Clasificación algorítmica en gráficas de tipo $\mathbb{D}_n$

Rey David Gutiérrez Torres
Daniel Rivera López

Universidad Autónoma del Estado de Morelos

30 de junio de 2020

Índice

Matriz de Cartan simétrica

Definición

- Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ es **casi Cartan simétrica** si A es simétrica y $(A)_{ii} = 2$ para toda $i = 1, \ldots, n$.
- Se denotan por $\mathbf{sqC}$.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz de Cartan simétrica

Definición

- Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ es **casi Cartan simétrica** si A es simétrica y $(A)_{i\,i} = 2$ para toda $i = 1, \ldots, n$.
- Se denotan por $\mathbf{sqC}$.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz de Cartan simétrica

Definición

- Una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ es **casi Cartan simétrica** si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y $(\boldsymbol{A})_{i\,i} = 2$ para toda $i = 1, \ldots, n$.
- Se denotan por $\mathbf{sqC}$.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Forma cuadrática

- Una forma cuadrática es un polinomio $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n > 0$ si cada monomio del mismo es una variable al cuadrado o la multiplicación de dos variables. Esto es equivalente a decir que q se puede expresar como:

$$q\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} q_{ii}\, x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} q_{ij}\, x_i\, x_j$$

- Una forma cuadrática unitaria es un caso especial donde $q_{ii} = 1$

Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica $\leftrightarrow$ Forma unitaria

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,i}\,x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j. \end{aligned}$$

Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica ↔ Forma unitaria

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,i}\,x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j .
\end{aligned}
$$

Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica ↔ Forma unitaria

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,i}\,x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j .
\end{aligned}
$$

Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica ↔ Forma unitaria

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\, x_i x_j\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,i}\, x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\, x_i x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\, x_i x_j .
\end{aligned}$$

Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Definición

Una matriz casi Cartan simétrica A es **definida positiva** si y sólo si $\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$, para toda $x \in \mathbb{Z}$ con $x \neq \mathbf{0}$.

Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica $\leftrightarrow$ Bigráfica

Teorema

Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean $i, j \in \{1, 2 \ldots n\}$, entonces,

(a) $0 \leqslant A_{ij}A_{ji} < 4$

(b) $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

La bigráfica $\mathbf{bigr}\,(A)$ asociada a la matriz A tiene vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$, y para cada par de vértices i, j con $i \neq j$:

1. Si $A_{ij} = -1 = A_{ji}$ trazamos una arista solida entre los vértices, (i) —— (j)
2. Si $A_{ij} = 1 = A_{ji}$ trazamos una arista punteada entre los vértices, (i) ········ (j)

Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica $\leftrightarrow$ Bigráfica

Teorema

Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean $i, j \in \{1, 2...n\}$, entonces,

(a) $0 \leqslant A_{ij}A_{ji} < 4$

(b) $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

La bigráfica $\mathbf{bigr}\,(\boldsymbol{A})$ asociada a la matriz A tiene vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$, y para cada par de vértices i, j con $i \neq j$:

1. Si $A_{ij} = -1 = A_{ji}$ trazamos una arista solida entre los vértices, i —— j
2. Si $A_{ij} = 1 = A_{ji}$ trazamos una arista punteada entre los vértices, i ········ j

Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica $\leftrightarrow$ Bigráfica

Teorema

Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean $i, j \in \{1, 2...n\}$, entonces,

(a) $0 \leqslant A_{ij}A_{ji} < 4$

(b) $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

La bigráfica $\mathbf{bigr}\,(\boldsymbol{A})$ asociada a la matriz A tiene vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$, y para cada par de vértices i, j con $i \neq j$:

1. Si $A_{ij} = -1 = A_{ji}$ trazamos una arista solida entre los vértices, (i) —— (j)
2. Si $A_{ij} = 1 = A_{ji}$ trazamos una arista punteada entre los vértices, $(i) \cdots\cdots (j)$

Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica $\leftrightarrow$ Bigráfica

Teorema

Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean $i, j \in \{1, 2 \ldots n\}$, entonces,

