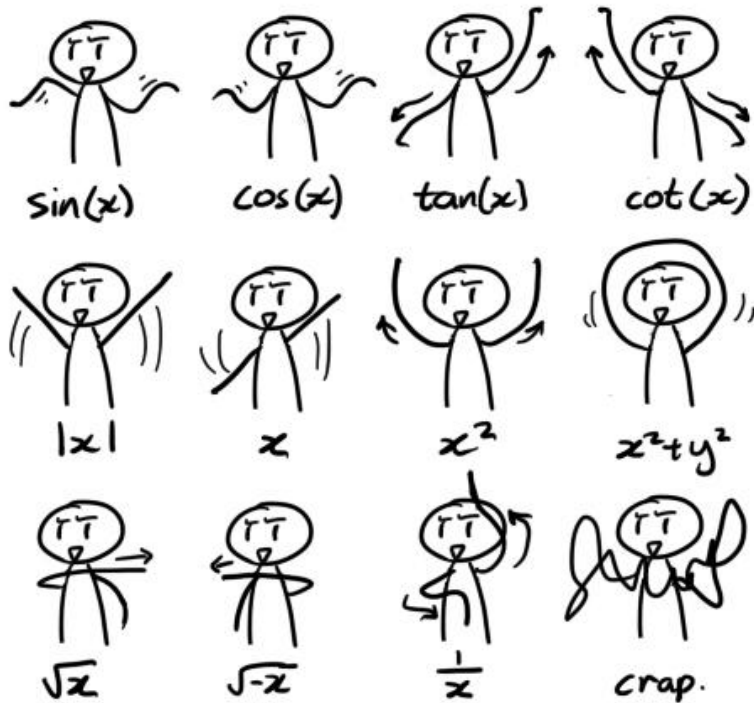


## Beautiful Dance Moves



# ANALISIA: 9.FUNTZIOAK

---

# 9. OINARRIZKO FUNTZIOAK

---

## 1.FUNTZIO KONTZEPTUA

## 2.OINARRIZKO FUNTZIOAK

- Funtzio polinomikoak: funtzio lineala eta funtzio koadratikoa
- Funtzio errokunak
- Funtzio arrazionalak
- Zatika definitutako funtzioak
- Funtzio esponentzialak
- Funtzio logaritmikoak
- Funtzio trigonometrikoak
- Zatika definitutako funtzioak
- Balio absolutudun funtzioak

# 1. FUNTZIO KONTZEPTUA

## Definizioa.-

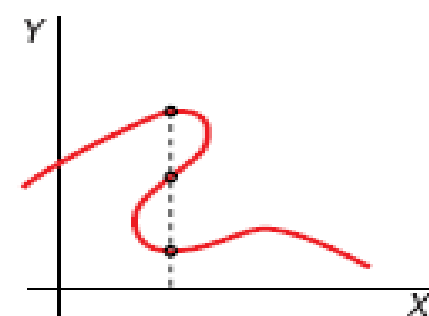
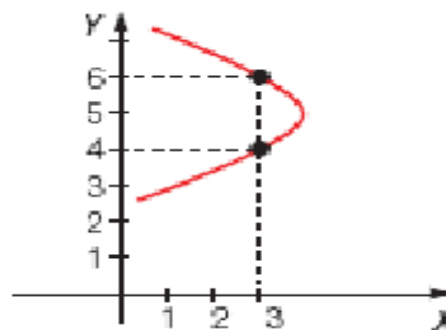
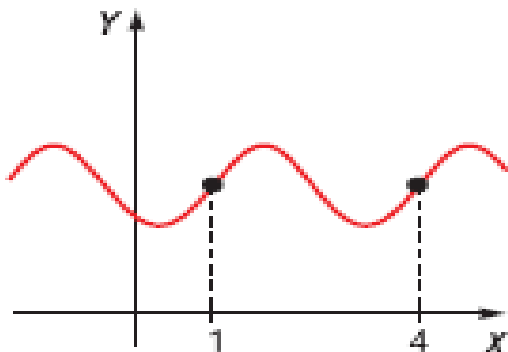
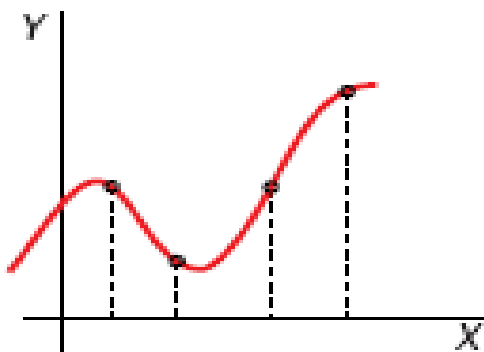
$f$  aldagai errealeko **funtzio erreal** bat dala esango dogu baldin eta  $x$  zenbaki erreal bakoitzari ( $x \in \text{Dom } f$ ), beste zenbaki bat,  $y = f(x)$ , badagokio.

Beraz, funtzio bat bi aldagaien arteko **erlazio** bat da.

$$\begin{array}{ccc} f: \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \text{Im } f \subseteq \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

$x$  aldagaiari aldagai askea deritzogu eta  $y$  aldagaiari menpeko aldagaia.

**OHARRA:** grafiko guztiak EZ dira funtzioak

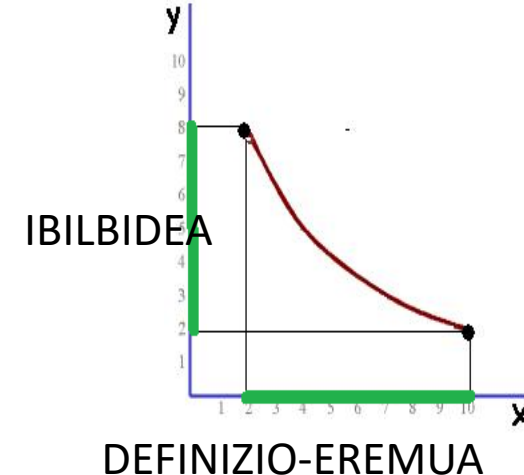


BAI,  $x$ -ren balio bakoitzari,  $f(x)$  bakar bat dagokio

EZ dira funtzioak

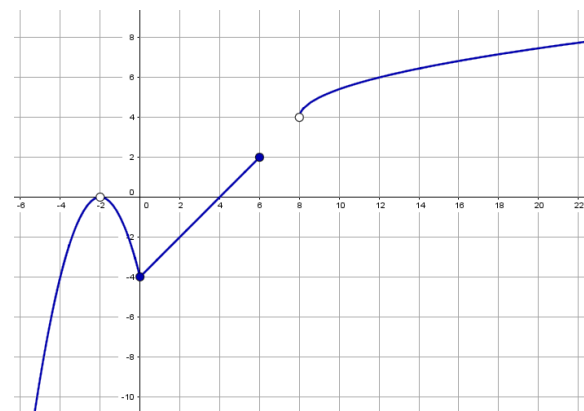
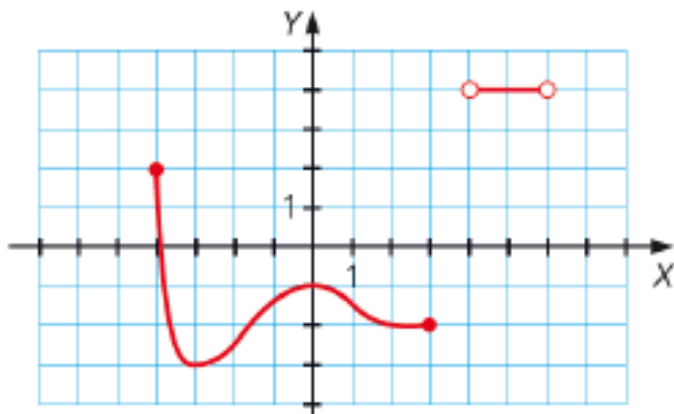
# 1.1. DEFINIZIO EREMUA ETA IBILTARTEA

Demagun ondorengo funtzioa daukagula:  $f: \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \text{Im } f \subseteq \mathbb{R}$   
 $x \longrightarrow y = f(x)$



- $f$  funtzioaren **definizio-eremua** ( $\text{Dom } f$ ): funtzioa definituta dagoen balioek osatzen daben multzoa.
- $f$  funtzioaren **ibilbidea** edo **ibiltartea** ( $\text{Im } f$ ): funtzioak hartzen dauazan balioen multzoa.

4. Kalkulatu irudian agertzen dan adierazpen grafikoa dauan funtzioaren eremua eta ibiltartea.



# 1. 2. DEFINIZIO-EREMUA KALKULATZEN

- **FUNTZIO POLINOMIKOAK:** zenbaki **erreal guztietarako** definituta.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \longrightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

- **FUNTZIO ARRAZIONALAK (izendatzailean x dabezan adierazpenak):** EZ dagoz definituta izendatzailea anulatzen dan puntuetan.

$$f(x) = \frac{12x - x^2}{x^2 - 9} \longrightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3, -3\}$$

- **ERROTZAILE BIKOITIA** dabezan erroketak: errokizun positiboetarako edo nuluetarako soilik definituta.

$$f(x) = \sqrt{3x - 7} \longrightarrow \text{Dom } f = \left[\frac{7}{3}, \infty\right)$$

- **FUNTZIO LOGARITMIKOAK:** zenbaki erreal positiboetarako soilik definituta.

$$f(x) = \log_5(x - 6) \quad \longrightarrow \quad \text{Dom } f = (6, \infty)$$

- **FUNTZIO ESPONENTZIALAK:** zenbaki erreal guztietarako definituta.

$$f(x) = e^{x+2} \quad \longrightarrow \quad \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

- **SINU ETA KOSINU ARRAZOIAK:** zenbaki erreal guztietarako definituta.

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \longrightarrow \quad \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

- **TANGENTEA:** ez dago definituta  $\cos\alpha = 0$  danean.

$$f(x) = \tan x \quad \longrightarrow \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

239.

