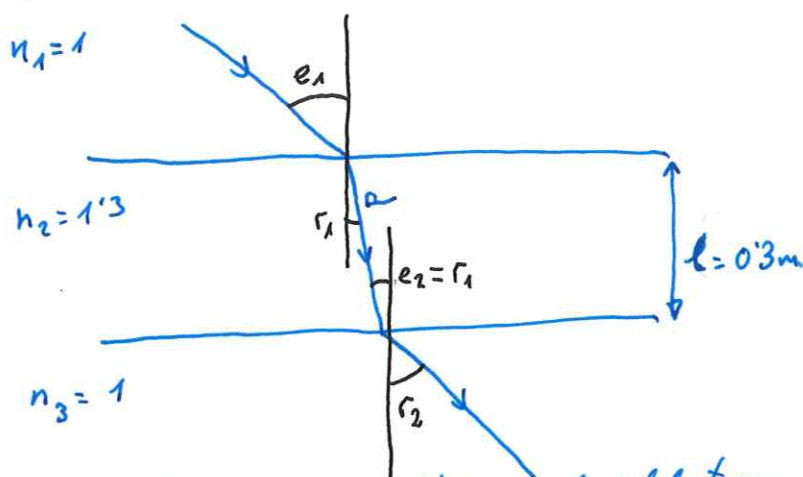


2024 -6-A.3.- 30 cm-ko lodierako beira-xafla batean, argi izpi gorri bat sartu da 45° -ko eraso- angelua eratuz.

- Azaldu ea argi izpiaren kolorea aldatuko den edo ez beira-xaflan sartzean, eta lortu errefrakzio-angelua.
- Zer angelu eratuko du argi izpiak beira-xafla zeharkatuta irteten denean?
- Zenbat denbora behar du argi izpiak beira-xafla zeharkatzeko?

Datuak:

- $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
- $n_{\text{airea}} = 1$
- $n_{\text{beira}} = 1,3$



a) Argiaren maiztasuna, Huygensen Printzipioari jarraituz, ez da aldatzen errefrakzioa gertatzen denean. Argiaren kolorea bere energiaren arabera da, eta Planck-eri jarraituz ($E = h \cdot f$), energia eta maiztasuna zentzu proporzionalak izanik, kolorea ez da aldatuko errefrakzioa gertatzen.

Beira-xaflan dagoen errefrakzio-angelua kalkulatzeko, errefrakzioarako Snell-en legea aplikatuko dugu:

$$\frac{\sin e_1}{\sin r_1} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \boxed{r_1 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin e_1\right)} = \arcsin\left(\frac{1}{1.3} \sin 45^\circ\right) = \boxed{32'95^\circ}$$

b) Berriro Snell aplikatuz:

$$\frac{\sin e_2}{\sin r_2} = \frac{n_3}{n_2} \rightarrow \boxed{r_2 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_3} \cdot \sin e_2\right)} = \arcsin\left(\frac{1.3}{1} \cdot \sin 32'95^\circ\right) = \boxed{45^\circ}$$

c) Hasteko beiratik leketako distantzia: $\cos r_1 = \frac{l}{d} \rightarrow d = \frac{l}{\cos r_1} = \frac{0.3}{\cos 32'95^\circ} = 0.357 \text{ m}$

Orain argiaren beiraan dagoen abiadura: $n_2 = \frac{c}{v_2} \rightarrow v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.3} = 2.31 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Azkenik, abiadura konstantearen formularekin:

$$v = \frac{d}{t} \rightarrow \boxed{t = \frac{d}{v} = \frac{0.357 \text{ m}}{2.31 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1.547 \cdot 10^{-9} \text{ s}}$$

Tranpolin baten igerileku gaineko ertzean kokatuta dagoen bainulariak 2m sakonerako igerilekuaren hondoan dagoen objektu bat ikusi du. Ikusi ahal izateko, uraren gainazalaren normalarekiko 60° angeluan begiratu behar izan du; jakizu, uraren gainazaletik 3m gora dagoela bainulariaren begia. Dakizunez, $n_{\text{ura}} = 1,33$ da uraren errefrakzio-indizea, lortu:

- tranpolinaren ertzaren bertikaletik, zer distantzia horizontaletara dagoen objektua.
 - bi inguruneen arteko muga-angelua; egin izpien diagrama.
- a) Zerbait ikusteko argia objektutik begietara heldu behar zaigu.

Deskribatu den egoera grafikoki ikus dezakegu

Eraso angelua kalkulatuko dugu Snell-en errefrakzioaren legea aplikatuz:

$$\frac{\sin e}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow e = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \sin r\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow e = \arcsin\left(\frac{1}{1,33} \sin 60\right) = 40,37^\circ$$

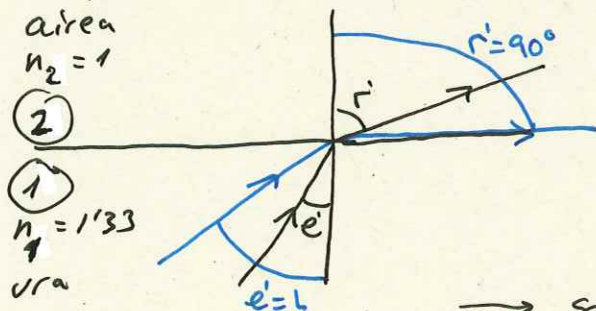
- Eskatu den deskriben distantzia d da ($d = d_1 + d_2$).

$$d_1 \rightarrow \tan r = \frac{d_1}{h_1} \rightarrow d_1 = h_1 \tan r = 3 \cdot \tan 60 = 5,19 \text{ m}$$

$$d_2 \rightarrow \tan e = \frac{d_2}{h_2} \rightarrow d_2 = h_2 \tan e = 2 \cdot \tan 40,37 = 1,7 \text{ m} \quad \left\{ \Rightarrow \right.$$

$$\text{Eskatutako distantzia: } \boxed{d = d_1 + d_2 = 5,19 + 1,7 = 6,89 \text{ m}}$$

- b) Islapen osoa eukiteko $n_2 < n_1$, beraz kasu honetan gerta daiteke.