(a) $0 \leqslant A_{ij}A_{ji} < 4$

(b) $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

La bigráfica $\mathbf{bigr}\,(\boldsymbol{A})$ asociada a la matriz A tiene vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$, y para cada par de vértices i, j con $i \neq j$:

1. Si $A_{ij} = -1 = A_{ji}$ trazamos una arista solida entre los vértices, i —— j
2. Si $A_{ij} = 1 = A_{ji}$ trazamos una arista punteada entre los vértices, $i \cdots\cdots j$

Equivalencia de conceptos

Ejemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

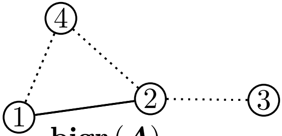
$\mathbf{bigr}\,(\boldsymbol{A})$

$$\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$$

Equivalencia de conceptos

Ejemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



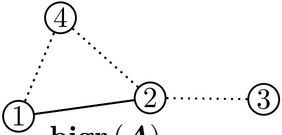
$\mathbf{bigr}\,(\boldsymbol{A})$

$$\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$$

Equivalencia de conceptos

Ejemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$\mathbf{bigr}\left(\boldsymbol{A}\right)$

$$\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$$

$\mathbf{Z}$-equivalencia

Definiciones

- Una matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{Z})$ es $\mathbf{Z}$-invertible si tiene inversa $M^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{Z})$.
- $A, A' \in \mathrm{sqC}$ son $\mathbf{Z}$-equivalentes si existe una matriz $\mathbf{Z}$-invertible M tal que $A' = M^{\mathrm{T}} A M$.

$\mathbf{Z}$-equivalencia

Definiciones

- Una matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{Z})$ es $\mathbf{Z}$-invertible si tiene inversa $M^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{Z})$.
- $A, A' \in \mathbf{sqC}$ son $\mathbf{Z}$-equivalentes si existe una matriz $\mathbf{Z}$-invertible M tal que $A' = M^{\mathrm{T}} A M$.

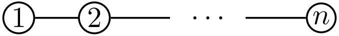
Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

Familia	Gráfica
$\mathbb{A}_n$, $n \geqslant 1$	
$\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$	
$\mathbb{E}_n$, $6 \leqslant n \leqslant 8$	

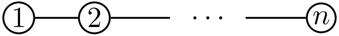
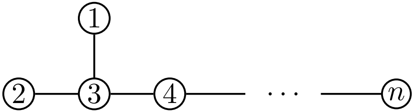
Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

Familia	Gráfica
$\mathbb{A}_n$, $n \geqslant 1$	
$\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$	
$\mathbb{E}_n$, $6 \leqslant n \leqslant 8$	

Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

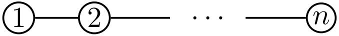
Familia	Gráfica
$\mathbb{A}_n$, $n \geqslant 1$	
$\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$	
$\mathbb{E}_n$, $6 \leqslant n \leqslant 8$	

Diagramas de Dynkin

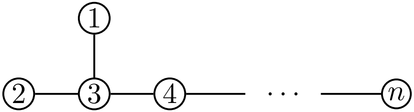
- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

Familia — **Gráfica**

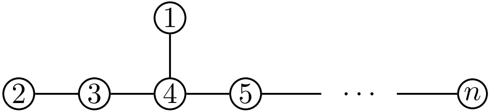
$\mathbb{A}_n$, $n \geqslant 1$



$\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$



$\mathbb{E}_n$, $6 \leqslant n \leqslant 8$



La clasificación $\mathbb{A} - \mathbb{D} - \mathbb{E}$

Teorema (S. Ovsienko – 1978)

Toda bigráfica G conexa y definida positiva es $\mathbb{Z}$-equivalente a un diagrama de Dynkin.

Demostración.

