

# 8 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

Página 213

## Resuelve

### Piensa y encuentra límites

1 Utiliza tu sentido común para asignar valor a los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3; \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2; \lim_{x \rightarrow 2} x^3; \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 1}$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2 + 1}$

h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x + 5}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4; \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8; \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 5x^2 + 3) = -9$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2 + 1} = +\infty$

h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x + 5} = -\infty$

2 Tanteando con la calculadora, da el valor de estos límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) \cdot \ln(x - 3)$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

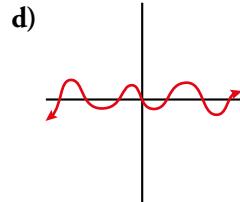
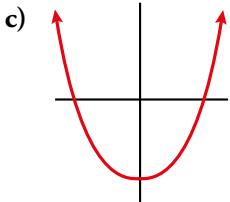
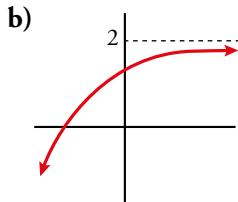
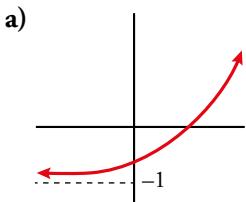
b)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) \cdot \ln(x - 3) = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = e^6 \approx 403,43$

# 1 ► IDEA GRÁFICA DE LOS LÍMITES DE FUNCIONES

Página 214

1 Describe mediante un límite cada una de las siguientes ramas:



a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  no existe;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  no existe

2 Asigna  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  a cada una de las siguientes funciones conocidas (dibuja esquemáticamente su gráfica):

a)  $f(x) = x^2$

b)  $f(x) = -x^2$

c)  $f(x) = x^3$

d)  $f(x) = -x^3$

e)  $f(x) = \operatorname{sen} x$

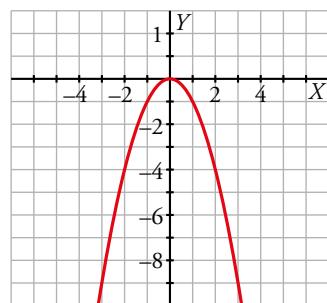
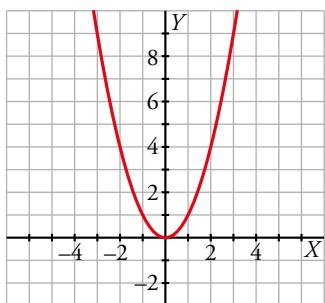
f)  $f(x) = \operatorname{tg} x$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$x \rightarrow +\infty f(x) = +\infty$

$x \rightarrow +\infty f(x) = -\infty$

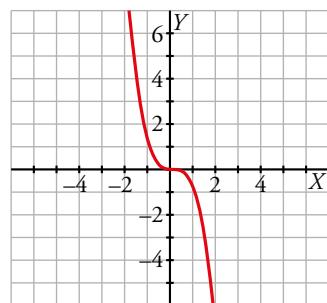
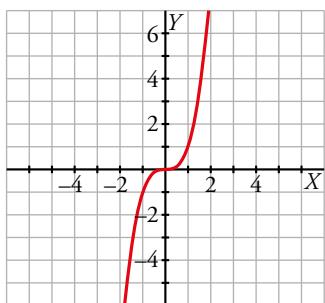


c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

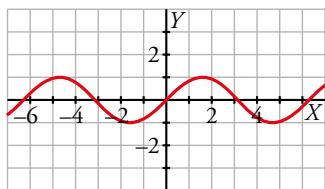
$x \rightarrow +\infty f(x) = +\infty$

$x \rightarrow +\infty f(x) = -\infty$



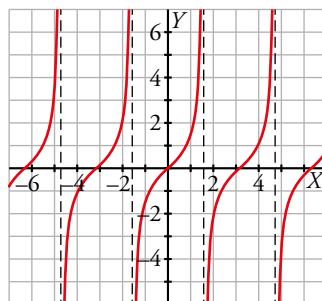
e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  no existe

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  = no existe



f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  no existe

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  = no existe



**3** **Piensa y comparte en pareja.** [El alumnado podrá compartir sus argumentos para trabajar esta estrategia].

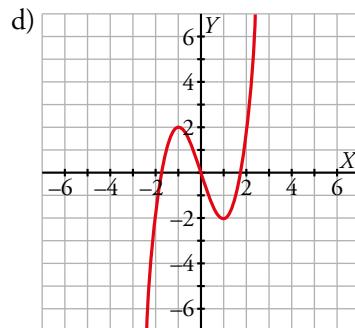
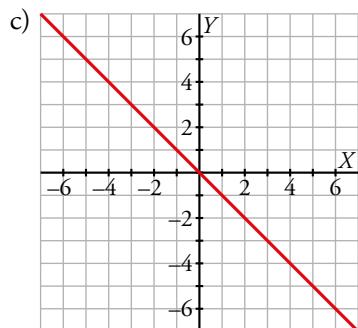
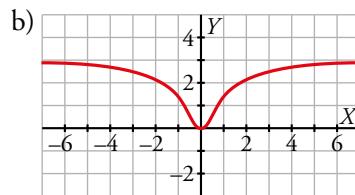
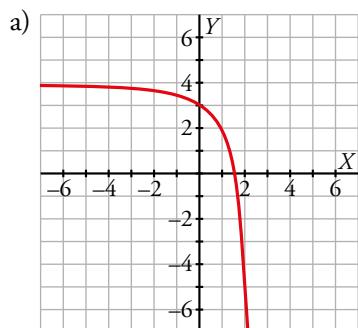
Dibuja, en cada caso, una función que cumpla:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

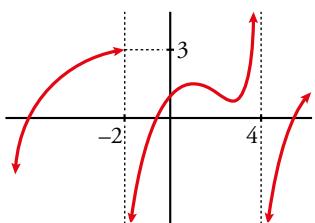
c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

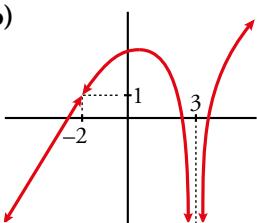


**4 Describe con límites las siguientes ramas:**

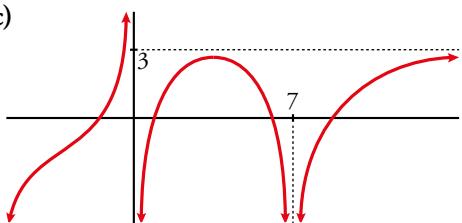
a)



b)



c)



a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 3$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

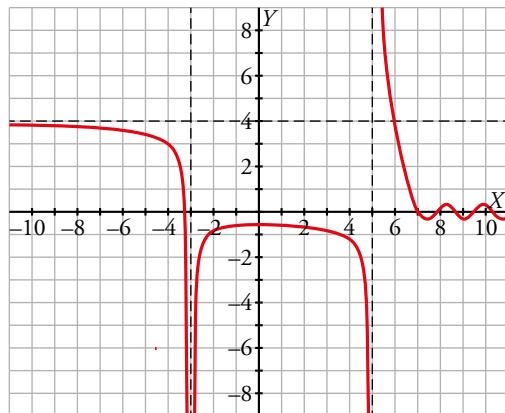
b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

**5 Representa una curva que cumpla las seis condiciones siguientes:**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$        $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$        $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty$        $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  no existe



## 2 ► UN POCO DE TEORÍA: APRENDAMOS A DEFINIR LOS LÍMITES

Página 216

- 1 Sabiendo que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-20}{x-100} = 3$ , aplica lo que acabamos de ver para calcular  $h$  en función de  $\varepsilon$ .

Averigua después para qué valor de  $h$  se verifica que «si  $x > h$ , entonces  $|f(x) - 3| < 0,01$ ».

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| < 0,01 &\rightarrow \left| \frac{3x-20}{x-100} - 3 \right| < 0,01 \rightarrow \left| \frac{3x-20 - 3x+300}{x-100} \right| < 0,01 \rightarrow \\ &\rightarrow \left| \frac{280}{x-100} \right| < 0,01 \stackrel{(*)}{\rightarrow} \frac{280}{x-100} < 0,01 \rightarrow \frac{280}{0,01} < x-100 \rightarrow x > 28100 \end{aligned}$$

(\*) Para valores grandes de  $x$ , la fracción es positiva y se puede quitar el valor absoluto.

El valor es  $h = 28100$ .

Página 217

- 2 Define, acompañado de un dibujo, los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

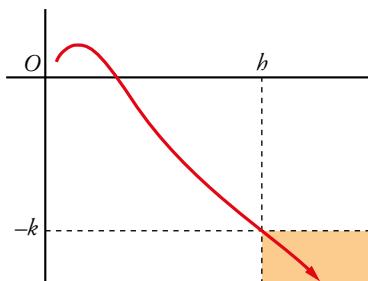
b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$

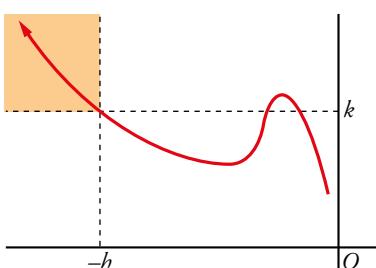
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Dado un número  $k$  (arbitrariamente grande), podemos encontrar otro número  $h$  (tan grande como sea necesario) tal que si  $x > h$ , entonces  $f(x) < -k$ .



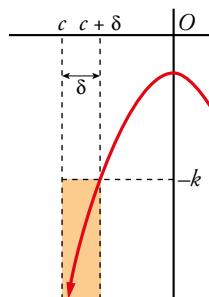
b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Dado un número  $k$  (arbitrariamente grande), podemos encontrar otro número  $h$  (tan grande como sea necesario) tal que si  $x < -h$ , entonces  $f(x) > k$ .



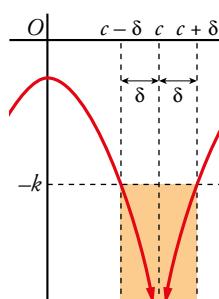
c)  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$

Dado un número  $k$  (arbitrariamente grande), podemos encontrar un número  $\delta > 0$  tal que si  $\delta < x < c + \delta$ , entonces  $f(x) < -k$ .



d)  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$

Dado un número  $k$  (arbitrariamente grande), podemos encontrar un número  $\delta > 0$  tal que si  $c - \delta < x < c + \delta$ , entonces  $f(x) < -k$ .



# 3 ► SENCILLAS OPERACIONES CON LÍMITES

Página 218

- 1** [La respuesta clara a las cuestiones planteadas requiere que el alumnado trabaje la destreza expresión escrita de esta clave].

Todas estas propiedades que acabamos de presentar son muy sencillas y razonables. Y se pueden enunciar en los siguientes términos:

**1. El límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus límites.**

Haz otro tanto con las propiedades 2 a 7 y reflexiona sobre las restricciones que se imponen en algunas de ellas, de modo que las veas razonables (por ejemplo: ¿por qué  $b \neq 0$  en la propiedad 4?, ¿por qué  $f(x) > 0$  en la propiedad 5?, ...).

2. El límite de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de sus límites.
3. El límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites.
4. El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador no sea 0 (para que no se produzca una división entre 0).
5. El límite de la potencia de dos funciones es igual a la potencia de sus límites, siempre que la base de la potencia sea positiva (para que tenga sentido la potencia de exponente real).
6. El límite de la raíz de una función es igual a la raíz de su límite. En el caso de que la potencia sea de índice par, además, la función debe ser no negativa (para que se pueda hallar dicha potencia).
7. El límite del logaritmo de una función es igual al logaritmo de su límite (para que tenga sentido el límite y el resultado, es necesario que tanto la función como su límite sean positivos).

