Algoritmo di eliminazione dei quantificatori di Cooper

una semplice implementazione scritta in linguaggio C

Andrea Ciceri

28 febbraio 2019

Sommario

L'algoritmo di Cooper permette di effettuare l'eliminazione dei quantificatori universali da formule dell'aritmetica di Presburger. In questo documento verrà descritto l'algoritmo e verrà discussa una semplice implementazione in C di una versione ridotta dell'algoritmo atta ad interfacciarsi al software di model checking MCMT.

1 Aritmetica di Presburger

Sia $\mathbb{Z}$ l'anello degli interi, sia $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ la segnatura $\{0, +, -, <\}$ e sia $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$ il modello standard degli interi. Definiamo la teoria dell'**aritmetica di Presburger** come l'insieme $T_{\mathbb{Z}} = Th(\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}) = Th(\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, <)$ di tutte le $\Sigma_{\mathbb{Z}}$-formule vere in $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$. Tale teoria non ammette l'eliminazione dei quantificatori.

Consideriamo ora la segnatura estesa $\Sigma^*_{\mathbb{Z}}$ ottenuta aggiungendo a $\Sigma_{\mathbb{Z}}$ un'infinità di predicati unari di divisibiltà D_k per ogni $k \geq 2$, dove $D_k(x)$ indica che $x \equiv_k 0$. Sia $T^*_{\mathbb{Z}}$ l'insieme delle $\Sigma_{\mathbb{Z}}$-formule vere nell'espansione $\mathcal{A}^\star_{\mathbb{Z}}$ ottenuta da $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$.

Nel 1930 Mojżesz Presburger ha esibito un algoritmo di eliminazione dei quantificatori per $T^*_{\mathbb{Z}}$ e nel 1972 Cooper ha fornito una versione migliorata basata sull'eliminazione dei quantificatori da formule nella forma $\exists\, x\,.\,\varphi$, dove φ è una formula senza quantificatori arbitraria.

2 L'algoritmo

Si ha quindi che l'algoritmo ha come ingresso una formula del tipo $\exists\, x\,.\,\varphi$ e come uscita una una formula equivalente senza il quantificatore esistenziale. Se si vogliono eliminare più quantificatori esistenziali basta reiterare l'algoritmo.

Si osserva come ovviamente ogni formula contenente quantificatori universali possa essere trasformata in una formula equivalente con soli quantificatori esistenziali. Pertanto non si ha una perdita di generalitá ad assumere un input in tale forma.

2.1 Processo di semplificazione

In questo passaggio vengono effettuate le seguenti semplificazioni alla formula in ingresso φ:

- Tutti i connettivi logici composti, cioè che non sono $\neg$, $\wedge$ o $\vee$, vengono sostituiti nella loro definizione in termini di $\neg$, $\wedge$ o $\vee$.
- I predicati binari $\geq$ e $\leq$ vengono sostituiti con le loro definizioni (e.g. $s \leq t$ diventa $s < t + 1$).
- Le diseguaglianze negate della forma $\neg(s < t)$ vengono sostituite con $t < s + 1$.
- Tutte le equazioni e le disequazioni vengono riscritte in modo da avere 0 nel lato sinistro ($s = t$ e $s < t$ diventano $0 = t - s$ e $0 < t - s$).

- Tutti gli argomenti dei predicati vengono sostituiti con la loro forma canonica.

Dopo aver applicato queste sostituzioni e aver trasformato la φ ottenuta in forma normale negativa possiamo dunque assumere che φ sia congiunzione e disgiunzione dei seguenti tipi di letterali:

$$0 = t \qquad \neg(0 = t) \qquad 0 < t \qquad D_k(t) \qquad \neg D_k(t)$$

Diremo che φ in tale forma é una **formula ristretta**.

