

La clasificación Dynkin en perspectiva computacional

Claudia Pérez Ruisánchez
Mario Alberto Abarca Sotelo
Daniel Rivera López

Universidad Autónoma del Estado de Morelos

21 de junio de 2017

Índice

- 1 La Clasificación $A-D-E$
 - Conceptos y relaciones
 - Algoritmo de las inflaciones
 - Las construcciones de Barot
 - Planteamiento

- 2 Aportaciones en perspectiva computacional
 - El morfismo de flación y sus invariantes
 - Clasificación de A y D por teoría de gráficas
 - Un algoritmo polinomial para la clasificación $A-D-E$

Índice

- Conceptos y relaciones

- Algoritmo de las inflaciones
- Las construcciones de Barot
- Planteamiento

2 Aportaciones en perspectiva computacional

- El morfismo de flación y sus invariantes
- Clasificación de \mathbb{A} y \mathbb{D} por teoría de gráficas
- Un algoritmo polinomial para la clasificación \mathbb{A} - \mathbb{D} - \mathbb{E}

Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica \leftrightarrow Forma unitaria

$$\mathbf{q}_A(x) = \frac{1}{2} x^T A x$$

Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica \leftrightarrow Forma unitaria

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_A(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j \right) \end{aligned}$$

Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica \leftrightarrow Forma unitaria

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_A(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{A})_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j \right)
 \end{aligned}$$

Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica \leftrightarrow Forma unitaria

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_A(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{A})_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{A})_{ij} x_i x_j.
 \end{aligned}$$

Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan

Matriz casi-Cartan simétrica \leftrightarrow Bigráfica

Teorema

Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces

(a) $0 \leq A_{ij}A_{ji} < 4$

(b) $A_{ij} \in \{-1, 0, -1\}$

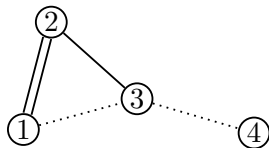
La bigráfica **bigr**(A) asociada a la matriz A tiene vértices $\{1, 2, \dots, n\}$, y para cada par de vértices i, j con $i \neq j$:

- ① Si $A_{ij} = -1 = A_{ji}$ trazamos una arista solida entre los vértices, $(i) \text{---} (j)$
- ② Si $A_{ij} = 1 = A_{ji}$ trazamos una arista punteada entre los vértices, $(i) \cdots (j)$

Equivalencia de conceptos

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



bigr (A)

$$\mathbf{q}_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + x_3x_4$$

Z-equivalencia

Definiciones

- Una matriz $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{Z})$ es **Z-invertible** si tiene inversa $M^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{Z})$.
- $A, A' \in \text{sqC}$ son **Z-equivalentes** si existe una matriz Z-invertible M tal que $A' = M^T A M$.

Z-equivalencia

Definiciones

- Una matriz $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{Z})$ es **Z-invertible** si tiene inversa $M^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{Z})$.
- $A, A' \in \text{sqC}$ son **Z-equivalentes** si existe una matriz Z-invertible M tal que $A' = M^T A M$.

Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

Familia

$A_n, n \geq 1$

Gráfica



$D_n, n \geq 4$



$E_n, 6 \leq n \leq 8$



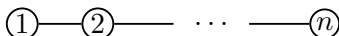
Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

Familia

$A_n, n \geq 1$

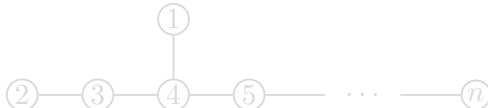
Gráfica



$D_n, n \geq 4$



$E_n, 6 \leq n \leq 8$



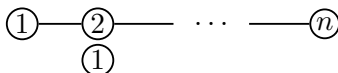
Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

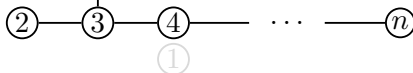
Familia

$A_n, n \geq 1$

Gráfica



$D_n, n \geq 4$



$E_n, 6 \leq n \leq 8$



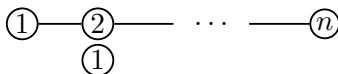
Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

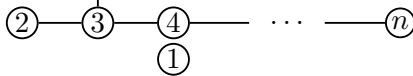
Familia

$A_n, n \geq 1$

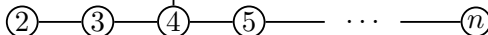
Gráfica



$D_n, n \geq 4$



$E_n, 6 \leq n \leq 8$



La clasificación A-D-E

Teorema (S. Ovsienko – 1978)

Toda bigráfica G definida positiva es \mathbb{Z} -equivalente a una bigráfica sin aristas punteadas, que está determinada de forma única hasta isomorfismo de gráficas, y es la unión disjunta de diagramas de Dynkin.

- Demostración constructiva llamada **algoritmo de las inflaciones**.

La clasificación A-D-E

Teorema (S. Ovsienko – 1978)

Toda bigráfica G definida positiva es \mathbb{Z} -equivalente a una bigráfica sin aristas punteadas, que está determinada de forma única hasta isomorfismo de gráficas, y es la unión disjunta de diagramas de Dynkin.

- Demostración constructiva llamada **algoritmo de las inflaciones**.

Índice

1 La Clasificación $A-D-E$

- Conceptos y relaciones
- Algoritmo de las inflaciones
- Las construcciones de Barot
- Planteamiento

2 Aportaciones en perspectiva computacional

- El morfismo de flación y sus invariantes
- Clasificación de A y D por teoría de gráficas
- Un algoritmo polinomial para la clasificación $A-D-E$

Inflaciones

Definiciones

- I denota la matriz identidad con vectores columna e_j .
- $E_{sr}^\sigma := I + \sigma e_s e_r^T$ ($s, r \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$) denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si $A \in \text{sqC}$ y $(A)_{sr} = 1$ entonces $(E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$ es una **inflación** de A .

Inflaciones

Definiciones

- I denota la matriz identidad con vectores columna e_j .
- $E_{sr}^\sigma := I + \sigma e_s e_r^T$ ($s, r \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma \in \mathbf{R}$) denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si $A \in \text{sqC}$ y $(A)_{sr} = 1$ entonces $(E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$ es una **inflación** de A .

Inflaciones

Definiciones

- I denota la matriz identidad con vectores columna e_j .
- $E_{sr}^\sigma := I + \sigma e_s e_r^T$ ($s, r \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma \in \mathbf{R}$) denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si $A \in \text{sqC}$ y $(A)_{sr} = 1$ entonces $(E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$ es una **inflación** de A .

Algoritmo de las inflaciones

Algoritmo de las inflaciones

función inflaciones(A):

repetir mientras *exista una entrada no diagonal*

$(A)_{sr} = 1 :$

$A := (E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$

- Se justifica en que $|\mathbf{q}_A^{-1}(1)| < \infty$ permanece constante en cada iteración mientras que $|\mathbf{q}_A^{-1}(1) \cap \mathbb{N}^n|$ crece.
- Cota superior del número de raíces positivas $O(n \cdot 6^n)$ (Kosakowska – 2012).

Algoritmo de las inflaciones

Algoritmo de las inflaciones

función inflaciones(A):

repetir mientras *exista una entrada no diagonal*

$(A)_{sr} = 1 :$

$A := (E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$

- Se justifica en que $|\mathbf{q}_A^{-1}(1)| < \infty$ permanece constante en cada iteración mientras que $|\mathbf{q}_A^{-1}(1) \cap \mathbf{N}^n|$ crece.
- Cota superior del número de raíces positivas $O(n \cdot 6^n)$ (Kosakowska – 2012).

Algoritmo de las inflaciones

Algoritmo de las inflaciones

función inflaciones(A):

repetir mientras *exista una entrada no diagonal*

$(A)_{sr} = 1 :$

$A := (E_{sr}^{-1})^T A (E_{sr}^{-1})$

- Se justifica en que $|\mathbf{q}_A^{-1}(1)| < \infty$ permanece constante en cada iteración mientras que $|\mathbf{q}_A^{-1}(1) \cap \mathbf{N}^n|$ crece.
- Cota superior del número de raíces positivas $O(n \cdot 6^n)$ (Kosakowska – 2012).

