Índice general

1. Intro **1**

1. Introducción 1

 1.1. FORMAS CUADRÁTICAS 1

 1.2. FORMAS UNITARIAS 6

1. Antecedentes 1

 1.1. EL MÉTODO DE LAS INFLACIONES 1

 1.2. ENSAMBLAJE POR $\mathbb{A}$-BLOQUES 4

3. Capítulo 2 **5**

5. Capítulo ... **9**

A. Anexo: Nombrar el anexo A de acuerdo con su contenido **11**

B. Anexo: Nombrar el anexo B de acuerdo con su contenido **13**

1

Intro

1. Introducción

En este capítulo se presenta una introducción a las formas cuadráticas, sus representaciones y su clasificación. Esto con el fin permitir al lector un mejor entendimiento del problema que se plantea en este trabajo de tesis.

1.1. FORMAS CUADRÁTICAS

Esta sección fue adaptada de Lay (2001). Algunas demostraciones aquí omitidas pueden consultarse en dicha referencia.

Fijamos un conjunto de variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Un **monomio** es un producto de la forma $x_1^{e_1} \cdot x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$ donde cada e_i es un número natural. Un término se forma al multiplicar a un monomio por una constante, a la cual llamamos **coeficiente** del término. Un **polinomio** es una suma finita de términos.

Ejemplo: $7x^2y + 5x^z4 - y$ es un polinomio sobre las variables x, y y z con tres monomios: x^2y, xz^4 y y cuyos respectivos coeficientes son 2, 4, 1 respectivamente.

Una **forma cuadrática** es un polinomio $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(\text{con } n > 0)$ si cada monomio del mismo es una variable al cuadrado o la multiplicación de dos variables. Esto es equivalente a decir que q se puede expresar como

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} q_{ii} x_i^2 + \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} q_{ij} x_i x_j$$

Los ejemplos más usuales aparecen al lado izquierdo del signo igual de las ecuaciones en las cónicas con centro en el origen

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$$

y de las superficies cuadráticas con centro en el origen

$$ax^2 + 2dxy + 2exz + by^2 + 2fyz + cz^2 = g$$

donde a, b, c, d, e, f y g son números reales. Este tipo de polinomios surgen de manera natural en diversas áreas de la ingeniería, procesamiento de señales, cinética, economía, geometría diferencial y estadística.

En algunos curso básicos de álgebra lineal se suele definir el concepto de forma cuadrática como una función que se puede escribir como

$$q(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{x}^T A \overrightarrow{x}$$

para alguna matriz simétrica A. En realidad esta representación matricial es equivalente a nuestra definición con monomios; a continuación veremos c+omo pasar de una representación a otra. Primero notemos que $\frac{1}{2} \overrightarrow{x}^T A \overrightarrow{x}$ se puede reescribir como sigue:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overrightarrow{x}^T A \overrightarrow{x} &= \frac{1}{2}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i x_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i x_n\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_n
\end{aligned}
$$

Al desarrollar esta suma se puede ver que el coeficiente de $x_i\ x_j$ es $q_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right)$ porque $x_i\ x_j = x_i\ x_j$, pero como dijimos que A es simétrica ($a_{ij} = a_{ji}$) entonces $q_{ij} = a_{ij}$. En particular cuando $i = j$ se tiene que el coeficiente de x_i^2 es $q_{ii} = \frac{1}{2}a_{ii}$. Por lo tanto tenemos la siguiente identidad:

$$
\frac{1}{2}\overrightarrow{x}^T A \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} a_{ii} x_i^2 + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} x_i x_j \tag{1.1}
$$

La matriz simétrica A de esta identidad se conoce como **matriz asociada a la forma cuadrática** q. Nosotros la vamos a denotar por A_q, y según la ecuación 1.1 se puede calcular como sigue:

$$
a_{ij} = \begin{cases} q_{ij} & \text{si } i < j \\ 2q_{ij} & \text{si } i = j \\ q_{ji} & \text{si } i > j \end{cases} \tag{1.2}
$$

Por ejemplo, para $q(x, y, x) = 3x^2 + 3xy + 16xz - 4y^2 + 4z^2 + 6yz$

$$
q(x.y.z) == \frac{1}{2}\left[x\ y\ z\right] \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
$$