2.2 Normalizzazione dei coefficienti

Assumiamo quindi che l'algoritmo riceva in ingresso $\exists\, x\,.\,\varphi$ con φ formula ristretta. Il primo passaggio consiste nel trasformare φ in una formula dove il coefficiente della x è sempre lo stesso. Per fare questo è sufficiente calcolare il minimo comune multiplo l di tutti i coefficienti di x ed effettuare i seguenti passi:

- Per le equazioni e le equazioni negate, rispettivamente nella forma $0 = t$ e $\neg(0 = t)$, si moltiplica t per l/c, dove c indica il coefficiente della x.
- Analogamente, per i predicati di divisibilità $D_k(t)$ e i predicati di divisibiltà negati $\neg D_k(t)$ si moltiplica sia t che k per l/c, sempre dove c indica il coefficiente della x.
- Per le diseguaglianze $0 < t$ si moltiplica t per il valore assoluto l/c, dove ancora un volta c indica il coefficiente della x.

Quindi ora tutti i coefficienti della x in φ sono $\pm l$, passiamo ora a considerare la seguente formula equivalente:

$$\exists\, x.\,(D_l(x) \wedge \psi)$$

dove ψ è ottenuta da φ sostituendo $l \cdot x$ con x. Dunque la formula $\varphi' = D_l(x) \wedge \psi$ è una formula ristretta dove i coefficienti della x sono ± 1.

2.3 Costruzione di $\varphi'_{-\infty}$

Definiamo una nuova formula $\varphi'_{-\infty}$ ottenuta partendo da φ' e sostituendo tutte le formule atomiche α con $\alpha_{-\infty}$ secondo la seguente tabella:

α	$\alpha_{-\infty}$
$0 = t$	falso
$0 < t$ con $1 \cdot x$ in t	falso
$0 < t$ con $-1 \cdot x$ in t	vero
ogni altra formula atomica α	α

2.4 Calcolo dei boundary points

Ad ogni letterale $L[x]$ di φ' contenente la x che non è un predicato di divisibilità associamo un intero, detto **boundary point**, nel seguente modo:

Tipo di letterale	Boundary point
$0 = x + t$	il valore di $(-t + 1)$
$\neg(0 < x + t)$	il valore di $-t$
$0 < x + t$	il valore di $-t$
$0 < -x + t$	niente

Si osserva come nel caso la formula φ contenga più variabili da eliminare allora i valori nella colonna di destra possano dipendere da altre variabili. Chiamiamo B-set l'insieme di questi boundary points.

2.5 Eliminazione dei quantificatori

Quest'ultimo passaggio è semplicemente l'applicazione della seguente equivalenza:[1]

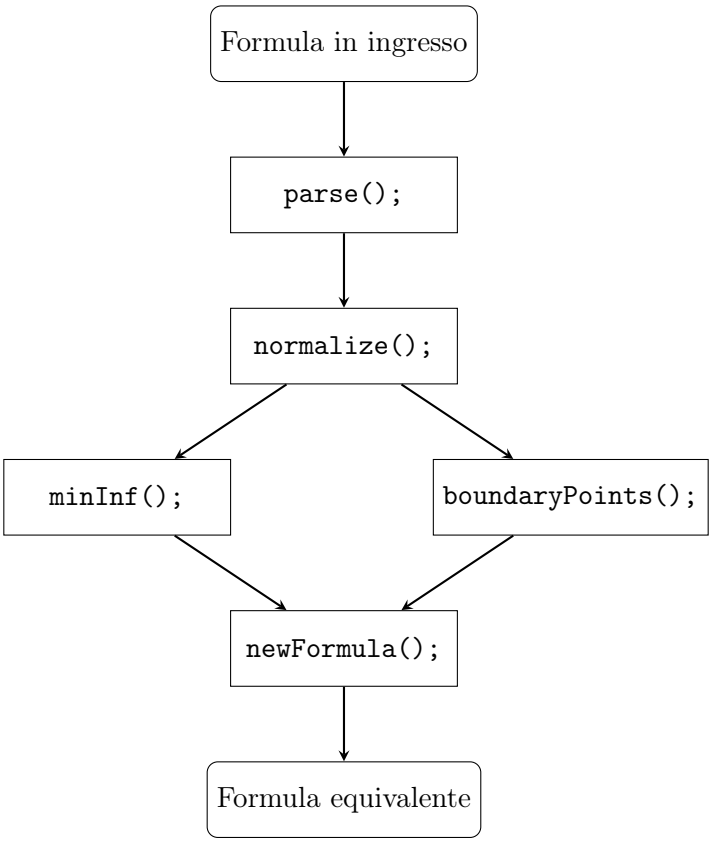
$$\exists\, x\,.\,\varphi'[x] \longleftrightarrow \bigvee_{j=1}^{m} \left(\varphi'_{-\infty}[j] \vee \bigvee_{b\in B} (\varphi'[b+j])\right)$$