Snellen formulagar:

$$\frac{\sin e'}{\sin r'} = \frac{n_2}{n_1} \quad \frac{e'=L}{r'=90^\circ}$$

$$\rightarrow \frac{\sin L}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1,33} \rightarrow \boxed{L = \arcsin \frac{1}{1,33} = 36,94^\circ}$$

$f = 5 \times 10^{14}$ Hz maiztasuneko argi izpi bat $n_0 = 1$ errefrakzio-indizeko ingurune batean zehar hedatuz doa.

- Kalkulatu zer uhin-luzera duen argi izpiak ingurune horretan.
- Demagun beste ingurune batean zehar hedatuko dela izpia; ingurunearen errefrakzio-indizea $n_1 = 1,36$ da. Hori horrela, zein dira izpiaren maiztasunaren eta uhin-luzeraren balioak?

a) • Datuak ez daude ematen, argiaren abiadura hutsan edo airean, c , hark behar duen f jakinda hala ere $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ -koa dela.

• Nolan errefrakzio indizearen definitioak abiatuta:

$$n_0 = \frac{c}{v_0} \rightarrow v_0 = \frac{c}{n_0} = c/1 = c \quad \text{Beraz izpi horren}$$

hedapen abiadura c da; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

• Orain hedapen abiaduraren definitioagat: $v_u = \lambda \cdot f$, uhin-luzera kalkulatuko dugu: $\boxed{\lambda = \frac{v_u}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{14}} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$

b) Berriz errefrakzio-indizeak abiatuta, ingurune berriari dagoen hedapen abiadura kalkulatuko dugu: $n_1 = \frac{c}{v_1} \rightarrow v_1 = \frac{c}{n_1} \rightarrow$

$$\rightarrow v_1 = \frac{3 \cdot 10^8}{1,36} = 2,2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Berriz hedapen abiaduraren definitioagat, eta maiztasuna ez dela aldatzen kontuan hartuta: $v_2 = \lambda_2 \cdot f \rightarrow$

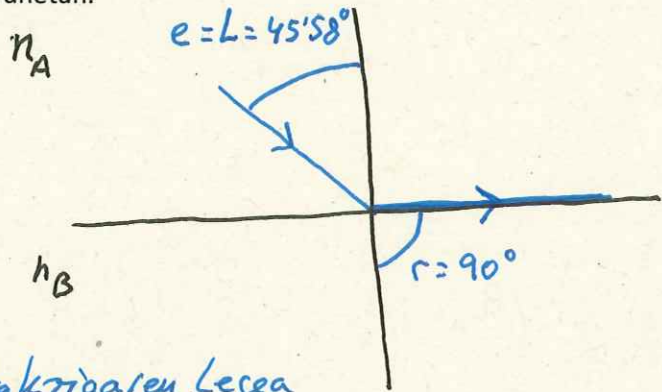
$$\rightarrow \boxed{\lambda_2 = v_2 / f = 2,2 \cdot 10^8 / 5 \cdot 10^{14} = 4,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$$

Esan dugun bezala, maiztasuna ez da aldatzen: $\boxed{f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$

A eta B bi ingurune daukagu, beren errefrakzio indizeak n_A eta n_B izanik. $6,04 \cdot 10^{14}$ Hz-ko argi izpi batek A ingurunetik B ingurunea erasotzen du, islapen osorako muga angelua $45'58''$ koa dela frogatu delarik. Errefrakzio indizeen arteko erlazioa $n_A - n_B = 0,6$ dala jakinda, kalkulatu:

- Bi inguruneetako errefrakzio indizeak: n_A eta n_B .
- Argi erasotzailearen uhin-luzerak bi ingurunetan.

DATUAK: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$



- a) Zuzenean Snell-en errefrakzioaren Legea aplikatuko dogu, eruntziatutak ematen dauzan datuak; hau da islapen osoko baldintzetan:

$$n_A \cdot \sin e = n_B \cdot \sin r \quad \begin{matrix} e = 45'58''; r = 90^\circ \\ n_B = n_A - 0'6 \end{matrix} \quad n_A \cdot \sin 45'58'' = n_A - 0'6 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{n_A = \frac{0'6}{1 - \sin 45'58''} = 2'1} \quad \text{Beraz: } \boxed{n_B = n_A - 0'6 = 1'5}$$

- b) Bi inguruneetako maiztasuna berdina da: $f = 6'04 \cdot 10^{14}$ Buruketako c datu erabiliz eta errefrakzio-indizeak lagunduta ingurune bakoitzeko hedapen abiadura kalkulatuko dugu: $n_i = \frac{c}{v_i}$
- $$\begin{cases} v_A = c / n_A = 3 \cdot 10^8 / 2'1 = 1'43 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ v_B = c / n_B = 3 \cdot 10^8 / 1'5 = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s} \end{cases}$$