CAMBIO DE VARIABLE

Un **cambio de variable** es una ecuación de la forma

$$\overrightarrow{x} = P\overrightarrow{y} \quad \text{o bien} \quad \overrightarrow{y} = P^{-1}\overrightarrow{x}. \tag{1.3}$$

donde P es una matriz invertible y $\overrightarrow{y}$ es un nuevo vector variable en R^n. Si se aplica el cambio de variable (1.3) sobre una forma cuadrática $q(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{x}^T A\overrightarrow{x}$ se obitene una matriz cuadrática $q'(\overrightarrow{y})$ cuya matriz asociada es $P^T\ A\ P$:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x} = \frac{1}{2}(P\overrightarrow{y})^T\ A\ (\overrightarrow{y}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{y}^T P^T\right)\ A\ (P\overrightarrow{y}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{y}^T\left(P^T\ A\ P\right)\overrightarrow{y}$$

.

Gatantizamos que $P^T\ A\ P$ es una matriz simétrica (y por tanto que en verdad corresponde a otra forma cuadrática) porque

$$\begin{aligned}(P^T\ A\ P)^T &= P^T\ A^T\ \left(P^T\right)^T \\ &= P^T\ A^T\ P \\ &= P^T\ A\ P\end{aligned}$$

Mediante el cambio de variable $\overrightarrow{y} = P\ \overrightarrow{x}$ tenemos que $q(\overrightarrow{x}) = q'(\overrightarrow{y})$ y diremos que q y q' son **equivalentes** mediante la matriz invertible P. Si denotamos $\overrightarrow{y} = L(\overrightarrow{x})$(es decir, $L(\overrightarrow{x}) = P(\overrightarrow{x})$) entonces $q'(\overrightarrow{y}) = q'(L(\overrightarrow{x})) = (q' \circ L)(\overrightarrow{x})$, por lo tanto

$$q' = q \circ L$$

Vale la pena notar algunas cosas sobre este ejemplo:

- P resultó ser una **matriz ortogonal**, en otras palabras, $P^{-1} = P^T$.
- A es una matriz **ortogonalmente diagonizable**, en otras palabras, existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}\ A\ P$ es una matriz diagonal.

Teorema 1.1. *Toda matriz es ortogonalmente diagonizable si y solo si es simétrica*

Este teorema se dejara sin demostración. Lo importante es que, a partir de este teorema, y dado que las matrices asociadas a las formas cuadráticas son simëtricas, se sigue el siguente resultado:

Teorema 1.2. *Toda forma cuadrática $q(\overrightarrow{x})$ es equivalente a una matriz ortogonal P a una forma cuadrática*

$$q'(\overrightarrow{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{1.1}$$

Demostración. La matriz A asociada a q es simétrica, luego por teorema anterior existe una matriz P tal que

$$P^{-1}\ A\ P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Haciendo $\overrightarrow{x} = P\overrightarrow{y}$ y se obtiene $q'(\overrightarrow{y}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{y}^T \left(P^T\ A\ P\right)\overrightarrow{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ □

Como se vera, esta representación es extremadamente útil para clasificar formas cuadráticas. Diremos que nuna forma cuadrática q es **definida positiva** si $q(\overrightarrow{x}) > 0,\ \forall\ \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$

Lema 1.1. *Si dos formas cuadráticas $q(\overrightarrow{x})$ y $q'(\overrightarrow{y})$ son equivalentes mediante el cabio ded variable $\overrightarrow{y} = P\overrightarrow{x}$ y si una de ellas es definada positiva entonces la otra también.*

Demostración. Supongamos que $q(\overrightarrow{x})$ es definida positiva y defínase la transformación lineal $L(\overrightarrow{x}) = P\overrightarrow{x}$, entonces $L(\overrightarrow{0}) = L(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = L(\overrightarrow{0}) + L(\overrightarrow{0})$, de donde $L(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Como P es una matriz invertible entonces $L^{-1}(\overrightarrow{x}) = P^{-1}x$. En particular L debe ser inyectiva y por lo tanto $L(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ implica que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. SI q es definida positiva entonces $q(\overrightarrow{x}) = q'(\overrightarrow{y}) > 0$ para todo $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$; por lo tanto q' es definida positiva , entonces aplicando el mismo razonamiento con $L(\overrightarrow{y}) = P^{-1}\overrightarrow{y}$ se llega a la conclusión de que q tambien es definida positiva. □