dove φ' è la formula ristretta in cui i coefficienti della x sono sempre ± 1, m è il minimo comune multiplo di tutti i k dei predicati di divisbilità $D_k(t)$ che appaiono in φ' tali che appaia la x in t e infine B è il B-set relativo a φ'. Considerando quindi il lato destro della precedente equivalenza si ha una formula priva del quantificatore esistenziale e si ha dunque ottenuto ciò che si voleva.

3 Implementazione

Il software è stato scritto nel linguaggio C rispettando lo standard C99,[2] in questo capitolo verrà effettuata una discussione riguardo l'implementazione.

3.1 Struttura e design



L'algoritmo è stato suddiviso in svariate procedure, implementate come singole funzioni in C, è possibile eseguire l'intero algoritmo chiamando la funzione `char* cooper(char* wff, char* var)`, dove `wff` è una

[1] D. C. Cooper. "Theorem proving in arithmetic without multiplication". In: *Machine Intelligence 7* (1972), pp. 91–99. URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/showciting?cid=697241.

[2] ISO. *ISO C Standard 1999*. Rapp. tecn. ISO/IEC 9899:1999 draft. 1999. URL: http://www.open-std.org/jtc1/sc22/wg14/www/docs/n1124.pdf.

formula ben formata (well-formed formula) nel linguaggio SMT-LIB[3] e `var` è la variabile da eliminare. Naturalmente la funzione restituisce la formula equivalente priva della variabile. Si rimanda a più tardi la discussione della forma esatta che deve avere la formula in ingresso.

La funzione `cooper` effettua quindi a sua volta delle chiamate a varie funzioni, si è cercato per quanto possibile di mantenere la suddivisione di queste sotto-procedure fedele alla descrizione dell'algoritmo svolta precedentemente.

Prima di spiegare il comportamento delle singole funzioni occorre accennare che l'oggetto principale manipolato dal programma è l'albero sintattico stesso della formula. Per ottenere ciò si è creato un tipo strutturato chiamato `t_syntaxTree` ad hoc. Si rimanda a più tardi una discussione dettagliata del tipo in questione.

La funzione che ha quindi il compito di effettuare il parsing è `t_syntaxTree* parse(char* wff)`, ed è questo appena introdotto il tipo che ritorna.

Il passo successivo al parsing è la normalizzazione della formula, cioè la generazione della formula $\varphi' = D_l(x) \wedge \psi$, dove i coefficienti della variabile da eliminare sono diventati 1. La segnatura di tale funzione è `void normalize(t_syntaxTree* tree, char* var)`.

Le funzioni `t_syntaxTree* minInf(t_syntaxTree* tree, char* var)` e `t_syntaxTree* boundaryPoints(t_syntaxTree* tree, char* var)`, come è facile evincere, generano rispettivamente $\varphi_{-\infty}$ e l'insieme dei boundary points.

Infine `t_syntaxTree* newFormula(t_syntaxTree* tree, t_syntaxTree* minf, char* var)` genera la formula equivalente a partire da $\varphi_{-\infty}$ e della formula normalizzata. È al suo interno che viene effettuata la chiamata a `boundaryPoints();`.