Página 219

- 2 Si, cuando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) \rightarrow 4$ ,  $b(x) \rightarrow -\infty$ ,  $u(x) \rightarrow 0$ , asigna, siempre que puedas, límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  a las expresiones siguientes:**

- |                  |                  |                     |                      |                      |
|------------------|------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| a) $f(x) - b(x)$ | b) $f(x)^{f(x)}$ | c) $f(x) + b(x)$    | d) $f(x)^x$          | e) $f(x) \cdot b(x)$ |
| f) $u(x)^{u(x)}$ | g) $f(x)/b(x)$   | h) $[-b(x)]^{b(x)}$ | i) $g(x)^{b(x)}$     | j) $u(x)/b(x)$       |
| k) $f(x)/u(x)$   | l) $b(x)/u(x)$   | m) $g(x)/u(x)$      | n) $x + f(x)$        | ñ) $f(x)^{b(x)}$     |
| o) $x + b(x)$    | p) $b(x)^{b(x)}$ | q) $x^{-x}$         | r) $f^2(x) + b^2(x)$ | s) $f^2(x) - b^2(x)$ |

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - b(x)) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + b(x)) = (+\infty) + (-\infty) \rightarrow$  Indeterminación.

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot b(x)) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)^{u(x)} = (0)^{(0)} \rightarrow$  Indeterminación.

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{b(x)} = \frac{(+\infty)}{(-\infty)} \rightarrow$  Indeterminación.

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-b(x)]^{b(x)} = [+ \infty]^{-\infty} = 0$

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{h(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$

k)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{u(x)} = \frac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{u(x)} = \frac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{u(x)} = \frac{4}{(0)} = \pm\infty$

n)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(x)) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + h(x)) = (+\infty) + (-\infty) \rightarrow$  Indeterminación.

p)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \rightarrow$  No existe.

q)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{\infty^{\infty}} = 0$

r)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^2(x) + h^2(x)) = (+\infty)^2 + (-\infty)^2 = +\infty$

s)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^2(x) - h^2(x)) = (+\infty)^2 - (-\infty)^2 = (+\infty) - (+\infty) \rightarrow$  Indeterminación.

## 4 ▶ INDETERMINACIONES

Página 220

1 Para  $x \rightarrow 4$  se dan los siguientes resultados:

$$f(x) \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow 4, h(x) \rightarrow -\infty, u(x) \rightarrow 0$$

¿Cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones cuando  $x \rightarrow 4$ ? En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo y, si no lo es, di cuál es el límite:

a)  $f(x) + h(x)$

b)  $f(x)/h(x)$

c)  $f(x)^{-h(x)}$

d)  $f(x)^{h(x)}$

e)  $f(x)^{u(x)}$

f)  $u(x)^{h(x)}$

g)  $[g(x)/4]^{f(x)}$

h)  $g(x)^{f(x)}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} [f(x) + h(x)] = (+\infty) + (-\infty) \rightarrow$  Indeterminación.

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{+\infty}{-\infty} \rightarrow$  Indeterminación.

c)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

e)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{(0)} \rightarrow$  Indeterminación

f)  $\lim_{x \rightarrow 4} u(x)^{h(x)} = (0)^{(-\infty)} = \pm\infty$

g)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left[ \frac{g(x)}{4} \right]^{f(x)} = (1)^{(+\infty)} \rightarrow$  Indeterminación

h)  $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)^{f(x)} = (4)^{(+\infty)} = +\infty$

# 5 ▶ COMPARACIÓN DE INFINITOS

Página 221

- 1** Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos ( $\pm\infty$ ) cuando  $x \rightarrow +\infty$ :

a)  $3x^5 - \sqrt{x} + 1$

b)  $0,5^x$

c)  $-1,5^x$

d)  $\log_2 x$

e)  $\frac{1}{x^3 + 1}$

f)  $\sqrt{x}$

g)  $4^x$

h)  $4^{-x}$

i)  $-4^x$

Son infinitos cuando  $x \rightarrow +\infty$  las expresiones a), c), d), f), g) e i).

No lo son las expresiones b), e) y h).

- 2** a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

$$\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1,5^x \quad 4^x$$

- b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1,5^x}$$

a)  $4^x; 1,5^x; 3x^5; x^2; \sqrt{x}; \log_2 x$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1,5^x} = 0$$

# 6 ► CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \rightarrow +\infty$

Página 223

- 1**  **Rastreador de problemas.** [La resolución del ejercicio planteado se puede aprovechar para trabajar esta estrategia de pensamiento].

Sin operar, di el límite, cuando  $x \rightarrow +\infty$ , de las siguientes expresiones:

a)  $(x^2 - 3\sqrt[3]{2x+1})$

b)  $(x^2 - 2^x)$

c)  $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$

d)  $3^x - 2^x$

e)  $5^x - 3\sqrt[3]{x^8-2}$

f)  $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3\sqrt[3]{2x+1}) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}) = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x - 3\sqrt[3]{x^8-2}) = +\infty$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \log_5 x^4) = +\infty$

- 2** Calcula el límite, cuando  $x \rightarrow +\infty$ , de las siguientes expresiones:

a)  $\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}$

b)  $\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2}$

c)  $\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x}$

d)  $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e)  $2x - \sqrt{x^2+x}$

f)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^3+5)(x-2) - (4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 6x^3 + 5x - 10 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 - 14x^3 + x^2 + 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 - x}{4x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{4x^2+2} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 2x^2 + 4}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{2x} = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^2+x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - \sqrt{x^2+x})(2x + \sqrt{x^2+x})}{2x + \sqrt{x^2+x}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0 \end{aligned}$$

Página 224

**3** Halla los siguientes límites cuando  $x \rightarrow +\infty$ :

a)  $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x$

b)  $\left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}$

c)  $\left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{-5x}$

d)  $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5$

e)  $\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$

f)  $\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{-x}$

g)  $\left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x}$

h)  $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x}$

i)  $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-5x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{1/5} = e^{1/5}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x} = (5)^{(+\infty)} = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{-5x} = (5)^{(-\infty)} = 0$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5 = 1^5 = 1$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = e^5$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{-x} = e^{-5}$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x} = e^{(+\infty)} = +\infty$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x} = e^{-5}$

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-5x} = e^5$

**4** Calcula estos límites cuando  $x \rightarrow +\infty$ :

a)  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2}$

b)  $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x}$

c)  $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$

d)  $\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^5$

e)  $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}$

f)  $\left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2} = e^3$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-2} = e^{-2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{3/5} = e^{3/5}$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^5 = 1^5 = 1 \\ \text{e) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-3/2} = e^{-3/2} \\ \text{f) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x/2}\right)^{5x/2}\right]^2 = e^2 \end{aligned}$$

## Página 225

**5 Resuelve estos límites aplicando la regla anterior. Despues, resuelve tambien uno de ellos dando todos los pasos:**

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-1}$$

$$\text{a) Sea } l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{3x-1} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x-3) = +\infty$ ,  $l$  es del tipo  $(1)^{(+\infty)}$ .

Aplicando la regla:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}-1\right) \cdot (5x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{3x-1}\right) \cdot (5x-3)} = e^{10}$$

$$\text{b) Sea } l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-4}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-4) = +\infty$ ,  $l$  es del tipo  $(1)^{(+\infty)}$ .

Aplicando la regla:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-3x^2+2}{x^2+2}-1\right) \cdot (2x-4)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2-3x+2}{x^3+x^2}\right) \cdot (2x-4)} = e^{-2}$$

Resolución de los límites dando todos los pasos:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3} = (1)^{(+\infty)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6}{3x-1}\right)^{5x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{6}}\right)^{5x-3} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{6}}\right)^{\frac{3x-1}{6} \cdot \frac{6}{3x-1} \cdot (5x-3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{6}}\right)^{\frac{3x-1}{6}}\right]^{\frac{6}{3x-1} \cdot (5x-3)} = e^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2} \right)^{2x-1} = (1)^{(+\infty)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2} \right)^{2x-1} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x^3 + x^2}{-x^2 - 3x + 2}} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{x^3 + x^2}{-x^2 - 3x + 2}} \right)^{\frac{x^3 + x^2}{-x^2 - 3x + 2} \cdot \frac{-x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2} \cdot (2x-1)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{x^3 + x^2}{-x^2 - 3x + 2}} \right)^{\frac{x^3 + x^2}{-x^2 - 3x + 2}} \right]^{\frac{-x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2} \cdot (2x-1)} = e^{-2}
 \end{aligned}$$

# 7 ► CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \rightarrow -\infty$

Página 227

**1 Sin operar, di el límite cuando  $x \rightarrow -\infty$  de las siguientes expresiones:**

a)  $x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$

b)  $x^2 + 2^x$

c)  $x^2 - 2^x$

d)  $x^2 - 2^{-x}$

e)  $2^{-x} - 3^{-x}$

f)  $\sqrt{x^5 - 1} - 5^x$

g)  $2^x - x^2$

h)  $x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$

i)  $\sqrt[3]{x+2} - x^2$

j)  $3^{-x} - 2^{-x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sqrt[3]{2x+1}) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2^x) = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2^x) = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2^{-x}) = -\infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^{-x} - 3^{-x}) = -\infty$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^5 - 1} - 5^x)$  no existe

g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x - x^2) = -\infty$

h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) = -\infty$

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x+2} - x^2) = -\infty$

j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3^{-x} - 2^{-x}) = +\infty$

**2 Calcula el límite cuando  $x \rightarrow -\infty$  de las siguientes expresiones:**

a)  $\frac{3x^3 + 5}{x+2} - \frac{4x^3 - x}{x-2}$

b)  $\frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x}{2}$

c)  $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$

d)  $2x + \sqrt{x^2 + x}$

e)  $\sqrt{x^2 + 2x} + x$

f)  $\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$

g)  $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x+3}$

h)  $\left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x-1}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x^3 + 5}{x+2} - \frac{4x^3 - x}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-3x^3 + 5}{-x+2} - \frac{-4x^3 - x}{-x-2} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x^3}{2x^2 + 1} + \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + 2x^3 + x}{4x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4x^2 + 2} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + \sqrt{x^2 - x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-2x + \sqrt{x^2 - x})(-2x - \sqrt{x^2 - x})}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = -\infty$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{-x}\right)^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x/3}\right)^{-x/3}\right]^6 = e^6$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-5x+3} = e^{-5}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2}\right)^{-3x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2} - 1\right) \cdot (-3x-1)\right]} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x-3}{x^2+2} \cdot (-3x-1)\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+10x+3}{x^2+2}} = e^3$$

# 9 ► CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \rightarrow c$

Página 229

- 1  [El alumnado, por grupos, puede analizar los pasos a realizar para hacer el cálculo correctamente].

Halla los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+2x}{x-3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - \operatorname{sen} 2x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow -1} e^{3x+4}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+2x}{x-3} = -7$

b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 2$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - \operatorname{sen} 2x) = 3$

d)  $\lim_{x \rightarrow -1} e^{3x+4} = e$

- 2 Halla el límite cuando  $x \rightarrow 5$  de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, & x \leq 5 \\ x - 4, & x > 5 \end{cases}$

b)  $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 5 \\ \frac{(x-1)^2}{2}, & x \geq 5 \end{cases}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} (x^2 - 5x + 1) = 1$   
 $\lim_{x \rightarrow 5^+} (x - 4) = 1$

→ Los límites laterales coinciden y  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 1$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} (2^x) = 32$   
 $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-1)^2}{2} = 8$

→ Los límites laterales no coinciden y no existe  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ .

Página 230

- 3 Calcula los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - 3x + 5)}{(x+1)(x-7)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 5}{x-7} = \frac{9}{-8} = \frac{-9}{8}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$

- 4 Calcula los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}} = \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3 (x+3)^3}{x^4 (x+3)^2}} = \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3 (x+3)}{x^4}} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[4]{\frac{x(x-1)(x+1)}{(x+2)^2 (x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[4]{\frac{x(x+1)}{(x+2)^2 (x-1)}} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

**Página 231**

**5 Calcula:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 5x + 2}{x(x+2)} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x^2+1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 5x + 2) - (x + 2)(x^3 + 2x + 1)}{x(x+2)(x^2+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - x^4 - 2x^2 - x - 2x^3 - 4x - 2}{x(x+2)(x^2+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-7x^2 + x - 10)}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-7x^2 + x - 10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5 \end{aligned}$$

**6 Calcula:**  $\lim_{x \rightarrow 7} \left( \frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 7} \left( \frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}} = e^{\lim_{x \rightarrow 7} \left[ \left( \frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} - 1 \right) \cdot \frac{x+1}{x-7} \right]} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 7} \left( \frac{x^2 - 8x + 7}{x - 3} \cdot \frac{x+1}{x-7} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x-1)(x+1)}{(x-3)(x-7)}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)}} = e^{12} \end{aligned}$$

# 10 ► UNA POTENTE HERRAMIENTA PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES

Página 233

- 1  [El alumnado puede utilizar los ejercicios resueltos anteriores. Para aprovechar esta ayuda deberá trabajar la dimensión productiva].

Hallar los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{x \cos x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2^{1/x})x$

g)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3 - x)^{2/(x^2 - 4)}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5}$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 2x - 1} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x + 4}{6x + 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} + 1}{2x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{x \cos x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 + \cos x) + \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos x + x(-\operatorname{sen} x)} = 2$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

e) Para poner  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$  en forma de cociente, tomamos logaritmos en  $f(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\ln[f(x)]) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \ln(\cos x + \operatorname{sen} x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\operatorname{sen} x + \cos x) / (\cos x + \operatorname{sen} x)}{1} = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^1 = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2^{1/x})x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2^{1/x}}{1/x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2^{1/x} \cdot (-1/x^2) \cdot \ln 2}{(-1/x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2^{1/x}) \cdot \ln 2 = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2} \end{aligned}$$

g) Para poner  $\lim_{x \rightarrow 2} (3 - x)^{2/(x^2 - 4)}$  en forma de cociente, tomamos logaritmos en  $f(x) = (3 - x)^{2/(x^2 - 4)}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\ln[f(x)]) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(3 - x)}{x^2 - 4} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-2}{3-x}}{2x} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}}}{1} = \frac{10}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{5}{4}$$

# 11 ▶ CONTINUIDAD DE UN INTERVALO

Página 235

- 1 Encuentra cuatro intervalos distintos en cada uno de los cuales tenga una raíz la ecuación siguiente:**

$$2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$$

**Busca los intervalos entre -4 y 3. Comprueba que  $f(1,5) < 0$  y tenlo en cuenta.**

Consideramos la función  $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$ .

Tenemos que  $f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$  y que:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} f(-4) = 231 > 0 \\ f(-3) = -7 < 0 \end{array} \right\} \text{Hay una raíz en } (-4, -3). \\ \left. \begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array} \right\} \text{Hay una raíz en } (0, 1). \\ \left. \begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f(1,5) = -1,375 < 0 \end{array} \right\} \text{Hay una raíz en } (1; 1,5). \\ \left. \begin{array}{l} f(1,5) = -1,375 < 0 \\ f(2) = 3 > 0 \end{array} \right\} \text{Hay una raíz en } (1,5; 2). \end{array}$$

- 2 Comprueba que las funciones  $e^x + e^{-x} - 1$  y  $e^x - e^{-x}$  se cortan en algún punto.**

Consideramos la función diferencia:

$$F(x) = e^x + e^{-x} - 1 - (e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} - 1 - e^x + e^{-x} = 2e^{-x} - 1$$

$F(x)$  es una función continua. Además:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -0,26 < 0 \end{array} \right\} \text{signo de } F(0) \neq \text{signo de } F(1).$$

Por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0, 1)$  tal que  $F(c) = 0$ ; es decir, existe  $c \in (0, 1)$  tal que las dos funciones se cortan en ese punto.

- 3 Justifica cuáles de las siguientes funciones tienen máximo y mínimo absoluto en el intervalo correspondiente:**

a)  $x^2 - 1$  en  $[-1, 1]$

b)  $x^2$  en  $[-3, 4]$

c)  $\frac{1}{x-1}$  en  $[2, 5]$

d)  $\frac{1}{x-1}$  en  $[0, 2]$

e)  $\frac{1}{1+x^2}$  en  $[-5, 10]$

f)  $e^{-x}$  en  $[0, 1]$

a)  $f(x) = x^2 - 1$  es continua en  $[-1, 1]$ . Por el teorema de Weierstrass, podemos asegurar que tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

b)  $f(x) = x^2$  es continua en  $[-3, 4]$ . Por tanto, también tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

c)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  es continua en  $[2, 5]$ . Por tanto, tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

d)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  no es continua en  $[0, 2]$ , pues es discontinua en  $x = 1$ . No podemos asegurar que tenga máximo y mínimo absolutos en ese intervalo. De hecho, no tiene ni máximo ni mínimo absolutos puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

e)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  es continua en  $[-5, 10]$ . Por tanto, tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

f) La función  $f(x) = e^{-x}$  es continua en  $\mathbb{R}$ , luego lo es en el intervalo  $[0, 1]$ . Por tanto, por el teorema de Weierstrass, alcanza su máximo y mínimo absolutos en dicho intervalo.

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 236

### 1. Operaciones con límites

#### Hazlo tú

- Siendo  $f$ ,  $g$ ,  $b$ ,  $u$  y  $v$  las funciones anteriores, calcula el límite de estas funciones cuando  $x \rightarrow +\infty$ :

a)  $v(x)^{u(x)}$       b)  $u(x)^{g(x)}$       c)  $g(x) \cdot u(x)$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)^{u(x)} = (0,4)^{(+\infty)} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)^{g(x)} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) \cdot u(x)] = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

### 3. Comparación de infinitos

#### Hazlo tú

- Asigna límite para  $x \rightarrow +\infty$  para cada una de estas expresiones:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{10x^2 - 5}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^5 - 1}}{10x^2 - 5}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{10x^2 - 5} = +\infty$  porque cualquier función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a cualquier potencia.

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^5 - 1}}{10x^2 - 5} = +\infty$  porque el numerador tiene mayor grado que el denominador.

Página 237

### 4. Cálculo de límites

#### Hazlo tú

- Calcula los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{1-3x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x-3}-1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+2}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{(+\infty)} = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{1-3x} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

c)  $\frac{(0)}{(0)}$  Indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x-3}-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}}}{\frac{1}{\sqrt{2x-3}}} = \frac{1}{4}$$

d)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{x+2}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}} = (1)^{(\infty)}$  Indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{x+2}{6} - 1 \right) \frac{1}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{x-4}{6} \frac{1}{x-4} \right) = \frac{1}{6}$$

Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{x+2}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}} = e^{1/6}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)}$  Indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{-x + 1} = +\infty \quad (\text{cuando } x \rightarrow -\infty, x - 1 < 0).$$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)}$  Indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{e^{-x}}{e^x}}{1 - \frac{e^{-x}}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

Página 238

## 5. Regla de L'Hôpital

### Hazlo tú

- Cálcula estos límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x - 1} \right)$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)} &= \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos 3x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3x}{2\sin 2x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos 3x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \cdot \cos 3x}{4 \cdot \cos 2x} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2} = (1)^{(\infty)}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (\cos 2x - 1) \cdot \frac{3}{x^2} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\cos 2x - 1)}{x^2} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(-2\sin 2x)}{2x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-12 \cdot \cos 2x}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \end{aligned}$$

Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2} \cdot 2 = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x - 1} \right) = (\infty) - (\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ex - e^x}{(e^x - 3)(x - 1)} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{e^x(x - 1) + e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{e^x(x - e)} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^x}{e^x(x + e)} = -\frac{e}{2e} = -\frac{1}{2}$$

## 6. Continuidad en un punto

### Hazlo tú

- Estudia la continuidad de la función  $f(x)$  y clasifica sus discontinuidades.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para  $x < 0$ ,  $f(x) = x^2 + \frac{x}{-x} = x^2 - 1$  es una función continua.

Para  $x > 0$ ,  $f(x) = x^2 + \frac{x}{x} = x^2 + 1$  es una función continua.

Estudiamos la continuidad en  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe el límite porque los límites laterales son distintos.}$$

$$f(0) = 1$$

La función presenta en  $x = 0$  una discontinuidad inevitable de salto finito.

## Página 239

## 7. Función continua dependiendo de parámetros

### Hazlo tú

- Determina los valores de  $a$  y de  $b$  para los que  $f(x)$  es continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{si } -\infty < x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(ax) & \text{si } 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \text{si } \pi \leq x < +\infty \end{cases}$$

Si  $x \neq 0$  y  $x \neq \pi$ , la función es continua porque las funciones que intervienen lo son.

Comprobamos la continuidad en  $x = 0$  y en  $x = \pi$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}(ax) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Para que sea continua en } x = 0 \text{ debe ser } b = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(\pi) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \operatorname{sen}(ax) = \operatorname{sen}(a\pi) \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} [(x - \pi)^2 + 1] = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Para que sea continua en } x = \pi \text{ debe ser } \operatorname{sen}(a\pi) = 1.$$

$$\operatorname{sen}(a\pi) = 1 \rightarrow a\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \rightarrow a = \frac{1}{2} + 2k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Si  $a = \frac{1}{2} + 2k$  con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $b = 0$ , la función es continua en  $\mathbb{R}$ .

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 240

### 1. Cálculo de límites

- Calcular los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right)^{25}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^3)^{2/x^3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right)^{25} = \left( \frac{(-\infty)}{(+\infty)} \right)^{25}$  Indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right)^{25} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[3]{-8x^3}}{2x} \right)^{25} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-2x}{2x} \right)^{25} = (-1)^{25} = -1$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^3)^{2/x^3} = (1)^{(\infty)}$

Aplicamos la regla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^3-1) \cdot \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^3}{x^3} = 8$$

Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^3)^{2/x^3} = e^8$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} = (+\infty)^{(0)}$  Indeterminación.

Tomamos logaritmos:

$$\begin{aligned} \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\operatorname{tg} x [-\ln(x^2)]] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\operatorname{tg} x \ln x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \ln x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-2}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4\operatorname{sen} x \cos x}{1} = 0 \end{aligned}$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$

### 2. Límite finito

- Calcular el valor de  $a$  para que el siguiente límite sea finito y obtener ese límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right) = (\infty) - (\infty)$$
 Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - ae^x + a}{(e^x - 1)2x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - ae^x}{e^x 2x + (e^x - 1)2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - ae^x}{e^x 2x + 2e^x - 2}$$

Como el denominador tiende a 0, para poder seguir resolviendo el límite, el numerador también debe tender a 0 y, por tanto,  $a = 2$ .