Teorema 1.3. *Sea q una forma cuadrática y supongamos que*

$$q\left(\overrightarrow{x}\right) = q'(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

entonces q es definida positiva si y solo si todos los $\lambda_i > 0$

Demostración. Por el lema anterior q es definida positiva si y solo si q' es definida positiva. Por contradicción, si $\lambda_i \leqslant 0$ entonces definimos $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ donde todos los $y_k = 0$ excepto $y_i = 1$. Claramente $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$ pero $q(\overrightarrow{y}) = \lambda_i \leqslant 0$; por lo tanto q no es definida positiva. □

Como las forma cuadráticas se pueden representar mediante matrices entonces podemos decir que una matriz A es definida positiva si su forma cuadrática asociada $q(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{x}^T A\overrightarrow{x}$ es definida positiva.

A continuación enunciamos (sin demostración) un teorema típico de los cursos de análisis numérico que nos da un criterio computacional- mente eficiente para decidir cuándo una matriz simétrica es definida positiva:

Teorema 1.4. *Una matriz A es definida positiva si y solo si tiene* ***factorización de Cholesky****, es decir, se puede escribir como $A = R^T R$ donde R es una matriz triangula superior con entradas positivas.*

1.2. FORMAS UNITARIAS

Esta sección fue adaptada de Ringel (1985) y Gabriel & Rotter (1997).
Las **formas cuadráticas enteras** son un caso especial de las formas cuadráticas donde todos los coeficientes q_{ij} son todos números enteros. Si además exigimos que $q_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces las llamamos **formas cuadráticas unitarias**. Dado que en el resto de

CAMBIO DE VARIABLE ENTERO

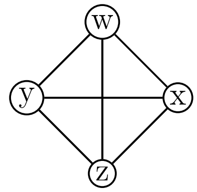
Una **matriz entera** M es una matriz tal que todas sus entradas son números enteros, y es **$\mathbb{Z}$-invertible** si además su matriz inversa M^{-1} tambien es una matriz entera. Un **cambio de variable entero** es un cambio de variable $\overrightarrow{y} = P\overrightarrow{x}$ donde P es una matriz $\mathbb{Z}$-invertible. Los cambios de variables enteros tienen la propiedad de que transforman formas cuadráticas enteras en formas cuadráticas enteras(demostración: sean A y P matrices enteras, entonces $P^T AP$ es una matriz entera). Cuando $q(\overrightarrow{x}) = q'(\overrightarrow{y})$ mediante el cambio de variable entero $\overrightarrow{y} = P\overrightarrow{x}$ diremos que q y q' son **$\mathbb{Z}$-equivalentes** mediante la matriz $\mathbb{Z}$-invertible P.

GRÁFICAS DE DYNKIN

Si q es una forma unitaria entonces le asociaremos una multigráfica B_q construida de la siguiente manera:

- Existe un vértice x_i para cada variable x_1
- Si $q_{ij} > 0$ entonces hay q_{ij} aristas punteadas entre los vértices x_i y x_j(cada una de ellas denotada como x_i - - - - x_j)

- Si $q_{ij} < 0$ entonces hay $|q_{ij}|$ aristas sólidas entre los vértices x_i y x_j(cada una de ellas denotada por x_i—x_j)



Claramente podemos revertir este proceso y asociar toda gráfica G (posiblemente aristas punteadas) una forma unitaria que denotaremos por q_G. Ahora, toda la información de q_G está codificada en G. La existencia de un vértice x nos dice la forma cuadrática está definida sobre alguna variable x y que contiene el término x^2 (porque q es una forma cuadrática unitaria). El coeficiente del monomio xy es $c = a_p - a_s$ donde a_p es la cantidad de aristas punteadas enter x y y, y a_s es la cantidad de aristas sólidas entre estos mismos vértices. Más aún cabe recalcar que nosotros estamos descartando gráficas con lazos, por lo que cualquier gráfica en verdad define a una forma cuadrática unitaria.

Decimos que la forma unitaria cuadrática q es **positiva** si es definida positiva.

