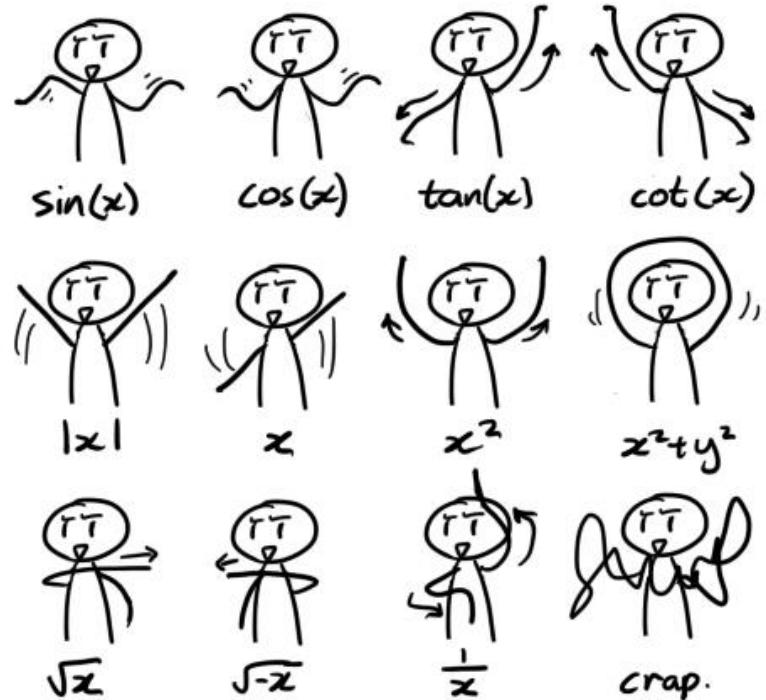


Beautiful Dance Moves



ANALISIA: 9. FUNTZIOAK

9. OINARRIZKO FUNTZIOAK

1. FUNTZIO KONTZEPTUA

2. OINARRIZKO FUNTZIOAK

- Funtzio polinomikoak: funtzio lineala eta funtzio koadratikoa
- Funtzio errodunak
- Funtzio arrazionalak
- Zatika definitutako funtzioak
- Funtzio esponentzialak
- Funtzio logaritmikoak
- Funtzio trigonometrikoak
- Zatika definitutako funtzioak
- Balio absolutudun funtzioak

1. FUNTZIO KONTZEPTUA

Definizioa.-

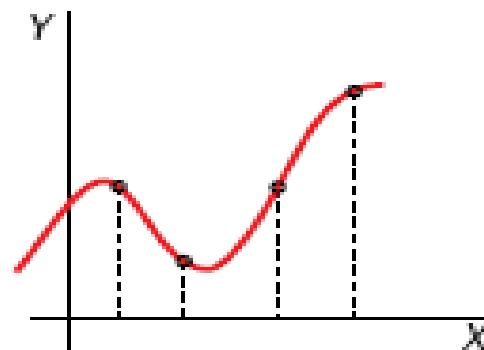
f aldagai errealeko **funtzio erreal** bat dala esango dogu baldin eta x zenbaki erreal bakoitzari ($x \in Dom f$), beste zenbaki bat, $y = f(x)$, badagokio.

Beraz, funtzio bat bi aldagairen arteko **erlazio** bat da.

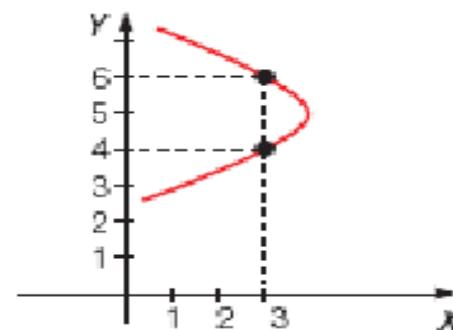
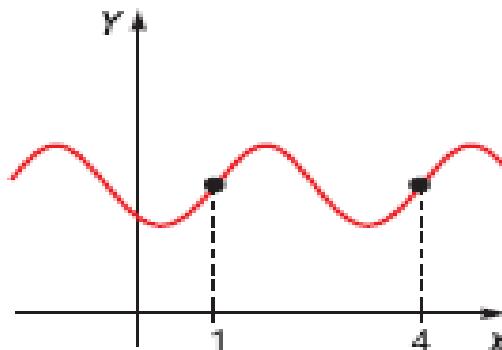
$$\begin{array}{ccc} f: Dom f \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & Im f \subseteq \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

x aldagaiari aldagai askea deritzogu eta y aldagaiari menpeko aldagai.

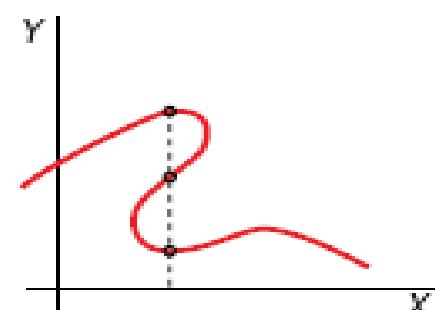
OHARRA: grafiko guztiak EZ dira funtzioak



BAI, x -ren balio bakoitzari, $f(x)$ bakar bat dagokio

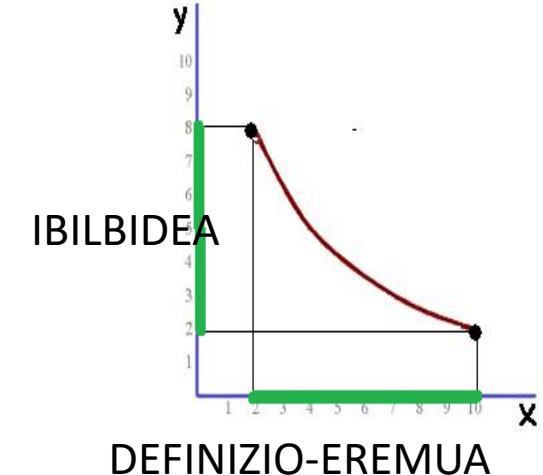


EZ dira funtzioak



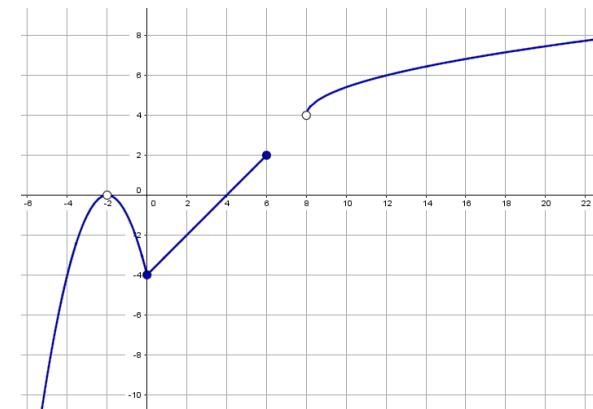
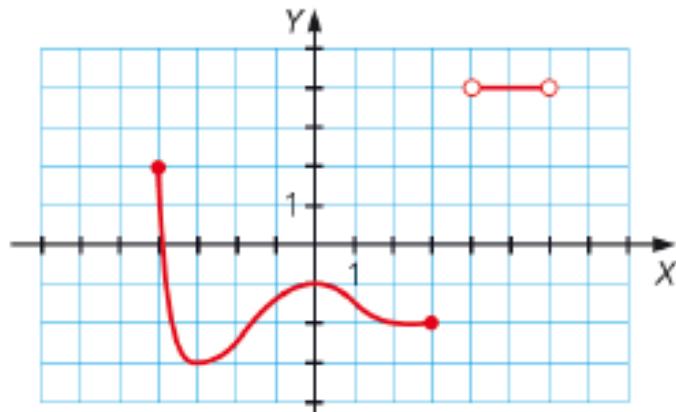
1.1. DEFINIZIO EREMUA ETA IBILARTEA

Demagun ondorengo funtziola daukagula:

$$f: \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \text{Im } f \subseteq \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$


- f funtziaren **definizio-eremua (Dom f)**: funtziola definituta dagoen balioek osatzen duten multzoa.
- f funtziaren **ibilbidea edo ibiltartea (Im f)**: funtziola hartzen dauazan balioen multzoa.

4. Kalkulatu irudian agertzen dan adierazpen grafikoa dauan funtziaren eremua eta ibiltartea.



1. 2. DEFINIZIO-EREMUA KALKULATZEN

- **FUNTZIO POLINOMIKOAK:** zenbaki **erreal guztiarako** definituta.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

- **FUNTZIO ARRAZIONALAK (izendatzailean x dabezan adierazpenak):** EZ dagoz definituta izendatzailea anulatzen dan puntuetan.

$$f(x) = \frac{12x - x^2}{x^2 - 9} \longrightarrow \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3, -3\}$$

- **ERROTZAILE BIKOITIA** dabezan erroketak: errokizun positiboetarako edo nuluetarako soilik definituta.

$$f(x) = \sqrt{3x - 7} \quad \longrightarrow \quad \text{Dom } f = \left[\frac{7}{3}, \infty \right)$$

- **FUNTZIO LOGARITMIKOAK:** zenbaki erreal positiboetarako soilik definituta.

$$f(x) = \log_5(x - 6) \quad \longrightarrow \quad \text{Dom } f = (6, \infty)$$

- **FUNTZIO ESPONENTZIALAK:** zenbaki **erreal guztieta rako** definituta.

$$f(x) = e^{x+2} \quad \longrightarrow \quad \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

- **SINU ETA KOSINU ARRAZOIAK:** zenbaki **erreal guztieta rako** definituta.

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \longrightarrow \quad \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

- **TANGENTEA:** ez dago definituta $\cos\alpha = 0$ danean.

$$f(x) = \tan x \quad \longrightarrow \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

239.

