

13 Integral indefinida



1. Reglas de integración

■ Piensa y calcula

Calcula: a) $y = x^5$, $y' =$ b) $y' = 3x^2$, $y =$ c) $y = \cos x$, $y' =$ d) $y' = \cos x$, $y =$

Solución:

a) $y' = 5x^4$ b) $y = x^3$ c) $y' = -\operatorname{sen} x$ d) $y = \operatorname{sen} x$

● Aplica la teoría

1. $\int 3(3x - 5)^7 dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(3x - 5)^8}{8} + k$$

2. $\int \frac{dx}{(3x + 5)^3}$

Solución:

Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{6(3x + 5)^2} + k$$

3. $\int \cos \frac{x}{6} dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$6 \operatorname{sen} \frac{x}{6} + k$$

4. $\int e^x dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$e^x + k$$

5. $\int \frac{dx}{x + 3}$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\ln|x + 3| + k$$

6. $\int (e^x - \operatorname{sen} x) dx$

Solución:

Se aplica la integral de las operaciones.

$$e^x + \operatorname{sen} x + k$$

7. $\int 2^{6x} dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$\frac{2^{6x-1}}{3 \ln 2} + k$$

8. $\int \frac{x dx}{x^2 - 1}$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + k$$

9. $\int 2x \operatorname{sen} x^2 dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\operatorname{cos} x^2 + k$$

$$10. \int \frac{7 \, dx}{2\sqrt{7x+5}}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\sqrt{7x+5} + k$$

$$11. \int 3 \cos 3x \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\sin 3x + k$$

$$12. \int \frac{dx}{9+x^2}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{3} \operatorname{arc tg} \frac{x}{3} + k$$

$$13. \int \sec^2(3x+1) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x+1) + k$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\operatorname{arc sen} \frac{x}{3} + k$$

$$15. \int 5 \operatorname{sen} x \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-5 \cos x + k$$

$$16. \int (x^3 - 6x^2 + 1) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{x^4}{4} - 2x^3 + x + k$$

$$17. \int \operatorname{cosec}^2(5x-1) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{5} \operatorname{cotg}(5x-1) + k$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$2\sqrt{x-1} + k$$

$$19. \int e^{x/2} \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$2e^{x/2} + k$$

$$20. \int (\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de las operaciones.

$$-\operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x + k$$

$$21. \int \frac{3}{(x-3)^4} \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{(x-3)^3} + k$$

$$22. \int (4x+1)^5 \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(4x+1)^6}{24} + k$$

$$23. \int \operatorname{cotg}(-2x+1) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{2} \operatorname{L} |\operatorname{sen}(2x-1)| + k$$

$$24. \int 3 \cdot 2^{3x} \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$\frac{2^{3x}}{\ln 2} + k$$

$$25. \int \frac{dx}{(2x-1)^4}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{6(2x-1)^3} + k$$

$$26. \int 3 \cotg 3x \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$L |\operatorname{sen} 3x| + k$$

$$27. \int \frac{2x-3}{x^2-3x+5} \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L |x^2 - 3x + 5| + k$$

$$28. \int 5 \operatorname{sen} 5x \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-5 \operatorname{cos} 5x + k$$

$$29. \int 2 \operatorname{tg} 2x \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-L |\operatorname{cos} 2x| + k$$

$$30. \int 2 \sqrt[5]{2x} \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{5x \sqrt[5]{2x}}{3} + k$$

$$31. \int \frac{2 \, dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\operatorname{arc sen} 2x + k$$

$$32. \int e^x \operatorname{sen} e^x \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\operatorname{cos} e^x + k$$

$$33. \int e^{-7x} \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{e^{-7x}}{7} + k$$

$$34. \int \frac{dx}{1-x}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$-L |\ln x| + k$$

$$35. \int 2x \operatorname{tg} x^2 \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-L |\operatorname{cos} x^2| + k$$

$$36. \int \cos(5x-1) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{5} \operatorname{sen}(5x-1) + k$$

$$37. \int \frac{3 \, dx}{1+(3x)^2}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\operatorname{arc tg} 3x + k$$

$$38. \int \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-2 \operatorname{cos} \frac{x}{2} + k$$

$$39. \int (x^4 - 2x - 5) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{x^5}{5} - x^2 - 5x + k$$

$$40. \int e^x \operatorname{cos} e^x \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\operatorname{sen} e^x + k$$

2. Integración por partes

■ Piensa y calcula

Calcula la derivada de: $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$

Solución:

$$y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2e^x$$

● Aplica la teoría

41. $\int xe^x dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$

$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$e^x(x - 1) + k$$

42. $\int x \operatorname{sen} x dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$

$$dv = \operatorname{sen} x dx$$

El resultado es:

$$-x \cos x + \operatorname{sen} x + k$$

43. $\int (x + 5) \cos x dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x + 5$$

$$dv = \cos x dx$$

El resultado es:

$$(x + 5) \operatorname{sen} x + \cos x + k$$

44. $\int \operatorname{sen}(Lx) dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{sen}(Lx)$$

$$dv = dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

$$\text{El resultado es: } \frac{x}{2} (\operatorname{sen}(Lx) - \cos(Lx)) + k$$

45. $\int \operatorname{arc sen} x dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{arc sen} x$$

$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x \operatorname{arc sen} x + \sqrt{1 - x^2} + k$$

46. $\int x^2 e^{-x} dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = e^{-x} dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + k$$

47. $\int x^3 L x dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L x$$

$$dv = x^3 dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^4}{4} L |x| - \frac{x^4}{16} + k$$

48. $\int (x^2 - 1) \operatorname{sen} x dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 - 1$$

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes. El resultado es:

$$(-x^2 + 3) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + k$$

$$49. \int (x^2 + 1) L x \, dx$$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L x$$

$$dv = (x^2 + 1) dx$$

El resultado es:

$$\left(\frac{x^3}{3} + x \right) L |x| - \frac{x^3}{9} - x + k$$

$$50. \int x^2 \cos x \, dx$$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = \cos x \, dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes. El resultado es:

$$(x^2 - 2) \operatorname{sen} x + 2x \cos x + k$$

$$51. \int (x + 2) e^x \, dx$$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x + 2$$

$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$e^x(x + 1) + k$$

$$52. \int e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx$$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{sen} x$$

$$dv = e^{-x} dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación. El resultado es:

$$-\frac{1}{2} e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x) + k$$

$$53. \int L (x + 1) dx$$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L (x + 1)$$

$$dv = dx$$

El resultado es:

$$(x + 1) L |x + 1| - x + k$$

$$54. \int (x^2 + 4) e^x dx$$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 4$$

$$dv = e^x dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 6) + k$$

$$55. \int e^x \cos x dx$$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \cos x$$

$$dv = e^x dx$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

El resultado es:

$$\frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + k$$

$$56. \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx$$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

$$dv = dx$$

El resultado es:

$$x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} L |x^2 + 1| + k$$

3. Integración de funciones racionales con raíces reales en el denominador

■ Piensa y calcula

Realiza la siguiente división entera y haz la prueba: 39 | 5

Solución:

$$\begin{array}{r} 39 \quad | 5 \\ 4 \quad \quad 7 \end{array}$$

Prueba: $39 = 5 \cdot 7 + 4$

● Aplica la teoría

57. $\int \frac{x^2 - x + 3}{x} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$x - 1 + \frac{3}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln|x| + k$$

58. $\int \frac{3x^2 - 5x - 3}{x - 1} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$3x - 2 + \frac{5}{1-x}$$

La integral es:

$$\frac{3x^2}{2} - 2x - 5 \ln|x-1| + k$$

59. $\int \frac{5x + 2}{x^2 + x} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}$$

