

# Algoritmo di eliminazione dei quantificatori di Cooper

una semplice implementazione scritta in linguaggio C

Andrea Ciceri

27 febbraio 2019

## Sommario

L'algoritmo di Cooper permette di effettuare l'eliminazione dei quantificatori universali da formule dell'aritmetica di Presburger. In questo documento verrà descritto l'algoritmo e verrà discussa una semplice implementazione in C di una versione ridotta dell'algoritmo atta ad interfacciarsi al software di model checking MCMT.

## 1 Aritmetica di Presburger

Sia  $\mathbb{Z}$  l'anello degli interi, sia  $\Sigma_{\mathbb{Z}}$  la segnatura  $\{0, +, -, <\}$  e sia  $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$  il modello standard degli interi. Definiamo la teoria dell'**aritmetica di Presburger** come l'insieme  $T_{\mathbb{Z}} = Th(\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}) = Th(\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, <)$  di tutte le  $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ -formule vere in  $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$ . Tale teoria non ammette l'eliminazione dei quantificatori.

Consideriamo ora la segnatura estesa  $\Sigma_{\mathbb{Z}}^*$  ottenuta aggiungendo a  $\Sigma_{\mathbb{Z}}$  un'infinità di predicati unari di divisibilità  $D_k$  per ogni  $k \geq 2$ , dove  $D_k(x)$  indica che  $x \equiv_k 0$ . Sia  $T_{\mathbb{Z}}^*$  l'insieme delle  $\Sigma_{\mathbb{Z}}^*$ -formule vere nell'espansione  $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^*$  ottenuta da  $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$ .

Nel 1930 Mojżesz Presburger ha esibito un algoritmo di eliminazione dei quantificatori per  $T_{\mathbb{Z}}^*$  e nel 1972 Cooper ha fornito una versione migliorata basata sull'eliminazione dei quantificatori da formule nella forma  $\exists x. \varphi$ , dove  $\varphi$  è una formula senza quantificatori arbitraria.

## 2 L'algoritmo

Si ha quindi che l'algoritmo ha come ingresso una formula del tipo  $\exists x. \varphi$  e come uscita una formula equivalente senza il quantificatore esistenziale. Se si vogliono eliminare più quantificatori esistenziali basta reiterare l'algoritmo.

Si osserva come ovviamente ogni formula contenente quantificatori universali possa essere trasformata in una formula equivalente con soli quantificatori esistenziali. Pertanto non si ha una perdita di generalità ad assumere un input in tale forma.

### 2.1 Processo di semplificazione

In questo passaggio vengono effettuate le seguenti semplificazioni alla formula in ingresso  $\varphi$ :

- Tutti i connettivi logici composti, cioè che non sono  $\neg$ ,  $\wedge$  o  $\vee$ , vengono sostituiti nella loro definizione in termini di  $\neg$ ,  $\wedge$  o  $\vee$ .
- I predicati binari  $\geq$  e  $\leq$  vengono sostituiti con le loro definizioni (e.g.  $s \leq t$  diventa  $s < t + 1$ ).
- Le disequazioni negate della forma  $\neg(s < t)$  vengono sostituite con  $t < s + 1$ .
- Tutte le equazioni e le disequazioni vengono riscritte in modo da avere 0 nel lato sinistro ( $s = t$  e  $s < t$  diventano  $0 = t - s$  e  $0 < t - s$ ).

- Tutti gli argomenti dei predicati vengono sostituiti con la loro forma canonica.

Dopo aver applicato queste sostituzioni e aver trasformato la  $\varphi$  ottenuta in forma normale negativa possiamo dunque assumere che  $\varphi$  sia congiunzione e disgiunzione dei seguenti tipi di letterali:

$$0 = t \quad \neg(0 = t) \quad 0 < t \quad D_k(t) \quad \neg D_k(t)$$

Diremo che  $\varphi$  in tale forma é una **formula ristretta**.

## 2.2 Normalizzazione dei coefficienti

Assumiamo quindi che l'algoritmo riceva in ingresso  $\exists x. \varphi$  con  $\varphi$  formula ristretta. Il primo passaggio consiste nel trasformare  $\varphi$  in una formula dove il coefficiente della  $x$  è sempre lo stesso. Per fare questo è sufficiente calcolare il minimo comune multiplo  $l$  di tutti i coefficienti di  $x$  ed effettuare i seguenti passi:

- Per le equazioni e le equazioni negate, rispettivamente nella forma  $0 = t$  e  $\neg(0 = t)$ , si moltiplica  $t$  per  $l/c$ , dove  $c$  indica il coefficiente della  $x$ .
- Analogamente, per i predicati di divisibilità  $D_k(t)$  e i predicati di divisibilità negati  $\neg D_k(t)$  si moltiplica sia  $t$  che  $k$  per  $l/c$ , sempre dove  $c$  indica il coefficiente della  $x$ .
- Per le disequaglianze  $0 < t$  si moltiplica  $t$  per il valore assoluto  $l/c$ , dove ancora un volta  $c$  indica il coefficiente della  $x$ .