Demostración constructiva mediante el **algoritmo de las inflaciones**. $\square$

Inflaciones

Definiciones

- $\boldsymbol{I}$ denota la matriz identidad con vectores columna $\boldsymbol{e}_j$.
- $\boldsymbol{E}^{\sigma}_{s\,r} := \boldsymbol{I} + \sigma\, \boldsymbol{e}_s\, \boldsymbol{e}_r{}^{\mathrm{T}}$ $(s, r \in \{1, \ldots, n\},\ \sigma \in \mathbb{R})$ denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si $\boldsymbol{A} \in \mathrm{sqC}$ y $(\boldsymbol{A})_{s\,r} = 1$ entonces $\left(\boldsymbol{E}^{-1}_{s\,r}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{E}^{-1}_{s\,r}\right)$ es una **inflación** de $\boldsymbol{A}$.

Inflaciones

Definiciones

- $\boldsymbol{I}$ denota la matriz identidad con vectores columna $\boldsymbol{e}_j$.
- $\boldsymbol{E}_{s\,r}^{\sigma} := \boldsymbol{I} + \sigma\,\boldsymbol{e}_s\,\boldsymbol{e}_r{}^{\mathrm{T}}$ $(s, r \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma \in \mathbb{R})$ denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si $\boldsymbol{A} \in \mathrm{sqC}$ y $(\boldsymbol{A})_{s\,r} = 1$ entonces $\left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)$ es una **inflación** de $\boldsymbol{A}$.

Inflaciones

Definiciones

- $\boldsymbol{I}$ denota la matriz identidad con vectores columna $\boldsymbol{e}_j$.
- $\boldsymbol{E}_{s\,r}^{\sigma} := \boldsymbol{I} + \sigma\, \boldsymbol{e}_s\, \boldsymbol{e}_r{}^{\mathrm{T}}$ $(s, r \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma \in \mathbb{R})$ denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si $\boldsymbol{A} \in \mathrm{sqC}$ y $(\boldsymbol{A})_{s\,r} = 1$ entonces $\left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)$ es una **inflación** de $\boldsymbol{A}$.

Algoritmo de las inflaciones

Algoritmo de las inflaciones

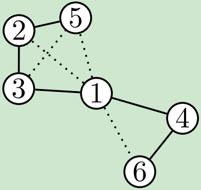
función `inflaciones(`$\boldsymbol{A}$`)`**:**

  repetir mientras *exista una entrada no diagonal* $(\boldsymbol{A})_{s\,r} = 1$ **:**

    $\boldsymbol{A} := \left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)$

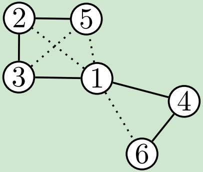
Interpretación gráfica

Ejemplo $(T_{1\,5}\,(G))$



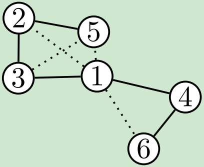
Interpretación gráfica

Ejemplo $(T_{1\,5}\,(G))$



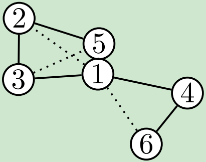
Interpretación gráfica

Ejemplo $(T_{1\,5}\,(G))$



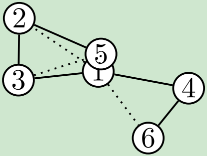
Interpretación gráfica

Ejemplo $(T_{1\,5}\,(G))$



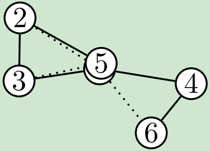
Interpretación gráfica

Ejemplo $(T_{1\,5}\,(G))$



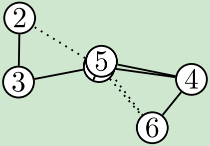
Interpretación gráfica

Ejemplo $(T_{1\,5}\,(G))$



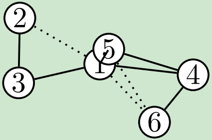
Interpretación gráfica

Ejemplo $(T_{1\,5}\,(G))$



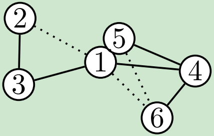
Interpretación gráfica

Ejemplo $(T_{1\,5}\,(G))$



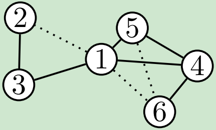
Interpretación gráfica

Ejemplo $(T_{1\,5}\,(G))$



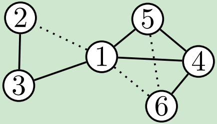
Interpretación gráfica

Ejemplo $(T_{1\,5}\,(G))$



Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{1\,5}\,(G)$)



