



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA INDUSTRIAL**

**ANA CÍNTIA BRANDÃO DOS SANTOS**

**UMA COMPARAÇÃO ENTRE O GRÁFICO DE CONTROLE 3-D PARA  $\bar{X}$ -RM E  $\bar{X}$ -S, NA PRESENÇA DE ALTERAÇÕES NA MÉDIA DO PROCESSO: UMA ABORDAGEM PRÁTICA**

**FORTALEZA**

**2022**

ANA CÍNTIA BRANDÃO DOS SANTOS

UMA COMPARAÇÃO ENTRE O GRÁFICO DE CONTROLE 3-D PARA  $\bar{X}$ -RM E  $\bar{X}$ -S, NA  
PRESENÇA DE ALTERAÇÕES NA MÉDIA DO PROCESSO: UMA ABORDAGEM  
PRÁTICA

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Matemática Industrial do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Matemática Industrial.

Orientador: Prof. Dr. João Welliandre  
Carneiro Alexandre

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

B817c Brandao dos santos, Ana Cintia.

UMA COMPARAÇÃO ENTRE O GRÁFICO DE CONTROLE 3-D PARA X-RM E X-S, NA  
PRESENÇA DE ALTERAÇÕES NA MÉDIA DO PROCESSO: UMA ABORDAGEM PRÁTICA  
/ Ana Cintia Brandao dos santos. – 2022.

46 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro  
de Ciências, Curso de Matemática Industrial, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. João Welliandre Carneiro Alexandre.

1. Controle estatístico do processo. 2. gráfico 3-D. 3. desempenho e eficiência do  
gráfico 3-D para a média. I. Título.

CDD 510

---

ANA CÍNTIA BRANDÃO DOS SANTOS

UMA COMPARAÇÃO ENTRE O GRÁFICO DE CONTROLE 3-D PARA  $\bar{X}$ -RM E  $\bar{X}$ -S, NA  
PRESENÇA DE ALTERAÇÕES NA MÉDIA DO PROCESSO: UMA ABORDAGEM  
PRÁTICA

Monografia apresentada ao Curso de Graduação  
em Matemática Industrial do Centro de Ciências  
da Universidade Federal do Ceará, como  
requisito parcial à obtenção do grau de bacharel  
em Matemática Industrial.

Aprovada em: \_\_\_\_/\_\_\_\_/2022

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. João Welliandre Carneiro Alexandre  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Júlio Francisco Barros Neto  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ronald Targino Nojosa  
Universidade Federal do Ceará - UFC

Este trabalho é dedicado a você, familiar ou amigo que contribuiu muito na minha caminhada. Sem vocês eu anda seria.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado essa oportunidade onde conheci a Universidade Federal do Ceará. Obrigado por me abençoar e trazer a coragem e a persistência que precisei para chegar até aqui.

Ao meu orientador, professor João Welliandre Carneiro Alexandre, agradeço por ter aceitado esse convite de orientação, escolha do tema, todas a ajuda necessária e ensinamentos proporcionados durante esse período orientação. O aprendizado, o conteúdo ensinado fizeram fazer valer a pena todo o esforço.

Ao Programa de Aprendizagem Cooperativa em células Estudantis(PACCE), pela experiência com células estudantis, onde aprendi que trabalhar em grupo de forma colaborativa.

Aos amigos de curso, que estiveram comigo durante toda essa caminhada, ajudando nos trabalhos e vivências sociais, Samuel Façanha, Pedro Henrique Rodrigues, Caio Emanuel, obrigado por todo o apoio e atenção durante este percurso.

Aos meus pais, que nos momentos em que estava mais cansada, sempre estiveram ao meu lado, me apoiando nas minhas decisões, agradeço pela educação que me propuseram e pelo amor recebido.

Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, em especial aos professores **Júlio Francisco Barros Neto, Tibérius de Oliveira e Bonates** não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender .

“Nada é esquecido, não completamente. E se  
algo pode ser lembrado, pode voltar..”

(Doctor Who)

## RESUMO

O controle estatístico da qualidade (CEQ) utiliza métodos estatísticos para medir, monitorar, controlar processos e melhorar sua qualidade. O gráfico de controle estatístico do processo, é uma das ferramentas utilizadas para monitorar processos produtivos, devido a sua simplicidade e objetividade, introduzidos por Walter A. Shewart, esse método baseia-se em processos produtivos com único fluxo de produção, ou seja, os produtos são fabricados em série com somente uma saída. Todavia, em processos paralelos, onde há vários fluxos de produção, o monitoramento através dos gráficos tradicionais se torna árduo e burocrático. Em processos paralelos há a presença duas variabilidades diferentes: longitudinal e transversal. Uma alternativa, nesses casos, é a construção do gráfico de controle 3-D, que consiste na elaboração de três gráficos : um para monitorar a média  $\bar{X}$ , um para monitorar a variabilidade transversal  $R_m$  e outro para a variabilidade longitudinal  $S$ . Uma questão a ser investigada é estudar o desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  quando se utiliza a amplitude móvel ou o desvio padrão para a determinação dos limites de controle para  $\bar{X}$ . Portanto, o objetivo deste trabalho é determinar o desempenho dos gráficos de controle  $\bar{X}$ - $R_m$  e  $\bar{X}$ - $S$ , no gráfico de controle 3-D na presença de alterações na média do processo. Como metodologia de pesquisa, foi utilizado os dados da fabricação de rolhas metálicas de uma indústria de transformação cearense. Esse processo consiste em batidas de uma chapa metálica de uma máquina, onde em cada batida são produzidas 27 rolhas que são originadas de 27 punções. Ademais, foram feitas simulações com alteração na média do processo. A partir dos resultados observou-se que, o gráfico  $\bar{X}$ - $R_m$  é menos sensível com relação a pequenas alterações na média do processo, comparado ao gráfico  $\bar{X}$ - $S$  que necessita de um número menor de amostras até a detecção, para os mesmos valores de alteração na média do processo. Vale ressaltar ainda que à medida que cresce a perturbação na média os dois modelos apresentam igual desempenho na detecção de alteração no processo.

**Palavras-chave:** gráfico de controle 3-D; gráfico de controle  $\bar{X}$ - $S$ ; eficiência; abordagem prática



## ABSTRACT

Statistical quality control (CEQ) uses statistical methods to measure, monitor, control processes and improve their quality. The statistical process control chart is one of the tools used to monitor production processes, due to its simplicity and objectivity, introduced by Walter A. Shewart, this method is based on production processes with a single production flow, that is, the products are manufactured in series with only one outlet. However, in parallel processes, where there are several production flows, monitoring through traditional graphics becomes arduous and bureaucratic. In parallel processes, there are two different variations: longitudinal and transverse. An alternative, in these cases, is the construction of the 3-D control chart, which consists of the elaboration of three charts: one to monitor the mean  $\bar{X}$ , one to monitor the transversal variability  $R_m$  and another for the variability longitudinal  $S$ . An issue to be investigated is to study the graphical performance of  $\bar{X}$  when using the moving amplitude or the standard deviation to determine the control limits for  $\bar{X}$ . Therefore, the objective of this work is to determine the performance and efficiency of the control charts  $\bar{X}$ - $R_m$  and  $\bar{X}$ - $S$ , in the 3-D control charts in the presence of changes in the mean of the process. As a research methodology, it was used data from the manufacture of metallic stoppers from a processing industry in Ceará. This process consists of tapping a metal plate from a machine, where in each tapping, 27 corks are produced, originating from 27 punches. Furthermore, simulations were performed with changes in the process mean. From the results it was observed that the graph  $\bar{X}$ - $R_m$  is less sensitive with respect to small changes in the process mean, in relation to the  $\bar{X}$ - $S$  graph that requires a smaller number of samples to perceive the change for the same values of change in the process mean. It is also worth mentioning that as the average perturbation grows, the two models present equal performance in detecting changes in the process.

**Keywords:** 3-D control chart; control chart  $\bar{X}$ - $S$ ; efficiency; practical approach

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de um gráfico de controle de Shewhart . . . . .	18
Figura 2 – Configuração de $k = 27$ punções, cada uma produzindo rolhas metálicas. . .	19
Figura 3 – Lateral Externa do fogão . . . . .	20
Figura 4 – Exemplo de rolha metálica. . . . .	27
Figura 5 – Gráfico de Controle 3-D para a Média utilizando $\bar{X}$ -Rm. . . . .	29
Figura 6 – Gráfico de Controle 3-D para a Média utilizando $\bar{X}$ -S. . . . .	29
Figura 7 – Gráfico de Controle 3-D para a Amplitude Móvel . . . . .	30
Figura 8 – Gráfico de Controle 3-D para o Desvio-padrão. . . . .	30
Figura 9 – Probabilidade de detecção para $\bar{X}$ -Rm com alteração (Delta) na média . . .	35
Figura 10 – $NMA_{21}$ para o gráfico $\bar{X}$ -Rm com alteração (Delta) na média . . . . .	35
Figura 11 – Probabilidade de detecção para $\bar{X}$ -S com alteração (Delta) na média . . . .	37
Figura 12 – $NMA_{22}$ para o gráfico $\bar{X}$ -S com alteração (Delta) na média . . . . .	37
Figura 13 – Eficiência relativa com alteração (Delta) na média . . . . .	39

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Matriz de dados para a construção do gráfico 3-D . . . . .	22
Tabela 2 – Matriz de dados para os cálculos dos limites de controle . . . . .	27
Tabela 3 – Valores para a linha central e limite superior e inferior . . . . .	28
Tabela 4 – Desempenho do gráfico $\bar{X}$ -Rm com alteração na média do processo . . . . .	34
Tabela 5 – Desempenho do gráfico $\bar{X}$ -S com alteração na média. . . . .	36
Tabela 6 – Valores da ER com base no NMA. . . . .	38

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Contextualização . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>1.2.1</b>	<b><i>Objetivos Geral . . . . .</i></b>	<b>14</b>
<b>1.2.2</b>	<b><i>Objetivos Específicos . . . . .</i></b>	<b>14</b>
<b>1.2.3</b>	<b><i>Estrutura do trabalho . . . . .</i></b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITUANDO O GRÁFICO DE CONTROLE 3-D . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Os gráficos de Shewhart . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Discussão sobre processos paralelos e variabilidade transversal e longitu- dinal . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2.2.1</b>	<b><i>Fluxos Independentes . . . . .</i></b>	<b>19</b>
<b>2.2.2</b>	<b><i>Fluxos Dependentes . . . . .</i></b>	<b>19</b>
<b>2.3</b>	<b>Variabilidade transversal e longitudinal . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>2.4</b>	<b>Definindo o gráfico de controle 3-D . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2.5</b>	<b>Estrutura probabilística para determinar o NMA do gráfico 3-D . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>3</b>	<b>APLICAÇÃO DO GRÁFICO 3-D . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>3.1</b>	<b>Entendendo o processo das punções . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>3.2</b>	<b>Descrição dos dados . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>3.3</b>	<b>Resultados e discussões da aplicação . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>4</b>	<b>DESEMPENHO DO GRÁFICO DE CONTROLE 3-D NA PRESENÇA DE ALTERAÇÕES NA MÉDIA DO PROCESSO . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>4.1</b>	<b>Alterações consideradas no processo . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>4.1.1</b>	<b><i>Alteração na média . . . . .</i></b>	<b>33</b>
<b>4.2</b>	<b>Desempenho do gráfico 3-D para média a partir do gráfico <math>\bar{X}</math>-Rm . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>4.3</b>	<b>Desempenho do gráfico 3-D para média a partir do gráfico <math>\bar{X}</math>-S . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>4.4</b>	<b>Eficiência relativa do gráfico 3-D para <math>\bar{X}</math>-Rm e <math>\bar{X}</math>-S . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>40</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>41</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>42</b>

<b>APÊNDICE A</b>	<b>– PROGRAMAÇÃO NO R PARA A CONSTRUÇÃO DO</b>	
	<b>GRÁFICO 3-D . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>– PROGRAMAÇÃO NO R PARA O DESEMPENHO DO</b>	
	<b>GRÁFICO 3-D para o gráfico da média <math>\bar{X}</math>-Rm e <math>\bar{X}</math>-S . .</b>	<b>44</b>
<b>APÊNDICE C</b>	<b>– PROGRAMAÇÃO NO R PARA O CALCULO DA EFI-</b>	
	<b>CIÊNCIA ENTRE OS gráficos <math>\bar{X}</math>-Rm e <math>\bar{X}</math>-S para a média</b>	<b>45</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Nesta seção será abordado a contextualização do tema em estudo, a problemática, a justificativa, os objetivos e a estrutura do trabalho.