1. 2. DEFINIZIO-EREMUA KALKULATZEN: ARIKETA

1 Aurkitu funtzioren bakoitzaren definizio-eremua:

a) $y = \frac{x^3 - 7x - 6}{x^3 - 8x^2 + 15x}$

b) $y = \frac{x-3}{x^2 + x + 1}$

2 Aurkitu funtzioren bakoitzaren definizio-eremua:

a) $y = \sqrt{x^3 - 8x^2 + 15x}$

b) $y = \sqrt{x^4 + x^2}$

c) $y = \log(x^4 + x^2)$

3 Aurkitu funtzio honen definizio-eremua:

$$y = \frac{\log(x-1)}{\sqrt{5x-x^2}}$$

239.Orr 1,2,3,4,5,6

259.orr 1-2-3-4

SIMETRIA ETA PERIODIKOTASUNA: ARIKETAK

54. Esan ea baduen simetria motaren bat funtziobakoitzak.

a) $f(x) = x^3 - 3x$

c) $f(x) = x^2 - x$

b) $f(x) = x^4 - 1$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2$

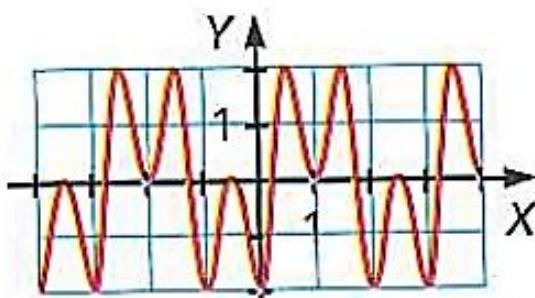
55. Adierazi zer simetria mota duen funtziobakoitzak.

a) $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x}$

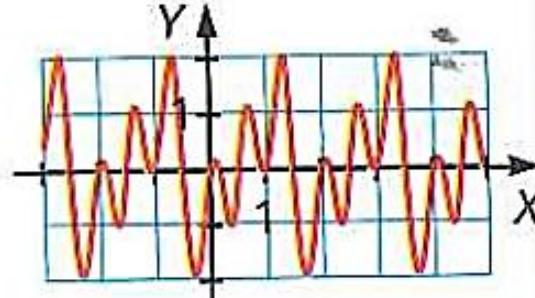
b) $f(x) = \frac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$

56. Kalkulatu funtziobakoitzaren periodoa.

a)



b)



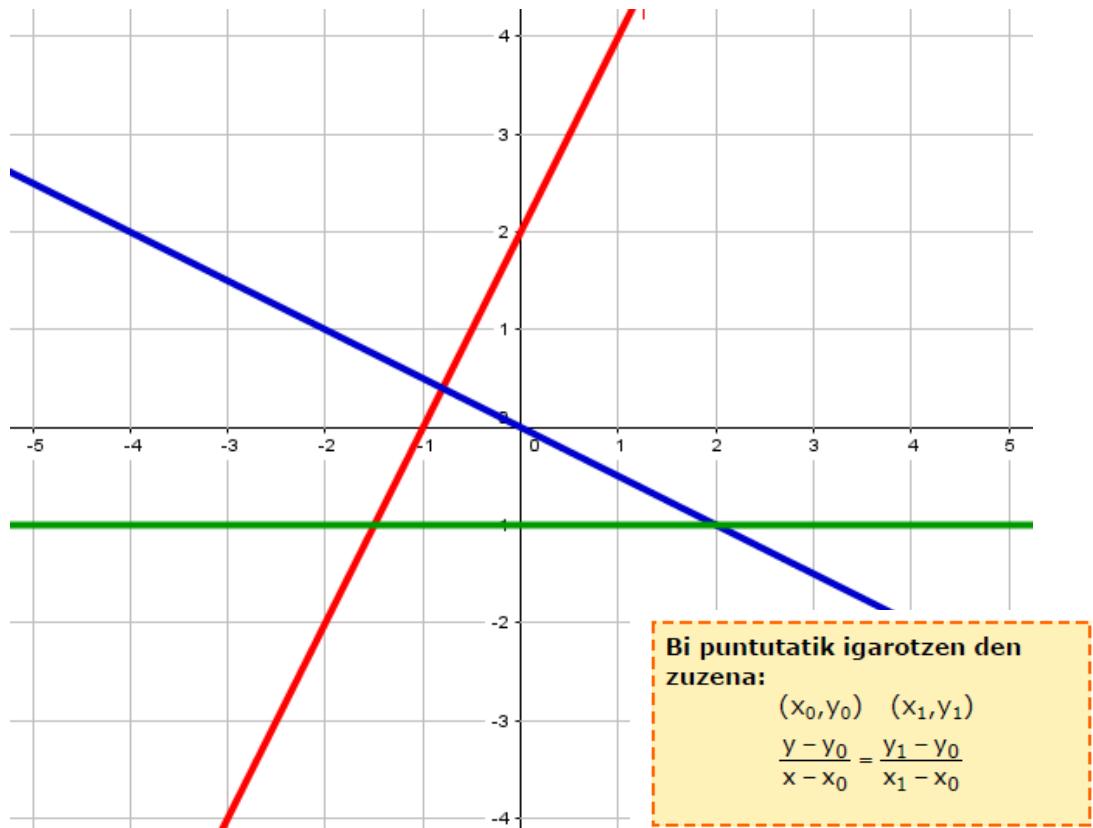
2. OINARRIZKO FUNTZIOAK

GeoGebra

2. 1. FUNTZIO POLINOMIKOAK

- Lehenengo mailako funtzioak: funtzio afinak

$$f(x) = mx + n$$



Lehen mailako funtzio polinomiokoengen grafikoa: **zuzena**

Ezaugarriak:

- **Dom $f = \mathbb{R}$**
- **m : malda**
 - $m > 0$ bada: gorakorra
 - $m < 0$ bada: beherakorra
 - $m = 0$ bada: konstantea ($f(x)=n$)
Gogoan izan: $m = \frac{d_2}{d_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- **n : ordenatua jatorrian (OY ardatzarekiko ebakidura)**
 \Rightarrow zuzena $(0, n)$ puntutik pasatu

• Bigarren mailako funtziokoak: funtzioko koadratikoak

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Funtzioko koadratikoen adierazpen grafikoa: **parabola**

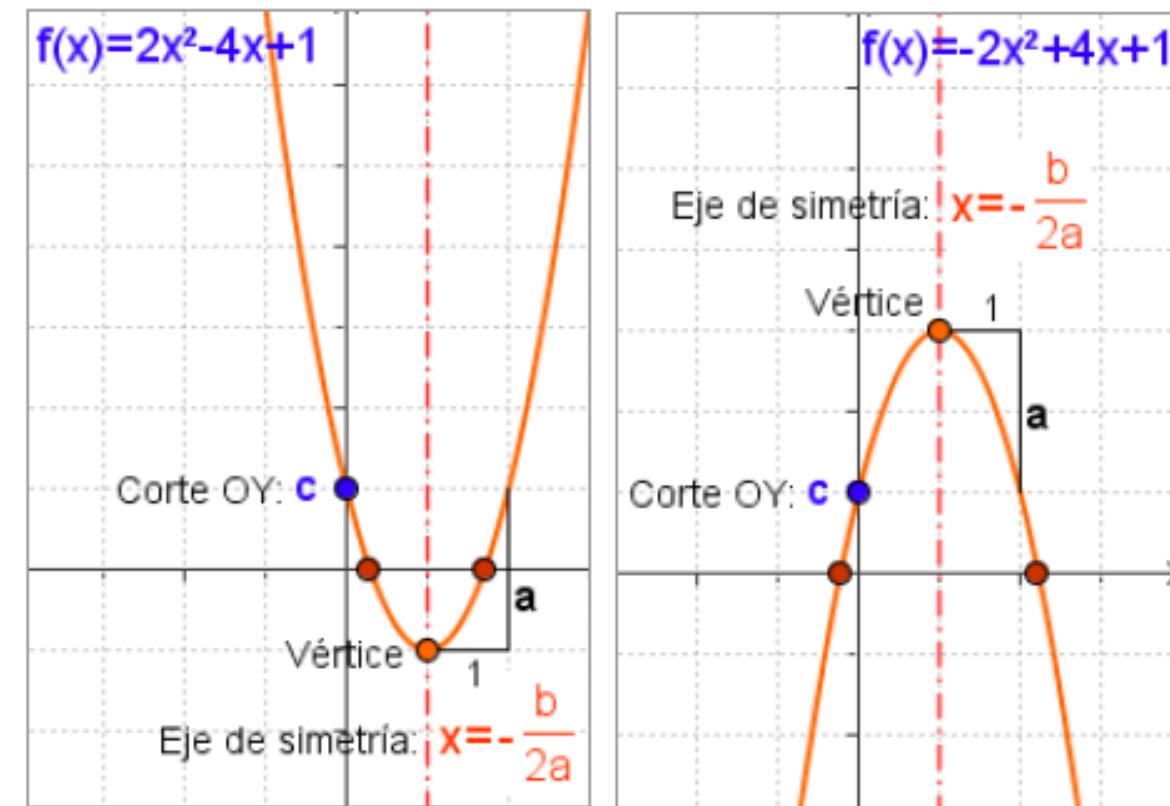
Ezaugarriak:

- **Dom $f = \mathbb{R}$**
- Parabolaren **erpina**: $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow E = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- **Simetria ardatza**: $x = -\frac{b}{2a}$
- **a -k ahurtasuna** adierazi:
 - $a > 0$ bada: ahurra eta erpina minimoa
 - $a < 0$ bada: ganbila eta erpina maximoa
- **$|a|$ zenbat eta handiagoa, orduan eta itxiagoak adarrak**
- Ebaketa puntuak ardatzerekaz:
 - OY ardatzarekiko ebakidura: $x=0$
 - OX ardatzarekiko ebakidura: $y = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

259.Orr 10

Grafikoa irudikatzeko pausuak:

- 1-Erpina kalkulatu
- 2-Kurbatura aztertu
- 3-Ebaketa puntuak
- 4-Balio taula



2. 2. FUNTZIO ARRAZIONALAK-ALDERANTZIZKO PROPORTZIONALTASUNEKO FUNTZIOAK

GeoGebra

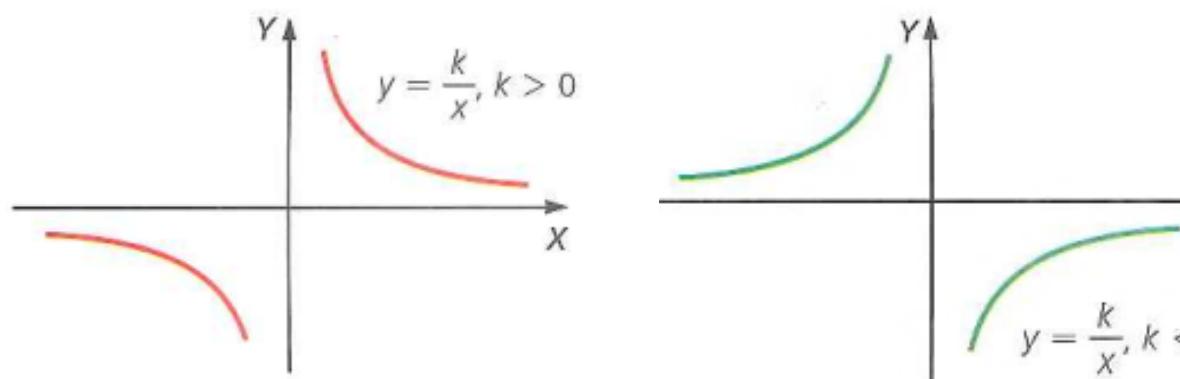
Funtzio arrazionalak adierazpen algebraikoa polinomioen arteko zatiketa modukoa daukienak dira:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
 motatakoak, non $Q(x) \neq 0$ da.