La integral es:

$$2 \ln|x| + 3 \ln|x+1| + k$$

60. $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}$$

La integral es:

$$\ln|x| + \frac{3}{x} - \frac{5}{2x^2} + k$$

61. $\int \frac{5x + 13}{x^2 + 6x + 9} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{5}{x+3} - \frac{2}{(x+3)^2}$$

La integral es:

$$5 \ln|x+3| - \frac{2}{x+3} + k$$

62. $\int \frac{x^2 + 8x + 10}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x+3} + \frac{2}{(x+3)^2} - \frac{5}{(x+3)^3}$$

La integral es:

$$\ln|x+3| - \frac{2}{x+3} + \frac{5}{2(x+3)^2} + k$$

63. $\int \frac{3x^2 + x - 9}{x + 2} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$3x - 5 + \frac{1}{x + 2}$$

La integral es:

$$\frac{3x^2}{2} - 5x + L|x + 2| + k$$

64. $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 10}{x^2 - 1} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x - 2 + \frac{3}{x - 1} - \frac{5}{x + 1}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - 2x + 3L|x - 1| - 5L|x + 1| + k$$

65. $\int \frac{8x + 7}{x^2 + x - 2} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x + 2} + \frac{5}{x - 1}$$

La integral es:

$$3L|x + 2| + 5L|x - 1| + k$$

66. $\int \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^2}$$

La integral es:

$$2L|x - 1| - \frac{5}{x - 1} + k$$

67. $\int \frac{x^2 - 7x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{1}{x - 2} - \frac{3}{(x - 2)^2} + \frac{5}{(x - 2)^3}$$

La integral es:

$$L|x - 2| + \frac{3}{x - 2} - \frac{5}{2(x - 2)^2} + k$$

4. Integración de funciones racionales con raíces complejas o de varios tipos

■ Piensa y calcula

Halla mentalmente las raíces imaginarias de la siguiente ecuación: $x^2 + 9 = 0$

Solución:

$$x = \pm 3i$$

● Aplica la teoría

68. $\int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = 1 \pm 2i$$

Son imaginarias simples.

La integral es:

$$L|x^2 - 2x + 5| + \frac{3}{2} \operatorname{arc tg} \frac{x - 1}{2} + k$$

69. $\int \frac{8x^2 - 18x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -1 \text{ real simple}, x = 2 \text{ real doble.}$$

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

La integral es:

$$3 \operatorname{L}|x+1| + 5 \operatorname{L}|x-2| + \frac{1}{x-2} + k$$

70. $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = 3 \text{ real simple.}$$

$$x = \pm 2i \text{ imaginarias simples.}$$

La descomposición es:

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2+4}$$

La integral es:

$$\operatorname{L}|x-3| + \operatorname{L}|x^2+4| + \frac{1}{2} \operatorname{arc tg} \frac{x}{2} + k$$

71. $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+5} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -2 \pm i \text{ imaginarias simples.}$$

La integral es:

$$\operatorname{L}|x^2+4x+5| + \operatorname{arc tg}(x+2) + k$$

5. Integración por cambio de variable o sustitución y de funciones definidas a trozos

■ Piensa y calcula

Resuelve mentalmente las siguientes integrales inmediatas.

a) $\int \frac{dx}{x}$

b) $\int \frac{e^x}{e^x + 3} dx$

Solución:

a) $\operatorname{L}|x| + k$

b) $\operatorname{L}|e^x + 3| + k$

● Aplica la teoría

72. $\int \frac{dx}{x(Lx)^2}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$Lx = t$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t dt$$

Se obtiene:

$$-\frac{1}{Lx} + k$$

73. $\int \frac{Lx}{x[(Lx)^2 - 1]} dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$Lx = t$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t dt$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{2} L [(Lx)^2 - 1] + k$$

74. $\int \frac{1}{e^x + 2} dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$

$$x = \ln t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(e^x + 2) + k$$

75. $\int \frac{e^{2x}}{e^x - 4} dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$

$$x = \ln t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$e^x + 4 \ln|e^x - 4| + k$$

76. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x+1} = t$$

$$x+1 = t^2$$

$$x = t^2 - 1$$

$$dx = 2t dt$$

Se obtiene:

$$\frac{2}{3} (x+2) \sqrt{x+1} + k$$

77. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+3}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x+3} = t$$

$$x+3 = t^2$$

$$x = t^2 - 3$$

$$dx = 2t dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x+3} - 2 \ln|\sqrt{x+3} + 1| + k$$

78. $\int \frac{dx}{1 - \sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$

$$x = t^2$$

$$dx = 2t dt$$

Se obtiene:

$$-2\sqrt{x} - 2 \ln|\sqrt{x} - 1| + k$$

79. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$

$$x = t^2$$

$$dx = 2t dt$$

Se obtiene:

$$2 \ln|\sqrt{x} + 1| + k$$

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[6]{x} = t$$

$$x = t^6$$

$$dx = 6t^5 dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + k$$

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[4]{x} = t$$

$$x = t^4$$

$$dx = 4t^3 dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln|\sqrt[4]{x} - 1| + k$$

82. Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ -3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\int f(x) dx$

Solución:

$$\begin{cases} x^2/2 & \text{si } x \leq 1 \\ -3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

83. Sea $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq 0 \\ 1/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calcula $\int f(x) dx$

Solución:

$$\begin{cases} -\cos x & \text{si } x \leq 0 \\ -\ln|x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

84. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula $\int f(x) dx$

Solución:

$$\begin{cases} x^3/3 & \text{si } x \leq 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

6. Integración de funciones trigonométricas

■ Piensa y calcula

Escribe la fórmula fundamental de la trigonometría.

Solución:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

● Aplica la teoría

85. $\int \sin x \cos x dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el $\sin x$ y en el $\cos x$

La integral es: $\frac{1}{2} \sin^2 x + k$

88. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el $\sin x$

La integral es: $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + k$

86. $\int \sin^3 x \cos x dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el $\sin x$ y en el $\cos x$

La integral es: $\frac{1}{4} \sin^4 x + k$

89. $\int \sin^2 x dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el $\sin x$

La integral es: $\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + k$

87. $\int \sin^4 x \cos x dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el $\cos x$

La integral es: $\frac{1}{5} \sin^5 x + k$

90. $\int \sin^4 x dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el $\sin x$

La integral es: $\frac{1}{4} \left[\frac{3x}{2} - \cos x \left(\sin^3 x + \frac{3 \sin x}{2} \right) \right] + k$

$$91. \int \sin 3x \sin x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4} \left(-\frac{\sin 4x}{2} + \sin 2x \right) + k$$

$$92. \int \cos 5x \cos x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\sin 6x}{3} + \frac{\sin 4x}{2} \right) + k$$

$$93. \int \sin 5x \cos 3x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4} \left(-\frac{\cos 8x}{4} - \cos 2x \right) + k$$

$$94. \int \sqrt{1-x^2} \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \sin t$$

$$dx = \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2} (\arcsen x + x \sqrt{1-x^2}) + k$$

$$95. \int \sqrt{16-x^2} \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 4 \sen t$$

$$dx = 4 \cos t \, dt$$

La integral es:

$$8 \arcsen \frac{x}{4} + \frac{1}{2} x \sqrt{16-x^2} + k$$

$$96. \int \sqrt{2-x^2} \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \sqrt{2} \sen t$$

$$dx = \sqrt{2} \cos t \, dt$$

La integral es:

$$\arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{1}{2} x \sqrt{2-x^2} + k$$

$$97. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \tg t$$

$$dx = \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + k$$

$$98. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16+x^2}}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 4 \tg t$$

$$dx = 4 \sec^2 t \, dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{16+x^2}}{16x} + k$$

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

Señala la solución correcta:

1 $\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} dx$

- $\text{arc tg } 2x + k$
- $\frac{1}{2} \ln |4x^2 + 1| + k$
- $x + k$
- $x - \frac{1}{2} \ln |4x^2 + 1| + k$