Quindi ora tutti i coefficienti della  $x$  in  $\varphi$  sono  $\pm l$ , passiamo ora a considerare la seguente formula equivalente:

$$\exists x. (D_l(x) \wedge \psi)$$

dove  $\psi$  è ottenuta da  $\varphi$  sostituendo  $l \cdot x$  con  $x$ . Dunque la formula  $\varphi' = D_l(x) \wedge \psi$  è una formula ristretta dove i coefficienti della  $x$  sono  $\pm 1$ .

## 2.3 Costruzione di $\varphi'_{-\infty}$

Definiamo una nuova formula  $\varphi'_{-\infty}$  ottenuta partendo da  $\varphi'$  e sostituendo tutte le formule atomiche  $\alpha$  con  $\alpha_{-\infty}$  secondo la seguente tabella:

$\alpha$	$\alpha_{-\infty}$
$0 = t$	falso
$0 < t$ con $1 \cdot x$ in $t$	falso
$0 < t$ con $-1 \cdot x$ in $t$	vero
ogni altra formula atomica $\alpha$	$\alpha$

## 2.4 Calcolo dei boundary points

Ad ogni letterale  $L[x]$  di  $\varphi'$  contenente la  $x$  che non è un predicato di divisibilità associamo un intero, detto **boundary point**, nel seguente modo:

Tipo di letterale	Boundary point
$0 = x + t$	il valore di $(-t + 1)$
$\neg(0 < x + t)$	il valore di $-t$
$0 < x + t$	il valore di $-t$
$0 < -x + t$	niente

Si osserva come nel caso la formula  $\varphi$  contenga più variabili da eliminare allora i valori nella colonna di destra possano dipendere da altre variabili. Chiamiamo  $B$ -set l'insieme di questi boundary points.

## 2.5 Eliminazione dei quantificatori

Quest'ultimo passaggio è semplicemente l'applicazione della seguente equivalenza:

$$\exists x . \varphi'[x] \longleftrightarrow \bigvee_{j=1}^m \left( \varphi'_{-\infty}[j] \vee \bigvee_{b \in B} (\varphi'[b + j]) \right)$$

dove  $\varphi'$  è la formula ristretta in cui i coefficienti della  $x$  sono sempre  $\pm 1$ ,  $m$  è il minimo comune multiplo di tutti i  $k$  dei predicati di divisibilità  $D_k(t)$  che appaiono in  $\varphi'$  tali che appaia la  $x$  in  $t$  e infine  $B$  è il  $B$ -set relativo a  $\varphi'$ . Considerando quindi il lato destro della precedente equivalenza si ha una formula priva del quantificatore esistenziale e si ha dunque ottenuto ciò che si voleva.

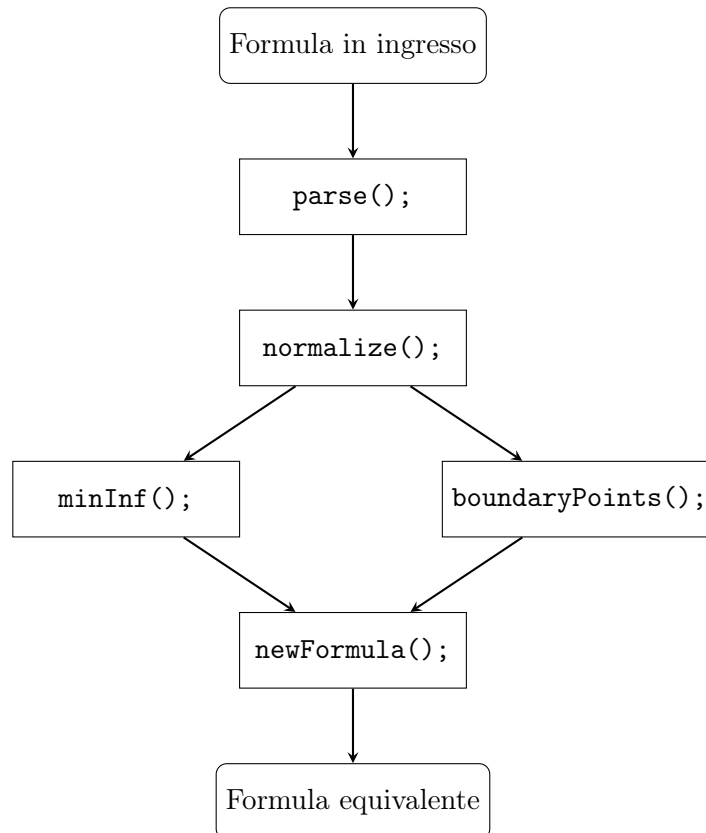
## 3 Implementazione

Il software è stato scritto nel linguaggio C rispettando lo standard C99, in questo capitolo verrà effettuata una discussione riguardo l'implementazione.