Esiste inoltre un ulteriore passo opzionale non facente parte dell'algoritmo di Cooper, la funzione `void simplify(t_syntaxTree* t)`, che può essere chiamata passando come argomento l'output di `newFormula()`, effettua una rozza semplificazione della formula. Verrà discusso successivamente in dettaglio cosa si intende.

3.2 Analisi del codice

Quella che viene presentata qui è un'analisi dettagliata del codice sorgente del programma riga per riga.

```
521 char* cooper(char* wff, char* var) {
522   t_syntaxTree* tree, *minf, *f;
523   char* str;
524
525   tree = parse(wff); //Genera l'albero sintattico a partire dalla stringa
526   normalize(tree, var); //Trasforma l'albero di tree
527   minf = minInf(tree, var); //Restituisce l'albero di φ_-∞
528   f = newFormula(tree, minf, var); //Restituisce la formula equivalente
529   simplify(f); //opzionale
530   str = treeToStr(f); //Genera la stringa a partire dall'albero
531
532   recFree(tree); //Libera la memoria
533   recFree(minf);
534   recFree(f);
535
536   return str;
537 }
```

[3] Clark Barrett, Pascal Fontaine e Cesare Tinelli. *The Satisfiability Modulo Theories Library (SMT-LIB).* `www.SMT-LIB.org`. 2016.

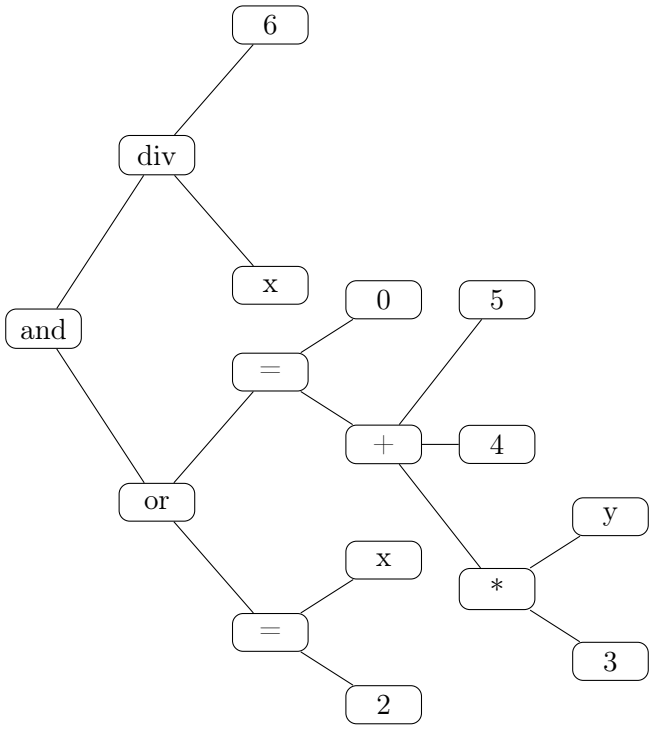
Alla luce di quanto detto precedentemente il funzionamento di `cooper()` risulta autoesplicativo. É quindi arrivato il momento di esporre la segnatura completa del tipo composto `t_syntaxTree`.

```
16 typedef struct t_syntaxTree {
17   char nodeName[16];
18   int nodesLen;
19   struct t_syntaxTree** nodes;
20 } t_syntaxTree;
```

Trattasi di un record definito ricorsivivamente avente 3 campi:

- `char nodeName[16]` è una stringa di lunghezza fissata posta arbitrariamente a 16 caratteri, è il nome del nodo nell'albero sintattico.
- `int nodesLen` è il numero di figli del nodo in questione
- `t_syntaxTree** nodes` è un array di puntatori ad altri nodi

Si consideri la formula in pseudolinguaggio $((2 = x) \ \wedge \ (3y + 4 + 5 = 0)) \ \vee \ (x \equiv_6 0)$, in linguaggio SMT-LIB essa corrisponde a `(and (or (= 2 x) (= (+ (* 3 y) 4 5) 0)) (div x 6))` e la sua rappresentazione tramite il tipo composto appena definito è chiarificata dal segente diagramma.