Hedapen abiadurak kontuan hartuz:

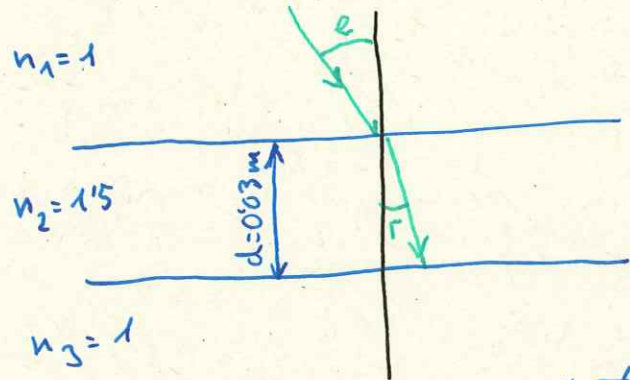
$$v = \lambda \cdot f \quad \begin{cases} \lambda_A = v_A / f = 1'43 \cdot 10^8 / 6'04 \cdot 10^{14} = 2'37 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ \lambda_B = v_B / f = 2 \cdot 10^8 / 6'04 \cdot 10^{14} = 3'31 \cdot 10^{-7} \text{ m} \end{cases}$$

2021-7-A4

A4.- 600nm-ko uhin-luzerako argi izpi batek 3 cm-ko lodiera duen alde bikoitzeko kristal bati erasotzen dio, 30° -ko eraso angeluarekin.

- Lortu izpi errefraktatuak normalarekiko eratzen duen angelua.
- Zein da argiaren abiadura kristala zeharkatzen duen bitartean?
- Kalkulatu zenbat denbora behar duen argiak kristala zeharkatzeko.

DATUAK: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $n_{\text{airea}} = 1$; $n_{\text{kristala}} = 1,5$



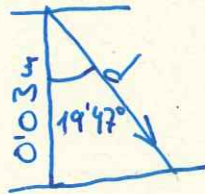
a) Atal honetan zurenean Snell-en errefrakzioaren legea aplikatur:

$$n_1 \cdot \sin e = n_2 \cdot \sin r \rightarrow \boxed{r = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin e\right) = \arcsin\left[\frac{1}{1.5} \sin 30^\circ\right] = 19.47^\circ}$$

b) Errefrakzio indizearen definitioak:

$$n_2 = \frac{c}{v_2} \rightarrow \boxed{v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1.5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$$

c) Denbora jakiteko izpi-errefraktatuak betearen daren distantzia kalkulatuko dogu:

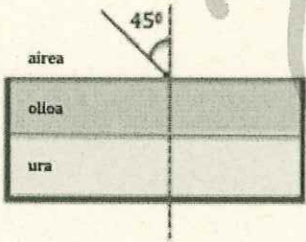


$$\cos 19.47^\circ = \frac{0.03}{d} \rightarrow$$

$$\rightarrow d = \frac{0.03}{\cos 19.47^\circ} = 0.0318 \text{ m}$$

$$\text{Orain: } v_2 = \frac{d}{t} \rightarrow \boxed{t = \frac{d}{v_2} = \frac{0.0318 \text{ m}}{2 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1.59 \cdot 10^{-10} \text{ s}}$$

A4.- Urez beteriko ontzi batean, olio-geruza batez estalita dago uraren gainazala.

 <p>Diagrama batean, adieraz ezazu zer ibilbide hartuko duten argi-izpiek airetik oliora eta oliotik uretara pasatzean. Airetik datorren argi-izpiak 45°-ko angeluarekin erasotzen badio olio-geruzari, zer errefrakzio-angelu izango du uretan? Zer abiadurarekin higituko da argia oliotan zehar? Olio-geruza 3 cm lodia bada, zenbat denbora beharko du izpiak geruza zeharkatzeko?</p>	<p>a) Diagrama batean, adieraz ezazu zer ibilbide hartuko duten argi-izpiek airetik oliora eta oliotik uretara pasatzean.</p> <p>b) Airetik datorren argi-izpiak 45°-ko angeluarekin erasotzen badio olio-geruzari, zer errefrakzio-angelu izango du uretan? Zer abiadurarekin higituko da argia oliotan zehar? Olio-geruza 3 cm lodia bada, zenbat denbora beharko du izpiak geruza zeharkatzeko?</p> <p>c) Eman dezagun ontziaren behealdetik datorren argi-izpi bat uretatik oliora pasatzen dela. Kalkula ezazu zer erasotze-angelu izan behar duen izpiak uraren eta olioaren arteko banatze-gainazalean argia airera ez pasatzeko.</p>
---	--

Datuak:

Errefrakzio-indizeak: n_1 (airea) = 1; n_2 (olioa) = 1,45; n_3 (ura) = 1,33

Argiaren abiadura: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

2013-7-B-P2 buruketa sera da baina datu batzuk aldatuta.