Continuamos con  $a = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2e^x}{e^x 2x + 2e^x - 1} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^x}{e^x 2x + e^x 2 + 2e^x} = -\frac{1}{2}$$

### 3. Continuidad en un punto

- Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x^2-2)/x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) ¿Existe algún valor de  $k$  para el cual  $f(x)$  sea continua?  
 b) Hallar el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  de la función.

a) Veamos la continuidad en  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{x^2-2}{x}} = e^{(+\infty)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$$

No existe ningún valor de  $k$  ya que los límites laterales en el punto  $x = 0$  no existen.

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2-2}{x}} = e^{(-\infty)} = 0$$

### 4. Teorema de Bolzano

- Demostrar que la ecuación:  $\operatorname{sen} x^2 = x - 1$  tiene una solución positiva.

Razonar la respuesta, exponiendo el teorema o resultado que justifique la solución.

$F(x) = \operatorname{sen} x^2 - x + 1$  es continua por ser suma y resta de funciones continuas.

$$F(0) = \operatorname{sen} 0 - 0 + 1 = 1$$

$$F(\pi) = \operatorname{sen} \pi^2 - \pi + 1 = -2,57$$

Por el teorema de Bolzano sabemos que existe  $c \in (0, \pi)$  tal que  $F(c) = 0$ .

Hemos visto que  $c$  es solución de la ecuación del enunciado. Además, es positiva ya que pertenece a un intervalo donde todos los valores son positivos.

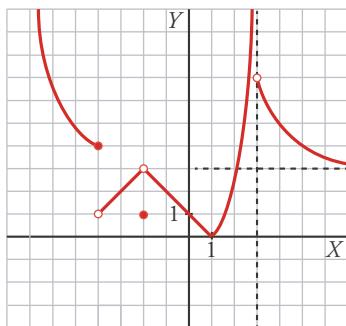
## EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 241

### Para practicar

#### Cálculo de límites

1 Observando la gráfica de  $f(x)$ , di el valor de los siguientes límites:



a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

g)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

h)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

a)  $+\infty$

b) 4

c) 1

d) No existe

e) 3

f) 0

g)  $+\infty$

h) 7

i)  $3^+$

2 Halla los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-3}{4}x^3 + 2x^2 - 1 \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^4 - 3x^2}{x^2 + 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{5 + x^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 3x + 2}{x^6 + 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 3}}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 - 2x}}{x + 3\sqrt{x}}$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-3}{4}x^3 + 2x^2 - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{4}x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{4} \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^4 - 3x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2) = -2 \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{5 + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 3x + 2}{x^6 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4}{x^6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = \frac{5}{(+\infty)} = 0$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{1}{(+\infty)} = 0$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 - 2x}}{x + 3\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

**3 Calcula estos límites:**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7})$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}) = +\infty$

**4 Calcula el límite de estas funciones cuando  $x \rightarrow +\infty$ :**

a)  $f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2}$

b)  $g(x) = \frac{x + \log x}{\log x}$

c)  $b(x) = \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}}$

d)  $i(x) = \frac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

e)  $j(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 + 1}}$

f)  $k(x) = \frac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 - 3}}$

g)  $l(x) = 2^x - 3^x$

h)  $m(x) = \frac{x^2}{x - 3} - \frac{x^2}{5 - x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{5}{4}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \log x}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{\log x} + 1 \right) = +\infty + 1 = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = 3$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^3}} = +\infty$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 - 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{4x^2}} = 1$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - 3^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3^x = -\infty$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x - 3} - \frac{x^2}{5 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - x^3 - x^3 + 3x^2}{(x - 3)(5 - x)} = -\infty$

**5 Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:**

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,5^x + 1)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x+1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

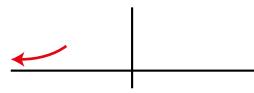
d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{1-3x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,5^x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (0,5^{-x} + 1) = +\infty$



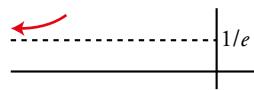
b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x+1} = 0$

Sabemos que  $2^{x+1} > 0$  para cualquier  $x$ .



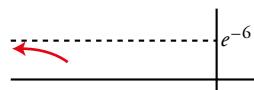
c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Comprobamos que  $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x > \frac{1}{e}$  dando a  $x$  algún valor.



Por ejemplo,  $x = -10$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{1-3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1+3x} =$



Comprobamos que  $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{1-3x} < e^{-6}$  dando a  $x$  algún valor negativo.

Por ejemplo,  $x = -10$ .

**6 Calcula el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  de las siguientes funciones:**

a)  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$

b)  $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{\log x^2}$

c)  $b(x) = \sqrt{3x^2 + 2} - 5x$

d)  $i(x) = x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$

e)  $j(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}}$

f)  $k(x) = \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^3}{x^2 + 1}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 1} = +\infty$

(El infinito de una función exponencial es de mayor orden que el de una función potencial).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 - 1} = 0$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{\log x^2} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{\log x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{\log x^2} = +\infty$$

(El infinito de una función potencial es de mayor orden que el de un logaritmo).

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2} - 5x) = (+\infty) - (+\infty)$  (Indeterminación).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 + 2} - 5x)(\sqrt{3x^2 + 2} + 5x)}{\sqrt{3x^2 + 2} + 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-22x^2 + 2}{\sqrt{3x^2 + 2} + 5x} = -\infty$  ya que el numerador tiene mayor grado que el denominador.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 + 2} - 5x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2} + 5x) = +\infty$$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) = (+\infty) - (+\infty)$  (Indeterminación).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - \sqrt{x^4 - 1})(x^2 + \sqrt{x^4 - 1})}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) = 0$$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{3}x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^3}{x^2+1} = (+\infty) - (+\infty)$  (Indeterminación).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^3}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{-x-1} + \frac{x^3}{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^3 + x^2 + x + 1} = 1$$

## 7 Calcula estos límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2x+1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1,5^x - x^3)$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \frac{x^2}{x-3} \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - 2x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 5x}{x+1} - \frac{3x}{2} \right)$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x})$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1,2^x - \frac{3x^2}{x+1} \right)$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+4}{2x+5} \right)^{x-1}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2x+1} = 0$  porque el numerador tiene menor grado que el denominador.

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1,5^x - x^3) = +\infty$  porque el infinito de una exponencial con base mayor que 1 es de orden superior que el de una potencia.

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \frac{x^2}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x-3} = -3$  porque el numerador tiene el mismo grado que el denominador.

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-2x} = \frac{1}{2}$

- e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 5x}{x+1} - \frac{3x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - 10x - 3x(x+1)}{2(x+1)} \right) =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 13x}{2x+2} = -\infty$
- f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x})(x^2 + \sqrt{x^4 + 2x})}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - (x^4 + 2x)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^4 - 2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = 0$
- g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1, 2^x - \frac{3x^2}{x+1} \right) = +\infty$
- h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x+4}{2x+5} \right)^{x-1} = \left( \frac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$

### 8 Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x-4}{3x-2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$       e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)^{3x-2}$       f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x-3}{x+2} \right)^{x^2-5}$

a) Sea  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ , se trata de un límite del tipo  $(1)^{(+\infty)}$ .

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} - 1 \right) \cdot x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2-1}} = e^2$$

b) Sea  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) = +\infty$ , se trata de un límite del tipo  $(1)^{(+\infty)}$ .

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x-2} - 1 \right) \cdot (2x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x-3}{x-2}} = e^6$$

c) Sea  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+3} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$ , se trata de un límite del tipo  $(1)^{(+\infty)}$ .

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+3} - 1 \right) \cdot (x+2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4(x+2)}{x+3}} = e^{-4}$$

d) Sea  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x-4}{3x-2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-4}{3x-2} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{3} = +\infty$ , se trata de un límite del tipo  $(1)^{(+\infty)}$ .

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x-4}{3x-2} - 1 \right) \cdot \frac{x+1}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{3x-2} \cdot \frac{x+1}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-2}{9x-6}} = e^{-2/9}$$

e) Sea  $l = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{3x-2}$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-2) = +\infty$ , se trata de un límite del tipo  $\frac{1}{(1)^{(+\infty)}}$ .

Aplicando la fórmula:

$$l = \frac{1}{e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot (3x-2)}} = \frac{1}{e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x^2} \cdot (3x-2)\right)}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

f) Sea  $l = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5}$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x+2} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-5) = +\infty$ , se trata de un límite del tipo  $(1)^{(+\infty)}$ .

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x+2} - 1\right) \cdot (x^2-5)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5(x^2-5)}{x+2}} = +\infty$$

### 9 Halla estos límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4})$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}) = (\infty) - (\infty)$  (Indeterminación).

La resolvemos multiplicando y dividiendo por  $(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4})$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4})(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4})}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = (\infty) - (\infty)$  (Indeterminación).

La resolvemos multiplicando y dividiendo por  $(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

### 10 Calcula el límite de estas funciones cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ :

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$       b)  $g(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x - \ln x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x+2} = -1$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -2$$

**11** Sabiendo que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2} q(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2} r(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 2} s(x) = 0$$

di, en los casos en que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{s(x)}{p(x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} [s(x)]^{p(x)}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} |s(x) \cdot q(x)|$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} |p(x) - 2q(x)|$

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{s(x)}{p(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} |s(x) \cdot q(x)| = (0) \cdot (-\infty) \rightarrow \text{Indeterminado.}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} |p(x) - 2q(x)| = +\infty - 2(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

---

Página 242

**12** Calcula estos límites. Si alguno es infinito, calcula los límites laterales:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{1 - x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(x^3 - 1)(x - 2)}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2/3} \frac{3x^2 + 5x + 2}{9x^2 - 4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 6)}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} [-(x - 6)] = 5$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(x^3 - 1)(x - 2)} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 3x + 2)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x - 2)} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2/3} \frac{3x^2 + 5x + 2}{9x^2 - 4} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \rightarrow -2/3} \frac{(x+1)(3x+2)}{(3x+2)(3x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2/3} \frac{x+1}{3x-2} = -\frac{1}{12}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x^2+x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{x^2+x-6} = \frac{(7)}{(0)}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+5}{x^2+x-6} = -\infty$$

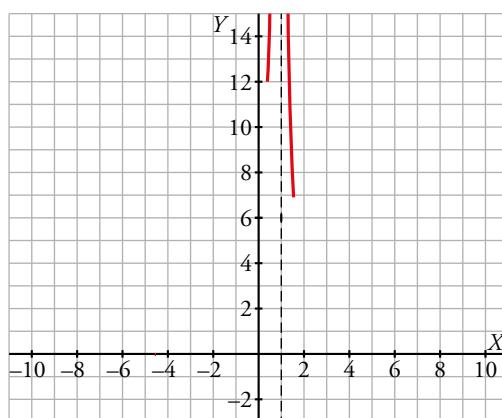
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+5}{x^2+x-6} = +\infty$$

**13** Calcula y representa los resultados obtenidos.

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right]$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{3}{x^2 - 5x + 6} - \frac{4}{x-2} \right]$

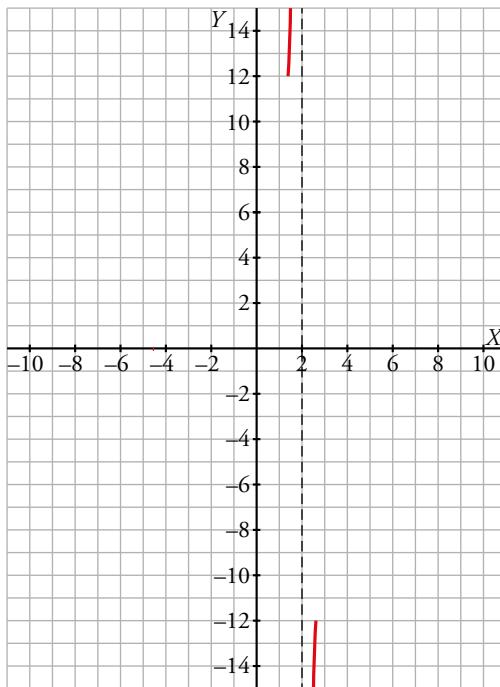
a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty$



b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{3}{x^2 - 5x + 6} - \frac{4}{x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-4x + 15}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(7)}{(0)}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-4x + 15}{x^2 - 5x + 6} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-4x + 15}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$$



**14** Calcula y estudia los límites laterales cuando sea necesario.

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1 - \sqrt{3-x}}{x-2} \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2} \right)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right]$

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{3-x}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1 - \sqrt{3-x})(1 + \sqrt{3-x})}{(x-2)(1 + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - (3-x)}{(x-2)(1 + \sqrt{3-x})} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 3 + x}{(x-2)(1 + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(1 + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{1 + \sqrt{3-x}} = \frac{1}{2}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+9-9}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = +\infty$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1+x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

**15** Calcula.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2x^2-x-1}{7-x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

a) Sea  $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{2x+1} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ , se trata de un límite del tipo  $(1)^{(+\infty)}$ .

