

# Clasificación algorítmica en gráficas de tipo $\mathbb{D}_n$

Rey David Gutiérrez Torres  
Daniel Rivera López

Universidad Autónoma del Estado de Morelos

19 de marzo de 2022

# Matriz de Cartan simétrica

## Definición

- Una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$  es **casi Cartan simétrica** si  $A$  es simétrica y  $(A)_{ii} = 2$  para toda  $i = 1, \dots, n$ .
- Se denotan por  $\text{sqC}$ .

## Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Matriz de Cartan simétrica

## Definición

- Una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$  es **casi Cartan simétrica** si  $A$  es simétrica y  $(A)_{ii} = 2$  para toda  $i = 1, \dots, n$ .
- Se denotan por  $\text{sqC}$ .

## Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Matriz de Cartan simétrica

## Definición

- Una matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$  es **casi Cartan simétrica** si  $A$  es simétrica y  $(A)_{ii} = 2$  para toda  $i = 1, \dots, n$ .
- Se denotan por  $\text{sqC}$ .

## Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Forma cuadrática

- Una forma cuadrática es un polinomio  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $n > 0$  si cada monomio del mismo es una variable al cuadrado o la multiplicación de dos variables. Esto es equivalente a decir que  $q$  se puede expresar como:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n q_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij} x_i x_j$$

- Una forma cuadrática unitaria es un caso especial donde  $q_{ii} = 1$

# Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica  $\leftrightarrow$  Forma unitaria

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_A(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A)_{ij} x_i x_j \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (A)_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A)_{ij} x_i x_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A)_{ij} x_i x_j.
 \end{aligned}$$

# Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica  $\leftrightarrow$  Forma unitaria

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_A(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (\mathbf{A})_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j.
 \end{aligned}$$

# Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica  $\leftrightarrow$  Forma unitaria

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_A(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (\mathbf{A})_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j.
 \end{aligned}$$



# Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica  $\leftrightarrow$  Forma unitaria

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_A(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (\mathbf{A})_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j.
 \end{aligned}$$

# Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

## Definición

Una matriz casi Cartan simétrica  $A$  es **definida positiva** si y sólo si  $q_A(x) = \frac{1}{2}x^T A x > 0$ , para toda  $x \in \mathbb{Z}$  con  $x \neq 0$ .

# Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan



Matriz casi-Cartan simétrica  $\leftrightarrow$  Bigráfica

## Teorema

Sea  $A \in M_n(\mathbb{Z})$  una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces,

- (a)  $0 \leq A_{ij}A_{ji} < 4$
- (b)  $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

La bigráfica  $\text{bigr}(A)$  asociada a la matriz  $A$  tiene vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$ , y para cada par de vértices  $i, j$  con  $i \neq j$ :

- ① Si  $A_{ij} = -1 = A_{ji}$  trazamos una arista sólida entre los vértices, 
- ② Si  $A_{ij} = 1 = A_{ji}$  trazamos una arista punteada entre los vértices, 

# Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan



Matriz casi-Cartan simétrica  $\leftrightarrow$  Bigráfica

## Teorema

Sea  $A \in M_n(\mathbb{Z})$  una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces,

- (a)  $0 \leq A_{ij}A_{ji} < 4$
- (b)  $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

La bigráfica  $\text{bigr}(A)$  asociada a la matriz  $A$  tiene vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$ , y para cada par de vértices  $i, j$  con  $i \neq j$ :

- 1 Si  $A_{ij} = -1 = A_{ji}$  trazamos una arista sólida entre los vértices, 
- 2 Si  $A_{ij} = 1 = A_{ji}$  trazamos una arista punteada entre los vértices, 

# Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan

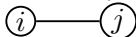

Matriz casi-Cartan simétrica  $\leftrightarrow$  Bigráfica

## Teorema

Sea  $A \in M_n(\mathbb{Z})$  una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces,

- (a)  $0 \leq A_{ij}A_{ji} < 4$
- (b)  $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

La bigráfica  $\mathbf{bigr}(A)$  asociada a la matriz  $A$  tiene vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$ , y para cada par de vértices  $i, j$  con  $i \neq j$ :

- 1 Si  $A_{ij} = -1 = A_{ji}$  trazamos una arista sólida entre los vértices, 
- 2 Si  $A_{ij} = 1 = A_{ji}$  trazamos una arista punteada entre los vértices, 

# Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica  $\leftrightarrow$  Bigráfica

## Teorema

Sea  $A \in M_n(\mathbb{Z})$  una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces,

