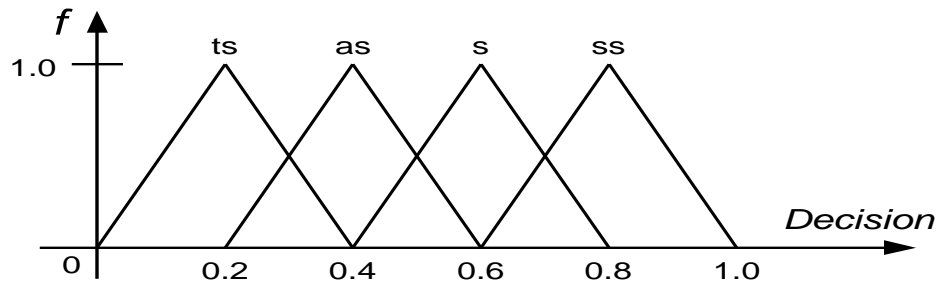
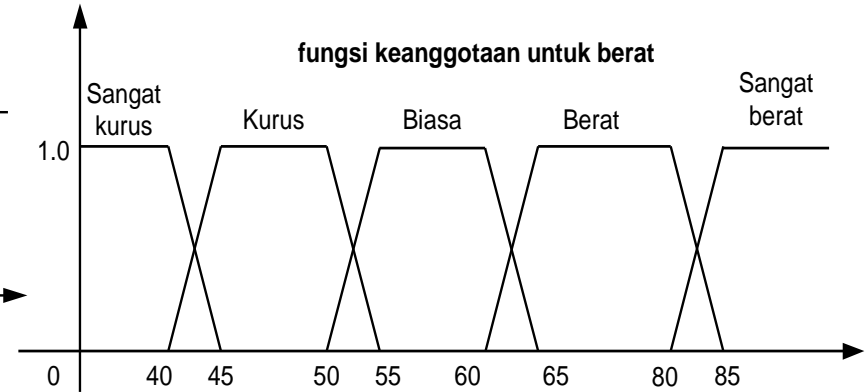
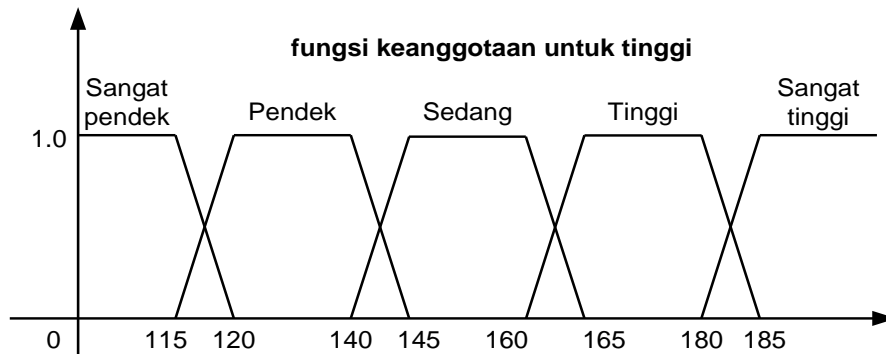
- sangat sehat (SS)
- sehat (A)
- agak sehat (AS)
- tidak sehat (TS)

L1: Fuzzification (1)



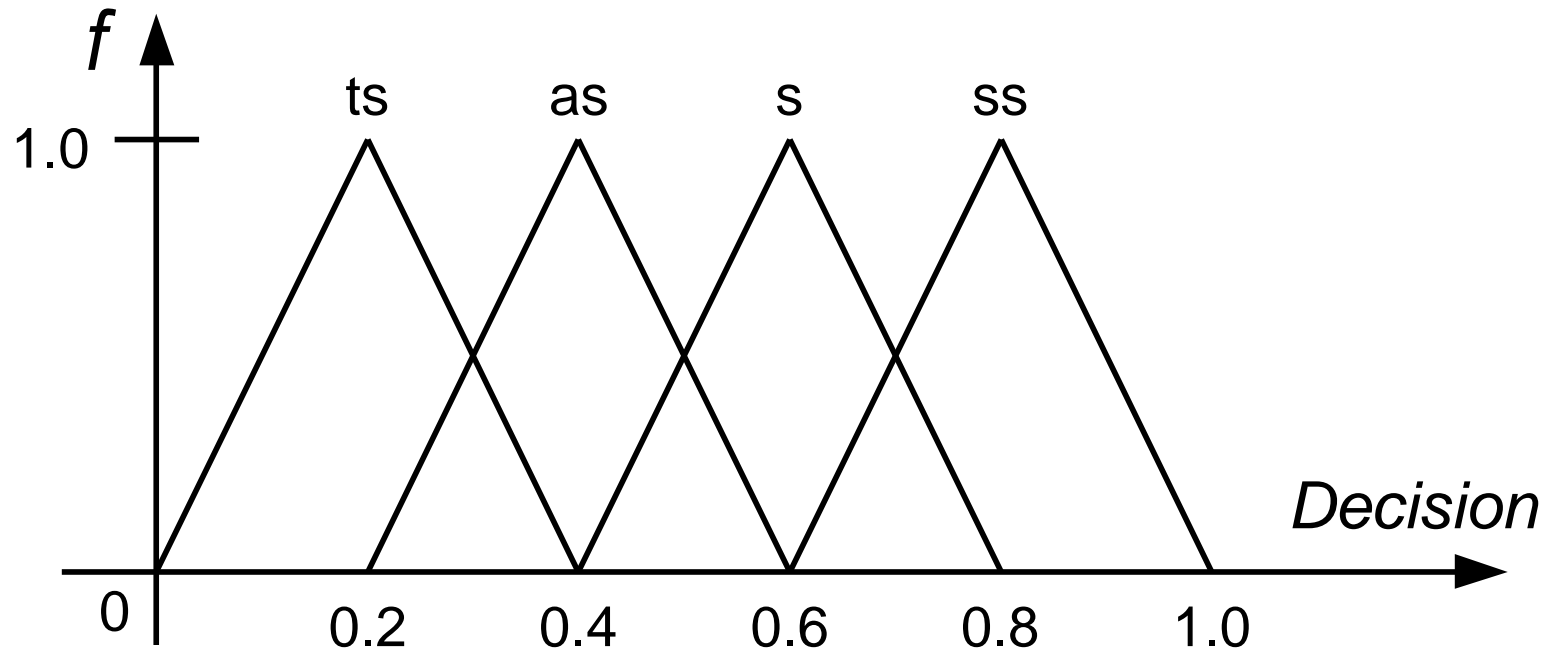
Ada 3 variabel fuzzy yang dimodelkan: tinggi, berat, sehat





BERAT						
TINGGI		Sangat kurus	Kurus	Biasa	Berat	Sangat berat
	Sangat pendek	SS	S	AS	TS	TS
	Pendek	S	SS	S	AS	TS
	Sedang	AS	SS	SS	AS	TS
	Tinggi	TS	S	SS	S	TS
	Sangat tinggi	TS	AS	SS	S	AS

L1: Fuzzification (2)



$$f = \{TS, AS, S, SS\}$$

L2: Rules Evaluation (1)

