Agulha de Buffon

Universidade de São Paulo - USP
Marcos Pereira Nž USP: 11703832
Departamento de Matemática Aplicada - MAP

Agulha de Buffon

1 Introdução

Um dos métodos existentes na Matemática para estimar o valor de π é o método da **agulha de Buffon**, ele foi proposto no século XVII pelo francês Georges-Louis Leclerc, também conhecido como Georges de Buffon ou conde de Buffon.

O método consiste em ....

conde de Buffon Georges-Louis Leclerc nasceu em Montbard, na França em 7 de setembro de 1707, foi matemático, filosofo e escritor cujas teorias influenciaram duas gerações naturalistas, nas quais faziam partes nomes influentes como Charles Darwin.

Georges-Louis Leclerc faleceu em 16 de abril de 1788 aos 80 anos.

Método O problema da agulha de Buffon pode ser formulado como se segue: Suponha que tenhamos um piso composto de tiras paralelas de madeira com mesma largura, então jogamos uma agulho no chão. Qual é a probabilidade de que a agulha caia entre duas tiras de madeira?

Esse problema pode ser considerado o primeiro problema na geometria probabilística, a solução para o problema (a probabilidade desejada) para o caso de uma agulha cujo tamanho seja menor do que a largura das tábuas $\ell < L$ é dada por

$$P = \frac{2\ell}{\pi L}\,. \tag{1}$$

Seja x a distância do centro da agulha até à linha paralela mais próxima e seja θ o ângulo formado entre a agulha e um das linhas paralelas, definimos então a densidade de probabilidade de x estar em $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ como

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{L} & : \quad x \in \left[0, \frac{L}{2}\right] \\ 0 & : \ x \notin \left[0, \frac{L}{2}\right]\,, \end{cases} \tag{2}$$

note que aqui $x = 0$ é a agulha centrada em uma tira e $x = \frac{L}{2}$ equivale à agulha com o centro entre duas tiras. A distribuição de probabilidade é uniforme, portanto a agulha possui igual

probabilidade de cair em qualquer ponto nesse intervalo, porém não pode cair fora desse intervalo

A densidade de probabilidade uniforme do ângulo é dada por

$$\varrho(\theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} & : \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & : \theta \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right] , \end{cases} \tag{3}$$

de forma semelhante, $\theta = 0$ equivale a agulha caindo paralelamente às tiras e $\theta = \frac{\pi}{2}$ equivale à agulha caindo perpendicularmente. As duas variáveis aleatórias x e θ são independentes, portanto, a função de probabilidade conjunta equivale ao produto de ρ com ϱ:

$$P(x,\theta) = \rho(x)\,\varrho(\theta) ,$$

ou seja,

$$\varrho(\theta) = \begin{cases} \dfrac{4}{L\pi} & : (x,\theta) \in D \\ 0 & : (x,\theta) \notin D , \end{cases} \tag{4}$$

aqui a região D é representada por

$$D = \left\{ (x,\theta) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\} .$$

a agulha tocará uma tira caso:

$$x \leq \frac{\ell}{2} \operatorname{sen}(\theta) .$$

A partir dessa formulação temos dois casos: Uma agulha curta e uma longa. Para o primeiro, integramos $P(x,\theta)$ sobre toda região[1] para encontrar a probabilidade da agulha cruzar uma tira:

$$\mathcal{P} = \iint\limits_D P(x,\theta)\,dA = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}(\theta)} \frac{4}{\pi L} dx \right) d\theta = \frac{2\ell}{\pi L} . \tag{5}$$

Agora para o segundo caso, a agulha é maior que a tira, ou seja $\ell > L$, devemos para esse caso supor que exista algum mínimo $m(\theta)$ entre $\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}(\theta)$ e $\frac{L}{2}$, para esse caso a probabilidade é dada por

$$\mathcal{P} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{m(\theta)} \frac{4}{\pi L} dx \right) d\theta = \frac{2\ell}{\pi L} - \frac{2}{\pi L} \left[\sqrt{\ell^2 - L^2} + L \operatorname{arcsen}\left(\frac{L}{\ell}\right) \right] + 1 \tag{6}$$

ou equivalentemente

$$\mathcal{P} = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{L}{\ell}\right) + \frac{2\ell}{\pi L} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{\ell}\right)^2} \right] , \tag{7}$$

na segunda expressão, o primeiro termo representa a probabilidade do ângulo da agulha de forma que ela atravessará sempre ao menos uma tira. O termo da direita representa a probabilidade da agulha cair formando um ângulo que dependa da posição e que atravesse a tira.

Também perceba que sempre quando θ possuir um valor tal que $\operatorname{sen}(\theta) \leq L$, a probabilidade de atravessar a tira é a mesma que o caso da agulha curta, no entanto se $L\operatorname{sen}(\theta) > L$ a probabilidade será constante e igual a 1.

[1] Lembre-se que $D = \left\{ (x,\theta) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.

Resultados Para estimar π devemos reorganizar a eq. 5 como

$$\pi = \frac{2\ell}{L\mathcal{P}}\,,$$

ou seja, se conduzirmos um experimento para estimar $\mathcal{P}$ conseguiremos uma estimativa para π. Suponha que em um experimento jogamos n agulhas e verificamos que m dessas agulhas estão cruzando as tiras, então uma aproximação de $\mathcal{P}$ é dada por

$$\mathcal{P} = \frac{m}{n}$$

e obtemos daí a fórmula

$$\pi \approx \frac{2\ell n}{mL}\,. \tag{8}$$

Em 1901, Mario Lazzarini, um matemático italiano realizou o experimento de Buffon, jogando uma agulha 3408 vezes, ele obteve uma aproximação razoável para *pi* cuja precisão resultou em 6 casas decimais de π.