

La operación de dividir

31-Abril-2020

$G = (V, E)$ un bigrafo, $H = (W, F)$ un sub-bigrafo de G ,

En clases anteriores se mostro que la siguiente relación sobre el conjunto $E-F$, es una relación de equivalencia.

- $\forall e \in E-F, e \cong e$.
- Si $e \in E-F$ es la arista $e: a_1 - b_1$ y $f \in E-F$ es la arista $f: a_2 - b_2$, entonces $e \cong f$ si y solo si existe un camino simple de uno de los siguientes tipos:

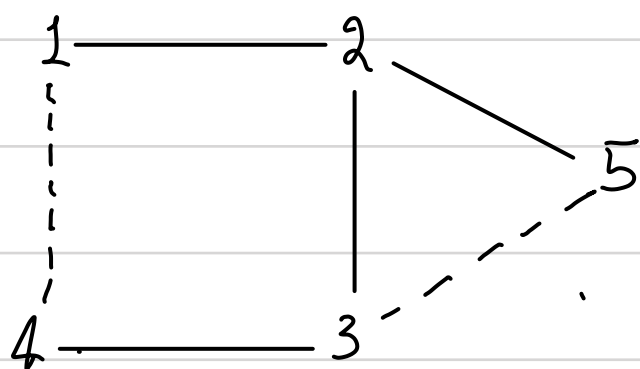
$$a_1 - b_1 - v_1 - v_2 - \dots - v_k - a_2 - b_2 \quad b_1, v_1, \dots, v_k, a_2 \notin W$$

$$a_1 - b_1 - v_1 - v_2 - \dots - v_k - b_2 - a_2 \quad b_1, v_1, \dots, v_k, b_2 \notin W$$

$$b_1 - a_1 - v_1 - v_2 - \dots - v_k - a_2 - b_2 \quad a_1, v_1, \dots, v_k, a_2 \notin W$$

$$b_1 - a_1 - v_1 - v_2 - \dots - v_k - b_2 - a_2 \quad a_1, v_1, \dots, v_k, b_2 \notin W$$

Ejemplo: Sea G el bigrafo y $H = \{\{2,3\}, \emptyset\}$



La clase de equivalencia de $2 - 5$ es el conjunto:

$$S_1 = \{2 - 5, 3 - - - 5\}$$

La clase de equivalencia de $1 - - - 4$ es el conjunto:

$$S_2 = \{1 - - - 4, 1 - 2, 4 - 3\}$$

Finalmente la clase de equivalencia de $2 - 3$ es el conjunto:

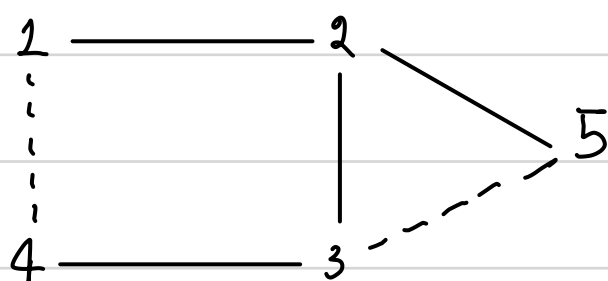
$$S_3 = \{2 - 3\}$$

Para saber si $\{2,3\}$ es un par de separación hay que encontrar una partición de $\{1,2,3\} = A \cup B$, $A \cap B = \{\emptyset\}$ tal que

$|E_1| = |\bigcup_{i \in A} S_i| \geq 2$ y $|E_2| = |\bigcup_{i \in B} S_i| \geq 2$. Si tal partición no existe entonces $\{2,3\}$ no es un vértice de separación.

En este caso $A = \{1, 3\}$, $B = \{2\}$ es la partición que buscamos y entonces $\{2, 3\}$ es un par de separación.

Ahora intentemos con $H = \{\{1, 4\}, \emptyset\}$.



La clase de equivalencia de $\{1, 2\}$ es el conjunto

$$S_1 = \{1-2, 2-5, 2-3, 3---5, 3-4\}$$

La clase de equivalencia de $\{1, 4\}$ es el conjunto

$$S_2 = \{1---4\}.$$

En este caso no existe partición del conjunto $\{1, 2\}$ que cumpla con lo requerido, entonces $\{1, 4\}$ no es un par de separación.

Supongamos que $\{a, b\}$ es un par de separación.

