



Universidad de Granada

Facultad de Ciencias
Departamento de Geometría y Topología

Trabajo Fin de Grado

Programas Informáticos y Geometría Plana

Autor: Alberto Contreras Ibáñez
E-mail: alci@correo.ugr.es
Tutor: Antonio Ros Mulero

Agradecimientos

A mis padres, por todo el apoyo que me han dado.

Summary

We will work about Plane Geometry and software. More specifically we shall study the Conical in its affined concept, its concept Euclidean and its projective concepts, its definition , its properties and the most importants theorems along with their mathematics applications, physics applications, and optic applications.

We will use the GeoGebra Program for show geometrical properties of conics, methods of constuction. We will enunciate theorems that later we will prove formally , etc. You can download it here: <https://www.geogebra.org/download>.

This work has been written with the intention that anyone can read it, understand it and take advantage of it, regardless of their knowledge in geometry.

In the first chapter we will start seeing an historical introduction of conics in which we talk about the discovery of conics in ancient Greece. The discovery of the conic sections was linked one of the three problems of the geometry basic to Greek , the duplication of cube or the problem of Delos.

The plague killed a quarter of the Athenian population and the deep impression that caused was likely the source of the second problem. It was sent a delegation to the oracle of Apollo at Delos, to ask how the plague could be averted, the oracle contested that it was necessary to duplicate the shrine dedicated to Apollo. Apparently the Athenians doubled the dimensions of the altar, but this did not work to stop the plague, obviously they had increased volume eight times instead of two.

It was Hipocrates of Chios who showed it could get the duplicacion if you could find curves that verifie $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ and Menecmo found the curves as sections of circular cones right, acute and obtuse. But Apollonius of Perga who makes an exhaustive parsing displacing all previous and who gives a definitive formulation.

Apollonius was the first to get all the curves from sections of the right cone, Ellipsis, Hyperbola and Parabola.

In the seventeenth century, Kepler worked or the conics in Astronomy to discovering that the orbits of some planets were ellipses and parabolics.

It is included the discovery of Projective Geometry in the Renaissance and its relationship with the conics.

After it is talking about the history of Sketchpad program. The origin of The Geometer's Sketchpad goes back to the '80s and the Visual Geometry

Project, a project of research at the University of Swarthmores. They had the objective of to develop new materials based on the technology for be used in the teaching of the geometry.

We will also talk about the uses that you can give the program Sketchpad and the advantages and disadvantages of to teach geometry with this type of programs. The most important advantages are:

- It facilitates the acquisition on concepts. Using the computer as a tool to acquire concepts and deepen them, allow to detect unprecise schemes and it correct it.
- It allows treatment of diversity. It helps create an environment pleasing and work that respects the peculiarities and the pace of student.
- It fosters teamwork. The work on the computer can be perform by a group, enabling students to explain to other their ideas, establishing communication and enrichment of thoughts.
- It appreciates error. The error is not to be equated with failure. It reveal errors acquired by the pupils, and it is a condition necessary to overcome them.
- It make quick and easy simulation experiments. The caracter unpredictable and random that has a probability is subject to laws that are perceptible only when we consider a program number data very high, so the processor is an appropriate tool to manipulate this information.
- It have the ability to represent graphically the information. The facility with certain informatic applications of simultanear graphic and numeric information is an indisputable support for the study of functions or statistic.
- It is a motivator. Moreover, at present, it is usual in daily lives of the students.

We will use the program GeoGebra in this thesis because it is free, multiplatform and it have more capabilities than Sketchpad. It is basicly one geometric and algebraic processor, that is to say, a compendium of mathematical software with interactive geometry that join algebra and calculus, so it can be also used in fisic, business prospects, estimates decision, estrategic, and other disciplines. We have prepared a webpage with a lot of examples, activities that it illustrates and is allows to prove some theorems. Thus the reader can manipulate the data and the reader sees the construction. It is one of the main contributions we do for the study of conics in Plane Geometry (Euclidean , affine and projective).

Ahead we introduce the definitions and properties of the affined conics and proyective conics:

A conic is the set of points

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax^2 + 2by + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}$$

C is a real proper conic, it is projectively equivalent to

$$x^2 + y^2 = 1$$

or it can be a degenerate conic (a pair of lines or imaginary conic).

Moreover, all real proper conic is equivalent to:

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parabola: $x^2 = 4cy$

Hyperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

A projective conic is $C = \{x \in \mathbb{P}^2; x^t Ax = 0\}$ where A is a symmetric non-zero matrix of order 3.

We will see Euclidean classifications and projective classification of conics and we will introduce the duality in \mathbb{P}^2 .

In Activity 1, we will see how to build an ellipse from two circumferences, and the shadows that produce different polygons. For example, the shadow of a circle is an ellipse. Moreover we will build the prisms that are based on these shadows and we will rotate it. We will make the construction of the ellipse and the hyperbola with the focal circumference.

In Activity 2, we will see an application of the conics in geolocalization. Three observers listen a noise, we know the position of the three observers and the time that they takes to listen the noise since is produced. The problem is to determine the position of the noise. With the speed of sound we can determinate the distance from the noise till the observers. We calculate the difference of time, two by two, and we know that the geometric place of points whose difference of distances since two points (foci) is constant is a hyperbola. Each pair of points make a hyperbola, and the noise is in the intersection of these hyperbolas.

In the second chapter the main theme is the Pascal's theorem, it say that a hexagon is in a conic if and only if the points of intersection of the opposite sides are in a line. We also will see the limit or particular cases of these theorem (in pentagon, quadrilateral and triangle) and its dual theorem, which is Brianchon's theorem, which says if an hexagon is circumscribed in a conic, then the three diagonal lines meet in a point. And also in their limit cases (in pentagon, quadrilateral and triangle).

In Activity 6, we will deduce from the Pascal's Theorem: 5 points non-aligned 3-3 are in a conic and a constructive proof of this fact. It is the central activity of this thesis. It is the best activity to show how to make conjectures, to show constuctions and to prove theorems.

In the final chapter, we will see some applications of the conics. In the first, We will study the Optical Property of the conics, which says that if a beam of light is reflected in a mirror, then the reflected angle is equal to the angle of incidence. This is related to the Fermat's rule, which says that light always travels the way shorter. We will prove that the path is, indeed, the shorter one. We will prove this property for ellipses, hyperbolas and parabolas.

The following application is the Poncelet's theorem:

Let $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ be belong to pencil of conics \mathcal{F} . We draw a tangent from an arbitrary point $A_0 \in \alpha_0$ till α_1 and we find the other point of intersection A_1 with α_0 . We draw a tangent from A_1 to α_2 and we find his intersection, A_2 , with α_0 , etc. If for some A_0 , the point A_n is equal to A_0 , then the same is true for any other point of the conic α_0 .

After we will show the duality between the punctual conic and the tangential conic.

In Activity 11, we will see that if we have an hexagon whose diagonals meet in a point. Then, the six circumcenters of the triangles formed by the diagonals are in a conic.

In Activity 12, we will see that if we have six points A, B, C, D, E, F such that AB is parrallel to CD, AE is parallel to CF, BF is parallel to DE. Then, the six points belong to unique conic.

In the last activity we will see that if we have a triangle ABC and an interior point and we consider three lines through P and parallel to the oposite sides of the triangle, whose intersections with the sides are $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$. Then these six points are in a conic.

Our principal bibliography is [6] for Pascal's theorem, the Property Optical and Poncelet's theorem, and [1] for the applications in the final chapter.

To see the activities we can go to: <http://www.geogebra.org/aciba90>

Resumen

Como el título del trabajo indica, trabajaremos con la Geometría Plana y los programas informáticos, más concretamente estudiaremos las cónicas, en su concepto afín, euclídeo y proyectivo, su definición, propiedades y teoremas más importantes junto con sus aplicaciones en la matemática misma, en la física, en la ingeniería y en la óptica. Haremos uso del programa GeoGebra para mostrar propiedades geométricas de las cónicas, cómo se construyen, enunciaremos teoremas que luego probaremos formalmente, etc. Puede descargarse gratuitamente en: <https://www.geogebra.org/download>.

Este trabajo ha sido redactado con la intención de que cualquier persona pueda leerlo, entenderlo y sacar provecho de él, independientemente de sus conocimientos en geometría. En el primer capítulo empezaremos viendo una introducción histórica en la que hablaremos del descubrimiento de las cónicas en la antigua Grecia. El descubrimiento de las secciones cónicas estuvo ligado a uno de los tres problemas clásicos de la geometría griega, la duplicación del cubo o el problema de Delos.

La peste se llevó una cuarta parte de la población ateniense y la profunda impresión que causó fue probablemente el origen del segundo problema. Se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delos, para preguntar cómo podría conjurarse la peste, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo. Al parecer los atenienses duplicaron las dimensiones del altar, pero esto no sirvió para detener la peste, obviamente habían aumentado su volumen ocho veces en lugar de dos.

Fue Hipócrates de Chios quien demostró que se podría conseguir la duplicación del cubo siempre que se pudiera encontrar curvas que cumplieran $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, y Menecmo halló dichas curvas como secciones de conos circulares rectos, agudos y obtusos.

Pero es Apolonio de Perga quien hace un análisis exhaustivo que desplaza a todos los anteriores y quien da una formulación definitiva.

Apolonio fue el primero en obtener todas las curvas a partir de secciones del cono recto, Elipsis, Hyperbola y Parabola.

En el siglo XVII, Kepler trabajó con las cónicas en Astronomía, descubriendo que las orbitas de algunos planetas eran elípticas y parabólicas.

También se incluye el descubrimiento de la Geometría Proyectiva en el Renacimiento y su relación con las cónicas.

Después se habla de la historia del programa Sketchpad. El origen de The Geometer's Sketchpad se remonta a los '80 y al Visual Geometry Project, un proyecto de investigación en la Universidad de Swarthmores. Tenía como objetivo desarrollar nuevos materiales basados en la tecnología para ser utilizados en la enseñanza de la geometría.

También se habla de los usos que se le puede dar al programa Sketchpad y de las ventajas e inconvenientes de enseñar geometría con este tipo de programas. Las ventajas más importantes son:

- Facilita la adquisición de conceptos. Utilizar el ordenador como instrumento para adquirir conceptos o profundizar en ellos, permite detectar esquemas no suficientemente precisos y transformarlos en otros más adecuados.
- Permite el tratamiento de la diversidad. Ayuda a crear un ambiente de trabajo grato y estimulante que respeta las peculiaridades y el ritmo de aprendizaje del alumnado.
- Fomenta el trabajo en grupo. El trabajo en el ordenador se puede realizar en grupo, permitiendo a los alumnos y alumnas explicar a los demás sus ideas, estableciendo la comunicación y el enriquecimiento de pensamientos.
- Valora positivamente el error. El error no ha de equipararse a fracaso. Poner de manifiesto los errores de los alumnos y alumnas adquiere una dimensión positiva y es una condición necesaria para superarlos.
- Realiza con rapidez y facilidad simulaciones de experimentos. El carácter imprevisible y aleatorio que tiene el azar está sujeto a leyes que sólo son perceptibles cuando consideramos un número de datos muy elevado, por lo que el procesador es un instrumento adecuado para manipular dicha información.
- La capacidad para representar gráficamente la información. La facilidad que tienen ciertas aplicaciones informáticas para simultanear información gráfica y numérica es un apoyo indiscutible para el estudio de funciones o la estadística.
- Es un elemento motivador. Además, en la actualidad, es el medio habitual del alumno en su vida cotidiana.

Nosotros en este trabajo utilizaremos el programa GeoGebra que es libre, multiplataforma y amplía las funciones de Sketchpad. Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo, por lo que puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas. Hemos preparado en la página web <http://www.geogebra.org/aciba90> donde encontramos una

serie de actividades que ilustran, explican, e incluso permiten demostrar algunos teoremas y propiedades de las cónicas. De esta forma el lector puede manipular los datos iniciales y ver como esto repercute en la construcción, pero las propiedades se conservan. Permite seguir la construcción de una forma mas clara. El eje central de este trabajo son estas actividades, que son una de las principales contribuciones que hacemos al estudio de las cónicas en Geometría Plana euclídea, afín y proyectiva.

A continuación se introducen las definiciones y propiedades de las cónicas afines y proyectivas: Una cónica afín es el conjunto de puntos

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax^2 + 2by + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}$$

Se tiene que o bien C es una cónica propia real, en cuyo caso es proyectivamente equivalente a

$$x^2 + y^2 = 1$$

o bien es degenerada (par de rectas, cónica imaginaria).

Además toda cónica propia real es equivalente, salvo un movimiento del plano, a una de las siguientes:

Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parábola: $x^2 = 4cy$

Hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Una cónica proyectiva es $C = \{x \in \mathbb{P}^2; x^t Ax = 0\}$ donde A es una matriz simétrica de orden 3 no nula.

Veremos las clasificaciones euclídea y proyectiva de las cónicas y una introducción a la dualidad en \mathbb{P}^2 .

En la Actividad 1 veremos como construir una elipse a partir de dos circunferencias, y las sombras que producen diferentes polígonos. Por ejemplo, la sombra de una circunferencia es una elipse. Además construiremos los primas que tienen como base estas sombras y los haremos rotar.

En la Actividad 2 veremos una aplicación de las cónicas en geolocalización. Tres observadores escuchan un ruido, conocemos la posición de los tres observadores y el tiempo que tardan en escuchar el ruido desde que se produce. El problema consiste en determinar la posición del ruido. Con la velocidad del sonido podemos determinar a que distancia se encuentran los observadores del ruido. Calculamos la diferencia de tiempo dos a dos y sabemos que el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancia a dos puntos fijos (focos) es constante es una hipérbola. Así, cada par de puntos forman una hipérbola, y el ruido se encuentra en la intersección de dichas hipérbolas.

En el segundo capítulo el tema principal será el Teorema de Pascal, que afirma que un hexágono en \mathbb{P}^2 está en una cónica si y solo si los puntos

de intersección de los lados opuestos están alineados. También veremos casos límite o particulares de dicho teorema (en pentágonos, cuadriláteros y triángulos) y su teorema dual, que es el Teorema de Brianchon, que dice que si un hexágono está circunscrito en una cónica propia, entonces sus tres rectas diagonales concurren. Y también sus casos límite (en pentágonos, cuadriláteros y triángulos). En la Actividad 6 deduciremos del Teorema de Pascal que 5 puntos no alineados 3 a 3 están en una única cónica y una demostración constructiva de este hecho. Esta construcción es uno de los resultados centrales de nuestro trabajo. Es la mejor para mostrar como usar el programa para conjeturar resultados, mostrar construcciones, y probar teoremas.

En el capítulo final veremos una serie de aplicaciones de las cónicas. En primer lugar estudiaremos la Propiedad Óptica de las cónicas, que dice que si un rayo de luz es reflejado en un espejo, entonces el ángulo de reflexión es igual que el ángulo de incidencia. Esto está relacionado con el principio de Fermat, el cual dice que la luz siempre viaja por el camino más corto. Probaremos que el camino es en efecto el más corto. Probaremos esta propiedad para elipses, hipérbolas y parábolas.

La siguiente aplicación es el Teorema de Poncelet: Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ cónicas pertenecientes al haz \mathcal{F} . Desde un punto arbitrario A_0 en α_0 trazamos una tangente a α_1 y hallamos su segundo punto de intersección A_1 con α_0 . Desde A_1 trazamos una tangente a α_2 y hallamos su intersección A_2 con α_0 , etc. Si para algún A_0 el punto A_n coincide con A_0 , entonces se cumple lo mismo para cualquier otro punto de la cónica α_0 .

Después mostraremos la dualidad que existe entre la definición de cónica puntual y cónica tangencial, y por eso se definen como la misma cosa.

En la Actividad 11 veremos que si tenemos un hexágono cuyas diagonales concurren en un punto. Entonces, los circuncentros de los seis triángulos formados por las diagonales están en una única cónica propia.

