Componentes triconexas en $\mathbb{D}_n$ 02-Junio-2020

Sea $G = (V, E)$ un bigrafo sin flechas, el conjunto de aristas E se puede dividir en clases de equivalencia $E_1, \dots, E_k$ de tal manera que dos aristas que se encuentran en un camino común que no contiene ningún vértice del conjunto $\{a, b\}$ excepto como un punto final (o extremo del camino) están en la misma clase. Las clases E_i son llamadas las clases de separación de G con respecto al par $\{a, b\}$ con $a, b \in V$. Si hay al menos dos clases de separación, entonces $\{a, b\}$ es un par de separación de G a menos que:

(i) haya exactamente dos clases de separación y una clase consista exactamente de una arista,

(ii) haya exactamente tres clases, cada una de las cuales consiste de una arista.

Si G no contiene un par de separación, G se llama triconexa.

Sea $G = (V, E)$ un bigrafo biconexo, $\{a, b\}$ un par de separación de G y $E_1, \dots, E_k$ las clases de separación de G con respecto al par $\{a, b\}$. Si existe una partición del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ A, B tal que $\bigcup_{i \in A} E_i = E'$ y $E'' = \bigcup_{i \in B} E_i$ son tales que $|E| \geq 2$ y $|E'| \geq 2$. Entonces los bigrafos $G' = (V(E'), E' \cup \{a \overset{n}{—} b\})$ y $G'' = (V(E''), E'' \cup \{a \overset{n}{—} b\})$ son llamados <u>bigrafos</u> de <u>separación</u> de G con respecto al par $\{a, b\}$., $a \overset{n}{—} b$ es llamada arista virtual. Cada bigrafo de separación es biconexo.

Supongamos que dividimos G en sus bigrafos de separación con respecto a un par de separación, que los bigrafos de separación de dividen en sus bigrafos de separación, y así sucesivamente hasta que no sea posible realizar más operaciones de división. Los bigrafos resultantes se denominan <u>componentes de separación</u> de G. Cada uno de ellos es un conjunto de 3-enlaces, o un ciclo de longitud 3 (triángulo), o un bigrafo triconexo. Los <u>componentes de separación</u> no son necesariamente únicos.

<u>Lema 1</u>: Sea $G=(V,E)$ un bigrafo

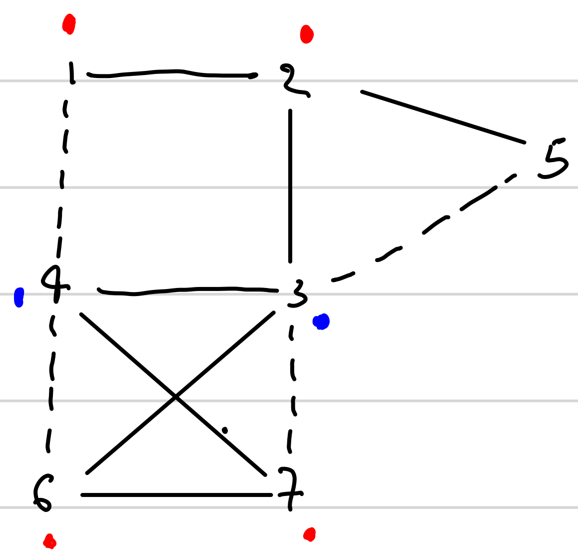
(i) Cada arista en E esta contenida en exactamente un componente de separación y cada arista virtual en exactamente dos componentes

(ii) El número total de aristas en todos los componentes de separación es a lo más $3|E|-6$.

Sea $G_1=(V_1,E_1)$ y $G_2=(V_2,E_2)$ dos componentes de separación conteniendo la misma arista virtual e. El bigrafo $G'=(V_1 \cup V_2, (E_1 \cup E_2)\setminus\{e\})$ es llamado bigrafo de mezcla de G_1 y G_2. Reemplazar dos componentes de separación por un bigrafo de mezcla de G_1 y G_2 se llama mezclar G_1 y G_2. Las <u>componentes triconexas</u> de G se obtienen de sus componentes de separación mediante la mezcla de enlaces triples en conjuntos máximos de aristas multiples y los triángulos en polígonos.

<u>Lema 2</u>: Las componentes triconexas de G son únicas.

Ejemplos con bigrafos de tipo $\mathbb{D}_n$.



$\{2,3\}$ es un par de separación de G

Las clases de separación son

$E_1 = \{2 — 5,\ 3 --- 5\}$.

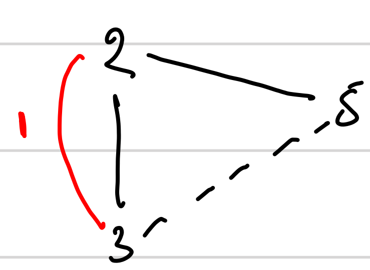
$E_2 = \{2 —— 3\}$.

