Programas Informáticos y Geometría Plana

Universidad de Granada

Alberto Contreras Ibáñez

- Fomenta el trabajo en grupo.
- Realiza con rapidez y facilidad simulaciones de experimentos.
- La capacidad para representar gráficamente la información.
- Es un elemento motivador.
- Permite formular conjeturas.

Vamos a ver una forma sencilla de construir la elipse, sin conocer sus focos, a partir de la ecuación

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

Construimos dos circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 = r^2, x^2 + y^2 = R^2$. En paramétricas:

$$\begin{cases} x = rcos(t) \\ y = rsen(t) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x = Rcos(t) \\ y = Rsen(t) \end{cases}$$

Las ecuaciones de la elipse en paramétricas son:

$$\begin{cases} x = rcos(t) \\ y = Rsen(t) \end{cases}$$

Por tanto tenemos que pintar las dos circunferencias y tomar la coordenada x de la primera y la y de la segunda. Podemos ver esta construcción en: `https://www.geogebra.org/m/scrqecjs`.

Con la misma idea que en la construcción vamos a representar la proyección de un pentágono desde un plano vectorial al plano $\{ z=0 \}$. Consiste en trazar el pentágono en las dos circunferencias anteriores y proyectarlo a la elipse. Después mediante una traslación duplicamos el pentágono para alzar el prisma. Y podemos observar que pasa al rotarlo.

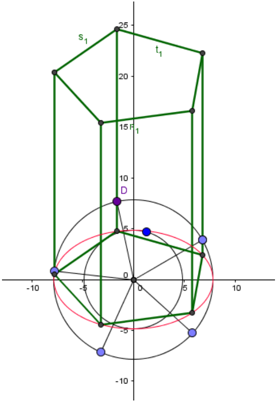

Figura: Actividad 1.4 - Proyección de un pentágono y su prisma

Vamos a ver como se construye la elipse o la hipérbola a partir de la circunferencia focal. Nos dan los focos y la suma de distancias a los focos d.

- Trazamos la circunferencia centrada en un foco y de radio d (llamada circunferencia focal).
- Tomamos un punto de la circunferencia y lo unimos con los focos. Uno es un radio y el otro no.
- Trazamos la mediatriz del segundo segmento y buscamos el punto de corte con el radio, ese punto de corte describe la cónica y esa mediatriz es la tangente en dicho punto.

Podemos ver esta construcción en la "Actividad 1.5".
`https://www.geogebra.org/m/BJyXGaZp`

La propiedad óptica de la elipse

Sea L una recta tangente a una elipse en un punto P. Entonces L es la bisectriz del ángulo exterior F_1PF_2.

Demostración.

Sea X un punto arbitrario de L distinto de P. Como X está fuera de la elipse, nosotros sabemos que $XF + XF_2 > PF_1 + PF_2$, equivalentemente, de todos los puntos de L el punto P tiene la suma de distancias a F_1 y F_2 más pequeña. Esto significa que los ángulos formados por las lineas PF_1 y PF_2 con L son iguales. $\square$

Ver en "Actividad 8.4": `https://www.geogebra.org/m/kE5BXzFr`.

Teorema de Pascal

Si hexágono en $\mathbb{P}^2$, inscrito en una cónica propia $\mathcal{C}$ entonces sus tres puntos diagonales están alineados. Dicha recta se denomina la *recta de Pascal*.

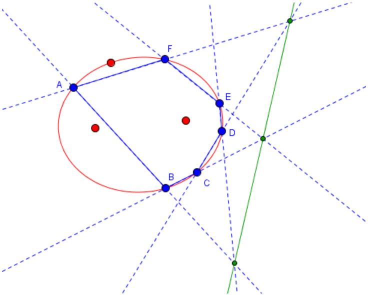

Figura: Actividad 5.1 - Teorema de Pascal

Ver en: `https://www.geogebra.org/m/YQxG8ZGf`.

Supongamos que la recta de Pascal es disjunta con la cónica. Usando una proyectividad movemos la recta que une $AB \cap DE$ y $BC \cap EF$ al infinito. Y usando una afinidad transformamos la cónica en una circunferencia. Entonces AB es paralelo a DE y BC es paralelo a EF, necesitamos probar que CD es paralelo a FA, en ese caso se cortarían en la recta del infinito como se cortan $AB \cap DE$ y $BC \cap EF$ y por tanto las tres intersecciones estarían alineadas. Podemos observar la situación en la siguiente figura:

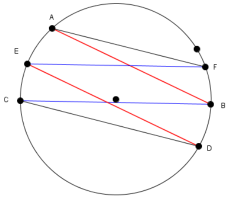

Figura: Actividad 5.5 - Teorema de Pascal (demostración 1.1)

Ver " Actividad 5.5:"`https://www.geogebra.org/m/aF6ShXJh`.