Nor baitaiek biak egin gura badate hemen emaitzak honak dira:

b) $r_1 = 29'19'' \rightarrow r_2 = 32'12''$

$t = 1'66 \cdot 10^{-10} s$

c) $\theta_{\text{uretatik}} = 48'79''$

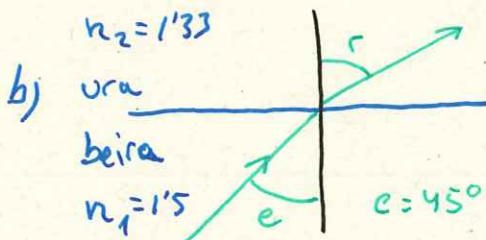
2018-6-A-P2

P2.- Urez beteriko ontzi baten beheko estalkia beirazkoa da. Argi gorriko izpi batek, beirazko estalkia zeharkatu ondoren, 45° -ko angeluarekin erasotzen dio bi inguruneen (beira eta ura) banatze-gainazalari. Hutsen argi gorriko izpi horren uhin-luzera $650 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ dela jakinik:

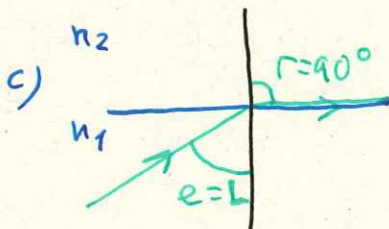
- Kalkulatu zer balio duen argi gorriaren uhin-luzerak beiran.
- Kalkulatu zenbat balio duen errefrakzio-angeluak uretan, eta adierazi diagrama batean zer ibilbide izango duen izpiak beiratik uretara pasatzean.
- Kalkulatu muga-angeluaren balioa beira/ur sistemarako (hau da, zer angeluarekin eraso behar dion argi izpiak beira-ur banatze-gainazalari islapen osoaren fenomeno gerta dadin).

DATUAK: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $n_{\text{ura}} = 1,33$; $n_{\text{beira}} = 1,5$

a) *Maiztasuna ez da aldatzen hutsen landuko dogu:* $c = \lambda_0 \cdot f \rightarrow$
 $\rightarrow f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{650 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 4,62 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \Rightarrow \lambda_{\text{beira}} = \frac{v_{\text{BEIRA}}}{f} = \frac{c/n_{\text{BEIRA}}}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 4,62 \cdot 10^{14}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lambda_{\text{beira}} = 4,33 \cdot 10^{-7} \text{ m}$



Snellen errefrakzio-legea aplikatuz:
 $n_1 \cdot \sin e = n_2 \cdot \sin r \rightarrow$
 $\rightarrow r = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin e\right) = \arcsin\left(\frac{1,5}{1,33} \cdot \sin 45^\circ\right) \Rightarrow$
 $\Rightarrow r = 52,89^\circ$



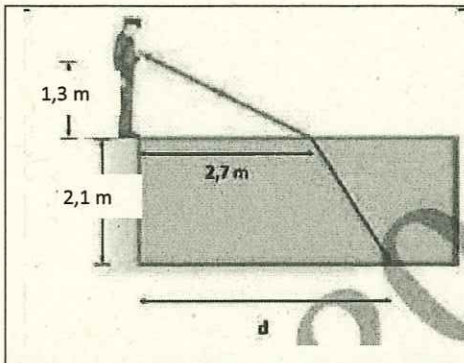
Kasu honetan posiblea da islapen-oso gertaketa $n_2 < n_1$ duteko.

Holan Snellen legea aplikatuz:

$n_1 \sin e = n_2 \sin r$ $\xrightarrow[r = 90^\circ]{e = L}$ $L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \cdot \sin 90^\circ\right) = \arcsin\left(\frac{1,33}{1,5}\right) \Rightarrow$
 $\Rightarrow L = 62,45^\circ$

2015-7-B-P2

P2.- Irudiko zaindaria bere linterna baliatu du igerilekuaren hondoa ikuskatzeko.

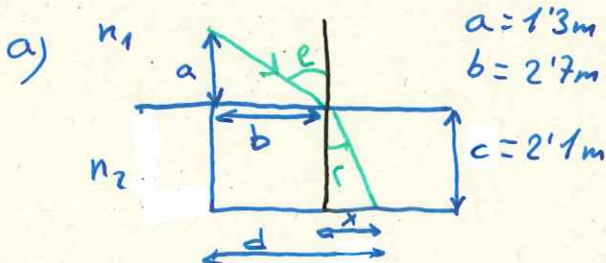


a) Argi izpiaren ibilbidea kontuan hartuta, kalkulatu eraso- eta errefrakzio-angeluen balioak.

b) Zehaztu d distantziaren balioa; alegia, argia igerilekuaren hondoko zer puntutara helduko den adierazten duena.

c) Zer denbora beharko du argiak igerilekuaren hondoraino heltzeko zaindaria bere linterna piztu duen unetik kontaktzen hasita?