Le foglie dell'albero sono semplicemente nodi con l'attributo `nodesLen` valente 0, in tal caso è irrilevante il contenuto del campo `nodes`. Si approfitta di questo momento per sottolineare l'importanza di una opportuna funzione di deallocazione di questa struttura.

```
204 void recFree(t_syntaxTree* tree) {
205   for (int i=0; i<tree->nodesLen; i++) {
206     recFree(tree->nodes[i]);
207   }
208
```

```
209   free(tree->nodes);
210   free(tree);
211 }
```

La natura ricorsiva del tipo `t_syntaxTree` rende notevolmente semplice la scrittura di una funzione ricorsiva per la liberazione della memoria, come è semplice intuire tale funzione effettua una visita in profondità dell'albero deallocando nodo per nodo.

Si passi ora a considerare due funzioni speculari, la funzione `t_syntaxTree* parse(char* wff)` che trasforma una stringa nel corrispettivo albero sintattico e la funzione `char* treeToStr(t_syntaxTree* tree)` che realizza l'esatto opposto.

```
23  t_syntaxTree* buildTree(int first, char** tokens) {
24    t_syntaxTree* tree = malloc(sizeof(t_syntaxTree));
25    tree->nodes = NULL;
26    int open;
27
28    if (tokens[first][0] == '(') {
29      first++;
30      tree->nodesLen = 0;
31      strcpy(tree->nodeName, tokens[first]);
32      open = 1;
33
34      do {
35        first++;
36
37        if (open == 1 && tokens[first][0]!=')') {
38          tree->nodesLen++;
39          tree->nodes = realloc(tree->nodes, sizeof(t_syntaxTree*) * tree->nodesLen);
40          tree->nodes[tree->nodesLen-1] = buildTree(first, tokens);
41        }
42
43        if (tokens[first][0] == '(') open++;
44
45        if (tokens[first][0] == ')') open--;
46      } while (open != 0);
47    }
48
49    else {
50      strcpy(tree->nodeName, tokens[first]);
51      tree->nodesLen = 0;
52      tree->nodes = NULL;
53    }
54
55    return tree;
56  }
57
58
59  t_syntaxTree* parse(char* wff) {
60    char* wffSpaced = malloc(sizeof(char));
61    wffSpaced[0] = wff[0];
62    int j = 1;
```

```
63
64    for (int i = 1; i < strlen(wff) + 1; i++) {
65
66      if (wff[i - 1] == '(') {
67        wffSpaced = realloc(wffSpaced, sizeof(char) * (j + 2));
68        wffSpaced[j] = ' ';
69        wffSpaced[j+1] = wff[i];
70        j += 2;
71      }
72
73      else if (wff[i + 1] == ')') {
74        wffSpaced = realloc(wffSpaced, sizeof(char) * (j + 2));
75        wffSpaced[j] = wff[i];
76        wffSpaced[j + 1] = ' ';
77        j += 2;
78      }
79
80      else {
81        wffSpaced = realloc(wffSpaced, sizeof(char) * (j + 1));
82        wffSpaced[j] = wff[i];
83        j++;
84      }
85    }
86
87    char* token;
88    int nTokens = 1;
89    char** tokens = malloc(sizeof(char *));
90    tokens[0] = strtok(wffSpaced, " ");
91
92    while ((token = strtok(NULL, " ")) != NULL) {
93      nTokens++;
94      tokens = realloc(tokens, sizeof(char *) * nTokens);
95      tokens[nTokens - 1] = token;
96    }
97
98    t_syntaxTree* syntaxTree = buildTree(0, tokens);
99
100   free(wffSpaced);
101   free(tokens);
102
103   return syntaxTree;
104 }
```