Tentukan rules

Tabel Kaidah Fuzzy

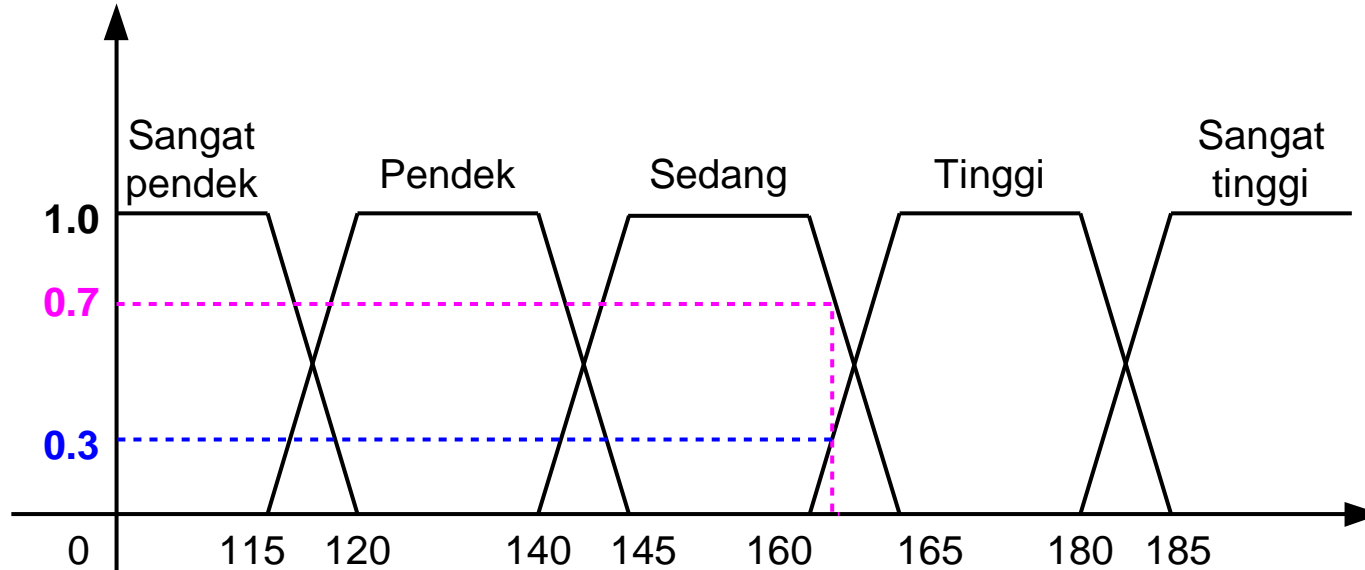
B E R A T						
T I N G G I		Sangat kurus	Kurus	Biasa	Berat	Sangat berat
	Sangat pendek	SS	S	AS	TS	TS
	Pendek	S	SS	S	AS	TS
	Sedang	AS	SS	SS	AS	TS
	Tinggi	TS	S	SS	S	TS
	Sangat tinggi	TS	AS	SS	S	AS

Dalam bentuk if-then, contoh:

*If sangat pendek dan sangat kurus then
sangat sehat*

L2: Rules Evaluation (2)

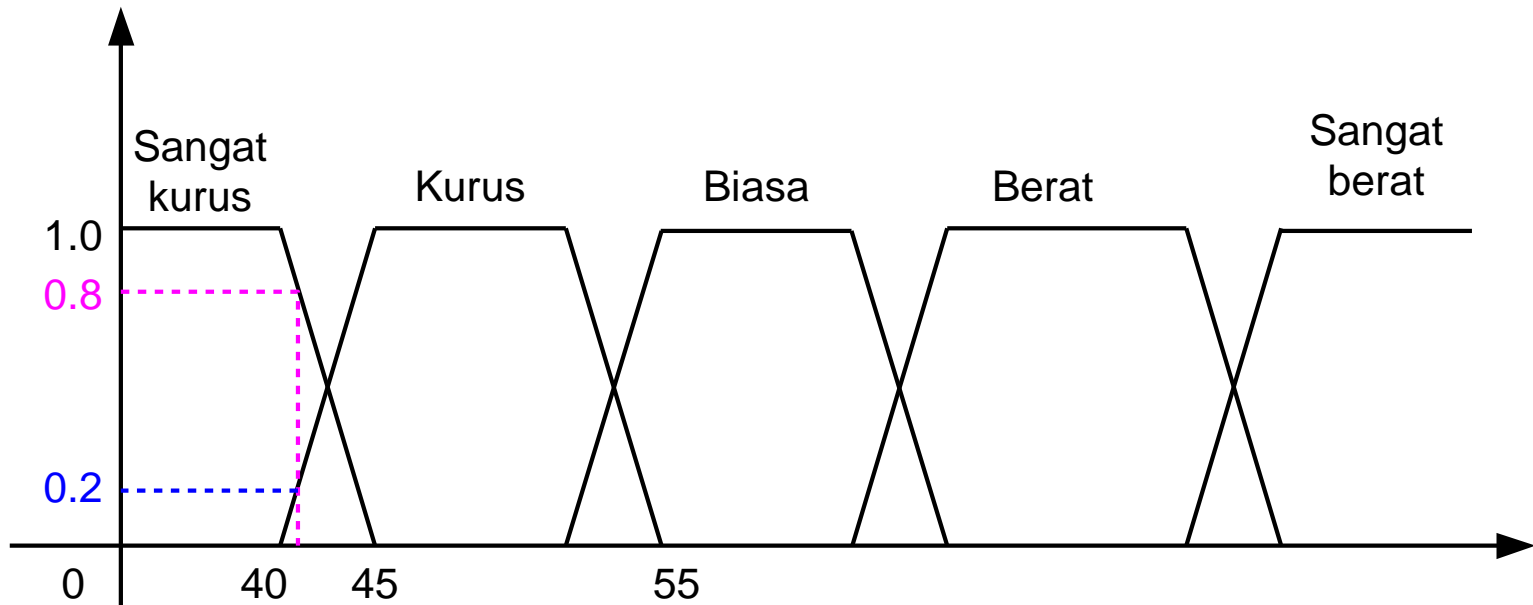
Contoh: bagaimana kondisi kesehatan untuk orang dengan tinggi 161.5 cm dan berat 41 kg?



$$\mu_{\text{sedang}}[161.5] = (165 - 161.5) / (165 - 160) = 0.7$$

$$\mu_{\text{tinggi}}[161.5] = (161.5 - 160) / (165 - 160) = 0.3$$

L2: Rules Evaluation (3)



$$\mu_{\text{sangat kurus}}[41] = (45 - 41) / (45 - 40) = 0.8$$

$$\mu_{\text{kurus}}[41] = (41 - 40) / (45 - 40) = 0.2$$

BERAT						
T I N G G I		0.8	0.2	Biasa	Berat	Sangat berat
	Sangat pendek	SS	S	AS	TS	TS
	Pendek	S	SS	S	AS	TS
	0.7	AS	SS	SS	AS	TS
	0.3	TS	S	SS	S	TS
	Sangat tinggi	TS	AS	SS	S	AS

L2: Rules Evaluation (4)

Pilih bobot minimum
krn relasi AND

BERAT						
T I N G G I		0.8	0.2	Biasa	Berat	Sangat berat
	Sangat pendek	SS	S	AS	TS	TS
	Pendek	S	SS	S	AS	TS
	0.7	0.7	0.2	SS	AS	TS
	0.3	0.3	0.2	SS	S	TS
	Sangat tinggi	TS	AS	SS	S	AS

L3: Defuzzification

Diperoleh:

$$f = \{TS, AS, S, SS\} = \{0.3, 0.7, 0.2, 0.2\}$$

Penentuan hasil akhir, ada 2 metoda:

1. Max method: index tertinggi 0.7
hasil **Agak Sehat**

2. Centroid method (Mamdani):

$$\begin{aligned} & (0.3 \times 0.2) + (0.7 \times 0.4) + (0.2 \times 0.6) + (0.3 \times 0.8) / \\ & (0.3 + 0.7 + 0.2 + 0.2) \\ & = 0.4429 \end{aligned}$$