### 3.1 Struttura e design

L'algoritmo è stato suddiviso in svariate procedure, implementate come singole funzioni in C, è possibile eseguire l'intero algoritmo chiamando la funzione `char* cooper(char* wff, char* var)`, dove `wff` è una formula ben formata (well-formed formula) nel linguaggio SMT-LIB e `var` è la variabile da eliminare. Naturalmente la funzione restituisce la formula equivalente priva della variabile. Si rimanda a più tardi la discussione della forma esatta che deve avere la formula in ingresso.

La funzione `cooper` effettua quindi a sua volta delle chiamate a varie funzioni, si è cercato per quanto possibile di mantenere la suddivisione di queste sotto-procedure fedele alla descrizione dell'algoritmo svolta precedentemente.



Prima di spiegare il comportamento delle singole funzioni occorre accennare che l'oggetto principale manipolato dal programma è l'albero sintattico stesso della formula. Per ottenere ciò si è creato un tipo strutturato chiamato `t_syntaxTree` ad hoc. Si rimanda a più tardi una discussione dettagliata del tipo in questione.

La funzione che ha quindi il compito di effettuare il parsing è `t_syntaxTree* parse(char* wff)`, ed è questo appena introdotto il tipo che ritorna.

Il passo successivo al parsing è la normalizzazione della formula, cioè la generazione della formula  $\varphi' = D_l(x) \wedge \psi$ , dove i coefficienti della variabile da eliminare sono diventati 1. La segnatura di tale funzione è `void normalize(t_syntaxTree* tree, char* var)`.

Le funzioni `t_syntaxTree* minInf(t_syntaxTree* tree, char* var)` e `t_syntaxTree* boundaryPoints(t_syntaxTree* tree, char* var)`, come è facile evincere, generano rispettivamente  $\varphi_{-\infty}$  e l'insieme dei boundary points.

Infine `t_syntaxTree* newFormula(t_syntaxTree* tree, t_syntaxTree* minf, char* var)` genera la formula equivalente a partire da  $\varphi_{-\infty}$  e della formula normalizzata. È al suo interno che viene effettuata la chiamata a `boundaryPoints()`.

Esiste inoltre un ulteriore passo opzionale non facente parte dell'algoritmo di Cooper, la funzione `void simplify(t_syntaxTree* t)`, che può essere chiamata passando come argomento l'output di `newFormula()`, effettua una rozza semplificazione della formula. Verrà discusso successivamente in dettaglio cosa si intende.

## 3.2 Analisi del codice

Quella che viene presentata qui è un'analisi dettagliata del codice sorgente del programma riga per riga.

```

521 char* cooper(char* wff, char* var) {
522     t_syntaxTree* tree, *minf, *f;
523     char* str;
524
525     tree = parse(wff); //Genera l'albero sintattico a partire dalla stringa
526     normalize(tree, var); //Trasforma tree in  $\varphi_{-\infty}$ 
527     minf = minInf(tree, var);
528     f = newFormula(tree, minf, var);
529     simplify(f); //opzionale
530     str = treeToStr(f);
531
532     recFree(tree);
533     recFree(minf);
534     recFree(f);
535
536     return str;
537 }
```

## 4 Utilizzo

In questo capitolo verranno forniti alcuni semplici esempi di utilizzo.

### 4.1 Script ausiliari

### 4.2 Esempi pratici

# Indice

<b>1</b>	<b>Aritmetica di Presburger</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>L'algoritmo</b>	<b>1</b>
2.1	Processo di semplificazione . . . . .	1
2.2	Normalizzazione dei coefficienti . . . . .	2
2.3	Costruzione di $\varphi'_{-\infty}$ . . . . .	2
2.4	Calcolo dei boundary points . . . . .	2
2.5	Eliminazione dei quantificatori . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Implementazione</b>	<b>3</b>
3.1	Struttura e design . . . . .	3
3.2	Analisi del codice . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Utilizzo</b>	<b>4</b>
4.1	Script ausiliari . . . . .	4
4.2	Esempi pratici . . . . .	4

## Riferimenti bibliografici

- [1] Leslie Lamport, *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: a document preparation system*, Addison Wesley, Massachusetts, 2nd edition, 1994.