1 Hausaufgabe 4.1

Zu den wichtigsten Zahlenbereichen in der Mathematik gehören die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (z.B. $0, 1, 2, 3 \dots$), die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ (z.B. $\dots, -3, -2, -1, 0, \dots$), die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (z.B. $\sqrt{5}$) und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ (z.B. $1 + \mathrm{i}$).

Hier teste ich den `\klammer`-Befehl:

$$x \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 + \cos(x) \right)$$

Hier test ich den `\vektor`-Befehl mit zwei Argumenten:

Ein möglicher Vektor aus $\mathbb{R}^2$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2 Hausaufgabe 4.2

Es gilt:

$$\begin{aligned}
M_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > y \right\} \\
\mathring{M}_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > y \right\} = M_2 \\
\partial M_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y \right\} \\
\bar{M}_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \geq y \right\}
\end{aligned}$$

Wir betrachten die auf $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^9 + 3x^2y^7}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = 0 \end{cases}$$

Mit Hilfe des `\cfrac`-Befehls setzen wir einen schönen Kettenbruch:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

3 Hausaufgabe 4.3

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -8 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wir lösen es mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 1 \mid 1 \\ 3 & -8 & -2 \mid -2 \\ 1 & 0 & 4 \mid 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \rightsquigarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{rrr} -1 & 2 & 1 \mid -2 \\ 0 & -2 & 1 \mid -2 \\ 0 & 2 & 5 \mid -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \rightsquigarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{rrr} -1 & 2 & 1 \mid -2 \\ 0 & -2 & 1 \mid -2 \\ 0 & 0 & 6 \mid -6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Wir machen folgenden Ansatz für eine partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = x(A_0 \cos(x) + B_0 \sin(x))e^x$$

Für die erste Ableitung erhalten wir:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (A_0 \cos(x) + B_0 \sin(x))e^x \\ &\quad + x(-A_0 \sin(x) + B_0 \cos(x))e^x \\ &\quad + x(A_0 \cos(x) + B_0 \sin(x))e^x \\ &= e^x(\cos(x)(A_0 + A_0 x + B_0 x) + \sin(x)(B_0 - A_0 x + B_0 x)) \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
y_p''(x) &= e^x(\cos(x)(A_0 + A_0x + B_0x) + \sin(x)(B_0 - A_0x + B_0x)) \\
&- \sin(x)(A_0 + A_0x + B_0x) + \cos(x)(A_0 + B_0) \\
&+ \cos(x)(B_0 - A_0x + B_0x) + \sin(x)(-A_0x + B_0) \\
&= e^x\cos(x)(A_0 + A_0x + B_0x + A_0 + B_0 + B_0 - A_0 + B_0x) \\
&+ \sin(x)(B_0 - A_0x + B_0x - A_0 - A_0x - B_0x - A_0 + B_0) \\
&= e^x(\cos(x)(2A_0 + 2B_0 + 2B_0x) \\
&+ \sin(x)(-2A_0 + 2B_0 - 2A_0x))
\end{aligned}$$