DATUAK: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $n_{\text{ura}} = 1,33$; $n_{\text{airea}} = 1$



Datu konexak:

$$\tan e = \frac{b}{a} \Rightarrow e = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{2,7}{1,3} = 64,29^\circ$$

Orain Snellen legea aplikatuz: \rightarrow

$$\rightarrow n_1 \sin e = n_2 \sin r \rightarrow r = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin e \right) = \arcsin \left(\frac{1}{1,33} \cdot \sin 64,29^\circ \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 42,64^\circ$$

b) d kalkulatzeko hasteko x bertuko dogu: $\tan r = \frac{x}{c} \rightarrow x = c \cdot \tan r \rightarrow$

$$\rightarrow x = 2,1 \cdot \tan 42,64^\circ = 1,934 \text{ m}$$

Holan erakalutako distantzia: $d = b + x = 2,7 + 1,934 = 4,634 \text{ m}$

c) Ibilbidearen eskema grafikoki jarri:

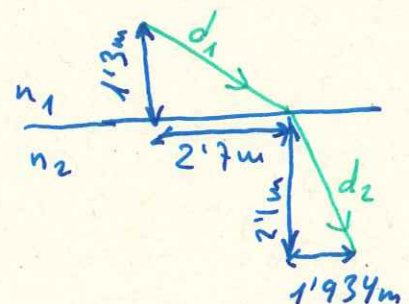
$$\textcircled{1} d_1 = \sqrt{1,3^2 + 2,7^2} = 2,999 \text{ m}$$

$$v_1 = \frac{d_1}{t_1} \rightarrow t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{2,999}{3 \cdot 10^8} = 9,99 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

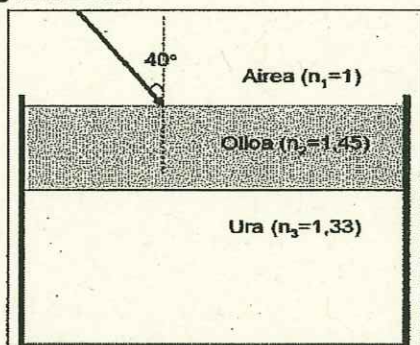
$$\textcircled{2} d_2 = \sqrt{2,1^2 + 1,934^2} = 2,855 \text{ m}$$

$$v_2 = \frac{d_2}{t_2} \rightarrow t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{d_2}{c/n_2} = \frac{n_2 \cdot d_2}{c} = \frac{1,33 \cdot 2,855}{3 \cdot 10^8} = 1,266 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Holan denbora totala: $t = t_1 + t_2 = 9,99 \cdot 10^{-9} + 1,266 \cdot 10^{-8} = 2,265 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

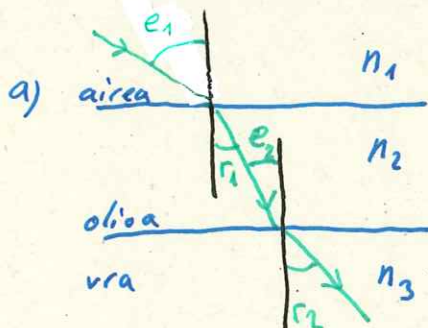


2013-7-B-P2. Urez beteriko ontzi batean olio-geruza batez estalita dago uraren gainazala.



Errefrakzio-indizeak: $n_1(\text{airea}) = 1$; $n_2(\text{olioa}) = 1,45$; $n_3(\text{ura}) = 1,33$
 Argiaren abiadura: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

- a) Diagrama batean, adieraz ezazu zer ibilbide hartuko duten argi izpiek aietik oliora eta uretara pasatzean.
 b) Aietik datorren argi izpiak 40° -ko angeluarekin erasotzen badio (olio-geruzaren gainean), zer errefrakzio-angulu izango du (uretara)? Zer abiadurarekin desplazatu da argia oliotan zehar? Olio-geruza 2 cm lodi bada, zer denbora beharko du zeharkatzeko?
 c) Eman dezagun ontziaren behealdetik datorren argi izpi bat uretatik oliora pasatzen dela. Kalkula ezazu zer erasotze-angulu izan behar duen izpiak uraren eta oliorekin arteko banatze-gainazalean argia airera ez pasatzeko.



Hartutako angeluak hartzen dira errefrakzio indizeen arteko erlazioengatik:

$$n_2 > n_1 \rightarrow r_1 < e_1 \quad \text{eta} \quad n_3 < n_2 \rightarrow r_2 > e_2$$

b) Atalean zehar Snellen errefrakzio-legea aplikatuko dugu.

Hasteko r_1 kalkulatu: $n_1 \sin e_1 = n_2 \sin r_1 \rightarrow r_1 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin e_1\right) \rightarrow$

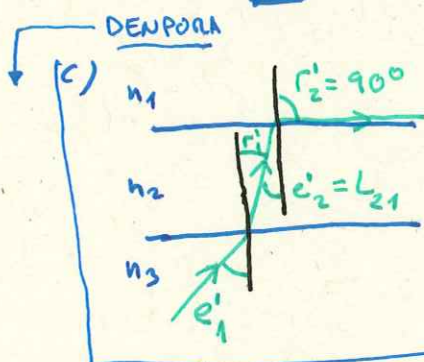
$$\rightarrow r_1 = \arcsin\left(\frac{1}{1,45} \cdot \sin 40^\circ\right) = 26'31''$$

e_2 eta r_1 erpinet aurrakako angeluak dituenak: $e_2 = r_1 = 26'31''$. Berriro

Snellegat: $n_2 \sin e_2 = n_3 \sin r_2 \rightarrow r_2 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_3} \sin e_2\right) \rightarrow$

$$\rightarrow r_2 = \arcsin\left(\frac{1,45}{1,33} \cdot \sin 26'31''\right) = 28'89''$$

ABIADURA: $v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,45} = 2,07 \cdot 10^8 \text{ m/s}$



$n_1 < n_2$, orduan islapen osoa gertatu daiteke bigarrenetik lehenera. Berriro Snell:

$$n_2 \sin e'_2 = n_1 \sin r'_2 \quad r'_2 = 90^\circ \rightarrow e'_2 = L_{21} = \arcsin \frac{n_1}{n_2} = 43'6''$$

