# Clasificación algorítmica en gráficas de tipo $\mathbb{D}_n$

Rey David Gutiérrez Torres
Daniel Rivera López

Universidad Autónoma del Estado de Morelos

29 de junio de 2020

# Índice

# Matriz de Cartan simétrica

**Definición**

- Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{Z})$ es **casi Cartan** si $A$ es simétrica y $(A)_{i\,i} = 2$ para toda $i = 1, \ldots, n$.
- Se denotan por $\mathbf{sqC}$.

**Ejemplo**

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Matriz de Cartan simétrica

## Definición

- Una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{Z})$ es **casi Cartan** si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y $(\boldsymbol{A})_{i\,i} = 2$ para toda $i = 1, \ldots, n$.
- Se denotan por $\mathbf{sqC}$.

## Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Matriz de Cartan simétrica

### Definición

- Una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{Z})$ es **casi Cartan** si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y $(\boldsymbol{A})_{i\,i} = 2$ para toda $i = 1, \ldots, n$.
- Se denotan por $\mathbf{sqC}$.

### Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Forma unitaria

- Una forma cuadrática es un polinomio $q : R^n \to R$ (con $n > 0$) si cada monomio del mismo es una variable al cuadrado o la multiplicación de dos variables. Esto es equivalente a decir que $q$ se puede expresar como:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} q_{ii}\, x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} q_{ij}\, x_i\, x_j \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$$

- Una forma cuadratica unitaria es un caso especial donde $q_{ii} = 1$

# Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

## Matriz casi-Cartan simétrica ↔ Forma unitaria

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,i}\,x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j .
\end{aligned}
$$

# Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

## Matriz casi-Cartan simétrica ↔ Forma unitaria

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,i}\,x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\,x_i x_j.
\end{aligned}
$$

# Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

## Matriz casi-Cartan simétrica ↔ Forma unitaria

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\, x_i x_j\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A})_{i\,i}\, x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\, x_i x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{A})_{i\,j}\, x_i x_j .
\end{aligned}
$$

# Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

## Matriz casi-Cartan simétrica ↔ Forma unitaria

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{x}\right) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\boldsymbol{A}\right)_{i\,j} x_i x_j\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{A}\right)_{i\,i} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\boldsymbol{A}\right)_{i\,j} x_i x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\boldsymbol{A}\right)_{i\,j} x_i x_j .
\end{aligned}
$$

# Forma unitaria asociada a una matriz casi Cartan

## Definición

Una matriz casi Cartan simétrica $A$ es **definida positiva** si y sólo si $\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$, para toda $x \in \mathbb{Z}$ con $x \neq \mathbf{0}$.

# Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan

## Matriz casi-Cartan simétrica $\leftrightarrow$ Bigráfica

**Teorema**

*Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean $i, j \in \{1, 2 \ldots n\}$, entonces*

$(a)$ $0 \leqslant A_{ij}A_{ji} < 4$

$(b)$ $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

La bigráfica $\mathbf{bigr}\,(A)$ asociada a la matriz $A$ tiene vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$, y para cada par de vértices $i$, $j$ con $i \neq j$:

1. Si $A_{ij} = -1 = A_{ji}$ trazamos una arista solida entre los vértices, $i$ —— $j$
2. Si $A_{ij} = 1 = A_{ji}$ trazamos una arista punteada entre los vértices, $i \cdots\cdots j$

# Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan

## Matriz casi-Cartan simétrica $\leftrightarrow$ Bigráfica

**Teorema**

*Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean $i, j \in \{1, 2 \ldots n\}$, entonces*

$(a)$ $0 \leqslant A_{ij} A_{ji} < 4$

$(b)$ $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

La bigráfica $\mathbf{bigr}\,(\boldsymbol{A})$ asociada a la matriz $A$ tiene vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$, y para cada par de vértices $i$, $j$ con $i \neq j$:

1. Si $A_{ij} = -1 = A_{ji}$ trazamos una arista solida entre los vértices, 
2. Si $A_{ij} = 1 = A_{ji}$ trazamos una arista punteada entre los vértices, 

# Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan

## Matriz casi-Cartan simétrica $\leftrightarrow$ Bigráfica

**Teorema**

*Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean $i, j \in \{1, 2 \ldots n\}$, entonces*

$(a)$ $0 \leqslant A_{ij}A_{ji} < 4$

$(b)$ $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

La bigráfica $\mathbf{bigr}\,(\boldsymbol{A})$ asociada a la matriz $A$ tiene vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$, y para cada par de vértices $i$, $j$ con $i \neq j$:

1. Si $A_{ij} = -1 = A_{ji}$ trazamos una arista solida entre los vértices, $i$ —— $j$
2. Si $A_{ij} = 1 = A_{ji}$ trazamos una arista punteada entre los vértices, $i$ ······ $j$

# Bigráfica asociada a una matriz casi Cartan

## Matriz casi-Cartan simétrica $\leftrightarrow$ Bigráfica

**Teorema**

*Sea $A \in M_n(\mathbb{Z})$ una matriz casi Cartan simétrica y definida positiva sean $i, j \in \{1, 2 \ldots n\}$, entonces*

$(a)$ $0 \leqslant A_{ij}A_{ji} < 4$

$(b)$ $A_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

La bigráfica $\mathbf{bigr}\,(\boldsymbol{A})$ asociada a la matriz $A$ tiene vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$, y para cada par de vértices $i$, $j$ con $i \neq j$:

1. Si $A_{ij} = -1 = A_{ji}$ trazamos una arista solida entre los vértices, $(i)$ —— $(j)$
2. Si $A_{ij} = 1 = A_{ji}$ trazamos una arista punteada entre los vértices, $(i) \cdots\cdots (j)$

# Equivalencia de conceptos

## Ejemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



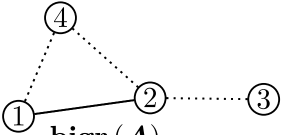

$\mathbf{bigr}\,(\boldsymbol{A})$

$$\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$$

# Equivalencia de conceptos

## Ejemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



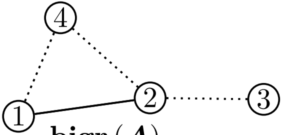

$\mathbf{bigr}\left(\boldsymbol{A}\right)$

$$\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$$

# Equivalencia de conceptos

## Ejemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$




$\mathbf{bigr}\,(\boldsymbol{A})$

$$\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$$

# $\mathbf{Z}$-equivalencia

## Definiciones

- Una matriz $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{Z})$ es $\mathbf{Z}$-invertible si tiene inversa $\boldsymbol{M}^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{Z})$.
- $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \in \mathrm{sqC}$ son $\mathbf{Z}$-equivalentes si existe una matriz $\mathbf{Z}$-invertible $\boldsymbol{M}$ tal que $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}$.

# $\mathbf{Z}$-equivalencia

## Definiciones

- Una matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{Z})$ es $\mathbf{Z}$-invertible si tiene inversa $M^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{Z})$.
- $A, A' \in \mathbf{sqC}$ son $\mathbf{Z}$-equivalentes si existe una matriz $\mathbf{Z}$-invertible $M$ tal que $A' = M^{\mathrm{T}} A M$.

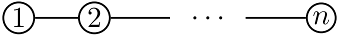
# Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

| Familia | Gráfica |
|---|---|
| $\mathbb{A}_n$, $n \geqslant 1$ |  |
| $\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$ |  |
| $\mathbb{E}_n$, $6 \leqslant n \leqslant 8$ |  |

# Diagramas de Dynkin

- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

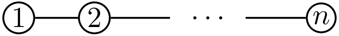
| Familia | Gráfica |
|---|---|
| $\mathbb{A}_n$, $n \geqslant 1$ |  |
| $\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$ |  |
| $\mathbb{E}_n$, $6 \leqslant n \leqslant 8$ |  |