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2+1}{2x+1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{2x+1} \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x(2x+1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{2x+1}} = e^{1/2}$$

b) Sea  $l = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2x^2-x-1}{7-x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

Como  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-x-1}{7-x} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = +\infty$ , se trata de un límite del tipo  $(1)^{(+\infty)}$ .

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2x^2-x-1}{7-x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-8}{7-x} \cdot \frac{1}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)(x-2)}{(7-x)(x-2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+4}{7-x}} = e^{8/5}$$

**16** Halla el valor de los límites que se piden, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{3}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

a)  $0^+$

b) 1

c)  $-3$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{x-3} = \frac{3}{(0^-)} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x-3} = \frac{3}{(0^+)} = +\infty$

Por tanto, el límite no existe.

e) 3

f)  $0^+$

**17** Aplica la regla de L'Hôpital para calcular los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2-3x-4}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x+x^3)}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-b^x}{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{1 - \cos x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \right)$

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1}$

l)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2-3x-4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{2x-3} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x+x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3} = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = +\infty$$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}}{\cos x} = -2$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cdot \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos^2 x + e^{\sin x} \sin x}{\cos x} = 0$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos 3x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \operatorname{tg} 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9(1 + \operatorname{tg}^2 3x)}{2} = -\frac{9}{2}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt[4]{x}}{3(1+x)} = 0$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x) \sin(2x) \cdot 2}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 4x}{3} = \frac{4}{3}$

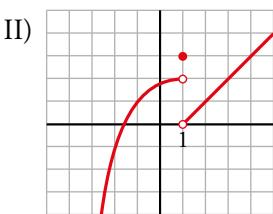
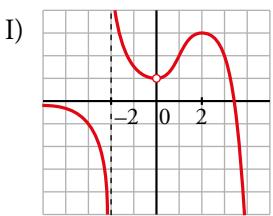
j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0$

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x} = 0$

l)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\tan x} = 1$

## Continuidad

- 18** Estudia la continuidad de cada una de estas funciones. En los puntos en los que sean discontinuas, di cuál es el límite por la derecha y por la izquierda e indica el tipo de discontinuidad.



- I) La función es discontinua en  $x = -2$  y  $x = 0$ .

En  $x = 2$  tiene una discontinuidad de salto infinito: el límite por la izquierda es  $-\infty$  mientras que el límite por la derecha es  $+\infty$ .

En  $x = 0$  tiene una discontinuidad evitable aunque en este punto no está definida, los límites laterales coinciden, siendo 1.

- II) La función es discontinua en  $x = 1$ . En este punto tiene una discontinuidad de salto finito. La función vale 3 mientras que el límite por la izquierda vale 2 y el límite por la derecha vale 0.

**19** Estudia la continuidad de las siguientes funciones y dibuja su gráfica:

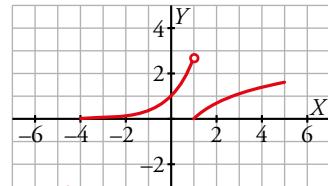
a)  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$     b)  $g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) La función es continua cuando  $x \neq 1$  ya que está formada por funciones continuas.

Veamos la continuidad en  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} e^x = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

Como los límites laterales existen y son distintos, en  $x = 1$  presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

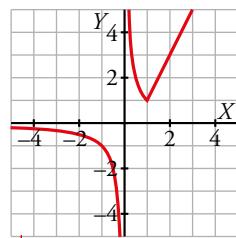


b) Cuando  $x \neq 0$  y  $x \neq 1$  es continua porque las funciones que la forman lo son. La función es discontinua en  $x = 0$  y presenta en este valor una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Veamos la continuidad en  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

En  $x = 1$  es continua ya que  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .



**20** Calcula el valor de  $k$  para que las siguientes funciones sean continuas en todo su dominio. Represéntalas para el valor de  $k$  obtenido:

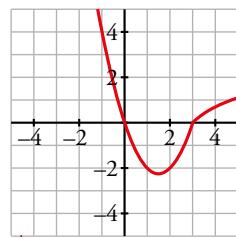
a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx & \text{si } x < 3 \\ \ln(x - 2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$     b)  $g(x) = \begin{cases} kx^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ e^{x^2 - 4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) La función es continua cuando  $x \neq 3$  ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en  $x = 3$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + kx) = 9 + 3k \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 2) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 9 + 3k = 0 \rightarrow k = -3$$

Cuando  $k = -3$  la función también es continua en  $x = 3$ .

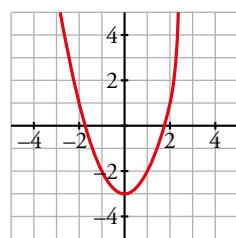


b) La función es continua cuando  $x \neq 2$  ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en  $x = 2$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 4k - 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (kx^2 - 3) = 4k - 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{x^2 - 4} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow 4k - 3 = 1 \rightarrow k = 1$$

Cuando  $k = 1$  la función también es continua en  $x = 2$ .



**21** Calcula el valor de  $a$  y  $b$  para que  $f(x)$  sea continua en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

La función es continua cuando  $x \neq 0$  y  $x \neq 1$  ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \end{array} \right\} \rightarrow b = -1$$

Veamos la continuidad en  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2 \end{array} \right\} \rightarrow a - 1 = 2 \rightarrow a = 3$$

Cuando  $a = 2$  y  $b = -1$  la función es continua en todo su dominio.

**22** Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\mathbf{a)} f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4 + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{b)} g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \text{si } \pi \leq x \end{cases}$$

$$\mathbf{c)} h(x) = \begin{cases} e^{1-x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{-1}{x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\mathbf{d)} i(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2-4} & \text{si } x \neq -2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

a) La función es continua cuando  $x \neq 0$  y  $x \neq 1$  ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 1) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0) \rightarrow \text{Es continua en } x = 0.$$

Veamos la continuidad en  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + 1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 + \ln x) = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 = f(1) \rightarrow \text{Es continua en } x = 1.$$

b) La función es continua cuando  $x \neq 0$  y  $x \neq \pi$  ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0) \rightarrow \text{Es continua en } x = 0.$$

Veamos la continuidad en  $x = \pi$ :

$$\left. \begin{array}{l} g(\pi) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \operatorname{sen} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} [(x - \pi)^2 + 1] = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Los límites laterales existen y son distintos.}$$

El límite existe y presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en  $x = \pi$ .

- c) El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{0\}$  ya que no está definida cuando  $x = 0$ .

Cuando  $x \neq 0$  y  $x \neq -1$  la función es continua porque las funciones que intervienen lo son.

En  $x = 0$  presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Veamos la continuidad en  $x = -1$ :

$$\left. \begin{array}{l} h(-1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{1-x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-1}{x} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 1 = h(-1) \rightarrow \text{Es continua en } x = -1.$$

- d) El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{2\}$  ya que no está definida cuando  $x = 2$ .

Cuando  $x \neq -2$  y  $x \neq 2$  la función es continua porque la función que interviene lo es.

En  $x = 2$  presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Veamos la continuidad en  $x = -2$ :

$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} &= \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Como existe el límite pero no coincide con el valor de la función, tiene una discontinuidad evitable en  $x = -2$ .

### 23 Clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$       b)  $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$

- a)  $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1, x = 2 \rightarrow$  El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ .

La función es continua cuando  $x \neq -1$  y  $x \neq 2$ .

En  $x = -1$  y  $x = 2$  no es continua al no estar definida en ellos. Veamos el tipo de discontinuidad en cada valor:

En  $x = -1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} &= \frac{(-6)}{(0)} \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} &= +\infty \end{aligned}$$

En este caso es inevitable de salto infinito.

En  $x = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{5}{3}$$

En esta ocasión se trata de una discontinuidad evitable.

b)  $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = -2, x = 3 \rightarrow$  El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$ .

La función es continua cuando  $x \neq -2$  y  $x \neq 3$ .

En  $x = -2$  y  $x = 3$  no es continua al no estar definida en ellos. Veamos el tipo de discontinuidad en cada valor.

En  $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = \frac{(-10)}{(0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = +\infty$$

Se trata de una discontinuidad inevitable de salto infinito.

En  $x = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+x)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x}{x+2} = \frac{12}{5}$$

En esta ocasión se trata de una discontinuidad evitable.

## Página 243

### Para resolver

#### 24 Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3 + x^2 - 3}{5x^3 - 2x^2} \right)^{1-x}$     b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-5}{2x+3} \right)^{\frac{x+1}{2}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$     d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{13 - x^2} - 3}{x - 2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2}$     f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$     h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x \cos x - 1}{\operatorname{sen} x - x + 1 - \cos x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3 + x^2 - 3}{5x^3 - 2x^2} \right)^{1-x} = \left( \frac{2}{5} \right)^{(-\infty)} = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-5}{2x+3} \right)^{\frac{x+1}{2}} = (1)^{(+\infty)}$

Aplicamos la regla:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-5}{2x+3} - 1 \right) \cdot \frac{x+1}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-8}{2x+3} \cdot \frac{x+1}{2} \right) = -2$$

Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-5}{2x+3} \right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{-2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x}{\cos x} = 2$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{13-x^2}-3}{x-2} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{13-x^2-9}{(x-2)(\sqrt{13-x^2}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{(x-2)(\sqrt{13-x^2}+3)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2+x)(2-x)}{(x-2)(\sqrt{13-x^2}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(2+x)}{\sqrt{13-x^2}+3} = -\frac{2}{3}$$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x(x-1)} = \frac{(1)}{(0)} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2x(x-1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2x(x-1)} = +\infty \end{cases}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^x) = +\infty$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = (\infty) - (\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0$$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x \cos x - 1}{\sin x - x + 1 - \cos x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + x \sin x}{\cos x + \sin x - 1} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2\sin x + x \cos x}{-\sin x + \cos x} = 1$

**25** Calcula estos límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cos x \ln(\tan(x))$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\tan x}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} \right)^{\frac{1}{x}}$       e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{1+x}{x} \right)$       f)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x)^{\cot 3x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cos x \ln(\tan(x)) = (0) \cdot (+\infty) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)} \stackrel{\text{H}}{=}$

$$= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\frac{1}{\cos^2 x \tan x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{1}{\sin x \tan x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

b) Al no estar definida la función a la izquierda de 0, calculamos el límite por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\tan x} = 1 = (+\infty)^{(0)}$$

Tomamos logaritmos:

$$\begin{aligned} \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \tan x \ln \left( \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\tan x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{(-\infty)}{(+\infty)} \stackrel{\text{H}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\tan^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 x}{x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\tan x \sec x}{1} = 0 \end{aligned}$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\tan x} = e^0 = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x} = (1)^{(\infty)}$

Aplicamos la regla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \operatorname{sen} x - 1}{x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{1} = 1$$

Por tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x} = e$

d) Al no estar definida la función a la izquierda de 0, calculamos el límite por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)^{\frac{1}{x}} = (+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{1+x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{1+x}{x} \right)^x = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{x} \right)^x = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln e = 1$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sen} 2x)^{\cotg 3x} = (1)^{(\infty)}$

Aplicamos la regla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sen} 2x - 1) \cotg 3x = \lim_{x \rightarrow 0} (-\operatorname{sen} 2x \cotg 3x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\cos 2x}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = -\frac{2}{3}$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sen} 2x)^{\cotg 3x} = e^{-2/3}$

- 26** a) Si  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + kx + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$ , ¿hay algún valor de  $k$  para el cual  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existe? En caso afirmativo, hállalo.