Berriro $e'_2 = r'_1 \rightarrow$ Snell:

$$n_3 \sin e'_1 = n_2 \sin r'_1 \rightarrow e'_1 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_3} \sin r'_1\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow e'_1 = \arcsin\left[\frac{1,45}{1,33} \sin 43'6''\right] = 48'75''$$

olioa

$$\cos r_1 = \frac{a}{d} \rightarrow d = \frac{a}{\cos r_1} = \frac{0,02}{\cos 26'31''}$$

$$\rightarrow d = 0,0223 \text{ m} \rightarrow v_2 = \frac{d}{t} \rightarrow t = \frac{d}{v_2} = \frac{0,0223}{2,07 \cdot 10^8} = 1,08 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

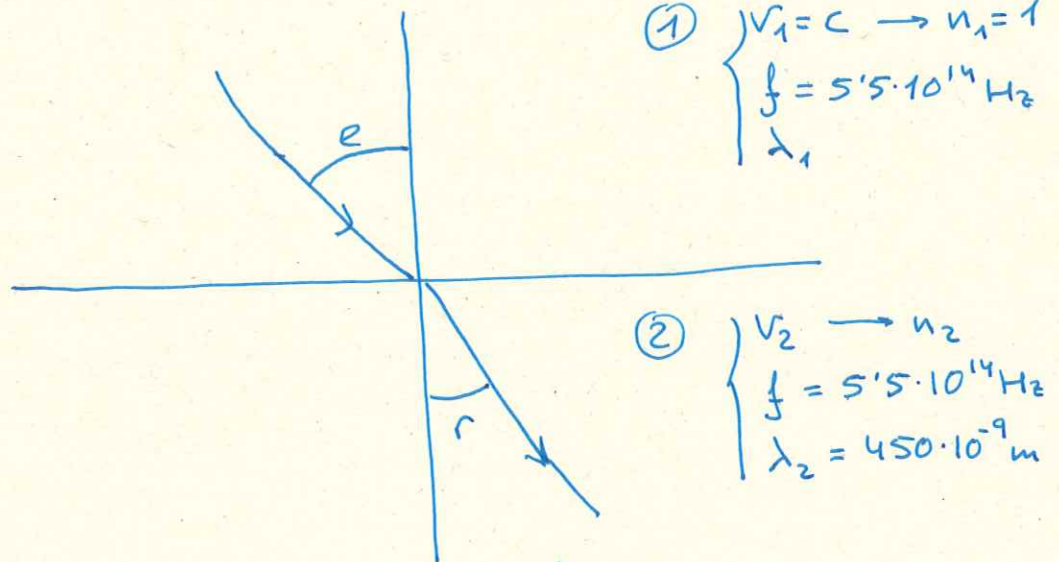
2011-7-B-P2. Argi-uhin batek $f = 5,5 \times 10^{14}$ Hz-eko maiztasuna du. Likido batean barrena hedatzen bada, bere uhin-luzera 450 nm da. Kalkula ezazu:

a) argiaren hedapen-abiadura likido horretan.

b) uhin-luzera hutsean.

c) likidoaren errefrakzio-indizea.

$$nm = 10^{-9} m \quad c = 3 \cdot 10^8 m/s$$



a) Hedapen-abiadura zurenean kalkulatu:

$$\boxed{v_2 = \lambda_2 \cdot f = 450 \cdot 10^{-9} \cdot 5.5 \cdot 10^{14} = 2.475 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$$

b) Era bardinean:

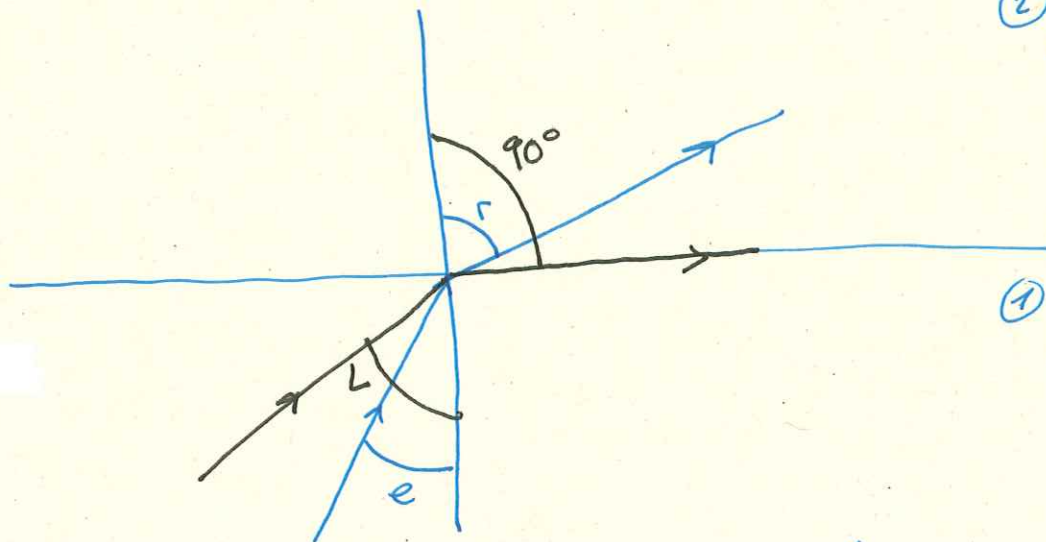
$$v_1 = \lambda_1 \cdot f \rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{5.5 \cdot 10^{14}} = 5.45 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$$

c) Errefrakzio-indizea:

$$\boxed{n_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{2.475 \cdot 10^8} = 1.21}$$