$\mathbb{A}$-bloques

Definiciones

- Sean X y Y conjuntos disjuntos de vértices. Denotamos por $\mathrm{F}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ el bigrafo no separable obtenido uniendo cada par de vértices (x, y) con $x \in \mathrm{X}$ e $y \in \mathrm{Y}$ por una arista sólida, y todos los demás pares de vértices por una arista punteada, tal bigrafo se llama un $\mathbb{A}$ bloque.

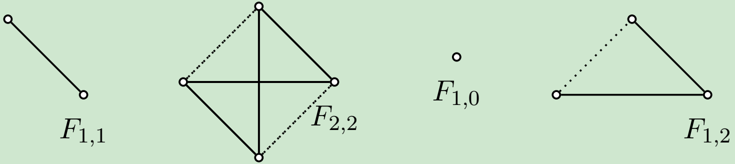
Ejemplo

$\mathbb{A}$-bloques

Definiciones

- Sean X y Y conjuntos disjuntos de vértices. Denotamos por $\mathrm{F}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ el bigrafo no separable obtenido uniendo cada par de vértices (x, y) con $x \in \mathrm{X}$ e $y \in \mathrm{Y}$ por una arista sólida, y todos los demás pares de vértices por una arista punteada, tal bigrafo se llama un $\mathbb{A}$ bloque.

Ejemplo



Vértices de corte

Definición (F. Harary – 1969)

Sea G una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de G.
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

Ejemplo

Vértices de corte

Definición (F. Harary – 1969)

Sea G una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de G.
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

Ejemplo

Vértices de corte

Definición (F. Harary – 1969)

Sea G una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de G.
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

Ejemplo

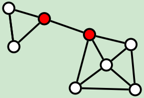
Vértices de corte

Definición (F. Harary – 1969)

Sea G una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de G.
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

Ejemplo



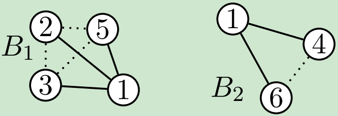
Lema

Todo $\mathbb{A}$-bloque es de tipo $\mathbb{A}_n$

Lema

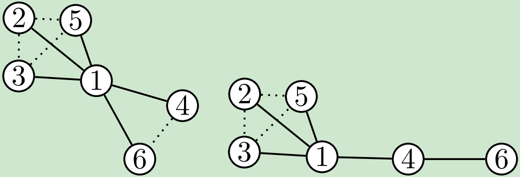
Sean B_1 y B_2 $\mathbb{A}$-bloques entonces $B_1 + B_2$ es un $\mathbb{A}$-bloque

Ejemplo

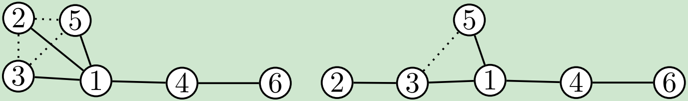


$\mathbb{A}$-bloques

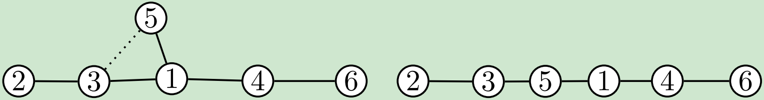
Ejemplo $(T_{4\,6}\,(G))$



Ejemplo $(T_{3\,2}(G))$



Ejemplo $(T_{5\,3}(G))$

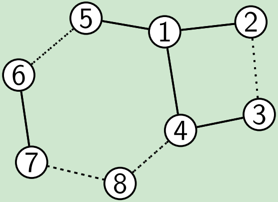


Ahora para tres $\mathbb{A}$-bloques pegados me fijo en un punto de corte y uno dos $\mathbb{A}$-bloques en uno y al final me quedan dos $\mathbb{A}$ bloques que son de tipo $\mathbb{A}_n$ y se cumple el lema anterior y esto seria equivalente para n-bloques.