Crisp decision index = 0.4429

Fuzzy decision index: 75% agak sehat, 25% sehat

Contoh 2 Pemberian Beasiswa

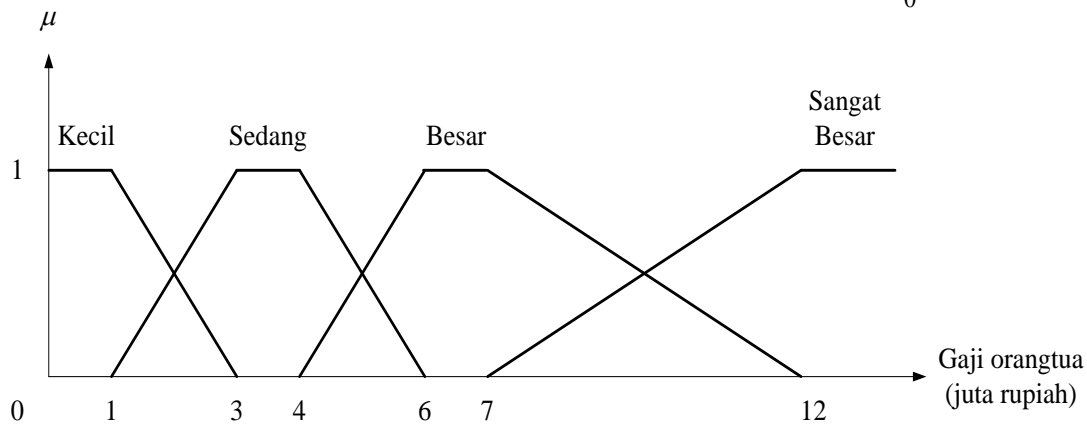
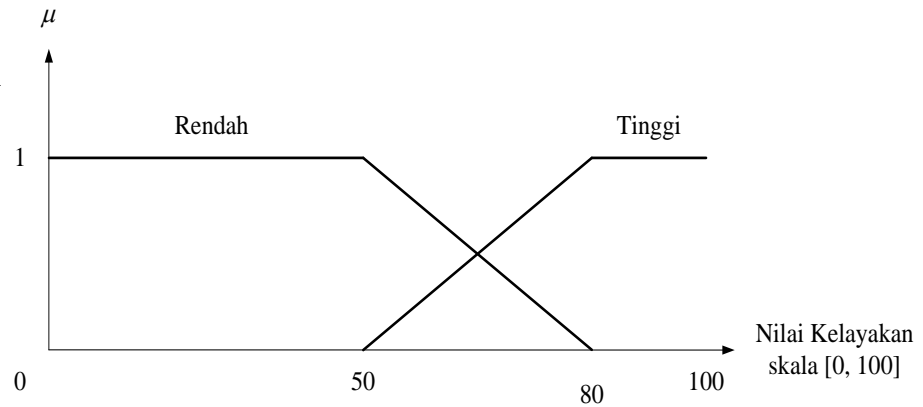
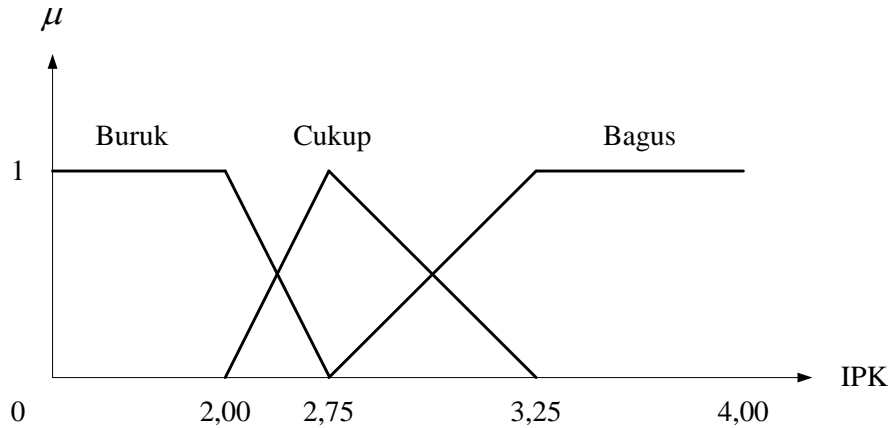
Aturan : dengan Logika Biner

if $IPK \geq 3,00$ and $G \leq 10$ juta

then Dapat Beasiswa

- Mhsw A IPK 3.00 Gaji orang tuanya 10 juta
 - Mhsw B IPK 2.99 Gaji orang tua 1 juta
- A lebih layak mendapatkan beasiswa.
 - Kurang adil (manusiawi).

Himpunan Fuzzy



Aturan Fuzzy untuk Nilai Kelayakan

IPK \ Gaji				
	Kecil	Sedang	Besar	Sangat Besar
Buruk	Rendah	Rendah	Rendah	Rendah
Cukup	Tinggi	Rendah	Rendah	Rendah
Bagus	Tinggi	Tinggi	Tinggi	Rendah