Teorema 1.5. *Toda forma unitaria q es definida positiva si y solamente si q es $\mathbb{Z}$-equivalente a otra forma unitaria q' donde cada componente conexa de $\boldsymbol{B}_{q'}$ es una gráfica de Dynkin.*

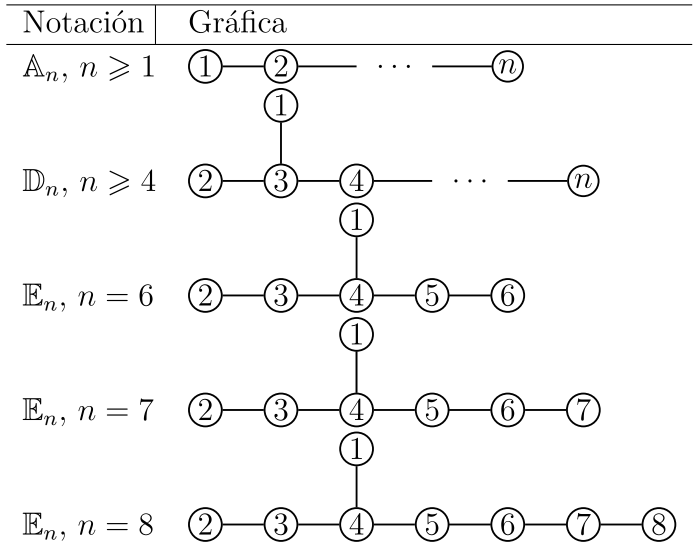
Para poder hacer la demostaración hay que comprender el teorema. El teorema dice que la forma unitaria $q(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{x}^T A\overrightarrow{x}$ es positiva si y solo si se puede llevar, mediante un cambio de variable entero $\overrightarrow{y} = P\overrightarrow{x}$, a la forma $q'(\overrightarrow{y}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{y}^T \left(P^T AP\right)\overrightarrow{y}$ donde $\mathbf{B}_{q'}$, tiene la propiedad de que cada una de sus componentes conexas es una gráfica de Dynkin. A dicha gráfica $\mathbf{B}_{q'}$ se le llama el **tipo Dynkin** de q.

Ejemplo La forma unitaria

$$q(w, x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \tag{1.2}$$

La demostración del teorema 1.5 se divide en dos parts: primero se demuestra que las gráficas de Dynkin son las únicas gráficas conexas de aristas solidas que definen las formas unitarias que son definidas positivas (tomando en cuentra inclusive a las gráficas de aristas múltiples); luego se demuestra que siempre es psible hacer cambios de variable enteros de tal manera que la gráfica resultante no contenga aristas sólidas.

Lema 1.2. *Las gráficas de Dynkin son las únicas gráficas conexas de aristas sólidas que tienen asociadas formas unitarias positivas.*



Cuadro **1-1**.: Caption

Para comenzar necesitamos convencernos en verdad de que las gráficas de Dynkin definen formas unitarias positivas. Comencemos con las gráficas de tipo $\mathbb{A}_n$:

$$x_1 \text{---} x_2 \text{---} \cdots \text{---} x_n$$

Consideremos con la identidad:

$$\frac{1}{2}\left(x_i - x_j\right)^2 = \frac{1}{2}x_i^2 - x_i x_j + \frac{1}{2}x_j^2$$

Podemos reescribir la forma unitaria asociada a $\mathbb{A}_n$ como

$$\begin{aligned}
q_{\mathbb{A}_n}(\overrightarrow{x}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\
&= \frac{1}{2}x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}x_i^2 + \frac{1}{2}x_{i+1}^2\right) + \frac{1}{2}x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(-x_i x_{i+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}x_i^2 - x_i x_{i+1} +\right) + \frac{1}{2}x_{i+1}^2 \\
&= \frac{1}{2}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(x_i - x_{i+1}\right)^2 + \frac{1}{2}x_n^2
\end{aligned}$$

Por el teorema 1.3 concluimos que $q_{\mathbb{A}_n}$ es definida positiva. La demostración para la forma unitaria $q_{\mathbb{D}_n}$ es similar solo que en este caso se usa la identidad:

$$\frac{1}{2}\left[(x_3-x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2\right]=x_1^2+x_2^2+\frac{1}{2}x_3^2-x_1x_3-x_2x_3$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} q_{\mathbb{D}_n}(\overrightarrow{x}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_1x_3 - \sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1} \\ &= \frac{1}{2}\left[(x_3-x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2+\sum_{i=3}^{n-1}(x_i-x_{i+1})^2+x_n^2\right] \end{aligned}$$

.