Si $H = \{\{a, b\}, \emptyset\}$ y S_1, S_2, \dots, S_k son las clases de separación del par $\{a, b\}$ (las clases de equivalencia definidas por H).

Sea A, B la partición del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ tal que

$$|E_1| = \left| \bigcup_{i \in A} S_i \right| \geq 2 \quad \text{y} \quad |E_2| = \left| \bigcup_{j \in B} S_j \right| \geq 2.$$

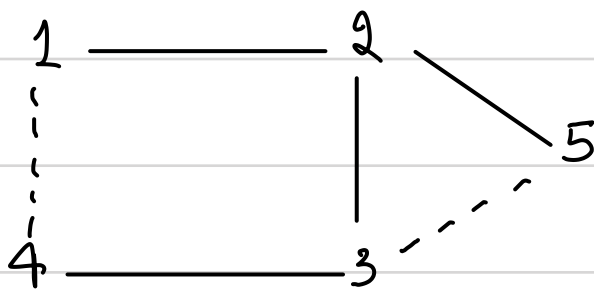
→ Aristas.

Si $H_1 = (\underbrace{V(E_1)}_{\text{vértices}}, E_1)$ y $H_2 = (V(E_2), E_2)$ entonces

$$V(E_1) \cap V(E_2) = \{a, b\}.$$

Sea $G_i = H_i + a \text{---} b$ para $i \in \{1, 2\}$. Las G_i son llamadas bigrafos de división de G en $\{a, b\}$. La arista $a \text{---} b$ es llamada arista virtual.

Ejemplo: En nuestro primer ejemplo con $H = \{\{2, 3\}, \emptyset\}$ y G el bigrafo



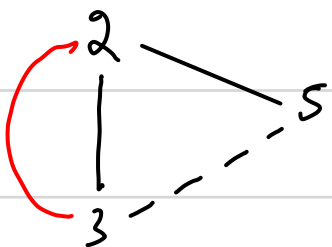
Teniamos que $S_1 = \{2 \text{---} 5, 3 \text{---} 5\}$

$$S_2 = \{1 \text{---} 2; 1 \text{---} 4, 3 \text{---} 4\}$$

$$S_3 = \{2 \text{---} 3\}.$$

Si tomamos la partición $A = \{1, 3\}$, $B = \{2\}$ entonces

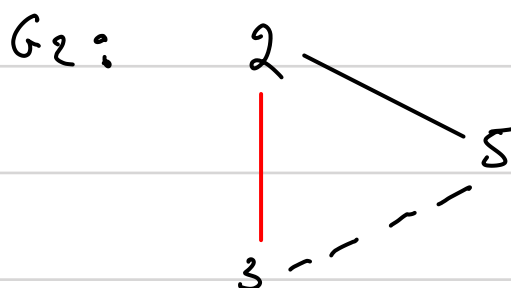
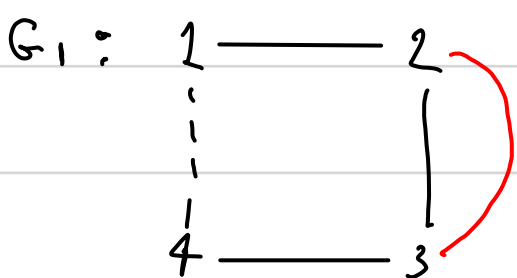
G_1



G_2



Si tomamos la partición $A = \{2, 3\}$, $B = \{1\}$.



Entonces dependiendo de la elección de la partición obten-
dremos distintas G_1 y G_2

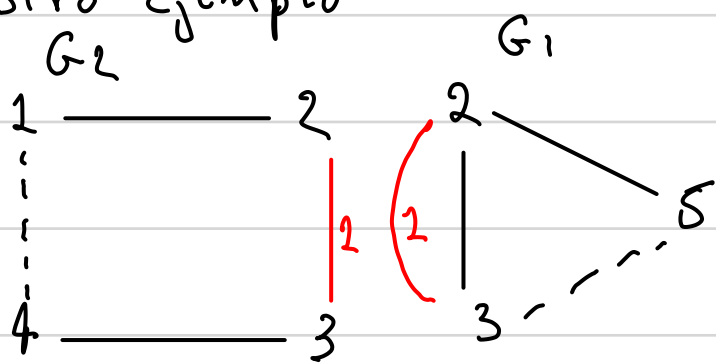
Etiquetaremos la arista virtual $a \text{---} b$ con una etiqueta n ,
 $a \text{---}^n b$ para distinguirla de otras aristas virtuales.