IPK mahasiswa A

Bagus

$$\text{Gradien} = 1 - 0 / 3.25 - 2.75 = 1 / 0.5 = 2$$

$$\text{Pers garisnya } Y = 2 (X - 2.75)$$

Hitung untuk $X = 3.0$

$$Y = 2 * 0.25 = 0.5$$

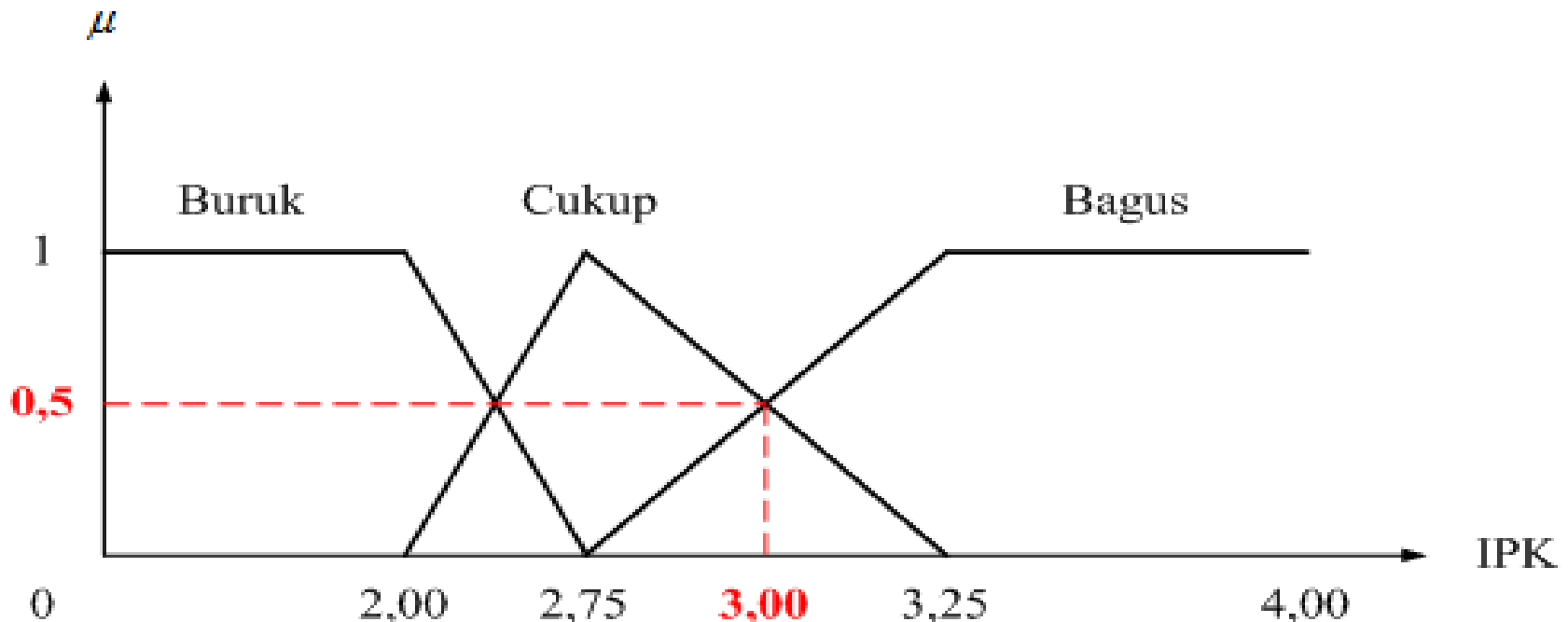
Cukup

$$\text{Gradien} = 0 - 1 / 3.25 - 2.75 = -1 / 0.5 = -2$$

$$\text{Pers garisnya } Y = -2 (X - 2.75) + 1$$

Hitung untuk $X = 3.0$

$$Y = -2 * 0.25 + 1 = 0.5$$



Gaji Ortu mhs A

Sangat Besar

$$\text{Gradien} = (1-0) / (12-7) = 1/5$$

$$\text{Pers garisnya } Y = 1/5 (X-7)$$

Hitung untuk $X=10$

$$Y = 1/5(10-7) = 3/5 = 0.6$$

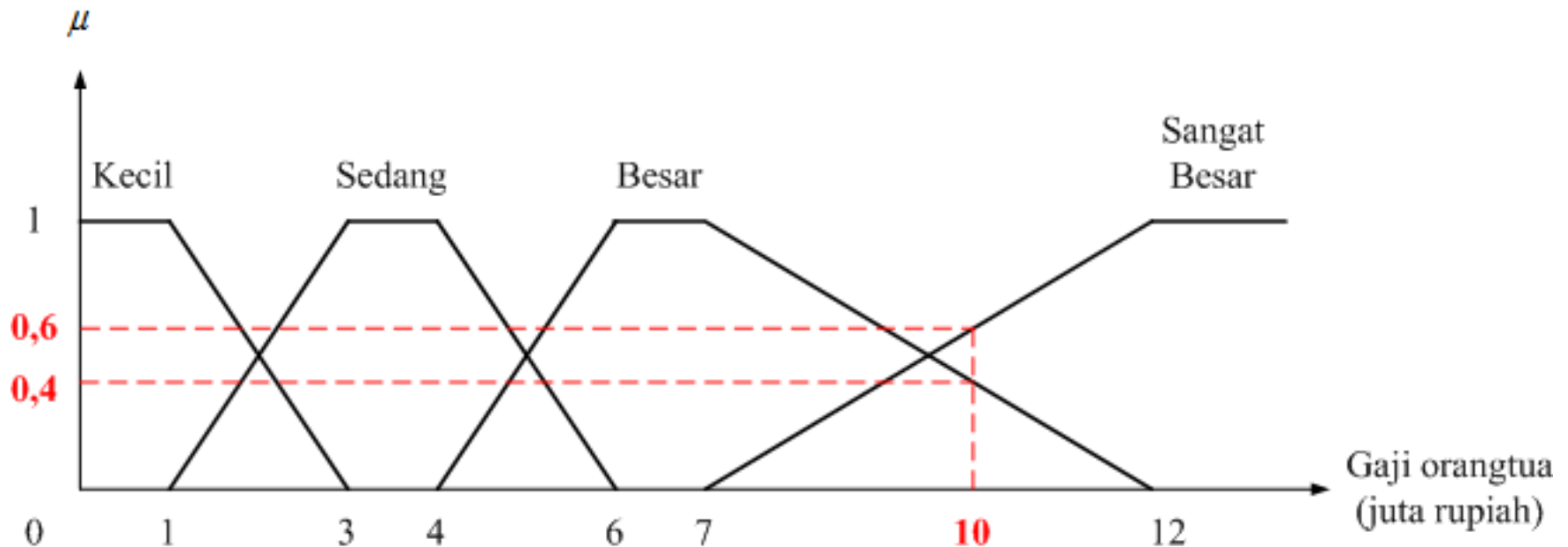
Sangat Besar

$$\text{Gradien} = (0-1) / (12-7) = -1/5$$

$$\text{Pers garisnya } Y = -1/5 (X-7) + 1$$

Hitung untuk $X=10$

$$Y = -1/5(10-7) + 1 = 2/5 = 0.4$$



Fuzzification untuk mhs A

IPK = 3,00

Gaji Orangtua = 10 juta/bulan

IPK = **Cukup** (0,5)

IPK = **Bagus** (0,5)

Gaji Orangtua = **Besar** (0,4)

Gaji Orangtua = **Sangat Besar** (0,6)

Aturan Fuzzy untuk Nilai Kelayakan

IPK \ Gaji	Kecil	Sedang	Besar 0.4	Sangat Besar 0.6
Buruk	Rendah	Rendah	Rendah	Rendah
Cukup 0.5	Tinggi	Rendah	Rendah 0.4	Rendah 0.5
Bagus 0.5	Tinggi	Tinggi	Tinggi 0.4	Rendah 0.5

Fuzzification untuk mhs A

IPK = 3,00

Gaji Orangtua = 10 juta/bulan



IPK = **Cukup** (0,5)

IPK = **Bagus** (0,5)

Gaji Orangtua = **Besar** (0,4)

Gaji Orangtua = **Sangat Besar** (0,6)

Conjunction (\wedge) & Disjunction (\vee)

IF $IPK = \text{Cukup}(0,5)$ AND $Gaji = \text{Besar}(0,4)$ THEN $NK = \text{Rendah}(0,4)$

IF $IPK = \text{Cukup}(0,5)$ AND $Gaji = \text{Sangat Besar}(0,6)$ THEN $NK = \text{Rendah}(0,5)$

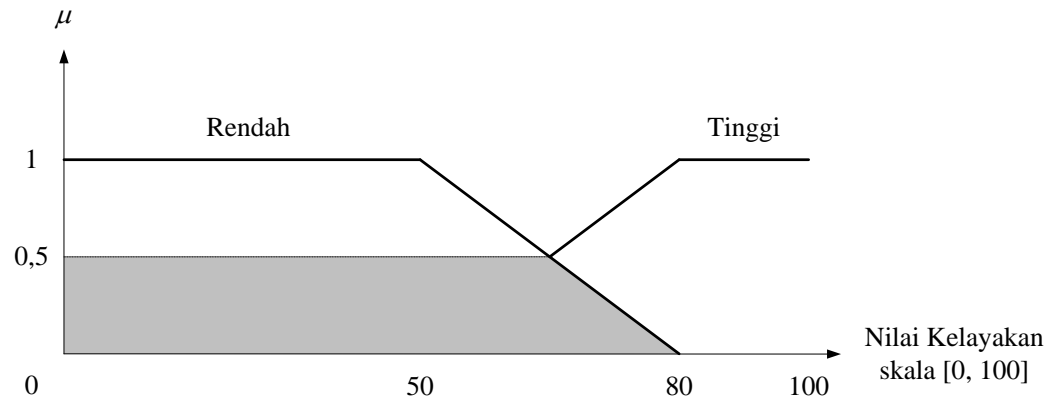
IF $IPK = \text{Bagus}(0,5)$ AND $Gaji = \text{Besar}(0,4)$ THEN $NK = \text{Tinggi}(0,4)$

IF $IPK = \text{Bagus}(0,5)$ AND $Gaji = \text{Sangat Besar}(0,6)$ THEN $NK = \text{Rendah}(0,5)$

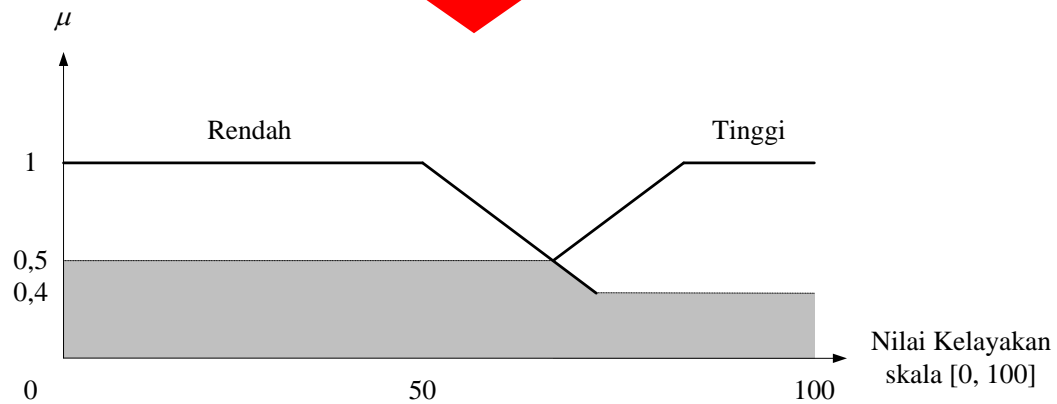
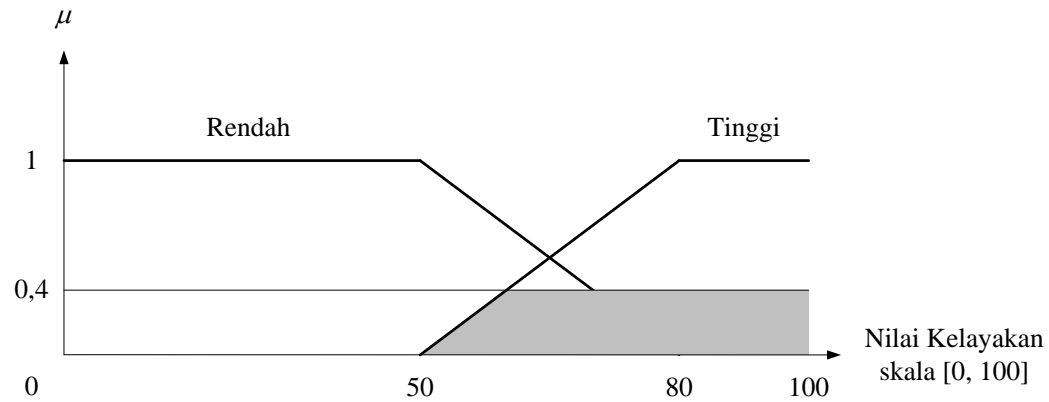