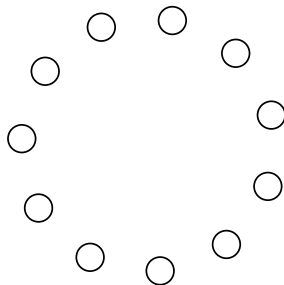
Índice

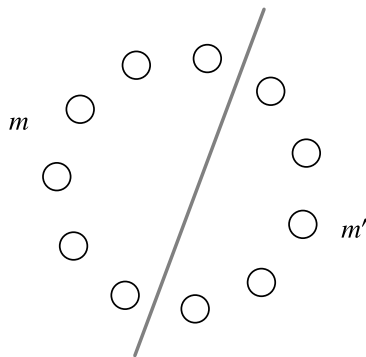
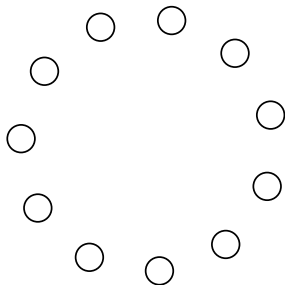
1 La Clasificación A-D-E

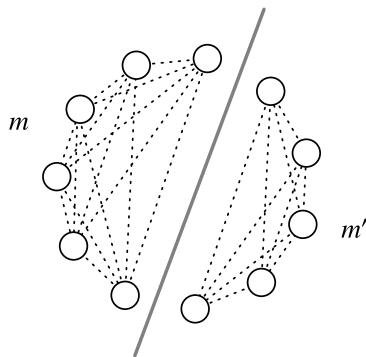
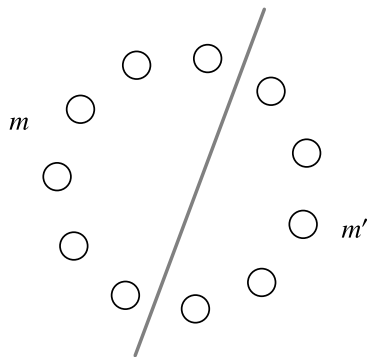
- Conceptos y relaciones
- Algoritmo de las inflaciones
- Las construcciones de Barot
- Planteamiento

2 Aportaciones en perspectiva computacional

- El morfismo de flación y sus invariantes
- Clasificación de \mathbb{A} y \mathbb{D} por teoría de gráficas
- Un algoritmo polinomial para la clasificación A-D-E

El caso A_n *Los A -bloques.*

El caso A_n 

El caso A_n 

- Convención: Una pareja de aristas paralelas se considera un ciclo de longitud 2.

- Convención: Una pareja de aristas paralelas se considera un ciclo de longitud 2.

Una bigráfica cumple la **condición de ciclo** si todo ciclo sin cuerdas tiene un número impar de aristas punteadas.

- Convención: Una pareja de aristas paralelas se considera un ciclo de longitud 2.

Una bigráfica cumple la **condición de ciclo** si todo ciclo sin cuerdas tiene un número impar de aristas punteadas.

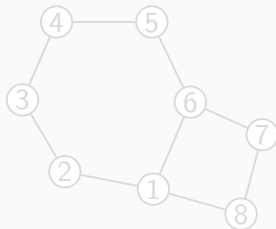
El marco de una bigráfica

Definición

El **marco** $\Phi(G)$ de una bigráfica G es su gráfica subyacente.

- Su diagrama se obtiene reemplazando aristas punteadas por sólidas.

Ejemplo



Definición

El **marco** $\Phi(G)$ de una bigráfica G es su gráfica subyacente.

- Su diagrama se obtiene reemplazando aristas punteadas por sólidas.

El **marco** $\Phi(G)$ de una bigráfica G es su gráfica subyacente.

- Su diagrama se obtiene reemplazando aristas punteadas por sólidas.

1000

- un árbol T con $V(T) = \{1, 2, \dots, t\}$;
- t bigráficas B_1, B_2, \dots, B_t ;
- para cada $i \in V(G)$ una función inyectiva $\sigma_i : \delta_T(i) \rightarrow V(B_i)$.

- un árbol T con $V(T) = \{1, 2, \dots, t\}$;
- t bigráficas B_1, B_2, \dots, B_t ;
- para cada $i \in V(G)$ una función inyectiva $\sigma_i : \delta_T(i) \rightarrow V(B_i)$.

- un árbol T con $V(T) = \{1, 2, \dots, t\}$;
- t bigráficas B_1, B_2, \dots, B_t ;
- para cada $i \in V(G)$ una función inyectiva $\sigma_i : \delta_T(i) \rightarrow V(B_i)$.

- un árbol T con $V(T) = \{1, 2, \dots, t\}$;
- t bigráficas B_1, B_2, \dots, B_t ;
- para cada $i \in V(G)$ una función inyectiva $\sigma_i : \delta_T(i) \rightarrow V(B_i)$.

- 1 calcular la unión disjunta $H = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_t$;
- 2 para cada $e = \{i, j\} \in E(T)$ identificar $\sigma_i(e) = \sigma_j(e)$ en H .

1000

- un árbol T con $V(T) = \{1, 2, \dots, t\}$;
- t bigráficas B_1, B_2, \dots, B_t ;
- para cada $i \in V(G)$ una función inyectiva $\sigma_i : \delta_T(i) \rightarrow V(B_i)$.

- 1 calcular la unión disjunta $H = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_t$;
- 2 para cada $e = \{i, j\} \in E(T)$ identificar $\sigma_i(e) = \sigma_j(e)$ en H .

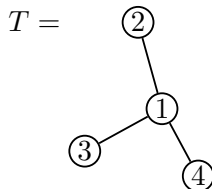
Construcción de \mathbb{A}_n

Teorema (M. Barot – 1999)

Una bigráfica G es de tipo Dynkin \mathbb{A} si y sólo si satisface la condición de ciclo y $\Phi(G)$ es un ensamblaje de árbol de gráficas completas.

Construcción de \mathbb{A}_n

Ejemplo



$$B_1 = K_4$$

$$B_2 = K_3$$

$$B_3 = K_3$$

$$B_4 = K_2$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{1, 4\} \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} \{1, 2\} \\ 3 \end{pmatrix}$$

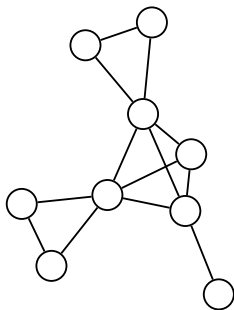
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} \{1, 3\} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} \{1, 4\} \\ 1 \end{pmatrix}$$

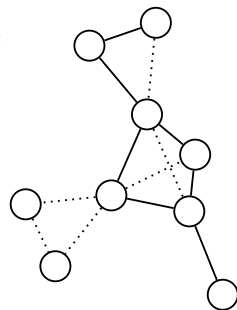
Construcción de \mathbb{A}_n

Ejemplo (continuado)

$H =$



$G =$



Construcción (extensión de \mathbb{A} -espejo)

- una gráfica G que haya sido obtenida mediante un ensamblaje de árbol de gráficas completas;
- un vértice $x \in V(G)$.

Construcción (extensión de \mathbb{A} -espejo)

- una gráfica G que haya sido obtenida mediante un ensamblaje de árbol de gráficas completas;
- un vértice $x \in V(G)$.

Construcción (extensión de \mathbb{A} -espejo)

- una gráfica G que haya sido obtenida mediante un ensamblaje de árbol de gráficas completas;
- un vértice $x \in V(G)$.

- 1 agregar un nuevo vértice x' a G ;
- 2 para cada y vecino de x agregar una arista $\{x', y\}$ a G .

Construcción (extensión de \mathbb{A} -espejo)

- una gráfica G que haya sido obtenida mediante un ensamblaje de árbol de gráficas completas;
- un vértice $x \in V(G)$.