## 1. 2. DEFINIZIO-EREMUA KALKULATZEN: ARIKETA

1 Aurkitu funtzio hauetako bakoitzaren definizio-eremua:

$$a) y = \frac{x^3 - 7x - 6}{x^3 - 8x^2 + 15x}$$

$$b) y = \frac{x - 3}{x^2 + x + 1}$$

2 Aurkitu funtzio hauetako bakoitzaren definizio-eremua:

$$a) y = \sqrt{x^3 - 8x^2 + 15x}$$

$$b) y = \sqrt{x^4 + x^2}$$

$$c) y = \log(x^4 + x^2)$$

3 Aurkitu funtzio honen definizio-eremua:

$$y = \frac{\log(x - 1)}{\sqrt{5x - x^2}}$$

239.Orr 1,2,3,4,5,6

259.orr 1-2-3-4

# SIMETRIA ETA PERIODIKOTASUNA: ARIKETAK

**54.** Esan ea baduen simetria motaren bat funtzio bakoitzak.

...

a)  $f(x) = x^3 - 3x$

c)  $f(x) = x^2 - x$

b)  $f(x) = x^4 - 1$

d)  $f(x) = x^4 - 2x^2$

**55.** Adierazi zer simetria mota duen funtzio bakoitzak.

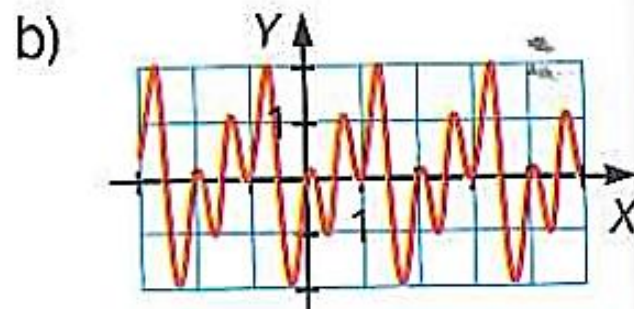
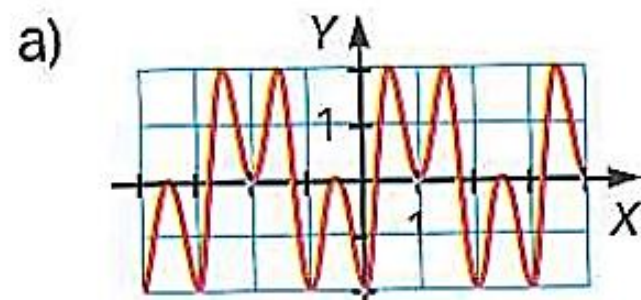
...

a)  $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x}$

b)  $f(x) = \frac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$

**56.** Kalkulatu funtzio bakoitzaren periodoa.

...



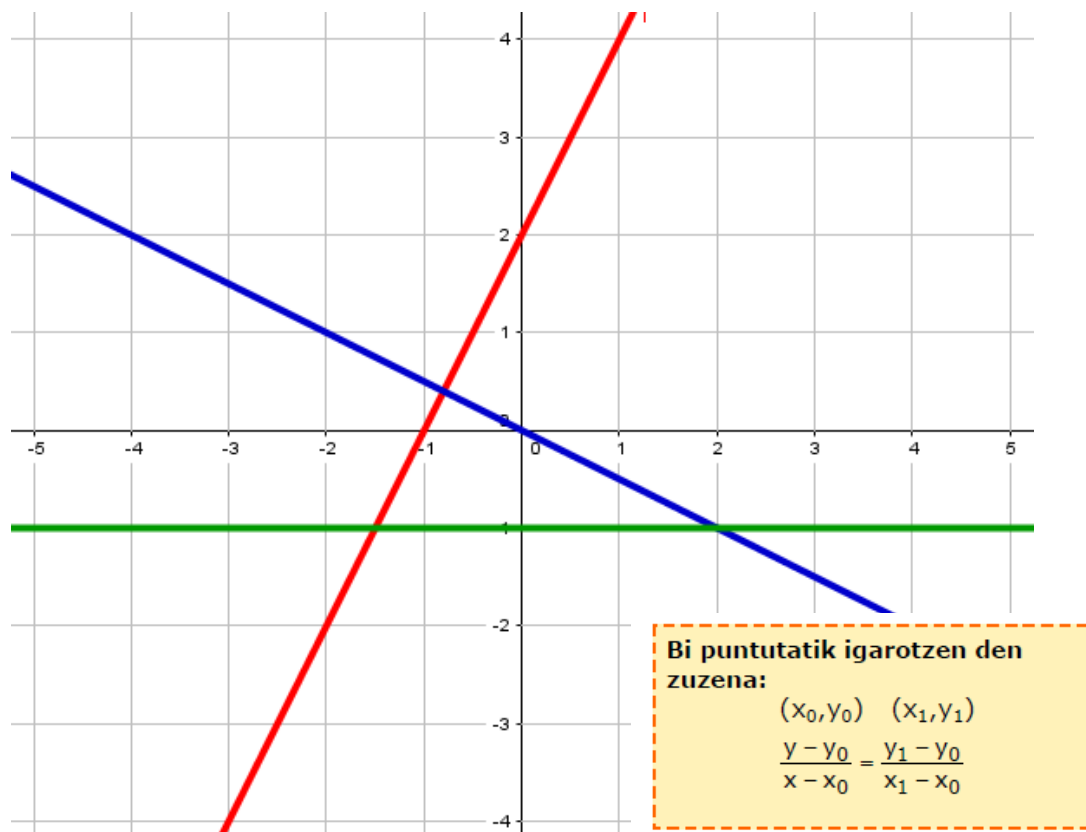


# 2. OINARRIZKO FUNTZIOAK

## 2. 1. FUNTZIO POLINOMIKOAK

- Lehenengo mailako funtzioak: funtzio afinak

$$f(x) = mx + n$$



Lehen mailako funtzio polinomiokoen grafikoa: **zuzena**

**Ezaugarriak:**

- $Dom f = \mathbb{R}$
- $m$ : malda
  - $m > 0$  bada: gorakorra
  - $m < 0$  bada: beherakorra
  - $m = 0$  bada: konstantea ( $f(x)=n$ )

Gogoan izan:  $m = \frac{d_2}{d_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- $n$ : ordenatua jatorrian (OY ardatzarekiko ebakidura)  
⇒ zuzena  $(0, n)$  puntutik pasatu

## • Bigarren mailako funtzioak: funtzio koadratikoak

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

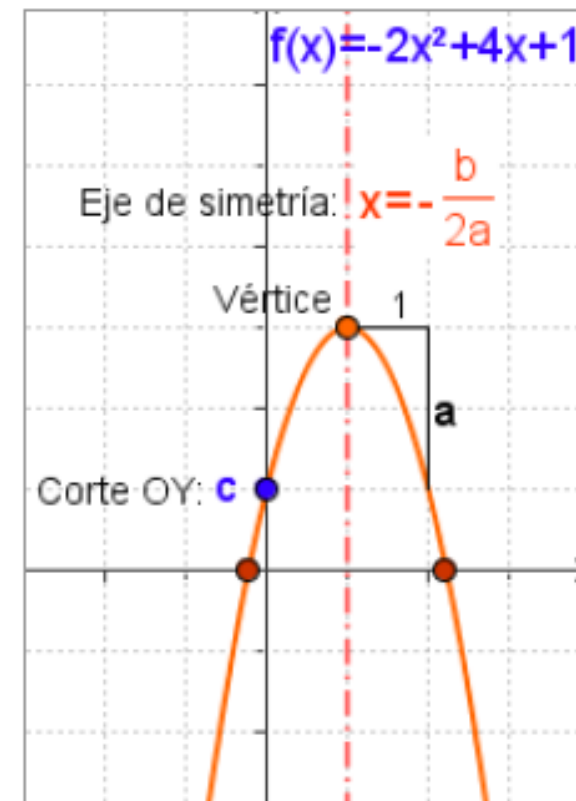
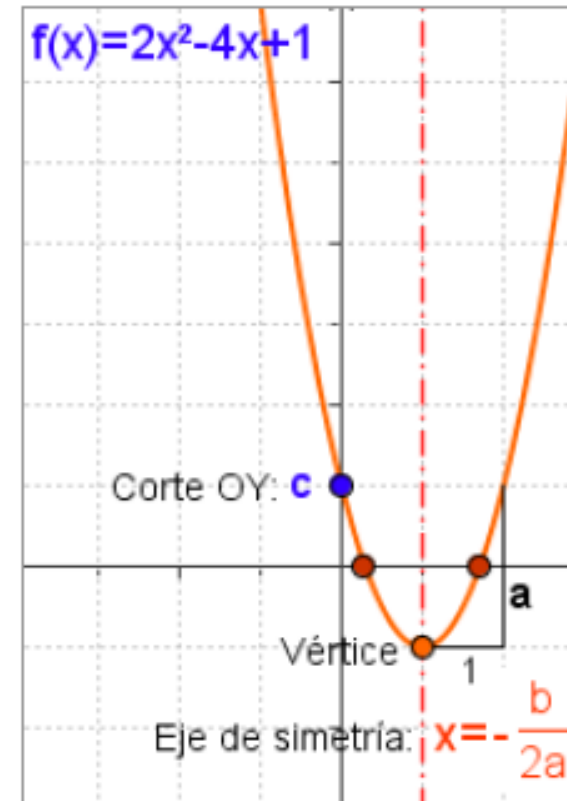
Funtzio koadratikoen adierazpen grafikoa: **parabola**

### Ezaugarriak:

- $Dom f = \mathbb{R}$
- Parabolaren **erpina**:  $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow E = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- **Simetria ardatza**:  $x = -\frac{b}{2a}$
- **$a$ -k ahurtasuna** adierazi:
  - $a > 0$  bada: ahurra eta erpina minimoa
  - $a < 0$  bada: ganbila eta erpina maximoa
- **$|a|$  zenbat eta handiagoa, orduan eta itxiagoak adarrak**
- Ebaketa puntuak ardatzekaz:
  - $OY$  ardatzarekiko ebakidura:  $x=0$
  - $OX$  ardatzarekiko ebakidura:  $y = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Grafikoa irudikatzeko pausuak:

- 1-Erpina kalkulatu
- 2-Kurbatura aztertu
- 3-Ebaketa puntuak
- 4-Balio taula



## 2. 2. FUNTZIO ARRAZIONALAK-ALDERANTZIZKO PROPORTZIONALTASUNEKO FUNTZIOAK

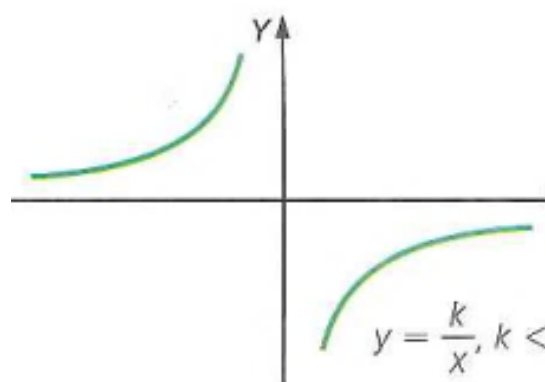
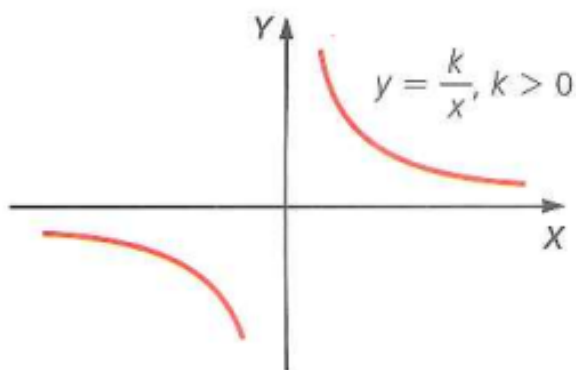
Funtzio arrazionalak adierazpen algebraikoa polinomioen arteko zatiketa modukoa daukienak dira:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ motatakoak, non } Q(x) \neq 0 \text{ da.}$$