## 1.1 Contextualização



O conceito de qualidade é comumente atribuído ao grau ou nível de aceitação de um produto ou serviço pelo cliente (quem avalia o produto ou serviço). GARVIN (2002) define oito dimensões da qualidade, sendo elas: desempenho, confiabilidade, durabilidade, assistência técnica, características, estéticas, qualidade percebida e conformidade com as especificações. Sendo a qualidade inversamente proporcional à variabilidade. De acordo com RAMOS (2000) qualidade deve atender as necessidades do cliente de forma consistente e constante. O Controle estatístico de processo (CEP) monitora um produto ou serviço durante seu processo de produção, de forma a sustentar as melhorias, otimizar os recursos, reduzir erros de produção e melhorar a qualidade do produto final, em todo processo existe certa variação subsequente de diversos fatores e que para essas variações não causarem prejuízos futuros é necessário haver um controle ou fiscalização sobre as mesmas.

Uma das ferramentas que compõem o CEP são Gráficos de Controle Estatísticos do Processo (GCEP) que foram propostos por Walter A. Shewhart do Bell Laboratories no início do século XX. Com o objetivo de monitorar processos produtivos através do acompanhamento do nível da qualidade e a variabilidade do processo, representados em geral pela média e variância,  $\mu_X$  e  $\sigma_X^2$ , respectivamente, em que  $X$  representa a característica da qualidade a ser monitorada.

O modelo de Shewhart consiste na plotagem de pontos que podem representar as médias amostrais  $\bar{X}$  de um processo. Se uma ou mais dessas médias ( $\bar{X}$ ) caírem além os limites de controle: LIC (Limite Inferior de Controle) sendo,  $\mu - 3\sigma_{\bar{X}}$ , e LSC (Limite Superior de Controle) sendo,  $\mu + 3\sigma_{\bar{X}}$ , já previamente determinados, infere-se que uma causa especial possa ter alterado a média do processo de  $\mu$  para  $\mu_1$  sendo  $\mu_1 = \mu + \delta\sigma$ ,  $\delta \neq 0$ , em que  $\delta$  representa uma perturbação na média do processo, alteração esta assumida neste trabalho segue uma distribuição Normal com média  $\bar{X}$  e variância  $(\bar{S}/c4)^2$  e  $\bar{X}$  segue uma distribuição Normal com média  $\bar{X}$  e variância  $(\bar{S}/c4\sqrt{N})^2$ .  $\bar{S}$  e  $c4$  serão vistos posteriormente neste trabalho.

Nos gráficos de Shewhart o monitoramento do processo é feito, por meio de um par de gráficos, e em geral, é aplicado em processos com um único fluxo de produção, onde

os produtos são gerados em série, ou seja, um por vez, em uma única saída. Contudo, é comum encontrar processos com múltiplos fluxos de produção, onde o produto é manufaturado simultaneamente em vários conjuntos de equipamentos, denominado processos em paralelo, onde existe a possibilidade da existência de duas fontes de variações: longitudinal e a transversal. Dentro do setor produtivo, por exemplo, no processo de fabricação de rolhas metálicas onde em cada batida de uma máquina são produzidas várias rolhas originadas de diferentes punções. 

A variabilidade longitudinal em uma chapa metálica é originada ao longo de cada batida  e a variabilidade transversal é originada dentro de cada batida, em que ambas variações têm fontes diferentes e devem ser consideradas na construção dos gráficos de controle, como pode ser visto em Guimarães *et al.* (2021). No modelo de Shewart a determinação dos limites de controle para a média, considera a variação longitudinal da característica da qualidade monitorada. Uma alternativa para evitar essa questão, de acordo com RAMOS (2000)  os gráficos de controle 3-D, que consiste na elaboração de 3 gráficos: um para média, um para a variabilidade longitudinal e o último para monitorar a variabilidade transversal.

Nesse sentido, os Gráficos 3-D são uma ferramenta muito importante para detectar alterações em processos dessa natureza, visto que alterações na média do processo acarretam em um processo fora do controle. Uma questão a se levantar é como se comporta o gráfico para média quando se compara os gráficos  $\bar{X}$ -Rm e  $\bar{X}$ -S para determinar os limites de controle para  $\bar{X}$ , comparando-se o desempenho em detectar alterações no processo, através do número médio de inspeções necessárias entre a ocorrência de uma falha no processo e sua detecção, o que pode gerar prejuízos a empresa, principalmente, financeiros.

## 1.2 Objetivos

Diante da proposta exposta se formulou os objetivos a seguir.

### 1.2.1 Objetivos Geral

O objetivo geral do trabalho visa determinar a eficiência relativa dos gráficos de controle  $\bar{X}$ -Rm e  $\bar{X}$ -S, no gráfico 3-D na presença de alterações na média do processo.

### 1.2.2 Objetivos Específicos



1. Apresentar uma aplicação do gráfico 3-D, utilizando os gráficos para média  $\bar{X}$ -Rm e  $\bar{X}$ -S;

2. Determinar a estrutura probabilística dos Gráficos de Controle 3-D;
3. Determinar o desempenho dos gráficos de controle  $\bar{X}$ -Rm e  $\bar{X}$ -S, para o gráfico de controle 3-D, na presença de alterações na média do processo.

### 1.2.3 Estrutura do trabalho

O presente trabalho é estruturado da seguinte forma:



- Inicia-se com a introdução e os objetivos do trabalho;
- Na segunda seção é apresentada a definição do gráfico de controle 3-D com os gráficos para a média  $\bar{X}$ -Rm e  $\bar{X}$ -S, os conceitos de processos paralelos e variabilidade transversal e longitudinal e a demonstração do cálculo do NMA para o gráfico 3-D;
- A terceira seção é voltada para uma aplicação do gráfico 3-D, em que são utilizados dados reais de uma empresa que produz rolhas metálicas;
- Na quarta seção é discutido o desempenho e a eficiência do gráfico de controle 3-D na presença de alterações na média do processo para  $\bar{X}$ -Rm e  $\bar{X}$ -S;
- A quinta seção traz conclusões acerca dos assuntos abordados.
- Finalizando, tem-se as referências e os apêndices.



## 2 CONCEITUANDO O GRÁFICO DE CONTROLE 3-D

Esta seção apresentará uma breve introdução ao modelo geral de Shewhart. Também será apresentado definições para o gráfico de controle 3-D e a estrutura probabilística para determinar o NMA (Número Médio de Amostras).

### 2.1 Os gráficos de Shewhart

Os Gráficos de Controle foram desenvolvidos inicialmente por Shewhart a partir da década de 30, com a finalidade de eliminar as variações dentro dos processos produtivos, diferenciando-as entre causas aceitáveis, ou seja, presentes de forma constante, e as inaceitáveis, cuja a presença afeta diretamente a qualidade do produto final, que por sua vez deve ser corrigida e eliminada. SHEWHART (1925). Os gráficos de controle de Shewhart, têm como objetivo principal monitorar um processo quando a característica da qualidade é uma variável que pode ser mensurada e expressa em um valor na escala contínua. Sendo esta característica descrita através do nível de qualidade (em geral, a média) e a variabilidade (em geral, a amplitude ou desvio-padrão). Para cada uma destas medidas tem-se um gráfico de controle que representa o comportamento da característica da qualidade ao longo do tempo, estes são compostos por três linhas horizontais, que são: limite inferior de controle (LIC), linha central (LC) e limite superior de controle (LSC). Para a construção desses gráficos, selecionamos amostras periodicamente e registramos um resultado de interesse para avaliar a qualidade. Em geral, temos a suposição de que as amostras são independentes umas das outras e as variáveis são independentes dentro de cada amostra. Além disso, assumimos a normalidade para a variável de interesse quando a característica que estamos monitorando é a média amostral e queremos detectar os desvios do processo em relação à média do processo.

Habitualmente, as linhas de controle ficam numa distância de três desvios-padrão da média ou alvo do processo, SHEWHART (1925) propôs que quando  $k=3$  desvios padrões (fator de largura), raramente um ponto provocará alarme falso (quando o processo detecta um desvio na média que vai além ou a quem dos limites de controle). Embora o uso de exatamente três desvios-padrão é arbitrário, na prática tem funcionado bem na maioria dos casos. Em geral, se todos os pontos estiverem entre os limites de controle, de forma aleatória, assume-se que o processo está sobre controle, caso contrário, o processo está fora de controle e deve-se investigar a causa.

Dentre os gráficos de controle para variáveis, segundo ALEXANDRE *et al.* (2009) os mais comuns e largamente apresentados na literatura são os gráficos da média e amplitude ( $\bar{X}$  e  $R$ ), esse último, apropriado quando  $n \geq 10$ , em que  $n$  representa a quantidade amostral das observações. Quando  $n > 10$ , o gráfico para o desvio padrão (gráfico  $S$ ), deve ser aplicado para monitorar a variabilidade.

A construção dos limites de controle dá-se pela seguinte forma para o gráfico da média ( $\bar{X}$ ), segundo (RAMOS, 2000):

$$LSC = \mu_{\bar{X}} + L\sigma_{\bar{X}} \quad LIC = \mu_{\bar{X}} - L\sigma_{\bar{X}} \quad (2.1)$$

onde,  $\mu_{\bar{X}}$  é a média da distribuição de  $\bar{X}$  assumida da média do processo,  $\sigma_{\bar{X}}$ , é o desvio padrão do processo,  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma_X/\sqrt{n}$  e  $L$  é o fator de largura.

Para os limites de controle de  $\bar{X}$ , como temos  $\mu_{\bar{X}}$  e  $\sigma_{\bar{X}}$  desconhecidos, utiliza-se a média das médias amostrais ( $\bar{\bar{X}}$ ) e a média das amplitudes ( $\bar{R}$ ) para estimá-los, respectivamente (RAMOS, 2000), quando  $n \leq 10$ , usa-se:

$$LIC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \quad LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \quad (2.2)$$

sendo  $d_2$  constantes tabeladas e dependentes de  $n$ , que podem ser encontradas em Montgomery (2000).