- ➊ agregar un nuevo vértice x' a G ;
- ➋ para cada y vecino de x agregar una arista $\{x', y\}$ a G .

Construcciones para \mathbb{D}_n

Construcción (A-ciclado)

Datos:

- una gráfica G que haya sido obtenido mediante un ensamblaje de árbol de gráficas completas;
- dos vértices $x, y \in V(G)$ a distancia $d_G(x, y) \geq 3$.

Instrucciones:

- 1 identificar $x = y$ en G .

Construcción (\mathbb{A} -ciclado)

- una gráfica G que haya sido obtenido mediante un ensamblaje de árbol de gráficas completas;
- dos vértices $x, y \in V(G)$ a distancia $d_G(x, y) \geq 3$.

① identificar $x = y$ en G .

Construcción (\mathbb{A} -ciclado)

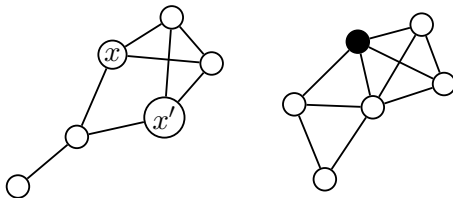
Datos:

- una gráfica G que haya sido obtenido mediante un ensamblaje de árbol de gráficas completas;
- dos vértices $x, y \in V(G)$ a distancia $d_G(x, y) \geq 3$.

Instrucciones:

- ① identificar $x = y$ en G .

Ejemplos



Construcción de \mathbb{D}_n

Teorema (M. Barot - 2001)

Una bigráfica G es de tipo \mathbb{D} si y sólo si las siguientes tres condiciones se satisfacen:

- ❶ G tiene cuatro o más vértices
- ❷ G cumple la condición de ciclo
- ❸ $\Phi(G)$ se obtiene mediante una extensión de \mathbb{A} -espejo o un \mathbb{A} -ciclado.

Construcción de \mathbb{D}_n

Teorema (M. Barot - 2001)

Una bigráfica G es de tipo \mathbb{D} si y sólo si las siguientes tres condiciones se satisfacen:

- ❶ G tiene cuatro o más vértices
- ❷ G cumple la condición de ciclo
- ❸ $\Phi(G)$ se obtiene mediante una extensión de \mathbb{A} -espejo o un \mathbb{A} -ciclado.

Construcción de \mathbb{D}_n

Teorema (M. Barot - 2001)

Una bigráfica G es de tipo \mathbb{D} si y sólo si las siguientes tres condiciones se satisfacen:

- ❶ G tiene cuatro o más vértices
- ❷ G cumple la condición de ciclo
- ❸ $\Phi(G)$ se obtiene mediante una extensión de \mathbb{A} -espejo o un \mathbb{A} -ciclado.

Índice

1 La Clasificación $A-D-E$

- Conceptos y relaciones
- Algoritmo de las inflaciones
- Las construcciones de Barot
- Planteamiento

2 Aportaciones en perspectiva computacional

- El morfismo de flación y sus invariantes
- Clasificación de A y D por teoría de gráficas
- Un algoritmo polinomial para la clasificación $A-D-E$

Planteamiento

- ¿Qué **técnicas computacionales** se pueden aplicar para el estudio de la clasificación A-D-E?
- ¿Qué **criterios eficientes** se pueden aplicar para clasificar una bigráfica?
- ¿Qué **complejidad computacional** tiene el problema de clasificar una bigráfica?

Planteamiento

- ¿Qué **técnicas computacionales** se pueden aplicar para el estudio de la clasificación A-D-E?
- ¿Qué **criterios eficientes** se pueden aplicar para clasificar una bigráfica?
- ¿Qué **complejidad computacional** tiene el problema de clasificar una bigráfica?

Planteamiento

- ¿Qué **técnicas computacionales** se pueden aplicar para el estudio de la clasificación A-D-E?
- ¿Qué **criterios eficientes** se pueden aplicar para clasificar una bigráfica?
- ¿Qué **complejidad computacional** tiene el problema de clasificar una bigráfica?

Índice

1 La Clasificación A-D-E

- Conceptos y relaciones
- Algoritmo de las inflaciones
- Las construcciones de Barot
- Planteamiento

2 Aportaciones en perspectiva computacional

- El morfismo de flación y sus invariantes
- Clasificación de \mathbb{A} y \mathbb{D} por teoría de gráficas
- Un algoritmo polinomial para la clasificación A-D-E

Motivación

Para estudiar un algoritmo se suele identificar qué atributos cambian o permanecen invariantes a lo largo de la ejecución.

La flación

- $A' := (E_{sr}^\sigma)^T A (E_{sr}^\sigma)$, $\sigma \in \mathbf{R}$;
- $(A')_{rr} = (A)_{rr} + \sigma((A)_{sr} + (A)_{rs}) + \sigma^2 (A)_{ss}$;
- si $A, A' \in \mathbf{sqC}$ entonces $(A')_{rr} = 2$;
- entonces $\sigma \in \{0, -(A)_{sr}\}$.

Definición

Llamamos **flación** al siguiente morfismo:

$$T_{sr}(A) := (E_{sr}^{-(A)_{sr}})^T A (E_{sr}^{-(A)_{sr}}).$$

La flación

- $A' := (E_{sr}^\sigma)^T A (E_{sr}^\sigma)$, $\sigma \in \mathbf{R}$;
- $(A')_{rr} = (A)_{rr} + \sigma((A)_{sr} + (A)_{rs}) + \sigma^2 (A)_{ss}$;
- si $A, A' \in \text{sqC}$ entonces $(A')_{rr} = 2$;
- entonces $\sigma \in \{0, -(A)_{sr}\}$.

Definición

Llamamos **flación** al siguiente morfismo:

$$T_{sr}(A) := \left(E_{sr}^{-(A)_{sr}}\right)^T A \left(E_{sr}^{-(A)_{sr}}\right).$$

La flación

- $A' := (E_{sr}^\sigma)^T A (E_{sr}^\sigma)$, $\sigma \in \mathbf{R}$;
- $(A')_{rr} = (A)_{rr} + \sigma((A)_{sr} + (A)_{rs}) + \sigma^2 (A)_{ss}$;
- si $A, A' \in \mathbf{sqC}$ entonces $(A')_{rr} = 2$;
- entonces $\sigma \in \{0, -(A)_{sr}\}$.

Definición

Llamamos **flación** al siguiente morfismo:

$$T_{sr}(A) := \left(E_{sr}^{-(A)_{sr}}\right)^T A \left(E_{sr}^{-(A)_{sr}}\right).$$

La flación

- $A' := (E_{sr}^\sigma)^T A (E_{sr}^\sigma)$, $\sigma \in \mathbf{R}$;
- $(A')_{rr} = (A)_{rr} + \sigma((A)_{sr} + (A)_{rs}) + \sigma^2 (A)_{ss}$;
- si $A, A' \in \mathbf{sqC}$ entonces $(A')_{rr} = 2$;
- entonces $\sigma \in \{0, - (A)_{sr}\}$.

Definición

Llamamos **flación** al siguiente morfismo:

$$T_{sr}(A) := \left(E_{sr}^{-(A)_{sr}}\right)^T A \left(E_{sr}^{-(A)_{sr}}\right).$$

La flación

- $A' := (E_{sr}^\sigma)^T A (E_{sr}^\sigma)$, $\sigma \in \mathbf{R}$;
- $(A')_{rr} = (A)_{rr} + \sigma((A)_{sr} + (A)_{rs}) + \sigma^2 (A)_{ss}$;
- si $A, A' \in \mathbf{sqC}$ entonces $(A')_{rr} = 2$;
- entonces $\sigma \in \{0, -(A)_{sr}\}$.