Como los ángulos ABC y DEF tienen lados paralelos, son iguales, y por tanto sus ángulos centrales también son iguales. Por tanto los arcos AC y DF son también iguales. Veamos que los segmentos AF y CD son paralelos.

Propiedad:

Si tenemos un cuadrilátero inscrito en una circunferencia con dos lados opuestos de la misma longitud (en el dibujo, los lados rojos), entonces los otros dos lados son paralelos.

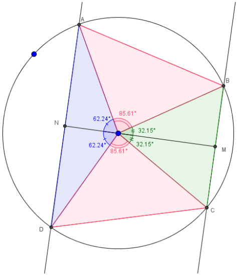

Figura: Actividad 5.6 - Teorema de Pascal (demostración 1.2)

Demostración.

Trazamos los cuatro radios que acaban en cada vértice del cuadrilátero. Se forman cuatro triángulos isósceles. Los dos triángulos rosas tienen tres lados iguales y por tanto sus tres ángulos son iguales.

Trazamos las alturas de los triángulos amarillo y azul que llegan al centro de la circunferencia. Estas alturas son también bisectrices, ya que estos triángulos son isósceles.

Veamos que los ángulos centrales verde y marrón son ángulos de 180 grados.

Ángulo MON$=$ medio ángulo azul $+$ ángulo rosa $+$ medio ángulo verde$=$ ángulo NOM, donde O es el centro de la circunferencia.

Así, las dos alturas son la misma recta y por tanto, los lados opuestos son paralelos.

□

Aplicamos este resultado y obtenemos que AF es paralelo a CD.

Vamos a ver el teorema dual del teorema de Pascal:

Teorema de Brianchon:

Si un hexágono está circunscrito en una cónica propia, entonces sus tres rectas diagonales concurren.

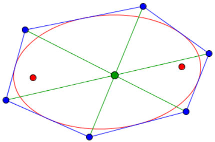

Figura: Actividad 7.1 - Teorema de Brianchon

Ver: `https://www.geogebra.org/m/TeU7qKK8`.

A continuación vamos presentar un lugar geométrico que resulta ser una cónica, o mas concretamente una cónica tangencial.

Lugar geométrico: Cónica tangencial

Sea una cónica (azul) y dos puntos interiores (verdes), trazamos todos los triángulos inscritos (rojos) a la cónica tales que dos de sus lados pasan por los dos puntos. Entonces, el otro lado es tangente a una cónica.

Ver: `https://www.geogebra.org/m/TNufvbVc`.

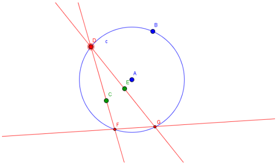

Figura: Cónica tangencial (1)

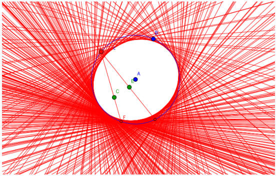

Figura: Cónica tangencial (2)

Veamos ahora la propiedad dual de la propiedad anterior:

Lugar geométrico: Cónica puntual:

Sean una conica (azul) y dos rectas exteriores (azules), trazamos todos los triangulos (rojos) circunscritos a la cónica que tienen un vértice sobre cada una de las rectas azules. Entonces el otro vértice describe una cónica (verde).

Ver en: `https://www.geogebra.org/m/ATCGrqsy`.

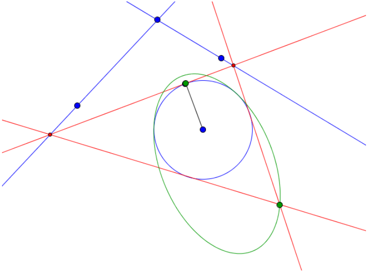

Figura: Actividad 10.2 - Cónica puntual

- A. Akopyan A. Zaslavsky, Geometry of Conics, American Mathematical Society, 2007.
- C. Boyer, Historia de las Matemáticas, Alianza Universitaria, 1987, Madrid.
- Luis Ugarte Vilumbrales, Geometría Proyectiva Plana.
- http://www.cut-the-knot.org/