2 $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 7x}{x^2 - x} dx$

- $2x^2 - x + k$
- $x^2 - 7x + k$
- $2x^2 - 7x + \ln|x| + \ln|x-1| + k$
- $x^2 + \ln|x| + \ln|x-1| + k$

3 $\int \frac{1}{x(x+1)} dx$

- $\ln|x| + \ln|x+1| + k$
- $\ln|x| + \ln|x-1| + k$
- $\ln|x| - \ln|x+1| + k$
- $\ln|x| \cdot \ln|x-1| + k$

4 $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$

- $\ln|x+1| - \frac{2x+1}{2x^2+4x+2} + k$
- $-\frac{2x+1}{2x^2+4x+2} + k$
- $\ln|x+1| - \frac{1}{2x^2+4x+2} + k$
- $-\frac{1}{2x^2+4x+2} + k$

5 $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$

- $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x} + 1| + k$
- $\frac{x}{2} - \sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x} - 1| + k$
- $\frac{2}{3}\sqrt{x} - x - 4\ln|\sqrt{x} + 1| + k$
- $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - \ln|\sqrt{x} + 1| + k$

6 $\int \frac{x^3 + 2}{x^2 + 3x + 2} dx$

- $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x-1| + 6L|x-2| + k$
- $\frac{x^2 - 3}{2} + L|x-1| + 6L|x-2| + k$
- $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x+1| + 6L|x+2| + k$
- $\frac{x^2}{2} - 3x + L|x^2 + 3x + 2| + k$

7 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

- $\frac{x^2}{3} \sqrt{x^2 + 1} + k$
- $\frac{x^2 - 2}{3} \sqrt{x^2 + 1} + k$
- $(x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 1} + k$

8 $\int e^{x+e^x} dx$

- $e^{e^x} + k$
- $x e^x + k$
- $x e^{e^x} + k$
- $\frac{e^{e^x}}{x} + k$

9 $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4} dx$

- $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + k$
- $\frac{x^2}{2} + 2L|x^2 + 4| + k$
- $\frac{x^2}{2} + 2L|x^2 + 4| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + k$
- $\frac{x^2}{2} - 2L|x^2 + 4| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + k$

10 $\int \frac{4-2x^2}{x} L x dx$

- $4(Lx)^2 - x^2 Lx - \frac{x^2}{2} + k$
- $2(Lx)^2 - x^2 Lx + \frac{x^2}{2} + k$
- $4(Lx)^2 - x^2 - \frac{x^2}{2} + k$
- $2(Lx)^2 - Lx + \frac{x^2}{2} + k$

Ejercicios y problemas

1. Reglas de integración

99. $\int 4(4x - 1)^5 dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(4x - 1)^6}{6} + k$$

100. $\int \frac{dx}{(x - 1)^5}$

Solución:

Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{4(x - 1)^4} + k$$

101. $\int \cos \frac{3x}{2} dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{3x}{2} + k$$

102. $\int e^{-x} dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x} + k$$

103. $\int \frac{dx}{x - 1}$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L|x - 1| + k$$

104. $\int (\cos x - e^{-x}) dx$

Solución:

Se aplica la integral de las operaciones.

$$e^{-x} + \operatorname{sen} x + k$$

105. $\int 2^{-4x} dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{2^{-4x}}{4 L 2} + k$$

106. $\int \frac{x dx}{x^2 + 9}$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2} L|x^2 + 9| + k$$

107. $\int \operatorname{sen}(5 - 2x) dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \cos(2x - 5) + k$$

108. $\int \frac{3 dx}{\sqrt{3x}}$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$2\sqrt{3x} + k$$

109. $\int x \cos(x^2 + 1) dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen}(x^2 + 1) + k$$

110. $\int \frac{dx}{3 + x^2}$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{3} x + k$$

111. $\int x \sec^2 x^2 dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} x^2 + k$$

$$112. \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} x + k$$

$$113. \int 5 \sen 7x \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{5}{7} \cos 7x + k$$

$$114. \int (10x^4 + 2x^3 - x - 1) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$2x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} - x + k$$

$$115. \int \operatorname{cosec}^2(3-4x) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{4} \cotg(3-4x) + k$$

$$116. \int \sqrt[5]{x^3} \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{5x^{\frac{5}{3}}}{8} + k$$

$$117. \int e^{x/3} \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$3e^{x/3} + k$$

$$118. \int (\sen x - \cos x) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de las operaciones.

$$-\cos x - \sen x + k$$

$$119. \int \left(3x^2 + 1 - \frac{1}{x+2} + \frac{8}{x^5} \right) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de las operaciones.

$$x^3 + x - L|x+2| - \frac{2}{x^4} + k$$

$$120. \int (2x-1)^3 \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(2x-1)^4}{8} + k$$

$$121. \int (-x \cotg x^2) \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{2} L|\sen x^2| + k$$

$$122. \int 5 \cdot 7^{-5x} \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{7^{-5x}}{L7} + k$$

$$123. \int \frac{dx}{(x+7)^2}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{x+7} + k$$

$$124. \int 2x \cotg x^2 \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$L|\sen x^2| + k$$

Ejercicios y problemas

$$125. \int \frac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x - 1} dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L |x^3 + 5x - 1| + k$$

$$126. \int \sin(3x + 2) dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica

$$-\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + k$$

$$127. \int \tan \frac{x}{4} dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-2 L |\cos \frac{x}{2}| + k$$

$$128. \int \sqrt[3]{5x + 1} dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{3(5x + 1)}{20} \sqrt[3]{5x + 1} + k$$

$$129. \int \frac{7 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$7 \arcsin \frac{x}{2} + k$$

$$130. \int e^{-x} \sin e^{-x} dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$\cos e^{-x} + k$$

$$131. \int e^{5x} dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$$\frac{e^{5x}}{5} + k$$

$$132. \int \frac{5 dx}{5x + 4}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L |5x + 4| + k$$

$$133. \int \tan(4x + 5) dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{1}{4} L |\cos(4x + 5)| + k$$

$$134. \int \cos(4 - x) dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\sin(4 - x) + k$$

$$135. \int \frac{6 dx}{1 + (2x)^2}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$3 \arctan 2x + k$$

$$136. \int \sin \frac{4x}{5} dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\frac{5}{4} \cos \frac{4x}{5} + k$$

$$137. \int \left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 8x + 1 \right) dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{4} - 4x^2 + x + k$$

138. $\int e^{-x} \cos e^{-x} dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función trigonométrica.

$$-\operatorname{sen} e^{-x} + k$$

139. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = \operatorname{sen} x$$

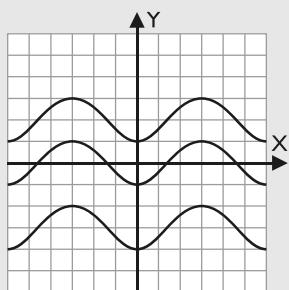
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$$y = -\cos x$$

$$y = 2 - \cos x$$

$$y = -3 - \cos x$$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

140. Dada la función:

$$y = \cos x$$

- a) calcula su integral indefinida.
- b) halla la primitiva que pasa por el punto P(0, 3)
- c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

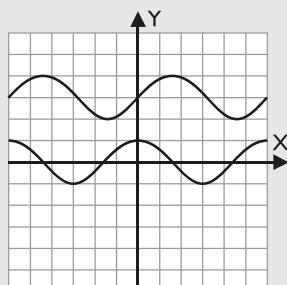
Solución:

a) $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$

b) $\operatorname{sen} 0 + k = 3 \Rightarrow k = 3$

$$y = 3 + \operatorname{sen} x$$

c)