Definición

Llamamos **flación** al siguiente morfismo:

$$T_{sr}(A) := \left(E_{sr}^{-(A)_{sr}}\right)^T A \left(E_{sr}^{-(A)_{sr}}\right).$$

Cómputo de una flación

- La flación se puede implementar en $O(n)$ operaciones.

Algoritmo

función flación(A, s, r):

$\sigma := -(A)_{sr}$;

para $j = 1$ **hasta** n :

$(A)_{rj} := (A)_{rj} + \sigma (A)_{sj}$;

para $i = 1$ **hasta** n :

$(A)_{ir} := (A)_{ir} + \sigma (A)_{is}$;

Cómputo de una flación

- La flación se puede implementar en $O(n)$ operaciones.

Algoritmo

función flación(A, s, r):

$\sigma := -(A)_{sr};$

para $j = 1$ **hasta** n :

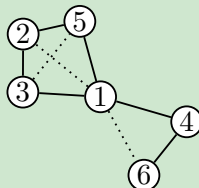
$(A)_{rj} := (A)_{rj} + \sigma (A)_{sj};$

para $i = 1$ **hasta** n :

$(A)_{ir} := (A)_{ir} + \sigma (A)_{is};$

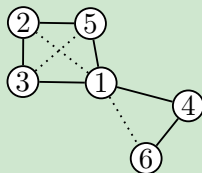
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



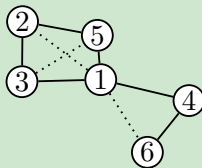
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



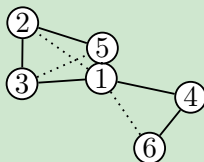
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



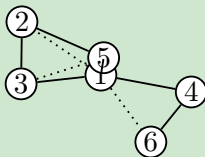
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



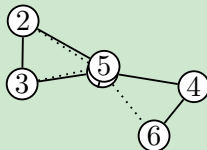
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



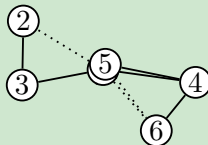
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



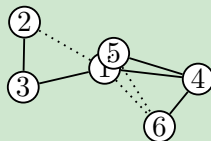
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



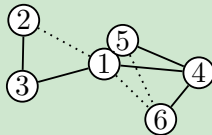
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



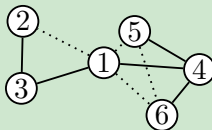
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



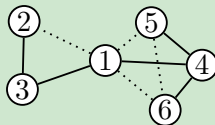
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



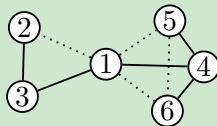
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



Propiedades de la flación

Lema

Sea G una bigráfica y $s, r \in V(G)$; entonces

- ① $T_{sr}(G) - r = G - r$.
- ② $T_{sr}(T_{sr}(G)) = G$.
- ③ Si $s \neq r$ y $\{s, r\} \notin E(G)$, entonces $T_{sr}(G) = G$.

Lema

Sea G una bigráfica con $s \in V(G)$, y sean r_1, r_2, \dots, r_k los vecinos de s ; entonces $T_{ss}(G) = T_{sr_k} \circ \dots \circ T_{sr_2} \circ T_{sr_1}(G)$.

Propiedades de la flación

Lema

Sea G una bigráfica y $s, r \in V(G)$; entonces

- ① $T_{sr}(G) - r = G - r$.
- ② $T_{sr}(T_{sr}(G)) = G$.
- ③ Si $s \neq r$ y $\{s, r\} \notin E(G)$, entonces $T_{sr}(G) = G$.

Lema

Sea G una bigráfica con $s \in V(G)$, y sean r_1, r_2, \dots, r_k los vecinos de s ; entonces $T_{ss}(G) = T_{sr_k} \circ \dots \circ T_{sr_2} \circ T_{sr_1}(G)$.

Propiedades de la flación

Lema

Sea G una bigráfica y $s, r \in V(G)$; entonces

- ① $T_{sr}(G) - r = G - r$.
- ② $T_{sr}(T_{sr}(G)) = G$.
- ③ Si $s \neq r$ y $\{s, r\} \notin E(G)$, entonces $T_{sr}(G) = G$.

Lema

Sea G una bigráfica con $s \in V(G)$, y sean r_1, r_2, \dots, r_k los vecinos de s ; entonces $T_{ss}(G) = T_{sr_k} \circ \dots \circ T_{sr_2} \circ T_{sr_1}(G)$.

Propiedades de la flación

Lema

Sea G una bigráfica y $s, r \in V(G)$; entonces

- ① $T_{sr}(G) - r = G - r$.
- ② $T_{sr}(T_{sr}(G)) = G$.
- ③ Si $s \neq r$ y $\{s, r\} \notin E(G)$, entonces $T_{sr}(G) = G$.

Lema

Sea G una bigráfica con $s \in V(G)$, y sean r_1, r_2, \dots, r_k los vecinos de s ; entonces $T_{ss}(G) = T_{sr_k} \circ \dots \circ T_{sr_2} \circ T_{sr_1}(G)$.

Propiedades de la flación

Lema

Sea G una bigráfica y $s, r \in V(G)$; entonces

- ① $T_{sr}(G) - r = G - r$.
- ② $T_{sr}(T_{sr}(G)) = G$.
- ③ Si $s \neq r$ y $\{s, r\} \notin E(G)$, entonces $T_{sr}(G) = G$.

Lema

Sea G una bigráfica con $s \in V(G)$, y sean r_1, r_2, \dots, r_k los vecinos de s ; entonces $T_{ss}(G) = T_{sr_k} \circ \dots \circ T_{sr_2} \circ T_{sr_1}(G)$.

Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es

Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es

Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es

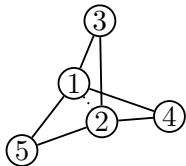
Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es



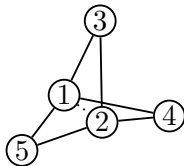
Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es



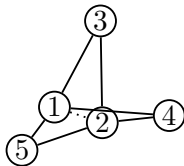
Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es



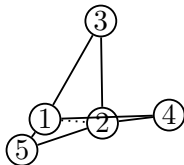
Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es



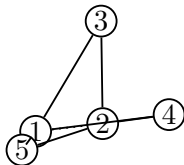
Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es



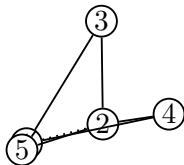
Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es



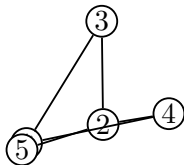
Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es



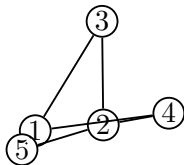
Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es



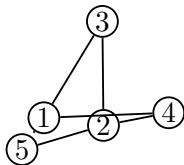
Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es



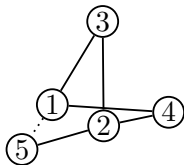
Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es



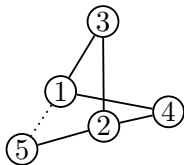
Invariantes de flación

Definición

Una propiedad de bigráficas P es **invariante de flación** si para toda pareja $s, r \in V(G)$ se tiene que

$$P(G) \Rightarrow P(T_{sr}(G))$$

- La conexidad de una bigráfica es invariante de flación
- La condición de ciclo no lo es



Índice

- 1 La Clasificación A-D-E
 - Conceptos y relaciones
 - Algoritmo de las inflaciones
 - Las construcciones de Barot
 - Planteamiento
- 2 Aportaciones en perspectiva computacional
 - El morfismo de flación y sus invariantes
 - Clasificación de \mathbb{A} y \mathbb{D} por teoría de gráficas
 - Un algoritmo polinomial para la clasificación A-D-E

Motivación

Existen algoritmos eficientes que revelan la estructura de gráficas.
Sólo hay que caracterizar las estructuras que son relevantes para
nosotros.