(a)  $0 \leq A_{ij}A_{ji} < 4$

(b)  $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

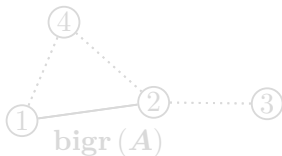
La bigráfica **bigr**( $A$ ) asociada a la matriz  $A$  tiene vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$ , y para cada par de vértices  $i, j$  con  $i \neq j$ :

- ① Si  $A_{ij} = -1 = A_{ji}$  trazamos una arista sólida entre los vértices,  $(i) \text{ — } (j)$
- ② Si  $A_{ij} = 1 = A_{ji}$  trazamos una arista punteada entre los vértices,  $(i) \cdots (j)$

# Equivalencia de conceptos

## Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

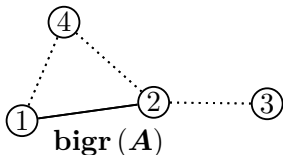


$$q_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$$

# Equivalencia de conceptos

## Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



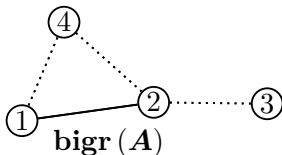
$$q_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$$



# Equivalencia de conceptos

## Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{q}_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$$

# Z-equivalencia

## Definiciones

- Una matriz  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$  es **Z**-invertible si tiene inversa  $M^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ .
- $A, A' \in \text{sqC}$  son **Z**-equivalentes si existe una matriz **Z**-invertible  $M$  tal que  $A' = M^T A M$ .

# Z-equivalencia

## Definiciones

- Una matriz  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$  es **Z**-invertible si tiene inversa  $M^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ .
- $A, A' \in \text{sqC}$  son **Z**-equivalentes si existe una matriz **Z**-invertible  $M$  tal que  $A' = M^T A M$ .

# Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

Familia

$A_n, n \geq 1$

Gráfica



$D_n, n \geq 4$



$E_n, 6 \leq n \leq 8$



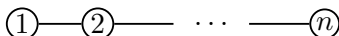
# Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

Familia

$A_n, n \geq 1$

Gráfica



1

$D_n, n \geq 4$



1

$E_n, 6 \leq n \leq 8$



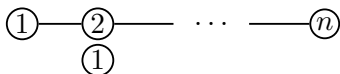
# Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

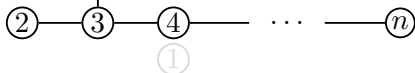
Familia

$A_n, n \geq 1$

Gráfica



$D_n, n \geq 4$



$E_n, 6 \leq n \leq 8$



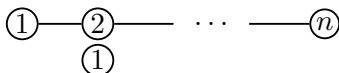
# Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

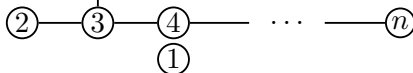
Familia

$A_n, n \geq 1$

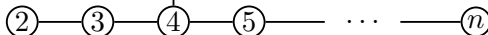
Gráfica



$D_n, n \geq 4$



$E_n, 6 \leq n \leq 8$



# La clasificación $\mathbb{A} - \mathbb{D} - \mathbb{E}$

Teorema (S. Ovsienko – 1978)

*Toda bigráfica  $G$  conexa y definida positiva es  $\mathbb{Z}$ -equivalente a un diagrama de Dynkin.*

Demostración.

Demostración constructiva mediante el **algoritmo de las inflaciones**. □



# Inflaciones

## Definiciones

- $I$  denota la matriz identidad con vectores columna  $e_j$ .
- $E_{sr}^\sigma := I + \sigma e_s e_r^T$  ( $s, r \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ ) denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si  $A \in \text{sqC}$  y  $(A)_{sr} = 1$  entonces  $(E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$  es una **inflación** de  $A$ .

# Inflaciones

## Definiciones

- $I$  denota la matriz identidad con vectores columna  $e_j$ .
- $E_{sr}^\sigma := I + \sigma e_s e_r^T$  ( $s, r \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ ) denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si  $A \in \text{sqC}$  y  $(A)_{sr} = 1$  entonces  $(E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$  es una **inflación** de  $A$ .

# Inflaciones

## Definiciones

- $I$  denota la matriz identidad con vectores columna  $e_j$ .
- $E_{sr}^\sigma := I + \sigma e_s e_r^T$  ( $s, r \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ ) denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si  $A \in \text{sqC}$  y  $(A)_{sr} = 1$  entonces  $(E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$  es una **inflación** de  $A$ .