Alderantzizko proportzionaltasuneko funtzioa mota honetako funtzio bat da:

$$f(x) = \frac{k}{x} \text{ non } k \neq 0$$

Funtzio honen grafikoari **HIPERBOLA** deritzo



Ezaugarrriak:

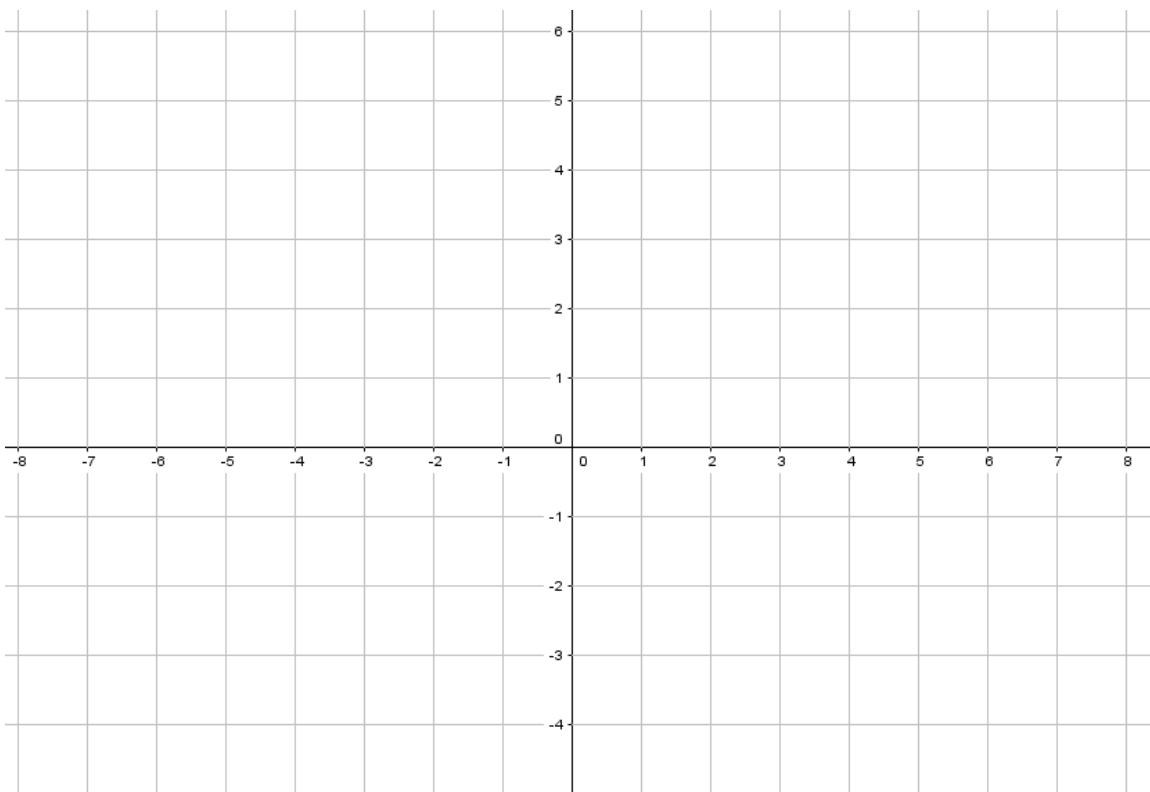
- $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Asintota bertikala: $x = 0$
- Asintota horizontala: $y = 0$
- Funtzioak ez dau koordenatu-ardatzak ebakitzentz
- $k > 0$ bada: beherakorra eta 1. eta 3. koadrantean definituta
- $k < 0$ bada: gorakorra eta 2. eta 4. koadrantean definituta

a) $y = \frac{3x}{x - 1}$

b) $y = \frac{x - 2}{x - 4}$

c) $y = \frac{3x + 2}{x + 1}$

d) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$

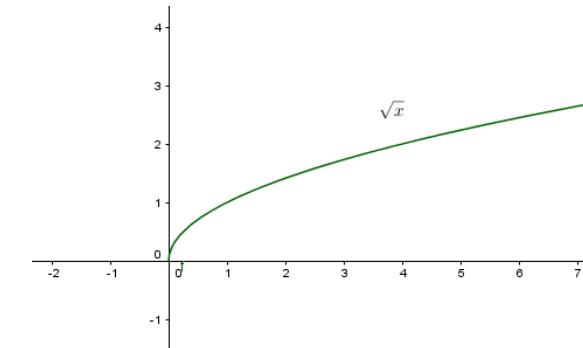


2. 3. FUNTZIO ERRODUNAK

Funtzio errodunetan x aldaia erroketa ikurraren barruan dago: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

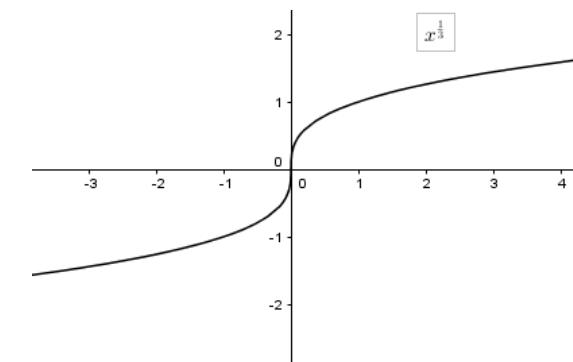
Ezaugarriak:

- **n bikoitia bada:** $\text{Dom } f = g(x) \geq 0$ dan tartea
- **n bakoitia bada :** $\text{Dom } f = \mathbb{R}$



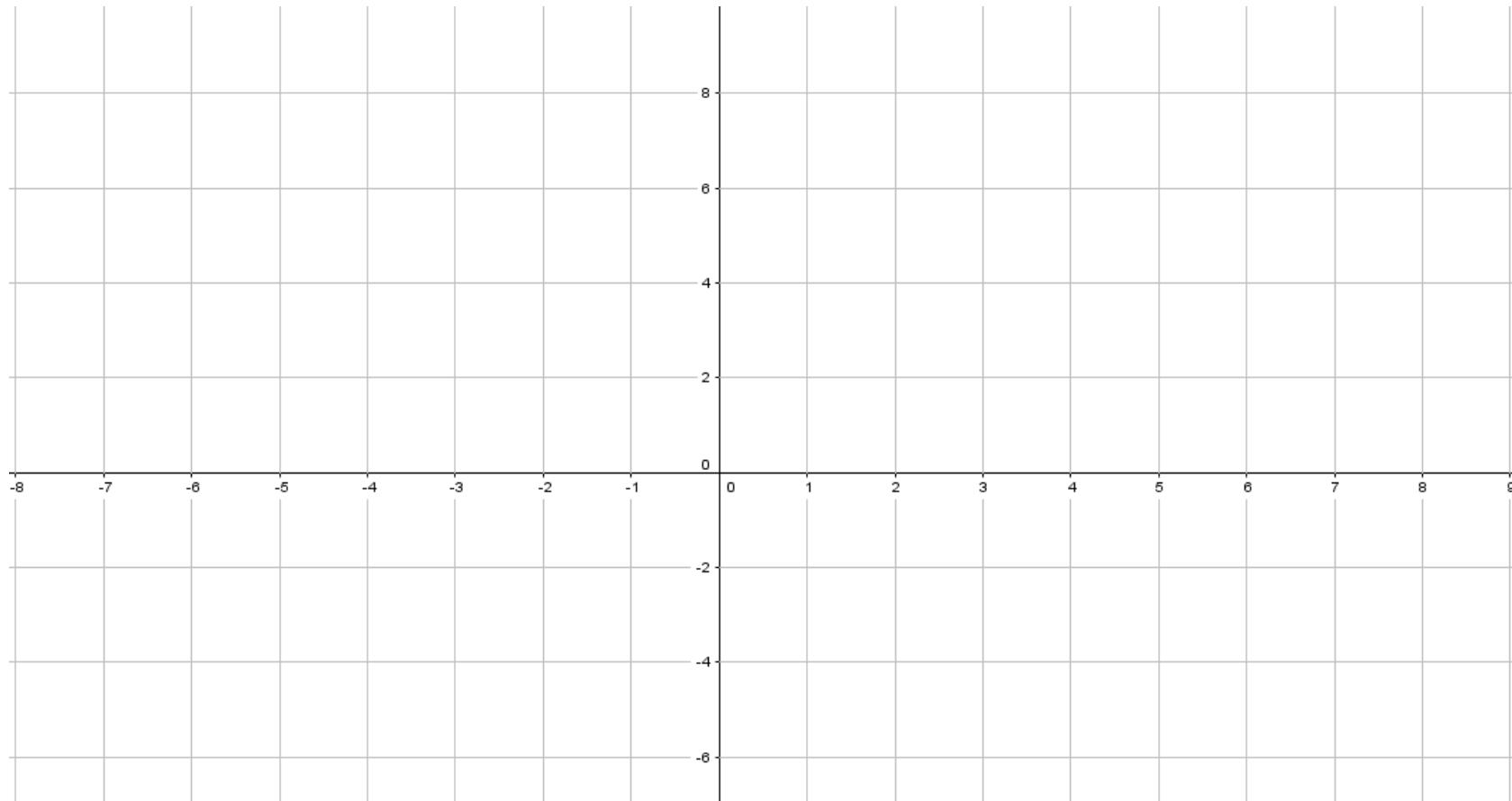
Adierazpen grafikoa egiteko:

- Definizio eremua zehaztu
- Kalkulatu x –en balioa $f(x) = 0$ denerako
- Balio taularen bidez puntuak atera



14. Adierazi funtzi hauek grafikoki:

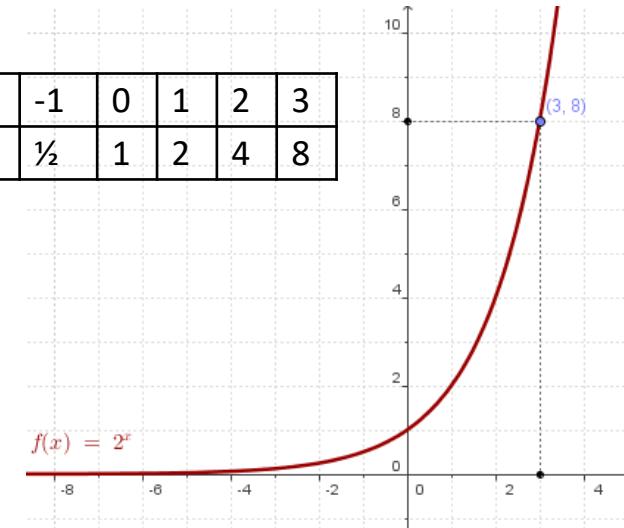
a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ b) $f(x) = \sqrt{x - 4}$