2. Integración por partes

141. $\int x e^{3x} dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$

$$dv = e^{3x} dx$$

El resultado es:

$$e^{3x} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right) + k$$

142. $\int (x - 1) \operatorname{sen} x dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 1$$

$$dv = \operatorname{sen} x dx$$

El resultado es:

$$(-x + 1) \cos x + \operatorname{sen} x + k$$

143. $\int (x - 2) \cos x dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x - 2$$

$$dv = \cos x dx$$

El resultado es:

$$(x - 2) \operatorname{sen} x + \cos x + k$$

144. $\int x L(x + 5) dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = L(x + 5)$$

$$dv = x dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2} (x^2 - 25) L |x + 5| - \frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + k$$

Ejercicios y problemas

145. $\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \\ dv &= x \, dx \end{aligned}$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2} (x^2 + 1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{x}{2} + k$$

146. $\int x^2 e^{-3x} \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= x^2 \\ dv &= e^{-3x} \, dx \end{aligned}$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$-\frac{1}{27} e^{-3x} (9x^2 + 6x + 2) + k$$

147. $\int x^4 L x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= L x \\ dv &= x^4 \, dx \end{aligned}$$

El resultado es:

$$\frac{x^5}{5} L |x| - \frac{x^5}{25} + k$$

148. $\int (x^2 + 3) \operatorname{sen} x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 3 \\ dv &= \operatorname{sen} x \, dx \end{aligned}$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$(x^2 + 1) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + k$$

149. $\int (x^2 - 1) L x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= L x \\ dv &= (x^2 - 1) \, dx \end{aligned}$$

El resultado es:

$$\left(\frac{x^3}{3} - x \right) L |x| - \frac{x^3}{9} + x + k$$

150. $\int (x^2 - 1) \cos x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ dv &= \cos x \, dx \end{aligned}$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$(x^2 - 3) \operatorname{sen} x + 2x \cos x + k$$

151. $\int (x - 1) e^x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= x - 1 \\ dv &= e^x \, dx \end{aligned}$$

El resultado es:

$$e^x(x - 2) + k$$

152. $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen} x \\ dv &= e^{2x} \, dx \end{aligned}$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y planear una ecuación.

El resultado es: $\frac{1}{5} e^{2x}(2 \operatorname{sen} x - \cos x) + k$

153. $\int L(x - 1) dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= L(x - 1) \\ dv &= dx \end{aligned}$$

El resultado es:

$$(x - 1)L|x - 1| - x + k$$

154. $\int (x^2 - 3)e^x dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 3 \\ dv &= e^x dx \end{aligned}$$

Hay que hacerla otra vez, por partes.

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x - 1) + k$$

155. $\int e^{-x} \cos x dx$

Solución:

Se resuelve aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= \cos x \\ dv &= e^{-x} dx \end{aligned}$$

Hay que hacerla otra vez, por partes, y plantear una ecuación.

El resultado es:

$$\frac{1}{2} e^{-x}(\sin x - \cos x) + k$$

156. $\int \operatorname{arc tg} 2x dx$

Solución:

Se ha de resolver aplicando el método de integración por partes.

Se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{arc tg} 2x \\ dv &= dx \end{aligned}$$

El resultado es:

$$x \operatorname{arc tg} 2x - \frac{1}{4} L|4x^2 + 1| + k$$

3. Integración de funciones racionales con raíces reales en el denominador

157. $\int \frac{x^2 + x - 2}{x} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$x + 1 - \frac{2}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} + x - 2 L|x| + k$$

158. $\int \frac{x^2 - 6x + 2}{5 - x} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$-x + 1 - \frac{3}{5 - x}$$

La integral es:

$$-\frac{x^2}{2} + x + 3 L|x - 5| + k$$

159. $\int \frac{3x - 4}{x^2 - 4} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples. La descomposición es:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{5}{x+2} \right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2} (L|x - 2| + 5 L|x + 2|) + k$$

160. $\int \frac{5x^2 - 2x - 3}{x^3} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple. La descomposición es:

$$\frac{5}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$$

La integral es:

$$5 L|x| + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} + k$$

Ejercicios y problemas

$$161. \int \frac{4x - 11}{x^2 - 6x + 9} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{4}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}$$

La integral es:

$$4 \operatorname{L}|x-3| - \frac{1}{x-3} + k$$

$$162. \int \frac{-2x^2 + 14x - 31}{x^3 - 9x^2 - 27x + 27} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$-\frac{2}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} - \frac{7}{(x-3)^3}$$

La integral es:

$$-2 \operatorname{L}|x-3| - \frac{2}{x-3} + \frac{7}{2(x-3)^2} + k$$

$$163. \int \frac{2x^2 - 10x + 13}{x-3} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$2x - 4 + \frac{1}{x-3}$$

La integral es:

$$x^2 - 4x + \operatorname{L}|x-3| + k$$

$$164. \int \frac{x^3 - 2x^2 + 6x - 2}{x^2 - x} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - x + 2 \operatorname{L}|x| + 3 \operatorname{L}|x-1| + k$$

$$165. \int \frac{11x + 13}{x^2 + x - 6} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{4}{x+3} + \frac{7}{x-2}$$

La integral es:

$$4 \operatorname{L}|x+3| + 7 \operatorname{L}|x-2| + k$$

$$166. \int \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2}$$

La integral es:

$$3 \operatorname{L}|x+1| + \frac{4}{x+1} + k$$

$$167. \int \frac{3x^2 + 8x + 5}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple.

El denominador tiene una raíz real múltiple.

La descomposición es:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3}$$

La integral es:

$$3 \operatorname{L}|x+2| + \frac{4}{x+2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + k$$

4. Integración de funciones racionales con raíces complejas o de varios tipos

$$168. \int \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 10} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. El denominador tiene una raíz real múltiple.

Raíces del denominador:

$$x = -1 \pm 3i$$

Son imaginarias simples.

La integral es:

$$L |x^2 + 2x + 10| - \frac{5}{3} \operatorname{arc tg} \frac{x+1}{3} + k$$

$$169. \int \frac{2x^2 + 18x + 25}{x^3 + 3x^2 - 4} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = 1 \text{ real simple.}$$

$$x = -2 \text{ real doble.}$$

La descomposición es:

$$\frac{5}{x-1} - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

La integral es:

$$5 L |x-1| - 3 L |x+2| - \frac{1}{x+2} + k$$

$$170. \int \frac{2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 + 9x + 18} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = -2 \text{ real simple.}$$

$$x = \pm 3i \text{ imaginarias simples.}$$

La descomposición es:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{x-1}{x^2+9}$$

La integral es:

$$L |x+2| + \frac{1}{2} L |x^2+9| - \frac{1}{3} \operatorname{arc tg} \frac{x}{3} + k$$

$$171. \int \frac{3x}{x^2 - 4x + 8} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

Raíces del denominador:

$$x = 2 \pm 2i \text{ imaginarias simples.}$$

La integral es:

$$\frac{3}{2} L |x^2 - 4x + 8| + 3 \operatorname{arc tg} \frac{x-2}{2} + k$$

5. Integración por cambio de variable o sustitución y de funciones definidas a trozos

$$172. \int \frac{dx}{x L x}$$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$Lx = t$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t dt$$