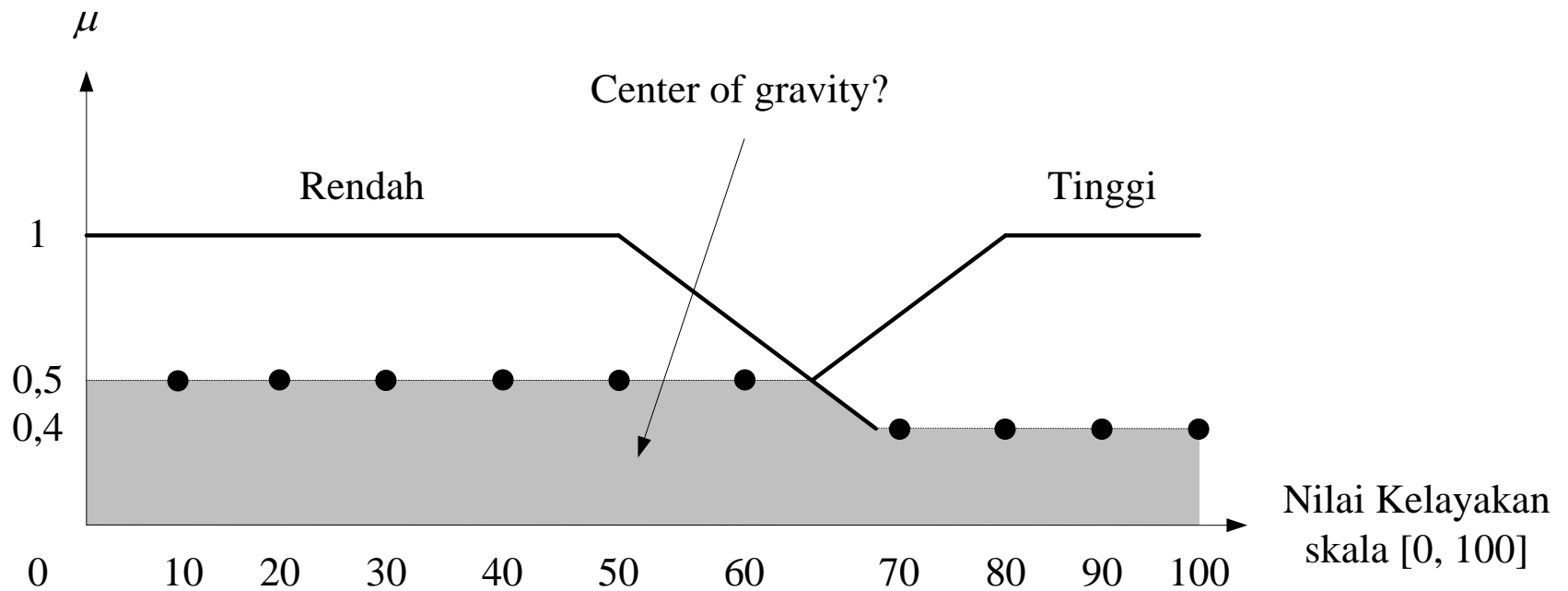
$NK = \text{Rendah}(0,5)$

$NK = \text{Tinggi}(0,4)$



(a)

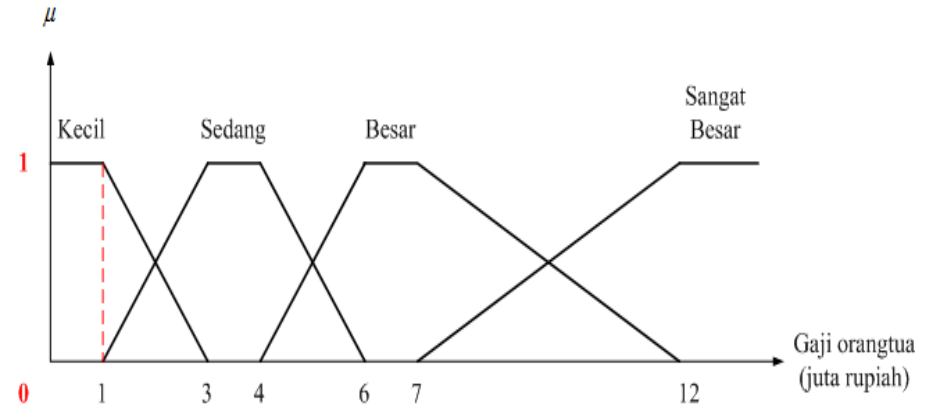
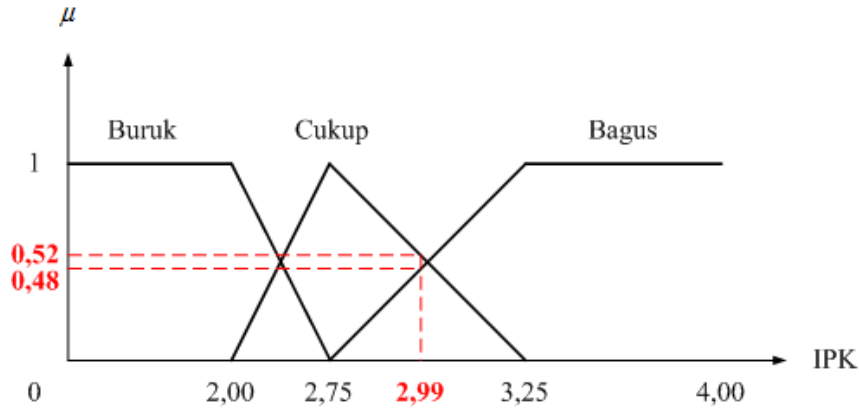




$$y^* = \frac{(10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60)0,5 + (70 + 80 + 90 + 100)0,4}{6(0,5) + 4(0,4)}$$