# Algoritmo de las inflaciones

## Algoritmo de las inflaciones

**función** inflaciones( $A$ ):

**repetir mientras** *exista una entrada no diagonal*

$(A)_{sr} = 1$  :

$A := (E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$

- Se justifica en que  $|\mathbf{q}_A^{-1}(1)| < \infty$  permanece constante en cada iteración mientras que  $|\mathbf{q}_A^{-1}(1) \cap \mathbb{N}^n|$  crece.
- Cota superior del número de raíces positivas  $O(n \cdot 6^n)$  (Kosakowska – 2012).

# Algoritmo de las inflaciones

## Algoritmo de las inflaciones

**función** inflaciones( $A$ ):

**repetir mientras** exista una entrada no diagonal

$(A)_{sr} = 1$  :

$$A := (E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$$

- Se justifica en que  $|\mathbf{q}_A^{-1}(1)| < \infty$  permanece constante en cada iteración mientras que  $|\mathbf{q}_A^{-1}(1) \cap \mathbf{N}^n|$  crece.
- Cota superior del número de raíces positivas  $O(n \cdot 6^n)$  (Kosakowska – 2012).

# Algoritmo de las inflaciones

## Algoritmo de las inflaciones

**función** inflaciones( $A$ ):

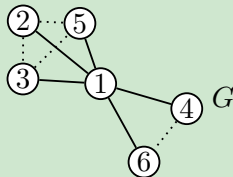
**repetir mientras** *exista una entrada no diagonal*

$(A)_{sr} = 1$  :

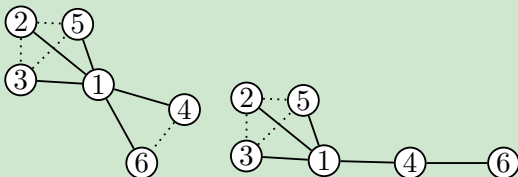
$$A := (E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$$

- Se justifica en que  $|\mathbf{q}_A^{-1}(1)| < \infty$  permanece constante en cada iteración mientras que  $|\mathbf{q}_A^{-1}(1) \cap \mathbf{N}^n|$  crece.
- Cota superior del número de raíces positivas  $O(n \cdot 6^n)$  (Kosakowska – 2012).

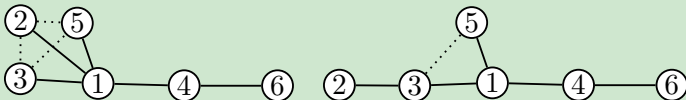
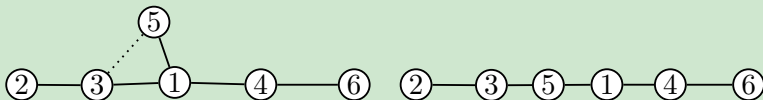
## Ejemplo



## Ejemplo ( $T_{46}(G)$ )





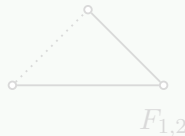
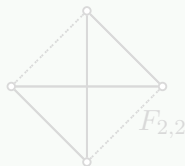
Ejemplo ( $T_{32}(G)$ )Ejemplo ( $T_{53}(G)$ )

# $\mathbb{A}$ -bloques

## Definiciones

- Sean  $X$  y  $Y$  conjuntos disjuntos de vértices. Denotamos por  $F[X, Y]$  el bigrafo no separable obtenido uniendo cada par de vértices  $(x, y)$  con  $x \in X$  e  $y \in Y$  por una arista sólida, y todos los demás pares de vértices por una arista punteada, tal bigrafo se llama un  $\mathbb{A}$  bloque.

## Ejemplo

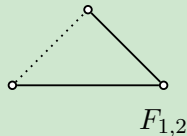
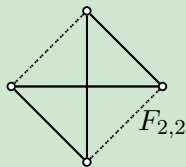
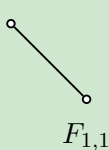


# $\mathbb{A}$ -bloques

## Definiciones

- Sean  $X$  y  $Y$  conjuntos disjuntos de vértices. Denotamos por  $F[X, Y]$  el bigrafo no separable obtenido uniendo cada par de vértices  $(x, y)$  con  $x \in X$  e  $y \in Y$  por una arista sólida, y todos los demás pares de vértices por una arista punteada, tal bigrafo se llama un  $\mathbb{A}$  bloque.

## Ejemplo



# Vértices de corte

## Definición (F. Harary – 1969)

Sea  $G$  una gráfica.

- $\kappa(G)$  denota a la cantidad de componentes conexas de  $G$ .
- $v \in V(G)$  es un **vértice de corte** si  $\kappa(G) < \kappa(G - v)$ .

## Ejemplo



# Vértices de corte

## Definición (F. Harary – 1969)

Sea  $G$  una gráfica.