Y para acabar en la Actividad 12 vemos que si tenemos seis puntos A,B,C,D,E,F tales que AB es paralelo CD, AE es paralelo a CF, BF es paralelo a DE. Entonces, los seis puntos pertenecen a una única cónica propia.

En la última actividad veremos que si tenemos un triángulo ABC y un punto interior y consideramos tres rectas pasando por P y paralelas a los lados del triángulo, cuyas intersecciones con los lados son $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$. Entonces estos seis puntos están en una cónica.

Como bibliografía principal usaremos [6] para el Teorema de Pascal, la Propiedad Óptica y el teorema de Poncelet. Y la web [1] para las aplicaciones del último capítulo.

Para ver las actividades accedemos a:

<http://www.geogebra.org/aciba90>

Índice general

Agradecimientos	I
Summary	III
Resumen	VII
Índice de figuras	1
Capítulo 1. Introducción	3
1. Historia de las cónicas	3
2. Historia de Sketchpad	8
3. ¿ Por qué usar un programa como Sketchpad?	9
4. Historia de GeoGebra	10
5. Las cónicas como lugares geométricos	12
6. Cónicas proyectivas	14
7. Dualidad	15
8. Actividad 1	16
9. Actividad 2	22
Capítulo 2. El teorema de Pascal	25
1. Cónica por cinco puntos	34
Capítulo 3. Aplicaciones de las cónicas	39
1. La propiedad óptica [6]	39
2. Teorema de Poncelet [6]	43
3. Cónica tangencial	45
4. Cónica en un hexágono [1]	47
5. Tres pares de rectas paralelas [1]	48
6. Cónica en un triángulo [1]	49
Bibliografía	51

Índice de figuras

1. Actividad 1.1 - Construcción de la elipse	17
2. Actividad 1.2 - Proyección de una circunferencia	18
3. Actividad 1.3 - Proyección de un cuadrado y su prisma	19
4. Actividad 1.4 - Proyección de un pentágono y su prisma	20
5. Actividad 1.5 - Circunferencia focal (otra construcción de la elipse e hipérbola) (1)	21
6. Actividad 1.5 - Circunferencia focal (otra construcción de la elipse e hipérbola) (2)	21
7. Actividad 1.6 - Circunferencia focal (la mediatriz es la tangente)	22
8. Actividad 2 - LORAN	23
1. Actividad 3 - Teorema de Pappus	25
2. Actividad 5.1 - Teorema de Pascal	26
3. Actividad 5.5 - Teorema de Pascal (demostración 1.1)	26
4. Actividad 5.6 - Teorema de Pascal (demostración 1.2)	27
5. Actividad 5.7 - Teorema de Pascal (demostración 2.1)	28
6. Actividad 5.8 - Teorema de Pascal (demostración 2.2)	28
7. Actividad 4 - Teorema de Menelao	30
8. Actividad 5.2 - Teorema de Pascal en pentágonos	31
9. Actividad 5.3 - Teorema de Pascal en cuadriláteros	31
10. Actividad 5.4 - Teorema de Pascal en triángulos	32
11. Actividad 7.1 - Teorema de Brianchon	32
12. Actividad 7.2 - Teorema de Brianchon en pentágonos	33
13. Actividad 7.3 - Teorema de Brianchon en cuadriláteros	33
14. Actividad 7.4 - Teorema de Brianchon en triángulos	34
15. Actividad 6.2 - Cónica por 5 puntos (construcción)	36
16. Actividad 6.1 - Cónica por 5 puntos (lugar geométrico)	37
1. Actividad 8.1 - La propiedad óptica (previo)	39
2. Actividad 8.2 - La propiedad óptica (previo)	40
3. Actividad 8.3 - La propiedad óptica (previo)	40

4. Actividad 8.4 - La propiedad óptica de la elipse	41
5. Actividad 8.5 - La propiedad óptica de la parábola	41
6. Actividad 8.6 - La propiedad óptica de la hipérbola	42
7. Actividad 8.7 - La propiedad óptica (demostración caso hipérbola)	42
8. Actividad 9.1 - Teorema de Poncelet (propiedad previa)	43
9. Actividad 9.2 - Teorema de Poncelet	44
10. Actividad 10.1 - Cónica tangencial (1)	46
11. Actividad 10.1 - Cónica tangencial (2)	46
12. Actividad 10.1 - Cónica tangencial (demostración)	46
13. Actividad 10.2 - Cónica puntual	47
14. Actividad 11 - Cónica en un hexágono	47
15. Actividad 12 - Tres pares de rectas paralelas (1)	48
16. Actividad 12 - Tres pares de rectas paralelas (2)	48
17. Actividad 12 - Tres pares de rectas paralelas (3)	49
18. Actividad 13 - Cónica en un triángulo	49

Introducción

1. Historia de las cónicas

En la antigüedad. El descubrimiento de las secciones cónicas estuvo íntimamente ligado a uno de los tres problemas clásicos de la geometría griega, la duplicación del cubo o problema de Delos.

“...la peste se llevo una cuarta parte de la población ateniense y la profunda impresión que produjo esta catástrofe fue probablemente el origen del segundo problema...”

“...Se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delos, para preguntar cómo podría conjurarse la peste, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo. Al parecer los atenienses duplicaron las dimensiones del altar, pero esto no sirvió para detener la peste, obviamente habían aumentado ocho veces su volumen en lugar de dos ...”

Fue Hipócrates de Chios quien demostró que se podría conseguir la duplicación del cubo siempre que se pudiera encontrar curvas que cumplieran $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$; y Menecmo halló dichas curvas como secciones (las secciones en aquellos tiempos sólo se consideraban perpendiculares a la generatriz) de conos circulares rectos (ortotoma), agudos (oxitoma) y obtusos (amblitoma). Pero es Apolonio de Perga quien hace un tratamiento tan exhaustivo que desplaza a todos los anteriores, y quien da una formulación definitiva.

Apolonio les da su nombre definitivo Ellipsis (deficiencia), Hyperbola (avanzar más allá) y Parábola (colocar al lado o comparar) que indicaba que no había deficiencia ni exceso.

Apolonio fue el primero en obtener todas las curvas a partir de las secciones del cono recto, variando el ángulo de inclinación del plano con respecto al eje del cono y “a partir del cono dedujo una propiedad plana fundamental, una condición necesaria y suficiente para que un punto esté situado en la curva, y en ese momento abandonó el cono y procedió a estudiar las cónicas por métodos planimétricos exclusivamente...”, y “consigue una de las mejores obras de la matemática antigua”.

Mientras que Apolonio habia considerado tres tipos de curvas, Kepler prefería considerar cinco tipos... A partir de un par de rectas que se cortan, en la que los focos coinciden con el punto de intersección, podemos pasar gradualmente por un conjunto infinito de hipérbolas, según uno de los focos va alejándose más y más del otro. Cuando el segundo foco se haya alejado

infinitamente, no tenemos ya una hipérbola con sus dos ramas sino una parábola. Según el foco móvil traspasa el punto del infinito y se va acercando de nuevo por el otro lado, vamos pasando por un conjunto de elipses, hasta que cuando los focos coinciden tenemos una circunferencia como último tipo de cónica. En 1609 enuncia Kepler sus dos primeras leyes astronómicas, los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas uno de cuyos focos es el Sol y el radio vector que va del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

“Descartes sólo en un caso examina con detalle un lugar geométrico, y es en conexión con el problema del lugar de las tres y cuatro rectas de Pappus del que obtiene Descartes la ecuación $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$. Ecuación general de una cónica que pasa por el origen de coordenadas...”, “... Descartes presenta condiciones sobre los coeficientes para que la cónica sea una recta, una parábola, una elipse o una hipérbola...”, “...sabía que eligiendo adecuadamente tanto el origen de coordenadas como los ejes, podía reducirse la ecuación a la forma más sencilla, pero el hecho es que no da ninguna de las formas canónicas.”

Tras la Geometría de Descartes publicada en francés y no en latín (la lengua universal de la ciencia), Van Schooten la traduce al latín en 1649 y junto con sus discípulos adquiere la geometría cartesiana un rápido desarrollo, Debeaune en *Notae breves* demuestra que las ecuaciones $y^2 = xy + bx$, $y^2 = -2dy + bx$ e $y^2 = bx - x^2$, representan respectivamente hipérbolas, parábolas y elipses. Pero es en 1658 cuando uno de los miembros del grupo de Van Schooten, Jan de Witt reduce todas las ecuaciones de segundo grado en x e y a formas canónicas, por medio de rotaciones y traslaciones de los ejes. De Witt sabía cómo reconocer cuándo tal ecuación representaba una elipse, cuándo una parábola y cuándo una hipérbola, según que el llamado discriminante fuera negativo, nulo o positivo. [4]

Los artistas del Renacimiento y el origen de la geometría proyectiva. La geometría proyectiva nace a raíz de los esfuerzos realizados por los artistas del Renacimiento para representar de manera más realista el mundo que les rodeaba. En el caso concreto de la pintura, ésta se había caracterizado hasta entonces por el uso de cierta simbología que llevaba implícita una clara desconexión de las obras con el mundo real. La ilustración de temas bíblicos era la principal finalidad de la pintura en el período medieval, los fondos de la obras solían ser dorados para sugerir que las escenas correspondían a alguna región celestial, las figuras eran más simbólicas que realistas y las formas solían ser planas y sin naturalidad.

El gran problema al que se enfrentaron los pintores del Renacimiento era cómo plasmar el mundo tridimensional real en un lienzo bidimensional. La clave para resolver esta cuestión fue la interpretación de una propiedad fundamental de la visión monocular, debida principalmente a Leone Battista Alberti (1404-1472). Sus ideas, presentadas en su obra “*Della Pittura*” en 1435, pueden resumirse de la siguiente manera. Cuando contemplamos una escena tridimensional utilizando un solo ojo, la visión se produce debido a

que los rayos de luz procedentes de los distintos puntos de la escena llegan hasta nuestro ojo. Si ahora situamos un lienzo transparente entre el ojo y la escena, esta colección de rayos de luz, o proyección, cortará al lienzo en una colección de puntos. Esta colección de puntos, o sección, es lo que el artista debe pintar para que cualquier observador de su pintura reciba la misma percepción de la escena tridimensional que si mirase directamente a ella, ahora bien, siempre y cuando el observador mire también con un solo ojo y desde el mismo punto. Este principio de proyección y sección es bien ilustrado en algunos grabados del pintor alemán Alberto Durero (1471-1528).

Una cuestión básica, planteada por Alberti, era el estudio de aquellas propiedades geométricas que tienen en común el objeto original y cualquiera de sus secciones. Es obvio que tanto las distancias como los ángulos no se conservan al proyectar y seccionar una figura. La búsqueda de una respuesta a esa cuestión les condujo, en el siglo XV, a la creación de los principios de una teoría de la perspectiva geométrica.

Con el objeto de dar solución a ciertas necesidades del arte y la arquitectura de la época, el autodidacta francés Gerard Desargues (1591-1661) publicó en París en 1639 un tratado original pionero en geometría proyectiva titulado “Borrador de un ensayo de tratado de los resultados de los encuentros de un cono con un plano”. En esta obra introdujo la noción de punto y de recta del infinito, probó la invarianza por proyección de una cuaterna armónica, desarrolló la teoría de polos y polares, etc... Algunas de estas nociones habían sido ya introducidas por autores clásicos como Pappus de Alejandría (290-350) o Apolonio de Perga (262-190 a.C.), pero ellos nunca razonaron en términos de proyección y sección. Este original enfoque de Desargues le llevó a introducir nuevos métodos de demostración de teoremas sobre secciones cónicas haciendo uso de la idea de perspectiva. Su plan de trabajo consistía en el estudio de resultados comunes a las tres cónicas (parábola, elipse e hipérbola) descubriendo para ello aquellas propiedades de la circunferencia que se conservan por proyección, ya que toda cónica se obtiene como sección de la proyección de una circunferencia. Consiguió de esta forma unificar los métodos de demostración de muchos teoremas conocidos sobre cónicas, y que hasta entonces requerían de métodos específicos para cada tipo de cónica, tal y como se conocían desde la obra clásica “Secciones cónicas” de Apolonio.

Sin embargo, su Borrador fue duramente atacado y despreciado por la mayoría de los matemáticos de la época, llegándose incluso a producir violentas polémicas y fuertes críticas no solo sobre su obra sino también sobre el propio Desargues. De entre las razones de tal rechazo pueden destacarse fundamentalmente tres. La primera es que Desargues empleaba una curiosa terminología, un tanto excéntrica, con el fin de evitar ambigüedades, pero en vez de ganar en claridad hacía más difícil su lectura. La segunda razón fue el entusiasmo que había despertado la publicación en 1637 del “Discurso del método” de René Descartes (1596-1650), obra que contenía tres apéndices Geometría, Dióptrica y Meteoros, el primero de los cuales dio origen a la

geometría analítica. Por último, y en lo que respecta a los ataques a su persona, el filósofo francés Gilles Deleuze (1925-1995) describe así el principal motivo por el que éstos fueron tan enérgicos: “Desargues es condenado por el parlamento de París, combatido por el secretario del rey; sus prácticas de perspectiva son prohibidas. La ciencia real o de Estado solo soporta y hace suya la primacía del modelo fijo de la forma, de la cifra y de la medida. La ciencia real solo soporta y hace suya la perspectiva estática, sometida a un agujero negro central que le niega toda capacidad heurística y deambuladora”.

Posteriormente, Desargues publicó su teorema fundamental sobre triángulos y otros resultados, entre ellos la invarianza de la razón doble por proyección, en un apéndice del libro de Abraham Bosse (1602-1676) titulado “Método universal del Señor Desargues, para practicar la perspectiva”. Con esta obra, publicada en 1648, Bosse intentó divulgar y hacer más populares las ideas de Desargues, de las cuales él fue un gran defensor.

A pesar del desprecio generalizado a la obra de Desargues, algunos matemáticos contemporáneos, al conocer los detalles de su trabajo, reconocieron el gran talento geométrico del autor. Entre ellos cabe destacar a Descartes, Pierre de Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662). Este último, animado por el propio Desargues, obtuvo interesantes resultados usando el método de proyección y sección. Su teorema más famoso en geometría proyectiva es conocido como el hexagrama místico de Pascal, demostrado a la edad de dieciséis años. La geometría proyectiva fundada sobre la obra original de Desargues y sobre el “Ensayo sobre las cónicas” (1640) de Pascal quedó olvidada rápidamente hasta el punto de que los escasos ejemplares de estas obras se perdieron.

Los métodos proyectivos en geometría no volvieron a ser considerados hasta finales del siglo XVIII, cuando el matemático francés Gaspard Monge (1746-1818) desarrolló su geometría descriptiva, que incluía una forma de representar y estudiar objetos tridimensionales a través de sus proyecciones sobre ciertos planos. La geometría sintética, es decir, la que solo usa argumentos puramente geométricos, había sido eclipsada durante casi dos siglos por la geometría analítica de Descartes, hasta que Monge junto con un grupo de brillantes estudiantes, entre ellos Charles Julien Brianchon (1785-1864) y Jean-Victor Poncelet (1788-1867), se lanzó a la difícil batalla de intentar demostrar que los argumentos sintéticos podían ir más allá que los analíticos.

