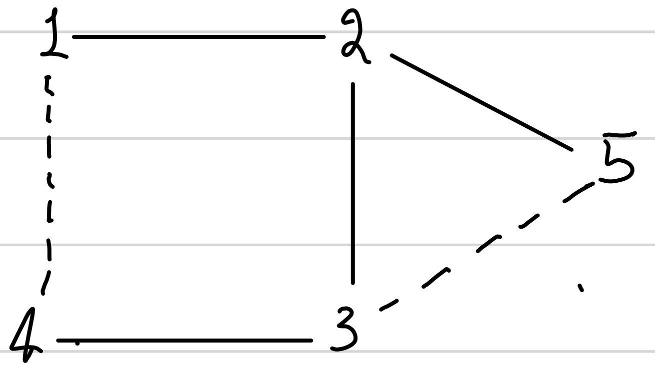
La operación de dividir 31-Abril-2020

$G = (V, E)$ un bigrafo, $H = (W, F)$ un sub-bigrafo de G,
En clases anteriores se mostro que la siguiente relación sobre el conjunto $E-F$, es una relación de equivalencia.

- $\forall\ e \in E-F$, $e \cong e$.
- Si $e \in E-F$ es la arista $e: a_1 — b_1$ y $f \in E-F$ es la arista $f: a_2 — b_2$, entonces $e \cong f$ si y solo si existe un camino simple de uno de los siguientes tipos:

$$a_1 — b_1 — v_1 — v_2 — \cdots — v_k — a_2 — b_2 \qquad b_1, v_1, \ldots, v_k, a_2 \notin W$$
$$a_1 — b_1 — v_1 — v_2 — \cdots v_k — b_2 — a_2 \qquad b_1, v_1, \ldots, v_k, b_2 \notin W$$
$$b_1 — a_1 — v_1 — v_2 — \cdots v_k — a_2 — b_2 \qquad a_1, v_1, \ldots, v_k, a_2 \notin W$$
$$b_1 — a_1 — v_1 — v_2 — \cdots v_k — b_2 — a_2 \qquad a_1, v_1, \ldots, v_k, b_2 \notin W$$

<u>Ejemplo</u>: Sea G el bigrafo y $H = \{\{2,3\}, \emptyset\}$



La clase de equivalencia de $2 — 5$ es el conjunto:
$S_1 = \{2 — 5,\ 3 \text{- - - -} 5\}$

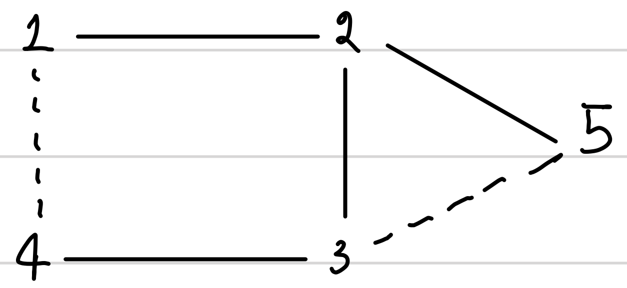
La clase de equivalencia de $1 \text{- - - -} 4$ es el conjunto:
$S_2 = \{1 \text{- - - -} 4,\ 1 — 2,\ 4 — 3\}$

Finalmente la clase de equivalencia de $2 — 3$ es el conjunto:
$S_3 = \{2 — 3\}$

Para saber si $\{2,3\}$ es un par de separación hay que encontrar una partición de $\{1,2,3\} = A \cup B$, $A \cap B = \{\emptyset\}$ tal que $|E_1| = |\bigcup_{i \in A} S_i| \geq 2$ y $|E_2| = |\bigcup_{j \in B} S_j| \geq 2$. Si tal partición no existe entonces $\{2,3\}$ no es un vértice de separación.

En este caso $A=\{1,3\}$, $B=\{2\}$ es la partición que buscamos y entonces $\{2,3\}$ es un par de separación.

Ahora intentemos con $H=\{\{1,4\},\phi\}$.



La clase de equivalencia de $\{1,2\}$ es el conjunto

$$S_1=\{1 — 2,\ 2 — 5,\ 2 — 3,\ 3 \text{- - - -} 5,\ 3 — 4\}$$

La clase de equivalencia de $\{1,4\}$ es el conjunto

$$S_2=\{1 \text{- - - -} 4\}.$$

En este caso no existe partición del conjunto $\{1,2\}$ que cumpla con lo requerido, entonces $\{1,4\}$ no es un par de separación.