Para las gráficas $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ y $\mathbb{E}_8$ usaremos el siguente razonamiento:

Supongamos que A_Δ es la matriz asociada a la gráfica Δ (con $\Delta = \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$); si existe una matriz R_Δ tal que $A_\Delta = R_\Delta^T R_\Delta$ entonces por teorema 1.4 se sigue que Δ define una forma unitaria definida positiva.

En efecto tenemos que:

$$\begin{aligned} A\mathbb{E}_6 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ R\mathbb{E}_6 &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & sqrt(2) & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A\mathbb{E}_7 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 00 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R\mathbb{E}_7 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sqrt(2) & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$A\mathbb{E}_8 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R\mathbb{E}_8 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sqrt(2) & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

.

Aun no hemos terminado la demostración del lema . Falta demostrar que las gráficas de Dynkin son las únicas gráficas de aristas sólidas que definen formas unitarias positivas. Comenzamos con el siguiente lema, el cual muestra que toda gráfica que tenga aristas múltiples no corresponde a ninguna forma unitaria positiva.

Lema 1.3. *Si la forma unitaria $q(\overrightarrow{x})$ es positiva entonces $q_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ para todo $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.*

Demostración. Denotemos con $\overrightarrow{e}_k = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ al vector dado por $d_k = 1$ y $d_i = 0$ para toda $i \neq k$. Si $q_{ij} \geqslant 2$ entonces $q(\overrightarrow{e}_i + \overrightarrow{e}_j) = 2 - q_{ij} \leqslant 0$ pero $\overrightarrow{e}_i + \overrightarrow{e}_j \neq \overrightarrow{0}$. Ya que q es definida positiva, entonces $|q_{ij}| < 2$ para todo $1 \leqslant i < j \leqslant n$. □

Cada $|q_{ij}|$ nos dice la cantidad de aristas que hay entre los vértices x_i y x_j de la gráfica $\mathbf{B}_q$; por lo tanto si $|q_{ij}| < 1$ tenemos que $\mathbf{B}_q$ es una gráfica simple. Es decir que el lema se puede reescribir como sigue:

Corolario 1.6. *Si q es una forma unitaria positiva entonces necesariamente $\boldsymbol{B}_q$ es una gráfica simple.*

Con base en este corolario diremos que una forma unitaria q es simple si su gráfica asociada $\mathbf{B}_q$ es una gráfica simple.

Ahora que hemos descartado a las gráficas de aristas multiples el resto de la demostración es como sigue:

- demostraremos que toda gráfica que contenga a una gráfica Euclidiana(Figura) no define a una forma unitaria positiva
- demostraremos que toda gráfica conexa que no sea de DYnkin necesariamente contiene una subgráfica Euclidiana

Hasta ahora hemos asociado vértices con variables pero vamos a extender el concepto de la siguiente manera: si en lugar de etiquetar con variables etiquetamos con números enteros, convenimos que estamos evaluando la variable correspondiente a dicho número.

Usando esta notación mostraremos que si $\mathbf{B}_q$ contiene una subgráfica Euclidiana entonces existe un vector $\overrightarrow{x} \neq 0$, mostrando así que $q(\overrightarrow{x})$ no es definida positiva. Este vector se construye de la siguiente manera: se evalúan todas las variable que corresponden a y todas las demas variables se evalúan a cero. Un simple cálculo nos muestra que esta evaluación produce un vector $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ tal que $q(\overrightarrow{x}) = 0$