**Alderantzizko proportzionaltasuneko funtzioa** mota honetako funtzio bat da:

$$f(x) = \frac{k}{x} \text{ non } k \neq 0$$

Funtzio honen grafikoari **HIPERBOLA** deritzo



**Ezaugarriak:**

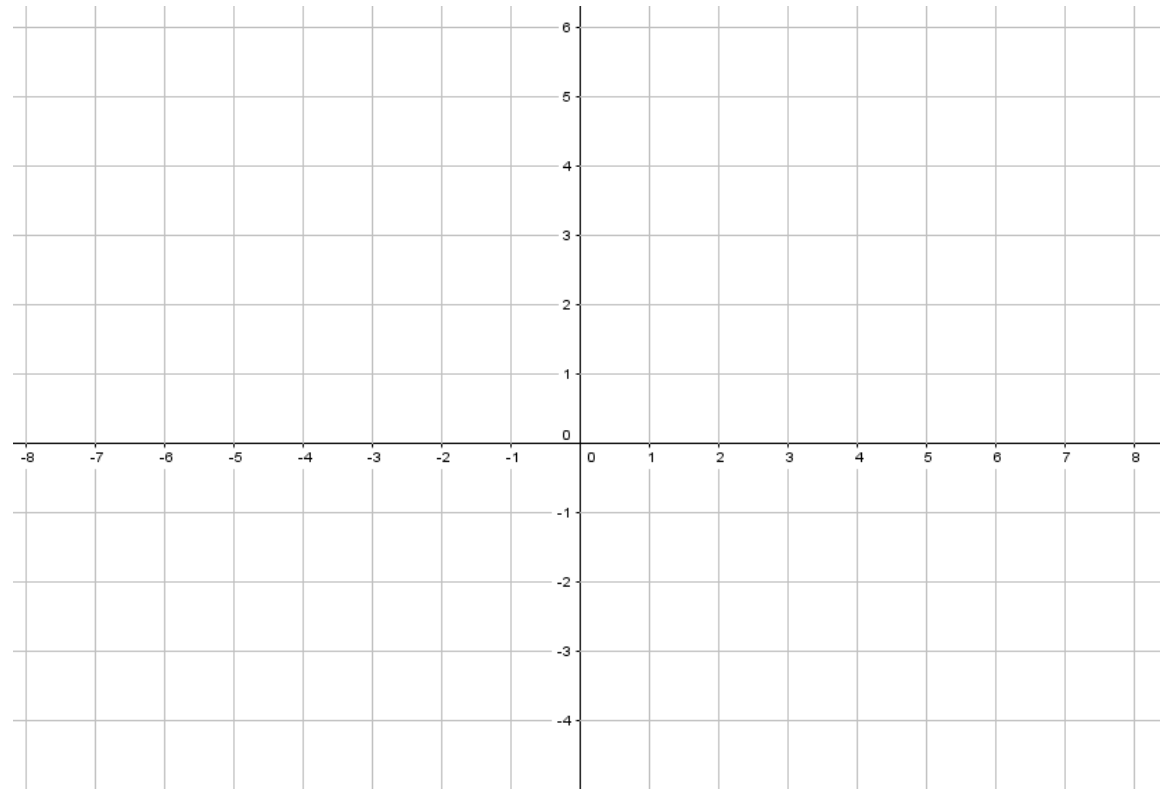
- **Dom**  $f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Asintota bertikala:  $x = 0$
- Asintota horizontala:  $y = 0$
- Funtzioak ez dau koordinatu-ardatzak ebakitzen.
- $k > 0$  bada: beherakorra eta 1. eta 3. koadrantean definituta
- $k < 0$  bada: gorakorra eta 2. eta 4. koadrantean definituta

$$\text{a) } y = \frac{3x}{x-1}$$

$$\text{b) } y = \frac{x-2}{x-4}$$

$$\text{c) } y = \frac{3x+2}{x+1}$$

$$\text{d) } y = \frac{x+1}{x-1}$$



## 2. 3. FUNTZIO ERRODUNAK

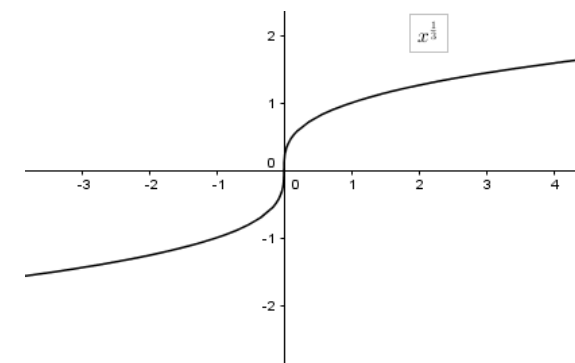
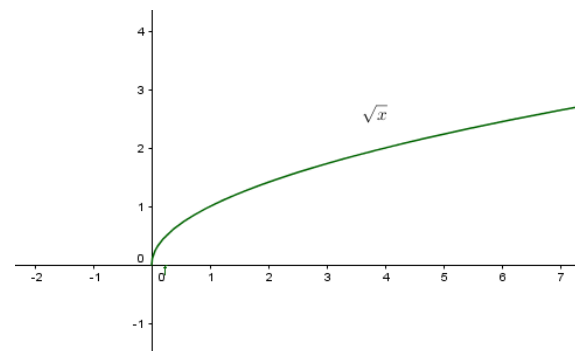
Funtzio errodunetan  $x$  aldagaia erroketa ikurraren barruan dago:  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

**Ezaugarriak:**

- $n$  bikoitia bada:  $Dom f = g(x) \geq 0$  dan tartea
- $n$  bakoitia bada:  $Dom f = \mathbb{R}$

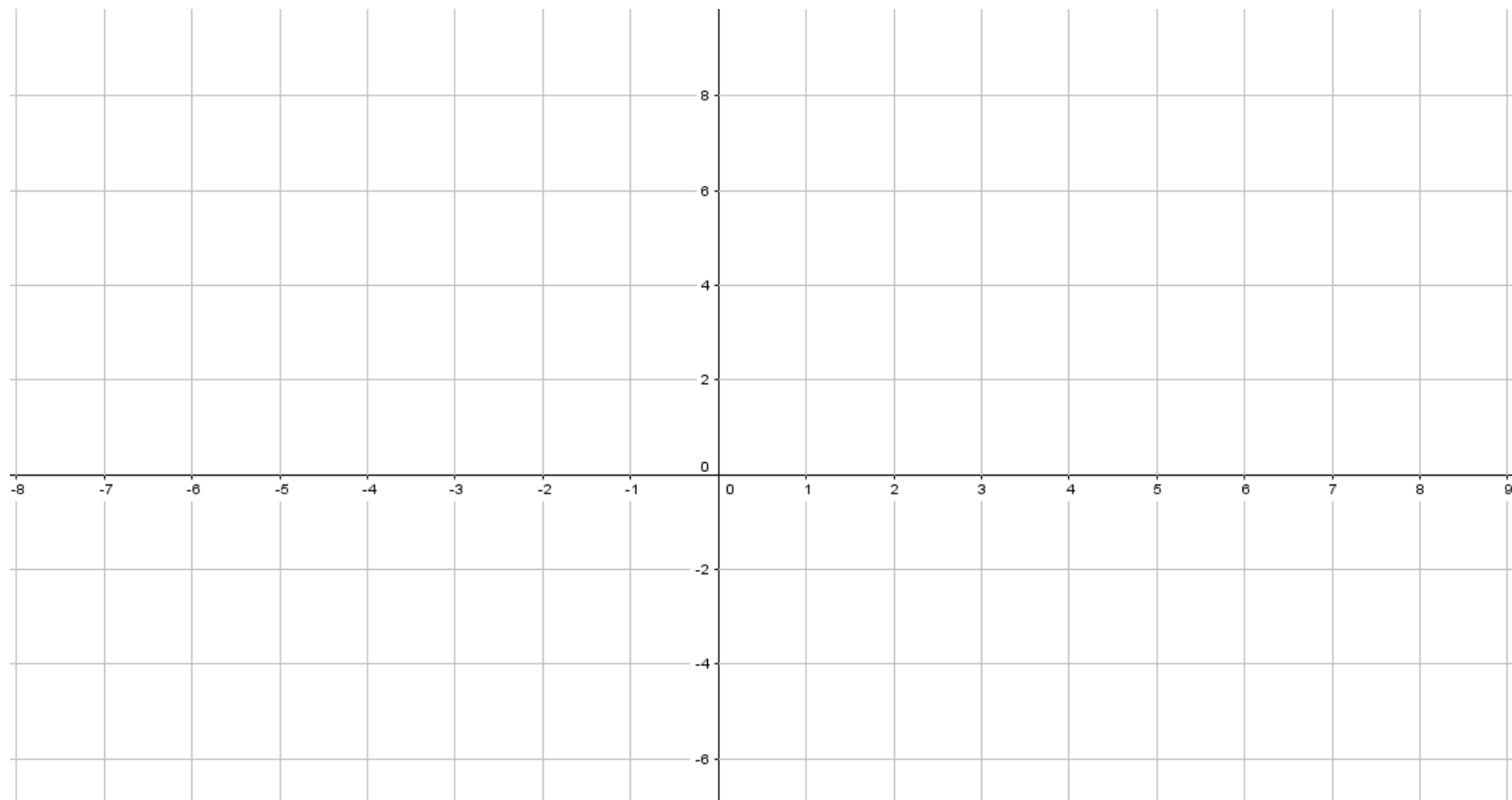
**Adierazpen grafikoa egiteko:**

- Definizio eremua zehaztu
- Kalkulatu  $x$  -en balioa  $f(x) = 0$  denerako
- Balio taularen bidez puntuak atera



**14.** Adierazi funtzio hauek grafikoki:

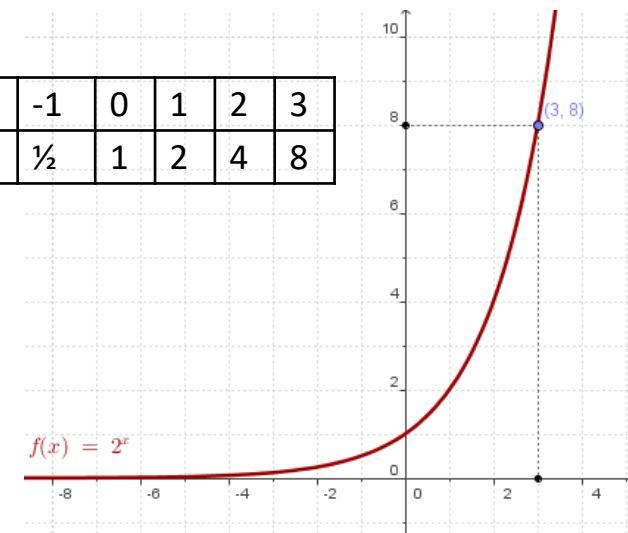
a)  $f(x) = \sqrt{x+2}$       b)  $f(x) = \sqrt{x-4}$



## 2. 4. FUNTZIO ESPONENTZIALAK

$$\underline{a > 1 \text{ eta } a \neq 1}$$

	X	-2	-1	0	1	2	3
	Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

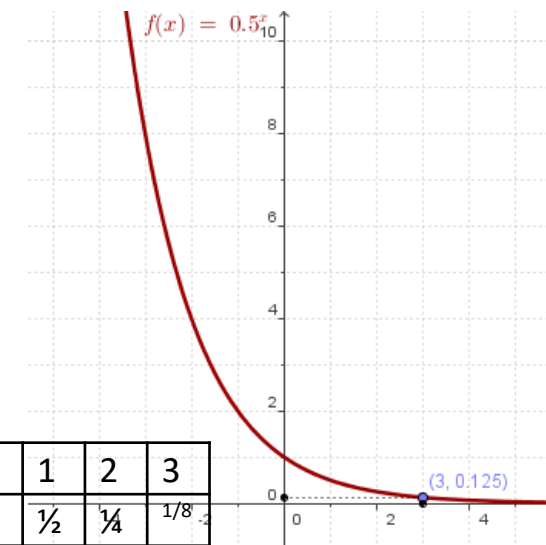


Ezaugarriak:

- $Dom f = \mathbb{R}$
- $Im f = (0, \infty)$
- $a^0 = 1$  denez,  $(0, 1)$  puntutik pasatu beti
- $a^1 = a$  denez,  $(1, a)$  puntutik pasatu beti
- $a > 1$  bada: gorakorra
- $0 < a < 1$  bada: beherakorra
- Asintota horizontala:  $y = 0$
- FUNTZIO ESPONENTZIAL ARRUNTENA:  $f(x) = e^x$

*e* zenbakia: **2.7182818285 ...**

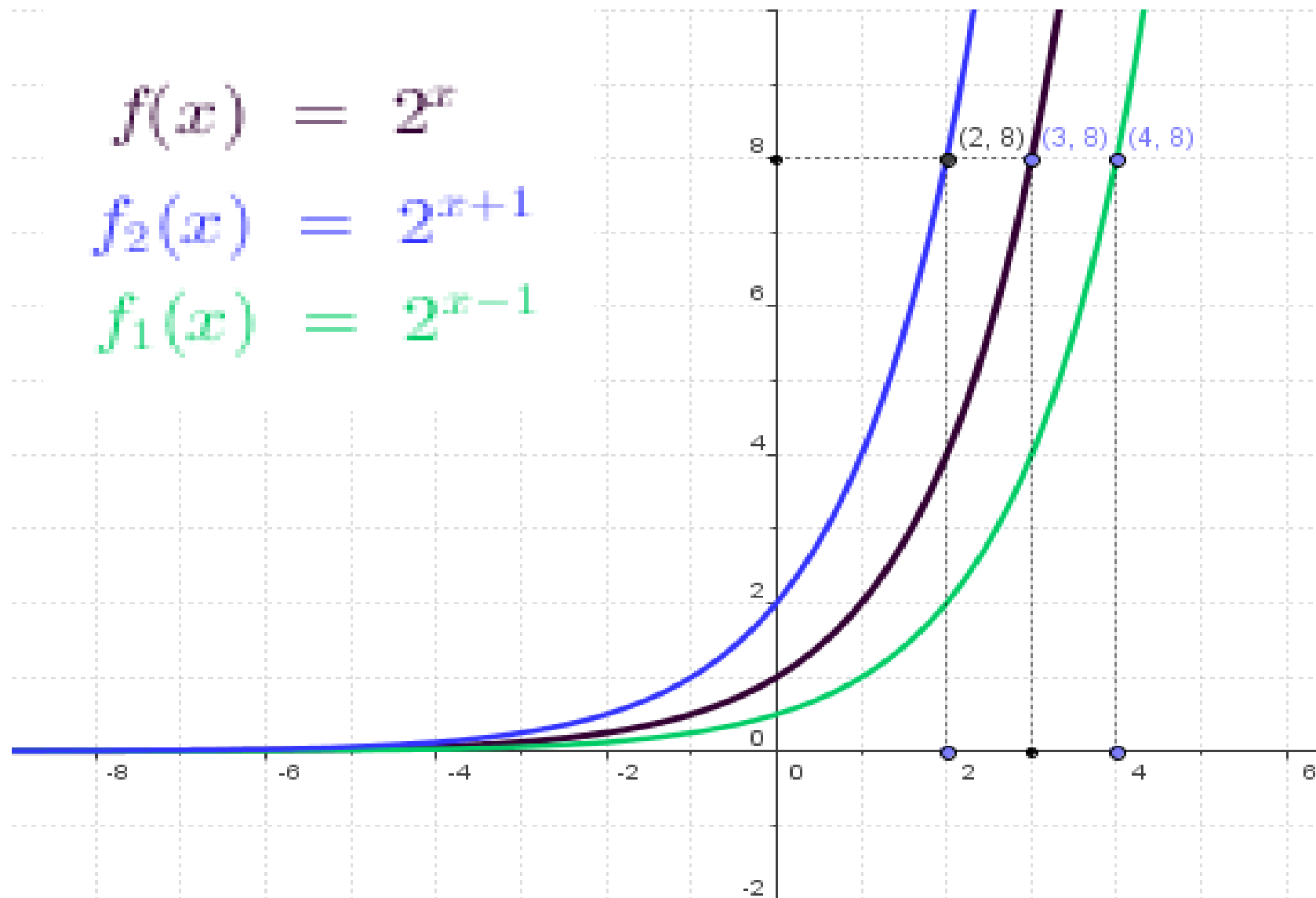
	X	-2	-1	0	1	2	3
	Y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



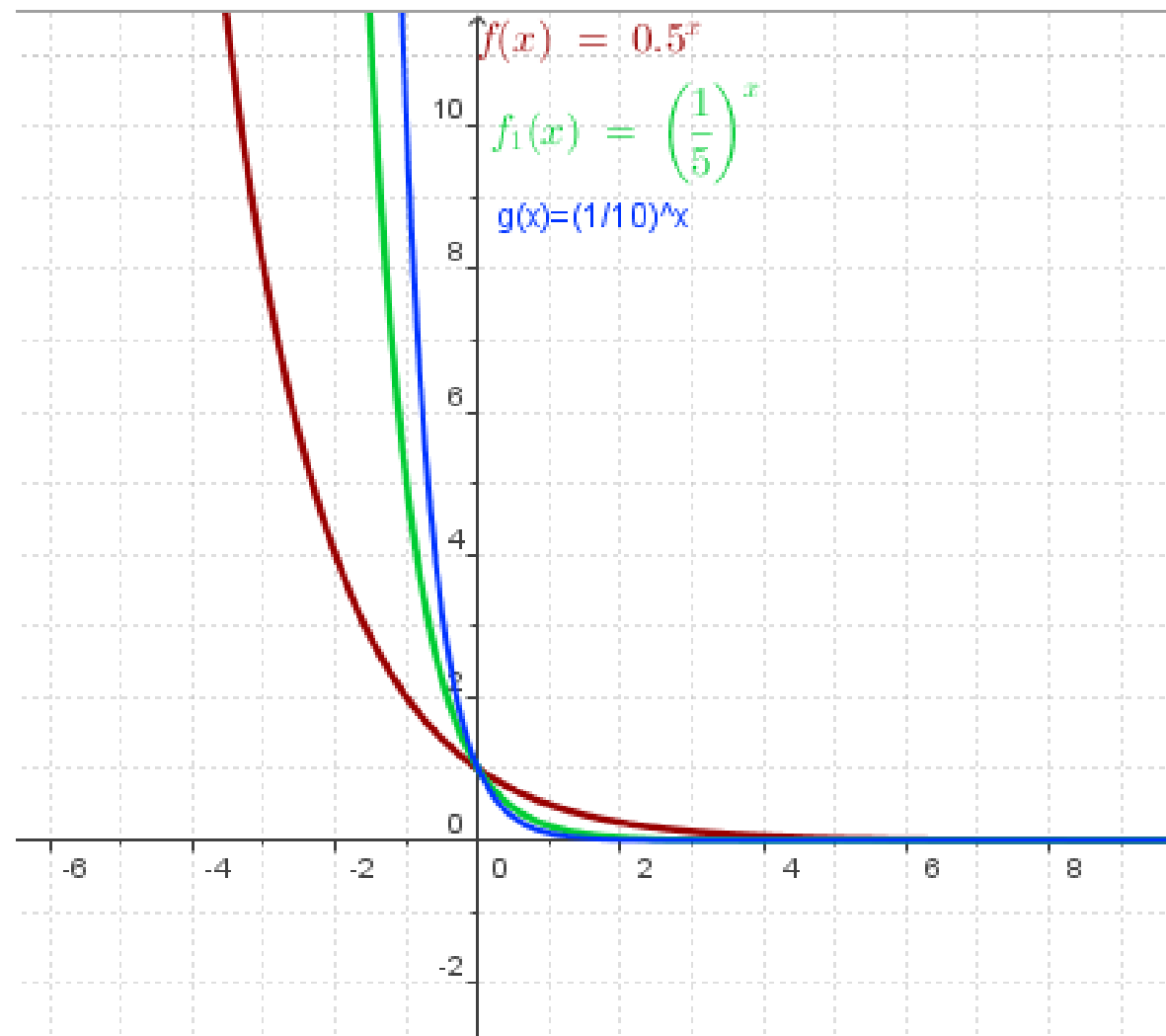
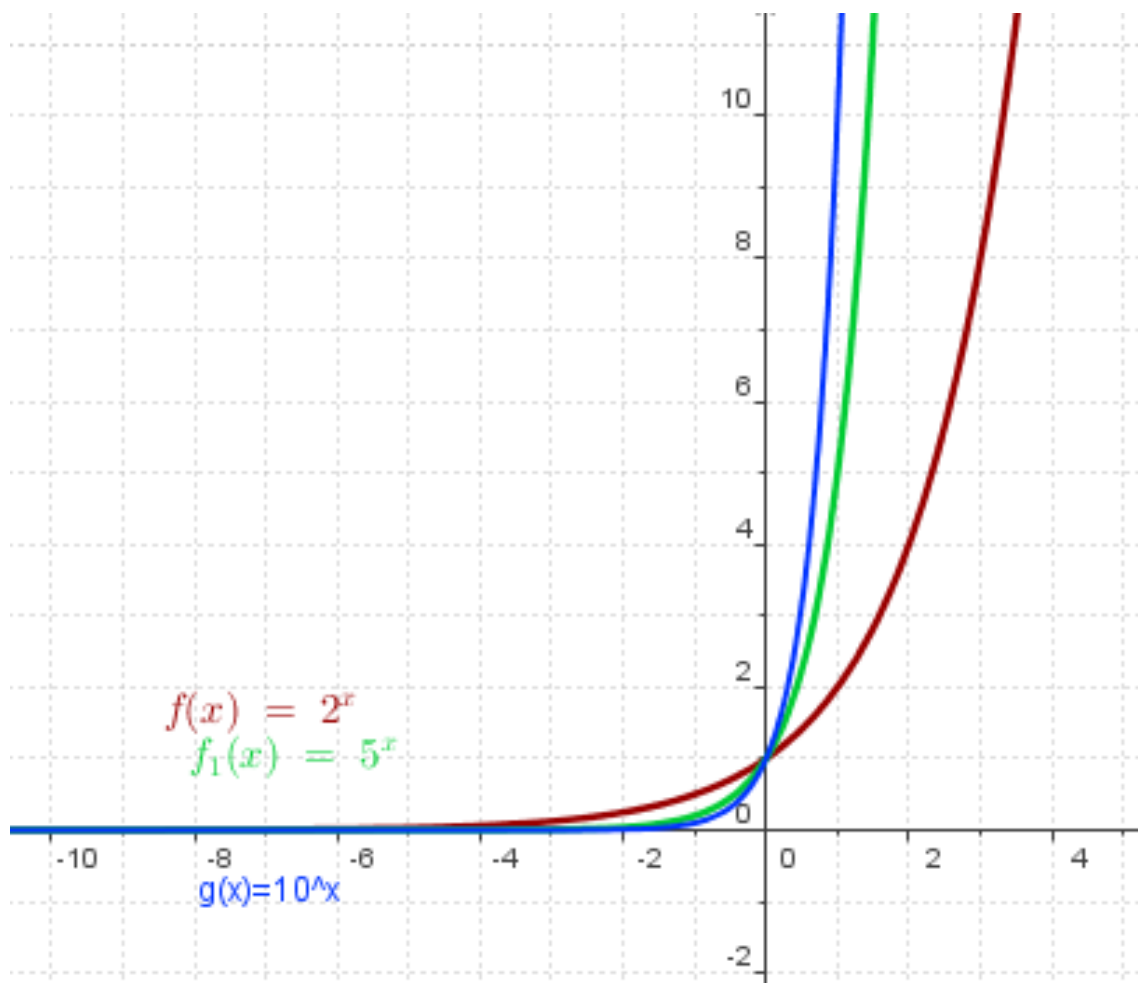
$$f(x) = 2^x$$