Pero el resurgimiento real de la geometría proyectiva fue debido a Poncelet, quien durante su estancia como prisionero de guerra en Saratoff (Rusia) a raíz de su participación como oficial en la campaña napoleónica, reconstruyó sin la ayuda de ningún libro sus conocimientos sobre geometría, obtuvo nuevas aportaciones a la teoría proyectiva y concibió esta materia como una rama totalmente nueva y autónoma. Tras su libertad publicó en París en 1822 su gran obra sobre geometría proyectiva: “Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras”. A raíz de esta obra fueron muchos los matemáticos que hicieron aportaciones a la geometría proyectiva, entre

los que se encontraron Joseph Diez Gergonne (1771-1859), Michel Chasles (1793-1880), Jakob Steiner (1796-1863), Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867), Julius Plücker (1801-1868), Arthur Cayley (1821-1895), Luigi Cremona (1830-1903), Edmond Laguerre (1834-1886), Theodor Reye (1838-1919), Moritz Pasch (1843-1930), Felix Klein (1849-1925), Federigo Enriques (1871-1946), Gino Fano (1871-1952), John Wesley Young (1879-1932) y Oswald Veblen (1880-1960). Durante el siglo XIX la mayoría de los resultados de Desargues y de Pascal a los que hemos aludido anteriormente tuvieron que ser redescubiertos de forma independiente por geómetras de la época. Afortunadamente Chasles encontró en una librería en 1845 una copia manuscrita del tratado de Desargues, que había sido realizada por Philippe de la Hire (1640-1718). Desde entonces el trabajo de Desargues fue situado en el lugar que le correspondía y fue reconocido por todos como un clásico en el desarrollo de la geometría proyectiva.

La recta del infinito. Supongamos que contemplamos un rectángulo desde un punto y que interponemos una pantalla de cristal entre éste y nuestro ojo. La sección sobre la pantalla será en general un cuadrilátero irregular y no ya un rectángulo. Si ahora cambiamos la posición de la pantalla entonces la sección también cambia, pero la impresión sobre nuestro ojo seguirá siendo la misma. Lo mismo sucede cuando observamos una circunferencia desde un punto exterior, distintas secciones de la misma pueden dar lugar a elipses más o menos achatadas, o incluso a parábolas o hipérbolas, pero la sensación creada por cada una de estas secciones sobre el ojo es la misma que la creada por la circunferencia.

Esta resulta ser una propiedad fundamental del proceso de proyección y sección de cualquier objeto tridimensional. Es natural plantearse entonces la siguiente cuestión: ¿qué propiedades comparten las distintas secciones para que produzcan la misma impresión sobre el ojo? Si ahora observamos un objeto desde dos posiciones distintas y tomamos secciones, ¿no deberían tener también ciertas propiedades comunes esas secciones puesto que provienen del mismo objeto?

La búsqueda de tales propiedades motivó el origen y desarrollo de la geometría proyectiva. Algunas propiedades que claramente varían de una sección a otra son, por ejemplo, la longitud de un segmento, el área o la medida de un ángulo, por lo que el paralelismo de rectas no se conserva. Sin embargo, una línea recta seguirá siéndolo en (casi) todas las secciones de cualquier proyección, por lo que un punto que no pertenece a una recta dada se transformará al proyectar y seccionar en un punto que no pertenece a la recta transformada. Estas consideraciones, aunque triviales, sugieren que la respuesta a las cuestiones arriba planteadas no parece incumbir a la geometría euclídea ordinaria, sino que en esta “geometría” los elementos fundamentales parecen ser los de punto y recta, y la relación de incidencia (o pertenencia), y que no tienen cabida nociones como la distancia. Sin embargo, para estudiar las propiedades invariantes por proyección y sección

se utilizó en un principio la geometría euclídea, pues era la única conocida en la época de Desargues.

Una importante innovación en geometría fue la adición de ciertos elementos ideales al espacio euclídeo, elementos que ahora conocemos como puntos del infinito, recta del infinito, etc... La introducción de la noción de punto en el infinito asociado a rectas paralelas se atribuye generalmente a Johann Kepler (1571-1630), aunque fue Desargues quien utilizó sistemáticamente esta idea en su tratado de secciones cónicas de 1639. Alberti ya había observado que dos rectas paralelas en una escena real deben dibujarse de manera que se corten en un punto, salvo que el lienzo sea también paralelo a dichas rectas. Por ello, las baldosas cuadradas del suelo no se ven como cuadrados en el lienzo. Aparentemente la incorporación de la recta del infinito y el uso de las convenciones anteriores no parece conducir a ninguna contradicción.

[5]

2. Historia de Sketchpad

El origen de *The Geometer's Sketchpad* se remonta a los '80 y al *Visual Geometry Project*, un proyecto de investigación en la Universidad de Swarthmore bajo la dirección del Drs. Eugene Klotz y Doris Schattschneider. Este proyecto, fundado por la National Science Foundation, tuvo como objetivo desarrollar nuevos materiales basados en la tecnología para ser utilizado en la enseñanza de la geometría. Bajo esta premisa, Nicholas Jackiw inició el desarrollo de la primera versión de *The Geometer's Sketchpad*. El nombre del programa honra al programa SKETCHPAD de Ivan Sutherland de 1963, un trabajo innovador y pionero en la computación gráfica interactiva.

Geometría Dinámica. Key Curriculum Press estuvieron involucrados en la publicación del proyecto. El fundador y CEO de Key fue el primero en ver que la técnica de Jackiw para manipular interactivamente diagramas matemáticos, manteniendo sus definiciones fundamentales tenía amplio potencial educativo como una herramienta para la visualización matemática, generalización, proposición de conjeturas y resolución de problemas. Rasmussen y Jackiw inventaron el término "Geometría Dinámica" para describir las imágenes geométricas fundamentalmente interactivas. Después de varios años de desarrollo en el ambiente académico, Sketchpad se sometió a un año de pruebas en universidades de Estados Unidos, y en 1991, la primera versión comercial en Macintosh fue liberada por Key Curriculum Press.

Sketchpad más allá de la geometría. Desde el principio a lo largo de 20 años, el desarrollo y mejora continua del programa se ha mantenido en la vanguardia de la innovación de la tecnología educativa en matemáticas. Scott Steketee se unió al equipo de desarrollo, y con el apoyo de EduQuest division de IBM, key produjo una versión de Sketchpad para Windows en

1993. En 1995 una tercera versión amplió el alcance desde la geometría Euclídea y transformacional para incluir geometría analítica. Los cambios más significativos vinieron en 2001, cuando la cuarta versión Sketchpad extendió la Geometría Dinámica a la enseñanza del álgebra y el cálculo. Con esos cambios, así como con las mejoras en su capacidad de actuar tanto en un entorno para la exploración de los estudiantes, como una herramienta para diseño y desarrollo curricular, Sketchpad es ahora usado extensamente en un amplio espectro de temas de matemáticas y de niveles de edad.

Los muchos usos de Sketchpad. Más allá de las matemáticas académicas, Sketchpad también encuentra aplicaciones en la preparación de profesores, en la investigación matemática y en contextos tan variados como la ingeniería estructural, optometría, ciencias de la educación y las artes visuales. El software ha recibido numerosos premios y ha sido destacado en presentaciones dadas por John Sculley (entonces CEO de Apple Computer) y Bill Gates (CEO de Microsoft) sobre mejores prácticas tecnológicas en educación. [2]

3. ¿ Por qué usar un programa como Sketchpad?

Los programas de geometría dinámica nos permiten construir todas las figuras que realizamos con regla y compás de una forma rápida y precisa usando el ratón de nuestro ordenador. La construcción se lleva a cabo a partir de objetos iniciales entre los que se establecen relaciones de dependencia de tipo geométrico de manera que al mover los objetos iniciales se desplazan también los que dependen de estos pero permanece la construcción realizada, esta propiedad lo diferencia esencialmente de los clásicos programas de dibujo.

Otra característica importante de estos programas es que son extensibles, es decir, cualquier construcción que realizamos, podemos definirla como una nueva herramienta y añadirla a las predefinidas por el sistema, esto nos permite realizar un tratamiento modular de los problemas y elaborar una biblioteca de construcciones básicas adaptadas a nuestras necesidades. También permite el tratamiento dinámico de las figuras lo que nos facilita visualizar lugares geométricos, verificar hipótesis y elaborar demostraciones. Pero quizás lo más importante de estos programas es que acercan las Matemáticas a la realidad transformando un teorema matemático en una realidad observable.

Ejemplos de programas de geometría dinámica son Sketchpad, GeoGebra y Cabri, pero existen muchos más.

Factores metodológicos favorables a utilizar programas informáticos en la clase de matemáticas:

*Facilita la adquisición de conceptos. Utilizar el ordenador como instrumento para adquirir conceptos o profundizar en ellos, permite detectar esquemas no suficientemente precisos y transformarlos en otros más adecuados.

*Permite el tratamiento de la diversidad. Ayuda a crear un ambiente de trabajo grato y estimulante que respeta las peculiaridades y el ritmo de aprendizaje del alumnado.

*Fomenta el trabajo en grupo. El trabajo en el ordenador se puede realizar en grupo, permitiendo a los alumnos y alumnas explicar a los demás sus ideas, estableciendo la comunicación y el enriquecimiento de pensamientos.

*Valora positivamente el error. El error no ha de equipararse a fracaso. Poner de manifiesto los errores de los alumnos y alumnas adquiere una dimensión positiva y es una condición necesaria para superarlos.

*Realiza con rapidez y facilidad simulaciones de experimentos. El carácter imprevisible y aleatorio que tiene el azar está sujeto a leyes que sólo son perceptibles cuando consideramos un número de datos muy elevado, por lo que el procesador es un instrumento adecuado para manipular dicha información.

*La capacidad para representar gráficamente la información. La facilidad que tienen ciertas aplicaciones informáticas para simultanear información gráfica y numérica es un apoyo indiscutible para el estudio de funciones o la estadística.

*Es un elemento motivador. Además, en la actualidad, es el medio habitual del alumno en su vida cotidiana.

Sin embargo existen factores de riesgo:

*El propio atractivo del ordenador.

*Puede provocar deficiencias en la adquisición de destrezas y habilidades.

*Hace perder el sentido de la dificultad.

*Puede fomentar la falta de sentido crítico.

[3]

4. Historia de GeoGebra

GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo, lo continuó en la Universidad de Atlantic, Florida, luego en la Universidad Estatal de Florida y en la actualidad, en la Universidad de Linz, Austria.

GeoGebra está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas.

Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo, por lo que puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas.

Su categoría más cercana es software de geometría dinámica.

GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

El programa GeoGebra fue ideado por Markus Hohenwarter en el marco de su trabajo de tesis de Máster, presentada en el año 2002 en la Universidad de Salzburgo, Austria. Se esperaba lograr un programa que reuniera las virtudes de los programas de geometría dinámica, con las de los sistemas de cálculo simbólico. El creador de GeoGebra valoraba todos estos recursos para la enseñanza de la matemática, pero notaba que para el común de los docentes, los programas de cálculo simbólico resultaban difíciles de aprender, dada la rigidez de su sintaxis, y que por esta razón evitaban su uso. Por otro lado, observaba que los docentes valoraban de mejor manera los programas de geometría dinámica, ya que su interfaz facilitaba su utilización. Así fue como surgió la idea de crear GeoGebra. Rápidamente el programa fue ganando popularidad en todo el mundo y un gran número de voluntarios se fue sumando al proyecto desarrollando nuevas funcionalidades, materiales didácticos interactivos, traduciendo tanto el software como su documentación a decenas de idiomas, colaborando con nuevos usuarios a través del foro destinado para tal fin. En la actualidad, existe una comunidad de docentes, investigadores, desarrolladores de software, estudiantes y otras personas interesadas en la temática, que se agrupan en los distintos Institutos GeoGebra locales que articulan entre sí a través del Instituto GeoGebra Internacional.

¿ Por qué vamos a usar GeoGebra?

- *Es gratuito y de código abierto (GNU GPL).
- *Está disponible en español, incluido el manual de ayuda.
- *Presenta foros en varios idiomas, el castellano entre ellos.
- *Ofrece una wiki en donde compartir las propias realizaciones con los demás.
- *Usa la multiplataforma de Java, lo que garantiza su portabilidad a sistemas de Windows, Linux, Solaris o MacOS X.
- *Las realizaciones son fácilmente exportables a páginas web, por lo que podemos crear páginas dinámicas en pocos segundos.
- *En su corta historia ya ha obtenido una serie de prestigiosos premios.
- *Manual GeoGebra: <http://www.geogebra.org/help/docues.pdf>

Premios que ha recibido:

- *Archimedes 2016: MNU Award in category Mathematics (Hamburg, Germany)
- *Microsoft Partner of the Year Award 2015: Finalist, Public Sector: Education (Redmond, WA, USA)
- *MERLOT Classics Award 2013: Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching (Las Vegas, Nevada, USA)
- *NTLC Award 2010: National Technology Leadership Award (Washington D.C., USA)
- *Tech Award 2009: Laureat in the Education Category (San Jose, California, USA)
- *BETT Award 2009: Finalist in London for British Educational Technology Award
- *SourceForge.net Community Choice Awards 2008: Finalist, Best Project

for Educators

*AECT Distinguished Development Award 2008: Association for Educational Communications and Technology (Orlando, USA)

*Learnie Award 2006: Austrian Educational Software Award (Vienna, Austria)

*eTwinning Award 2006: 1st prize “for Crop Circles Challenge” with Geogebra (Linz, Austria)

*Trophées du Libre 2005: International Free Software Award, category Education (Soisson, France)

*Comenius 2004: German Educational Media Award (Berlin, Germany)

*Learnie Award 2005: Austrian Educational Software Award (Vienna, Austria)

*digita 2004: German Educational Software Award (Cologne, Germany)

*Learnie Award 2003: Austrian Educational Software Award (Vienna, Austria)

*EASA 2002: European Academic Software Award (Ronneby, Sweden)

5. Las cónicas como lugares geométricos

Definición 1.1. Una cónica afín es el conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}$ donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2. 1. Circunferencia: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

2. Rectas: $ax + by + c = 0$

3. Par rectas: $r \equiv 2x - y + 3 = 0, s \equiv x - 5y - 1 = 0$

$$C \equiv (2x - y + 3)(x - 5y - 1) = 0 \equiv r \cup s$$

4. Hipérbola: $xy = 1; y = \frac{1}{x}$

5. Parábola: $y^2 = 2x$

5.1. Circunferencia. La *circunferencia* es el conjunto de puntos (x, y) del plano, tales que la distancia de (x, y) a un punto fijo, llamado *centro*, es una constante llamada *radio*. Si $C = (a, b)$ es el centro y r es el radio la distancia de $P(x, y)$ a C es:

$$d(P, C) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Por tanto, elevando al cuadrado, la ecuación de una circunferencia es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

5.2. Elipse. Una *elipse* es el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que la suma de las distancias de (x, y) a dos puntos fijos, llamados *focos* es constante.

Si colocamos los focos en $(-c, 0)$ y $(0, c)$ y llamamos $2a$ a la constante,

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

Pasando la primera raíz a la derecha y elevando al cuadrado queda:

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$$

Y operando:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Elevando otra vez al cuadrado:

$$a^2((x+c)^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

Que dejando un 1 a la derecha se puede escribir como:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$a^2 - c^2$ es positivo, si lo llamamos b^2 la ecuación de la elipse queda:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si sustituimos $x = 0$, obtenemos $y = \pm b$, y si $y = 0$ entonces $x = \pm a$. Por tanto, si $a > b$ el eje X de la elipse es el *eje mayor* y el eje Y es el *eje menor*. Si $a < b$ al revés.

Si el centro de la elipse está en un lugar cualquiera (h,k) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Se llama *excentricidad* de la elipse a $e = \frac{c}{a}$. Esta cantidad mide como de “lejana” es la forma de la cónica respecto de la circunferencia. $e \in (0, 1)$.

5.3. Parábola. Una *parábola* es el conjunto de puntos de plano (x,y) que están a la misma distancia de un punto, llamado *foco*, y de una recta fija, llamada *directriz* D, que no contiene al foco.

Si el foco es F(c,0), y la directriz es $x = -c$. Tenemos $d(P, F) = d(P, D)$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |x+c|$$

Elevando al cuadrado: $x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2$

Y simplificando: $y^2 = 4cx$

Si en todo lo anterior se intercambia x con y, la parábola toma la siguiente forma:

$$x^2 = 4cy$$

La *excentricidad* de la parábola es 1. La “lejanía” de su forma con la circunferencia está entre la elipse y la hipérbola.