Vértices de corte

Definición (F. Harary – 1969)

Sea G una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de G .
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

Ejemplo



Vértices de corte

Definición (F. Harary – 1969)

Sea G una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de G .
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

Ejemplo



Vértices de corte

Definición (F. Harary – 1969)

Sea G una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de G .
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

Ejemplo



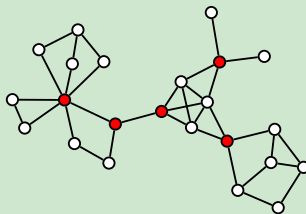
Vértices de corte

Definición (F. Harary – 1969)

Sea G una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de G .
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

Ejemplo



Bloques

Definiciones (F. Harary – 1969)

- Una gráfica es **inseparable** si no tiene vértices de corte.
- Un **bloque** es una subgráfica inseparable que además es maximal respecto a esta propiedad.
- El **árbol de bloques** $BT(G)$ es la gráfica bipartita que contiene una arista $\{B, v\}$ si y sólo si B es un bloque de G que contiene al vértice de corte v .

Bloques

Definiciones (F. Harary – 1969)

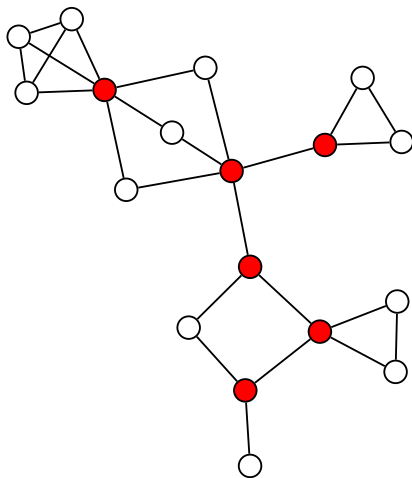
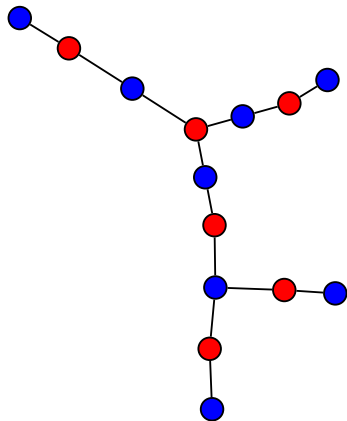
- Una gráfica es **inseparable** si no tiene vértices de corte.
- Un **bloque** es una subgráfica inseparable que además es maximal respecto a esta propiedad.
- El **árbol de bloques** $BT(G)$ es la gráfica bipartita que contiene una arista $\{B, v\}$ si y sólo si B es un bloque de G que contiene al vértice de corte v .

Bloques

Definiciones (F. Harary – 1969)

- Una gráfica es **inseparable** si no tiene vértices de corte.
- Un **bloque** es una subgráfica inseparable que además es maximal respecto a esta propiedad.
- El **árbol de bloques** $BT(G)$ es la gráfica bipartita que contiene una arista $\{B, v\}$ si y sólo si B es un bloque de G que contiene al vértice de corte v .

Árbol de bloques


 G

 $BT(G)$

Cómputo de BT (G)

Teorema (J. Hopcroft & R. Tarjan – 1971)

Es posible descomponer una gráfica $G = (V, E)$ en sus vértices de corte y bloques en $O(|V| + |E|)$ operaciones.

- Basado en el algoritmo de recorrido en profundidad.

Cómputo de BT (G)

Teorema (J. Hopcroft & R. Tarjan – 1971)

Es posible descomponer una gráfica $G = (V, E)$ en sus vértices de corte y bloques en $O(|V| + |E|)$ operaciones.

- Basado en el algoritmo de **recorrido en profundidad**.

Caracterización eficiente para \mathbb{A}

Definición

- Se define la bigráfica $\mathbf{F}[X, Y] = (X \cup Y, E^+ \cup E^-)$ donde
 - $E^+ = \binom{X}{2} \cup \binom{Y}{2}$;
 - $E^- = \{\{x, y\} | x \in X, y \in Y\}$.
- \mathcal{F} denota a la clase de todas las bigráficas de la forma $\mathbf{F}[\cdot, \cdot]$.

Teorema

Una gráfica G es de tipo \mathbb{A} si y sólo si cada bloque $B \in \mathcal{F}$ y cada vértice de corte tiene grado 2 en $\text{BT}(G)$.

- Demostración autocontenida usando invariantes de flación.

Caracterización eficiente para \mathbb{A}

Definición

- Se define la bigráfica $\mathbf{F}[X, Y] = (X \cup Y, E^+ \cup E^-)$ donde
 - $E^+ = \binom{X}{2} \cup \binom{Y}{2}$;
 - $E^- = \{\{x, y\} | x \in X, y \in Y\}$.
- \mathcal{F} denota a la clase de todas las bigráficas de la forma $\mathbf{F}[\cdot, \cdot]$.

Teorema

Una gráfica G es de tipo \mathbb{A} si y sólo si cada bloque $B \in \mathcal{F}$ y cada vértice de corte tiene grado 2 en $\text{BT}(G)$.

- Demostración autocontenida usando invariantes de flación.

Caracterización eficiente para \mathbb{A}

Definición

- Se define la bigráfica $\mathbf{F}[X, Y] = (X \cup Y, E^+ \cup E^-)$ donde
 - $E^+ = \binom{X}{2} \cup \binom{Y}{2}$;
 - $E^- = \{\{x, y\} | x \in X, y \in Y\}$.
- \mathcal{F} denota a la clase de todas las bigráficas de la forma $\mathbf{F}[\cdot, \cdot]$.

Teorema

Una gráfica G es de tipo \mathbb{A} si y sólo si cada bloque $B \in \mathcal{F}$ y cada vértice de corte tiene grado 2 en $\text{BT}(G)$.

- Demostración autocontenida usando invariantes de flación.

Caracterización eficiente para \mathbb{A}

Definición

- Se define la bigráfica $\mathbf{F}[X, Y] = (X \cup Y, E^+ \cup E^-)$ donde
 - $E^+ = \binom{X}{2} \cup \binom{Y}{2}$;
 - $E^- = \{\{x, y\} | x \in X, y \in Y\}$.
- \mathcal{F} denota a la clase de todas las bigráficas de la forma $\mathbf{F}[\cdot, \cdot]$.

Teorema

Una gráfica G es de tipo \mathbb{A} si y sólo si cada bloque $B \in \mathcal{F}$ y cada vértice de corte tiene grado 2 en $\text{BT}(G)$.

- Demostración autocontenida usando invariantes de flación.

Caracterización eficiente para \mathbb{A}

Definición

- Se define la bigráfica $\mathbf{F}[X, Y] = (X \cup Y, E^+ \cup E^-)$ donde
 - $E^+ = \binom{X}{2} \cup \binom{Y}{2}$;
 - $E^- = \{\{x, y\} | x \in X, y \in Y\}$.
- \mathcal{F} denota a la clase de todas las bigráficas de la forma $\mathbf{F}[\cdot, \cdot]$.

Teorema

Una gráfica G es de tipo \mathbb{A} si y sólo si cada bloque $B \in \mathcal{F}$ y cada vértice de corte tiene grado 2 en $\text{BT}(G)$.

- Demostración autocontenida usando invariantes de flación.

Caracterización eficiente para \mathbb{A}

Definición

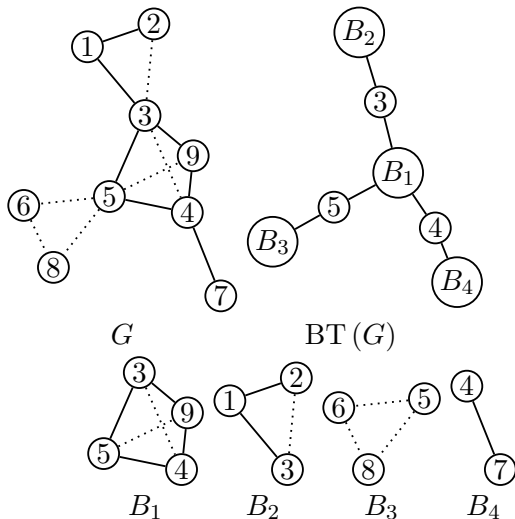
- Se define la bigráfica $\mathbf{F}[X, Y] = (X \cup Y, E^+ \cup E^-)$ donde
 - $E^+ = \binom{X}{2} \cup \binom{Y}{2}$;
 - $E^- = \{\{x, y\} | x \in X, y \in Y\}$.
- \mathcal{F} denota a la clase de todas las bigráficas de la forma $\mathbf{F}[\cdot, \cdot]$.