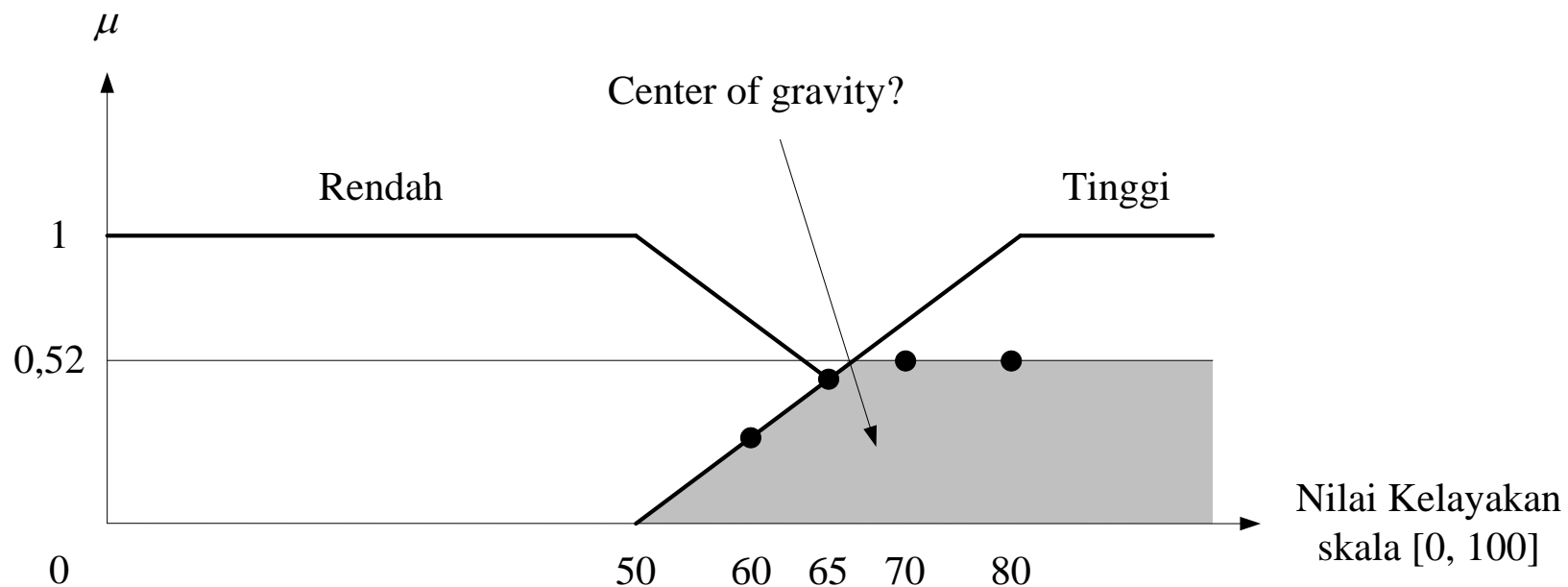
$$y^* = \frac{105 + 136}{4,6} = 52,39$$

mahasiswa B



IPK \ Gaji	Kecil	Sedang	Besar	Sangat Besar
Buruk	Rendah	Rendah	Rendah	Rendah
Cukup	Tinggi	Rendah	Rendah	Rendah
Bagus	Tinggi	Tinggi	Tinggi	Rendah

NK = Rendah (0)
NK = Tinggi (0,52)



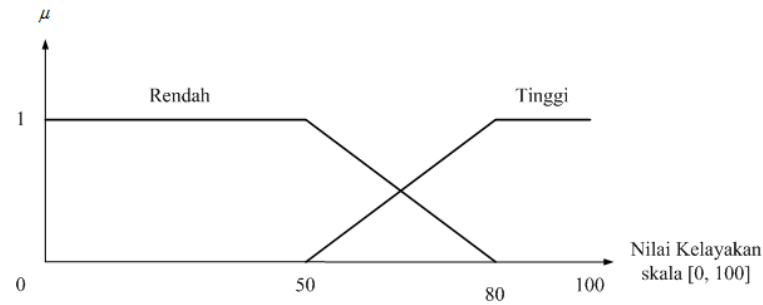
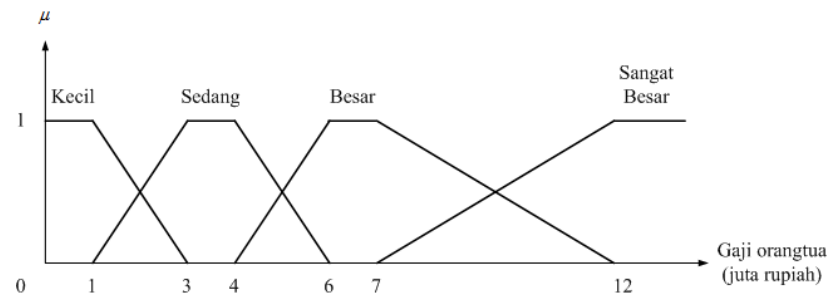
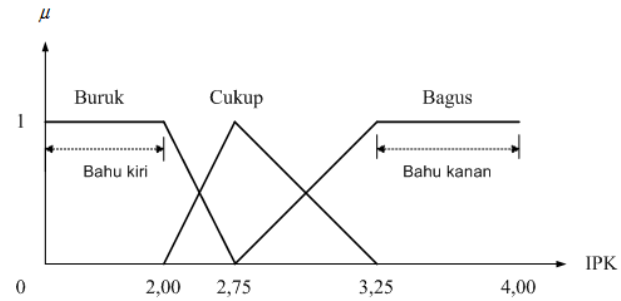
$$y^* = \frac{60 (1 / 3) + 65 (1 / 2) + (70 + 80) (0,52)}{(1 / 3) + (1 / 2) + (0,52) 2}$$

$$y^* = \frac{20 + 32,5 + 78}{2,87334} = 69,66$$

Keputusan Model Mamdani

- Mahasiswa B dengan $IPK = 2,99$ dan Gaji orangtuanya sebesar 1 juta rupiah per bulan memperoleh Nilai Kelayakan sebesar **69,66**.
- Lebih besar dibandingkan dengan Nilai Kelayakan mahasiswa A yang sebesar **52,39**.
- Jadi, mahasiswa B layak mendapatkan beasiswa.

Model Mamdani

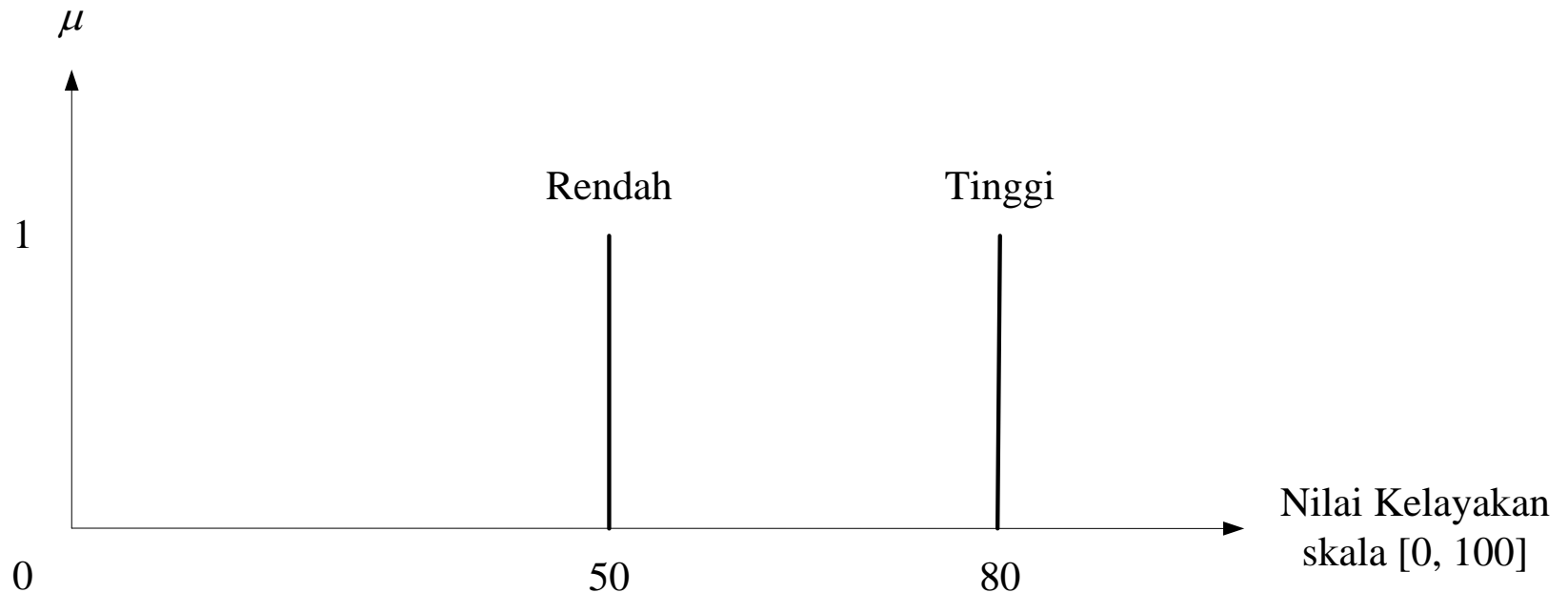


IPK \ Gaji	Kecil 0.5	Sedang 0.5	Besar 0.5	Sangat Besar
Buruk	Rendah	Rendah	Rendah	Rendah
Cukup 0.9	Tinggi	Rendah 0.5	Rendah 0.5	Rendah
Bagus 0.1	Tinggi	Tinggi 0.1	Tinggi 0.1	Rendah