Si el vértice de la parábola está en un punto cualquiera (h,k) entonces obtenemos:

$$(y-k)^2 = 4c(x-h) \quad \text{o} \quad (x-h)^2 = 4c(y-k)$$

5.4. Hipérbola. Una *hipérbola* es el conjunto de puntos del plano (x,y) tales que la diferencia entre las distancias de (x,y) a dos puntos, llamados *focos*, es constante.

Si colocamos los focos en $(-c,0)$ y $(c,0)$ y llamamos $2a$ a la constante fija,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Pasando la segunda raíz a la derecha y elevando al cuadrado:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

Y operando obtenemos:

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Elevando otra vez al cuadrado:

$$s^2((x+c)^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + cx^2$$

Que se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Llamando $b^2 = c^2 - a^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cuando se intercambia x por y se obtiene:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

En este caso la *excentricidad*, $e = \frac{c}{a}$, es mayor que 1 porque $c > a$. Si el centro de la hipérbola está en un punto (h,k) , en vez de estar en el origen, se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

6. Cónicas proyectivas

$$(x, y) \mapsto (1, x, y) \longleftrightarrow (x_0, x_1, x_2), \quad x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}$$

$$\begin{aligned} C &\equiv a \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^2 + 2b \frac{x_1}{x_0} \frac{x_2}{x_0} + c \left(\frac{x_2}{x_0} \right)^2 + 2d \frac{x_1}{x_0} + 2e \frac{x_2}{x_0} + f = 0 \\ &\equiv ax_1^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \\ &\equiv \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & b \\ e & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \equiv x^t Ax = 0 \end{aligned}$$

Definición 1.3. Una cónica proyectiva es $C = \{x \in \mathbb{P}^2 / x^t Ax = 0\}$ donde A es una matriz simétrica de orden 3×3 no nula.

1. Si $\lambda \neq 0$, A y λA representan la misma cónica.

2. Toda cónica afín tiene asociada una cónica proyectiva (se diferencian en los puntos del infinito). En adelante las identificaremos.

Definición 1.4. Sea C una cónica proyectiva, entonces

1. C es degenerada si $\det(A) = 0$.
2. C es no degenerada si $\det(A) \neq 0$.

Definición 1.5. $x \in C$

1. x es regular si $Ax \neq 0$
2. x es singular si $Ax = 0$
 - a) Si C es no degenerada entonces no tiene puntos singulares.
 - b) Si C es degenerada entonces tiene puntos singulares.

6.1. Clasificación proyectiva de cónicas.

Teorema 1.6. Toda cónica en \mathbb{P}^2 es proyectivamente equivalente a:

1. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ Cónica imaginaria. ($\text{Rango}(A)=3$)
2. $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ Cónica propia. ($\text{Rango}(A)=3$)
3. $x_0^2 + x_1^2 = 0$ Par de rectas imaginarias. ($\text{Rango}(A)=2$)
 $= (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$
4. $x_0^2 - x_1^2 = 0$ Par de rectas reales. ($\text{Rango}(A)=2$)
 $= (x_0 + x_1)(x_0 - x_1)$
5. $x_0^2 = 0$ Recta doble. ($\text{Rango}(A)=1$)

Teorema 1.7 (Clasificación euclídea de cónicas propias). Si C es una cónica propia, entonces mediante un movimiento se transforma en una de las siguientes:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$ elipse.
2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$ hipérbola.
3. $y^2 = 2cx, c > 0$ parábola.

Por tanto proyectivamente las elipses, hipérbolas y parábolas son iguales.

DEMOSTRACIÓN. Viene en los apuntes de la asignatura, se usan polos de rectas respecto de cónicas, ¿debería ponerla? \square

7. Dualidad

P punto de \mathbb{P}^2 , $P(x_0, x_1, x_2)$, si algún $x_i \neq 0$ listas proporcionales se identifican.

r recta de \mathbb{P}^2 , $r(a_0, a_1, a_2)$, si algún $a_i \neq 0$ listas proporcionales se identifican.

$$\mathbb{P}^2 = \{(x_0, x_1, x_2) / \text{algún } x_i \neq 0, \text{ listas proporcionales se identifican}\}$$

Plano proyectivo DUAL:

$$\mathbb{P}^{2*} = \{(a_0, a_1, a_2) / \text{algún } a_i \neq 0, \text{ listas proporcionales se identifican}\}$$

\mathbb{P}^2 y \mathbb{P}^{2*} son dos copias del plano proyectivo. Aislados son iguales, pero hay una relación entre los ellos:

$$P(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2 \quad r(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{P}^{2*}$$

Si $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ el punto en la recta.

Si $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \neq 0$ el punto no está en la recta.

¿Qué es una recta en \mathbb{P}^{2*} ?

$$\Lambda = \{(a_0, a_1, a_2) / \alpha_0a_0 + \alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 = 0; \text{algun } \alpha_i \neq 0\}$$

Introduzco el punto $P(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$.

$\Lambda = \{\text{rectas de } \mathbb{P}^{2*} / r \text{ pasa por } P\} \equiv \text{Haz de rectas que pasan por } P$ (punto base del haz) \equiv Punto de \mathbb{P}^2 (el punto base).

\mathbb{P}^{2*} (visto desde \mathbb{P}^{2*})

\mathbb{P}^{2*} (visto desde \mathbb{P}^2)

\mathbb{P}^2	$(\mathbb{P}^2)^*$
Punto	Recta
Recta	Punto
Puntos alineados	Rectas concurrentes
Rectas concurrentes	Puntos alineados
Figura inscrita	Figura circunscrita
Figura circunscrita	Figura inscrita

$$(\mathbb{P}^{2*})^* \equiv \mathbb{P}^2$$

Nota: Un teorema es cierto si y sólo si es cierto su dual.

8. Actividad 1

En esta primera actividad vamos a ver como es la proyección de la sombra de una circunferencia sobre otro plano con un cierto ángulo, después veremos que ocurre con la sombra de un cuadrado y de un hexágono. Además construiremos los prismas asociados a las figuras anteriores y los haremos rotar. Para terminar construiremos la elipse y la hipérbola a partir de sus focos y distancias a ellos mediante la circunferencia focal. Podemos verlo en el fichero “Actividad 1.1/1.5”. Ver Figura 1. Para verlo accedemos a: <http://www.geogebra.org/aciba90>

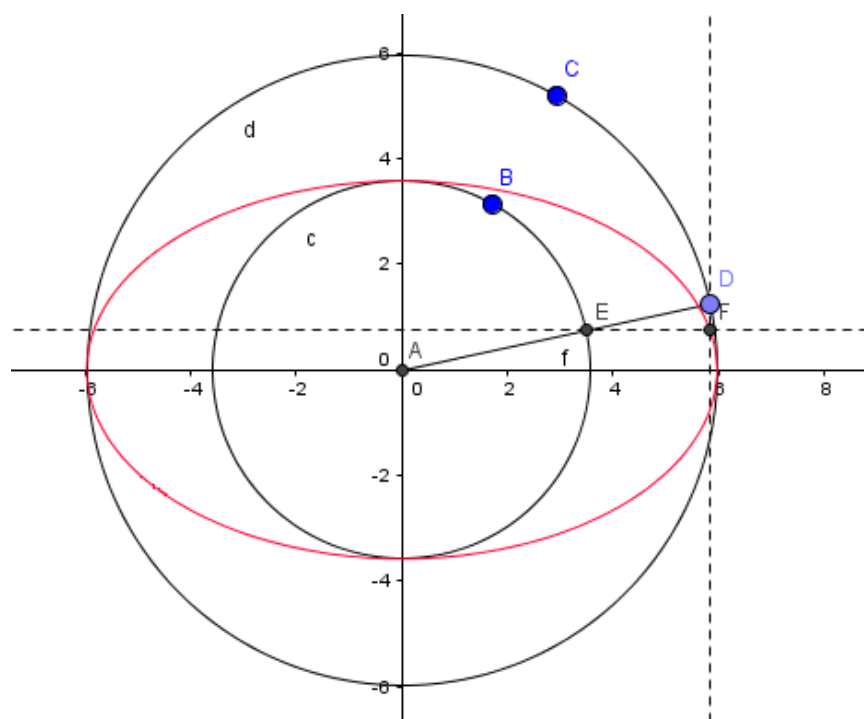


FIGURA 1. Actividad 1.1 - Construcción de la elipse

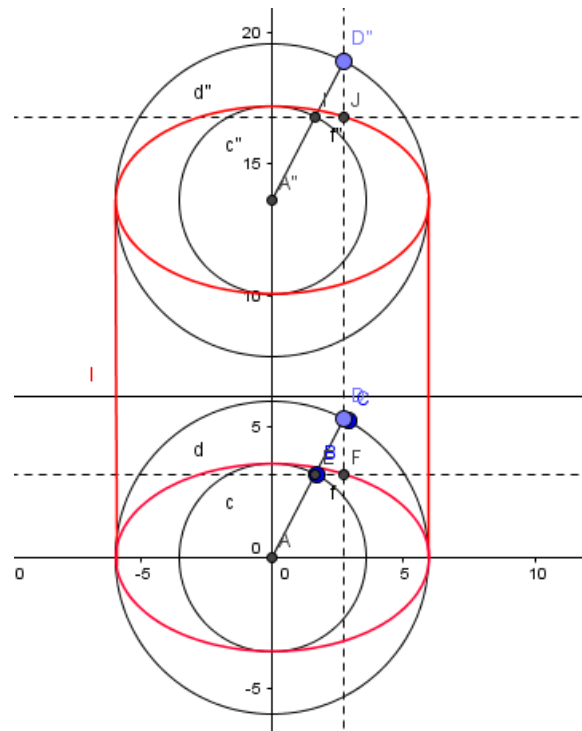


FIGURA 2. Actividad 1.2 - Proyección de una circunferencia

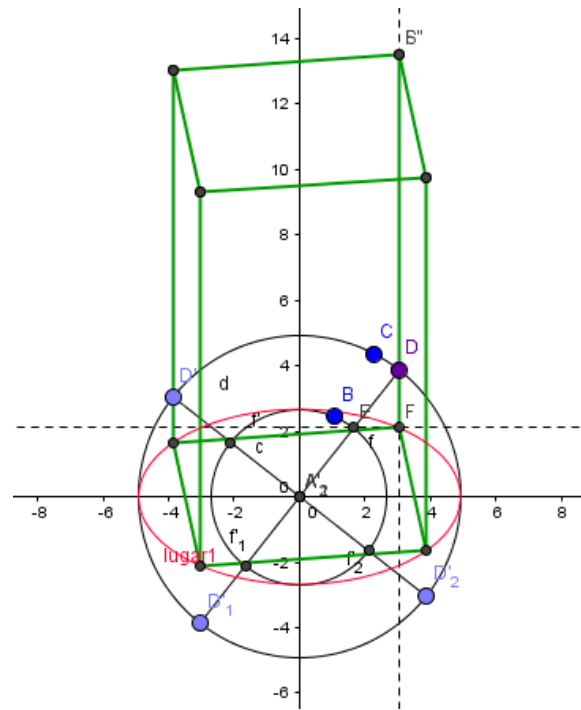


FIGURA 3. Actividad 1.3 - Proyección de un cuadrado y su prisma

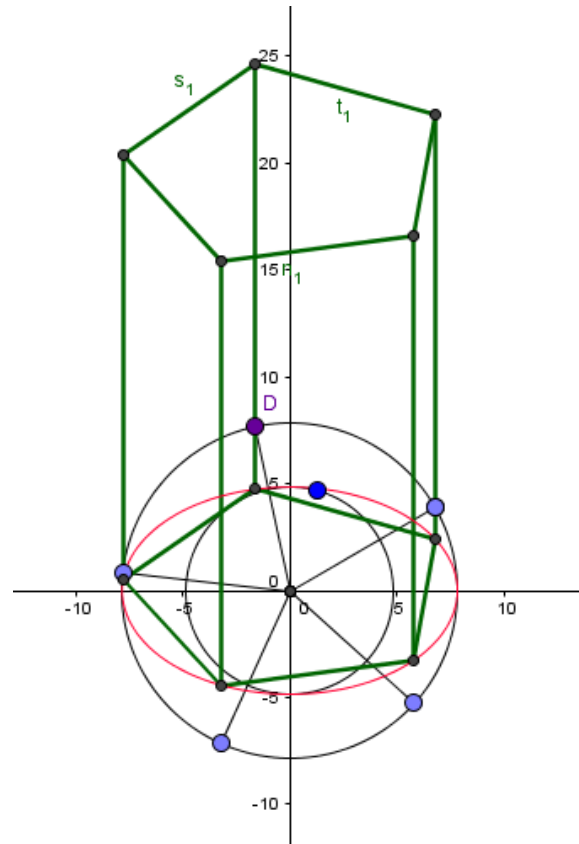


FIGURA 4. Actividad 1.4 - Proyección de un pentágono y su prisma

La Circunferencia Focal: Vamos a construir una cónica de otra forma, a partir de sus focos y las distancias a los focos. Nos dan los focos y la suma de distancias a los focos d . Trazamos la circunferencia centrada en un foco y de radio d (llamada circunferencia focal). Tomamos un punto de la circunferencia y lo unimos con los focos. Uno es un radio y el otro no. Trazamos la mediatriz del segundo segmento y buscamos el punto de corte con el radio, ese punto de corte describe la elipse y esa mediatriz es la mediatriz del otro segmento. Podemos ver esta construcción en la “Actividad 1.5 - Circunferencia focal (otra construcción de la elipse e hipérbola) ”.

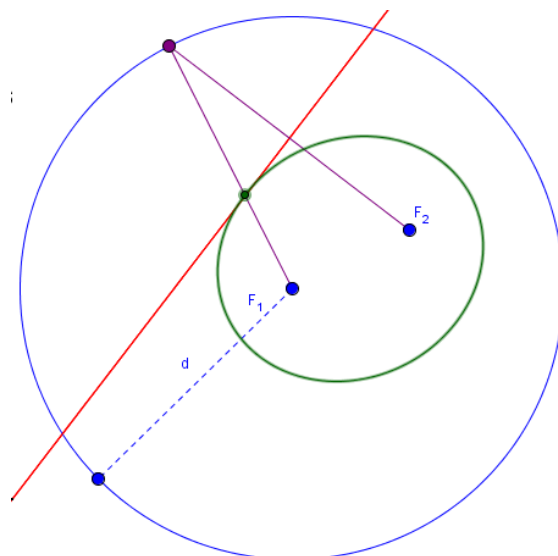


FIGURA 5. Actividad 1.5 - Circunferencia focal (otra construcción de la elipse e hipérbola) (1)

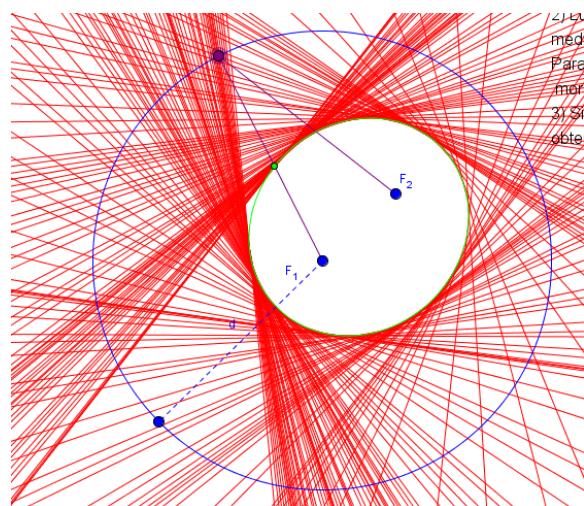


FIGURA 6. Actividad 1.5 - Circunferencia focal (otra construcción de la elipse e hipérbola) (2)

Además esta mediatriz es la recta tangente en el punto de la elipse que describe, P . Para demostrarlo nos basta probar que la recta y la elipse sólo tienen en común el punto P . Es decir, que cualquier otro punto de t no puede estar en la elipse.