La funzione `parse` si appoggia alla funzione `buildTree`, è in quest'ultima la funzione, ancora una volta ricorsiva, dove avviene la vera e propria costruzione dell'albero. Essa prende in ingresso i token che compongono la stringa in ingresso e restituisce l'albero, la parte di suddivisione in token viene effettuata (insieme ad altre questioni di gestione della memoria) da `parse`. Tali funzioni prevedono che la stringa in ingresso rispetti esattamente la sintassi stabilita, e che inoltre, a causa della scelta arbitraria di porre 16 caratteri come lunghezza del campo `nodeName` non siano presenti token più lunghi.

```
483 int recTreeToStr(t_syntaxTree* t, char** str, int len) {
```

```
484   if (t->nodesLen == 0) {
485     int nLen = len + strlen(t->nodeName);
486     *str = realloc(*str, sizeof(char) * nLen);
487     strcat(*str, t->nodeName);
488     return nLen;
489   }
490 
491   else {
492     int nLen = len + strlen(t->nodeName) + 1;
493     *str = realloc(*str, sizeof(char) * nLen);
494     strcat(*str, "(");
495     strcat(*str, t->nodeName);
496 
497     for (int i=0; i<t->nodesLen; i++) {
498       nLen++;
499       *str = realloc(*str, sizeof(char) * nLen);
500       strcat(*str, " ");
501       nLen = recTreeToStr(t->nodes[i], str, nLen);
502     }
503 
504     nLen++;
505     *str = realloc(*str, sizeof(char) * nLen);
506     strcat(*str, ")");
507 
508     return nLen;
509   }
510 }
511 
512 
513 char* treeToStr(t_syntaxTree* tree) {
514   char* str=malloc(sizeof(char));
515   str[0] = '\0';
516   recTreeToStr(tree, &str, 1);
517   return str;
518 }
```

Si consideri ora la funzione speculare `treeToStr`, anch'essa si appoggia a sua volta ad un'altra funzione, ovvero `recTreeToStr`, è in quest'ultima che avviene la trasformazione da albero in stringa, rendendo quindi `treeToStr` funge solamente da una funzione helper.

Si ritorni ora a considerare i passi principali dell'algoritmo, così come sono esposti nella funzione `cooper`, dopo quanto detto finora rimane da considerare l'implementazione effettiva dell'algoritmo.

```
525   tree = parse(wff); //Genera l'albero sintattico a partire dalla stringa
526   normalize(tree, var); //Trasforma l'albero di tree
527   minf = minInf(tree, var); //Restituisce l'albero di φ_-∞
528   f = newFormula(tree, minf, var); //Restituisce la formula equivalente
529   simplify(f); //opzionale
530   str = treeToStr(f); //Genera la stringa a partire dall'albero
```

Ovvero rimangono da discutere le funzioni `normalize`, `minInf` e `newFormula`. Si adempia subito all'incombenza data dalla funzione `simplify`, di cui si ricorda fare parte di un passo opzionale.

```
442 void simplify(t_syntaxTree* t) {
443   if (t->nodesLen != 0) {
444     int simplified = 0;
445 
446     if (strcmp(t->nodeName, "and") == 0) {
447       for(int i=0; i<t->nodesLen; i++) {
448         if (strcmp(t->nodes[i]->nodeName, "false") == 0) {
449           simplified = 1;
450 
451           for (int j=0; j<t->nodesLen; j++)
452             recFree(t->nodes[j]);
453 
454           strcpy(t->nodeName, "false");
455           t->nodesLen = 0;
456           break;
457         }
458       }
459     }
460 
461     if (strcmp(t->nodeName, "or") == 0) {
462       for(int i=0; i<t->nodesLen; i++) {
463         if (strcmp(t->nodes[i]->nodeName, "true") == 0) {
464           simplified = 1;
465 
466           for (int j=0; j<t->nodesLen; j++)
467             recFree(t->nodes[j]);
468 
469           strcpy(t->nodeName, "true");
470           t->nodesLen = 0;
471           break;
472         }
473       }
474     }
475 
476     if (!simplified)
477       for(int i=0; i<t->nodesLen; i++)
478         simplify(t->nodes[i]);
479   }
480 }
```