Los grafos G_1 y G_2 son biconexos (este resultado es un Teorema, pe-
ro no veremos su demostración).

Notación: Biconexa \equiv no tiene vértices de separación

Triconexa \equiv no tiene pares de separación.

En nuestro ejemplo



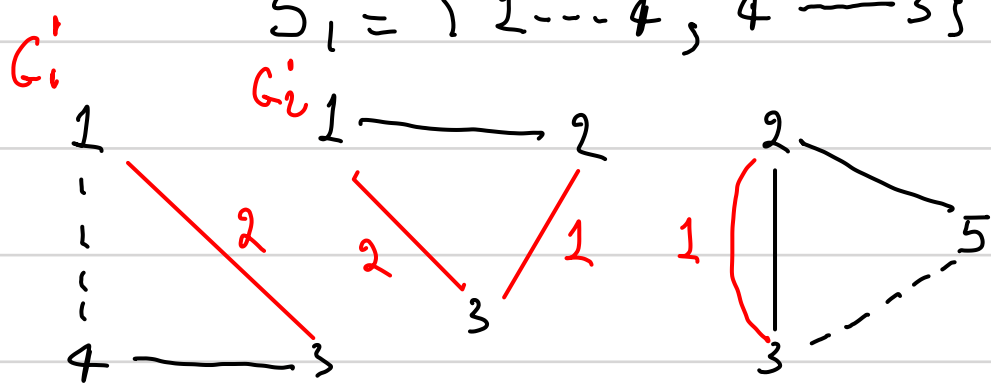
G_1 es triconexa pero G_2 no es triconexa (tiene pares de
separación). Supongamos que sabemos que $\{1,3\}$ es un par
de separación de G_2 entonces,

$$S_2 = \{1 \text{---} 2, 2 \text{---}^1 3\}$$

$$A = \{1\}$$

$$S_1 = \{1 \text{---} 4, 4 \text{---} 3\}$$

$$B = \{2\}$$



Ahora tenemos componentes
triconexas. Estos son llama-
dos componentes de división.

Desafortunadamente los componentes de división no son
únicos.

El siguiente es un resultado de Hopcroft y Tarjan.

Lema 1: El número total de aristas en todos los componen-
tes de división no excede $3|E| - 6$.

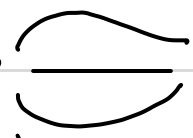
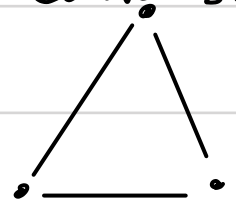
La operación de fusión

Si H_1 y H_2 son componentes de división de G que contienen la misma arista virtual $a \xrightarrow{n} b$. Entonces fusionamos H_1 y H_2 tomando

$$H = H_1 + H_2 - a \xrightarrow{n} b$$

Pero no vamos a fusionar todos los componentes de división.

Fusionamos solo componentes de división de la siguiente forma.

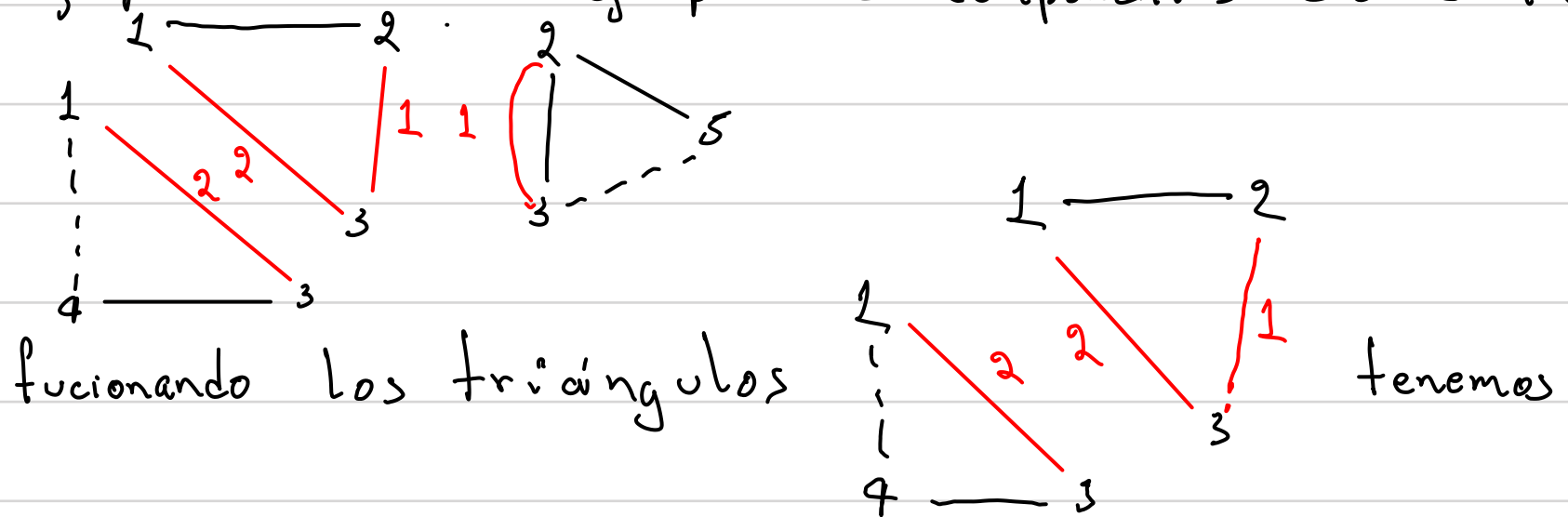
- Fusionamos bigrafos de la forma  con bigrafos de la misma forma, tanto como sea posible.
- Fusionamos triángulos  con triángulos, tanto como sea posible.