Sea S el simétrico de F_2 respecto a la mediatriz, que deberá estar sobre la recta que une F_1 y P .

Sea P' un punto de la mediatriz distinto de P .

$$P'F_1 + P'F_2 = P'F_1 + P'S > F_1S = F_1P + PS = F_1P + PF_2 = d$$

En el dibujo, el camino verde es más largo que el camino azul.

Por tanto, $P'F_1 + P'F_2 > d \Rightarrow P'$ no está en la elipse.

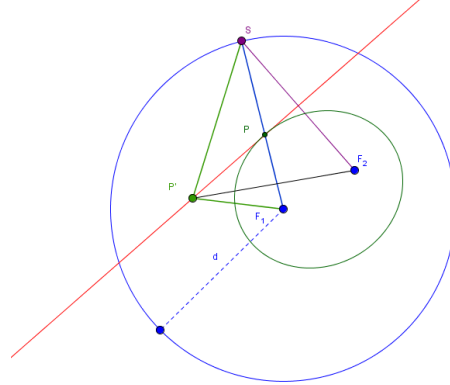


FIGURA 7. Actividad 1.6 - Circunferencia focal (la mediatriz es la tangente)

9. Actividad 2

Tenemos tres observadores que escuchan un ruido, como datos tenemos la posición de cada uno, F_1, F_2, F_3 y el tiempo que transcurre desde que se produce el ruido hasta que lo escuchan, t_1, t_2, t_3 . El problema consiste en determinar la posición del ruido, x .

El lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de distancia a dos puntos fijos, llamados focos, es constante es una hipérbola.

Entonces a partir del tiempo podemos calcular la distancia. Suponiendo que la velocidad a la que se desplaza el ruido es la velocidad del sonido $v_s = 343$ m/s, la distancia a la que está cada observador es $d_i = v_s t_i$.

Por la definición de hipérbola sabemos que x está en la hipérbola de focos F_1, F_2 con diferencia de distancia $d_1 - d_2$. Incluso sabemos en que rama se encuentra, si $d_1 > d_2$ se encuentra en la rama más alejada de F_1 y si $d_1 < d_2$ se encuentra en la rama más cercana a F_1 .

De la misma manera sabemos que x está en la hipérbola de focos F_1, F_3 con diferencia de distancia $d_1 - d_3$ y la rama en la que se encuentra, por tanto x es la intersección de las dos ramas de hipérbola.

Ejemplo 1.8. Los observadores se encuentran en las siguientes posiciones: $F_1 = (0, 0), F_2 = (1, 0), F_3 = (0, 1)$, con las siguientes diferencias de tiempo $t_1 - t_2 = 0,002s, t_1 - t_3 = 0,001s$. Calculamos las diferencias de distancia: $d_1 - d_2 = 343m/s * 0,002s = 0,686m$ y $d_1 - d_3 = 343m/s * 0,001s = 0,343m$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 0,686$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x)^2 + (y-1)^2} = 0,343$$

Resolviendo el sistema obtenemos que el ruido se produjo en (1,60046, 1,10906)

Podemos observar este ejemplo en el archivo de GeoGebra "Actividad 2 - LORAN". Ver: <http://www.geogebra.org/aciba90>

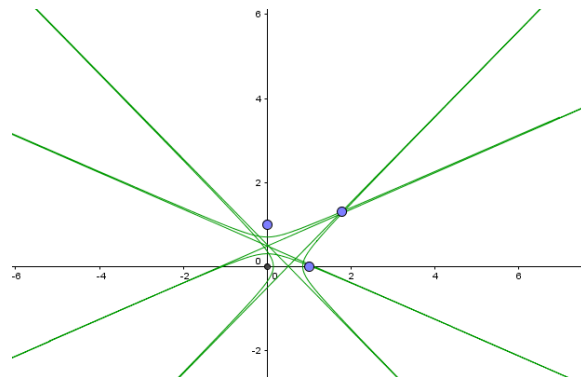


FIGURA 8. Actividad 2 - LORAN

Este problema es equivalente al problema del sistema de localización LORAN (long range navigation), que consiste en mandar una señal de radio desde dos estaciones alejadas A, B, cuya posición es conocida, a una estación X cuya posición se desea conocer. La diferencia de tiempo de llegada entre una y otra señal permite conocer cuál es la estación emisora que está más cerca y cuánto más cerca está de X. Esta información nos da la ecuación de una hipérbola con focos A y B. Si usamos una tercera estación C junto con una de las anteriores, A o B, obtenemos una segunda hipérbola con el mismo procedimiento. La intersección de ambas hipérbolas determina la posición de la estación X.

Las ecuaciones de las hipérbolas se obtienen del siguiente modo: si llamamos t al tiempo que pasa desde que llega la primera señal a X hasta que llega la segunda señal, como la velocidad de las ondas de radio es 295 m/s, y el espacio es igual a la velocidad por el tiempo, podemos deducir cuánto más cerca está la primera estación que la segunda de X. A esta distancia la llamaremos s , y será $s = t * 295$. Si la señal de A fuese la que llegase primero se debe cumplir:

$$d(A, X) + s = d(B, X)$$

es decir, X es uno de los puntos del plano tal que la diferencia de distancias a dos puntos A, B (focos) es constante, s . Esta es precisamente la definición de hipérbola de focos A y B.

Capítulo 2

El teorema de Pascal

Definición 2.1. Un hexágono en \mathbb{P}^2 viene dado por 6 puntos distintos, vértices, consecutivos y 6 rectas distintas consecutivas, lados.

Vértices: P_1, P_2, \dots, P_6 .

Lados: $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_5P_6$.

Vértices opuestos: P_1 y P_4 , P_2 y P_5 , P_3 y P_6 .

Vértices alternos: P_1 y P_3 , P_2 y P_4 , P_3 y P_5 , P_4 y P_6 , P_5 y P_1 , P_6 y P_2 .

Lados alternos: P_1P_2 y P_3P_4 , P_2P_3 y P_4P_5 , ...

Lados opuestos: P_1P_2 y P_4P_5 , ...

Puntos diagonales: Las intersecciones de los lados opuestos del hexágono.

Teorema 2.2 (de Pappus). Si los vértices de un hexágono están alternativamente sobre dos rectas distintas. Entonces, los tres pares de lados opuestos se cortan en tres puntos que están alineados.

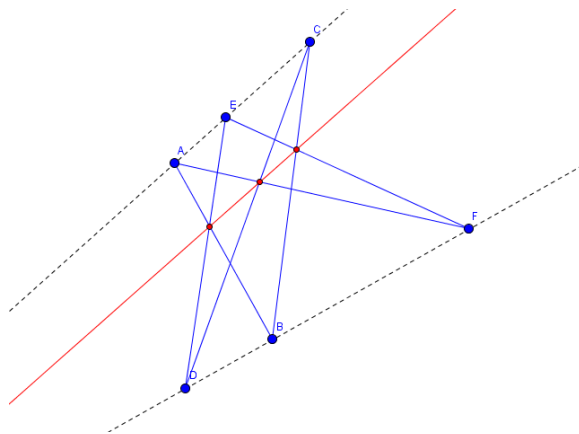


FIGURA 1. Actividad 3 - Teorema de Pappus

Ver “Actividad 3 - Pappus”: <http://www.geogebra.org/aciba90>.

A continuación vamos a ver el Teorema de Pascal que es una generalización del Teorema de Pappus. El Teorema de Pappus es un caso degenerado en el que los puntos están alineados 3 a 3.

Teorema 2.3 (de Pascal). Si hexágono en \mathbb{P}^2 , inscrito en una cónica propia \mathcal{C} entonces sus tres puntos diagonales están alineados. Dicha recta se denomina la recta de Pascal.

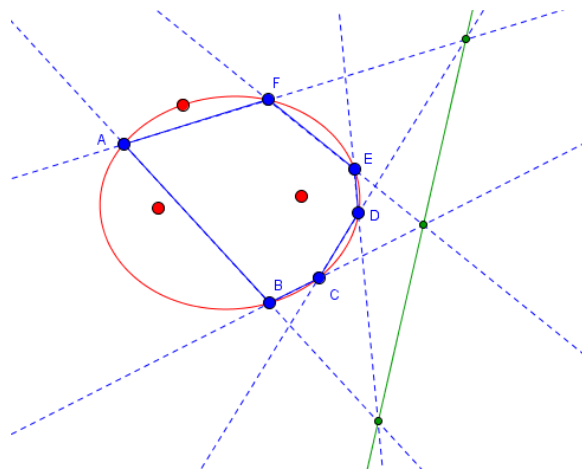


FIGURA 2. Actividad 5.1 - Teorema de Pascal

DEMOSTRACIÓN. Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en una cónica propia.

1. Supongamos que la recta de Pascal es disjunta con la cónica. Ver Figura 2, extraída de “Actividad 5.1 - Teorema de Pascal”.

Usando una proyectividad movemos la recta que une $AB \cap DE$ y $BC \cap EF$ al infinito. Y usando una afinidad transformamos la cónica en una circunferencia. Entonces AB es paralelo a DE y BC es paralelo a EF , necesitamos probar que CD es paralelo a FA , en ese caso se cortarían en la recta del infinito como se cortan $AB \cap DE$ y $BC \cap EF$ y por tanto las tres intersecciones estarían alineadas. Podemos observar la situación en la siguiente figura:

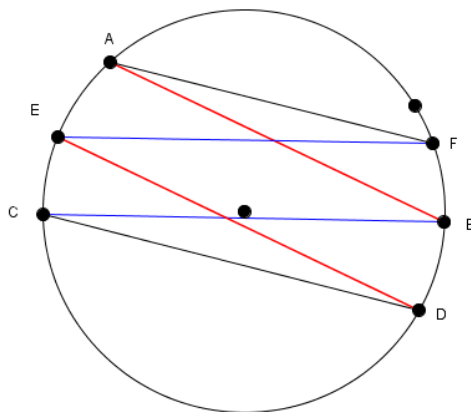


FIGURA 3. Actividad 5.5 - Teorema de Pascal (demostración 1.1)

Ver “Actividad 5.5 - Teorema de Pascal (demostración 1.1)”, en <http://www.geogebra.org/aciba90>.

Como los ángulos ABC y DEF tienen lados paralelos, son iguales, y por tanto sus ángulos centrales también son iguales. Por tanto los arcos AC y DF son también iguales. Veamos que los segmentos AF y CD son paralelos.

Propiedad: Si tenemos un cuadrilátero inscrito en una circunferencia con dos lados opuestos de la misma longitud (en el dibujo, los lados rojos), entonces los otros dos lados son paralelos.

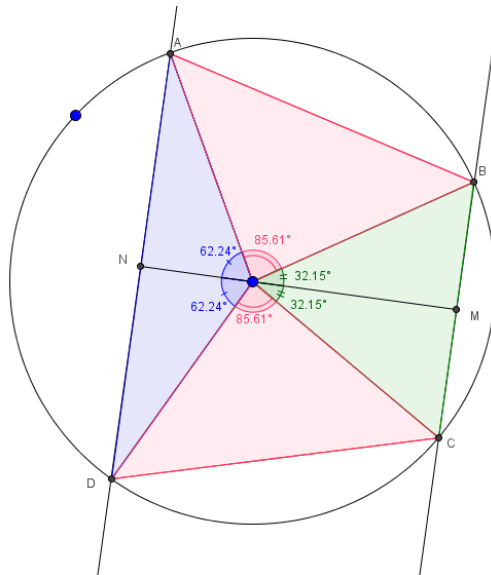


FIGURA 4. Actividad 5.6 - Teorema de Pascal (demostración 1.2)

Ver “Actividad 5.6 - Teorema de Pascal (demostración 1.2)”.

Demostración: Trazamos los cuatro radios que acaban en cada vértice del cuadrilátero. Se forman cuatro triángulos isósceles. Los dos triángulos rosas tienen tres lados iguales y por tanto sus tres ángulos son iguales.

Trazamos las alturas de los triángulos amarillo y azul que llegan al centro de la circunferencia. Estas alturas son también bisectrices, ya que estos triángulos son isósceles.

Veamos que los ángulos centrales verde y marrón son ángulos de 180 grados.

Ángulo MON = medio ángulo azul + ángulo rosa + medio ángulo verde = ángulo NOM, donde O es el centro de la circunferencia.

Así, las dos alturas son la misma recta y por tanto, los lados opuestos son paralelos.

Aplicamos este resultado y obtenemos que AF es paralelo a CD.

La demostración de este caso ha sido basada en [6].

2. Dos de los puntos diagonales son exteriores, la recta que los une es secante a la cónica y el otro punto es interior a la cónica. Tomamos como recta del infinito la que forman los puntos de intersección de dos parejas de lados alternos, por ejemplo $AB \cap CD$ y $AF \cap DE$, por tanto AB es paralelo a CD y AF es paralelo a DE . Ver Figura 5.

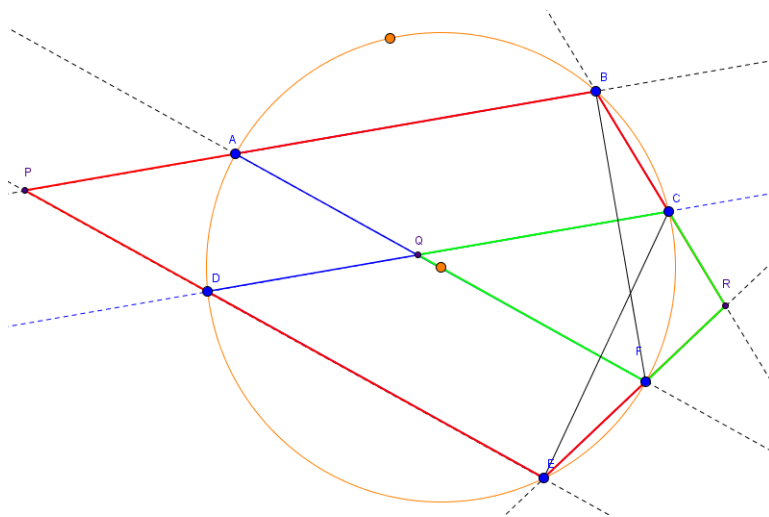


FIGURA 5. Actividad 5.7 - Teorema de Pascal (demostración 2.1)

Vamos a ver que en esta situación existe una homotecia que lleva el cuadrilátero pequeño verde en el cuadrilátero grande rojo.

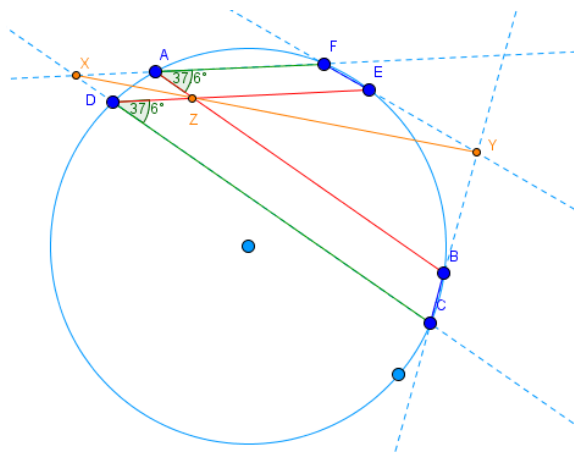


FIGURA 6. Actividad 5.8 - Teorema de Pascal (demostración 2.2)

Usaremos la figura anterior. El hexágono $ABCDEF$, los lados opuestos son rojo, azul y verde, y queremos ver que los puntos de corte de los lados opuestos X, Y, Z están alineados. La recta que pasa por dos de esos puntos es secante a la circunferencia (la recta naranja) y supondremos que dos parejas de lados alternos verde-rojo son paralelas. $AXDZ$ es un paralelogramo y por tanto los ángulos FAB y EDC son iguales. Como son ángulos inscritos, los arcos que abarcan miden lo mismo

$$BF = EC$$

Quitando la parte común, nos queda la igualdad de los arcos que van de E a F y de B a C . Equivalentemente, los segmentos dados por las cuerdas azules miden lo mismo,

$$EF = BC$$

La potencia de Y respecto de la circunferencia nos da que

$$YE \cdot YF = YB \cdot YC$$

y de estas igualdades concluimos que

$$YE = YB \quad YF = YC.$$

Por último consideramos la homotecia de centro Y que lleva B en C . Se sigue de lo anterior que E va a F , que las rectas rojas van a las verdes y que Z (donde se cortan las rojas) va a X (donde se cortan las verdes). Por tanto se tiene que X, Y, Z están alineados (son centro, un punto y su imagen para esta homotecia).

