

03 Hausaufgabe

Alina Chudnova

15. November 2025

Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \cdot (\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1) - k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Wir betrachten die Folge $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Sie erfüllt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0) \tag{1}$$

Weiter gilt:

$$g(x_n, y_n) = g\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \tag{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^4} \tag{3}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^4}}{2 \cdot \frac{1}{n^4}} \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2} \tag{5}$$

$$\neq 0 = g(0, 0) \tag{6}$$

Mit der Betrachtung des Grenzwertes $l \rightarrow \infty$ erhalten wir:

$$\|\exp(A) - \exp(B)\|_2 \leq \|A - B\|_2 \cdot \exp(\max\{\|A\|_2, \|B\|_2\}) \tag{TKS}$$