En ambos casos suponemos que una arista es virtual.

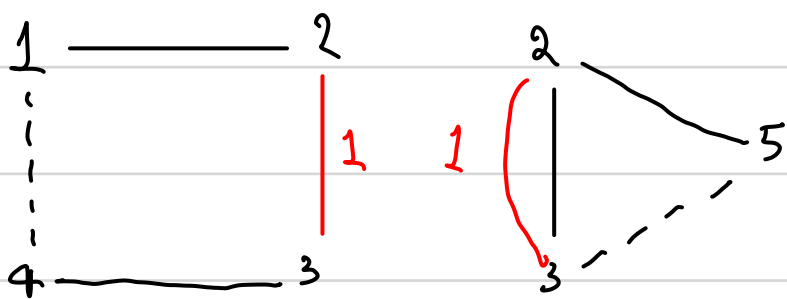
El conjunto final de bigrafos se denomina conjunto completo de componentes triconexas.

Lema 2: Un conjunto completo de componentes triconexas es único hasta isomorfismo

Ejemplo: En nuestro ejemplo los componentes de división de G son



que el conjunto completo de componentes triconexas es

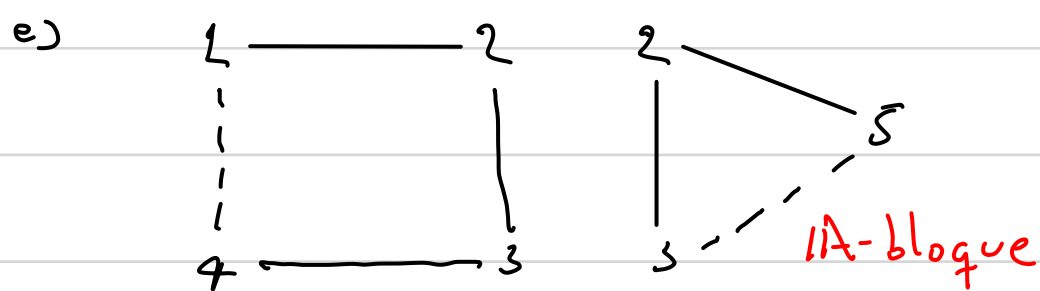


Del conjunto completo de componentes triconexas solo nos interesan los vértices para recuperar los componentes que buscamos.

Por ejemplo ^{con} los vértices de $\begin{array}{cc} 1 & \text{---} & 2 \\ | & & | \\ 4 & \text{---} & 3 \end{array}$ recuperamos la

componente $\begin{array}{cc} 1 & \text{---} & 2 \\ | & & | \\ 4 & \text{---} & 3 \end{array}$ y de los vértices de $\begin{array}{ccc} & 2 & \\ & | & \diagup \\ & 3 & 5 \\ & | & \diagdown \\ & 3 & \end{array}$ recuperamos la componente

Para nosotros el conjunto completo de componentes biconexas



Entonces G es de tipo $\text{II})_5$.

Ciclo de longitud
4, que cumple
la condición de
ciclo