$$f_2(x) = 2^{x+1}$$

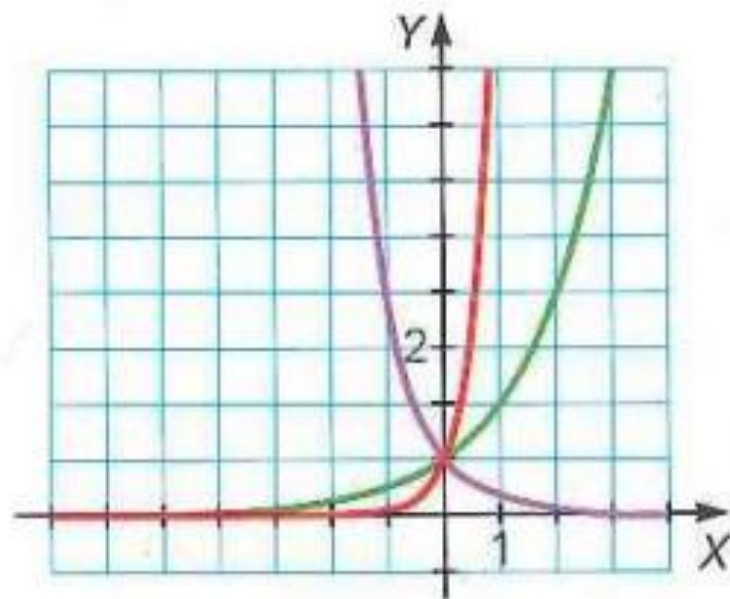
$$f_1(x) = 2^{x-1}$$



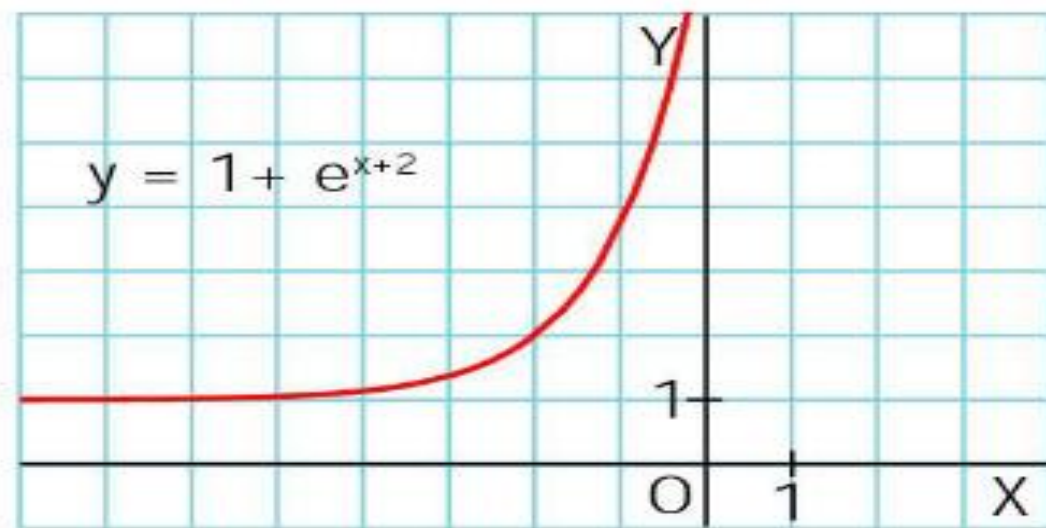
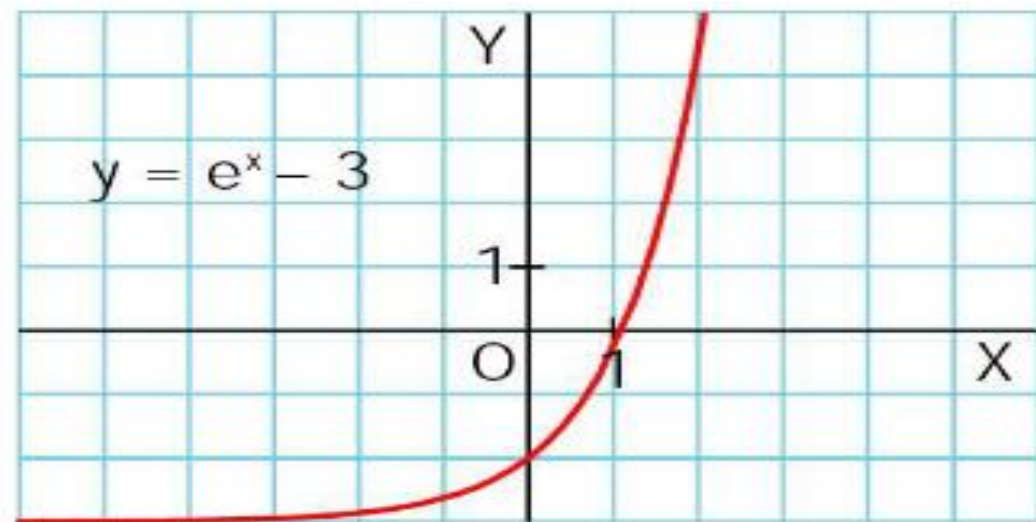
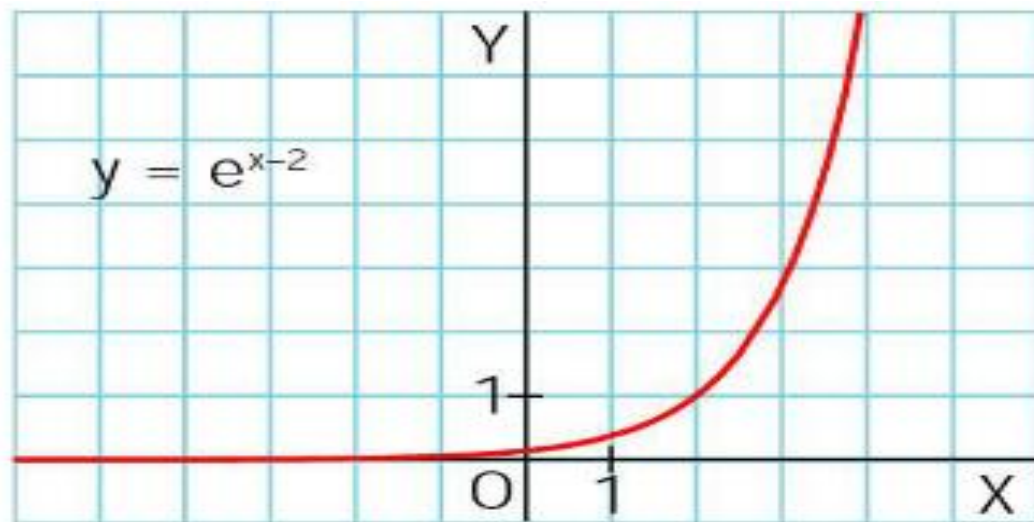




83. Lotu adierazpen grafiko bakoitza dagokion funtzioarekin.



a)  $f(x) = 12^x$       b)  $g(x) = 2^x$       c)  $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$



**84. Adierazi funtzio esponentzialen hiruko hauek koordenatu-ardatz beretan:**

a)  $f(x) = 2^x$

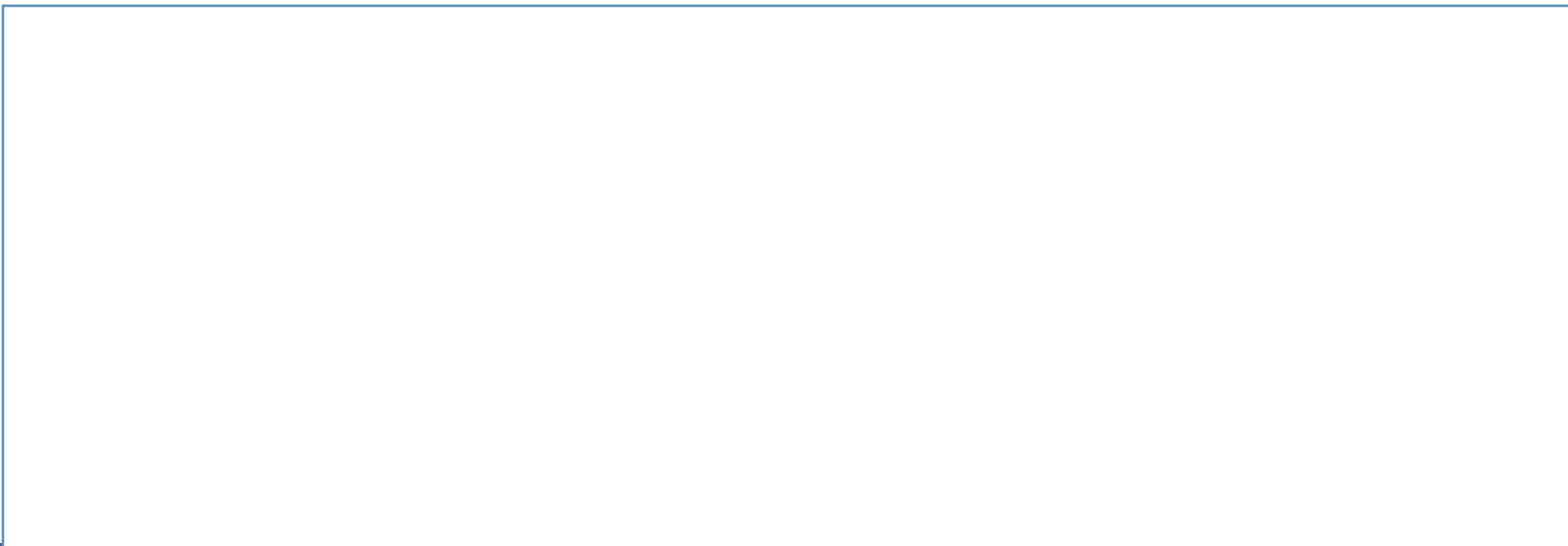
$$g(x) = 5^x$$

$$h(x) = 10^x$$

b)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

$$h(x) = 10^x$$



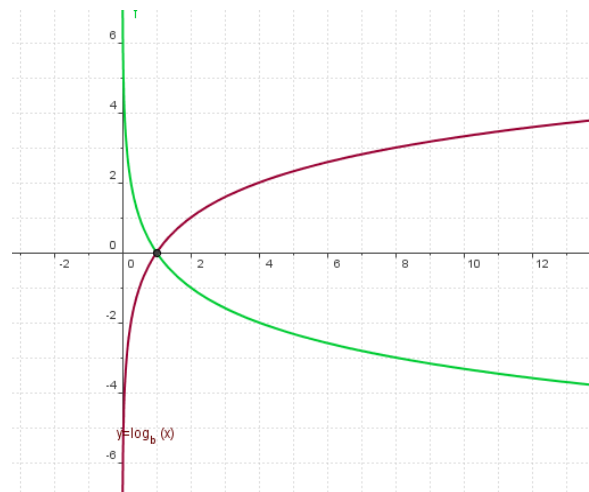
## 2. 5. FUNTZIO LOGARITMIKOAK

Funtzio logaritmikoak  $f(x) = \log_a$  motakoak dira non  $a > 0$  eta  $a \neq 1$