Definiciones

Una bigráfica cumple la condición de ciclo si todo ciclo tiene un número impar de aristas punteadas.

Ejemplo



$\mathbb{D}$-nucleo

- Una bigráfica cíclica $H = x_1 - x_2 - \cdots - x_h - x_1$ (todos los x_i distintos para $1 \leqslant i \leqslant h$) que satisface la condición de ciclo.
- A esta bigráfica H le llamaremos el $\mathbb{D}$-núcleo.

Descripción de el problema

- El problema propuesto es la clasificación algorítmica en gráficas de tipo $\mathbb{D}_n$
- Para esto se propone usar el algoritmo de componentes triconexas para caracterizar las de tipo $\mathbb{D}_n$

Algoritmo de Componentes triconexas

1. Divide las aristas múltiples para formar enlaces triples y un grafo biconexo simple G'.
2. Encuentra los componentes de separación de G'.
3. Combina los enlaces triples y triángulos en enlaces y polígonos.

Componentes triconexas

Sea $G = (V, E)$ un multigráfo y sea $H = (W, F)$ un subgráfo de G, definimos una relación de equivalencia sobre $E - F$ como sigue:

Definiciones

1. $\forall e \in E - F$, $e \cong e$.
2. $\forall e, f \in E - F$, $e \cong f$ si y solo si existe un camino que une e, f que no tiene un vértice en W.

Componentes triconexas

Si $H = \{\{a, b\}, \emptyset\}$, las clases de equivalencia son llamadas clases de separación relativas al par $\{a, b\}$.

Definiciones

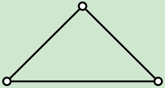
- Sean $S_1, S_2, \ldots, S_k$, las clases de separación relativas al par (a, b). Si existe una partición (A, B) de $\{1, 2, ..., k\}$ tal que $|E_1 = \bigcup_{i\in A} S_i| \geqslant 2$ y $|E_2 = \bigcup_{j\in B} S_j| \geqslant 2$, decimos que $\{a, b\}$ es un par de separación.

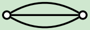
Componentes triconexas

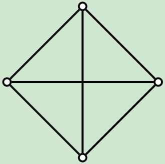
Definiciones

- Si G es biconexa y G no tiene par de separación entonces G es triconexa.

Ejemplo



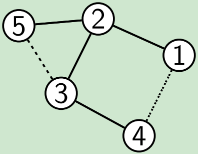




La operación de división

Sea G el bigrafo y $H = \{\{2,3\}, \emptyset\}$

Ejemplo



La clase de equivalencia de $2 — 5$ es el conjunto:
$S_1 = \{2 — 5, 5 \cdots 3\}$
La clase de equivalencia de $1 \cdots 4$ es el conjunto:
$S_2 = \{2 \cdots 1, 1 — 4, 4 — 3\}$
La clase de equivalencia de $2 — 3$ es el conjunto:
$S_3 = \{2 — 3\}$

La operación de división

Para saber si $\{2, 3\}$ es un par de separación hay que encontrar una partición de $\{1, 2, 3\} = A \cup B$, $A \cap B = \{\emptyset\}$ tal que se cumple que $|E_1 = \bigcup_{i \in A} S_i| \geqslant 2$ y $|E_2 = \bigcup_{j \in B} S_j| \geqslant 2$.

En este caso $A = \{1, 3\}$, $B = \{2\}$ es una partición posible que buscamos y entonces $\{2, 3\}$ es un par de separación.

La operación de división

Ahora supongamos $\{a, b\}$ es un par de separación.
Si $H = \{\{a, b\}, \emptyset\}$ y $S_1, S_2, \ldots, S_k$ son las clases de separación del par $\{a, b\}$(las clases de equivalencia definidas por H).