Quando  $n > 10$ , o gráfico para amplitude  $R$  se torna ineficiente para grandes amostras quando comparado com o gráfico  $S$  (RAMOS, 2000). Assim, a partir da fórmula geral para os limites de controle e utilizando os estimadores para  $\mu_X$  e  $\sigma_X$ , utilizando a média dos desvios padrão ( $S$ ) para estimar  $\sigma_X$ :

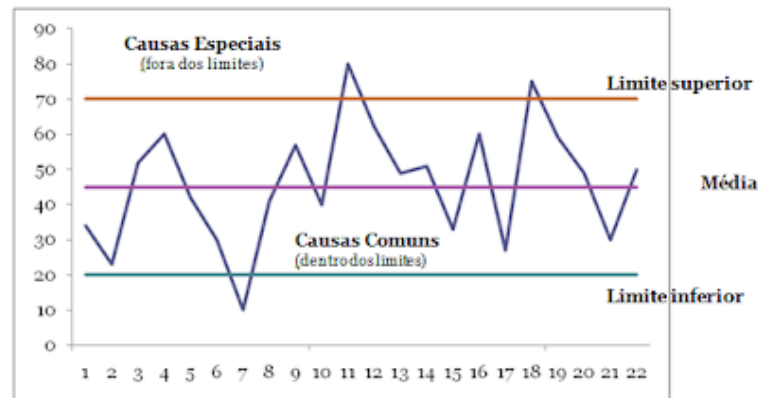
$$LIC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} \quad LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} \quad LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} \quad (2.3)$$

Onde,  $c_4$  é uma constante que depende de  $n$  tabelada.


Os gráficos de controle são elementos visuais para o monitoramento da conformidade de características dos produtos e processos. O gráfico de controle de Shewhart é adequado para processos produtivos com um único fluxo de produção, entretanto, há processos onde, para a produção dos itens, existem mais de um fluxo, como será visto na seção posterior.

A Figura 1 apresenta um exemplo de gráfico de controle Shewhart.

Figura 1 – Exemplo de um gráfico de controle de Shewhart




Fonte: SEMBUGS (2022)

Verifica-se que os pontos que estão fora dos limites de controle indicam a existência de causas especiais que torna o processo fora de controle. 

## 2.2 Discussão sobre processos paralelos e variabilidade transversal e longitudinal

São os processos onde o produto passa por vários fluxos de produção ou são fabricados simultaneamente em diferentes conjuntos de máquinas, onde uma única máquina produz uma quantidade elevada de produtos simultaneamente, com uma única máquina produzindo dezenas de produtos ao mesmo tempo, os processos paralelos acabam trazendo uma diminuição nos gastos para as empresas. Alguns exemplos são: envase de bebidas, cosméticos e produtos farmacêuticos, fabricação de rolhas metálicas, etc ALEXANDRE *et al.* (2009).

Em processos paralelos o modelo de Shewart torna-se trabalhoso e demorado e o uso incorreto do tipo de CEP por indústrias resultará em frustrações e desapontamentos nos colaboradores. Quando o CEP é aplicado em processos contínuos algumas dificuldades costumam ocorrer, entre elas, destacam-se os múltiplos fluxos de produção como, por exemplo, produção decorrente de diferentes máquinas, linhas de produção, cabeçotes, posições, etc. segundo ALEXANDRE *et al.* (2009)  o acarreta dois problemas: a necessidade de vários gráficos de controle tradicionais de Shewhart, um para cada fluxo, e a dificuldade na formação de subgrupos para análise do processo, pois a variação dentro de cada subgrupo deve ser devida ao acaso.

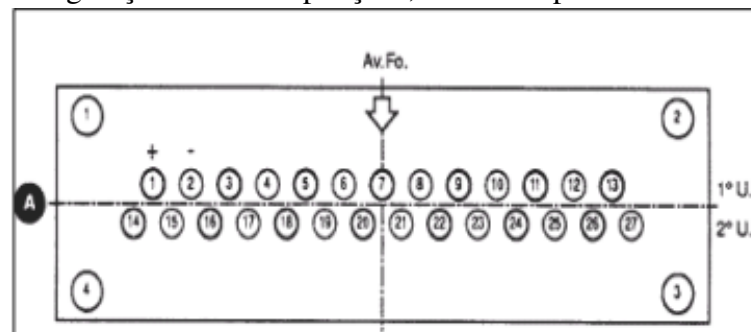
Duas alternativas para o problema seriam: Ajustar os fluxos independentemente e a outra em que os fluxos são dependentes, nos quais:



### 2.2.1 Fluxos Independentes

Em fluxos independentes, como pode ser visto em Guimarães *et al.* (2021), a batida é calibrada de forma diferente. A batida é a compressão produzida pela máquina para moldar o produto a ser fabricado. Por exemplo, um processo de fabricação de rolhas metálicas onde para cada batida de uma máquina sobre uma chapa metálica são produzidas  $k$  rolhas originadas de  $k$  diferentes punções, cada punção equivale a um fluxo de produção, que são calibradas de forma independente e há o interesse de investigar diferenças entre punções. A Figura 2 apresenta uma configuração dos  $k$  punções das  $k$  rolhas, em cada batida na chapa. Nesse processo  $k$  é igual a 27. A monitoração por meio do modelo tradicional de Shewhart consiste na elaboração de 54 gráficos de controle (27 para monitorar a média do processo e 27 para a variabilidade), o que torna o processo extremamente burocrático, compromete a eficiência na interpretação dos gráficos em função da grande quantidade.

Figura 2 – Configuração de  $k = 27$  punções, cada uma produzindo rolhas metálicas.



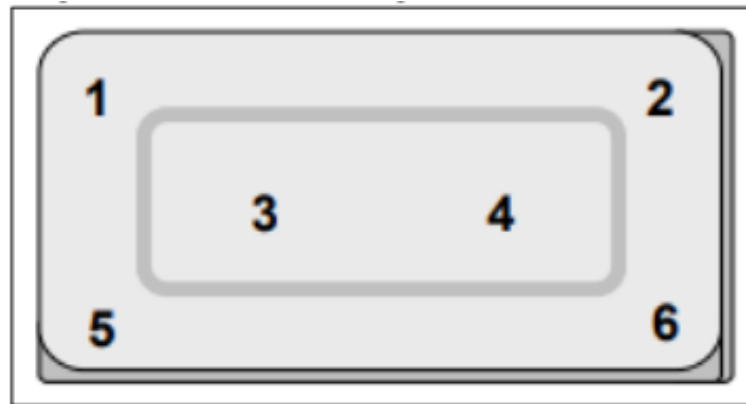
Fonte: ALEXANDRE *et al.* (2006)

### 2.2.2 Fluxos Dependentes

Neste segundo exemplo é considerado um processo de pintura a pó das laterais de fogões, o interesse consiste em investigar se há diferenças entre as camadas de tintas nessas posições, conforme Figura 3. Nota-se que nessa figura são feitas 6 medidas na lateral, com duas medidas para cada posição. A aplicação do gráfico de Shewhart implica, aqui, na construção de 6 gráficos de controle (3 gráficos para monitorar a média mais 3 gráficos para monitorar a variabilidade do processo, onde cada observação consiste na média das duas medidas de cada posição). Muito embora esse processo de pintura a pó não seja característico de um processo com múltiplos fluxos de produção ou em paralelo, pois, um único equipamento (pistola) é utilizado na pintura, o que conduz à dependência é o fato das posições não serem ajustadas de forma

independente.

Figura 3 – Lateral Externa do fogão



Fonte: ALEXANDRE *et al.* (2006)

Uma sugestão Para a identificação da punção ou posição na lateral fora de controle, conforme a Figura 2 e Figura 3, diretamente em um gráfico de controle é utilizar o Gráfico por Grupos, no lugar dos tradicionais de Shewhart, como pode ser visto em (RAMOS, 2000).

### 2.3 Variabilidade transversal e longitudinal

Conforme RAMOS (2000), todo processo gera variabilidade, e as causas de variação são divididas em dois grupos: as causas comuns de variação, inerentes ao processo e as causas Especiais, que não são inerentes ao processo produtivo. Ou seja, não espera-se que aconteçam e devem ser eliminadas logo que detectadas.

No modelo de Walter Shewhart para gráficos de controle em processos paralelos há duas fontes de variações com características diferentes: transversal e longitudinal. No caso da máquina com  $k$  punções e, portanto,  $k$  produtos, a variabilidade transversal é originada dentro de cada batida tem características diferentes da variabilidade entre as batidas d variabilidade longitudinal onde detecta a variabilidade entre cada punção ao longo do tempo. No caso apresentado acima a variabilidade transversal é causada, por exemplo, pelo ajuste independente de cada punção, e a origem da variabilidade longitudinal está no fato de que à medida que se processa a fabricação existe um desgaste natural do processo, variabilidade decorrente de matérias-primas, operadores, procedimentos, etc. Ambas devem ser consideradas na construção dos gráficos de controle.

Segundo ALEXANDRE *et al.* (2009), a eficiência dos gráficos de controle está direta-mente associada a que variabilidade que se deseja monitorar e a largura dos limites de

controle. Em processos paralelos, essas fontes de variação podem existir em diversos fluxos de produção. Podemos exemplificar no exemplo da lateral da geladeira, retratada na Figura 2, a variabilidade transversal é a diferença entre as camadas de pintura, entre as posições, dentro de cada lateral e a variabilidade longitudinal é revelada entre as laterais, ao longo do tempo.

Segundo RAMOS (2000), existem situações em que a variação dentro da amostra não é uma boa base para a definição dos limites de controle para a média. Considera-se então a variação longitudinal da característica, não sendo adequado determinar através da variabilidade transversal. Uma opção é a introdução dos gráficos de controle 3-D, pois na construção dos três gráficos, são monitorados a média, a variabilidade transversal e a variabilidade longitudinal ALEXANDRE *et al.* (2009).

## 2.4 Definindo o gráfico de controle 3-D

Conforme pode ser visto em RAMOS (2000), Os gráficos de controle 3-D (três dimensões), são uma combinação do modelo tradicional de Shewhart (gráfico  $\bar{X}$ -R ou S) com os gráficos  $\bar{X}$ -Rm, possibilitando o monitoramento das variabilidade transversais e longitudinais. A denominação 3-D se deve ao fato de serem construídos 3 gráficos: Gráfico para  $\bar{X}$ , gráfico Rm, para monitorar a variabilidade longitudinal e o gráfico R ou S, para a variabilidade transversal.

Como visto anteriormente, para processos paralelos, o modelo de Shewart pode se tornar difícil e burocrático, devido à necessidade da construção de vários gráficos de controle, onde para cada fluxo é necessário elaborar um gráfico para monitorar a média e outro gráfico para monitorar a variabilidade, por exemplo no processo de fabricação de lotes em bateladas, onde as diferenças entre lotes são acentuadas em consequência da variação ser inerente as matérias-primas não podendo ser reduzida. No processo de fabricação de rolhas metálicas, é importante tanto o controle da variação na direção transversal como longitudinal (à máquina), o gráfico 3-D é uma boa opção. O princípio fundamental do gráfico de controle 3-D está na formação dos subgrupos e nas variações que se deseja controlar.