Gogoan izan:

Ezaugarriak:

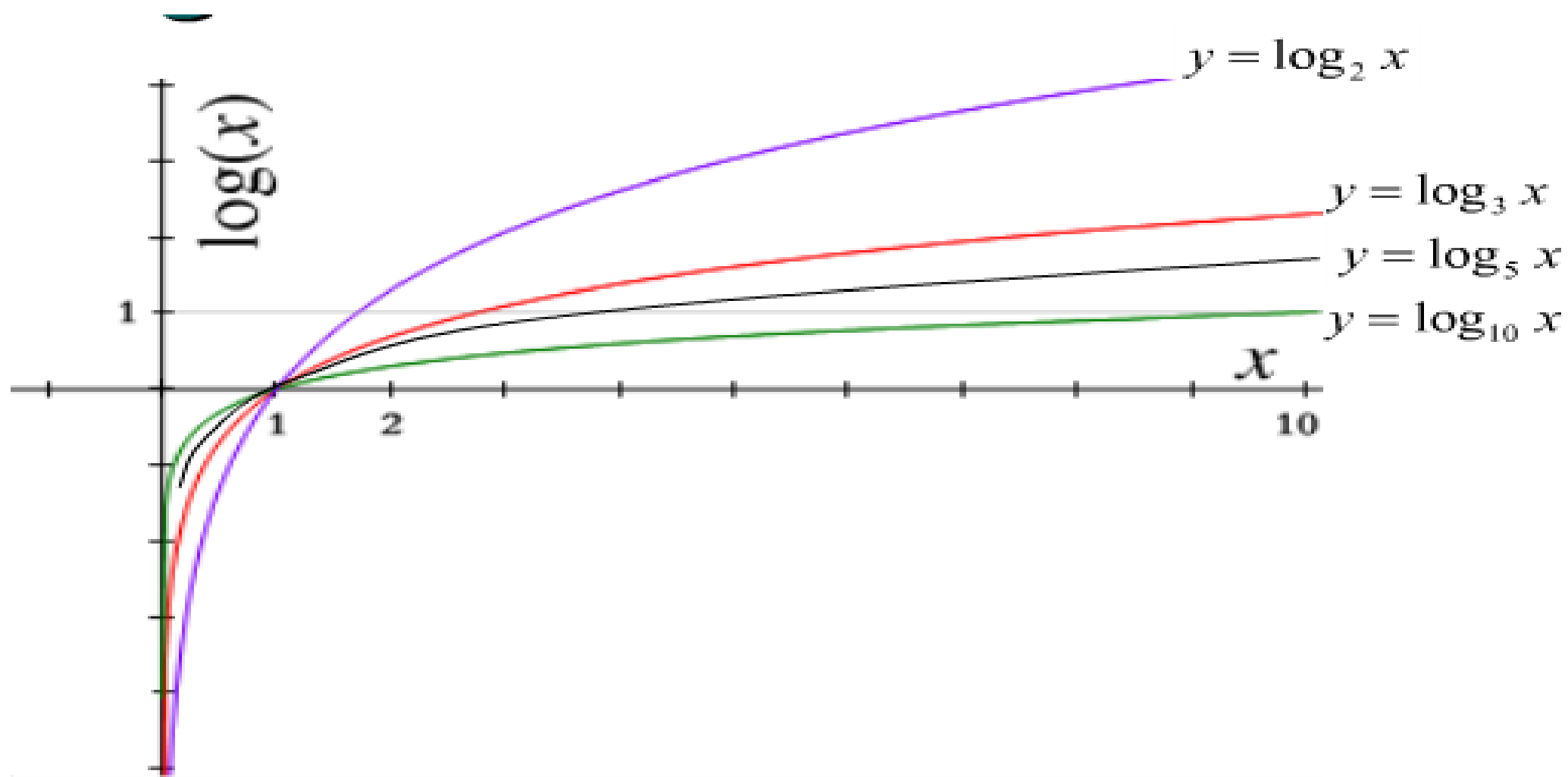
- $Dom f = (0, \infty)$
- $Im f = \mathbb{R}$
- $\log_a 1 = 0$  denez,  $(1, 0)$  puntutik pasatu beti
- $\log_a a = 1$  denez,  $(a, 1)$  puntutik pasatu beti
- $a > 1$  bada: gorakorra
- $0 < a < 1$  bada: beherakorra
- Asintota horizontala:  $x = 0$



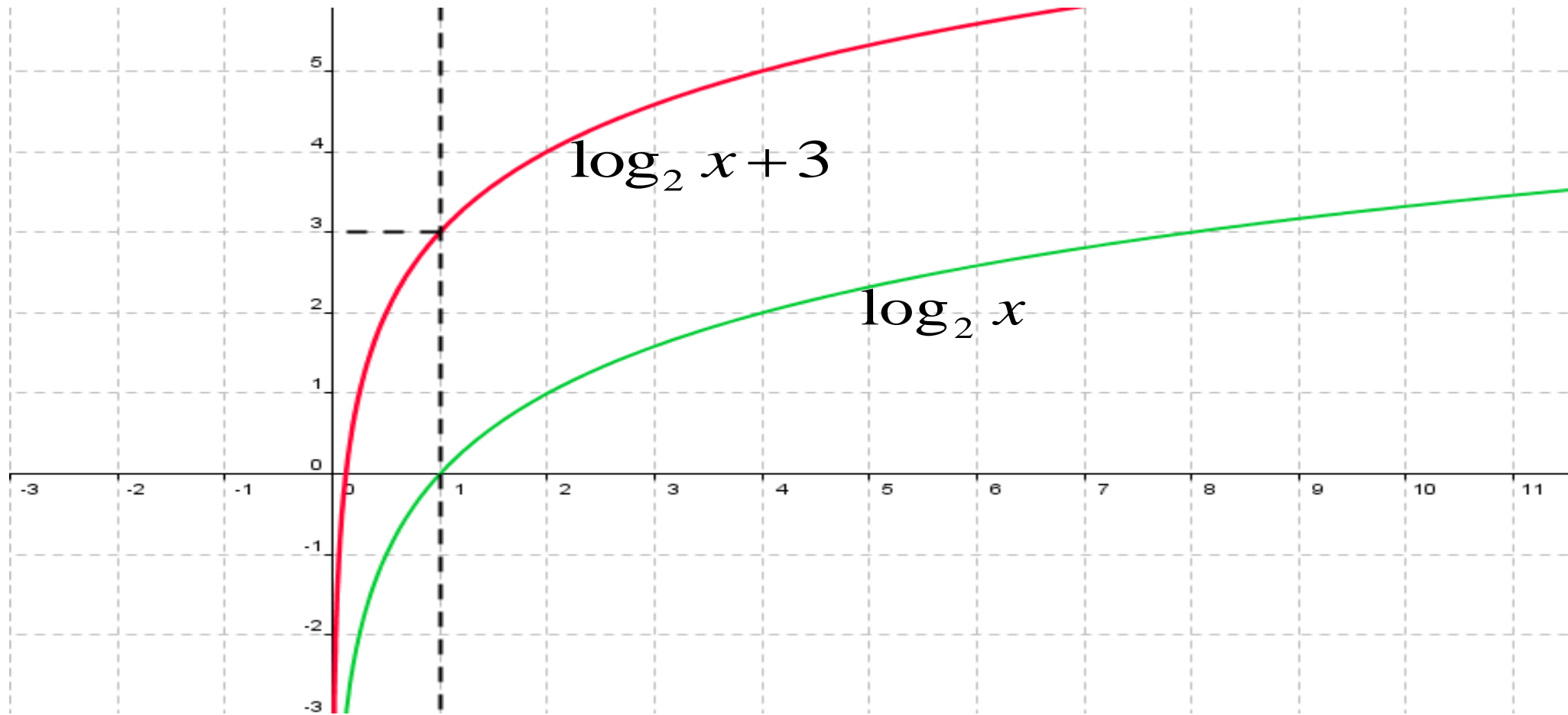
x	$y = \log_2 x$
1/8	-3
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

x	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
1/8	3
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3