Tale funzione effettua una visita in ampiezza dell'albero alla ricerca di nodi `or` o `and` ed effettuando una sostituzione di questi ultimi, rispettivamente con `true` e `false` nel caso almeno uno degli operandi di `or` sia `true` o uno degli operandi di `and` sia `false`. La visita in ampiezza viene troncata nel caso si verifichi uno di questi casi, in quanto il valore dell'espressione è già determinabile, risulta chiaro da questo il perchè della visita in ampiezza e non in profondità. Si faccia notare come questa funzione di semplificazione possa essere notevolmente migliorata aggiungendo la valutazione delle espressioni, tuttavia questa non banale aggiunta esula dallo scopo del progetto. In sostanza questa funzione fornisce un buon compromesso tra i benefici che porta il poter accorciare le espressioni generate dall'algoritmo e una ulteriore complessità aggiunta. Si noti infine come ancora una volta occorre prestare attenzione alla corretta deallocazione della memoria.

È giunto infine il momento di analizzare la funzione `normalize`, tale funzione si appoggia a sua volta alle funzione `getLCM` che a sua volta richiama `gcd` e `lcm`.

```
6  long int gcd(long int a, long int b) {
7    return b == 0 ? a : gcd(b, a % b);
8  }
9
10
11 long int lcm(long int a, long int b) {
12   return abs((a / gcd(a, b)) * b);
13 }
```

Come è facile immaginare tali funzioni effettuano semplicemente il calcolo del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo. Il primo viene svolto efficacemente dall'algoritmo di Euclide[4] mentre il secondo è dato banalmente dalla seguente.

$$lcm(a,b) = \frac{ab}{GCD(a,b)}$$

La funzione `getLCM` prende in ingresso l'albero sintattico e una variabile e restituisce il minimo comune multiplo di tutti i coefficienti di tale variabile presenti nella formula.

```
107 int getLCM(t_syntaxTree* tree, char* var) {
108   if (tree->nodeName[0] == '*') {
109     if (strcmp(((t_syntaxTree *)tree->nodes[1])->nodeName, var) == 0) {
110       return atoi(((t_syntaxTree *) tree->nodes[0])->nodeName);
111     }
112   }
113
114   int l = 1;
115
116   for(int i=0; i<tree->nodesLen; i++) {
117     l = lcm(l, getLCM((t_syntaxTree *) tree->nodes[i], var));
118   }
119
120   return l;
121 }
```

La funzione

4 Utilizzo

In questo capitolo verranno forniti alcuni semplici esempi di utilizzo.

4.1 Script ausiliari

4.2 Esempi pratici

[4] Euclid. *Euclid's Elements*. All thirteen books complete in one volume, The Thomas L. Heath translation, Edited by Dana Densmore. Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002, pp. xxx+499. ISBN: 1-888009-18-7; 1-888009-19-5.

Indice

Riferimenti bibliografici

Barrett, Clark, Pascal Fontaine e Cesare Tinelli. *The Satisfiability Modulo Theories Library (SMT-LIB)*. `www.SMT-LIB.org`. 2016.

Cooper, D. C. "Theorem proving in arithmetic without multiplication". In: *Machine Intelligence 7* (1972), pp. 91–99. URL: `http://citeseerx.ist.psu.edu/showciting?cid=697241`.

Euclid. *Euclid's Elements*. All thirteen books complete in one volume, The Thomas L. Heath translation, Edited by Dana Densmore. Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002, pp. xxx+499. ISBN: 1-888009-18-7; 1-888009-19-5.

ISO. *ISO C Standard 1999*. Rapp. tecn. ISO/IEC 9899:1999 draft. 1999. URL: `http://www.open-std.org/jtc1/sc22/wg14/www/docs/n1124.pdf`.