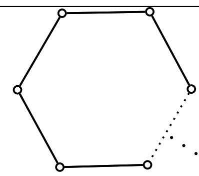
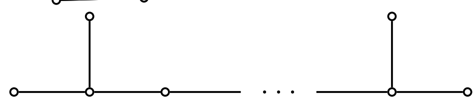
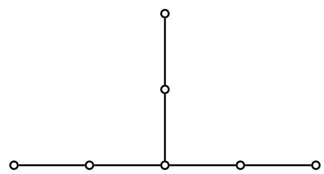
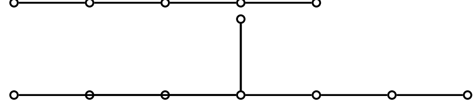
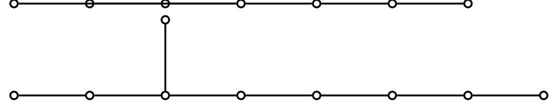
Notación	Gráfica
$\widetilde{\mathbb{A}_m}$	
$\widetilde{\mathbb{D}_m}$	
$\widetilde{\mathbb{E}_6}$	
$\widetilde{\mathbb{E}_7}$	
$\widetilde{\mathbb{E}_8}$	

Figura **1-1**.: Gráficas Euclidianas. La cantidad de vértices que tiene cada gráfica es n = m + 1.

Solamente falta demostrar que toda gráfica que no sea de Dynkin necesariamente contiene a una subgráfica Euclidiana. Sea G una gráfica conexa de n vértices distinta de $\mathbb{A}_n \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7$ *y* $\mathbb{E}_8$. Si G no es un árbol entonces G contiene un ciclo; es decir contiene una subgráfica de $\widetilde{\mathbb{A}}_m$ para algún $m < n$. Si G es un árbol, y dado que $G \neq \mathbb{A}_n$, entonces existe al menos un vértice v de grado 3 o más. Claramente v pertenece a una subgráfica de $\mathbb{D}_r$ para algún $r \leqslant n$, pero habíamos supuesto que $G \neq \mathbb{D}_n$ por lo tanto hay tres casos:

- Si v tiene grado estrictamente mayor a 3 entonces G contiene a $\widetilde{D}_4$
- Si G contiene otro vértice w de grado 3 o más, entonces G contiene a $\widetilde{D}_m$ para algún $m < n$
- si todos los demás vértices tienen grado menor a 3 entonces G debe contener a $\mathbb{E}_6$ como subgráfica.

Ahora ya que habiamos supuesto que $G \neq \mathbb{E}_6$, por tanto $n > 6$. Eneste caso G debe contener a $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ o $\mathbb{E}_7$. Si tenemos que $G = \mathbb{E}_7$ entonces $n > 8.$, de donde obtenemos que G contiene a $\widetilde{\mathbb{E}}_7$ o $\mathbb{E}_8$, pero si $G \neq \mathbb{E}_8$ entonces $n > 8$ y por lo tanto G contiene a $\widetilde{\mathbb{E}}_8$.

Resumiendo, las gráficas de Dynkin definen formas unitarias positivas, y cualquier otra gráfica conexa y de aristas solidas que no sea de Dynkin necesariamente contiene una gráfica Euclidiana que la vuelve no positiva: por lo tanto las gráficas de Dynkin son las únicas gráficas conexas de aristas sólidas que definen formas unitarias positivas. Esto conluye la demostración del lema

En la sección 2.1 se dará termino a la demostración del teorema 1.5

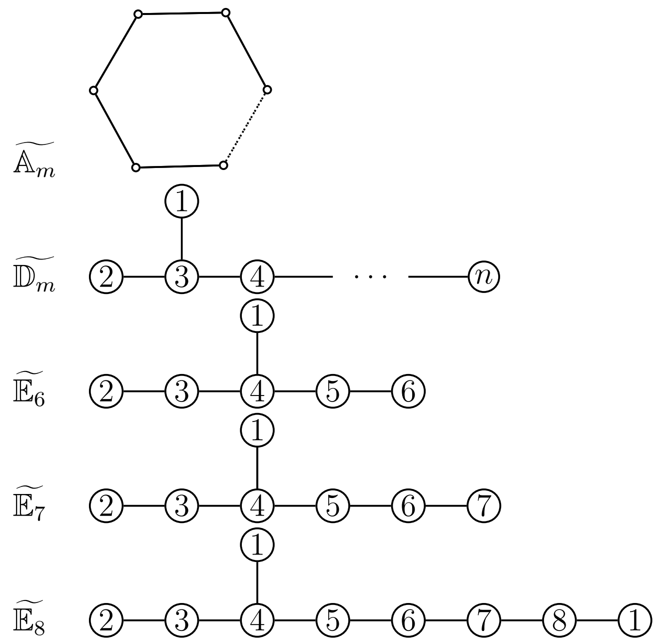


Figura **1-2**.: Caption

2

1. Antecedentes

Este capitulo está dedicado a presentar los resultados principales de Gabriel & Roıter (1997) & Barot (1999) que permiten caracterizar a las formas $\mathbb{A}_n$

1.1. EL MÉTODO DE LAS INFLACIONES

La demostración del teorema 1.5 aparece en Gabriel y Roıter (1997) y hace uso implícito de un algoritmo que describiremos aqui.