2. 4. FUNTZIO ESPONENTZIALAK

$a > 1$ eta $a \neq 1$

	X	-2	-1	0	1	2	3
Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	

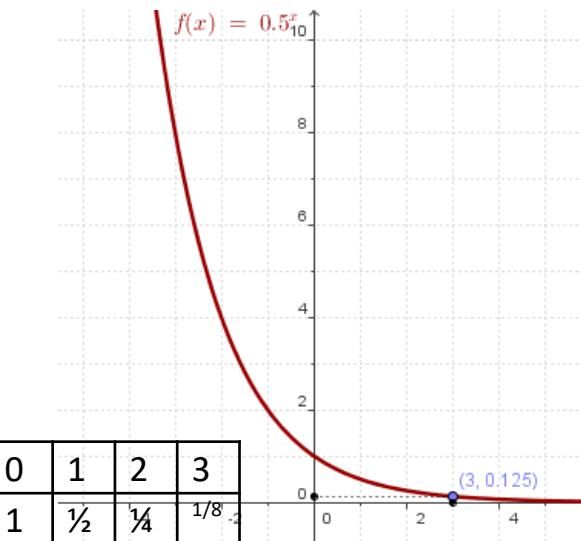


Ezaugarriak:

- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
- $\text{Im } f = (0, \infty)$
- $a^0 = 1$ danez, $(0,1)$ puntutik pasatu beti
- $a^1 = a$ danez, $(1,a)$ puntutik pasatu beti
- $a > 1$ bada: gorakorra
- $0 < a < 1$ bada: beherakorra
- Asintota horizontala: $y = 0$
- FUNTZIO ESPONENTZIAL ARRUNTENA: $f(x) = e^x$

e zenbakia: 2.7182818285 ...

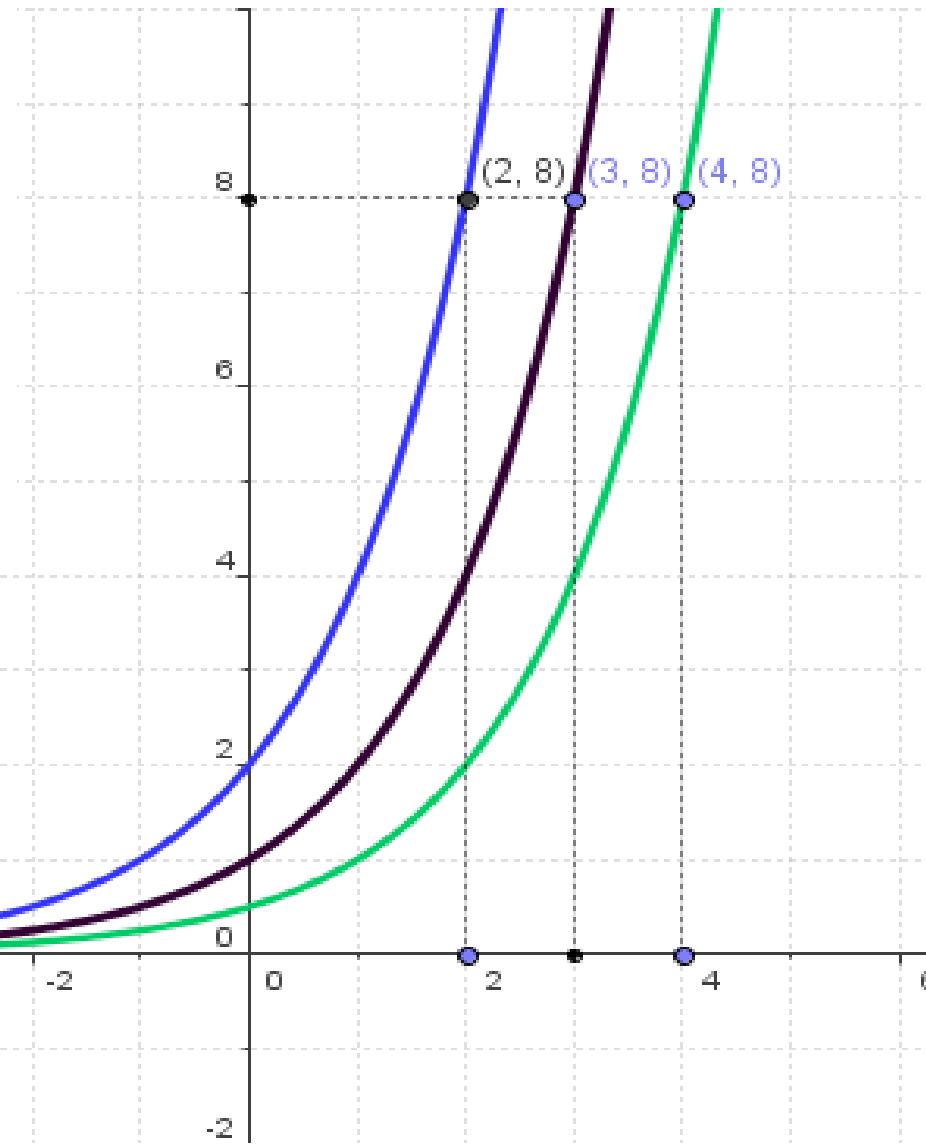
	X	-2	-1	0	1	2	3
Y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	