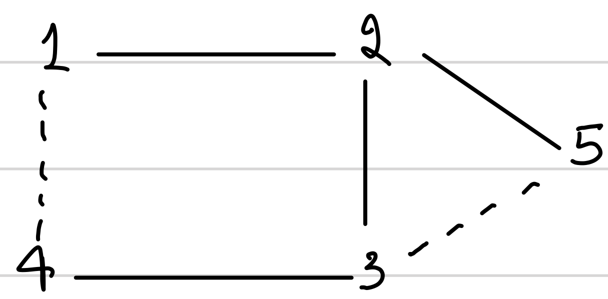
Supongamos que $\{a,b\}$ es un par de separación.
Si $H=\{\{a,b\},\phi\}$ y $S_1, S_2, \ldots, S_k$ son las clases de separación del par $\{a,b\}$ (las clases de equivalencia definidas por H).
Sea A,B la partición del conjunto $\{1,2,\ldots,k\}$ tal que
$|E_1| = \left|\bigcup_{i\in A} S_i\right| \geq 2$ y $|E_2| = \left|\bigcup_{j\in B} S_j\right| \geq 2$.

Si $H_1 = (\underbrace{V(E_1)}_{\text{vértices}}, \overset{\text{Aristas.}}{E_1})$ y $H_2=(V(E_2), E_2)$ entonces

$$V(E_1)\cap V(E_2)=\{a,b\}.$$

Sea $G_i = H_i + a — b$. para $i\in\{1,2\}$. Las G_i son llamadas bigrafos de división de G en $\{a,b\}$. La arista $a—b$ es llamada arista virtual.

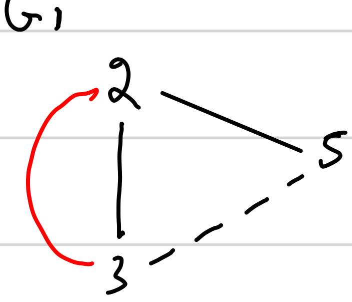
Ejemplo: En nuestro primer ejemplo con $H=\{\{2,3\},\phi\}$ y G el bigrafo



Teniamos que $S_1 = \{2—5, 3----5\}$
$S_2 = \{1—2; 1----4, 3—4\}$
$S_3 = \{2—3\}$.

Si tomamos la partición $A=\{1,3\}$, $B=\{2\}$ entonces

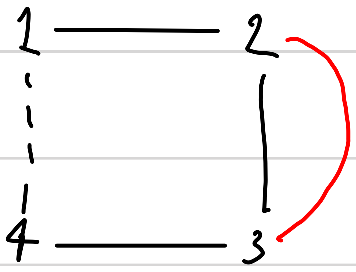
G_1



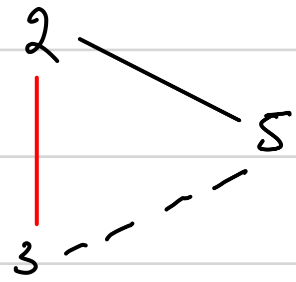
G_2

Si tomamos la partición $A=\{2,3\}$, $B=\{1\}$.

G_1:



G_2:



Entonces dependiendo de la elección de la partición obtendremos distintas G_1 y G_2

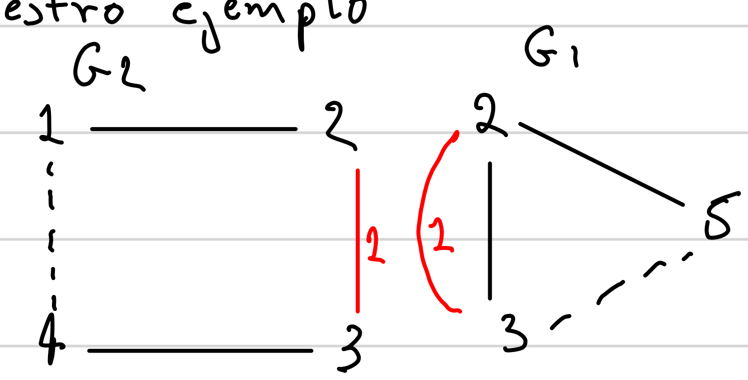
Etiquetaremos la arista virtual $a \textcolor{red}{\longrightarrow} b$ con una etiqueta n, $a \xrightarrow{n} b$ para distinguirla de otras aristas virtuales.