□

Vamos a ver una demostración alternativa al teorema de Pascal usando el siguiente teorema.

Teorema 2.4 (de Menelao). *Si tenemos tres puntos M_1, M_2, M_3 , cada uno en cada lado de un triángulo ABC , entonces*

$$M_1, M_2, M_3 \text{ alineados} \Leftrightarrow \frac{M_1B}{M_1C} \frac{M_2C}{M_2A} \frac{M_3A}{M_3B} = 1$$

Ver “Actividad 4 - Menelao”: <http://www.geogebra.org/aciba90>.

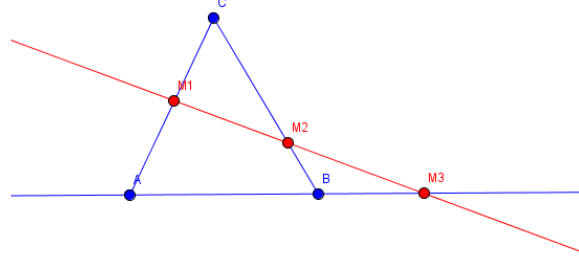


FIGURA 7. Actividad 4 - Teorema de Menelao

PASCAL. Definimos $M_1 = P_2P_3 \cap P_5P_6$, $M_2 = P_3P_4 \cap P_6P_1$, $M_3 = P_1P_2 \cap P_4P_5$. Para calcular los cocientes del teorema de Menelao aplicaremos el teorema de Menelao a los siguientes tríos de puntos alineados en cada lado de ABC :

$$\{M_1, P_6, P_5\}, \quad \{M_2, P_4, P_3\}, \quad \{M_3, P_2, P_1\}.$$

Por tanto,

$$\frac{M_1B}{M_1C} \frac{P_6C}{P_6A} \frac{P_5A}{P_5B} = \frac{M_2C}{M_2A} \frac{P_4A}{P_4B} \frac{P_3B}{P_3C} = \frac{M_3A}{M_3B} \frac{P_2B}{P_2C} \frac{P_1C}{P_1A} = 1$$

entonces,

$$\frac{M_1B}{M_1C} = \frac{P_6A}{P_6C} \frac{P_5B}{P_5A}, \quad \frac{M_2C}{M_2A} = \frac{P_4B}{P_4A} \frac{P_3C}{P_3B}, \quad \frac{M_3A}{M_3B} = \frac{P_2C}{P_2B} \frac{P_1A}{P_1C}$$

sustituimos,

$$\begin{aligned} \frac{M_1B}{M_1C} \frac{M_2C}{M_2A} \frac{M_3A}{M_3B} &= \frac{P_6A}{P_6C} \frac{P_5B}{P_5A} \frac{P_4B}{P_4A} \frac{P_3C}{P_3B} \frac{P_2C}{P_2B} \frac{P_1A}{P_1C} = \\ &= \frac{\vec{AP_1} \vec{AP_6} \vec{BP_4} \vec{BP_5} \vec{CP_2} \vec{CP_3}}{\vec{AP_4} \vec{AP_3} \vec{BP_2} \vec{BP_3} \vec{CP_1} \vec{CP_6}} = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, M_1, M_2, M_3 están alineados □

Adaptando ligeramente la demostración del teorema de Pascal es sencillo ver que el resultado sigue siendo válido cuando permitimos que dos vértices consecutivos coincidan, siempre que en tal caso sustituyamos el lado que desaparece por la tangente a la cónica en el vértice. Por este procedimiento se obtienen las siguientes situaciones límite del teorema de Pascal:

Teorema 2.5 (de Pascal en pentágonos). *En todo pentágono $ABCDE$ inscrito en una cónica, la tangente en A corta al lado CD en un punto que está alineado con los puntos de intersección $AB \cap DE$ y $BC \cap EA$. (Esto corresponde al caso límite $F = A$ en el teorema de Pascal.)*

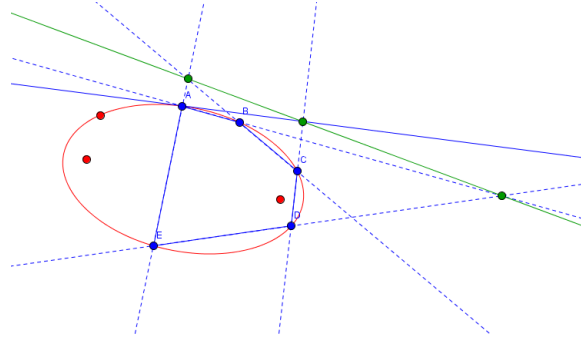


FIGURA 8. Actividad 5.2 - Teorema de Pascal en pentágonos

Teorema 2.6 (de Pascal en cuadriláteros). *En todo cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una cónica, el punto de intersección de la tangente a la cónica en A con la tangente a la cónica en C está alineado con los puntos $AB \cap CD$ y $BC \cap AD$. (Esto corresponde al caso $F = A$ y $D = C$ en el teorema de Pascal.) También se verifica que los puntos de intersección de la tangente a la cónica en A con BC y de la tangente en B con AD están alineados con el punto de intersección $AB \cap CD$. (Esto corresponde al caso límite $F = A$ y $C = B$.)*

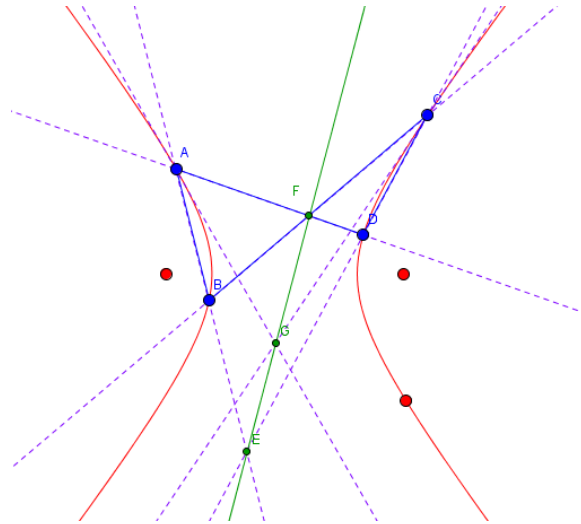


FIGURA 9. Actividad 5.3 - Teorema de Pascal en cuadriláteros

Teorema 2.7 (de Pascal en triángulos). *En todo triángulo inscrito en una cónica, los puntos en los que las tangentes en los vértices cortan a los lados opuestos están sobre una recta.*

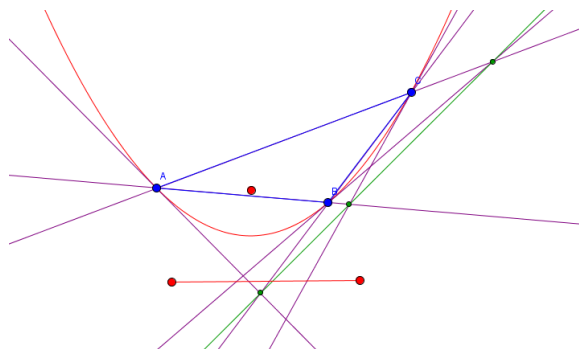


FIGURA 10. Actividad 5.4 - Teorema de Pascal en triángulos

Podemos ver en “Actividad 5.1/5.4 - Teorema de Pascal” todos estos casos. Acceder a: <http://www.geogebra.org/aciba90>

A continuación vamos a ver el teorema dual del Teorema de Pascal.

Teorema 2.8 (de Brianchon). *Si un hexágono está circunscrito en una cónica propia, entonces sus tres rectas diagonales concurren.*

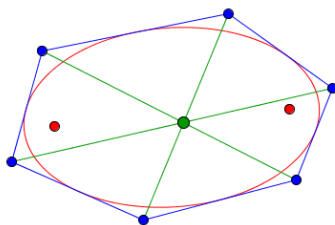


FIGURA 11. Actividad 7.1 - Teorema de Brianchon

Teorema 2.9 (de Brianchon en pentágonos). *En todo pentágono circunscrito a una cónica, la recta que une un vértice con el punto de contacto del lado opuesto, y las diagonales que unen los otros vértices no consecutivos, son tres rectas que concurren en un mismo punto. (Esto corresponde al caso límite $F = A$ en el teorema de Brianchon.)*

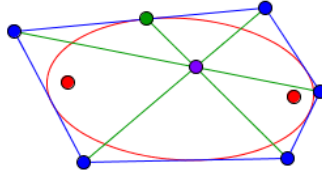


FIGURA 12. Actividad 7.2 - Teorema de Brianchon en pentágonos

Teorema 2.10 (de Brianchon en cuadriláteros). *En todo cuadrilátero circunscrito a una cónica, si se toman los puntos de contacto de dos lados que se cortan en un vértice, la recta de unión de este con su opuesto y las de unión de los puntos de contacto con los otros dos vértices son tres rectas que concurren en un mismo punto. O también, en todo cuadrilátero circunscrito a una cónica, las dos diagonales y las rectas que unen los puntos de contacto de lados opuestos son cuatro rectas que concurren en un punto.*

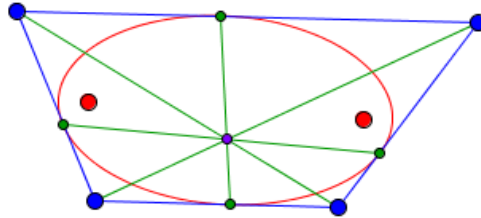


FIGURA 13. Actividad 7.3 - Teorema de Brianchon en cuadriláteros

Teorema 2.11 (de Brianchon en triángulos). *En todo triángulo circunscrito a una cónica, las rectas que unen los vértices con los puntos de contacto de los lados opuestos son tres rectas que concurren en un punto.*

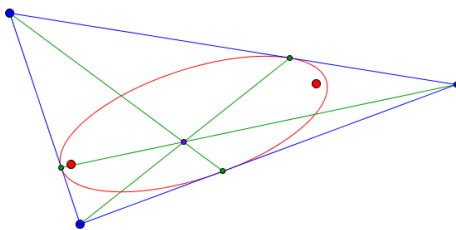


FIGURA 14. Actividad 7.4 - Teorema de Brianchon en triángulos

Podemos ver en “Actividad 7.1/7.4 - Brianchon” todos estos casos. Ver en: <http://www.geogebra.org/aciba90>.

1. Cónica por cinco puntos

Veamos ahora un enunciado que incluye el Teorema de Pascal y su recíproco.

En el plano proyectivo, un hexágono ABCDEF viene dado por seis vértices consecutivos no alineados tres a tres y por seis lados no concurrentes tres a tres.

Los lados opuestos del hexágono se cortan en tres puntos

$$P = AB \cap ED \quad Q = AF \cap CD \quad R = BC \cap EF$$

Aplicando una proyectividad podemos suponer que cuatro de los vértices tienen coordenadas sencillas y los otros puntos son puntos generales. Así

$$A = (1, 0, 0) \quad B = (1, 1, 0) \quad C = (1, 0, 1) \quad D = (1, 1, 1) \quad E = (1, a, b) \quad F = (1, x, y)$$

Además, puesto que no hay tres puntos alineados se tiene que a y b son distintos de 0 y 1.

Empezamos demostrando el siguiente resultado:

Teorema 2.12 (Actividad 6). *En \mathbb{P}^2 , dados cinco puntos no alineados tres a tres, existe una única cónica que pasa por ellos. Además esa cónica es una cónica propia.*

DEMOSTRACIÓN. Tomamos una cónica general

$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + 2\alpha_3 x_0 x_1 + 2\alpha_4 x_0 x_2 + 2\alpha_5 x_1 x_2 = 0$$

Si obligamos a la cónica a pasar por los puntos A, B, C, D, E vemos que los coeficientes son solución del siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_0 + \alpha_2 + 2\alpha_4 &= 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 &= 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 a^2 + \alpha_2 b^2 + 2\alpha_3 a + 2\alpha_4 b + 2\alpha_5 ab &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Como el sistema es de rango 5 y tenemos 6 incógnitas, obtenemos que hay una única solución no nula, salvo un factor de proporcionalidad. En otras palabras, hay una única cónica que pasa por esos cinco puntos. Además comprobamos que esta solución nos da una cónica propia,

$$\mathcal{C} \equiv (b - b^2)(x_0x_1 - x_1^2) + (a^2 - a)(x_0x_2 - x_2^2) = 0$$

□

Teorema 2.13 (de Pascal). *Consideramos un hexágono $ABCDEF$ en \mathbb{P}^2 y sea \mathcal{C} la cónica propia que pasa por los cinco primeros vértices A, B, C, D, E . Entonces son equivalentes:*

1. F está en \mathcal{C}
2. los puntos P, Q y R donde se cortan los lados opuestos del hexágono están alineados.

DEMOSTRACIÓN. Sean P, Q y R los puntos donde se cortan los lados opuestos del hexágono y \mathcal{C} la cónica propia que pasa por los cinco vértices A, B, C, D, E .

Usamos las coordenadas de los vértices que especificamos antes y supongo que los vértices A, B, C, D, E son fijos y $F(x_0, x_1, x_2)$ es un punto variable. Vamos a comprobar que el conjunto de los F tales que las intersecciones lados opuestos del hexágono $ABCDEF$ están alineados es la cónica propia \mathcal{C} que pasa por los puntos A, B, C, D, E . Así que $F \in \mathcal{C}$.

Un cálculo directo nos permite concluir que, en coordenadas homogéneas, los puntos de corte de los lados opuestos son

$$P = (AB) \cap (ED) = (b - 1, b - a, 0)$$

$$Q = (AF) \cap (CD) = (y, x, y)$$

$$R = (BC) \cap (EF) = (a + b - x - y, a + (b - 1)x - ay, b - bx + (a - 1)y)$$

Si imponemos que estos tres puntos estén alineados obtenemos

$$\det \begin{pmatrix} b - 1 & b - a & 0 \\ y & x & y \\ a + b - x - y & a + b + (b - 1)x - ay & b - bx + (a - 1)y \end{pmatrix} = 0$$

y esta condición nos define exactamente a la cónica

$$\mathcal{C} \equiv (b - b^2)(x^2 - x) + (a^2 - a)(y^2 - y) = 0$$

y concluimos la demostración del Teorema de Pascal.

□

Utilizaremos el teorema de Pascal para dar una demostración constructiva de la existencia de una cónica que pasa por cinco puntos. Esta construcción es uno de los resultados centrales de este trabajo, ya que ilustra el potencial de programas del tipo GeoGebra. Por ejemplo permite probar el Teorema de Pascal realizando la construcción y viendo que efectivamente el

lugar geométrico es una cónica, variando los puntos iniciales. Ver Figura 15.

Construcción geométrica de la cónica que pasa por cinco puntos:

La idea es hallar un punto F de manera que el hexágono $ABCDEF$ tenga sus puntos diagonales alineados y aplicar el Teorema de Pascal. Hallamos $U = AB \cap DE$ y tomamos un punto arbitrario V sobre BC . A continuación hallamos $W = UV \cap CD$ y $F = AW \cap EV$. Sabemos que $V \in BC$, veamos que $V \in EF$. Por definición $F \in EV \Rightarrow V \in EF$. De manera análoga se razona que $W \in AF$. Por tanto tenemos que $U = AB \cap DE$, $V = BC \cap EF$ y $W = CD \cap FA$ son los puntos diagonales de $ABCDEF$ y están alineados ya que W está en la recta UV . Estamos pues en condiciones de aplicar el recíproco del teorema de Pascal concluyendo que los puntos A, B, C, D, E, F están sobre una misma cónica propia.