A tabela 1 representa a disposição dos dados para a construção de um gráfico 3-D.

Tabela 1 – Matriz de dados para a construção do gráfico 3-D

Subgrupo	fluxo 1	fluxo 2	fluxo 3	...	fluxo n	$\bar{X}$	R	Rm	S
1	x <sub>11</sub>	x <sub>12</sub>	x <sub>13</sub>	...	x <sub>1n</sub>	$\bar{X}_1$	R <sub>1</sub>	-	S <sub>1</sub>
2	x <sub>21</sub>	x <sub>22</sub>	x <sub>23</sub>	...	x <sub>2n</sub>	$\bar{X}_2$	R <sub>2</sub>	Rm <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>
3	x <sub>31</sub>	x <sub>32</sub>	x <sub>33</sub>	...	x <sub>3n</sub>	$\bar{X}_3$	R <sub>3</sub>	Rm <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>
4	x <sub>41</sub>	x <sub>42</sub>	x <sub>43</sub>	...	x <sub>4n</sub>	$\bar{X}_4$	R <sub>4</sub>	Rm <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>
5	x <sub>51</sub>	x <sub>52</sub>	x <sub>53</sub>	...	x <sub>5n</sub>	$\bar{X}_5$	R <sub>5</sub>	Rm <sub>14</sub>	S <sub>5</sub>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	x <sub>k1</sub>	x <sub>k2</sub>	x <sub>k3</sub>	...	x <sub>kn</sub>	$\bar{X}_k$	R <sub>k</sub>	Rm <sub>k</sub>	S <sub>k</sub>

Fonte: ALEXANDRE *et al.* (2006)

Em que  $\bar{X}$ , R, Rm e S representam respectivamente, a média, a amplitude, a amplitude móvel e o desvio padrão de cada amostra.

Para a construção do gráfico 3-D é necessária a seleção de uma amostra (subgrupo), de tamanho n a cada intervalo de tempo h, e em cada amostra medir a característica de interesse (no caso do processo paralelo, cada fluxo representa um produto). O número total de subgrupos é igual a k. Em seguida determina-se as médias, amplitudes ou desvio padrão, conforme o gráfico a ser elaborado e amplitudes móveis de cada amostra e, por fim, calcula-se os limites de controle, com base na expressão  $\mu_{\bar{X}} \pm 3\sigma_{\bar{X}}$  e, segundo RAMOS (2000), para os gráficos da média e amplitude móvel são utilizados as seguintes fórmulas:

Para determinar os limites de controle dos gráficos para amplitude (ou desvio padrão) para monitorar a variabilidade dentro de cada subgrupo (variabilidade transversal) é utilizado as seguintes fórmulas, quando  $n < 10$ .

$$LSC_R = D_4 \bar{R} \quad LIC_R = D_3 \bar{R} \quad (2.4)$$

Para amplitude e quando  $n > 10$  utiliza-se:

$$LSC = B_4 \bar{S} \quad LIC = B_3 \bar{S} \quad (2.5)$$

Quando tem-se  $n > 25$  os valores de  $B_3$  e  $B_4$  são dados pelas seguintes fórmulas, segundo WERKEMA (2006):

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \quad (2.6)$$

em que o valor de  $c_4$  para grandes valores de  $n$  é dado pela fórmula:

$$c_4 \simeq \frac{4(n-1)}{4n-3} \quad (2.7)$$


Os gráficos  $Rm$  e  $S$ , em estudo neste trabalho, formarão a base para estabelecer a distância dos limites de controle à linha média, no gráfico  $\bar{X}$ . Logo:

$$LSC = \bar{\bar{X}} + \frac{3\bar{R}m}{d_2} \quad LIC = \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{R}m}{d_2} \quad (2.8)$$

onde  $\bar{\bar{X}}$  e  $\bar{R}$ , a média das médias de cada amostra e a média das amplitudes móveis do processo, respectivamente, para o primeiro gráfico.




Para o gráfico  $S$  a determinação dos limites de controle para  $X$  são:

$$LSC = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} \quad LIC = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} \quad (2.9)$$

onde  $\bar{\bar{X}}$  e  $\bar{S}$ , continua sendo média das médias de cada amostra e  $S$  a média dos desvios padrão do processo, respectivamente. Os valores de  $d_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  estão em função de  $n$  e tabelados, podendo ser encontrado em RAMOS (2000) ou em Montgomery (2000) 

## 2.5 Estrutura probabilística para determinar o NMA do gráfico 3-D


O NMA (Número Médio de Amostras) utilizado para tomada de decisões quanto à aceitação ou não-aceitação de uma população, lote, batelada ou partida. É uma medida estatística utilizada para avaliar o desempenho de um gráfico de controle, consistindo no número médio de inspeções, ou amostra, até a ocorrência da primeira falha no processo produtivo.

No gráfico de controle 3-D, quando pelo menos um dos três gráficos está fora de controle, ou seja,  $\bar{X}$ , amplitude móvel ou desvio padrão , considerado que o processo está fora de controle. Alguns casos podem acontecer alarmes falsos, ou seja, quando um ponto está fora dos limites, mas o processo continua sobre controle. E quando todas as amostras estão entre os limites de controle de forma aleatória, (exceto o gráfico  $Rm$ ) que pode ter um comportamento não aleatório em razão da estrutura de autocorrelação entre as amplitudes móveis, afirma-se que o processo está sob controle. No CEP, o indicador de desempenho do processo é construído a partir dos Erros do Tipo I e II, respectivamente, ETI e ETII.  No contexto do CEP, o primeiro erro ocorre quando se afirma que o processo está fora de controle, quando na verdade não está , o segundo erro, ocorre quando se considera que o processo está controlado, quando na verdade




não está,

$$P(ETI) = P(\bar{x} \notin [LIC, LSC] \mid \mu = \mu_0) \quad (2.10)$$

e a probabilidade do erro tipo 

$$P(ETII) = P(\bar{x} \in [LIC, LSC] \mid \mu \neq \mu_0) \quad (2.11)$$

onde  $\mu_0$  é a média do processo sob controle. Destaca-se aqui a utilização de somente um critério de sinalização de processo fora de controle, que é a existência de pelo menos um ponto fora dos limites. Os demais critérios, como a presença de 7 pontos acima ou abaixo da linha central ou uma tendência crescente ou decrescente de 7 pontos, não serão abordados. Para maiores detalhes, ver Montgomery (2000). 

A distribuição geométrica conforme pode ser visto em Morettin e Bussab (2017), é uma variável aleatória discreta  $x$  que contabiliza o número de ensaios até a ocorrência do primeiro evento.  $Z$  é o Número de ensaios até a ocorrência do primeiro sucesso ou fracasso.

$$Z \sim G(p)$$




e tem a seguinte distribuição de probabilidade

$$p(Z = z) = p(1 - p)^{z-1} I_{\{1,2,\dots\}}(z)$$

com média e variância dadas por, respectivamente:

$$E(Z) = \frac{1}{p}$$

$$V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$$

que, no caso do estudo em particular, se refere ao número de inspeções até o primeiro alarme falso  $p$ , ETI, ou o número médio de amostras analisadas até detectar a primeira causa especial, que torna o gráfico fora de controle, ETII, pode ser modelado pela esperança da distribuição geométrica. Logo: 

$$E(Z) = \frac{1}{P(ETI)} = NMA_1$$

$$NMA_2 = \frac{1}{P(ETII)}$$

em que o NMA representa o número médio de amostras até a ocorrência do primeiro alarme falso.

Como os limites de controle para o gráfico 3-D são baseados no modelo de Shewhart e, de acordo com VASCONCELOS (2009), considerando que o fluxo de produção gerou amostras independentes com distribuição aproximadamente Normal, com média = 0 e variância = 1, e que em geral usa-se  $L=3$ , temos:


$$F(LSC) - F(LIC) = \phi(3) - \phi(-3) = 0,99730$$

onde  $F$  representa a função distribuição acumulada e  $\phi$  o valor da área acumulada a tabela da distribuição normal padrão. Assim, para o  $NMA_1$  tem-se:

$$NMA_1 = \frac{1}{1 - [F(LSC) - F(LIC)]} = \frac{1}{1 - 0,99730} = 370,40$$

O gráfico de Shewhart para controlar  $\bar{X}$  detecta um alarme falso a cada  $\simeq 370$  inspeções média. Serão determinados valores para  $NMA_2$  na seção 4.

### 3 APLICAÇÃO DO GRÁFICO 3-D


Neste capítulo será abordado uma aplicação do modelo de gráfico 3-D, utilizando dois gráficos para a média  $\bar{X}$ -Rm e -S em que será utilizada a base de dados de uma indústria de transformação cearense, disponibilizada pelo professor orientador  análise dos dados e os gráficos foram construídos utilizando o software livre R (R Development Core Team, 2022).

#### 3.1 Entendendo o processo das punções

A característica da qualidade que se deseja monitorar no presente trabalho é a altura da rolha e a unidade de medida é apresentada em milímetros, as rolhas metálicas são fabricadas em processos paralelos em uma indústria manufatureira do estado do Ceará, localizada na cidade de Fortaleza, em cada batida de uma chapa metálica de máquina, são produzidas 27 rolhas que são originadas de 27 punções.

Cada punção é calibrada de forma independente, logo o processo é independente e existe o interesse de se investigar tanto a variabilidade entre punções, dentro de cada batida (variabilidade transversal), e também a variabilidade entre as batidas (variabilidade longitudinal). Foi selecionada consecutivamente a cada duas horas, uma batida do processo e medidas as alturas das 27 rolhas originadas das 27 punções. Como para cada batida  $n = 27 (n > 10)$  foi determinado o desvio padrão de cada subgrupo para medir a variabilidade transversal. A amplitude média foi calculada a partir da média de cada subgrupo.

#### 3.2 Descrição dos dados

Segundo ALEXANDRE *et al.* (2009)  limites da altura especificados em projeto são de 5,85 a 6,15 milímetros. Alturas fora das especificações conduzem a problemas ocasionando o não encaixe das garrafas. Cada punção é calibrada individualmente em que se deseja produzir rolhas com altura de 6,00mm, mas durante o processo pode acontecer variação na característica da qualidade, alterações na calibragem de forma independente entre as punções.

A Tabela 2 apresenta 21 amostras, ou batidas selecionadas, uma a cada duas horas, o menor valor e o maior valor de cada amostras e as estatísticas importantes a ser consideradas dos dados adquiridos no estudo, além disso a tabela auxilia no cálculo do limites de controle.