Teorema

Una gráfica G es de tipo \mathbb{A} si y sólo si cada bloque $B \in \mathcal{F}$ y cada vértice de corte tiene grado 2 en $\text{BT}(G)$.

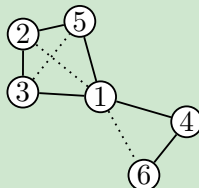
- Demostración autocontenida usando invariantes de flación.

Ejemplo



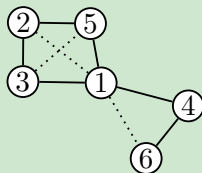
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



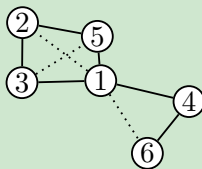
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



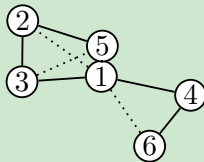
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



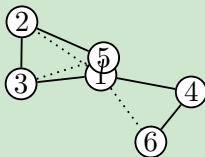
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



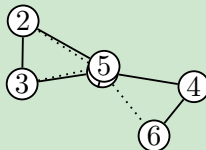
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



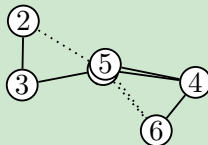
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



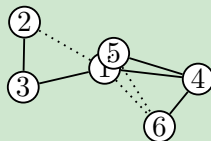
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



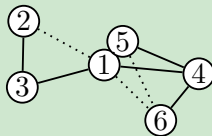
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



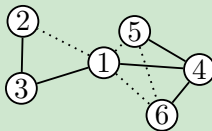
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



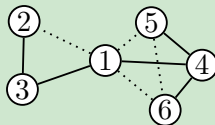
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



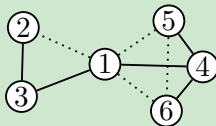
Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)



Interpretación gráfica

Ejemplo ($T_{15}(G)$)

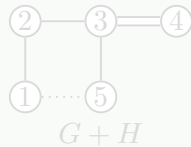
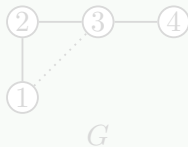


Suma de bigráficas

Definición

$G + H$ es la bigráfica que se obtiene de simplificar la bigráfica $(V(G) \cup V(H), E(G) + E(H))$.

Ejemplo

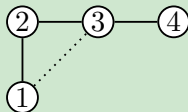


Suma de bigráficas

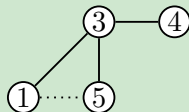
Definición

$G + H$ es la bigráfica que se obtiene de simplificar la bigráfica $(V(G) \cup V(H), E(G) + E(H))$.

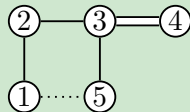
Ejemplo



G



H



$G + H$

Invariante para $BT(G)$

Lema

Sea $\{s, r\}$ una arista de alguna $H \in \mathcal{F}$, y sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $V(F) \cap V(H) = \{s\}$; entonces $T_{sr}(F + H) = F' + H'$ donde:

- ① F' y H' son miembros de \mathcal{F} tales que $V(F') \cap V(H') = \{s\}$
- ② $F' - r = F$ y $H - r = H'$.

Invariante para $BT(G)$

Lema

Sea $\{s, r\}$ una arista de alguna $H \in \mathcal{F}$, y sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $V(F) \cap V(H) = \{s\}$; entonces $T_{sr}(F + H) = F' + H'$ donde:

- ① F' y H' son miembros de \mathcal{F} tales que $V(F') \cap V(H') = \{s\}$
- ② $F' - r = F$ y $H - r = H'$.

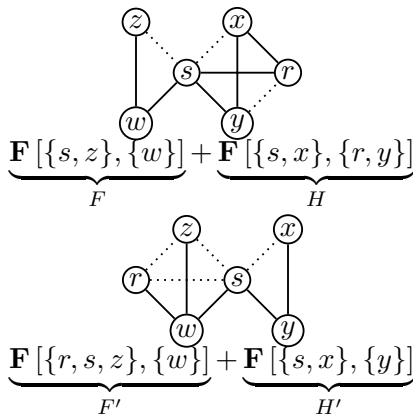
Invariante para $BT(G)$

Lema

Sea $\{s, r\}$ una arista de alguna $H \in \mathcal{F}$, y sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $V(F) \cap V(H) = \{s\}$; entonces $T_{sr}(F + H) = F' + H'$ donde:

- ① F' y H' son miembros de \mathcal{F} tales que $V(F') \cap V(H') = \{s\}$
- ② $F' - r = F$ y $H - r = H'$.

Ejemplo



Construcción para \mathbb{D}

Construcción (pegado de \mathbb{D} -núcleo)

Datos:

- Una bigráfica cíclica con vértices x_1, \dots, x_h ($h \geq 2$) que satisface la condición de ciclo (el \mathbb{D} -núcleo).
- Bigráficas F_1, F_2, \dots, F_h , tales que:
 - cada F_i tiene tipo Dynkin A y contiene una arista $\{x_i, x_{i+1}\}$ con el mismo estilo de línea que en H ;
 - x_i y x_{i+1} son vértices internos de F_i
 - todas las F_i son disjuntas por vértices excepto por aquellos que conforman el \mathbb{D} -núcleo.

Procedimiento:

- 1 Calcular la suma de bigráficas $\sum_{i=1}^h F_i$; a la bigráfica resultante le llamamos el **pegado de \mathbb{D} -núcleo de H y F_1, F_2, \dots, F_h .**

Construcción para \mathbb{D}

Construcción (pegado de \mathbb{D} -núcleo)

Datos:

- Una bigráfica cíclica con vértices x_1, \dots, x_h ($h \geq 2$) que satisface la condición de ciclo (el \mathbb{D} -núcleo).
- Bigráficas F_1, F_2, \dots, F_h , tales que:
 - cada F_i tiene tipo Dynkin \mathbb{A} y contiene una arista $\{x_i, x_{i+1}\}$ con el mismo estilo de línea que en H ;
 - x_i y x_{i+1} son vértices internos de F_i
 - todas las F_i son disjuntas por vértices excepto por aquellos que conforman el \mathbb{D} -núcleo.

Procedimiento:

- 1 Calcular la suma de bigráficas $\sum_{i=1}^h F_i$; a la bigráfica resultante le llamamos el **pegado de \mathbb{D} -núcleo de H y F_1, F_2, \dots, F_h .**

Construcción para \mathbb{D}

Construcción (pegado de \mathbb{D} -núcleo)

Datos:

- Una bigráfica cíclica con vértices x_1, \dots, x_h ($h \geq 2$) que satisface la condición de ciclo (el \mathbb{D} -núcleo).
- Bigráficas F_1, F_2, \dots, F_h , tales que:
 - cada F_i tiene tipo Dynkin \mathbb{A} y contiene una arista $\{x_i, x_{i+1}\}$ con el mismo estilo de línea que en H ;
 - x_i y x_{i+1} son vértices internos de F_i
 - todas las F_i son disjuntas por vértices excepto por aquellos que conforman el \mathbb{D} -núcleo.