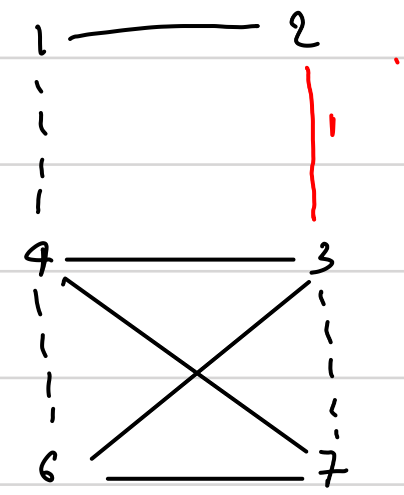
$E_3 = \{1 — 2,\ 1 --- 4,\ 4 —— 3,\ 4 --- 6,\ 4 — 7,$

$3 —— 6,\ 3 --- 7,\ 6 —— 7\}$

$E' = E_1 \cup E_2$, $E'' = E_3$.

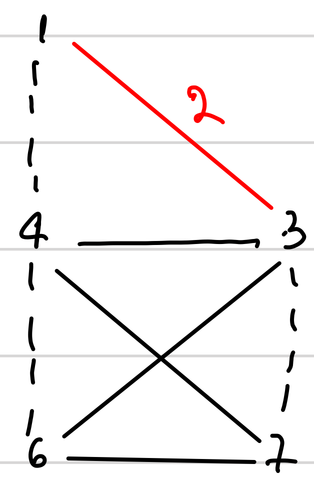
$G' = (V(E'), E' \cup \{2 \overset{1}{—} 3\})$, $G'' = (V(E''), E'' \cup \{2 \overset{1}{—} 3\})$



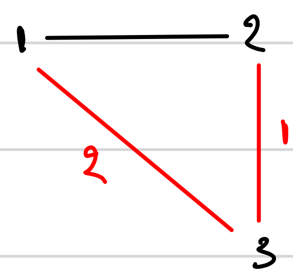


Ahora tomemos el par de separación. $\{1,3\}$.

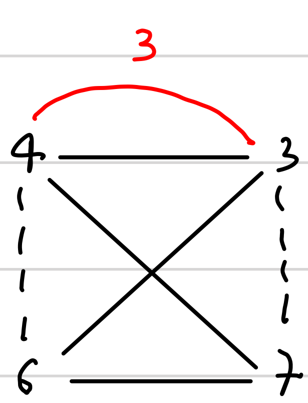
G'

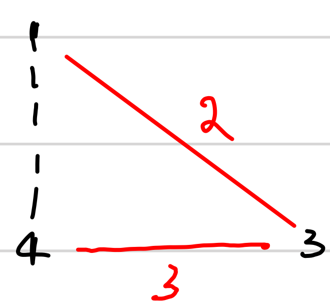


G''

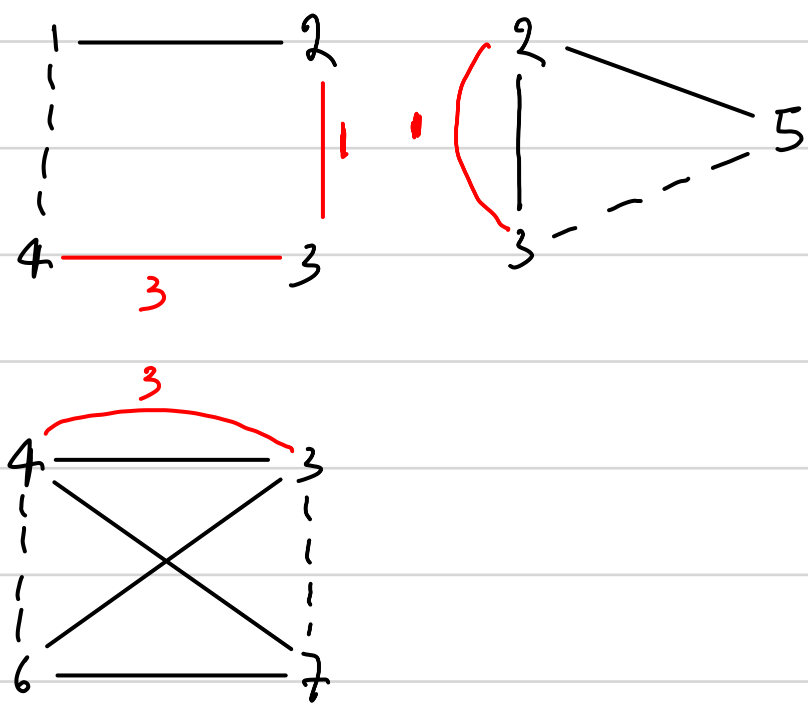


Finalmente tomamos el par de separación $\{4, 3\}$





Las componentes triconexas de G son



Otro ejemplo