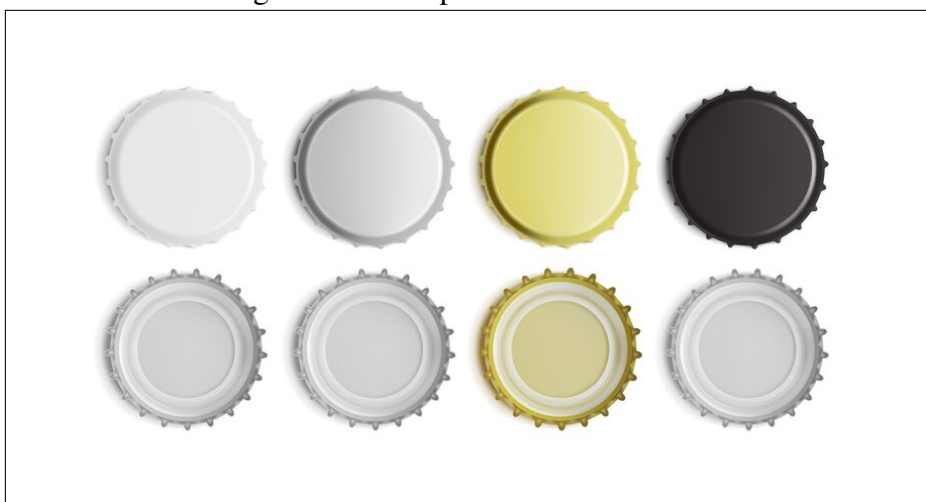
Tabela 2 – Matriz de dados para os cálculos dos limites de controle

Amostra	Menor Valor	Maior Valor	Média	Amplitude Móvel	Desvio Padrão
1	6,00	6,07	6,038	0,009	0,018
2	5,99	6,05	6,029	0,025	0,016
3	5,98	6,03	6,004	0,009	0,014
4	5,98	6,05	6,012	0	0,019
5	5,98	6,04	6,012	0,004	0,014
6	5,99	6,04	6,017	0,004	0,015
7	5,97	6,05	6,013	0,016	0,018
8	5,98	6,03	5,997	0,039	0,017
9	6,00	6,06	6,036	0,044	0,016
10	5,96	6,05	5,991	0,015	0,020
11	5,94	6,01	5,976	0,025	0,023
12	5,98	6,03	6,001	0,010	0,013
13	5,96	6,01	5,991	0,011	0,013
14	5,98	6,04	6,002	0,009	0,016
15	5,97	6,03	5,993	0,007	0,018
16	5,97	6,02	6,000	0,006	0,016
17	5,98	6,05	6,006	0	0,018
18	5,98	6,04	6,006	0,005	0,016
19	5,98	6,05	6,011	0,006	0,015
20	5,99	6,04	6,017	0,011	0,016
21	5,99	6,05	6,028	-	0,017

Fonte: Dados fornecidos pelo Orientador

A representação de uma rolha metálica é representada na figura 4, bastante conhecidas e utilizadas para vedar garrafas.

Figura 4 – Exemplo de rolha metálica.



Fonte: (ARO, 2022)

### 3.3 Resultados e discussões da aplicação

Com base na tabela apresentada na seção 3.2, nota-se que os tamanhos das rolhas metálicas estão próximos do valor de 6mm, que é o valor de interesse. Com um grau de variação relativamente baixo, de acordo com os valores do **desvio padrão** das amostras.

Para o cálculo dos limites de controle, utilizando as fórmulas discutidas na seção 2.4. Os valores obtidos para os limites inferior, central e superior para cada gráfico estão apresentados na tabela abaixo, os limites de controle para a amplitude móvel e **desvio padrão**, para os limites de controle para a média serão feitos dois gráficos, um utilizando o  $\bar{X}$ -Rm e outro para  $\bar{X}$ -S. Cálculo das estatísticas básicas:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{n} = \frac{126,181}{21} = 6,0086 \quad \bar{S} = \frac{\sum S}{n} = \frac{0,348}{21} = 0,0166$$

$$\bar{Rm} = \frac{\sum R}{n} = \frac{0,255}{20} = 0,0127$$

Cálculo dos limites de controle:

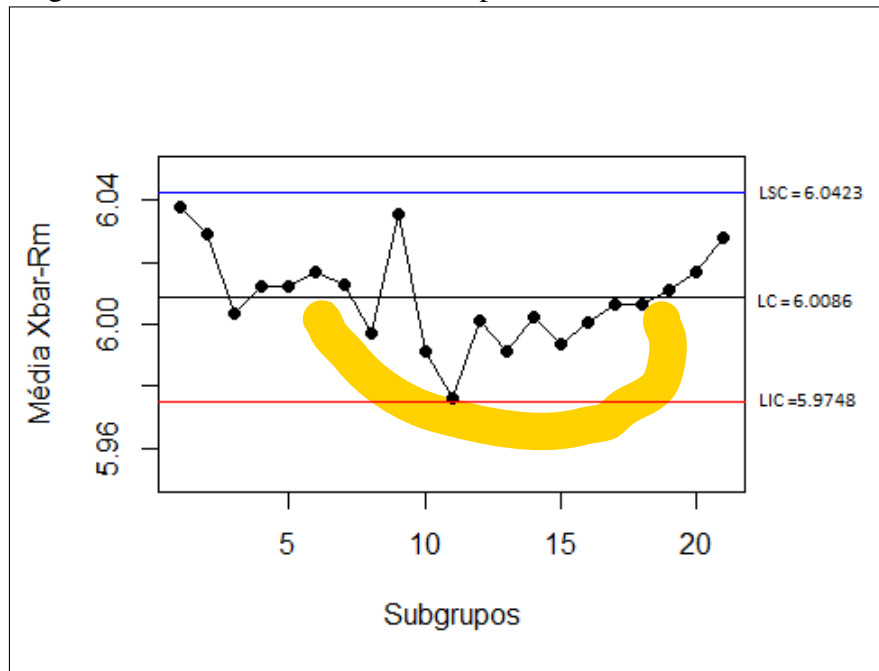
**Tabela 3 – Valores para a linha central e limite superior e inferior**

Gráfico	Limite Inferior	Limite Central	Limite Superior
Média $\bar{X}$ -RM	5,9748	6,0086	6,0423
Média $\bar{X}$ -S	5,9989	6,0086	6,0182
Amplitude	0	0,0127	0,0414
Desvio padrão	0,0096	0,0166	0,0235

Fonte: Dados fornecidos pelo Orientador

A seguir serão apresentados os três Gráficos de Controle 3-D, abordando dois gráficos para a média para um para a amplitude móvel e um desvio padrão, respectivamente e suas interpretações.

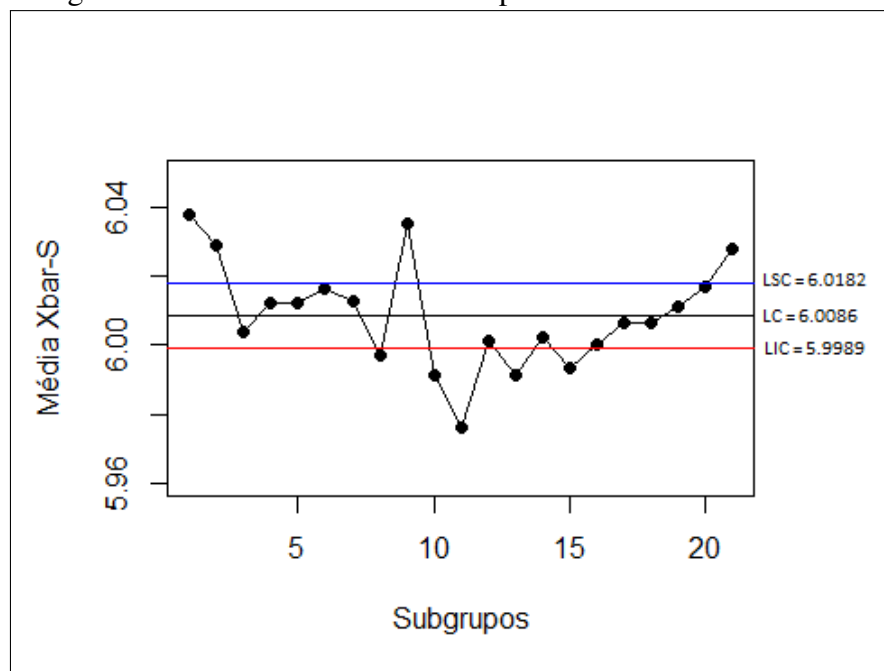
Figura 5 – Gráfico de Controle 3-D para a Média utilizando  $\bar{X}$ -Rm.



Fonte: Elaboração própria

Pela análise do gráfico de controle para as médias  $\bar{X}$ -Rm, na [figura 5](#), observa-se que o processo aparenta estar estável, sem a presença de pontos fora dos limites de controle, as médias de cada amostra estão dentro dos limites de controle.

Figura 6 – Gráfico de Controle 3-D para a Média utilizando  $\bar{X}$ -S.

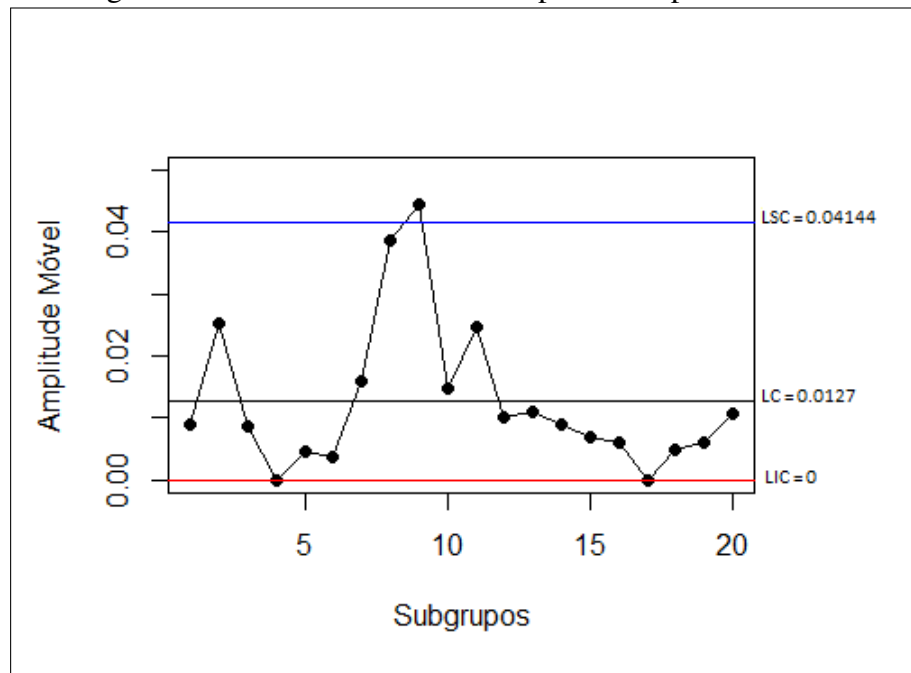


Fonte: Elaboração própria

na [Figura 6](#), os limites de controle estão mais estreitos em comparação ao gráfico

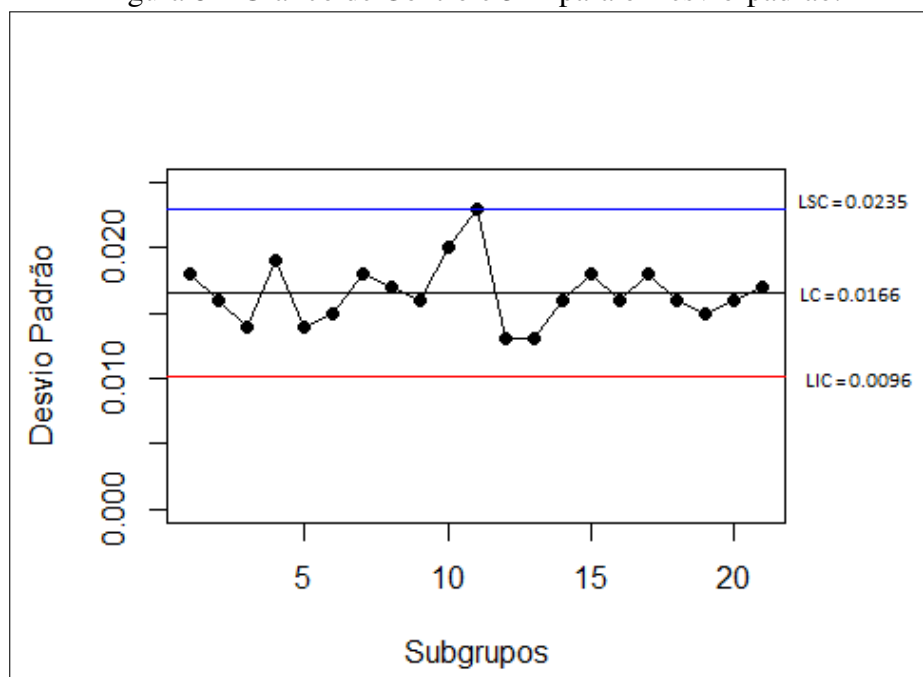
anterior e também apresenta vários pontos fora dos limites superior e inferior, alertando para um sinal de um processo em descontrole. Em termos práticos, aconselha-se que o processo seja investigado para que a causa que gerou instabilidade seja identificada e medidas corretivas possam ser realizadas.