- $\kappa(G)$  denota a la cantidad de componentes conexas de  $G$ .
- $v \in V(G)$  es un **vértice de corte** si  $\kappa(G) < \kappa(G - v)$ .

## Ejemplo



# Vértices de corte

## Definición (F. Harary – 1969)

Sea  $G$  una gráfica.

- $\kappa(G)$  denota a la cantidad de componentes conexas de  $G$ .
- $v \in V(G)$  es un **vértice de corte** si  $\kappa(G) < \kappa(G - v)$ .

## Ejemplo



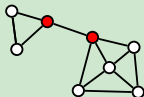
# Vértices de corte

## Definición (F. Harary – 1969)

Sea  $G$  una gráfica.

- $\kappa(G)$  denota a la cantidad de componentes conexas de  $G$ .
- $v \in V(G)$  es un **vértice de corte** si  $\kappa(G) < \kappa(G - v)$ .

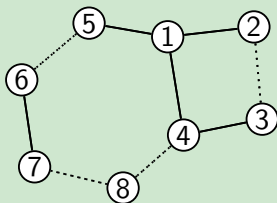
## Ejemplo



## Definiciones

Una bigráfica cumple la condición de ciclo si todo ciclo tiene un número impar de aristas punteadas.

## Ejemplo





# $\mathbb{D}$ -nucleo

- Una bigráfica cíclica  $H = x_1 - x_2 - \cdots - x_h - x_1$  (todos los  $x_i$  distintos para  $1 \leq i \leq h$ ) que satisface la condición de ciclo.
- A esta bigráfica  $H$  le llamaremos el  $\mathbb{D}$ -núcleo.

# Descripción de el problema

- El problema propuesto es la clasificación algorítmica en gráficas de tipo  $\mathbb{D}_n$
- Para esto se propone usar el algoritmo de componentes triconexas para caracterizar las de tipo  $\mathbb{D}_n$

# Componentes triconexas

Sea  $G = (V, E)$  un multigráfo y sea  $H = (W, F)$  un subgráfo de  $G$ , definimos una relación de equivalencia sobre  $E - F$  como sigue:

## Definiciones

- 1  $\forall e \in E - F, e \approx e.$
- 2  $\forall e, f \in E - F, e \approx f$  si y solo si existe un camino que une  $e, f$  que no tiene un vértice en  $W$ .

# Componentes triconexas

Si  $H = \{\{a, b\}, \emptyset\}$ , las clases de equivalencia son llamadas clases de separación relativas al par  $\{a, b\}$ .

## Definiciones

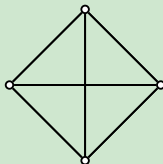
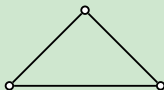
- Sean  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , las clases de separación relativas al par  $(a, b)$ . Si existe una partición  $(A, B)$  de  $\{1, 2, \dots, k\}$  tal que  $|E_1 = \bigcup_{i \in A} S_i| \geq 2$  y  $|E_2 = \bigcup_{j \in B} S_j| \geq 2$ , decimos que  $\{a, b\}$  es un par de separación.

## Componentes triconexas

## Definiciones

- Si  $G$  es biconexa y  $G$  no tiene par de separación entonces  $G$  es triconexa.

## Ejemplo



# Algoritmo de descomposición en componentes triconexas

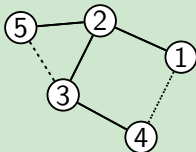
- 1 Divide las aristas múltiples para formar enlaces triples y un grafo biconexo simple  $G'$ .
- 2 Encuentra los componentes de separación de  $G'$ .
- 3 Combina los enlaces triples y triángulos en enlaces y polígonos.



# La operación de división

Sea  $G$  el bigrafo y  $H = \{\{2, 3\}, \emptyset\}$

## Ejemplo



La clase de equivalencia de  $2-5$  es el conjunto:

$$S_1 = \{2-5, 5 \cdots 3\}$$

La clase de equivalencia de  $1 \cdots 4$  es el conjunto:

$$S_2 = \{2 \cdots 1, 1-4, 4-3\}$$

La clase de equivalencia de  $2-3$  es el conjunto:

$$S_3 = \{2-3\}$$

# La operación de división

Para saber si  $\{2, 3\}$  es un par de separación hay que encontrar una partición de  $\{1, 2, 3\} = A \cup B$ ,  $A \cap B = \{\emptyset\}$  tal que se cumple que  $|E_1 = \bigcup_{i \in A} S_i| \geq 2$  y  $|E_2 = \bigcup_{j \in B} S_j| \geq 2$ .

En este caso  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{2\}$  es una partición posible que buscamos y entonces  $\{2, 3\}$  es un par de separación.