- b) Para  $k = 0$ , halla  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + kx + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + kx + 3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{k+5}{(1-1)^2 2} = \frac{k+5}{0^+}$

Por tanto:

Si  $k < -5$ :  $k+5 < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

Si  $k > -5$ :  $k+5 > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

Si  $k = -5$ , el límite se calcula aplicando la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{3x^2 - 2x - 1} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x + 2}{6x - 2} = \frac{8}{4} = 2$$

- b) Como  $0 > -5$ , hemos visto en el apartado a) que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ , por tanto, los límites laterales son  $+\infty$ .

- 27** El rendimiento físico de un deportista, durante 60 minutos, varía con el tiempo según esta función:

$$f(t) = \begin{cases} -t(t-a) & \text{si } 0 \leq t < 15 \\ 3,5a + 5 & \text{si } 15 \leq t < 30 \\ 100 - bt & \text{si } 30 \leq t \leq 60 \end{cases}$$

Calcula  $a$  y  $b$  para que la función rendimiento sea continua.

La función es continua cuando  $x \neq 15$  y  $x \neq 30$  ya que está definida mediante funciones continuas.

Comprobamos la continuidad en  $x = 15$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(15) = 3,5a + 5 \\ \lim_{t \rightarrow 15^-} [-t(t-a)] = -225 + 15a \\ \lim_{t \rightarrow 15^+} (3,5a + 5) = 3,5a + 5 \end{array} \right\} \rightarrow -225 + 15a = 3,5a + 5 \rightarrow a = 20$$

Cuando  $a = 20$ , la función es continua en  $x = 15$ , ya que  $f(15) = \lim_{x \rightarrow 15} f(x)$ .

Comprobamos la continuidad en  $x = 30$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(30) = 100 - 30b \\ \lim_{t \rightarrow 30^-} 75 = 75 \\ \lim_{t \rightarrow 30^+} (100 - bt) = 100 - 30b \end{array} \right\} \rightarrow 75 = 100 - 30b \rightarrow b = \frac{5}{6}$$

Cuando  $b = \frac{5}{6}$  la función es continua en  $x = 30$ , ya que  $f(30) = \lim_{x \rightarrow 30} f(x)$ .

- 28** Sabemos que la función  $f(x) = \frac{3x-4}{x^3+bx^2+8x-4}$  es discontinua en  $x = 2$ . Calcula  $b$  y estudia el comportamiento de la función en las proximidades de los puntos de discontinuidad.

Para que la función sea discontinua en  $x = 2$ , este valor debe ser una raíz del denominador. Por tanto,

$$2^3 + b \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 4 = 0 \rightarrow b = -5$$

De donde  $f(x) = \frac{3x-4}{x^3-5x^2+8x-4}$ .

Hallamos todas las raíces del denominador:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$$

El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ .

La función no es continua en  $x = 1$  y en  $x = 2$ . Veamos ahora el comportamiento de la función en las proximidades de estos puntos:

En  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{(-1)}{(0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = -\infty$$

La discontinuidad es inevitable de salto infinito.

En  $x = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 4}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{(2)}{(0)} = +\infty \text{ ya que la fracción es un cociente de números positivos en las proximidades de } x = 2.$$

- 29** Dada la función  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x}$  con  $a \neq 0$ , calcula los valores de  $a$  y  $b$  para que la función pase por el punto  $(2, 3)$  y el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -4$ .

$$f \text{ pasa por } (2, 3) \rightarrow f(2) = 3 \rightarrow \frac{4a + b}{a - 2} = 3$$

Por otro lado,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + b}{ax - x^2} = -a$$

$$-a = -4 \rightarrow a = 4 \rightarrow \frac{16 + b}{2} = 3 \rightarrow b = -10$$

- 30** Calcula el valor de  $k$  para que cada una de las siguientes funciones sea continua. ¿Alguna es continua en todo  $\mathbb{R}$ ?:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \ln k & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2^k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) Estudiamos la continuidad en  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+x^2+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+x^2+1) = 3$$

$$f(1) = \ln k$$

$$\text{Para que sea continua } \ln k = 3 \rightarrow k = e^3.$$

Además, es continua en todo  $\mathbb{R}$  ya que el cociente de polinomios solo se anula cuando  $x = 1$ .

b) Estudiamos la continuidad en  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$g(1) = 2^k$$

$$\text{Para que sea continua } 2^k = \frac{1}{2} \rightarrow k = -1.$$

Esta función también es continua en todo  $\mathbb{R}$  porque el cociente solo se anula cuando  $x = 1$ .

**31** Halla el valor de  $b$  para que la función  $f(x)$  sea continua en  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función es continua cuando  $x \neq 0$  porque está definida por intervalos mediante funciones continuas en los mismos.

Comprobamos la continuidad en  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1+x}{2x}} = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Cuando  $b = \frac{1}{2}$  la función es continua en  $\mathbb{R}$ .

**32** Calcula el valor de  $k$  para que la siguiente función sea continua en  $x = 0$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{e^x - 1} - \frac{k}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Supongamos que  $k \neq 0$  ya que, en otro caso, el problema no tendría sentido.

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{e^x - 1} - \frac{k}{x} \right) &= (\infty) - (\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - ke^x + k}{(e^x - 1)x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - ke^x}{e^x x + e^x - 1} \end{aligned}$$

Como el denominador tiende a 0, para poder seguir calculando el límite, el numerador también debe tender a 0, luego  $2 - k = 0 \rightarrow k = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2e^x}{e^x x + e^x - 1} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^x}{e^x x + 2e^x} = -1$$

Por tanto, para  $k = 2$  la función es continua en  $x = 0$  ya que  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**33** ¿Existe algún valor de  $k$  para el que la función  $f(x)$  sea continua en  $x = 0$ ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} f(0) &= k \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} &= \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

No puede existir ningún valor ya que el límite no existe porque los límites laterales son distintos.

**34** Determina dónde son continuas las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \frac{x}{\ln(x-2)}$

b)  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-x-6}}$

c)  $b(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

d)  $i(x) = \frac{1}{1-\cos^2 x}$

a) El dominio de definición es  $(2, 3) \cup (3, +\infty)$  y en él la función es continua.

Para  $x=3$  presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito, ya que  $f(3) = \frac{3}{\ln 1} = \frac{3}{0}$ .

b) Calculamos el dominio de definición:

$x^3 - x - 6 > 0 \rightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) > 0 \rightarrow x > 2$  ya que el factor cuadrático es siempre positivo.

La función es continua en el intervalo  $(2, +\infty)$ .

c) Calculamos el dominio de definición:

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0$$

x		-2		1	
$\frac{x-1}{x+2}$	+	No existe	-	0	+

La función es continua en su dominio,  $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$ .

d) Calculamos el dominio de definición:

$$1 - \cos^2 x = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x = 0 + 2k\pi \\ \cos x = -1 \rightarrow x = \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

La función es continua en su dominio,  $\mathbb{R} - \{k\pi\}$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

**35** a) Calcula el valor de  $a$  para que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - a \operatorname{sen} x}{x^2}$  sea finito.

b) Halla el límite para ese valor de  $a$ .

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - a \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos x}{2x}$

Para poder continuar el límite, el numerador debe tender a 0 porque el denominador tiende a 0.

$$1 - a = 0 \rightarrow a = 1$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2} = 0$

**36 Estudia la continuidad de la función  $f(x) = \frac{1}{2 - |x|}$  y clasifica sus discontinuidades.**

El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ . La función es continua en él.

En  $x = -2$ :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2 - |x|} = \frac{(1)}{(0)} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2 + x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2 + x} = +\infty \end{cases}$$

Presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

En  $x = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2 - |x|} = \frac{(1)}{(0)} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2 - x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2 - x} = -\infty \end{cases}$$

Tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

NOTA: Podríamos haber usado la simetría de la función respecto del eje  $Y$  (es una función par) para haber deducido el comportamiento en  $x = 2$  a partir del estudio en  $x = -2$ .

**37 Halla el valor de  $t$  para que la siguiente función sea continua en  $x = 2$ . Represéntala en el caso  $t = 2$  y di qué tipo de discontinuidad tiene:**

$$f(x) = \begin{cases} |x - 1| - t & \text{si } x \leq 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

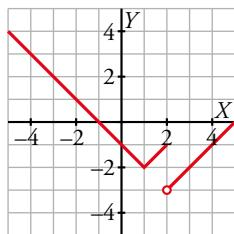
Estudiamos la continuidad en  $x = 2$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 1 - t \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (|x - 1| - t) = 1 - t \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 5) = -3 \end{array} \right\}$$

Para que sea continua en  $x = 2$  debe ser  $1 - t = -3 \rightarrow t = 4$ .

Supongamos ahora que  $t = 2$ :

$$f(x) = \begin{cases} |x - 1| - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -(x - 1) - 2 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



Tiene una discontinuidad de salto finito.

**38** Calcula el límite de las siguientes funciones cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ , definiéndolas previamente por intervalos:

$$\text{a) } f(x) = \frac{|x|}{x+1} \quad \text{b) } g(x) = |x-3| - |x| \quad \text{c) } h(x) = |2x-1| + x \quad \text{d) } i(x) = \frac{x+1}{|x|}$$

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$x \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$x \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = x \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

$$\text{b) } |x-3| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = |x-3| - |x| = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 2x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$x \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = x \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-3) = +\infty$$

$$x \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = x \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x+3) = +\infty$$

$$\text{c) } |2x-1| = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$h(x) = |2x-1| + x = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 3x-1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = x \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1) = +\infty$$

$$x \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = x \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1) = +\infty$$

$$\text{d) } i(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$x \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

$$x \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = x \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x} = -1$$

**39**  [La resolución de esta actividad requiere que el alumnado trabaje la dimensión productiva (innovación)].

Estudia la continuidad en  $x = 0$  de esta función:

$$f(x) = 2x + \frac{|x|}{x}$$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

En  $x = 0$ , la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ entonces:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - 1) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1$$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en  $x = 0$ .

## Página 244

---

**40** Se define la función  $f$  del modo siguiente:  $f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

Encuentra los valores de  $a$  y  $b$  para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

- Para que la gráfica de  $f(x)$  pase por el origen de coordenadas, ha de ser  $f(0) = 0$ , es decir:  $f(0) = b = 0$ .
- Para que la función sea continua (para  $x \neq 1$ , es una función continua), tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\ f(1) = 2 + a \end{array} \right\} \text{Han de ser iguales, es decir: } 2 + a = -1 \rightarrow a = -3$$

Por tanto, si  $a = -3$  y  $b = 0$ , la función es continua; y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

**41** El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 € y 8 €. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 3 + Ax & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \\ 53 + 2x + Bx^2 & \text{si } 5 < x \leq 8 \end{cases}$$

siendo  $F(x)$  la facturación de la empresa en bolsa, en miles de euros, y  $x$  el precio por cada acción, en €. Se sabe que para un precio de la acción de 2 €, la facturación es de 7 000 € y que la función es continua. Determina las constantes  $A$  y  $B$ .