La idea intuitiva es pasar mediante cambios de variable enteros de la forma unitaria q a la forma unitaria q' donde $\mathbf{B}_{q'}$ no contiene aristas punteadas. Si q es definida positiva entonces por lemma q' tambien es definidad positiva; luego como q' solamente contiene aristas solidas entonces por lema se sigue que cada una de sus componentes conexas debe ser una gráfica de Dynkin. El procedimiento para encontrar dicha forma cuadrática q' es el *método de las inflaciones* y es el tema de esta sección.

INFLACIONES Y DEFLACIONES

El la página se discuten las matrices elementales E_{rs}^{d}, cuya transformación lineal

$T_{rs}^{d}(A) = E_{rs}^{d}A$

equivale a sumar d veces el renglón s de A al renglón r de A. Dado que la matriz inversa de E_{rs}^{d} es E_{rs}^{-d}, notamos que E_{rs}^{d} es Z-invertible si y solo si d es un número entero.

Consideremos el cambio de variable entero $\overline{y} = E_{sr}^{d}\overline{x}$, entonces

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = E^d_{rs} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ x_r + dx_s \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y por tanto podemos concluir que T^d_{rs} como cambio de variable tiene el mismo efecto que sustituir $x_r \leftarrow$ sobre una forma unitaria q?. Supongamos que q tiene matriz asociada $A = [a_{ij}]$ y sea

$$q'(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2} \left(E^d_{rs}\right)^T AE^d_{sr}$$

Dado que E^d_{sr} es la matriz identidad salvo por d en la posición (r, s)-ésima, entonces $\left(E^d_{sr}\right)^T = E^d_{sr}$. Por lo tanto $\left(E^d_{sr}\right)^T$ tiene el efecto de sunar d veces el renglón r al renglón s. Por otra parte E^d_{rs} multiplicado por la derecha tiene el efecto de sunar d veces la columna r a la columna s, por lo tanto la matriz $C = \left(E^d_{rs}\right)^T AE^d_{rs}$ está dada por

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq s \text{ y } j \neq s \\ a_{sj} + da_{rj} & \text{si } i = s \text{ pero } j \neq s \\ a_{is} + da_{ir} & \text{si } i \neq s \text{ pero } i \neq s \\ d^2 a_{rr} + d(a_{sr} + a_{rs}) + a_{ss} & \text{si } i = s \text{ y } j = s \end{cases} \tag{2.1}$$

E^d_{sr} define un cambio de variable entero, por lo que C es la matriz asociada a alguna forma cuadrática entera, aunque no necesariamente unitaria. Para que $q'(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{x}^T C\overrightarrow{x}$ sea una forma unitaria es necesario que $c_{ss} = 2$, o lo que es lo mismo (con $a_{rr} = a_{ss} = 2$ y $a_{rs} = a_{sr}$:

$$2d^2 + 2da_{rs} + 2 = 2.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $d = 0$y $d = -a_{rs}$. Estas soluciones se resumen en el siguiente lema:

Lema 1.1. *Si q es una forma unitaria entonces $q \circ T^d_{rs}$ es unitaria si y solo si $q_{rs} = q_{sr} = -d$.*

Corolario 1.1. *2.1 Si q es una forma unitaria simple entonces $q \circ T^d_{rs}$ es una forma unitaria para un $d \neq 0$ en cualquiera de estos dos casos y solamentes estos dos:*

1. $d = 1$ y $\mathbf{B}_q$ contiene una arista punteada entre los vértices x_s y x_r.

2. $d = -1$ y $\mathbf{B}_q$ contiene a una arista sólida entre los vertices x_s y x_r.