Figura 7 – Gráfico de Controle 3-D para a Amplitude Móvel



Fonte: Elaboração própria

Figura 8 – Gráfico de Controle 3-D para o Desvio-padrão.



Fonte: Elaboração própria

A variabilidade longitudinal, monitorada de acordo com a Figura 7, gráfico 3-D para a amplitude móvel, é utilizada como medida de dispersão ao longo do processo. O gráfico apresenta um ponto acima do limite superior de controle, um dos indicativos de processo fora de controle, logo deve-se fazer uma análise para saber se o ponto assinala um processo fora de controle e tomar as devidas providências para descobrir a causa, ou, se o ponto é um alarme falso, podendo acontecer devidos a fatores como treinamento de novos operadores, novas matérias-primas ou máquinas. Já o gráfico para o desvio padrão, **figura 8**, monitora a variabilidade transversal (dentro de cada batida), não há pontos fora dos limites de controle, não se pode determinar que há presença de causas especiais atuando.



## 4 DESEMPENHO DO GRÁFICO DE CONTROLE 3-D NA PRESENÇA DE ALTERAÇÕES NA MÉDIA DO PROCESSO

O capítulo que se segue irá apresentar os resultados obtidos com auxílio do *software* livre R (R Development Core Team, 2022), quanto ao desempenho e a eficiência do Gráfico 3-D para média utilizando os gráficos  $\bar{X}$ -Rm e  $\bar{X}$ -S no monitoramento de processos produtivos.

### 4.1 Alterações consideradas no processo

Será considerado, sob ponto de vista teórico, que os dados seguem distribuição Normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Seja  $\mu_1$  a nova média do processo após a ocorrência de alguma alteração ou perturbação, ou seja

$$\bar{X}_i \sim \begin{cases} N(\mu; \sigma_{\bar{X}}^2), & i = 1, 2, 3, \dots, I \\ N(\mu + \delta\sigma; \sigma_{\bar{X}}^2), & i = I + 1, I + 2, I + 3, \dots \end{cases}$$

com

$\mu$  = média do processo;

$\sigma$  = desvio padrão do processo;

$\delta$  = medida de perturbação e sendo  $\delta \neq 0$ ;

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Portanto,  $\mu_1 = \mu + \delta\sigma$  e representa alteração na média do processo. Será analisado o desempenho quando há alteração na média do processo, monitorado no gráfico  $\bar{X}$ -Rm e no gráfico  $\bar{X}$ -S. Para cada análise será calculada a probabilidade de detecção da falha e o número de falhas até a ocorrência da primeira detecção NMA<sub>2</sub>.

Ademais neste trabalho NMA<sub>2</sub> será utilizado da seguinte forma:

- NMA<sub>21</sub>: número médio de amostras até a detecção da primeira falha no processo quando há alteração na média para  $\bar{X}$ -Rm;
- NMA<sub>22</sub>: número médio de amostras até a detecção da primeira falha no processo quando há alteração na média para  $\bar{X}$ -S;

#### 4.1.1 Alteração na média

Sendo  $X$  a altura das rolhas metálicas, a média do processo é dada por  $\mu = 6.0086$  e o desvio padrão dado por  $\sigma = 0,0166$ , como levantado na seção 3.3. A fim de desenvolver a análise de desempenho do gráfico de controle para a média diante de algumas perturbações, será utilizado alguns valores de variação  $\delta$  e essa análise será feita observando a probabilidade de detecção e o NMA para cada  $\delta$ , com os resultados apresentados na Tabela 4. A demonstração da probabilidade de detecção da perturbação para a média do processo é dada por

$$\begin{aligned}
 \theta &= P(\text{deteccao}) \\
 &= P[\bar{X} \in (LIC, LSC) \mid \mu_1] \\
 &= 1 - \{P[(LIC_{\bar{X}} < \bar{X} < LSC_{\bar{X}}) \mid \mu_1]\} \\
 &= 1 - \{P[((\mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}) - \mu_1)/\sigma_{\bar{X}} < Z < ((\mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}) + \mu_1)/\sigma_{\bar{X}} \mid \mu_1]\} \\
 &= 1 - \{P[(\mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} - (\mu + \delta\sigma))/\sigma_{\bar{X}} < Z < (\mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} - (\mu + \delta\sigma))/\sigma_{\bar{X}}]\} \\
 &= 1 - \{P[(-3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \delta\sigma/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) < Z < (3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \delta\sigma/\frac{\sigma}{\sqrt{n}})]\} \\
 &= 1 - \{P[-3 - \delta\sqrt{n} < Z < 3 - \delta\sqrt{n}]\} \\
 &= 1 - [F(3 - \delta\sqrt{n}) - F(-3 - \delta\sqrt{n})]
 \end{aligned}$$



#### 4.2 Desempenho do gráfico 3-D para média a partir do gráfico $\bar{X}$ -Rm

Para encontrar a probabilidade de detecção e o número médio de amostras necessárias até se detectar alterações na média do processo, foram realizados testes estatísticos para alguns valores de  $\delta$  variando em 0,1 até 3,0. Utilizou-se o algoritmo descrito no Apêndice B para a obtenção dos resultados apresentados na Tabela 4.

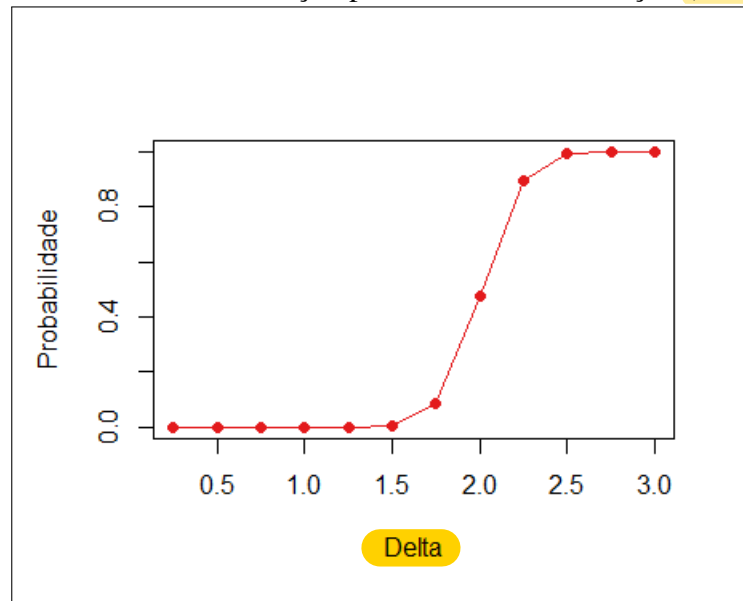
Tabela 4 – Desempenho do gráfico  $\bar{X}$ -Rm com alteração na média do processo

$\delta$	prob, detecção	NMA <sub>21</sub>
0,25	próx. de zero	Inf
0,5	9,992007e-16	1.0008e+15
0,75	1,736244e-11	57.595.575
1,0	5,406571e-08	18.496.010
1,25	3,167124e-05	31.574,39
1,5	0,003599455	277,8198
1,75	0,08456572	11,82512
2,0	0,4750823	2,104898
2,25	0,8943502	1,11813
2,5	0,9948039	1,005223
2,75	0,9999467	1,000053
3,0	0,9999999	1

Fonte: Elaboração própria.

É possível observar que para pequenas variações de  $\delta$  a probabilidade de detecção é muito baixa, chegando a próximo de 0 quando  $\delta = 0,25$  o que torna o NMA<sub>21</sub> elevado, o que condiz com a situação, visto que quanto menor a probabilidade de detectar a alteração, maior será a quantidade média de amostras retiradas até a percepção, de acordo com os resultados de (GUIMARÃES *et al.*, 2021). E para alterações maiores que  $\delta = 2,0$  o número média de amostras fica em torno de 1. As Figuras 9 e 10 trazem, respectivamente, os gráficos a probabilidade de detecção e o NMA<sub>21</sub> quando existe uma alteração na média do processo, de acordo com os dados da Tabela 4.

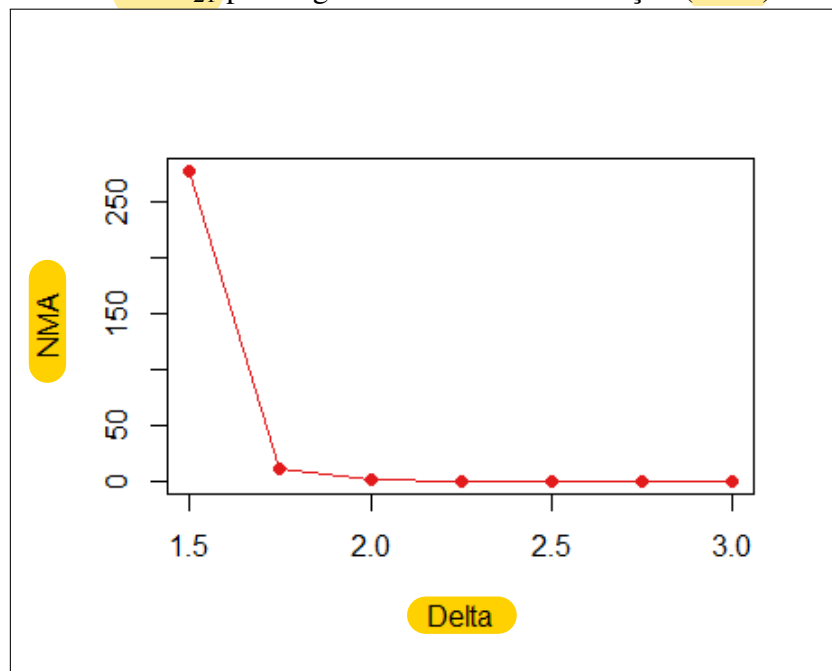
Figura 9 – Probabilidade de detecção para  $\bar{X}$ -Rm com alteração (Delta) na média



Fonte: Elaboração própria.