En primer lugar:

$$F(2) = 7 \rightarrow 3 + 2A = 7 \rightarrow A = 2$$

Y como la función es continua:

$$3 + 5A = 53 + 10 + 25B \rightarrow 3 + 10 = 53 + 10 + 25B \rightarrow B = -2$$

**42** El precio de compra de un producto varía según el número de unidades encargadas y esto queda reflejado en la siguiente función:

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla  $a$  para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compra un número muy grande de unidades?

a)  $\lim_{x \rightarrow 10^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} (5x) = 50$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$$

$$C(10) = 50$$

Para que sea continua, ha de ser:

$$\sqrt{100a + 500} = 50 \rightarrow 100a + 500 = 2500 \rightarrow 100a = 2000 \rightarrow a = 20$$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4,47 \text{ €}$

**43** Considera la función  $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1-x}$ .

a) Estudia su continuidad.

b) Observa que  $f(-2) = -2/3$ ,  $f(0) = 4$  y  $f(2) = -10$ . Razona si, a partir de esta información, podemos deducir que el intervalo  $(-2, 0)$  contiene un cero de la función. ¿Podemos deducirlo para el intervalo  $(0, 2)$ ?

c) Encuentra un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.

a) La función es continua en  $\mathbb{R} - \{1\}$ , veamos qué tipo de discontinuidad tiene en este punto:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - 5x + 4}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 - 5x + 4}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Por tanto, tiene  $f$  una discontinuidad de salto infinito.

b) En los extremos del intervalo  $(-2, 0)$ , la función alcanza valores de distinto signo, además es continua en el intervalo, por tanto, por el teorema de Bolzano, la función tiene al menos un cero.

En el intervalo  $(0, 2)$ , a pesar de que la función alcanza valores de distinto signo en sus extremos, la función no es continua, por tanto, no se puede asegurar la existencia de un cero (de hecho, no lo tiene).

c) Volvamos al intervalo  $(-2, 0)$ , en el que sabemos que la función tiene un cero:

$$f(-2) = -\frac{2}{3} \quad f(-1) = \frac{7}{2}$$

Por tanto, en el intervalo  $(-2, -1)$ , la función tiene al menos un cero.

**44** Dadas las funciones  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$  y  $g(x) = 6x$ , justifica que existe algún punto en el intervalo  $[1, 10]$  en el que ambas funciones toman el mismo valor.

Se trata de demostrar si en algún  $x = c$  del intervalo  $[0, 1]$  se cumple:

$$h(c) = f(c) - g(c) = 0$$

Veamos:

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$$

Al ser polinómica es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

$$h(1) = -3 < 0$$

$$h(10) = 1239 > 0$$

Por tanto, por el teorema de Bolzano, en el intervalo  $[1, 10]$   $h$  tiene algún cero y, por tanto, las funciones  $f$  y  $g$  coinciden.

**45** Demuestra que la siguiente función corta al eje  $X$  en algún punto  $(c, 0)$ , donde  $c \in (-1, 1)$ :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f(-1) = -2 < 0$$

$$f(1) = e > 0$$

Si demostráramos que la función es continua en el intervalo  $(-1, 1)$ , por el teorema de Bolzano, habríamos demostrado la existencia de algún punto  $(c, 0)$  por el que la gráfica de la función corta al eje  $X$ .

La única discontinuidad de la función puede darse en  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^0 = 1$$

Por tanto, la función es continua en  $(-1, 1)$  y existe algún punto como el que buscamos.

### Cuestiones teóricas

**46** Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Observamos que  $f$  está definida en  $[0, 1]$  y que verifica  $f(0) = -1 < 0$  y  $f(1) = e^{-1} > 0$ , pero no existe ningún  $c \in (0, 1)$  tal que  $f(c) = 0$ . ¿Contradice el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

Según el teorema de Bolzano, si  $f$  es una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y, además, *signo de*  $f(a) \neq$  *signo de*  $f(b)$ , entonces existe un  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

Veamos si se cumplen las hipótesis. Estudiaremos la continuidad en  $x = \frac{1}{2}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} \frac{x-4}{4} = \frac{-7}{8} \\ \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} e^{-x^2} = e^{-1/4} \end{array} \right\} \text{Como } \lim_{x \rightarrow (1/2)^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} f(x), \text{ no existe } \lim_{x \rightarrow (1/2)} f(x).$$

$f(x)$  no es continua en  $x = \frac{1}{2}$ .

Por tanto,  $f$  no es continua en el intervalo  $[0, 1]$ ; luego no cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en dicho intervalo.

**47** Da una interpretación geométrica del teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que las gráficas de  $f(x) = x^3 + x^2$  y  $g(x) = 3 + \cos x$  se cortan en algún punto.

Interpretación geométrica:

Si una función continua toma valores con distinto signo en los extremos del intervalo  $[a, b]$ , su gráfica «atravesará» el eje  $X$  cortándolo por lo menos en un punto.

Consideramos la función  $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos x$ .

$h(x)$  es una función continua en todo  $\mathbb{R}$  y lo será en particular en cualquier intervalo real.

En el intervalo  $[1, 2]$  se cumple:

$$h(1) = -1 - \cos 1 < 0$$

$$h(2) = 9 - \cos 2 > 0$$

Por el teorema de Bolzano existe al menos un punto  $c \in (1, 2)$  tal que:

$$h(c) = 0 \rightarrow f(c) - g(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$$

Es decir, existe al menos un punto  $c \in (1, 2)$  en el que las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$  se cortan (ya que las dos funciones toman el mismo valor).

**48** Sea la función  $f(x) = x^2 + 1$ . ¿Podemos asegurar que dicha función toma todos los valores del intervalo  $[1, 5]$ ? En caso afirmativo, enuncia el teorema que lo justifica.

Consideremos la función  $f(x)$  definida en el intervalo  $[0, 2]$ . La función es continua en todo  $\mathbb{R}$ , (y, en particular, en el intervalo estudiado).

$$f(0) = 1$$

$$f(2) = 5$$

Por el teorema de los valores intermedios o teorema de Darboux, la función toma todos los valores comprendidos entre 1 y 5, es decir, toma todos los valores del intervalo  $[1, 5]$ .

**49** Si  $f(x)$  es continua en  $[1, 9]$ ,  $f(1) = -5$  y  $f(9) > 0$ , ¿podemos asegurar que la función  $g(x) = f(x) + 3$  tiene al menos un cero en el intervalo  $[1, 9]$ ?

- Si  $f(x)$  es continua en  $[1, 9]$ , entonces  $g(x) = f(x) + 3$  también será continua en  $[1, 9]$  (pues es suma de dos funciones continuas).
- Si  $f(1) = -5$ , entonces  $g(1) = f(1) + 3 = -5 + 3 = -2 < 0$ .
- Si  $f(9) > 0$ , entonces  $g(9) = f(9) + 3 > 0$ .

Es decir,  $\text{signo de } g(1) \neq \text{signo de } g(9)$ .

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe  $c \in (1, 9)$  tal que  $g(c) = 0$ ; es decir, la función  $g(x)$  tiene al menos un cero en el intervalo  $[1, 9]$ .

**50** De una función  $g$  se sabe que es continua en el intervalo cerrado  $[0, 1]$  y que para  $0 < x \leq 1$  es:

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

¿Cuánto vale  $g(0)$ ?

Como la función es continua en  $x = 0$  se cumple que  $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

Luego  $g(0) = 1$ .

**51**  [La justificación de si las afirmaciones son ciertas o no, permite trabajar la destreza expresión oral de esta clave].

¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta.

- a) Si una función no está definida en  $x = 3$ , puede ocurrir que  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ .
- b) Si  $f(x)$  es una función continua tal que  $f(x) < 0$  si  $x < 3$  y  $f(x) > 0$  si  $x > 3$ , no es posible que  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ .
- c) La ecuación  $x^5 + x + 1 = 0$  no tiene ninguna raíz real.
- d) Si sabemos que  $f(x)$  es continua en  $[a, b]$  y que  $f(a) = 3$  y  $f(b) = 5$ , podemos asegurar que para algún  $c$  del intervalo  $[a, b]$  se cumple que  $f(c) = 7$ .
- e)  $\sin x + 2x - 1 = 0$  tiene, al menos, una raíz real.
- f) La función  $y = \operatorname{tg} x$  no cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ .

- a) Verdadero. La función puede tener en  $x = 3$  una discontinuidad evitable y comportarse de esa forma.
- b) Verdadero.

$$x < 3, f(x) < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \leq 0$$

$$x > 3, f(x) > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \geq 0$$

Como la función es continua, el límite cuando  $x \rightarrow 3$  existe y, por tanto, los límites laterales deben ser iguales. En consecuencia,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ .

- c) Falso. En los extremos del intervalo  $[-1, 0]$  la función  $f(x) = x^5 + x + 1$  toma valores con distinto signo. Al ser continua podemos aplicar el teorema de Bolzano y existe al menos un punto  $c \in (-1, 0)$  tal que  $f(c) = 0$ .

El valor  $c$  es una raíz real de la ecuación dada.

- d) Falso. No podemos asegurarlo porque  $7 \notin [3, 5]$ .
- e) Verdadero. Consideremos la función  $f(x) = \sin x + 2x - 1$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

La función es continua. Además:

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = \sin 1 + 1 > 0$$

Como toma valores con distinto signo, podemos aplicar el teorema de Bolzano y existe al menos un valor  $c \in (0, 1)$  tal que  $f(c) = 0$ .

El valor  $c$  es una raíz real de la ecuación dada.

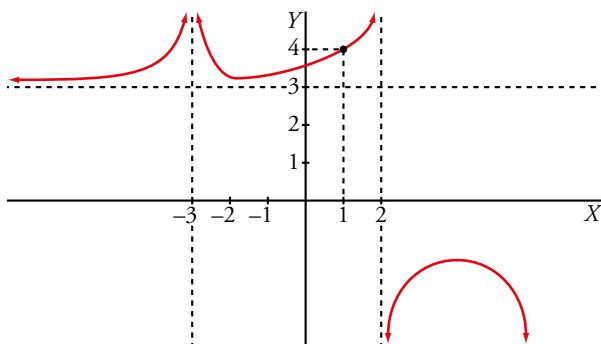
- f) Verdadero. La función  $y = \operatorname{tg} x$  no es continua en  $x = \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ .

**52** Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de  $f$ :

- |  |  |  |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$   | b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ | c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ | e) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$      | f) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$         |

- a) Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $h$  tal que, si  $x < -h$ , entonces  $|f(x) - 3| < \varepsilon$ .
- b) Dado  $k$ , podemos encontrar  $h$  tal que, si  $x > h$ , entonces  $f(x) < -k$ .
- c) Dado  $k$ , podemos encontrar  $\delta$  tal que, si  $2 - \delta < x < 2$ , entonces  $f(x) > k$ .
- d) Dado  $k$ , podemos encontrar  $\delta$  tal que, si  $2 < x < 2 + \delta$ , entonces  $f(x) < -k$ .
- e) Dado  $k$ , podemos encontrar  $\delta$  tal que, si  $3 - \delta < x < 3 + \delta$ , entonces  $f(x) > k$ .

f) Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, si  $1 - \delta < x < 1 + \delta$ , entonces  $|f(x) - 4| < \varepsilon$ .