La ventaja de esta demostración es que nos da una forma de construir la cónica, si variamos la posición del punto V obtenemos los puntos de la cónica.

Podemos observar esta construcción en “Actividad 6.2 - Cónica por 5 puntos”. Ver en: <http://www.geogebra.org/aciba90>.

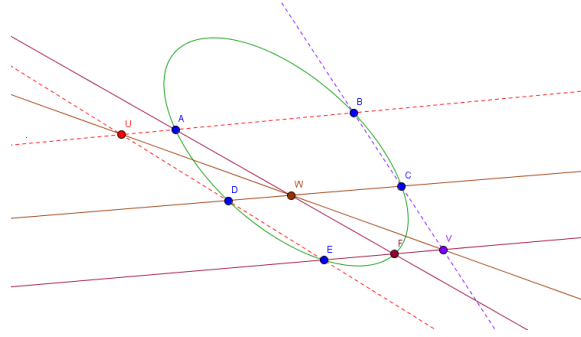


FIGURA 15. Actividad 6.2 - Cónica por 5 puntos (construcción)

DEMOSTRACIÓN. Veamos una demostración alternativa. Salvo una proyectividad se tiene

$$P_i = e_i, i = 1, 2, 3, U = (1, 1, 1), X = (a, b, c)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ya que X, P_i, P_j no están alineados, para $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$. Además son distintos, $((a, a, c) = a(1, 1, 1) + (c - a)(0, 0, 1))$.

En general, $P_i \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow a_{ii} = 0$, y para $i = 1, 2, 3$ queda

$$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Ahora, $U, X = (a, b, 1) \in \mathcal{C}_A$ da

$$a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0 = a_{12}ab + a_{13}a + a_{23}b = 0$$

y resolviendo el sistema, \mathcal{C}_A está dada por

$$(a-b)x_1x_2 + (b-ab)x_1x_3 + (ab-a)x_2x_3 = 0$$

Si imponemos que los tres puntos estén alineados obtenemos:

$$\begin{vmatrix} b-1 & b-a & 0 \\ y & x & y \\ a+b-x-y & a+(b-1)x-ay & b-bx+(a-1)y \end{vmatrix} = 0$$

y esta condición nos define exactamente la cónica

$$\mathcal{C} \equiv (b-b^2)(x^2-x) + (a^2-a)(y^2-y) = 0$$

y concluimos la demostración del Teorema de Pascal. \square

Podemos observar un ejemplo de esta Proposición en el archivo “Actividad 6.1 - Cónica por 5 puntos”: <http://www.geogebra.org/aciba90>.

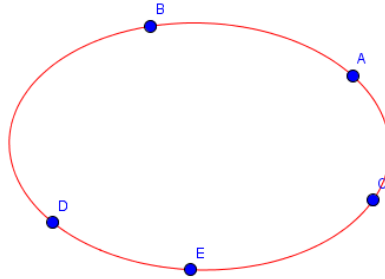


FIGURA 16. Actividad 6.1 - Cónica por 5 puntos (lugar geométrico)

Aplicaciones de las cónicas

1. La propiedad óptica [6]

Si un rayo de luz es reflejado en un espejo, entonces el ángulo de reflexión es igual que el ángulo de incidencia. Esto está relacionado con el principio de Fermat, el cual dice que la luz siempre viaja por el camino más corto. Probaremos que el camino es en efecto el más corto.

Así tenemos una recta l y los puntos F_1 y F_2 pertenecientes al mismo lado de l . Queremos encontrar un punto P en la recta tal que la suma de las distancias de P a F_1 y F_2 es mínima. Reflejando F_2 en l obtenemos el punto F'_2 . Claramente, $F_2X = F'_2X$ para todo X en l . Así necesitamos un punto P tal que la suma de las distancias de P a F_1 y F'_2 sea mínima. Claramente, el mínimo se obtiene cuando P pertenece al segmento $F_1F'_2$ intersectando l . Entonces los ángulos en cuestión son obviamente iguales.

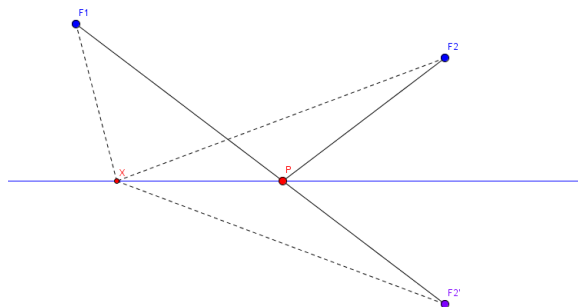


FIGURA 1. Actividad 8.1 - La propiedad óptica (previo)

- Proposición 3.1.**
1. ¿ Cuándo el valor absoluto de la diferencia de las distancias desde P a F_1 y F_2 pertenecientes a diferentes lados de l será maximal?
 2. Dadas dos rectas l y l' y un punto F que no pertenezca a dichas rectas, encontrar un punto P en l tal que la diferencia de distancias desde P a l' y F es maximal.

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea F'_2 la reflexión de F_2 en l . Claramente, $F_2X = F'_2X$ para cualquier punto X en l . Necesitamos un punto P tal que la diferencia de distancias desde P a F_1 y F'_2 es maximal.

Se sigue de la desigualdad triangular que $|F_1P - F_2'P| < F_1F_2'$ y el máximo se obtiene si y solo si F_1, F_2' y P pertenece a l . Como los puntos F_2, F_2' son las reflexiones cada uno del otro, los ángulos formados por las rectas F_1P y F_2P con l son iguales.

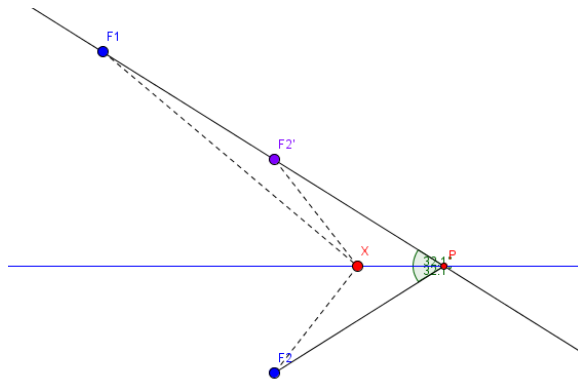


FIGURA 2. Actividad 8.2 - La propiedad óptica (previo)

2. Sea F' la reflexión de F en l . Elegimos entre F y F' el que su distancia a l' sea minimal. Sea F y sea d la distancia de F a l' . Entonces todo punto P en l la distancia a l' no es mayor que $PF + d$. Por lo tanto, la diferencia en cuestión nunca excede d . Por otra parte, es exactamente d cuando P pertenece a l' pasando por F .

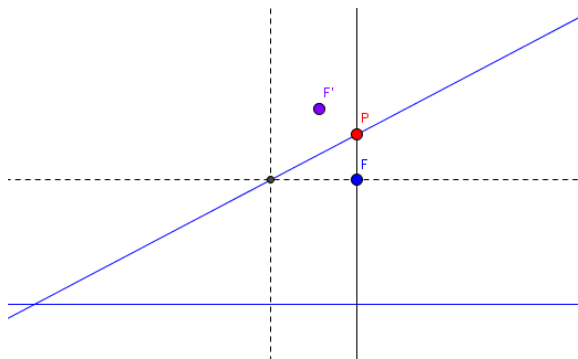


FIGURA 3. Actividad 8.3 - La propiedad óptica (previo)

Notemos también que si la recta F_1F_2' en (1) es paralela a l y la recta l' en (2) es perpendicular a l , entonces no hay máximo (se alcanza en infinito). \square

Ahora enunciaremos una de las más importantes propiedades de cónicas, la llamada propiedad óptica de las cónicas.

Teorema 3.2 (La propiedad óptica de la elipse). *Sea l una recta tangente a una elipse en un punto P . Entonces l es la bisectriz del ángulo exterior F_1PF_2 .*

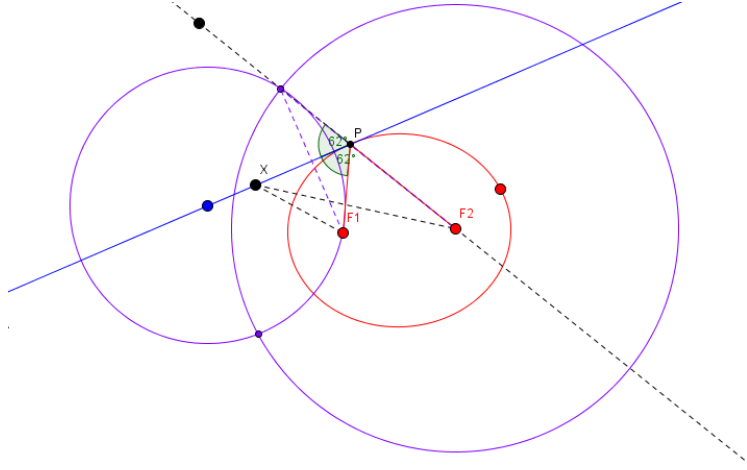


FIGURA 4. Actividad 8.4 - La propiedad óptica de la elipse

DEMOSTRACIÓN. Sea X un punto arbitrario de l distinto de P . Como X está fuera de la elipse, nosotros sabemos que $XF + XF_2 > PF_1 + PF_2$, equivalentemente, de todos los puntos de l el punto P tiene la suma de distancias a F_1 y F_2 más pequeña. Esto significa que los ángulos formados por las líneas PF_1 y PF_2 con l son iguales. \square

Proposición 3.3 (La propiedad óptica de la parábola). *Sea l la recta tangente a una parábola en un punto P . Sea P' la proyección de P respecto de la directriz (de la parábola). Entonces, l es la bisectriz del ángulo FPP' .*

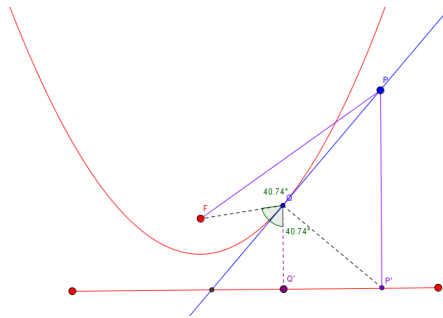


FIGURA 5. Actividad 8.5 - La propiedad óptica de la parábola

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la bisectriz del ángulo FPP' , llamémoslo l' , interseca a la parábola en otro punto Q , cuya proyección a la directriz es denotada Q' . Por definición de parábola, $FQ = QQ'$. Por otro lado el triángulo FPP' es isósceles, y la bisectriz del ángulo P es mediatriz

del segmento FP' . Por tanto, para todo punto Q en la bisectriz tenemos $QP' = QF = QQ'$. Pero esto es imposible porque Q' es el único punto de la directriz de la parábola donde la distancia a Q es mínima. \square

Proposición 3.4 (La propiedad óptica de la hipérbola). *Sea l la recta tangente a la hipérbola en un punto P , entonces l es la bisectriz del ángulo F_1PF_2 , donde F_1, F_2 son los focos de la hipérbola.*

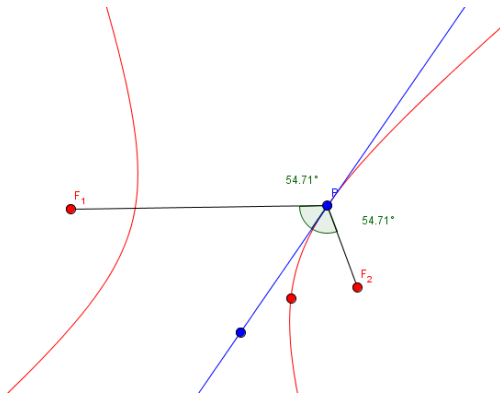


FIGURA 6. Actividad 8.6 - La propiedad óptica de la hipérbola

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que l' la bisectriz del ángulo F_1PF_2 interseca a la hipérbola en otro punto Q (perteneciente a la misma rama de la hipérbola que P). Por conveniencia, supondremos que P pertenece a la rama más cercana a F_1 . Sea F'_1 la reflexión de F_1 respecto de l' . Entonces, $F_1Q = QF'_1$, $F_1P = PF'_1$; además F_2, F'_1, P están alineados. Entonces, $F_2P - PF_1 = F_2Q - F_1Q$, y por lo tanto $F_2F'_1 = F_2P - PF'_1 = F_2Q - QF'_1$. Pero por la desigualdad triangular, $F_2F'_1 > F_2Q - QF'_1$.

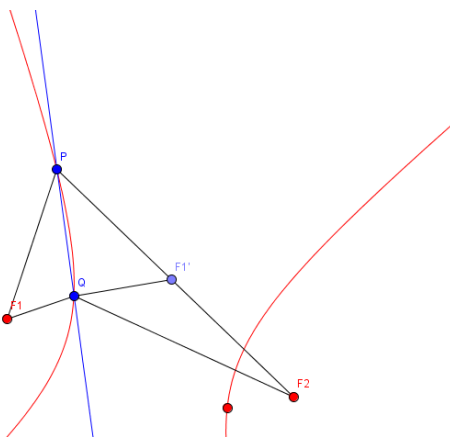


FIGURA 7. Actividad 8.7 - La propiedad óptica (demostración caso hipérbola)



Podemos ver en “Actividad 8.1/8.7 - La propiedad óptica.” estos teoremas. Acceder a: <http://www.geogebra.org/aciba90>.

La propiedad óptica de la parábola era ya conocida en la antigua Grecia. Por ejemplo, Arquímedes, colocando placas de cobre en un espejo parabólico, logró incendiar la flota romana sitiando Siracusa.

2. Teorema de Poncelet [6]

Consideremos el haz de cónicas determinado por A, B, C, D y la recta l que no pasa por estos puntos. Si una de las cónicas del haz interseca l en P , entonces interseca a l en otro punto P' (el cual puede coincidir con P). La aplicación $P \rightarrow P'$ se llamará *involución* de l definida por el haz. Aplicando el teorema de Pascal al hexágono $ABCDPP'$, obtenemos un método de construir P' , mostrado en la siguiente figura.

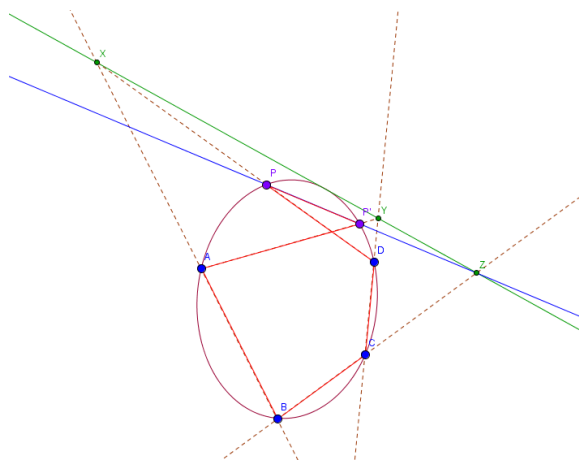


FIGURA 8. Actividad 9.1 - Teorema de Poncelet (propiedad previa)

Como esta construcción puede ser representada como una composición de proyecciones centrales, la involución preserva ángulos. En particular, esto implica que l es tangente a más de dos cónicas del haz. Además, la involución está únicamente determinada por dos pares de puntos correspondientes.

Notemos que si no todos los cuatro puntos que definen la cónica son reales, entonces la propiedad de la involución puede establecerse sin usar el plano complejo, todo lo que necesitamos es una transformación proyectiva que transforme el haz en círculos. Sea P la intersección de la recta con el eje radical del haz. Entonces la involución de la recta será la inversión con centro P .