Se obtiene:

$$L(Lx) + k$$

$$173. \int \frac{Lx}{x [(Lx)^2 + 1]} dx$$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$Lx = t$$

$$x = e^t$$

$$dx = e^t dt$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{2} L [(Lx)^2 + 1] + k$$

$$174. \int \frac{1}{e^x - 3} dx$$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$

$$x = \ln t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$-\frac{x}{3} + \frac{1}{3} L |e^x - 3| + k$$

$$175. \int \frac{e^{2x}}{e^x + 5} dx$$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$e^x = t$$

$$x = \ln t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

Se obtiene:

$$e^x - 5 L |e^x + 5| + k$$

Ejercicios y problemas

$$176. \int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x-1} = t$$

$$x-1 = t^2$$

$$x = t^2 + 1$$

$$dx = 2t dt$$

Se obtiene:

$$\frac{2}{3} (x+2)\sqrt{x-1} + k$$

$$177. \int \frac{dx}{2 - \sqrt{x-3}}$$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x-3} = t$$

$$x-3 = t^2$$

$$x = t^2 + 3$$

$$dx = 2t dt$$

Se obtiene:

$$-2\sqrt{x-3} - 4L|\sqrt{x-3} - 2| + k$$

$$178. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$

$$x = t^2$$

$$dx = 2t dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 2L|\sqrt{x} + 1| + k$$

$$179. \int \frac{dx}{2x - \sqrt{x}}$$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt{x} = t$$

$$x = t^2$$

$$dx = 2t dt$$

Se obtiene:

$$L|2\sqrt{x} - 1| + k$$

$$180. \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[6]{x} = t$$

$$x = t^6$$

$$dx = 6t^5 dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6L|\sqrt[6]{x} - 1| + k$$

$$181. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$$

Solución:

Se aplica el método de sustitución o cambio de variable.

$$\sqrt[4]{x} = t$$

$$x = t^4$$

$$dx = 4t^3 dt$$

Se obtiene:

$$2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4L|\sqrt[4]{x} + 1| + k$$

$$182. \text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Calcula } \int f(x) dx$$

Solución:

$$\begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$183. \text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2/x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Calcula } \int f(x) dx$$

Solución:

$$\begin{cases} 2L|x| & \text{si } x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$184. \text{Sea } f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ e^{x/2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Calcula } \int f(x) dx$$

Solución:

$$\begin{cases} -1/x & \text{si } x \leq 1 \\ 2e^{x/2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

6. Integración de funciones trigonométricas

$$185. \int \sin x \cos^2 x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el $\sin x$

La integral es:

$$-\frac{1}{3} \cos^3 x + k$$

$$186. \int \sin x \cos^3 x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el $\sin x$ y en el $\cos x$

La integral es:

$$-\frac{1}{4} \cos^4 x + k$$

$$187. \int \sin x \cos^4 x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el $\sin x$

La integral es:

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + k$$

$$188. \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es impar en el $\cos x$

La integral es:

$$\frac{\sin x}{5} \left(-\cos^4 x + \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{2}{3} \right) + k$$

$$189. \int \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas. Es par en el $\sin x$ y en el $\cos x$

La integral es: $(-x + \operatorname{tg} x) + k$

$$190. \int \cos^4 x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Es par en el $\cos x$

La integral es:

$$\frac{1}{4} \left[\frac{3x}{2} + \sin x \cos x \left(\cos^2 x + \frac{3}{2} \right) \right] + k$$

$$191. \int \sin 4x \cos x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 3x}{3} \right) + k$$

$$192. \int \sin 5x \sin 3x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4} \left(-\frac{\sin 8x}{4} + \sin 2x \right) + k$$

$$193. \int \cos 6x \cos 4x \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se transforma el producto en suma o resta.

La integral es:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\sin 10x}{5} + \sin 2x \right) + k$$

$$194. \int \sqrt{9 - x^2} \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Ejercicios y problemas

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 3 \operatorname{sen} t$$
$$dx = 3 \cos t dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2} \left(9 \operatorname{arc sen} \frac{x}{3} + x \sqrt{9 - x^2} \right) + k$$

195. $\int \sqrt{25 - x^2} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 5 \operatorname{sen} t$$
$$dx = 5 \cos t dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2} \left(25 \operatorname{arc sen} \frac{x}{5} + x \sqrt{25 - x^2} \right) + k$$

196. $\int \sqrt{3 - x^2} dx$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = \sqrt{3} \operatorname{sen} t$$
$$dx = \sqrt{3} \cos t dt$$

La integral es:

$$\frac{1}{2} \left(3 \operatorname{arc sen} \frac{\sqrt{3}}{3} x + x \sqrt{3 - x^2} \right) + k$$

197. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 2 \operatorname{tg} t$$
$$dx = 2 \sec^2 t dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{4 + x^2}}{4x} + k$$

198. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{25 + x^2}}$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.

Se aplica el cambio de variable.

$$x = 5 \operatorname{tg} t$$
$$dx = 5 \sec^2 t dt$$

La integral es:

$$-\frac{\sqrt{25 + x^2}}{25x}$$

Para ampliar

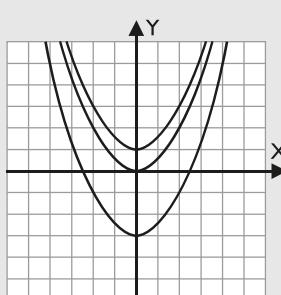
199. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = x$$

Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$$y = \frac{x^2}{2}$$
$$y = \frac{x^2}{2} + 1$$
$$y = \frac{x^2}{2} - 3$$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

200. Dada la función:

$$y = -x + 1$$

a) calcula su integral indefinida:

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(4, -1)

c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

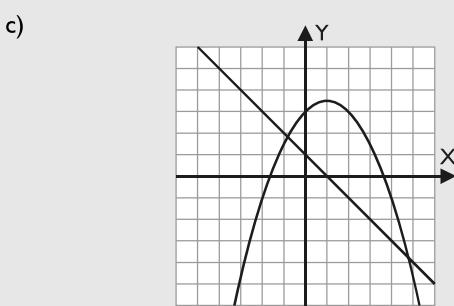
Solución:

a) $\int (-x + 1) dx = -\frac{x^2}{2} + x + k$

b) $-\frac{4^2}{2} + 4 + k = -1$

$$k = 3$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + x + 3$$



201. Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x) dx = \begin{cases} x + k & \text{si } x < -2 \\ x^2/2 + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

202. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales. La descomposición es:

$$x + 3 + \frac{1}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} + 3x + L|x| + k$$

203. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^4}{4} - 2x^2 + k$$

204. Calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$x - L |e^x + 1| + k$$

205. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x \ln x$$

Solución:

Se calcula por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = \ln x$$

$$dv = x dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^2}{2} \left(\ln |x| - \frac{1}{2} \right) + k$$

206. Calcula la integral de la función:

$$y = e^{x+2}$$

Solución:

Es la integral de una función exponencial.

$$e^{x+2} + k$$

207. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = (1+x) e^x$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = 1 + x$$

$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$xe^x + k$$

208. Calcula:

$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 12x - 3}{x^2 - x - 6} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$2x + 1 + \frac{1}{5} \left(\frac{6}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right)$$

La integral es:

$$x^2 + x + \frac{6}{5} \ln|x-3| - \frac{1}{5} \ln|x+2| + k$$

209. Halla una función $f(x)$ sabiendo que:

$$f'(x) = x^2 e^x$$

Solución:

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método.

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = e^x dx$$

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 2) + k$$

Ejercicios y problemas

210. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

211. Calcula:

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

Solución:

Se calcula por partes; tiene que aplicarse dos veces el método:

La primera vez se hacen los cambios:

$$\begin{aligned} u &= x^2 \\ dv &= x e^{x^2} \end{aligned}$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + k$$

212. Calcula:

$$\int \frac{x dx}{e^{x^2}} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

Problemas

215. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = -x$$

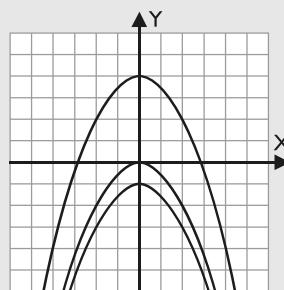
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$$y = -\frac{x^2}{2}$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + 3$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - 1$$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

$$e^{x^2} = t \Rightarrow 2x e^{x^2} dx = dt$$

$$x dx = \frac{dt}{2t}$$

La integral es:

$$-\frac{1}{2} e^{-x^2} + k$$

213. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \frac{1}{1-x^2}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2} (\ln|x+1| - \ln|x-1|) + k$$

214. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \sqrt{x}$$

Solución:

Es la integral de una función irracional.

$$\frac{2}{3} x \sqrt{x} + k$$

216. Dada la función: $y = e^x$

a) calcula su integral indefinida.