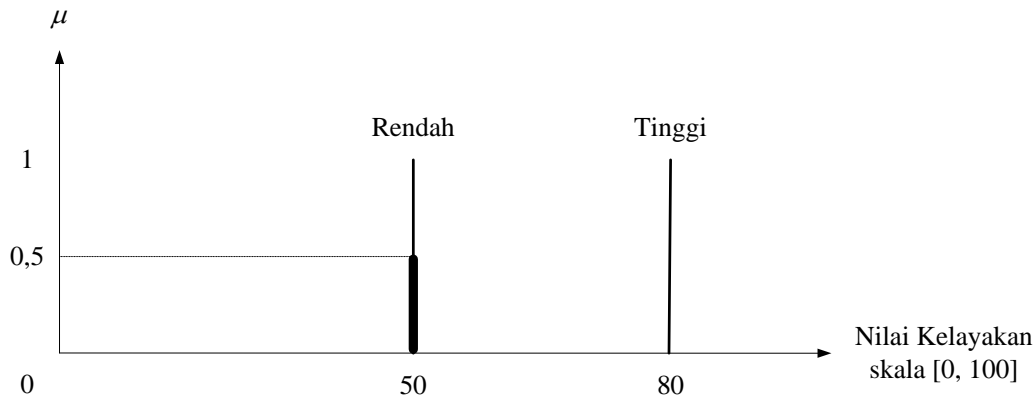
Model Sugeno

- Model ini sering digunakan untuk membangun sistem kontrol yang membutuhkan respon cepat.
- Proses perhitungannya sangat sederhana sehingga membutuhkan waktu relatif cepat sehingga sangat sesuai untuk sistem kontrol.
- Bagaimana jika digunakan untuk masalah pemberian beasiswa?

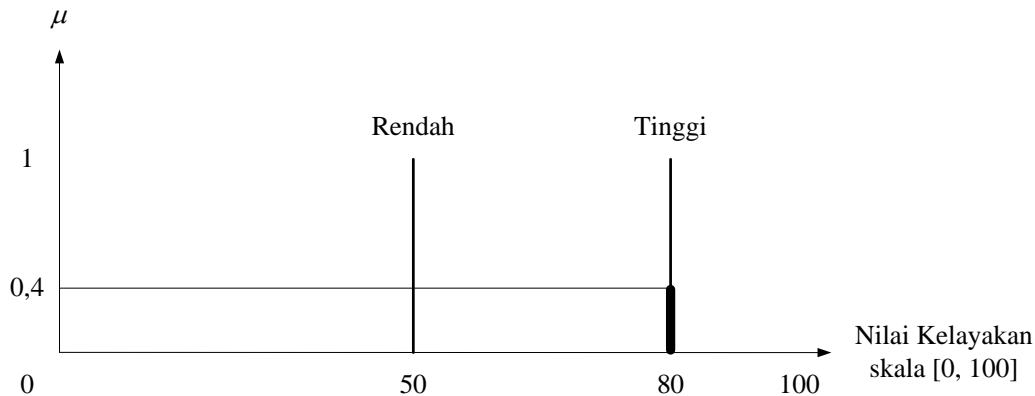
FK *singleton* untuk Nilai Kelayakan



Untuk mahasiswa A



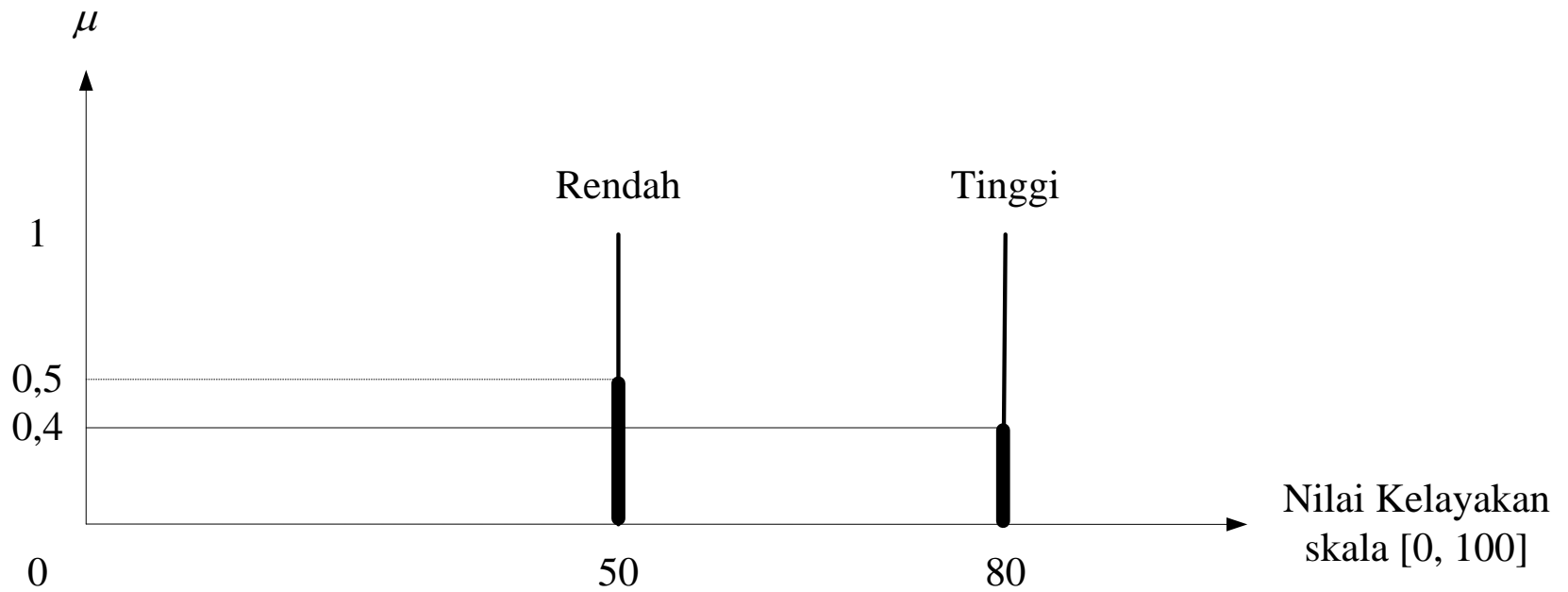
(a)



(b)

- NK = Rendah (0,5)
- NK = Tinggi (0,4)

Proses *Composition*



Defuzzification: Weighted Average

$$y^* = \frac{(0,5)50 + (0,4)80}{(0,5) + (0,4)} = 63,33$$

Mahasiswa B

IF $IPK = \text{Cukup}(0,52)$ AND $Gaji = \text{Kecil}(1)$ THEN $NK = \text{Tinggi}(0,52)$

IF $IPK = \text{Cukup}(0,52)$ AND $Gaji = \text{Sedang}(0)$ THEN $NK = \text{Rendah}(0)$

IF $IPK = \text{Besar}(0,48)$ AND $Gaji = \text{Kecil}(1)$ THEN $NK = \text{Tinggi}(0,48)$