Procedimiento:

- 1 Calcular la suma de bigráficas $\sum_{i=1}^h F_i$; a la bigráfica resultante le llamamos el **pegado de \mathbb{D} -núcleo de H y F_1, F_2, \dots, F_h .**

Construcción para \mathbb{D}

Construcción (pegado de \mathbb{D} -núcleo)

Datos:

- Una bigráfica cíclica con vértices x_1, \dots, x_h ($h \geq 2$) que satisface la condición de ciclo (el \mathbb{D} -núcleo).
- Bigráficas F_1, F_2, \dots, F_h , tales que:
 - cada F_i tiene tipo Dynkin \mathbb{A} y contiene una arista $\{x_i, x_{i+1}\}$ con el mismo estilo de línea que en H ;
 - x_i y x_{i+1} son vértices internos de F_i
 - todas las F_i son disjuntas por vértices excepto por aquellos que conforman el \mathbb{D} -núcleo.

Procedimiento:

- 1 Calcular la suma de bigráficas $\sum_{i=1}^h F_i$; a la bigráfica resultante le llamamos el **pegado de \mathbb{D} -núcleo de H y F_1, F_2, \dots, F_h .**

Construcción para \mathbb{D}

Construcción (pegado de \mathbb{D} -núcleo)

Datos:

- Una bigráfica cíclica con vértices x_1, \dots, x_h ($h \geq 2$) que satisface la condición de ciclo (el \mathbb{D} -núcleo).
- Bigráficas F_1, F_2, \dots, F_h , tales que:
 - cada F_i tiene tipo Dynkin \mathbb{A} y contiene una arista $\{x_i, x_{i+1}\}$ con el mismo estilo de línea que en H ;
 - x_i y x_{i+1} son vértices internos de F_i
 - todas las F_i son disjuntas por vértices excepto por aquellos que conforman el \mathbb{D} -núcleo.

Procedimiento:

- 1 Calcular la suma de bigráficas $\sum_{i=1}^h F_i$; a la bigráfica resultante le llamamos el **pegado de \mathbb{D} -núcleo de H y F_1, F_2, \dots, F_h .**

Construcción para \mathbb{D}

Construcción (pegado de \mathbb{D} -núcleo)

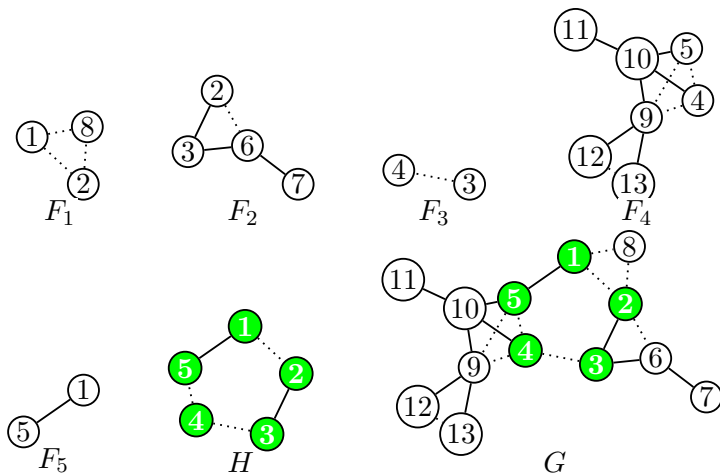
Datos:

- Una bigráfica cíclica con vértices x_1, \dots, x_h ($h \geq 2$) que satisface la condición de ciclo (el \mathbb{D} -núcleo).
- Bigráficas F_1, F_2, \dots, F_h , tales que:
 - cada F_i tiene tipo Dynkin \mathbb{A} y contiene una arista $\{x_i, x_{i+1}\}$ con el mismo estilo de línea que en H ;
 - x_i y x_{i+1} son vértices internos de F_i
 - todas las F_i son disjuntas por vértices excepto por aquellos que conforman el \mathbb{D} -núcleo.

Procedimiento:

- 1 Calcular la suma de bigráficas $\sum_{i=1}^h F_i$; a la bigráfica resultante le llamamos el **pegado de \mathbb{D} -núcleo de H y F_1, F_2, \dots, F_h** .

Ejemplo de pegado de \mathbb{D} -núcleo



Observaciones acerca del pegado de \mathbb{D} -núcleo

El pegado de \mathbb{D} -núcleo...

- caracteriza al tipo \mathbb{D} ;
- define la estructura de la bigráfica, no de la gráfica subyacente;
- considera al A-espejo es un caso especial, cuando $h = 2$;
- tiene demostración autocontenida basada en invariante de flación.

Observaciones acerca del pegado de \mathbb{D} -núcleo

El pegado de \mathbb{D} -núcleo...

- caracteriza al tipo \mathbb{D} ;
- define la estructura de la bigráfica, no de la gráfica subyacente;
- considera al \mathbb{A} -espejo es un caso especial, cuando $h = 2$;
- tiene demostración autocontenida basada en invariante de flación.

Observaciones acerca del pegado de \mathbb{D} -núcleo

El pegado de \mathbb{D} -núcleo...

- caracteriza al tipo \mathbb{D} ;
- define la estructura de la bigráfica, no de la gráfica subyacente;
- considera al \mathbb{A} -espejo es un caso especial, cuando $h = 2$;
- tiene demostración autocontenida basada en invariante de flación.

Observaciones acerca del pegado de \mathbb{D} -núcleo

El pegado de \mathbb{D} -núcleo...

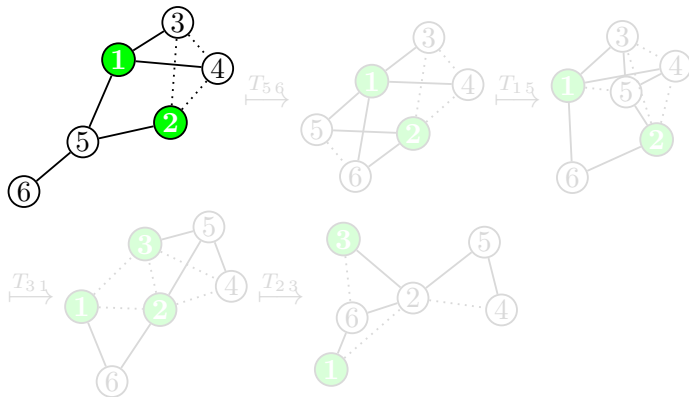
- caracteriza al tipo \mathbb{D} ;
- define la estructura de la bigráfica, no de la gráfica subyacente;
- considera al \mathbb{A} -espejo es un caso especial, cuando $h = 2$;
- tiene demostración autocontenida basada en invariante de flación.

Observaciones acerca del pegado de \mathbb{D} -núcleo

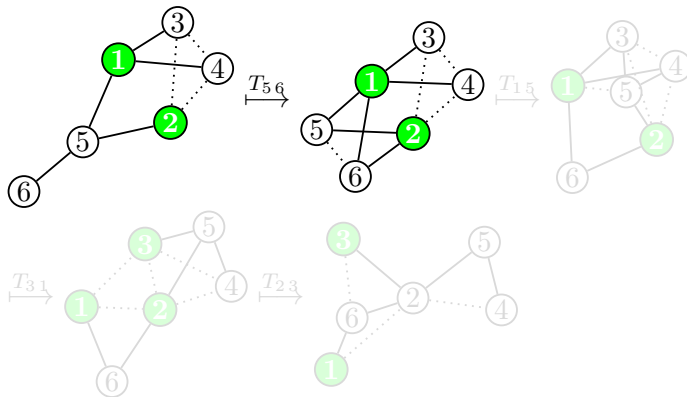
El pegado de \mathbb{D} -núcleo...

- caracteriza al tipo \mathbb{D} ;
- define la estructura de la bigráfica, no de la gráfica subyacente;
- considera al \mathbb{A} -espejo es un caso especial, cuando $h = 2$;
- tiene demostración autocontenida basada en invariante de flación.