Los grafos G_1 y G_2 son biconexos (este resultado es un Teorema, pero no veremos su demostración).

<u>Notación</u>: Biconexa $\equiv$ no tiene vértices de separación

Triconexa $\equiv$ no tiene pares de separación.

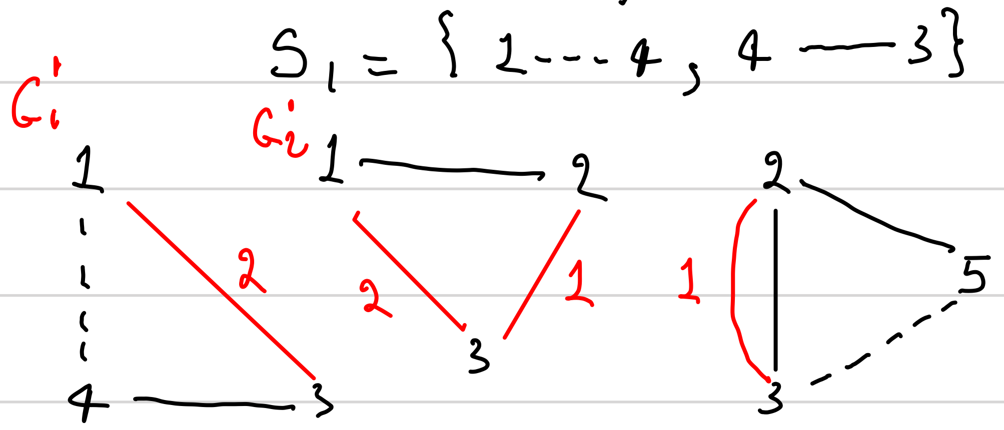
En nuestro ejemplo



G_1 es triconexa pero G_2 no es triconexa (tiene pares de separación). Supongamos que sabemos que $\{1,3\}$ es un par de separación de G_2 entonces,

$S_2 = \{1 — 2,\ 2 \xrightarrow{1} 3\}$ $\qquad A = \{1\}$

$S_1 = \{1 \cdots 4,\ 4 — 3\}$ $\qquad B = \{2\}$



Ahora tenemos componentes triconexas. Estos son llamados <u>componentes de división</u>.

Desafortunadamente los componentes de división no son únicos.

El siguiente es un resultado de Hopcroft y Tarjan.

<u>Lema 1</u>: El número total de aristas en todos los componentes de división no excede $3|E| - 6$.

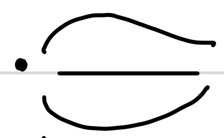
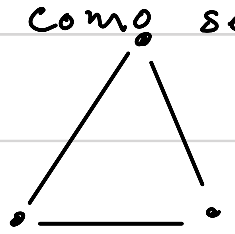
La operación de fusión

Si H_1 y H_2 son componentes de división de G que contienen la misma arista virtual $a \overset{n}{—} b$. Entonces fusionamos H_1 y H_2 tomando

$$H = H_1 + H_2 - a \overset{n}{—} b$$

Pero no vamos a fusionar todos los componentes de división.

Fusionamos solo componentes de división de la siguiente forma.

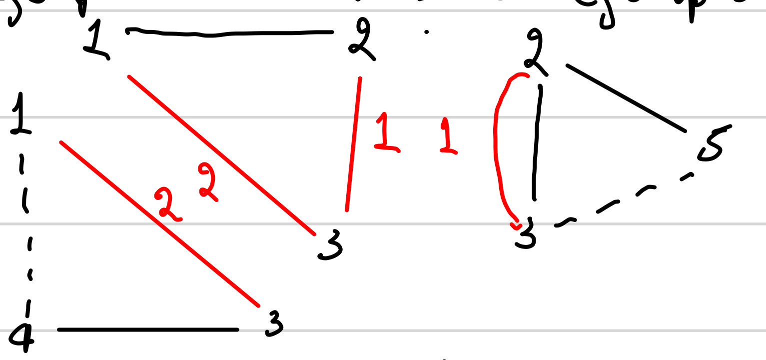
- Fusionamos bigrafos de la forma  con bigrafos de la misma forma, tanto como sea posible.
- Fusionamos triángulos  con triángulos, tanto como sea posible.