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(1, 1)

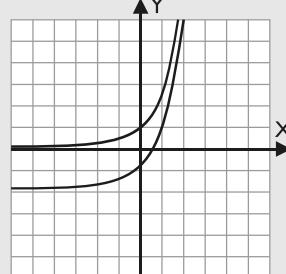
c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

Solución:

a) $\int e^x dx = e^x + k$

b) $e^1 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - e \Rightarrow y = e^x + 1 - e$

c)



217. Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 1 \\ e^x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x) dx = \begin{cases} -x^2/2 + k & \text{si } x \leq 1 \\ e^x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

218. Calcula:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}}$$

Solución:

Es la integral de una función irracional.

$$-2\sqrt{1-e^x} + k$$

219. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1-e^x}$$

mediante un cambio de variable.

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$x - \ln |e^x - 1| + k$$

220. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$2 + \frac{2}{x-1}$$

La integral es:

$$2x + 2 \ln|x-1| + k$$

221. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2} \ln|x^2+1| + k$$

222. Calcula $\int \frac{1}{x+1} dx$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$\ln|x+1| + k$$

223. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 + k$$

224. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$x - 3 + \frac{2}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 2 \ln|x| + k$$

225. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 9}{x+2}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$4x - 5 + \frac{1}{x+2}$$

La integral es:

$$2x^2 - 5x + \ln|x+2| + k$$

226. Calcula:

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$1 + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

La integral es:

$$x + 2 \ln|x-1| - \ln|x+1| + k$$

Ejercicios y problemas

227. Calcula:

$$\int (x^2 + 5) e^{-x} dx$$

Solución:

Se calcula por partes, hay que aplicar dos veces el método. La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2 + 5$$

$$dv = e^{-x} dx$$

El resultado es:

$$-e^{-x}(x^2 + 2x + 7) + k$$

228. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{16}{(x+1)^2}$$

Solución:

Es la integral de una función racional.

$$-\frac{16}{x+1} + k$$

229. Calcula la integral de la función:

$$y = e^{-x}$$

Solución:

Es la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x} + k$$

230. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = xe^{2x}$$

Solución:

Se calcula por partes.

Se hacen los cambios:

$$u = x$$

$$dv = 2e^{2x} dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + k$$

231. Calcula:

$$\int x \cos x^2 dx$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{1}{2} \sin x^2 + k$$

232. Sea la integral:

$$\int e^{2x} \sin e^x dx$$

a) Intégrala mediante el cambio $t = e^x$

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

Solución:

a) Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t$$

$$e^{2x} = t^2$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

Luego hay que hacerla por partes.

La integral es:

$$-e^x \cos e^x + \sin e^x + k$$

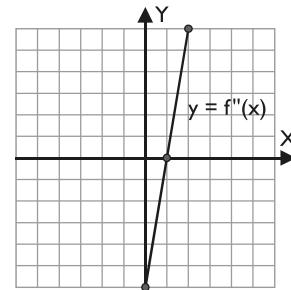
b) Para $x = 0$, $y = 0$

$$-e^0 \cos e^0 + \sin e^0 + k = 0$$

$$-\cos 1 + \sin 1 + k = 0$$

$$k = \cos 1 - \sin 1$$

233. La recta que pasa por los puntos $(0, -6)$ y $(1, 0)$ (observa el dibujo) es la gráfica de la función derivada segunda f'' de una cierta función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se sabe que el origen pertenece a la curva $y = f(x)$ y que en ese punto la recta tangente tienen pendiente igual a 3. Determina una expresión de la función f



Solución:

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + k_1$$

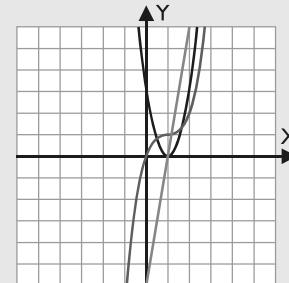
$$f'(0) = 3 \Rightarrow k_1 = 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + k_2$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$



234. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$x^2 - x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

La integral es:

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + L|x| - L|x+1| + k$$

235. Calcula:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

La integral es:

$$x + L|x-2| - L|x+1| + k$$

236. Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{x^2}{x^3 - 2}$$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{3}L|x^3 - 2| + k$$

237. Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{1}{x^2 + 2}$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}}{2} x + k$$

238. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = (x + 1)e^{2x}$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = x + 1$$

$$dv = e^{2x} dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}e^{2x}\left(x + \frac{1}{2}\right) + k$$

239. Calcula:

$$\int x \sin x \cos x dx$$

Solución:

Se llama I a la integral buscada.

Se aplica la integración por partes.

$$u = x \sin x$$

$$dv = \cos x dx$$

Se obtiene la siguiente ecuación:

$$I = x \sin^2 x - \int \sin^2 x - I$$

Se resuelve la integral trigonométrica que es par en el seno.

$$\int \sin^2 x = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

Queda:

$$2I = x \sin^2 x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + k$$

$$I = \frac{x \sin^2 x}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin 2x + k$$

240. Calcula:

$$\int \frac{e^{3x}}{2 + e^x} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = \ln t$$

$$e^{3x} = t^3$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + 4L|e^x + 2| + k$$

Ejercicios y problemas

241. Calcula una primitiva de la función:

$$f(x) = x \ln(1 + x^2)$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = \ln(1 + x^2)$$

$$dv = x \, dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2} [(x^2 + 1) \ln|x^2 + 1| - x^2] + k$$

242. Calcula:

$$\int x \sqrt{1 + x^2} \, dx$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + k$$

Para profundizar

243. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = e^x$$

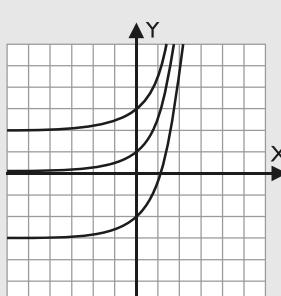
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$$y = e^x$$

$$y = e^x + 2$$

$$y = e^x - 3$$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

244. Dada la función:

$$y = \sin x$$

- a) calcula su integral indefinida.
- b) halla la primitiva que pasa por el punto P($\pi, 3$)
- c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

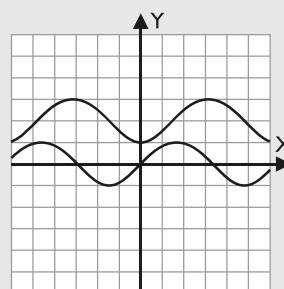
Solución:

$$a) \int \sin x \, dx = -\cos x + k$$

$$b) -\cos \pi + k = 3 \Rightarrow k = 2$$

$$y = -\cos x + 2$$

c)



245. Halla la integral de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq -1 \\ e^x & \text{si } -1 < x < 2 \\ \cos x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\int f(x) \, dx = \begin{cases} -\cos x & \text{si } x \leq -1 \\ e^x & \text{si } -1 < x < 2 \\ \sin x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

246. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} x + k$$

247. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = xe^{-x}$$

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = x$$

$$dv = e^{-x} \, dx$$

El resultado es: $-e^{-x}(x + 1) + k$

248. Calcula la integral de la función:

$$y = \frac{2x + 2}{1 - x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$-2 - \frac{4}{x - 1}$$

La integral es:

$$-2x - 4 \ln|x - 1| + k$$

249. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Solución:

Es la integral de una función logarítmica.

$$L|x-1| + k$$

250. Calcula:

$$\int x^2 L x \, dx$$

donde $L x$ denota el logaritmo neperiano de un número positivo x

Solución:

Se calcula por partes. Se hacen los cambios:

$$u = L x$$

$$dv = x^2 \, dx$$

El resultado es:

$$\frac{x^3}{3} \left(L|x| - \frac{1}{3} \right) + k$$

251. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = 2 + x - x^2$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + k$$

252. Halla una función $f(x)$ sabiendo que:

$$f'(x) = x^2 e^x$$

Solución:

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método.