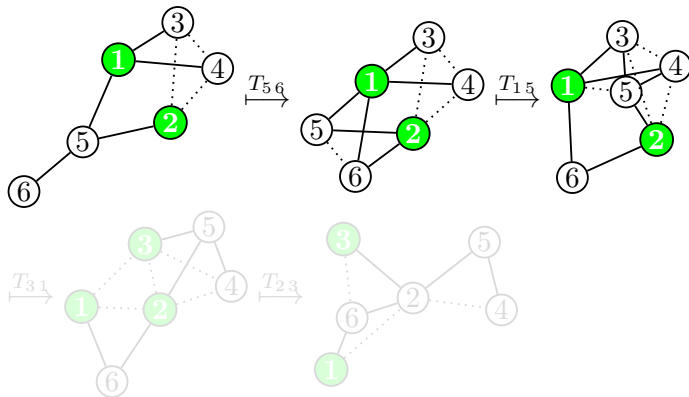
Casos del invariante de flación para \mathbb{D}

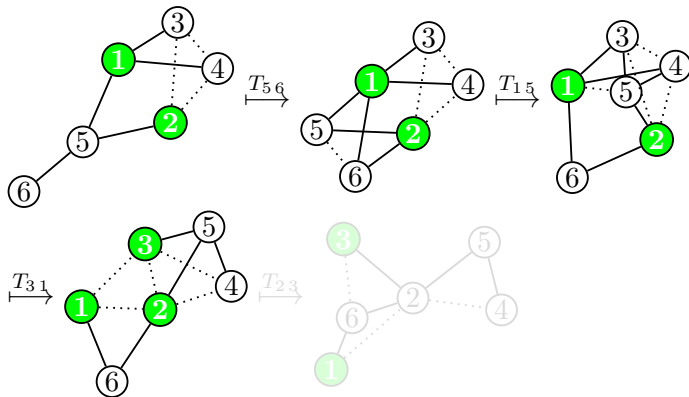


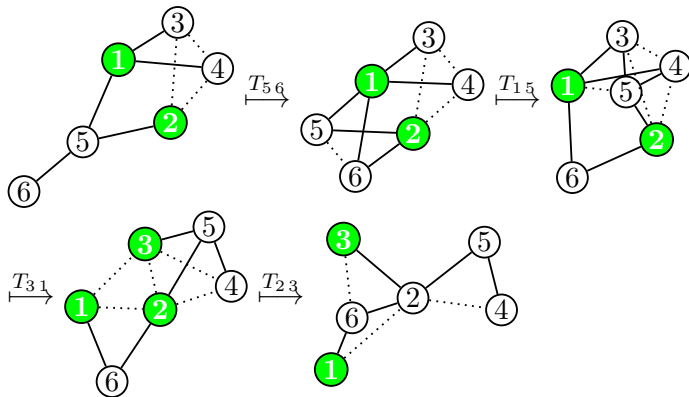
Casos del invariante de flación para \mathbb{D}



Casos del invariante de flación para \mathbb{D}



Casos del invariante de flación para \mathbb{D} 

Casos del invariante de flación para \mathbb{D} 

Índice

1 La Clasificación A-D-E

- Conceptos y relaciones
- Algoritmo de las inflaciones
- Las construcciones de Barot
- Planteamiento

2 Aportaciones en perspectiva computacional

- El morfismo de flación y sus invariantes
- Clasificación de \mathbb{A} y \mathbb{D} por teoría de gráficas
- Un algoritmo polinomial para la clasificación A-D-E

Motivación

En computación se considera que un problema es tratable cuando existe un algoritmo que lo resuelve en tiempo polinomial.

Observaciones

- Sea G una bigráfica conexa y definida positiva de n vértices.
- G no puede tener aristas múltiples por ser definida positiva.
- Si $n > 8$ entonces G es de tipo \mathbb{A} o \mathbb{D} .
- Si $n \leq 8$ entonces el algoritmo de las inflaciones puede determinar su tipo en $O(1)$ operaciones.

Observaciones

- Sea G una bigráfica conexa y definida positiva de n vértices.
- G no puede tener aristas múltiples por ser definida positiva.
- Si $n > 8$ entonces G es de tipo \mathbb{A} o \mathbb{D} .
- Si $n \leq 8$ entonces el algoritmo de las inflaciones puede determinar su tipo en $O(1)$ operaciones.

Observaciones

- Sea G una bigráfica conexa y definida positiva de n vértices.
- G no puede tener aristas múltiples por ser definida positiva.
- Si $n > 8$ entonces G es de tipo \mathbb{A} o \mathbb{D} .
- Si $n \leq 8$ entonces el algoritmo de las inflaciones puede determinar su tipo en $O(1)$ operaciones.

Observaciones

- Sea G una bigráfica conexa y definida positiva de n vértices.
- G no puede tener aristas múltiples por ser definida positiva.
- Si $n > 8$ entonces G es de tipo \mathbb{A} o \mathbb{D} .
- Si $n \leq 8$ entonces el algoritmo de las inflaciones puede determinar su tipo en $O(1)$ operaciones.

Algoritmo propuesto

Algoritmo

función Dynkin(A):

entrada: Una matriz casi-Cartan simétrica A
 verificar que A es definida positiva y salir si no lo es;

para cada *componente conexa* K **de** $\text{bigr}(A)$:

si K *tiene* $n \leq 8$ *vértices* :

 usar el algoritmo de las inflaciones en K para
 calcular su tipo Dynkin e imprimirlo;

en otro caso:

 Analizar si K tiene tipo Dynkin A o D e imprimir el
 resultado;

Paso 1

Determinar si una matriz $A \in \text{sq}\mathbb{C}$ es definida positiva usando sólo números enteros

No se puede hacer en tiempo polinomial usando el método de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ & 4 & -2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2^{2^{n-2}} & -2(2^{n-2}-1) \\ & & & & 2^{2^{n-1}} \end{bmatrix}$$

Paso 1

Algoritmo (adaptación de E. Bareiss – 1968)

función definida_positiva(A):

para $k = 1$ **hasta** n :

si $(A)_{kk} \leq 0$: **devolver** FALSO;

para $i = k + 1$ **hasta** n :

para $j = k + 1$ **hasta** n :

$$(A)_{ij} := \det \begin{bmatrix} (A)_{kk} & (A)_{kj} \\ (A)_{ik} & (A)_{ij} \end{bmatrix};$$

$$\text{si } k > 1 : (A)_{ij} := \frac{(A)_{ij}}{(A)_{k-1, k-1}};$$

devolver VERDADERO

Características del algoritmo de Bareiss

- Justificado por el criterio de Sylvester dado que al final de la iteración i , $(\mathbf{A})_{ii} = \det(\mathbf{A}^{(i,i)})$.
- Complejidad $O\left(n^5 (L + \log n)^2\right)$ donde $2^L \geq \max_{i,j} |(\mathbf{A})_{ij}|$.
- En nuestro caso $L = 2$: entonces existe un algoritmo polinomial.

Características del algoritmo de Bareiss

- Justificado por el criterio de Sylvester dado que al final de la iteración i , $(\mathbf{A})_{ii} = \det(\mathbf{A}^{(i,i)})$.
- Complejidad $O\left(n^5 (L + \log n)^2\right)$ donde $2^L \geq \max_{i,j} |(\mathbf{A})_{ij}|$.
- En nuestro caso $L = 2$: entonces existe un algoritmo polinomial.

Características del algoritmo de Bareiss

- Justificado por el criterio de Sylvester dado que al final de la iteración i , $(\mathbf{A})_{ii} = \det(\mathbf{A}^{(i,i)})$.
- Complejidad $O\left(n^5 (L + \log n)^2\right)$ donde $2^L \geq \max_{i,j} |(\mathbf{A})_{ij}|$.
- En nuestro caso $L = 2$: entonces existe un algoritmo polinomial.

Lecturas complementarias I



M. Abarca & D. Rivera

Graph Theoretical and Algorithmic Characterizations of Positive Definite Symmetric Quasi-Cartan Matrices.

Fundamenta Informaticae. 149(3):241–261, 2016.



M. Barot.

A characterization of positive unit forms.

Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 5:87–94, 1999.



M. Barot.

A characterization of positive unit forms, part II.

Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 7:13–22, 2001.