O gráfico mostra um certo padrão constante entre  $0,25 < \delta < 1,5$ . Logo após, a probabilidade segue aumentando até  $\delta = 2,5$  onde começa a convergir para 1 em  $\delta = 3,0$ . Para uma melhor visualização gráfica do  $NMA_{21}$ , a Figura 10 traz os valores em que  $\delta = 1,5$  até  $\delta = 3,0$ . Os valores faltantes podem ser observados na Tabela 4.

Figura 10 –  $NMA_{21}$  para o gráfico  $\bar{X}$ -Rm com alteração (Delta) na média



Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que o número de amostras começa com valores altos e vai reduzindo

entre os deltas 1,5 e 2,0, revelando que mesmo com apenas 0,5 de diferença entre os deltas, o NMA2 pode ter bastante diferença entre eles.

### 4.3 Desempenho do gráfico 3-D para média a partir do gráfico $\bar{X}$ -S

O mesmo processo foi realizado para a obtenção do desempenho do gráfico de controle 3-D utilizando  $\bar{X}$ -S, para obter o Número Médio de Amostras (NMA<sub>22</sub>) necessárias até uma sinalização, como também a probabilidade de detecção. Considerando-se que a característica da qualidade segue Distribuição Normal com média  $\bar{X} = 6.0086$  e desvio padrão igual  $\bar{S} = 0.0166$ . Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Desempenho do gráfico  $\bar{X}$ -S com alteração na média.

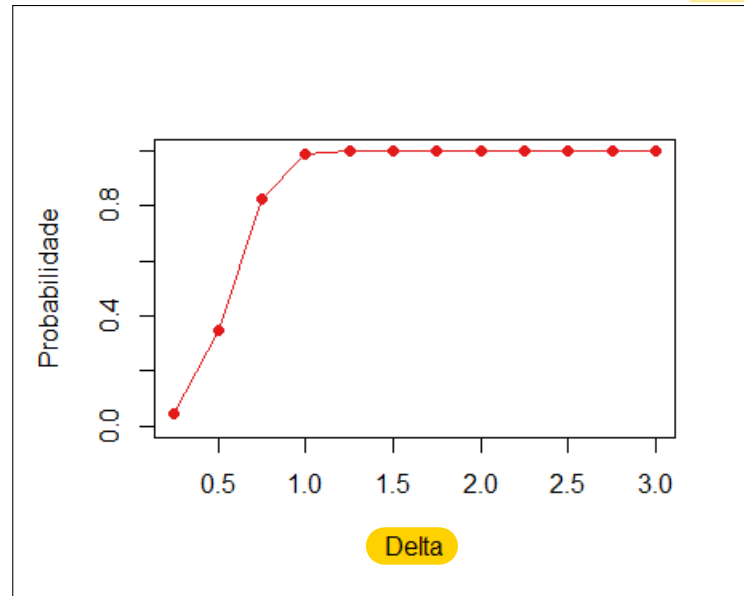
$\delta$	prob, detecção	NMA <sub>22</sub>
0,25	0,04486727	22,28796
0,5	0,3503503	2,854286
0,75	0,8233286	1,214582
1,0	0,9874748	1,012684
1,25	0,9999994	1,00019
1,5	1	1,000001
1,75	1	1,000001
2,0	1	1
2,25	1	1
2,5	1	1
2,75	1	1
3,0	1	1

Fonte: elaboração própria.

Nota-se que para pequenos valores de  $\delta$  a probabilidade de detecção também é pequena e o número de amostras em comparação ao gráfico  $\bar{X}$ -Rm para média é expressivo, necessitando-se de um número muito menor de amostras para se verificar a alteração, para  $\delta > 0,75$ , a detecção é de imediata com o NMA<sub>22</sub> em torno de 1.

As Figuras 11 e 12 trazem, respectivamente, os gráficos para a probabilidade de detecção e o NMA quando existe uma alteração na média do processo, conforme a tabela 5.

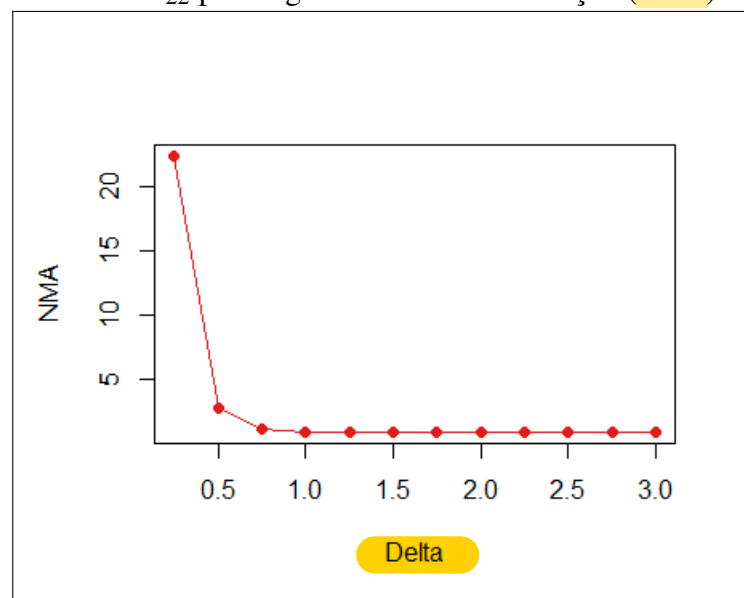
Figura 11 – Probabilidade de detecção para  $\bar{X}$ -S com alteração (Delta) na média



Fonte: Elaboração própria.

Pode-se perceber um comportamento semelhante ao do gráfico de  $\bar{X}$ -Rm, destacando-se que a convergência é feita de forma mais rápida, ou seja, para um valor de  $\delta > 1.0$  a probabilidade de detecção começa a se aproximar de 1.

Figura 12 – NMA<sub>22</sub> para o gráfico  $\bar{X}$ -S com alteração (Delta) na média



Fonte: Elaboração própria.

Para o gráfico do número de amostras percebe-se, também, que para valores de  $\delta$  inferiores a 0,75 a quantidade de amostras é elevada e observa-se que quanto maior a variação na

variabilidade e a quantidade de  $\delta$ , a detecção é quase que imediata,

#### 4.4 Eficiência relativa do gráfico 3-D para $\bar{X}$ -Rm e $\bar{X}$ -S

Nesta parte da análise será realizado o estudo da eficiência relativa do gráfico 3-D para  $\bar{X}$ -Rm com relação ao gráfico  $\bar{X}$ -S quanto à detecção de alteração na média. O princípio básico para realizar esta análise é garantir que ambos os gráficos possuam a mesma taxa de alarme falso.

$$ER = \frac{NMA_{\bar{X}-Rm}}{NMA_{\bar{X}-S}}$$

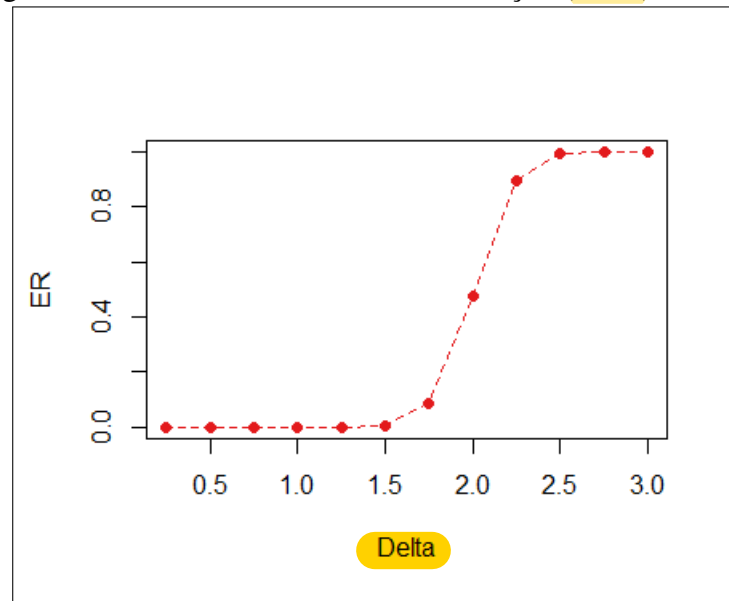
se  $ER < 1$  o gráfico  $\bar{X}$ -S tem melhor desempenho que o gráfico  $\bar{X}$ -Rm na detecção no processo para  $ER > 1$  o gráfico  $\bar{X}$ -Rm é melhor e para  $ER = 1$  os modelos são equivalentes em termos de desempenho. A eficiência relativa com alteração na média do processo se dar através dos valores do NMA obtidos nas seções 4.2 e 4.3. A Tabela 6 traz os valores obtidos sobre a eficiência entre os gráficos estudados

Tabela 6 – Valores da ER com base no NMA.


$\delta$	NMA <sub>21</sub>	NMA <sub>22</sub>	ER
0,25	22,2880	Inf	0.0000
0,50	2,8543	1.0008e+15	próx. de zero
0,75	1,2146	57.595.575	próx. de zero
1,0	1,0127	18.496.010	próx. de zero
1,25	1,0002	31.574,39	próx. de zero
1,5	1,0000	277,8198	0,0036
1,75	1,0000	11,8251	0,0846
2,0	1,0000	2,1049	0,4751
2,25	1,0000	1,1181	0,8944
2,5	1,0000	1,0052	0,9948
2,75	1,0000	1,0001	0,9999
3,0	1,0000	1,0000	1,0000

Vale destacar que para valores de  $\delta$  menores que 1,5 os dois gráficos apresentam um número elevado de amostras necessárias para a detecção, sendo o gráfico  $\bar{X}$ -S apresentando levemente um desempenho satisfatório. Para valores de  $\delta$  entre  $1,5 < \delta < 2,5$  o gráfico  $\bar{X}$ -S apresenta melhor desempenho e para valores maiores do que 3 desvios padrão os gráficos apresentam desempenho equivalentes. A Figura 13 mostra o gráfico da eficiência relativa entre os gráficos.

Figura 13 – Eficiência relativa com alteração (Delta) na média



Fonte: Elaboração própria.

Como foi mostrado na construção dos gráficos de controle para a média, o gráfico  $\bar{X}$ -S, apresenta limites mais estreitos, logo a possibilidade de um ponto ultrapassar os limites de controle é maior, ressaltando que S é utilizado para verificar a variação dentro de cada amostra, sendo considerado  a característica da qualidade observada segue uma distribuição normal, não levando em consideração a estrutura de autocorrelação entre as batidas.



## 5 CONCLUSÃO

O trabalho teve como objetivo geral fazer uma comparação entre o gráfico de controle 3-D para  $\bar{X}$ -Rm e  $\bar{X}$ -S, na presença de alterações na média do processo por meio de uma abordagem prática. Em geral, através dos resultados obtidos os dois gráficos para a média mostraram-se eficientes e analisar processos paralelos e detectar quando ocorre alarme falso.