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = e^x \, dx$$

El resultado es:

$$e^x(x^2 - 2x + 2) + k$$

253. Calcula:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right)$$

La integral es:

$$\frac{1}{2} (L|x+1| - L|x+3|) + k$$

254. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}$$

Usa el cambio de variable $\sqrt{x} = t$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$$

Luego hay que hacerla por partes.

La integral es:

$$2 \operatorname{sen} \sqrt{x} - 2 \sqrt{x} \cos \sqrt{x} + k$$

255. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

Es la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{x} + k$$

256. Haciendo el cambio de variable $e^x = t$, calcula:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} \, dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$e^x = t \Rightarrow x = L t$$

$$e^{2x} = t^2$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

La integral es:

$$\frac{1}{2} (L|e^x - 1| - L|e^x + 1| + k)$$

257. Calcula:

$$f(x) = \int \frac{x^3 - 2x + 3}{x - x^2} \, dx$$

Ejercicios y problemas

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

El denominador tiene raíces reales simples.

La descomposición es:

$$-\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x} - \frac{2}{x+2}$$

La integral es:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 3\ln|x| - 2\ln|x-1| + k$$

258. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x\sqrt{5-x^2}$$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$-\frac{1}{3}(5-x^2)\sqrt{5-x^2} + k$$

259. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \operatorname{tg} x$$

Solución:

Es la integral de una función trigonométrica.

$$-\ln|\cos x| + k$$

260. Calcula:

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

Solución:

Se calcula por partes; hay que aplicar dos veces el método.

La primera vez se hacen los cambios:

$$u = x^2$$

$$dv = x e^{x^2} dx$$

El resultado es:

$$\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + k$$

261. Calcula una primitiva de la función:

$$y = \frac{x^2}{4-x^2}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$-\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$$

La integral es:

$$-x + \ln|x+2| - \ln|x-2| + k$$

262. Utiliza el cambio de variable $L x = t$ para calcular la integral:

$$\int \frac{1+Lx^2+(Lx)^2}{x(1+Lx)} dx$$

Solución:

Se aplica el método de integración por cambio de variable o sustitución.

$$\begin{aligned} Lx &= t \Rightarrow x = e^t \\ dt &= e^t dx \\ I &= \int \frac{1+2t+t^2}{e^t(1+t)} e^t dt = \int \frac{1+2t+t^2}{1+t} dt = \\ &= \int \frac{(1+t)^2}{1+t} dt = \int (1+t) dt = \frac{1}{2}t^2 + t + k = \\ &= \frac{1}{2}(Lx)^2 + Lx + k \end{aligned}$$

263. Calcula la integral:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

Solución:

Se aplica la integral de la función racional.

$$I = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{2\sin^2 x} + k$$

Paso a paso

264. Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int \left(e^{5x} + \cos \frac{x}{3} \right) dx$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

265. Calcula la integral:

$$F(x) = \int (2x - 5) dx$$

Halla la primitiva que pase por el punto P(4, 3). Representa la primitiva obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

266. Calcula la integral:

$$\int \cos 2x dx$$

Sustituye la constante **k** por los números enteros de -10 a 10. Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

267. Calcula la integral:

$$\int \frac{3x^2 - 11x + 15}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx$$

y haz la descomposición en fracciones simples del integrando.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

268. Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige Matemáticas, curso y tema.

Práctica

269. $\int x \cos x dx$

Solución:**Ejercicio 269**

$$\int x \cdot \cos(x) dx \rightarrow \cos(x) + x \cdot \sin(x)$$

271. $\int x^2 e^x dx$

Solución:**Ejercicio 271**

$$\int x^2 \cdot e^x dx \rightarrow (x^2 - 2 \cdot x + 2) \cdot e^x$$

270. $\int L x dx$

Solución:**Ejercicio 270**

$$\int \ln x dx \rightarrow x \cdot \ln(x) - x$$

272. $\int e^x \sin x dx$

Solución:**Ejercicio 272**

$$\int e^x \cdot \sin(x) dx \rightarrow \frac{e^x \cdot \sin(x)}{2} - \frac{e^x \cdot \cos(x)}{2}$$

En los siguientes ejercicios haz la descomposición en fracciones simples del integrando y calcula la integral.

273. $\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} dx$

Solución:

Ejercicio 273

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} dx \rightarrow \ln(|x^2+1|) + 3 \cdot x$$

 fracciones_simples $\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}\right) \rightarrow \{\{3, 1\}, \{2 \cdot x, x^2+1\}\}$

274. $\int \frac{12x + 1}{x^2 + x - 6} dx$

Solución:

Ejercicio 274

$$\int \frac{12x + 1}{x^2 + x - 6} dx \rightarrow 7 \cdot \ln(|-x-3|) + 5 \cdot \ln(|x-2|)$$

 fracciones_simples $\left(\frac{12x + 1}{x^2 + x - 6}\right) \rightarrow \{\{5, x-2\}, \{7, x+3\}\}$

275. $\int \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13} dx$

Solución:

Ejercicio 275

$$\int \frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13} dx \rightarrow \frac{3 \cdot \ln(|x^2-4 \cdot x+13|)}{2} + \frac{11 \cdot \arctan\left(\frac{x-2}{3}\right)}{3}$$

 fracciones_simples $\left(\frac{3x + 5}{x^2 - 4x + 13}\right) \rightarrow \{\{3 \cdot x+5, x^2-4 \cdot x+13\}\}$

276. $\int \frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} dx$

Solución:

Ejercicio 276

$$\int \frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} dx \rightarrow 3 \cdot \ln(|-x+1|) + 2 \cdot \ln(|x-5|) + \frac{-1}{x-1}$$

 fracciones_simples $\left(\frac{5x^2 - 21x + 12}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}\right) \rightarrow \{\{3, x-5\}, \{1, x^2-2 \cdot x+1\}, \{3, x-1\}\}$

277. $\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx$

Solución:

Ejercicio 277

$$\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx \rightarrow 3 \cdot \ln(|x-2|) + \ln(|x^2+1|)$$

 fracciones_simples $\left(\frac{5x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\right) \rightarrow \{\{3, x-2\}, \{1, x^2-2 \cdot x+1\}, \{3, x-1\}\}$

278. $\int \frac{1}{(x^2 - x)(x - 1)} dx$

Solución:

Ejercicio 278

$$\int \frac{1}{(x^2 - x) \cdot (x - 1)} dx \rightarrow \ln(|x|) - \ln(|-x+1|) - \frac{1}{x-1}$$

 fracciones_simples $\left(\frac{1}{(x^2 - x) \cdot (x - 1)}\right) \rightarrow \{\{1, x\}, \{1, x^2-2 \cdot x+1\}, \{-1, x-1\}\}$

279. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx$

Solución:

Ejercicio 279

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx \rightarrow -\frac{\ln(|x^2+1|)}{2} + \arctan(x) + \frac{x^2}{2}$$

 fracciones_simples $\left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\right) \rightarrow \{\{x, 1\}, \{-x+1, x^2+1\}\}$

Calcula las siguientes integrales:

280. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Solución:

Ejercicio 280

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \rightarrow \frac{\ln(x)^2}{2}$$