Con la ayuda de la involución, probaremos el teorema de Poncelet en el caso general, es decir, para haces de cónicas.

Teorema 3.5 (de Poncelet). Sean $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ cónicas pertenecientes al haz \mathcal{F} . Desde un punto arbitrario A_0 en α_0 trazamos una tangente a α_1 y hallamos su segundo punto de intersección A_1 con α_0 . Desde A_1 trazamos una tangente a α_2 y hallamos su intersección A_2 con α_0 , etc. Si para algún A_0 el punto A_n coincide con A_0 , entonces se cumple lo mismo para cualquier otro punto de la cónica α_0 .

DEMOSTRACIÓN. Usaremos inducción sobre n . Primero probaremos un resultado de interés independiente. \square

Podemos verlo en “Actividad 9.1/9.2 - Teorema de Poncelet”. Ver en: <http://www.geogebra.org/aciba90>.

- Lema 3.6.**
1. Sean A, B, C pertenecientes a una cónica α_0 , la recta AB , que pasa por A y B , tangente a la cónica α_1 en K , y la recta AC tangente a la cónica α_2 en L . Entonces existe un punto D en α_0 tal que α_1 es tangente a la recta CD y α_2 es tangente a la recta BD en los puntos de sus intersecciones con KL . Además, hay una cónica en el haz \mathcal{F} tangente a las rectas AD y BC en sus intersecciones con KL .
 2. Sean los puntos A, B, C, D pertenecientes a una cónica α_0 y que la cónica α_1 es tangente a AB en el punto K y a CD en el punto M . Entonces existe una cónica en el haz \mathcal{F} tangente a las rectas AC y BD en los puntos de intersección con KM .

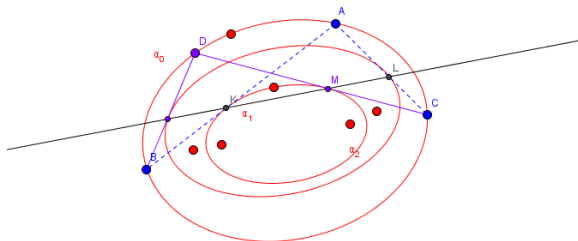


FIGURA 9. Actividad 9.2 - Teorema de Poncelet

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea M el segundo punto de intersección de α_1 y KL , y sea \mathcal{G} el haz conteniendo α_1 y la curva degenerada consistente en las rectas CM y AB . En la recta AC , los haces \mathcal{F} y \mathcal{G} dan lugar a la misma involución definida por los puntos A y C y sus intersecciones de AC con α_1 (las cuales no son necesariamente reales). Por lo tanto, el punto L es un doble punto de involución definido por el haz \mathcal{G} , equivalentemente, \mathcal{G} contiene la recta doble KL . Por lo tanto, todas las cónicas de \mathcal{G} , incluida α_1 , son tangentes a CM y α_0 . Aplicando el argumento precedente a los puntos B, C, D

tenemos que α_2 es tangente a la recta BD en su punto de intersección con KL . Después calculamos la intersección de las rectas AD y KL y tomamos la cónica de \mathcal{F} que pasa por este punto. El mismo argumento muestra que esta cónica es tangente a la recta AD .

2. El hecho de que es también tangente a BC y este apartado se prueban de forma similar

□

Corolario 3.7. *Sea la recta AB tangente a la cónica α_1 en X y la recta AC tangente a la cónica α_2 en Y . Entonces existen exactamente dos cónicas en el haz \mathcal{F} tangentes a BC en los puntos Z_1, Z_2 ; además X, Y, Z_1 están alineados y las rectas AZ_2, BY, CX concurren en un punto.*

Ahora podemos probar el teorema de Poncelet para $n = 3$. Supongamos que las rectas A_0A_1, A_1A_2, A_2A_0 son tangentes a las cónicas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en los puntos X_1, X_2, X_3 que no pertenecen a la recta, y la recta B_0B_1 es tangente a la cónica α_1 en un punto Y_1 . Por el lema anterior, existe una cónica α' en \mathcal{F} tangente a las rectas A_0B_0 y A_1B_1 en los puntos de intersección Z_0, Z_1 con X_1Y_1 , y un punto B_2 en α_2 es tangente a B_1B_2 y α' es tangente a B_2A_2 en los puntos de intersección Y_2, Z_2 con Z_1X_2 . Además, existe una cónica α'' tangente a las rectas A_2A_0 y B_2B_0 en los puntos de intersección K e Y_3 con Z_2Z_0 . Aplicando el teorema de Desargues a los triángulos $A_0A_1A_2$ y $Z_0Z_1Z_2$, vemos que los puntos X_1, X_2, K no están alineados. Además $K = X_3$ y $\alpha'' = \alpha_3$.

Ahora supongamos que n es arbitrario. Usando los puntos A_0, A_1, A_2 construimos una cónica Q' tangente a las rectas A_0A_2 y B_0B_2 . Como los lados del polígono $A_0A_2...A_{n-1}$ son tangentes a las cónicas $\alpha', \alpha_3, \dots, \alpha_n$, podemos hacer inducción en el caso $n-1$ para probar el caso n . Y el teorema de Poncelet está demostrado.

3. Cónica tangencial

A continuación vamos a ver una nueva forma de construir cónicas a partir de rectas tangentes, como se ve en “Actividad 10.1 - Cónica tangencial”. Acceder a: <http://www.geogebra.org/aciba90>.

Sea una cónica (azul) y dos puntos interiores (verdes), trazamos todos los triángulos inscritos (rojos) a la cónica tales que dos de sus lados pasan por los dos puntos. Entonces, el otro lado es tangente a una cónica. (Mover el punto D para verla).

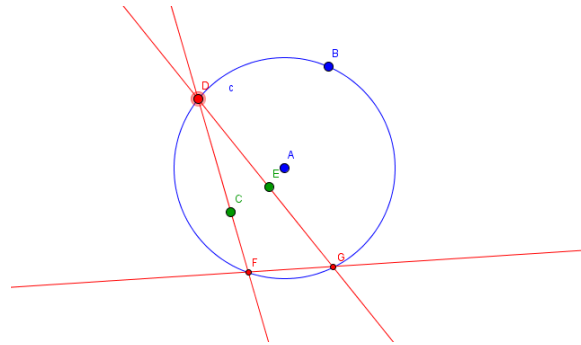


FIGURA 10. Actividad 10.1 - Cónica tangencial (1)

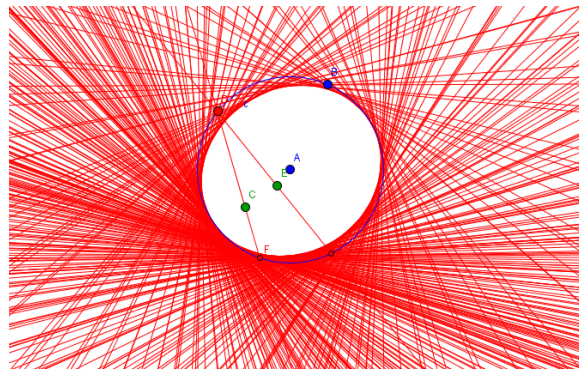


FIGURA 11. Actividad 10.1 - Cónica tangencial (2)

Podemos ver una demostración gráfica en “Actividad 10.3 - Cónica tangencial (demostración)”.

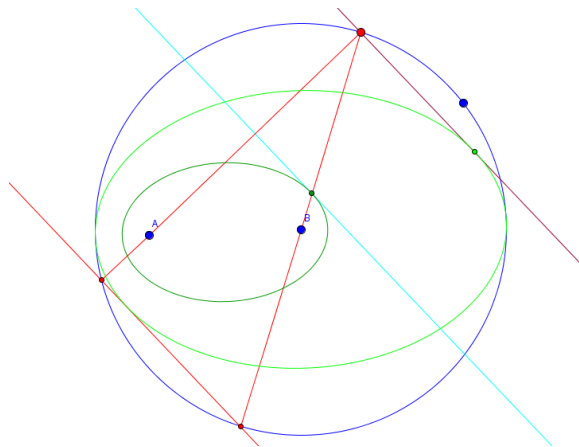


FIGURA 12. Actividad 10.1 - Cónica tangencial (demostración)

Veamos ahora la propiedad dual de la propiedad anterior: Sean una cónica (azul) y dos rectas exteriores (azules), trazamos todos los triángulos (rojos) circunscritos a la cónica que tienen un vértice sobre cada una de las rectas azules. Entonces el otro vértice describe una cónica (verde). Podemos verlo en “Actividad 10.2 - Cónica puntual”. Ver en: <http://www.geogebra.org/aciba90>.

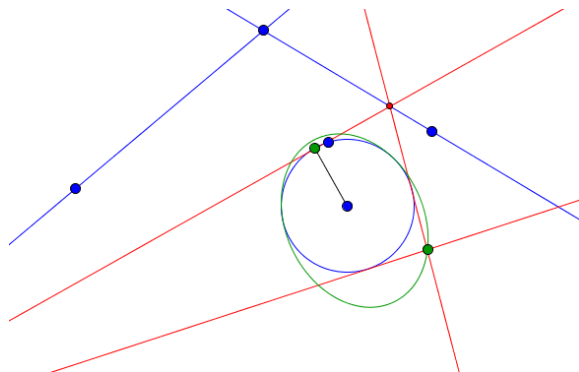


FIGURA 13. Actividad 10.2 - Cónica puntual

4. Cónica en un hexágono [1]

Proposición 3.8 (Actividad 11). *Sea $ABCDEF$ un hexágono en \mathbb{P}^2 cuyas diagonales AD, BE, CF concurren en un punto P . Entonces, los circuncentros de los seis triángulos formados por las diagonales están en una única cónica propia.*

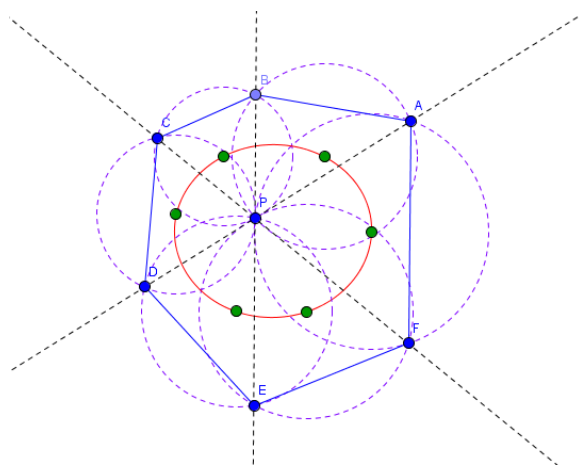


FIGURA 14. Actividad 11 - Cónica en un hexágono

DEMOSTRACIÓN. La proposición es una consecuencia directa del recíproco del Teorema de Pascal. Los lados opuestos del hexágono en cuestión son

paralelos porque los circuncentros de dos triángulos adyacentes pertenecen a la mediatriz perpendicular de el lado común, el cual es una de las diagonales del hexágono dado.

Así, los lados opuestos del hexágono concurren en el infinito, por tanto los tres puntos de intersección de los lados opuestos pertenecen a la recta del infinito, es decir, están alineados. Por tanto, por el recíproco del Teorema de Pascal los circuncentros están en una única cónica propia. \square

5. Tres pares de rectas paralelas [1]

Proposición 3.9 (Actividad 12). *Seis puntos A, B, C, D, E, F en \mathbb{P}^2 tales que AB es paralelo a CD , AE es paralelo a CF , BF es paralelo a DE . Entonces, los seis puntos pertenecen a una única cónica propia.*

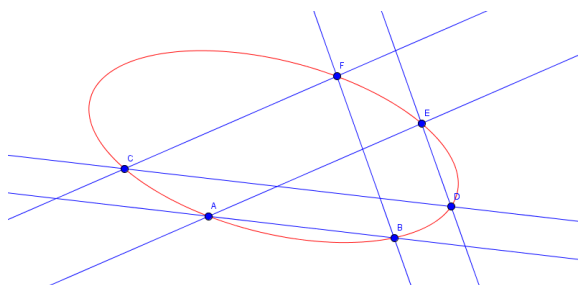


FIGURA 15. Actividad 12 - Tres pares de rectas paralelas (1)

DEMOSTRACIÓN. Existe una única cónica que pasa por cinco puntos A, B, C, D, E . En adelante, esta es la cónica a la que nos referiremos.

Primero aplicamos una proyectividad que fije AB y que haga a AC y BD simétricos respecto a la bisectriz perpendicular de AB

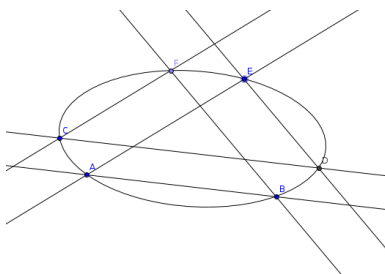


FIGURA 16. Actividad 12 - Tres pares de rectas paralelas (2)

Se puede probar que esta proyectividad también hace a la cónica simétrica respecto de la bisectriz perpendicular.

A continuación, estiramos o encogemos, mediante una dilatación, la cónica en la dirección de la bisectriz perpendicular para obtener una circunferencia.

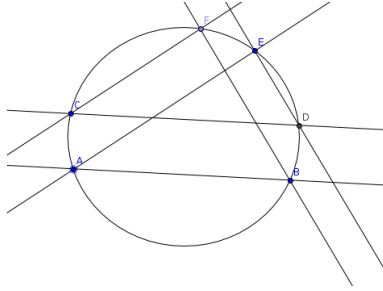


FIGURA 17. Actividad 12 - Tres pares de rectas paralelas (3)

En esta situación, el punto F también pertenece a la circunferencia. Esto es porque los arcos BAC y ABD son iguales (son simétricos respecto de la bisectriz perpendicular). Esto implica que los ángulos BFC , AED son iguales. Y como el ángulo AED está inscrito en la circunferencia, entonces el ángulo BFC también está inscrito en la circunferencia, y hemos probado que F pertenece a la circunferencia. Y esto equivale a que F pertenece a la cónica inicial. \square

Este resultado puede recordarnos al Teorema de Pascal, esto es porque si en el Teorema de Pascal movemos la recta de Pascal del hexágono al infinito, los lados opuestos se vuelven paralelos, y tenemos la situación anterior.

6. Cónica en un triángulo [1]

Proposición 3.10. Sea P un punto interior al triángulo $\triangle ABC$. Sean tres rectas pasando por P y paralelas a los lados del triángulo, cuyas intersecciones con los lados son $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$, como en la figura:

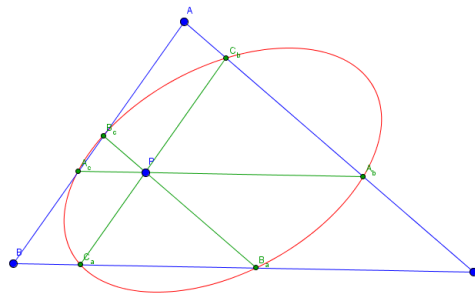


FIGURA 18. Actividad 13 - Cónica en un triángulo

Entonces, $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$, pertenecen a una cónica.

DEMOSTRACIÓN. Los lados opuestos del hexágono $C_a B_a B_c A_c A_b C_b$ son paralelos, luego se cortan en la recta del infinito, por tanto por el Teorema de Pascal los vértices del hexágono están en una cónica.

Notemos que esta demostración no requiere que las tres líneas que pasan por P sean paralelas a los lados de $\triangle ABC$. \square

Bibliografía

- [1] <http://www.cut-the-knot.org/>.
- [2] http://www.dynamicgeometry.com/General_Resources/The_Sketchpad_Story.html.
- [3] <http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/SEGUNDO/009%20Los%20medios.pdf>.
- [4] C. Boyer. *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universitaria, Madrid, 1987.
- [5] Luis Ugarte Vilumbrales. *Geometría Proyectiva Plana*.
- [6] A. Akopyan A. Zaslavsky. *Geometry of Conics*. American Mathematical Society, 2007.

