03 Hausaufgabe

Alina Chudnova

15. November 2025

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\cdot\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\right)\\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{(k+1)-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)\\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Wir betrachten die Folge $(x_n, y_n)_{n\in N} := \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)_{n\in N}$. Sie erfüllt:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0) \tag{1}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
g(x_n, y_n) &= g\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) && (2)\\
&= \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^4} && (3)\\
&= \frac{\frac{1}{n^4}}{2\cdot\frac{1}{n^4}} && (4)\\
&= \frac{1}{2} && (5)\\
&\neq 0 = g(0,0) && (6)
\end{aligned}$$

Mit der Betrachtung des Grenzwertes $l\to\infty$ erhalten wir:

$$\|\exp(A)-\exp(B)\|_2 \leq \|A-B\|_2\cdot\exp(\max\{\|A\|_2, \|B\|_2\}) \tag{TKS}$$

Für $a, b > 0$ sei $R := [0, a] \times [0, b]$ und $f(x, y) := xe^{xy}$. Wir berechnen das Integral:

$$\begin{aligned}
\int_1 f(x,y)\,dV &= \int_0^a \left(\int_0^b xe^{xy}\,dy\right)\,dx \\
&= \int_0^a \left(x \cdot \left[\frac{1}{x}e^{xy}\right]_{y=0}^{y=b}\right)\,dx \\
&= \int_0^a \Big((e^{xb}-1)\Big)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{b}e^{xb} - x\right]_0^a \\
&= \frac{1}{b}(e^{ab}-1) - a
\end{aligned}$$

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$y' = e^y \cdot \sin(x)$$

Wir können sie mit der Methode der Trennung der Variablen lösen. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
y' &= e^y \sin(x) \\
\Leftrightarrow e^{-y}y' &= \sin(x) \\
\Leftrightarrow e^{-y}\frac{dy}{dx} &= \sin(x) \\
\Leftrightarrow e^{-y}dy &= \sin(x)dx
\end{aligned}$$

Seien $n, l \in \mathrm{N}$ und $A, B \in \mathrm{R}^{n \times n}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{l}\frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{l}\frac{B^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!}\left(A^k - B^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k!}\left(A^k - B^k\right) \\
&= \dots \\
&= (A-B)\sum_{k=0}^{l-1}\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k}A^jB^{k-j}
\end{aligned}$$