281. $\int \frac{6}{e^x + 3} dx$

Solución:

Ejercicio 281

$$\int \frac{6}{e^x + 3} dx \rightarrow 2 \cdot \ln(|e^x|) - 2 \cdot \ln(|e^x+3|)$$

282. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

Solución:

Ejercicio 282

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx \rightarrow \ln(|-\sqrt{x+1}+1|) - \ln(|\sqrt{x+1}+1|)$$

283. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$

Solución:

Ejercicio 283

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx \rightarrow 6 \cdot \ln(|\sqrt[3]{x}-1|) + (2 \cdot \sqrt[3]{x^3} + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}) + 6 \cdot \sqrt[3]{x}$$

284. $\int |x| dx$

Solución:

Ejercicio 284

$$\int |x| dx \rightarrow \frac{x \cdot |x|}{2}$$

285. $\int \sin^2 x \cos x dx$

Solución:

Ejercicio 285

$$\int (\sin x)^2 \cdot \cos(x) dx \rightarrow \frac{\sin(x)^3}{3}$$

286. $\int \cos^3 x dx$

Solución:

Ejercicio 286

$$\int (\cos x)^3 dx \rightarrow -\frac{\sin(x)^3}{3} + \sin(x)$$

287. $\int \cos^2 x dx$

Solución:

Ejercicio 287

$$\int (\cos(x))^2 dx \rightarrow \frac{\sin(2 \cdot x)}{4} + \frac{x}{2}$$

288. $\int \cos 4x \cos 3x dx$

Solución:

Ejercicio 288

$$\int \cos(4x) \cdot \cos(3x) dx \rightarrow \frac{\sin(x)}{2} + \frac{\sin(7 \cdot x)}{14}$$

289. $\int \sqrt{4-x^2} dx$

Solución:

Ejercicio 289

$$\int \sqrt{4-x^2} dx \rightarrow \frac{x \cdot \sqrt{-x^2+4}}{2} + 2 \cdot \arcsen\left(\frac{x}{2}\right)$$

290. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$

Solución:

Ejercicio 290

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{9+x^2}} dx \rightarrow \frac{-1 \cdot \sqrt{x^2+9}}{9 \cdot x}$$

291. $\int x^3 \ln x dx$

Solución:

Ejercicio 291

$$\int x^3 \cdot \ln(x) dx \rightarrow \frac{x^4 \cdot \ln(x)}{4} - \frac{x^4}{16}$$

292. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

Solución:

Ejercicio 292

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx \rightarrow -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$$

293. $\int e^{-x}(x^2 + 1) dx$

Solución:

Ejercicio 293

$$\int e^{-x} \cdot (x^2 + 1) dx \rightarrow (-x^2 - 2 \cdot x - 3) \cdot e^{-x}$$

294. $\int \frac{2}{1 + \sqrt{x}} dx$

Solución:

Ejercicio 294

$$\int \frac{2}{1 + \sqrt{x}} dx \rightarrow -4 \cdot \ln(|-\sqrt{x}-1|) + 4 \cdot \sqrt{x}$$

295. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$

Solución:

Ejercicio 295

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x \cdot \ln(x)} dx \rightarrow \frac{\ln(\ln(x))^2}{2}$$

296. Calcula la integral:

$$F(x) = \int (3x^2 - 4x - 1) dx$$

Halla la primitiva que pase por el punto P(2, 1). Representa la primitiva obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:

Ejercicio 296

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 1 \rightarrow x \mapsto 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 1$$

$$F(x) = \int f(x) dx \rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x^2 - x$$

$$P = \text{punto}(2, 1) \rightarrow (2, 1)$$

Sustituimos el punto P(2, 1)

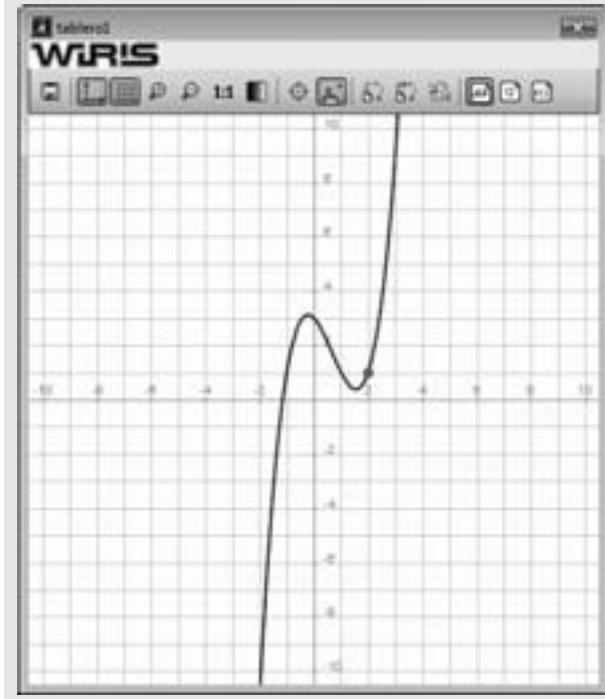
$$\text{resolver}(F(2)+k=1) \rightarrow \{k=3\}$$

La función es:

$$F(x) = F(x) + 3 \rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 3$$

dibujar(F(x), {color=azul, anchura_linea=2})

dibujar(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})



297. Calcula la integral:

$$\int x \cdot \operatorname{sen} 2x \, dx$$

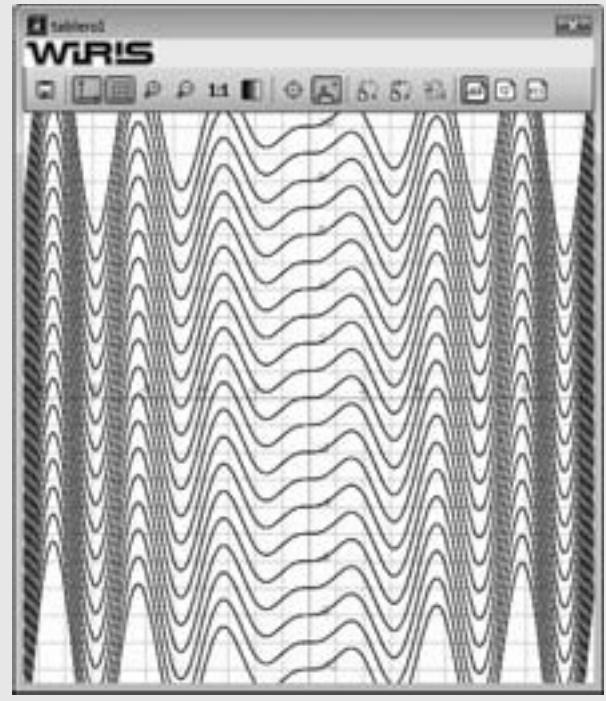
Sustituye la constante k por los números: $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 . Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

Ejercicio 297

$$\int x \cdot \operatorname{sen}(2x) \, dx \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} - \frac{x \cdot \cos(2x)}{2}$$

$$\text{aplicar_función}\left(k \mapsto \text{dibujar}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} - \frac{x \cdot \cos(2x)}{2} + k\right), -10..10\right)$$



298. Calcula la integral:

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx$$

Sustituye la constante k por los números: $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 . Representa la familia de funciones que obtienes. ¿Qué observas en las gráficas?

Solución:

Ejercicio 298

$$\int \operatorname{sen}(3x) \cdot \cos(2x) \, dx \Rightarrow -\frac{8 \cdot \cos(x)^3}{5} + 2 \cdot \cos(x)^2 - \cos(x)$$

$$\text{aplicar_función}\left(k \mapsto \text{dibujar}\left(-\frac{8 \cdot \cos(x)^3}{5} + 2 \cdot \cos(x)^2 - \cos(x) + k\right), -10..10\right)$$