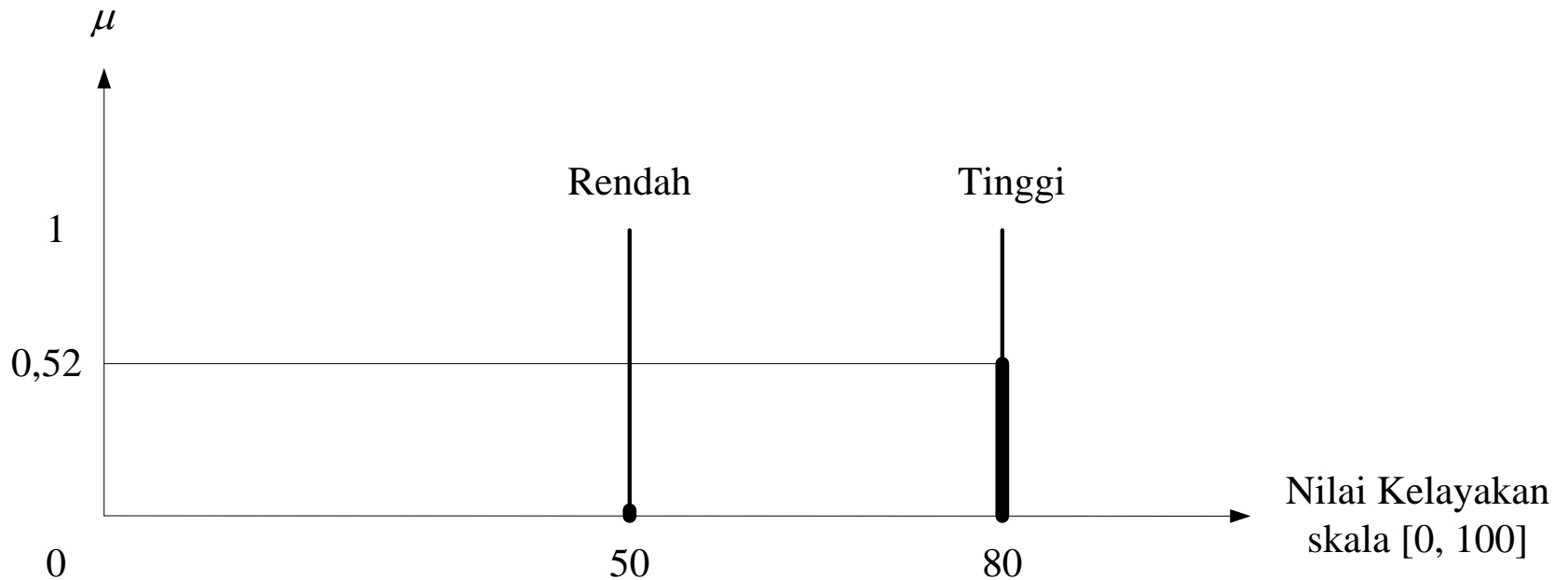
IF $IPK = \text{Besar}(0,48)$ AND $Gaji = \text{Sedang}(0)$ THEN $NK = \text{Tinggi}(0)$



<p>$NK = \text{Rendah}(0)$ $NK = \text{Tinggi}(0,52)$</p>

Untuk Mahasiswa B

- NK = Rendah (0)
- NK = Tinggi (0,52)



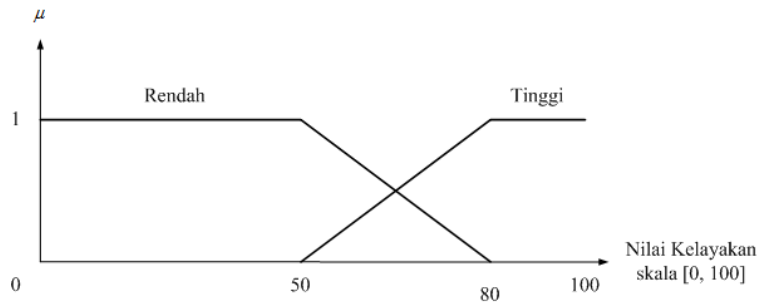
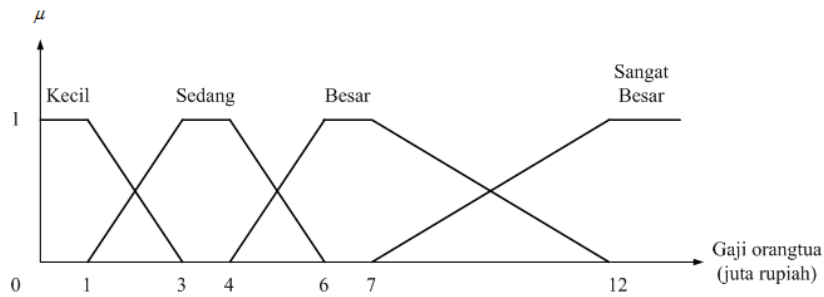
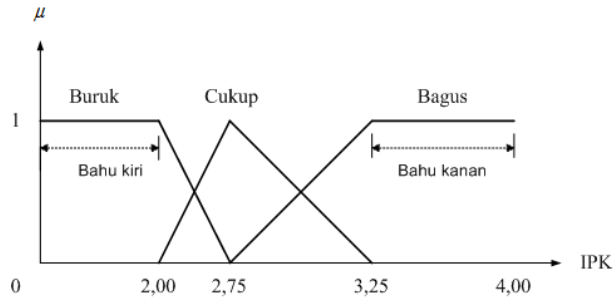
Defuzzification: Weighted Average

$$y^* = \frac{(0)50 + (0,52)80}{0 + 0,52} = 80$$

Keputusan Model Sugeno

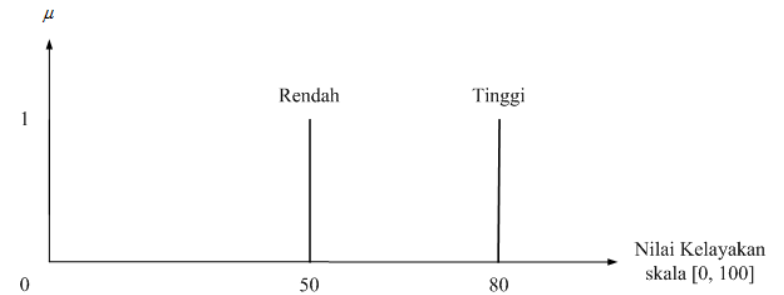
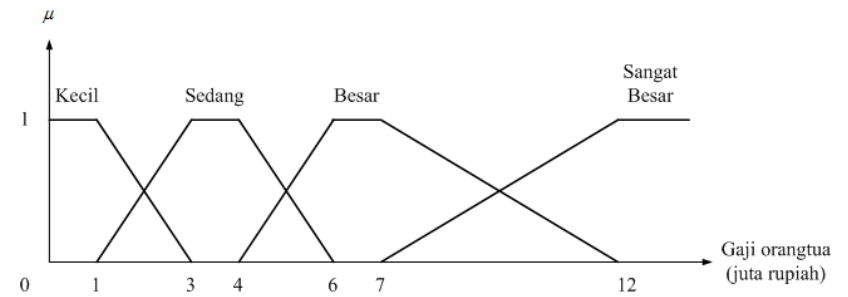
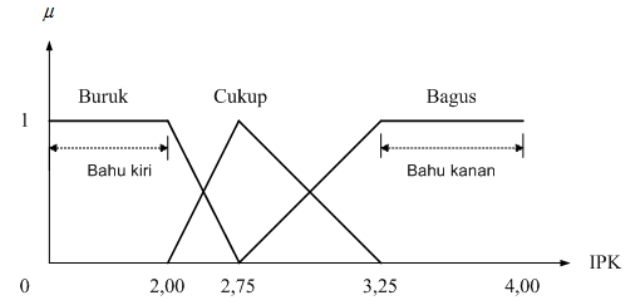
- Mahasiswa B dengan IPK = 2,99 dan Gaji orangtuanya sebesar Rp 1 juta per bulan memperoleh Nilai Kelayakan sebesar **80**.
- Lebih besar dibandingkan dengan Nilai Kelayakan mahasiswa A yang sebesar **63,33**.
- Jadi, mahasiswa B layak mendapatkan beasiswa.

Model Mamdani



IPK \ Gaji	Kecil	Sedang	Besar	Sangat Besar
Buruk	Rendah	Rendah	Rendah	Rendah
Cukup	Tinggi	Rendah	Rendah	Rendah
Bagus	Tinggi	Tinggi	Tinggi	Rendah

Model Sugeno



IPK \ Gaji	Kecil	Sedang	Besar	Sangat Besar
Buruk	Rendah	Rendah	Rendah	Rendah
Cukup	Tinggi	Rendah	Rendah	Rendah
Bagus	Tinggi	Tinggi	Tinggi	Rendah

Nilai Kelayakan mahasiswa A & B

Mahasiswa	Nilai Kelayakan mendapat beasiswa	
	Model Mamdani	Model Sugeno
A	52,39	63,33
B	69,66	80
Selisih A dan B	17,72	16,67