Este corolario no garantiza que $q \circ T^d_{rs}$ sea simple; en este caso por corolario vemos que esto ocurre solamente cuando q (que es Z-equivalente a $q \circ T^d_{rs}$) no es definida positiva.

Con base al corolario anterior se justifica que definamos la transformación de **inflación** como

$$T^-_{rs} = T^{-1}_{rs}$$

y la transformación de la **deflación** como

$$T^+_{rs} = T^1_{rs}$$

El corolario anterior dice que la inflación T^-_{rs} se puede aplicar solamente cuando $\mathbf{B}_q$ contiene a la arista punteada $x_r \cdots\cdots x_s$ mientras que T^+_{rs} solamente cuando $\mathbf{B}_q$ contiene a la arista sólida x_r—x_s. A partir de la ecuación (2.1), y del hecho de que la matriz es simétrica. Podemos interpretar las inflaciones y deflaciones como un algoritmo de reconexión sobre la gráfica $\mathbf{B}_q$(bajo las condiciones del corolario anterior) que consiste de cuatro pasos:

1. *Duplicar*: Generar una copia de las aristas que inciden en x_i excepto la arista que conecta x_i con x_j.

2. *Invertir*: En caso de una inflación reeplazar $x_i \cdots\cdots x_j$ por x_i—x_j y para cada arista duplicada del paso anterior intercambiar las aristas punteadas con sólidas y viceversa. En caso de una deflación simplemente reemplazar x_i—xj por $x_i \cdots\cdots x_j$

3. *Arrastrar*: Cada una de las aristas duplicadas se desconecta de su x_i y se reconecta en x_j.

4. *Simplificar*: Si existen dos aristas $x_i \cdots\cdots x_j$ y x_i—xj incidentes en x_r y x_j se borran.

Por ejemplo, consideremos la forma cuadrática q de la ecuación (1.5) y ordenemos a las variables como (w, x, y, z). Entonces para aplicar

DESCRIPCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

El método que aparece Gabriel Roıter (1997) consiste en aplicar sucesivamente inflaciones como se indica en el algoritmo 2.1 tanto como sea posible, es decir, hasta que no haya más aristas punteadas.

Para terminar la demostración del teorema 1.5 es necesario mostrar que si q es una forma unitaria positiva entonces este algoritmo termina. Esto lo podemos resumir de la siguiente manera.

- Decimos que $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Z}^n$ es una **raíz** de la forma unitaria q si $q(\overrightarrow{x}) = 1$.
- Primero mostramos que toda forma cuadrática se puede poner en la forma

$$\begin{aligned} q(\overrightarrow{x}) &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \\ y_i &= x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \rho_{ij} x_j \end{aligned}$$

- Vamos a suponer que q es una forma unitaria positiva, y usando la expresión anterior mostraremos que q tiene una cantidad finita de raíces. Más especificamente mostraremos que cada x_i está acotada en el intervalo $[-\sigma, \sigma]$ para alguna constante σ_i.
- Encontraremos cierto subconjunto de raíces que crece con cada iteración del algoritmo 1. Como el conjunto de raíces es finito, la cantidade iteraciones tambien.

La **reducción de Lagrange** es un método que nos permite llevar toda forma cuadrática a la forma (). Primero necesitamos recordar la fórmula de **completar cuadrados**:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = a\ &\frac{\pi r^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\pi r^2 \quad = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.2. ENSAMBLAJE POR $\mathbb{A}$-BLOQUES

3

Capítulo 2

4

5

Capítulo ...

A

Anexo: Nombrar el anexo A de acuerdo con su contenido

Los Anexos son documentos o elementos que complementan el cuerpo de la tesis o trabajo de investigación y que se relacionan, directa o indirectamente, con la investigación, tales como acetatos, cd, normas, etc.

B

Anexo: Nombrar el anexo B de acuerdo con su contenido

A final del documento es opcional incluir índices o glosarios. Éstos son listas detalladas y especializadas de los términos, nombres, autores, temas, etc., que aparecen en el mismo. Sirven para facilitar su localización en el texto. Los índices pueden ser alfabéticos, cronológicos, numéricos, analíticos, entre otros. Luego de cada palabra, término, etc., se pone coma y el número de la página donde aparece esta información.