# La operación de división

Ahora supongamos  $\{a, b\}$  es un par de separación.

Si  $H = \{\{a, b\}, \emptyset\}$  y  $S_1, S_2, \dots, S_k$  son las clases de separación del par  $\{a, b\}$  (las clases de equivalencia definidas por  $H$ ).

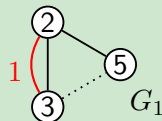
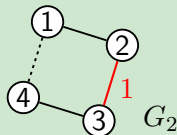
Sea  $A, B$  la partición del conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$  tal que  $|E_1 = \bigcup_{i \in A} S_i| \geq 2$  y  $|E_2 = \bigcup_{j \in B} S_j| \geq 2$ .

Si  $H_1 = (V(E_1), E_1)$  y  $H_2 = (V(E_2), E_2)$  entonces,  
 $V(E_1) \cap V(E_2) = \{a, b\}$  donde la arista  $a-b$  es llamada arista  
 virtual.

Sea  $G_i = H_i + a-b$  para  $i \in \{1, 2\}$ .  
 Las  $G_i$  son los bigrafos de división de  $G$  en  $\{a, b\}$ .

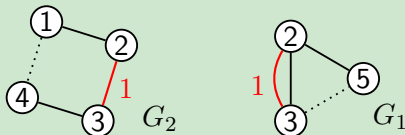
Donde  $A = \{1, 3\}$  y  $B = \{2\}$

### Ejemplo



# La operación de división

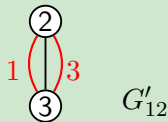
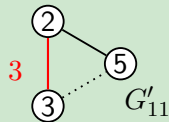
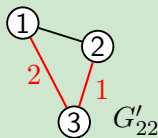
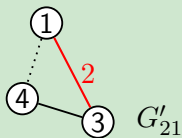
## Ejemplo



- Como  $G_1$  y  $G_2$  no son triconexas (tiene pares de separación) entonces, supongamos que sabemos que  $\{1, 3\}$  es un par de separación de  $G_2$  y el mismo par  $\{2, 3\}$  es un par de separación de  $G_1$  entonces,

# La operación de división

## Ejemplo



- Ahora tenemos componentes triconexos. Estos son llamados componentes de división.

# La operación de división

El siguiente resultado es debido a Hopcroft and Tarjan.

## Lema

*El número total de aristas en todos los componentes de división no excede  $3|E| - 6$*


# La operación de unión

- Sean  $H_1$  y  $H_2$  componentes de división de  $G$  tal que ambas contengan la misma arista virtual  $\textcircled{a} \overset{n}{\text{---}} \textcircled{b}$
- Combinamos estos dejando que  $H = H_1 + H_2 - (a, b, n)$ .

# La operación de unión

Pero solo vamos a fusionar los componentes de división de la siguiente forma:

① Fusionamos  tanto como sea posible

② Fusionamos  tanto como sea posible.

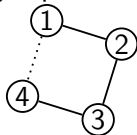
El conjunto final de grafos es llamado conjunto completo de componentes de triconexas.



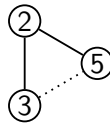
## Lema

*Un conjunto completo de componentes triconexas es único hasta isomorfismo.*

- Del conjunto de componentes triconexas nos interesa recuperar los componentes biconexas, por ejemplo de



$G'_{21}, G'_{22}$  obtenemos la subgráfica inducida, y de



$G'_{11}$  y  $G'_{12}$  es otra subgráfica inducida

- en este caso el conjunto completo de componentes biconexas.
- De este ejemplo tenemos que una subgráfica cumple la condición de ciclo y una que es un  $\mathbb{A}$ -bloque. por lo tanto  $G$  es de tipo  $\mathbb{D}_5$ .

- Finalmente para poder hacer la clasificación de las de tipo  $\mathbb{D}_n$  lo que se hace es tomar un grafo compruebo que todas sus componentes biconexas excepto una son  $\mathbb{A}$ -bloques y compruebo que esta componente biconexa es de tipo  $\mathbb{D}_n$  usando el algoritmo de descomposición en componentes triconexas.

# Bibliografía I



M. Abarca & D. Rivera

Graph Theoretical and Algorithmic Characterizations of Positive Definite Symmetric Quasi-Cartan Matrices.

*Fundamenta Informaticae*. 149(3):241–261, 2016.



Kiem-Phong Vo

Finding triconnected components of graphs.

*Linear and Multilinear Algebra*. 13:2, 143-165, 1983



M. Abarca.

Algoritmo Para Decidir si una Forma Unitaria es de Tipo  $\mathbb{A}_n$  (Tesis de Licenciatura). 2011