2009-6-A2. Argi-sorta monokromatiko bat, $5 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ -ko maiztasunekoa, $n_b = 1,55$ errefrakzio-indizea duen beira baten barrena hedatzen da, eta 'beira/ur' banantze-gainazal laun batean erasotzen du. Uraren errefrakzio-indizea $n_u = 1,33$ da. a) Zenbatekoa behar du izan argi-sortak gainazal horrekin osatzen duen eraso-angeluak islapen osoa gerta dadin? Egizu marrazki bat. b) Kalkulatu argiaren abiadura eta uhin-luzera ingurune bakoitzean.

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



② URA
 $n_u = 1,33 = n_2$
 $f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

① BEIRA
 $n_b = 1,55 = n_1$
 $f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

a) Islapen osoa gerta dadin eraso angelua muga angelua (L) gainditi behar da. Muga angelurako $r = 90^\circ$ da, beraz Snell-en errefrakzio-legea aplikatuz:

$$\frac{\sin e}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \quad \xrightarrow[r=90^\circ]{e=L} \quad \frac{\sin L}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{L = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1,33}{1,55} = 59'09''}$$

Hau da, eraso angelua $59'09''$ baino handiagoa bada islapen osoa gertatzen da.

b) Ezenean hedapen-abiaduraren formula eta errefrakzio-indizeen definizioa:

$$\text{BEIRA: } n_1 = \frac{c}{v_1} \rightarrow \boxed{v_1 = \frac{c}{n_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,55} = 1,935 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$$

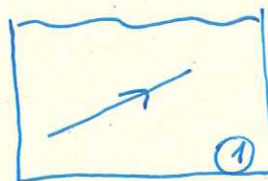
$$v_1 = \lambda_1 \cdot f \rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{1,935 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{14}} = 3,87 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$$

$$\text{URA: } \boxed{v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,33} = 2,256 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{2,256 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{14}} = 4,51 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$$

2008-7-A2. Argi-uhin batek $6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ -ko maiztasuna du, eta likido bat zeharkatzen du. Likido horren barruan, argi-uhinaren uhin-luzera $3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ da. a) Zer abiadura du argiak likido horretan?, b) Zer uhin-luzera izango du hutsean?, eta c) Zer errefrakzio-indize du likidoak maiztasun horretarako?

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



$$f = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\lambda_1 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

- a) Likidoan daren abiadura kalkulatzeko, zurenean hedapen-abiaduraren formula erabiliko dugu:

$$v_1 = \lambda_1 \cdot f = 3 \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{14} = 1.8 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

- b) Hutsean barden egiten:

$$v_0 = \lambda_0 \cdot f \rightarrow \lambda_0 = \frac{v_0}{f} = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{14}} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

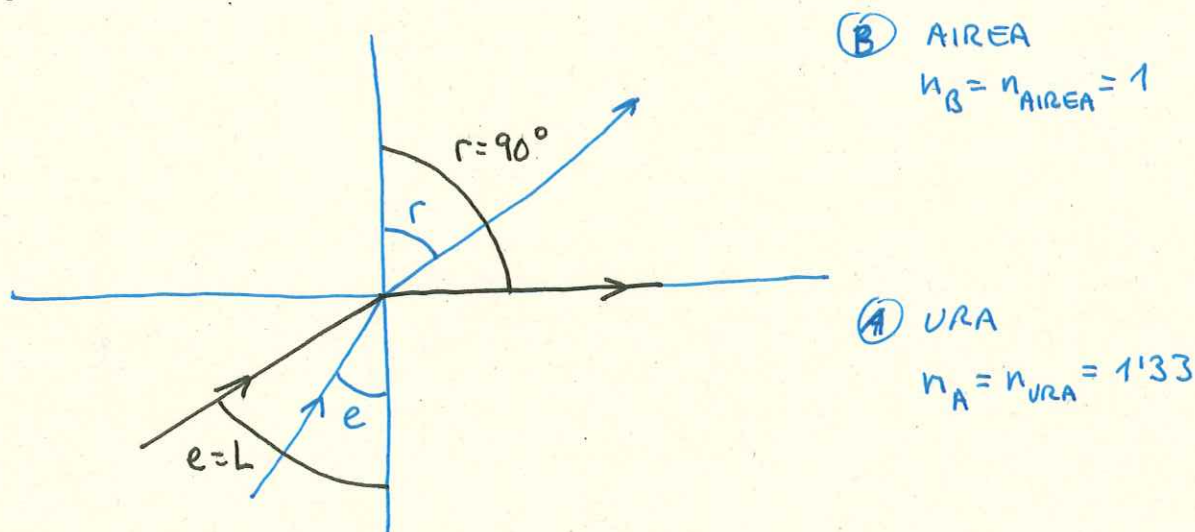
- c) Likidoaren errefrakzio-indizea:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.8 \cdot 10^8} = 1.67$$

2005-6-A2. Uretan barrena hedatzen ari den argi-izpi bat uraren azalera (launa bera) heltzen da. Uraren errefrakzio indizea $n_2 = 1,33$ da. Kanpoko ingurunea airea bada ($n_1 = 1$):

- kalkulatu zein izan behar den eraso-angelurik txikiena islapen osoa gerta dadin.
- eraso-angelu honetarako, kalkulatu errefrakzio-angelua kanpoko ingurunea beira bat balitz ($n_3 = 1,5$). Gerta ahal daiteke islapen osoa kasu honetan?
- Aurkitu argiaren abiaduraren balioak uretan eta beiran.