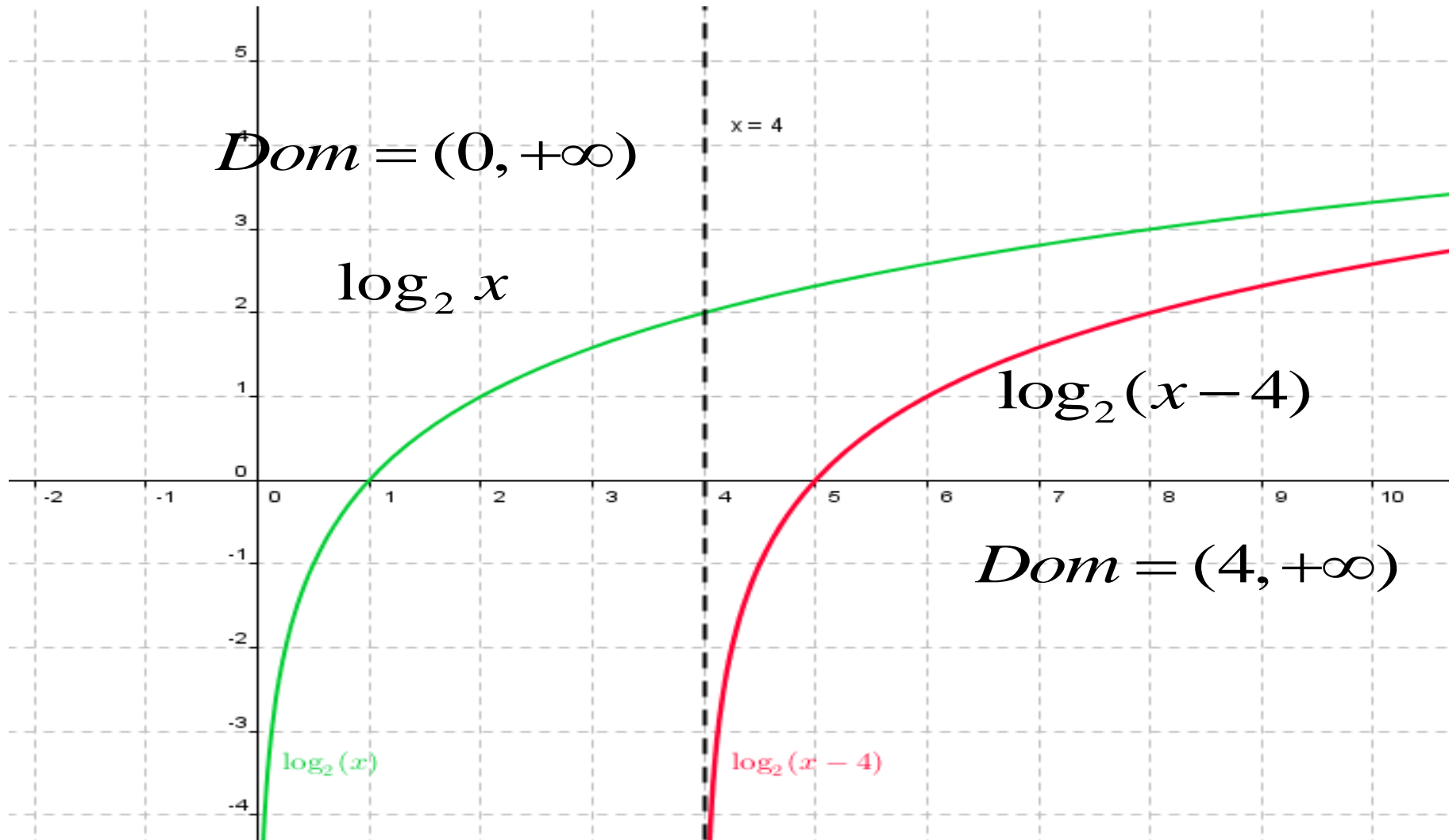
## 10. FUNTZIO LOGARITMIKOA



## 10 . FUNTZIO LOGARITMIKOA



## 10. FUNTZIO LOGARITMIKOA





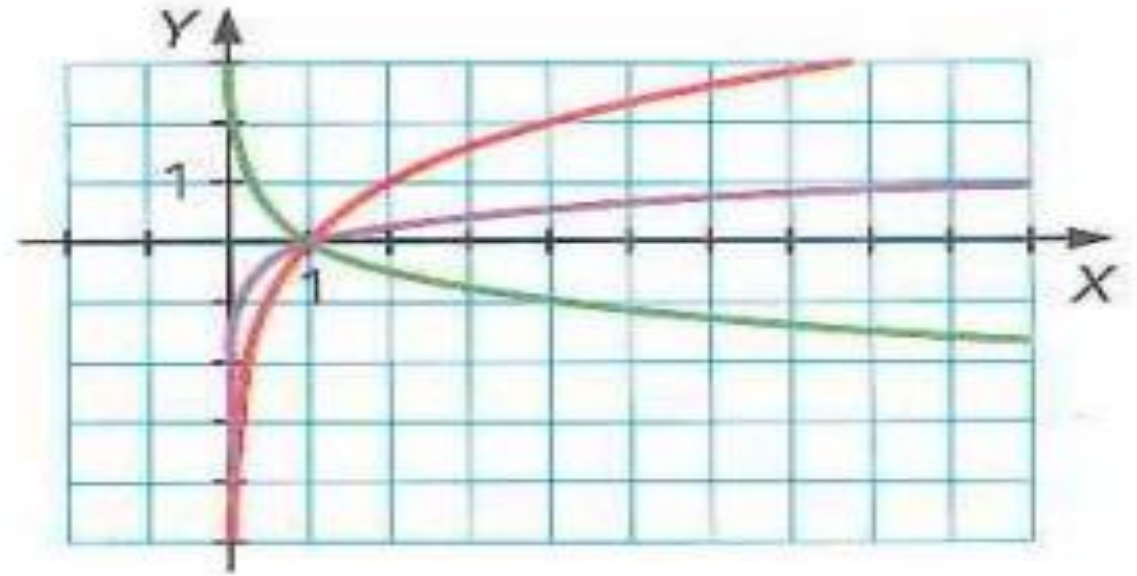
88.

Lotu grafiko bakoitza dagokion funtzioarekin.

a)  $f(x) = \log_{12} x$

b)  $g(x) = \log_2 x$

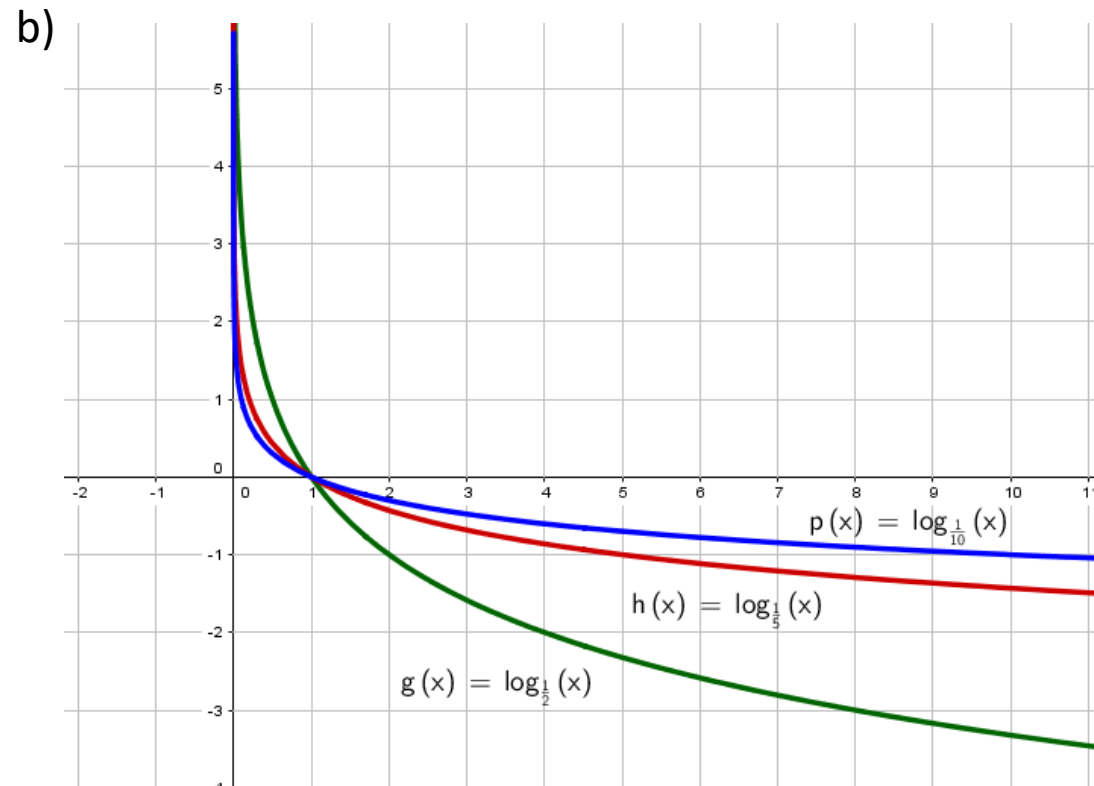
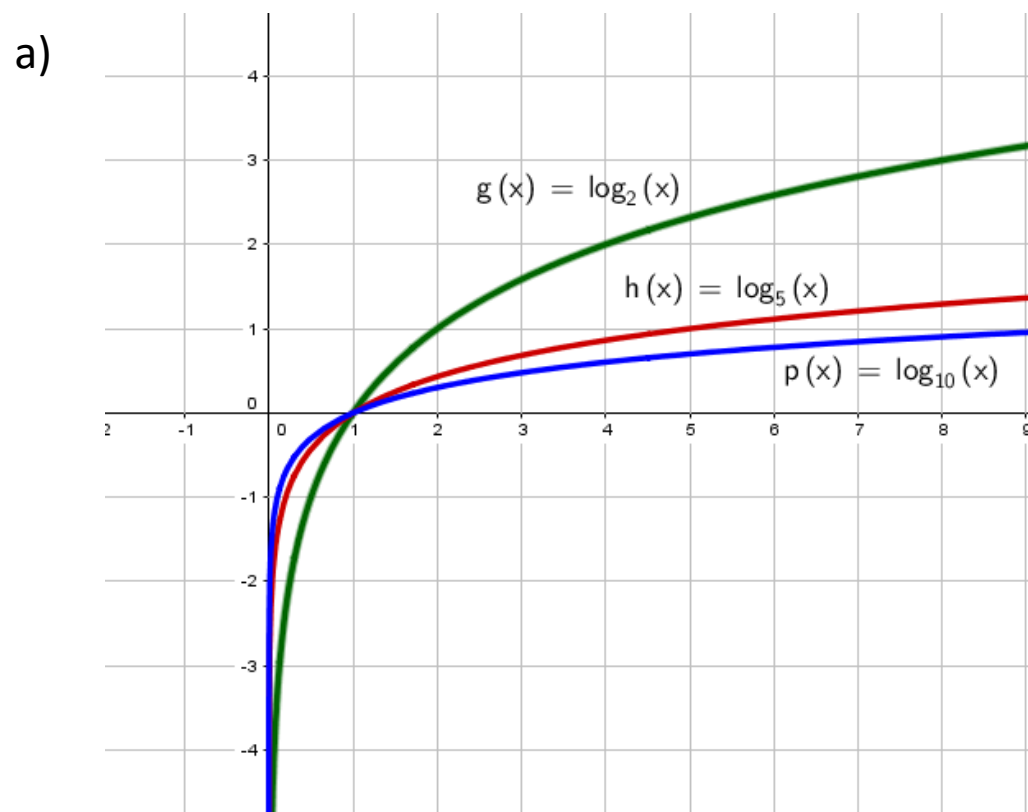
c)  $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



## 87. Adierazi funtzio logaritmikoen hiruko hauek koordenatu-ardatz beretan:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \log_2 x & g(x) = \log_5 x & h(x) = \log_{10} x \\ \text{b) } f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x & g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x & h(x) = \log_{\frac{1}{10}} x \end{array}$$

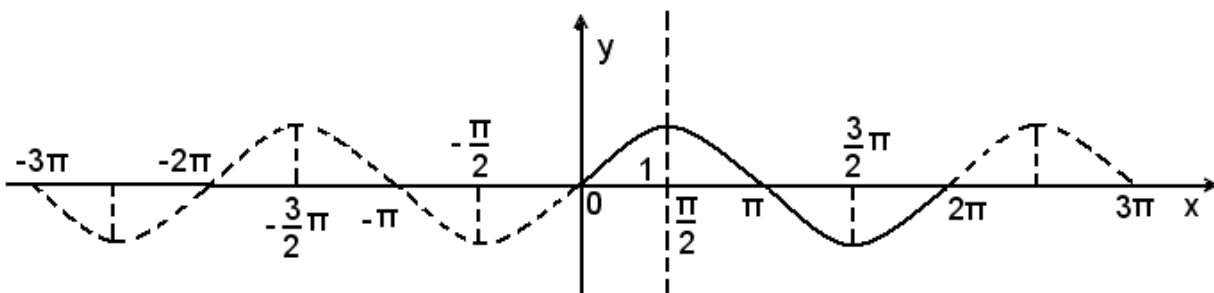
259.Orr 9-10



## 2. 6. FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

### 2. 6. 1. SINU ETA COSINU FUNTZIOAK

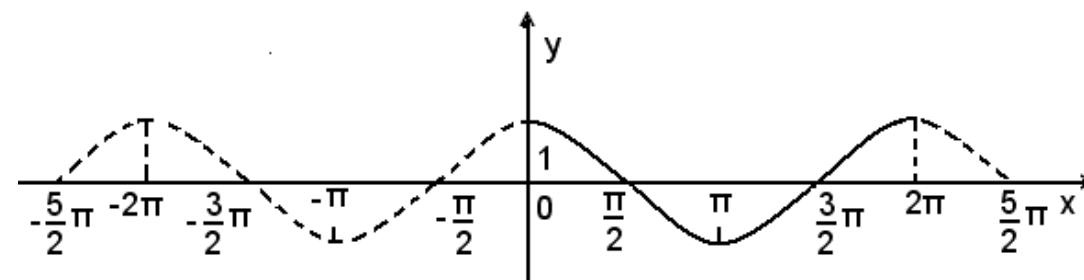
$$f(x) = \sin x$$



Ezaugarriak:

- $Dom f = \mathbb{R}$
- $Im f = [-1, 1]$
- Funtzio periodikoa da,  $2\pi$  periododuna
- $\sin(-x) = -\sin x \Rightarrow$  funtzio bakoitia (koordenatu-ardatzarekiko simetrikoa)

$$f(x) = \cos x$$



Ezaugarriak:

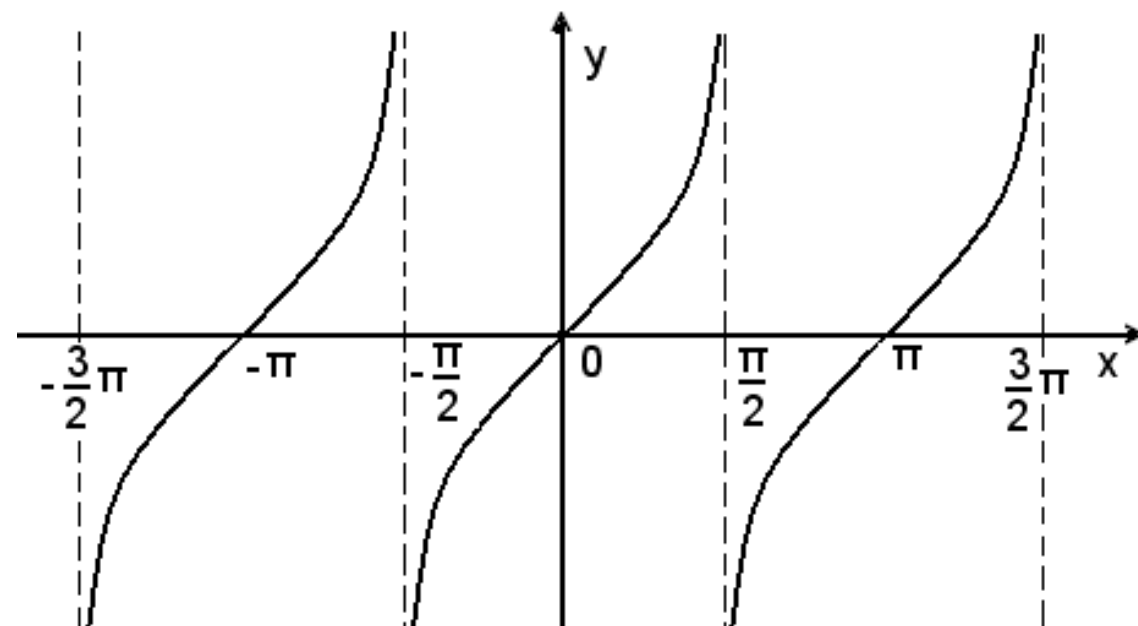
- $Dom f = \mathbb{R}$
- $Im f = [-1, 1]$
- Funtzio periodikoa da,  $2\pi$  periododuna
- $\cos(-x) = \cos x \Rightarrow$  funtzio bikoitia (Y ardatzarekiko simetrikoa)

## 2. 6. 2. TANGENTE FUNTZIOA

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

Ezaugarriak:

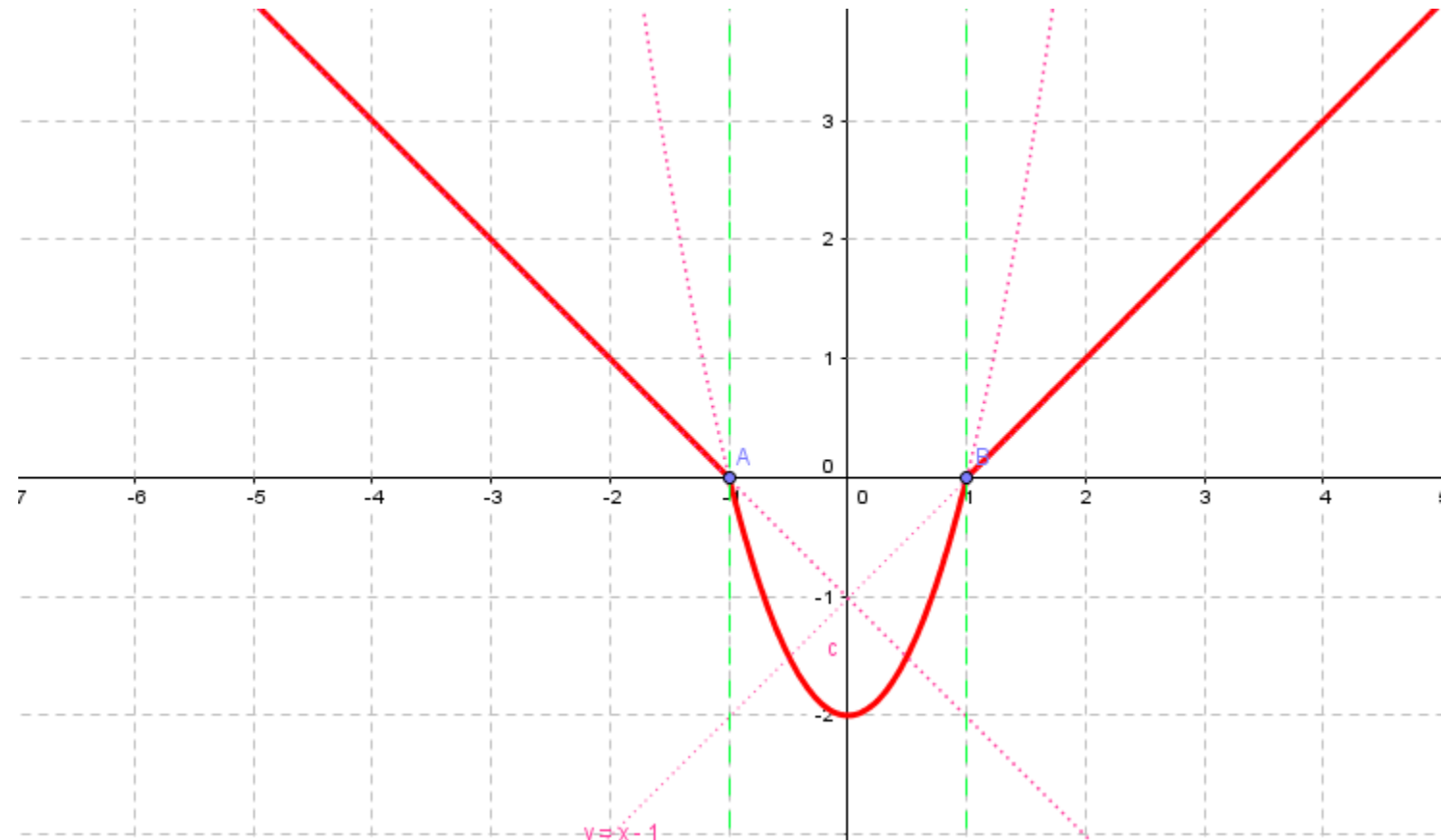
- $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$
- Funtzio periodikoa da,  $\pi$  periododuna
- $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \Rightarrow$  funtzio bakoitia (koordenatu-ardatzarekiko simetrikoa)



## 2. 7. ZATIKA DEFINITUTAKO FUNTZIOAK

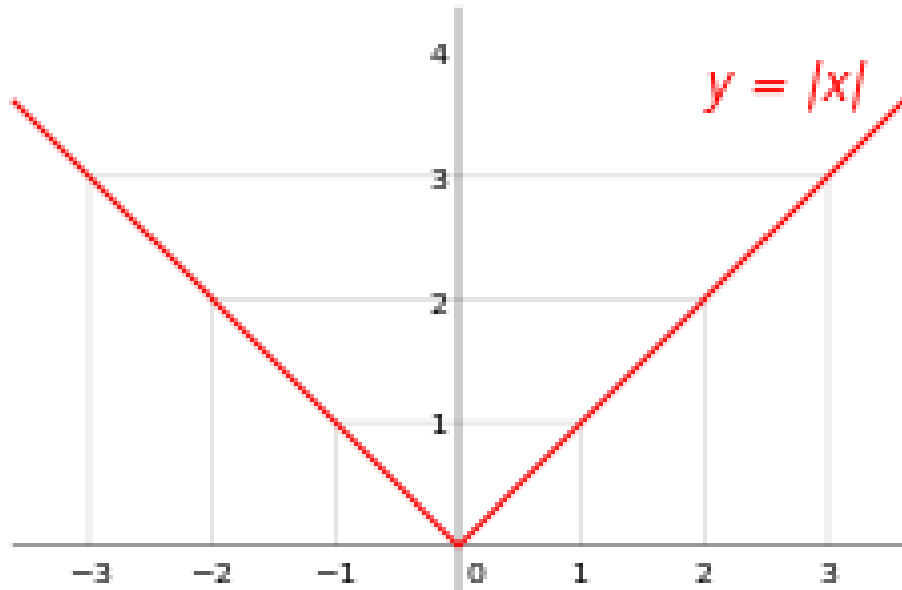
**Zatika definitutako funtzio** bat zenbait adierazpen aljebraiko dauzan funtzio bat da:  $x$  aldagai askea dagoan tartearen arabera, funtzio bat edo beste bat aplikatu behar da.

$$y = \begin{cases} -x - 1 & \text{baldin eta } x \leq -1 \text{ bada.} \\ 2x^2 - 2 & \text{baldin eta } -1 < x < 1 \text{ bada.} \\ x - 1 & \text{baldin eta } x \geq 1 \text{ bada.} \end{cases}$$



## 2.8 BALIO ABSOLUTUA

Zenbaki erreal bakoitzari haren balio absolutua egokitzen deuteson funtzioa da.



### GRAFIKOTIK ANALITIKO ERAN ADIERAZTEKO

1. Kalkulatu funtzioaren balioa 0 egiten daben puntuak.
2. Aztertu tarte bakoitzan funtzioak balio positiboak edo negatiboak hartzen dauazan.
3. Tarte negatiboetan funtzioa moldatu:

- Funtzioa **positiboa** dan tartean  **$f(x)$**  mantenduko da.
- Funtzioa **negatiboa** dan tartean  **$-f(x)$**  definituko da.

**268.Orr 16-17-18**