Com relação ao primeiro objetivo específico, mostrou-se uma aplicação do gráfico 3-D, utilizando dois gráficos para a média, a partir dos dados reais de uma indústria, onde conseguiu-se analisar o processo e detectar indícios que o mesmo está fora de controle. Para os segundo objetivo, foi determinado a estrutura probabilística para o gráfico 3-D quando há alterações na média do processo. No terceiro objetivo conseguiu-se comparar a eficiência dos gráficos  $\bar{X}$ -Rm e  $\bar{X}$ -S por meio do cálculo do NMA para os dados com vários valores de  $\delta$ , realizando, assim, o estudo da eficiência dos gráficos na presença de falhas do processo.

Como resultado, quanto ao desempenho do gráfico  $\bar{X}$ -Rm, quando se tem alterações somente na média do processo, observou-se que para perturbações inferiores a dois desvios padrão a detecção é lenta. Porém, para perturbações acima de dois desvios a detecção de maneira efetiva chegando a probabilidade de 1 quando se tem alteração de 3 desvios padrão na média do processo. Analisando os resultados da eficiência relativa do gráfico  $\bar{X}$ -S com relação ao  $\bar{X}$ -Rm com relação à alteração na média, observou-se que para perturbações inferiores a 1,25 desvios padrão a detecção é lenta para os dois gráficos, para alterações maiores que 1,5 e menores 2,75 desvio padrões, o gráfico  $\bar{X}$ -S mais eficiente e para um deslocamento da média de três desvios os modelos tendem a ter desempenho similar.

Além disso, o trabalho contou com a utilização do software R (R Development Core Team, 2022) ferramenta que auxilia a análise de dados e construção dos gráficos, de forma rápida e prática, além de ser um software de domínio público e bem conhecido no meio acadêmico.

Como trabalhos futuros, investigar as causas que levaram os pontos fora dos limites de controle estão relacionados a existência de autocorrelação dentro e entre as batidas de cada fluxo produtivo é de extrema relevância.

## REFERÊNCIAS

- ALEXANDRE, J. W. C.; ; FREITAS, S. M. d.; NETO, J. F. B. Gráficos de controle 3d aplicados a processos paralelos em uma indústria manufatureira do estado do ceará. In: **XXIX ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**. Salvador, Brasil: [s.n.], 2009. p. 1–13.
- ALEXANDRE, J. W. C.; RODRIGUES, L. F. M.; RODRIGUES, F.; FREITAS, S. M. d. Aplicação do gráfico de controle por grupos em uma indústria manufatureira do estado do ceará. In: **XXVI ENEGEP**. Fortaleza, Brasil: [s.n.], 2006. p. 1–9.
- ARO. **rolhas-metalicas**. 2022. Url<https://www.aro.com.br/rolhas-metalicas>.
- GARVIN, D. **Gerenciando a qualidade: a visão estratégica e competitiva**. [S.l.]: Rio de Janeiro. Qualitymark Ed, 2002.
- GUIMARÃES, M. D. O. *et al.* Desempenho do gráfico de controle 3-d para a média na presença de alterações na média e desvio padrão do processo: Uma abordagem prática. Universidade Federal do Ceará, 2021.
- MONTGOMERY, D. C. **Introdução Ao Controle Estatístico Da Qualidade** . [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.
- MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. [S.l.]: Saraiva Educação SA, 2017.
- R Development Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2022. ISBN 3-900051-07-0. Disponível em: <<http://www.R-project.org>>.
- RAMOS, A. W. **CEP para processos contínuos e em bateladas**. [S.l.]: Editora Edgard blucher, 2000. v. 1.
- SEMBUGS. **Ferramentas da Qualidade: Grafico Controle**. 2022. Url<http://sembugs.blogspot.com/2009/05/ferramenta-qualidade-grafico-controle.html>.
- SHEWHART, W. A. **The application of statistics as an aid in maintaining quality of a manufactured product**. [S.l.]: Journal of the American Statistical Association., 1925. v. 20.
- VASCONCELOS, A. P. d. **Estudo do Gráfico de Controle por Grupos como uma Alternativa ao Modelo de Shewhart em Processos Paralelos**. Dissertação (Dissertacao de mestrado) — (Mestrado em Logística e Pesquisa Operacional) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.
- WERKEMA. **Feraamentas** estatísticas para o gerenciamento de processos. [S.l.]: S.L, 2006. v. 2.

## APÊNDICE A – PROGRAMAÇÃO NO R PARA A CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO 3-D

Código-fonte 1 – O seguinte código do software (R Development Core Team, 2022) foi utilizado para a confecção dos gráficos 3-D e  $\bar{X}$ -S da aplicação.

```

1 #carregando dados externos:
2 #install.packages("readxl")
3 library(readxl)
4
5 #verificando a estrutura das colunas
6 df_excel=read_excel(file.choose())
7 df_excel
8 dados=df_excel[,2:22]
9
10 xbarra <- round(apply(dados,2,mean),4) #medias das amostras
11 xbarrabarra <- round(mean(xbarra),6) #medias das medias
12
13 s <- round(apply(dados,2,sd),4) #desvio padrao de cada amostra
14 sbarra <- round(mean(s),4) #media do DV
15
16 ##-----##
17 rm=numeric(0)
18 for(k in 1:(length(xbarra)-1))
19 {
20   rm[k]=abs(xbarra[k]-xbarra[k+1]) # Amplitude das medias
21 }
22 rmbarra=mean(rm) # Media das amplitudes medias
23 ##CV##
24 cv= sbarra/xbarra
25 A= as.matrix(cbind(xbarra, rm, s, cv))
26 require(xtable)
27 #install.packages("xtable") # tabela dos valores para latex
28 xtable(A,digits= 4)
29
30 ####-----##
31 #Boxplot de cada amostra
32 boxplot(dados,xlab="Amostra",ylab="Tamanho da rolha")
33 ####-----##
34 # Constru o dos graficos 3-D#
35 n<-27
36 d2<-2.66
37 D4<- 3.267
38 D3<- 1.420025
39 c4 <- (4*(n-1))/(4*(n-3))
40 B3<- 1 - 3/(c4*sqrt(2*(n-1)))
41 B4<- 1 + 3/(c4*sqrt(2*(n-1)))

```

```

42 A3= 3/(c4*sqrt(n))
43
44 #----- Gr f ico para a m dia X-bar S -----#
45 LSC1 <- xbarrabarra + (A3*sbarra)
46 LC1 <- xbarrabarra
47 LIC1 <- xbarrabarra - (A3*sbarra)
48
49 plot(xbarra,xlab="Subgrupos",ylab="M dia",type="o",
50      ylim=c(5.95,6.06), pch = 16)
51 abline(h=LSC,col="blue")
52 abline(h=LIC,col="red")
53 abline(h=LC)
54
55 #----- Gr f ico para a m dia X-bar Rm -----#
56 LSC <- xbarrabarra + (d2*rmbarra)
57 LC <- xbarrabarra
58 LIC <- xbarrabarra - (d2*rmbarra)
59
60 plot(xbarra,xlab="Subgrupos",ylab="M dia",type="o",
61      ylim=c(5.95,6.05), pch = 16)
62 abline(h=LSC,col="blue")
63 abline(h=LIC,col="red")
64 abline(h=LC)
65
66 #----- Gr f ico para a amplitude m vel ----- #
67 LSC2 <- D4*rmbarra
68 LC2 <- rmbarra
69 LIC2 <- 0
70 plot(rm,xlab="Subgrupos",ylab="Amplitude M vel",type="o",
71      ylim=c(0,0.05), pch = 16)
72 abline(h=LSC2,col="blue")
73 abline(h=LIC2,col="red")
74 abline(h=LC2)
75
76 #----- Gr f ico para o desvio padr o ----- #
77 LSC3 <- B4*sbarra
78 LC3 <- sbarra
79 LIC3 <- B3*sbarra
80 plot(s,xlab="Subgrupos",ylab="Desvio Padr o",type="o",
81      ylim=c(0,0.025), pch = 16)
82 abline(h=LSC3,col="blue")
83 abline(h=LIC3,col="red")
84 abline(h=LC3)

```

## APÊNDICE B – PROGRAMAÇÃO NO R PARA O DESEMPENHO DO GRÁFICO 3-D PARA O GRÁFICO DA MÉDIA $\bar{X}$ -RM E $\bar{X}$ -S

Código-fonte 2 – O seguinte código do software (R Development Core Team, 2022) foi utilizado para o cálculo do desempenho do gráfico 3-D e  $\bar{X}$ -S na presença de alterações na média do processo.

```

1  #-----valores para estudo com altera es -----
2  n <- 27
3  c4 <- round((4*(n-1))/(4*n - 3),4)
4  sbarra <- 0.0166
5  #LSC <- 6.0424 #limite superior de controle para X-bar Rm
6  #LIC <- 5.9749 #limite inferior para X-bar RM
7
8  LSC<-6.01823 #limite superior de controle para X-bar Rm
9  LIC<-5.998912 #limite inferior para X-bar RM
10
11  xbarrabarra <- 6.0086
12  rmbarra=0.0127
13  sigmax <- round(sbarra/c4,4)
14  sigmaxbarra <- round(0.0166/(c4 * sqrt(n)),4)
15
16  ##-----###
17  # alteracao media
18
19  delta <- seq (0.25 ,5 ,0.25) ##valores de delta
20
21  F_LSC <- (LSC - (xbarrabarra + delta * sigmax))/sigmaxbarra
22  F_LIC <- (LIC - (xbarrabarra + delta * sigmax))/sigmaxbarra
23
24  probdetec <- 1 - ( pnorm ( F_LSC ) - pnorm ( F_LIC ) )
25  NMA <- 1/ probdetec
26
27  plot(delta,probdetec, type = "o", col = "#E31A1C", xlab = "Delta",
28        ylab = "Probabilidade", pch = 16)
29
30  plot(delta,NMA, type = "o", col = "#E31A1C", xlab = "Delta",
31        ylab = "NMA", pch = 16)

```

## APÊNDICE C – PROGRAMAÇÃO NO R PARA O CÁLCULO DA EFICIÊNCIA ENTRE OS GRÁFICOS $\bar{X}$ -RM E $\bar{X}$ -S PARA A MÉDIA

Código-fonte 3 – O seguinte código do software (R Development Core Team, 2022) foi utilizado para o cálculo da eficiência relativa.

```

1 #####----- Efici ncia Relativa -----##
2
3  NMAGCS= c(22.287961 ,2.854286 , 1.214582 , 1.012684 , 1.000190 , 1.000001 ,
4            1.000000 , 1.000000 ,1.000000 ,1.000000, 1.000000 , 1.000000)
5
6  NMAGCRm=c(      Inf ,1.000800e+15 ,5.759558e+10 ,1.849601e+07, 3.157439e+04,
7            2.778198e+02, 1.182512e+01 ,2.104898e+00 ,1.118130e+00 ,1.005223e+00,
8            1.000053e+00 ,1.000000e+00)
9
10
11  ER=numeric() #-----EFICIENCIA ENTRE OS GR FICOS -----#
12  for (i in 1:12){
13    ER[i]<-  NMAGCS[i]/NMAGCRm[i]
14  }
15
16  plot(delta,ER, type = "o", col = "#E31A1C", xlab = "Delta",
17        ylab = "ER", pch = 16)
18
19  #-----exporta o para latex---#####
20  A= as.matrix(cbind(delta, ER))
21  require(xtable)
22  #install.packages("xtable")
23  xtable(A,digits= 4)

```