Oharra: kontsideratu airearen eta hutsaren propietate optikoak berdinak direla: $c = 300.000$ km/s



- Islapen osoa gertatu ahal izateko bigarren ingurunearen errefrakzio-indizea txikiagoa izan behar da lehenengoarena baino. Hain zehazten da: $n_B < n_A$.
Holan eraso angelu konkretu baterako, errefrakzio angelua 90° -koa da. Eraso angelu hori muga angelua deitzen da (L).
Snell-en errefrakzio legea aplikatuz:

$$\frac{\sin e}{\sin r} = \frac{n_B}{n_A} \xrightarrow[r=90^\circ]{e=L} \frac{\sin L}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1.33} \rightarrow \boxed{L = \arcsin \frac{1}{1.33} = 48'75^\circ}$$

Eraso angelua $48'75^\circ$ baino handiagoa bada islapen osoa dago.

- Snell aplikatuz: ($n_A = 1.33$; $n_{B'} = 1.5$)

$$\frac{\sin e'}{\sin r'} = \frac{n_{B'}}{n_A} \rightarrow \boxed{r' = \arcsin \left(\frac{n_A}{n_{B'}} \cdot \sin e \right) = 41'81^\circ}$$

Ezin da islapen osoa egon $n_{B'} > n_A$ dalako.

- Errefrakzio-indizeen salioetatik abiatuta:

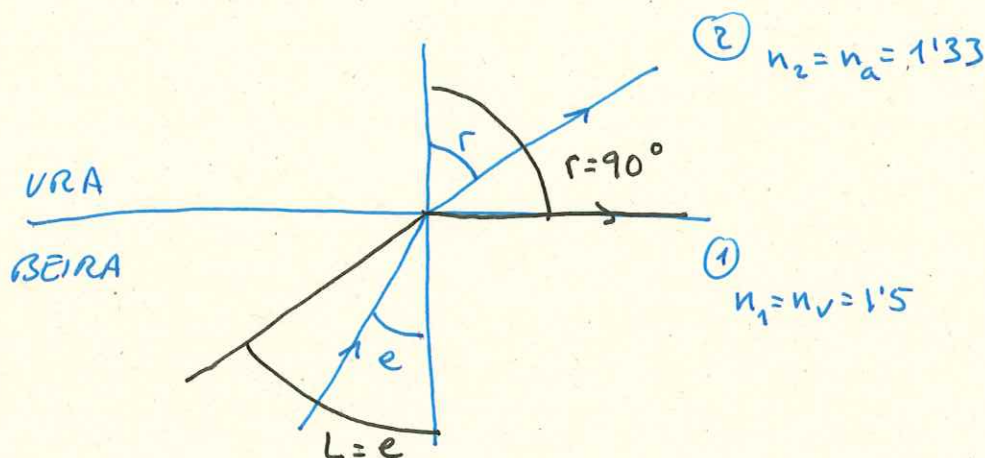
$$n_{\text{BEIRA}} = 1.5 = \frac{c}{v_B} \rightarrow \boxed{v_B = \frac{c}{1.5} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \quad \text{BEIRAN}$$

$$n_{\text{URA}} = 1.33 = \frac{c}{v_A} \rightarrow \boxed{v_A = \frac{c}{1.33} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.33} = 2.26 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \quad \text{URETAN}$$

2002-6-A2. Beirazko gainazal batek ($n_v=1,50$) ur-geruza bat du bere gainean ($n_a=1,33$). Beiran zehar hedatzen den argi-izpi monokromatiko batek, beira eta ura banantzen duen gainazalean erasotzen du.

- Lor bedi argi-izpiaren eraso-angelua isladapen osoa gerta dadin. Marraz bedi eskema bat.
- Zein izango da argiaren abiadura ingurune bakoitzean?

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



- a) Islapen osoa gertatu ahalizateko bigarren ingurunearen errefrakzio-indizea txikiagoa izan behar da lehenarena baino. Hau gertatzen da: $n_2 < n_1$. Nolan eraso angelu konkretu baten (muga angelua, L), errefrakzio angelua 90° koa da. L kalkulatzeko Snell-en errefrakzio legea aplikatuz:

$$\frac{\sin e}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \xrightarrow[r=90^\circ]{e=L} \frac{\sin L}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \boxed{L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 62'46^\circ}$$

Berat eraso angelua $62'46^\circ$ baino handiagoa izanik islapen osoa dago.

- b) Ingurune sakotxan daukan abiadura kalkulatzeko, zurenean errefrakzio-indizeen adierazpidetik abiatuko gara:

$$\text{BEIRA} \rightarrow n_1 = \frac{c}{v_1} \rightarrow \boxed{v_1 = \frac{c}{n_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \quad \text{BEIRAN}$$

$$\text{URA} \rightarrow n_2 = \frac{c}{v_2} \rightarrow \boxed{v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.33} = 2.25 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \quad \text{URETAN}$$