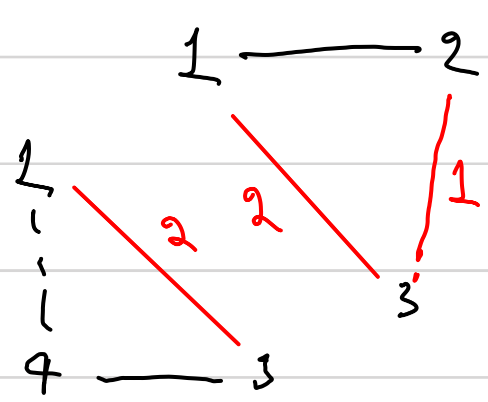
En ambos casos suponemos que una arista es virtual.

El conjunto final de bigrafos se denomina <u>conjunto completo de componentes triconexas</u>.

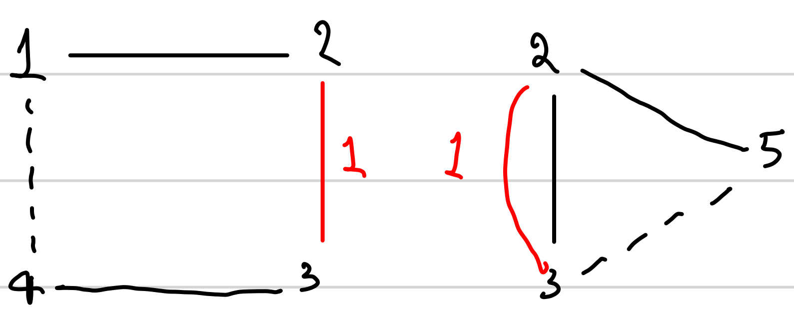
<u>Lema 2</u>: Un conjunto completo de componentes triconexas es único hasta isomorfismo

Ejemplo: En nuestro ejemplo los componentes de división de G son

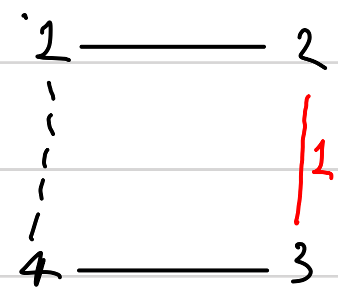
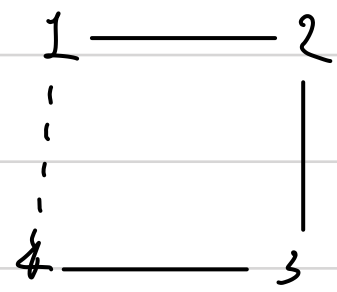
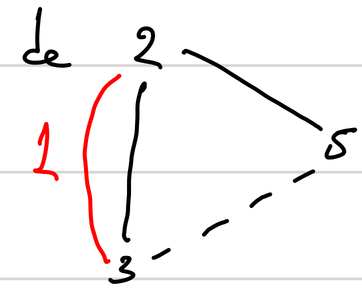
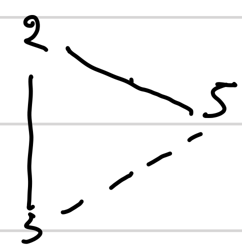


fucionando los triángulos  tenemos

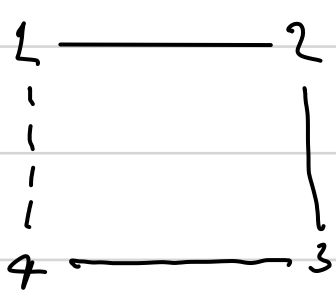
que el conjunto completo de componentes triconexas es



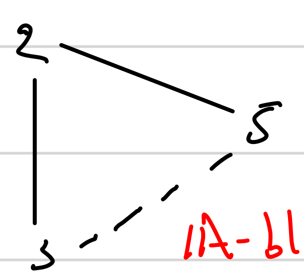
Del conjunto completo de componentes triconexas solo nos interesan los vértices para recuperar los componentes que buscamos.

Por ejemplo con los vértices de  recuperamos la componente  y de los vértices de  recuperamos la componente 

Para nosotros el conjunto completo de componentes biconexas es



Ciclo de longitud 4, que cumple la condición de ciclo



IA-bloque

Entonces G es de tipo II)5.