Página 245

### Para profundizar

**53** **Rastreador de problemas.** [La resolución del ejercicio planteado se puede aprovechar para trabajar esta estrategia de pensamiento].

Estudia el comportamiento de cada una de estas funciones cuando  $x \rightarrow +\infty$ :

a)  $f(x) = x^3 - \operatorname{sen} x$

b)  $g(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 1}$

c)  $b(x) = \frac{\operatorname{Ent}(x)}{x}$

d)  $i(x) = \frac{3x + \operatorname{sen} x}{x}$

\* $\operatorname{Ent}(x)$  es la función parte entera de  $x$ .

a) Como  $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - \operatorname{sen} x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

b) Como  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pm 1}{x^2 + 1} = 0$$

c) Como  $x - 1 < \operatorname{Ent}[x] < x$ ,

$$\frac{x-1}{x} < \frac{\operatorname{Ent}[x]}{x} < \frac{x}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Ent}[x]}{x} < \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Ent}[x]}{x} = 1$$

d) Como  $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{\pm 1}{x} \right) = 3 + 0 = 3$$

**54** Calcula, si es posible, el valor de  $k$  para que cada una de las siguientes funciones sea continua en  $x = 0$ :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{c) } h(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{\operatorname{tg} x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a)  $f(0) = k$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2e^x(e^x - 1)} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2e^x(e^x - 1) + 2e^{2x}} = \frac{1}{2}$$

Si  $k = \frac{1}{2}$ , entonces la función es continua en  $x = 0$ .

b)  $g(0) = k$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{-x} = 1 \end{cases}$$

Por tanto, la función es discontinua en  $x = 0$  para cualquier valor de  $k$  ya que no existe el límite en  $x = 0$ .

c)  $h(0) = k$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\operatorname{tg} x^2} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x^2 (\sin x + x \cos x)}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \cos^2 x^2 \left( \frac{\sin x}{2x} + \frac{\cos x}{2} \right) \right] = 1 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Si  $k = 1$ , entonces la función es continua en  $x = 0$ .

**55** Halla el valor de  $a$  y de  $b$  para que la siguiente función sea continua en  $\mathbb{R}$  y pase por el punto  $(1, -2)$ :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| \leq 2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

La función es par, ya que está definida mediante dos funciones pares en intervalos de definición simétricos respecto del origen. Por tanto, la continuidad en  $x = 2$  garantiza la continuidad en  $x = -2$ .

Como pasa por el punto  $(1, -2)$ , se cumple que  $f(1) = -2 \rightarrow a + b = -2$ .

Comprobamos la continuidad en  $x = 2$ :

$$f(2) = 4a + b$$

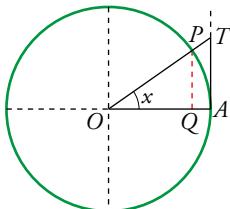
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + b) = 4a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Para que sea continua en  $x = 2$ , deben coincidir  $4a + b = \frac{1}{4}$ .

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = -2 \\ 4a + b = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \rightarrow a = \frac{3}{4}, \quad b = -\frac{11}{4}$$

- 56** En una circunferencia de radio 1, tomamos un ángulo  $\widehat{AOP}$  de  $x$  radianes. Observa que:  
 $\overline{PQ} = \operatorname{sen} x$ ,  $\overline{TA} = \operatorname{tg} x$  y  $\operatorname{arco} \widehat{PA} = x$ .



Como  $\overline{PQ} < \overline{PA} < \overline{TA} \rightarrow \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$

A partir de esa desigualdad, prueba que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ .

Tenemos que  $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ . Dividiendo entre  $\operatorname{sen} x$ , queda:  $1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$

Tomando límites cuando  $x \rightarrow 0$ , queda:  $1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq 1$ ; es decir:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ .

- 57** Aplica el resultado anterior para calcular los siguientes límites sin utilizar la regla de L'Hôpital:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

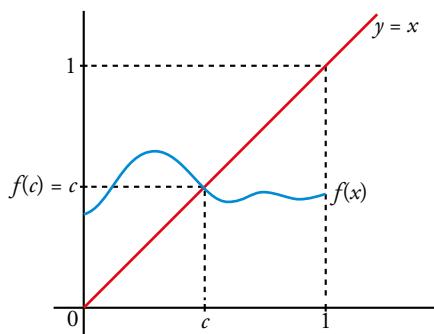
- 58** Supongamos que  $f$  es continua en  $[0, 1]$  y que  $0 < f(x) < 1$  para todo  $x$  de  $[0, 1]$ . Prueba que existe un número  $c$  de  $(0, 1)$  tal que  $f(c) = c$ .

Haz una gráfica para que el resultado sea evidente.

Consideramos la función  $g(x) = f(x) - x$ . Tenemos que:

- $g(x)$  es continua en  $[0, 1]$ , pues es la diferencia de dos funciones continuas en  $[0, 1]$ .
- $g(0) = f(0) > 0$ , pues  $f(x) > 0$  para todo  $x$  de  $[0, 1]$ .
- $g(1) = f(1) - 1 < 0$ , pues  $f(x) < 1$  para todo  $x$  de  $[0, 1]$ .

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe  $c \in (0, 1)$  tal que  $g(c) = 0$ , es decir,  $f(c) - c = 0$ , o bien  $f(c) = c$ .



## AUTOREVALUACIÓN

Página 245

**1** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\log(x^2 + 1)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x)^{\frac{1}{1-x}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1})$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - (1/3)x^3}{x - \tan x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\log(x^2 + 1)} = \frac{(0)}{(+\infty)} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x)^{1/(1-x)} \rightarrow$  Como es del tipo  $(1)^{(+\infty)}$ , podemos aplicar la regla:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x)^{1/(1-x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left( (x-1) \cdot \frac{1}{1-x} \right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}) = (\infty) - (\infty)$

Resolvemos la indeterminación multiplicando y dividiendo por  $2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}$ :

$$\frac{(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1})(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{(2x + 1)^2 - (4x^2 + 1)}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4x}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2}{2 + \sqrt{4}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - (1/3)x^3}{x - \tan x} &= \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - x^2}{1 - (1 + \tan^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - x^2}{-\tan^2 x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2 - 2x}{-2\tan x (1 + \tan^2 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 - x}{-\tan x - \tan^3 x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x - 1}{-(1 + \tan^2 x) - 3\tan^2 x (1 + \tan^2 x)} = 1 \end{aligned}$$

**2** a) Estudia la continuidad de  $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2+3x}$  y justifica qué tipo de discontinuidad tiene.

b) Halla sus límites cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

c) Representa la información obtenida en a) y en b).

a) La función es discontinua en los puntos en los que no está definida. En este caso, en los puntos que anulan su denominador.

$$x^2 + 3x = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Estudiamos el tipo de discontinuidad:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9-x^2}{x^2+3x} = \frac{(9)}{(0)} = \pm\infty \quad \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow 0^-, f(x) \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3} \frac{9-x^2}{x^2+3x} = \frac{(0)}{(0)} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(3-x)}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3-x}{x} = -2$$

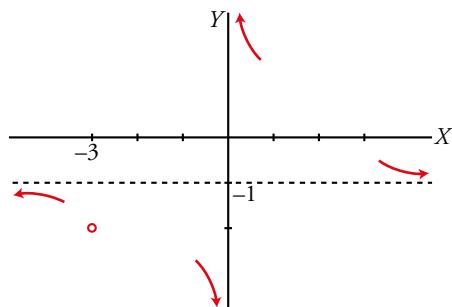
En  $x = 0$ , tiene una discontinuidad de salto infinito.

En  $x = -3$ , tiene una discontinuidad evitable.

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9-x^2}{x^2+3x} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9-x^2}{x^2+3x} = -1$$

c)



**3 a) Estudia la continuidad de la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

a) La función no está definida en  $x = -2$ . El dominio de definición es  $\mathbb{R} - \{-2\}$ .

Cuando  $x \neq -2$  y  $x \neq 0$  la función es continua porque las funciones que intervienen lo son.

En  $x = -2$  presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito porque:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x+2} = \frac{(-2)}{(0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x+2} = -\infty$$

Veamos ahora qué ocurre cuando  $x = 0$ :

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x+2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \end{cases} \rightarrow \text{No existe el límite.}$$

Al ser los límites laterales distintos y finitos, en  $x = 0$  tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+2} = 1$$

**4 Determina  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea continua en  $x = 0$ :**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x - a}{b \operatorname{sen} x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Por una parte,  $b \neq 0$  para que la función esté bien definida.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - a}{b \operatorname{sen} x^2}$$

Para que el límite pueda existir, el numerador debe tender a 0 cuando  $x \rightarrow 0$ , ya que eso es lo que ocurre con el denominador. Por tanto:

$$e^0 - 0 - a = 0 \rightarrow a = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{b \operatorname{sen} x^2} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2bx \cos x^2} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2b(\cos x^2 - 2x^2 \operatorname{sen} x^2)} = \frac{1}{2b} \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

Para que sea continua en  $x = 0$ , se debe cumplir que  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2b} \rightarrow b = 1$ .

Si  $a = 1$  y  $b = 1$ , la función es continua en  $x = 0$ .

**5 Dada la función  $f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$ , halla su dominio y obtén el valor que hay que asignar a  $f(x)$  en  $x = 0$  para que sea continua en ese punto.**

La función está definida para todo número real excepto los que anulan el denominador, su dominio es  $\mathbb{R} - \{0, -3\}$ .

Estudiamos su discontinuidad en  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 \right) = \left( \frac{0}{0} \right) + 4 (*)$$

Resolvemos la indeterminación  $\left( \frac{0}{0} \right)$  aplicando Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 3x^2}{3 + 2x} = \frac{4}{3}$$

Volviendo a (\*):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4x - x^3}{3x + 2x} + 4 \right) = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$$

Asignando  $f(0) = \frac{16}{3}$  la función será continua en  $x = 0$ .

**6 Dada la siguiente función:**

$$f(x) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} x \right)$$

**demuestra que existe un  $c \in (0, 4)$  tal que  $f(c) = f(c + 1)$ .**

Construimos la función  $g(x) = f(x + 1) - f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi(x + 1)}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{4}$ .

Demostrar que  $f(c + 1) = f(c)$  para algún  $c \in (0, 4)$ , es lo mismo que demostrar que existe  $c \in (0, 4)$  tal que  $g(c) = 0$ .

$$g(0) = \operatorname{sen} \frac{\pi(0 + 1)}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot 0}{4} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$g(4) = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} - \operatorname{sen} \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

La función  $g$  es continua en  $[0, 4]$  y *signo de  $g(0)$  ≠ signo de  $g(4)$* .

Según el teorema de Bolzano, existirá un  $c \in (0, 4)$  tal que  $g(c) = 0$ ; es decir, existe un  $c \in (0, 4)$  tal que  $f(c + 1) = f(c)$ .

**7 Considerando la función  $f(x) = x + e^{-x}$ , demuestra que existe algún número real  $c$  tal que  $c + e^{-c} = 4$ .**

$f(x) = x + e^{-x}$  es una función continua en  $\mathbb{R}$ . Calculamos algunos valores de  $f$

$$f(0) = 0 + e^0 = 1 \quad f(5) = 5 + e^{-5} = 5,007$$

Por el teorema de los valores intermedios,  $f(x)$  toma todos los valores del intervalo  $[1; 5,007]$ .

Por tanto, existirá un  $0 < c < 5$  tal que  $f(c) = 4$ . Es decir,  $c + e^{-c} = 4$