$$f(x) = 2^x$$

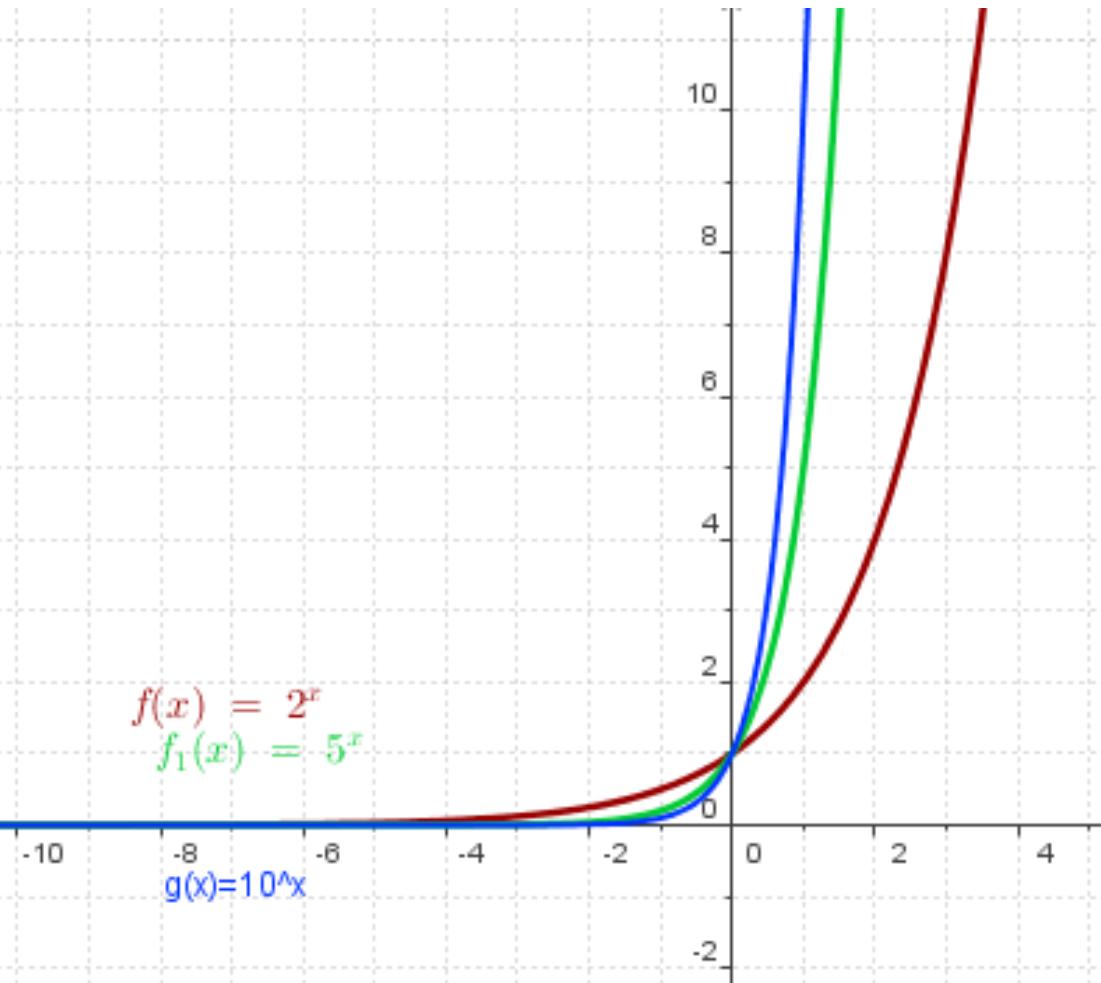
$$f_2(x) = 2^{x+1}$$

$$f_1(x) = 2^{x-1}$$

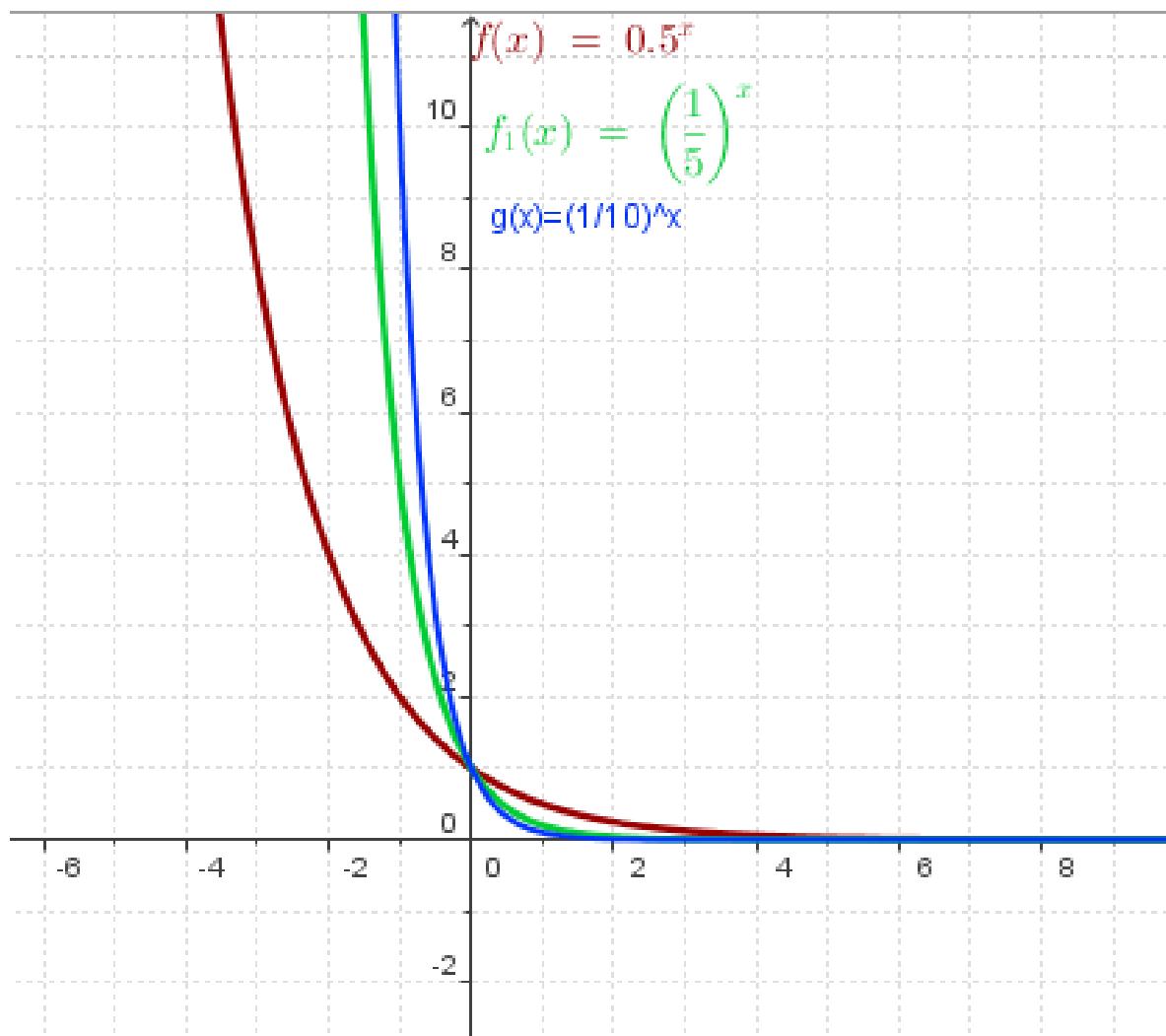


$$f(x) = 2^x$$
$$f_1(x) = 5^x$$

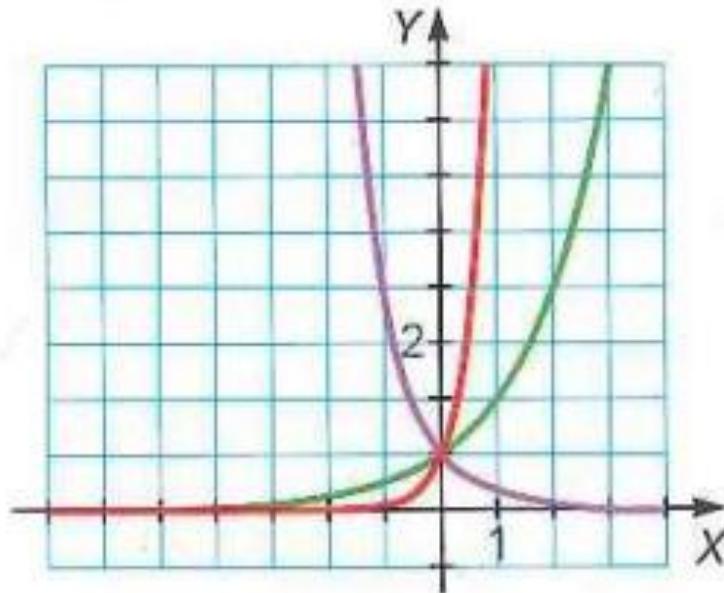
$$g(x)=10^x$$



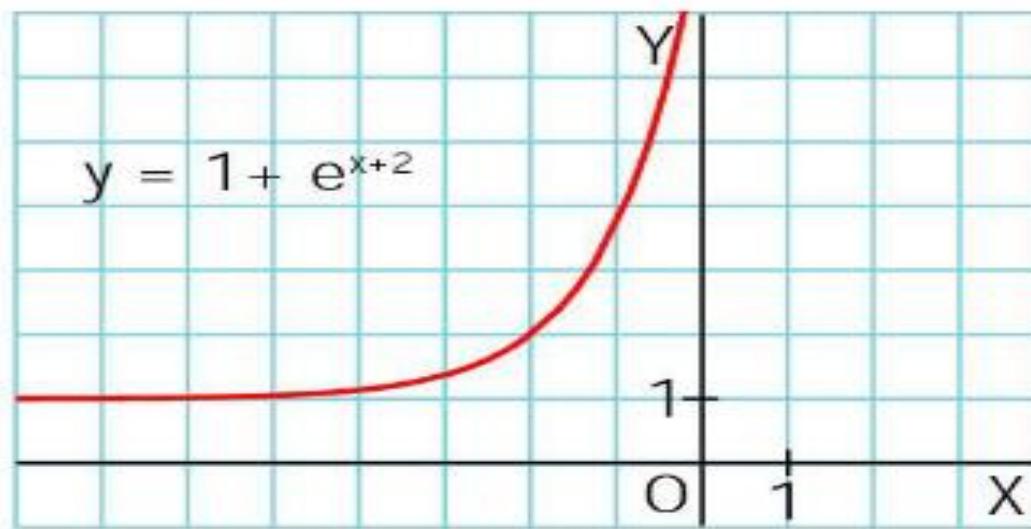
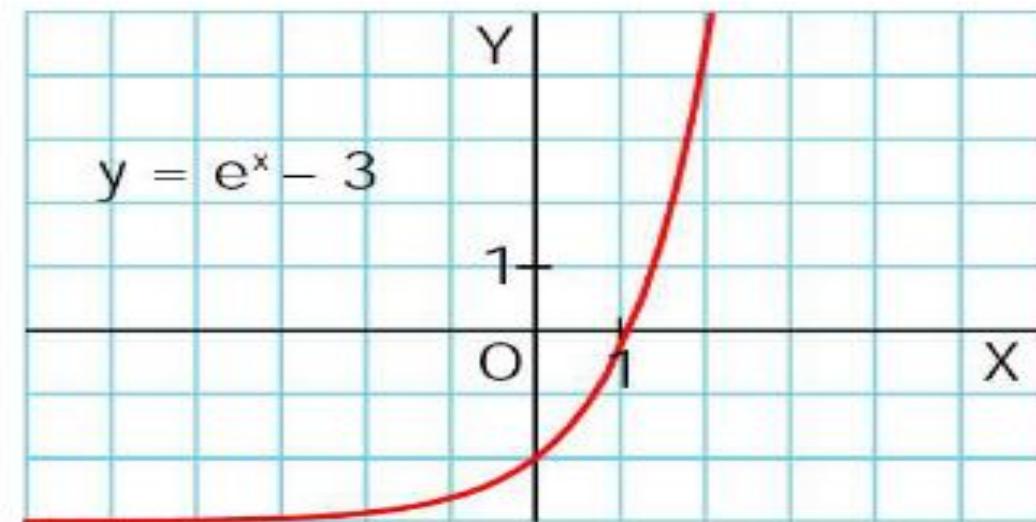
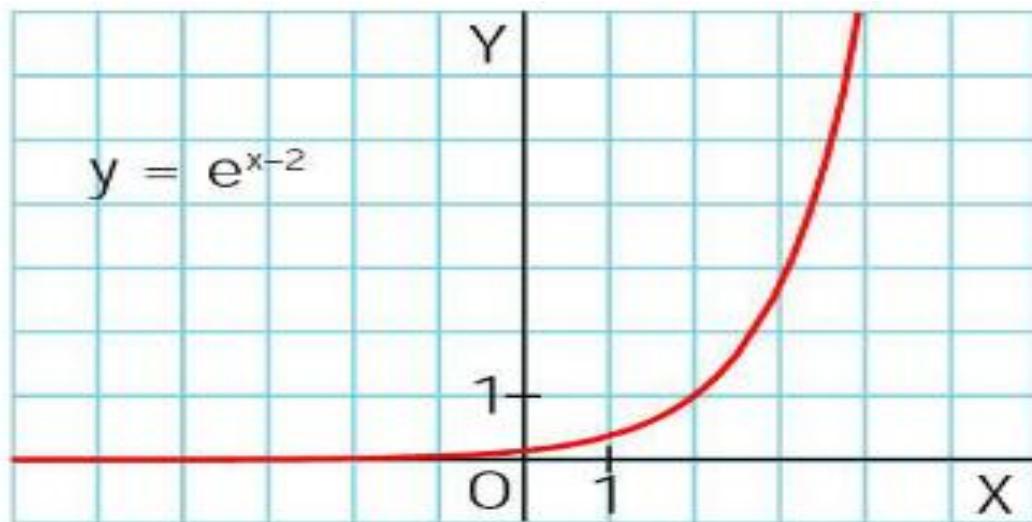
$$f(x) = 0.5^x$$
$$f_1(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$
$$g(x)=(1/10)^x$$



83. Lotu adierazpen grafiko bakoitzak funtziorekin.



- a) $f(x) = 12^x$ b) $g(x) = 2^x$ c) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$



84. Adierazi funtzio esponentzialen hiruko hauek koordenatu-ardatz beretan:

a) $f(x) = 2^x$

$g(x) = 5^x$

$h(x) = 10^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

$h(x) = 10^x$

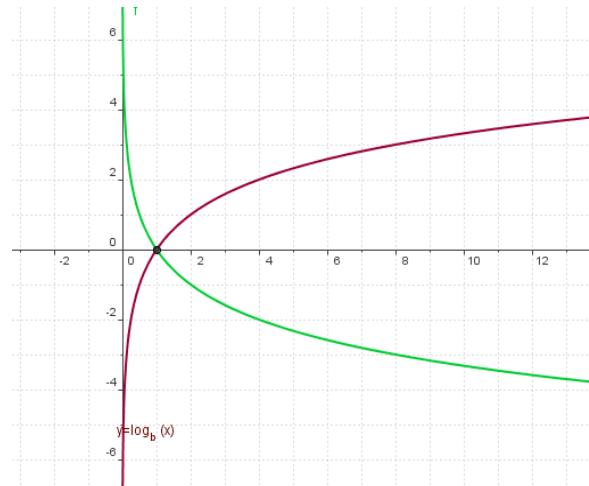
2. 5. FUNTZIO LOGARITMIKOAK

Funtzio logaritmikoak $f(x) = \log_a x$ motakoak dira non $a > 0$ dan eta $a \neq 1$

Gogoan izan:

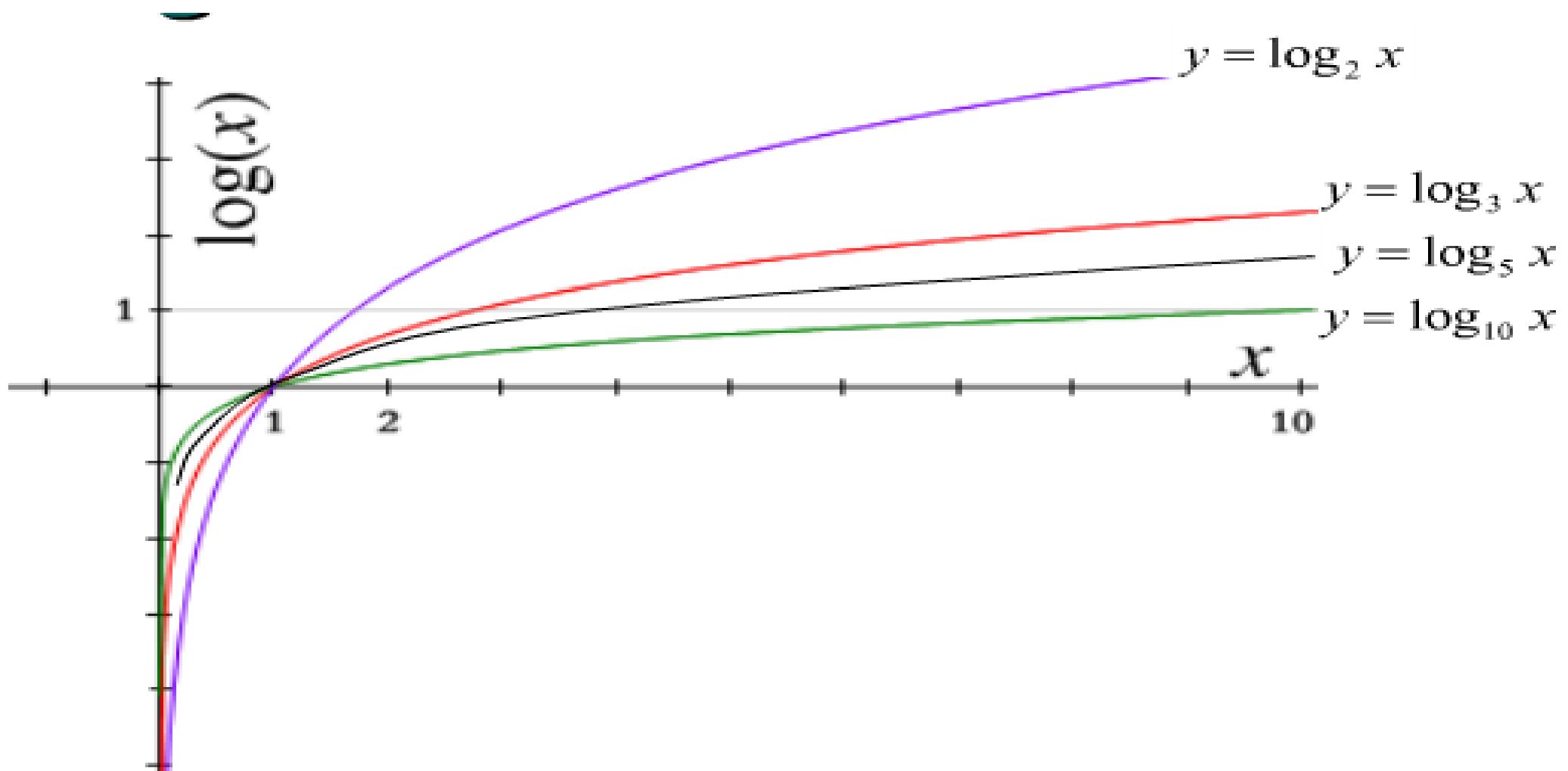
Ezaugarriak:

- $\text{Dom } f = (0, \infty)$
- $\text{Im } f = \mathbb{R}$
- $\log_a 1 = 0$ danez, $(1, 0)$ puntutik pasatu beti
- $\log_a a = 1$ danez, $(a, 1)$ puntutik pasatu beti
- $a > 1$ bada: gorakorra
- $0 < a < 1$ bada: beherakorra
- Asintota horizontala: $x = 0$

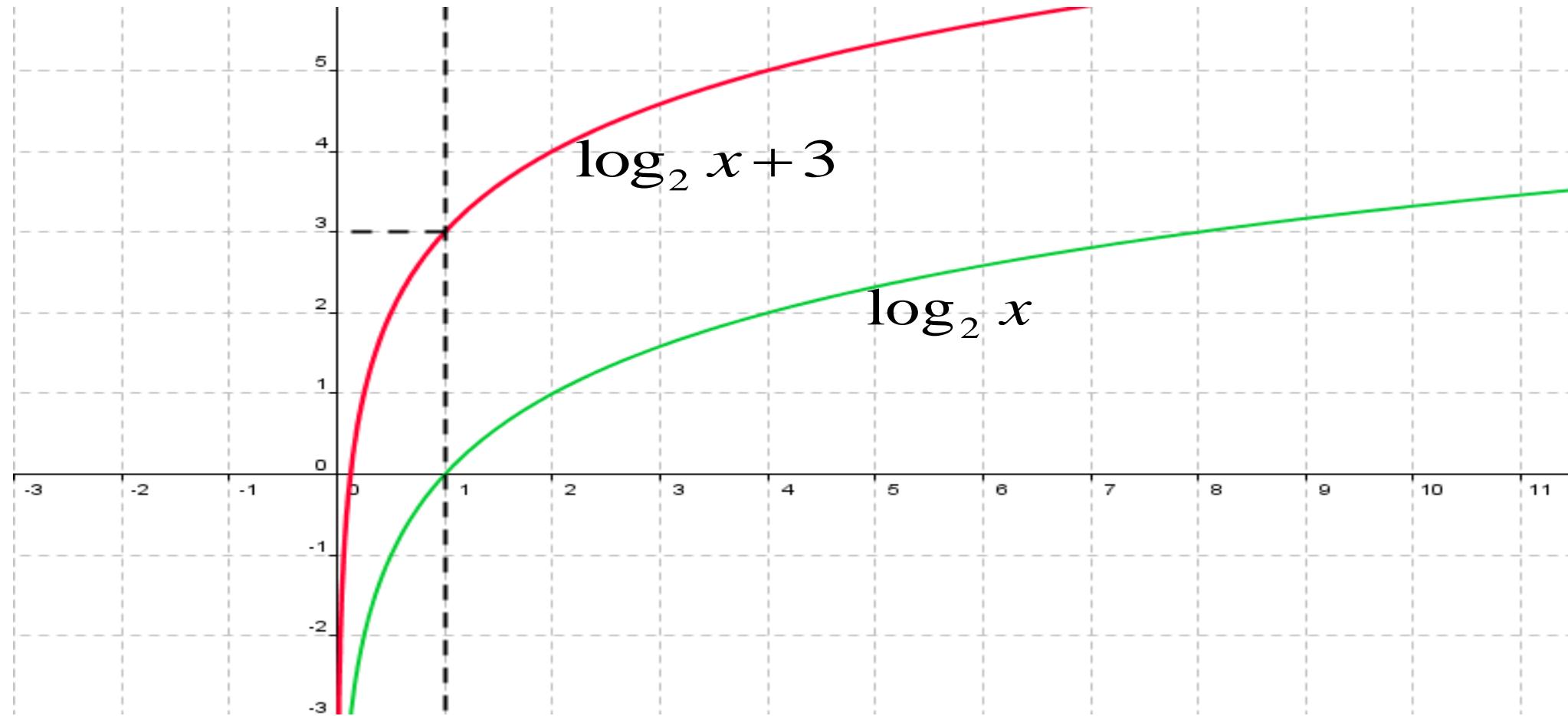


x	$y = \log_2 x$	x	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
1/8	-3	1/8	3
1/4	-2	1/4	2
1/2	-1	1/2	1
1	0	1	0
2	1	2	-1
4	2	4	-2
8	3	8	-3