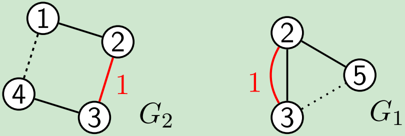
Sea A, B la partición del conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $|E_1 = \bigcup_{i \in A} S_i| \geqslant 2$ y $|E_2 = \bigcup_{j \in B} S_j| \geqslant 2$.

Si $H_1 = (V(E_1), E_1)$ y $H_2 = (V(E_2), E_2)$ entonces, $V(E_1) \cap V(E_1) = \{a, b\}$ donde la arista a—b es llamada arista virtual.

Sea $G_i = H_i + a$—b para $i \in \{1, 2\}$.
Las G_i son los bigrafos de división de G en $\{a, b\}$.

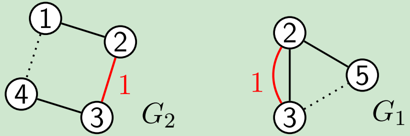
Donde $A = \{1, 3\}$ y $B = \{2\}$

Ejemplo



La operación de división

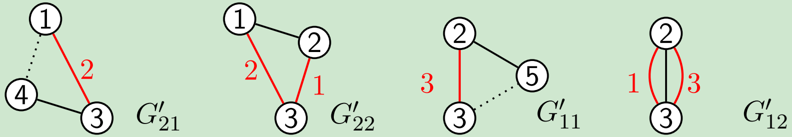
Ejemplo



- Como G_1 y G_2 no son triconexas(tiene pares de separación) entonces, supongamos que sabemos que $\{1, 3\}$ es un par de separación de G_2 y el mismo par $\{2, 3\}$ es un par de separación de G_1 entonces,

La operación de división

Ejemplo



- Ahora tenemos componentes triconexos. Estos son llamados componentes de división.

La operación de división

El siguiente resultado es debido a Hopcroft and Tarjan.

Lema

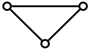
El número total de aristas en todos los componentes de división no excede $3|E| - 6$

La operación de unión

- Sean H_1 y H_2 componentes de división de G tal que ambas contengan la misma arista virtual $a \overset{n}{—} b$
- Combinamos estos dejando que $H = H_1 + H_2 - (a, b, n)$.

La operación de unión

Pero solo vamos a fusionar los componentes de división de la siguiente forma:

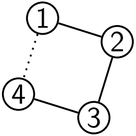
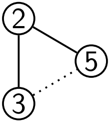
1. Fusionamos  tanto como sea posible
2. Fusionamos  tanto como sea posible.

El conjunto final de grafos es llamado conjunto completo de componentes de triconexas.

Lema

Un conjunto completo de componentes triconexas es único hasta isomorfismo.

- La conjetura es que la clasificación quedara como las componentes triconexas completas son bloques de tipo A_n.
- Me tomo un grafo le quito sus componentes biconexas y compruebo que todas excepto una componente son $\mathbb{A}$-bloques ahora para comprobar que la componente biconexa que no es $\mathbb{A}$-bloque es de tipo $\mathbb{D}_n$ utilizo el algoritmo de descomposición en componentes triconexas.

- Del conjunto de componentes triconexas nos interesa recuperar los componentes biconexas, por ejemplo de G'_{21}, G'_{22} obtenemos la subgráfica inducida,  y de G'_{11} y G'_{12} es otra subgráfica inducida 
- en este caso el conjunto completo de componentes biconexas.
- De este ejemplo tenemos que una subgráfica cumple la condición de ciclo y una que es un $\mathbb{A}$-bloque. por lo tanto G es de tipo $\mathbb{D}_5$.

Bibiográfia I

M. Abarca & D. Rivera
Graph Theoretical and Algorithmic Characterizations of Positive Definite Symmetric Quasi-Cartan Matrices.
Fundamenta Informaticae. 149(3):241–261, 2016.

Kiem-Phong Vo
Finding triconnected components of graphs.
Linear and Multilinear Algebra. 13:2, 143-165, 1983

M. Abarca.
Algoritmo Para Decidir si una Forma Unitaria es de Tipo $\mathbb{A}_n$(Tesis de Licenciatura). 2011