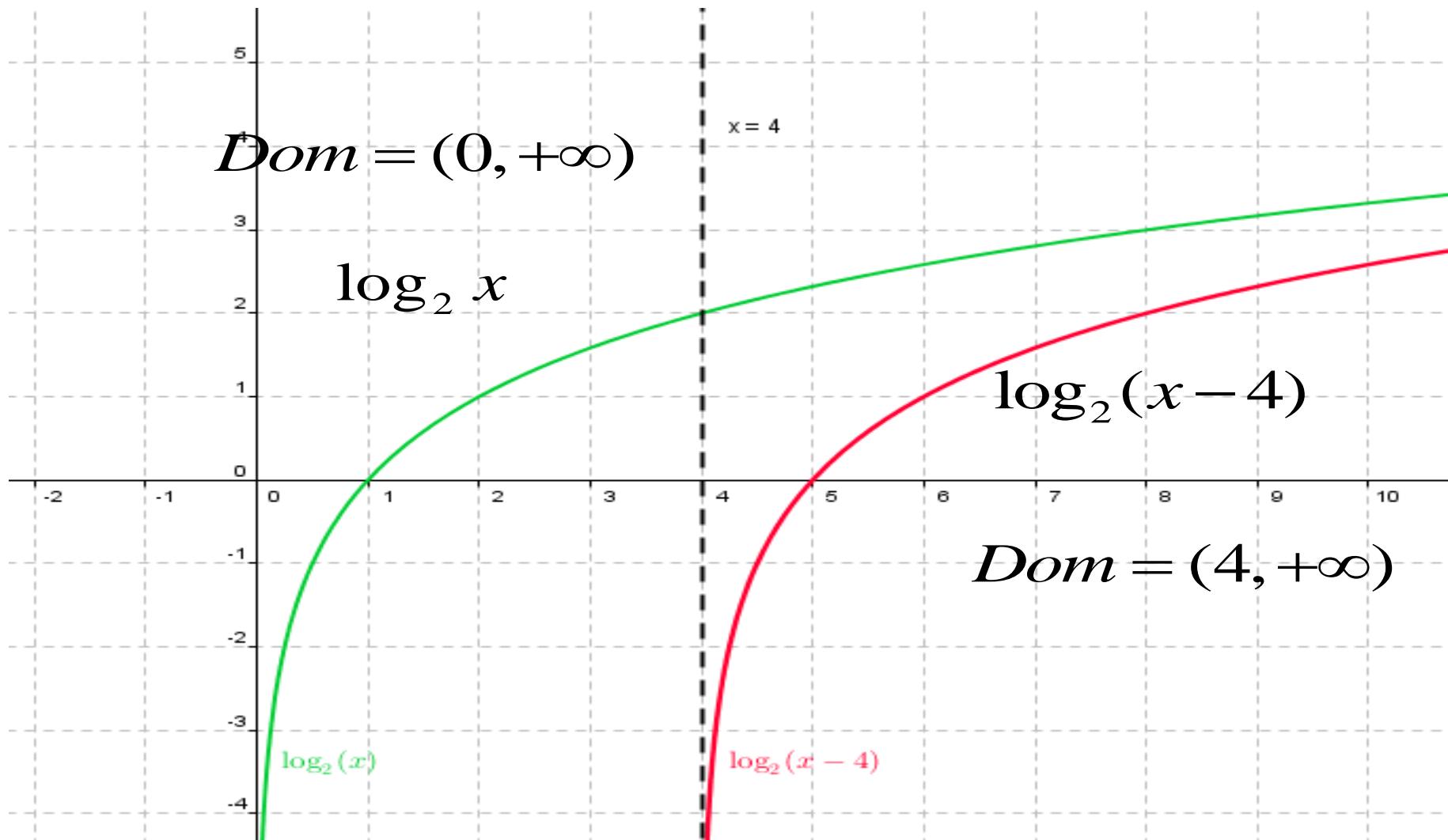
10. FUNTZIO LOGARITMIKOA



10. FUNTZIO LOGARITMIKOA

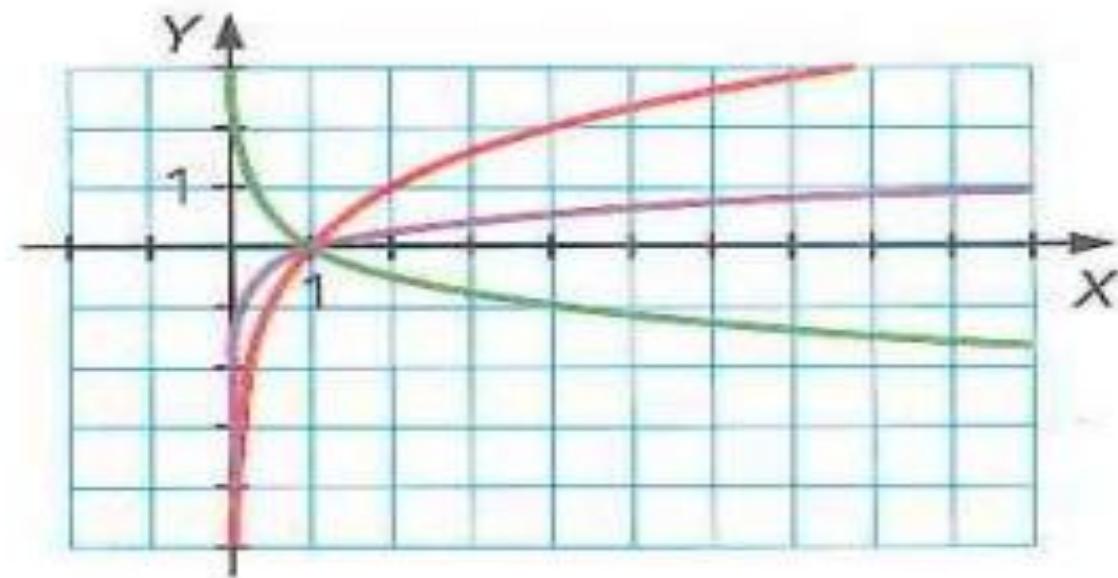


10. FUNTZIO LOGARITMIKOA



88. Lotu grafiko bakoitzak dagokion funtzioarekin.

- a) $f(x) = \log_{12} x$
- b) $g(x) = \log_2 x$
- c) $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

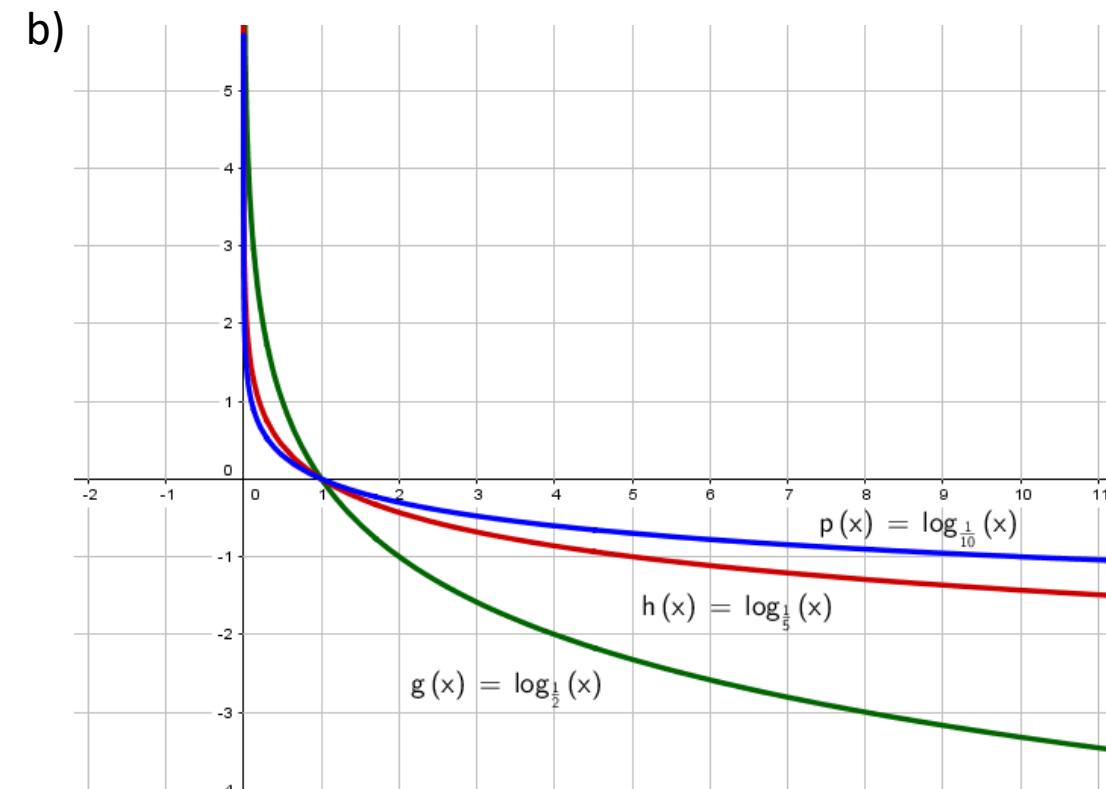
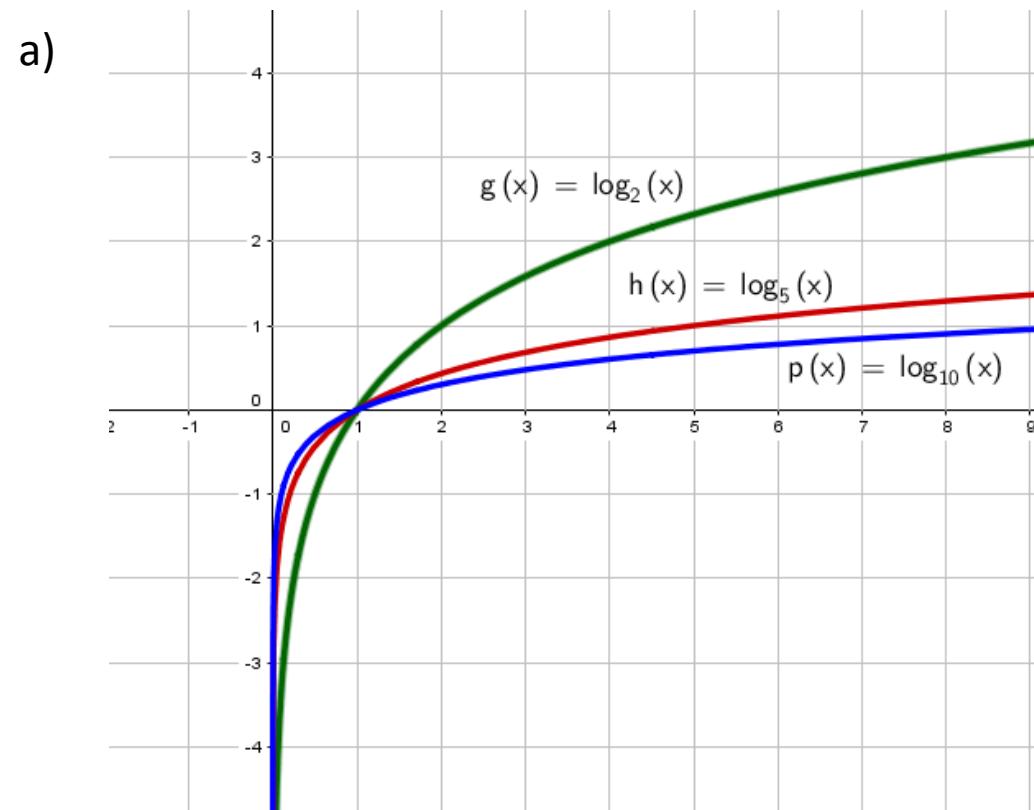


87. Adierazi funtio logaritmikoen hiruko hauek koordenatu-ardatz beretan:

a) $f(x) = \log_2 x$ $g(x) = \log_5 x$ $h(x) = \log_{10} x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ $h(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

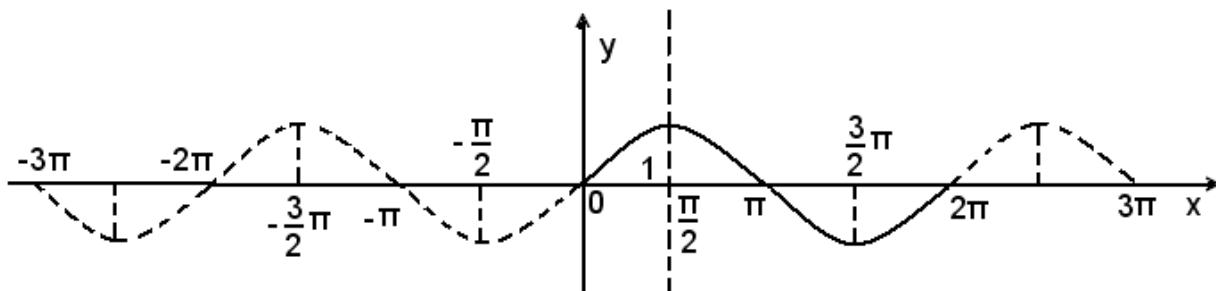
259.Orr 9-10



2. 6. FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

2. 6. 1. SINU ETA COSINU FUNTZIOAK

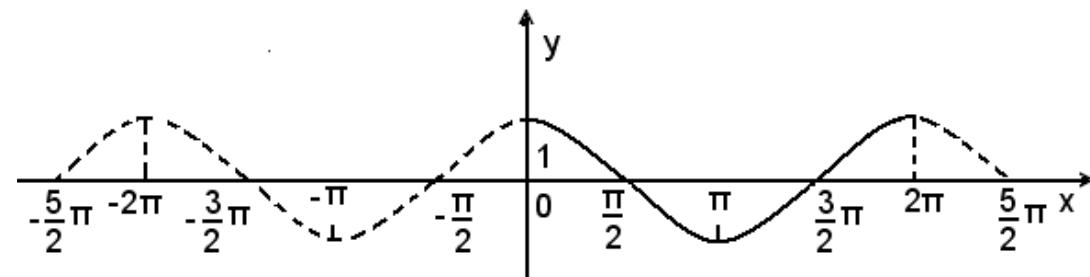
$$f(x) = \sin x$$



Ezaugarriak:

- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
- $\text{Im } f = [-1, 1]$
- Funtzio periodikoa da, 2π periododuna
- $\sin(-x) = -\sin x \Rightarrow$ funtzio bakoitia (koordenatu-ardatzarekiko simetrikoa)

$$f(x) = \cos x$$



Ezaugarriak:

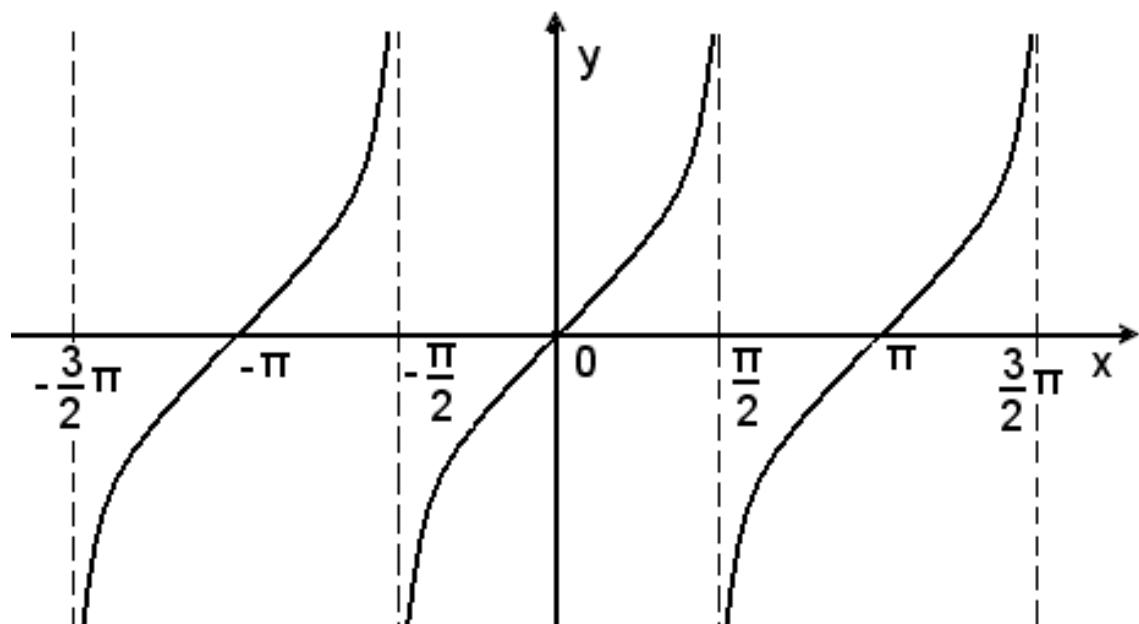
- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
- $\text{Im } f = [-1, 1]$
- Funtzio periodikoa da, 2π periododuna
- $\cos(-x) = \cos x \Rightarrow$ funtzio bikoitia (Y ardatzarekiko simetrikoa)

2. 6. 2. TANGENTE FUNTZIOA

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

Ezaugarriak:

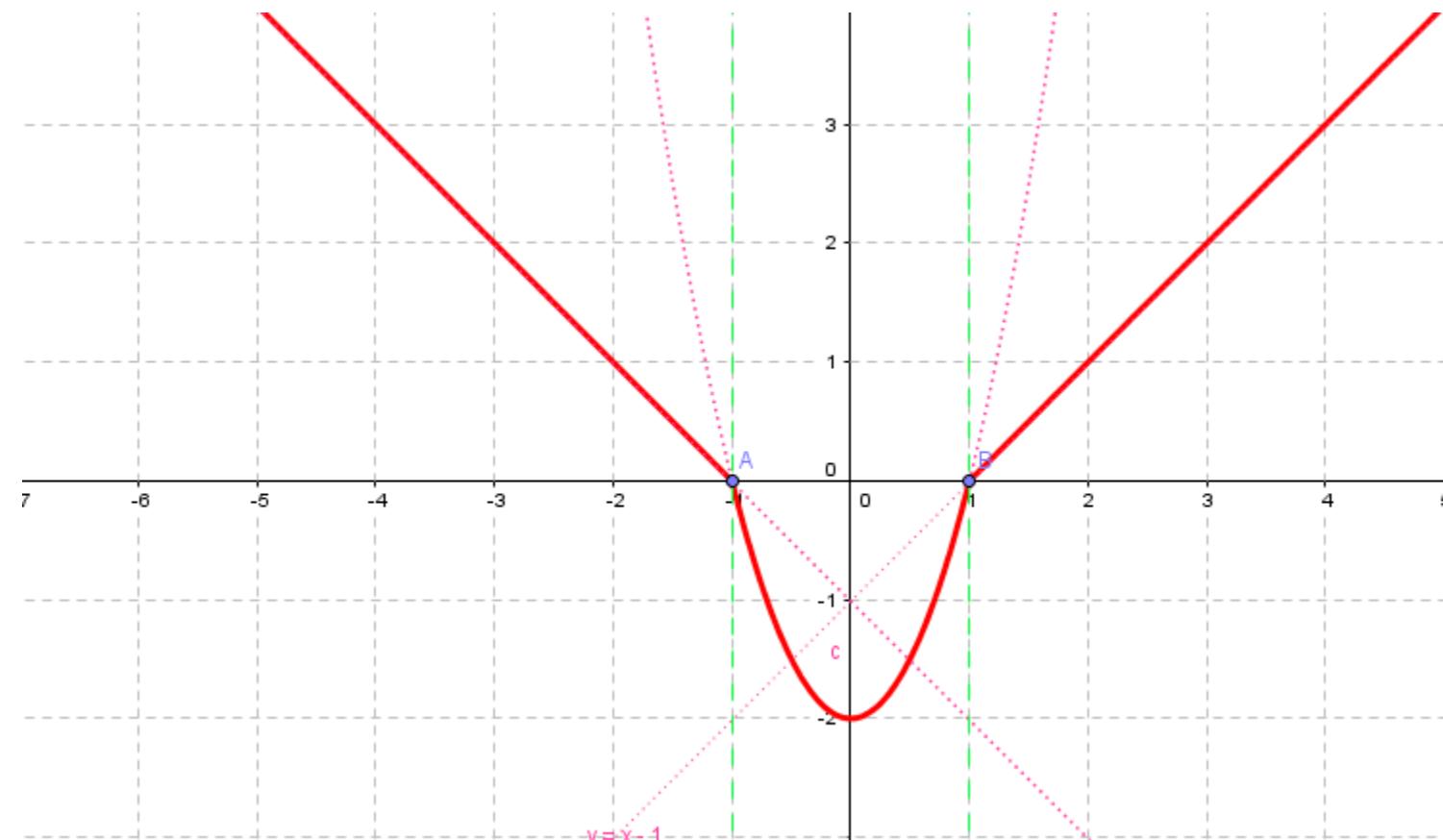
- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$
- Funtzio periodikoa da, π periododuna
- $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \Rightarrow$ funtzio bakoitia (koordenatu-ardatzarekiko simetrikoa)



2. 7. ZATIKA DEFINITUTAKO FUNTZIOAK

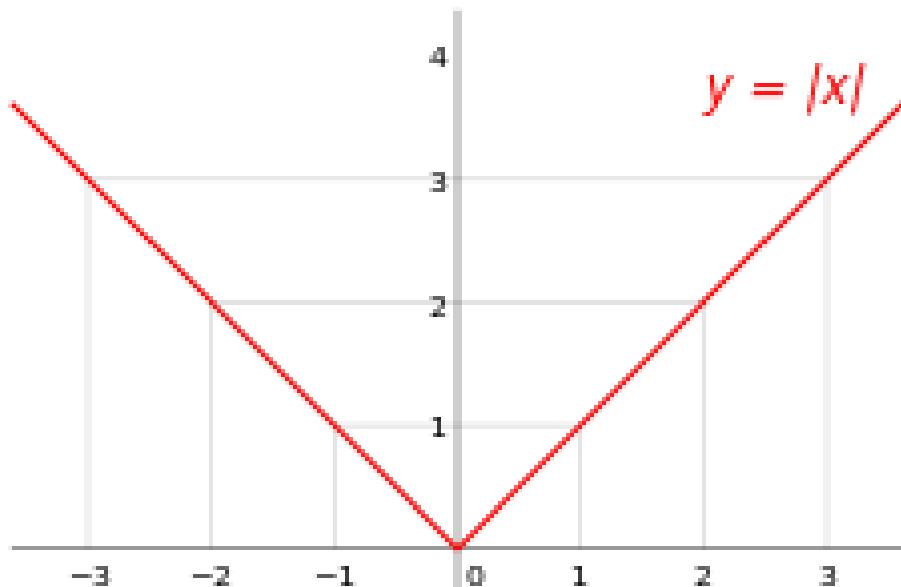
Zatika definitutako funtziobat zenbait adierazpen algebraiko dauzan funtziobat da: x aldagai askea dagoan tartearen arabera, funtziobat edo beste bat aplikatu behar da.

$$y = \begin{cases} -x - 1 & \text{baldin eta } x \leq -1 \text{ bada.} \\ 2x^2 - 2 & \text{baldin eta } -1 < x < 1 \text{ bada.} \\ x - 1 & \text{baldin eta } x \geq 1 \text{ bada.} \end{cases}$$



2.8 BALIO ABSOLUTUA

Zenbaki erreal bakoitzari haren balio absolutua egokitzen deutson funtzioa da.



GRAFIKOTIK ANALITIKO ERAN ADIERAZTEKO

1. Kalkulatu funtziaren balioa 0 egiten dabentzuak.
2. Aztertu tarte bakoitzan funtziak balio positiboak edo negatiboak hartzen dauazan.
3. Tarte negatiboetan funtzioa moldatu:

{
Funtzioa **positiboa** dan tartean $f(x)$ mantenduko da.
Funtzioa **negatiboa** dan tartean $-f(x)$ definituko da.