# Diagramas de Dynkin

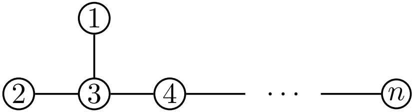
- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

Familia — Gráfica

$\mathbb{A}_n$, $n \geqslant 1$




$\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$



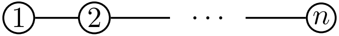

$\mathbb{E}_n$, $6 \leqslant n \leqslant 8$

# Diagramas de Dynkin

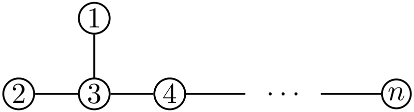
- Todas las bigráficas conexas, definidas positivas, de aristas sólidas:

Familia Gráfica

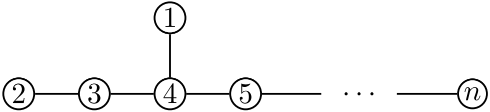
$\mathbb{A}_n$, $n \geqslant 1$




$\mathbb{D}_n$, $n \geqslant 4$




$\mathbb{E}_n$, $6 \leqslant n \leqslant 8$



# La clasificación $\mathbb{A}$-$\mathbb{D}$-$\mathbb{E}$

**Teorema (S. Ovsienko – 1978)**

*Toda bigráfica $G$ definida positiva es $\mathbf{Z}$-equivalente a una bigráfica sin aristas punteadas, que está determinada de forma única hasta isomorfismo de gráficas, y es la unión disjunta de diagramas de Dynkin.*

**Demostración.**

Demostración constructiva mediante el **algoritmo de las inflaciones**. $\square$

# Inflaciones

## Definiciones

- $\boldsymbol{I}$ denota la matriz identidad con vectores columna $\boldsymbol{e}_j$.
- $\boldsymbol{E}^{\sigma}_{s\,r} := \boldsymbol{I} + \sigma\, \boldsymbol{e}_s\, \boldsymbol{e}_r{}^{\mathrm{T}}$ $(s, r \in \{1, \dots, n\},\ \sigma \in \mathbb{R})$ denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si $\boldsymbol{A} \in \mathrm{sqC}$ y $(\boldsymbol{A})_{s\,r} = 1$ entonces $\left(\boldsymbol{E}^{-1}_{s\,r}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{E}^{-1}_{s\,r}\right)$ es una **inflación** de $\boldsymbol{A}$.

# Inflaciones

## Definiciones

- $\boldsymbol{I}$ denota la matriz identidad con vectores columna $\boldsymbol{e}_j$.
- $\boldsymbol{E}_{s\,r}^{\sigma} := \boldsymbol{I} + \sigma\, \boldsymbol{e}_s\, \boldsymbol{e}_r{}^{\mathrm{T}}$ $(s, r \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma \in \mathbb{R})$ denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si $\boldsymbol{A} \in \mathrm{sqC}$ y $(\boldsymbol{A})_{s\,r} = 1$ entonces $\left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)$ es una **inflación** de $\boldsymbol{A}$.

# Inflaciones

## Definiciones

- $\boldsymbol{I}$ denota la matriz identidad con vectores columna $\boldsymbol{e}_j$.
- $\boldsymbol{E}^{\sigma}_{s\,r} := \boldsymbol{I} + \sigma\, \boldsymbol{e}_s\, \boldsymbol{e}_r{}^{\mathrm{T}}$ $(s, r \in \{1, \dots, n\},\ \sigma \in \mathbb{R})$ denota una **matriz elemental** de suma de renglones/columnas.
- Si $\boldsymbol{A} \in \mathbf{sqC}$ y $(\boldsymbol{A})_{s\,r} = 1$ entonces $\left(\boldsymbol{E}^{-1}_{s\,r}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{E}^{-1}_{s\,r}\right)$ es una **inflación** de $\boldsymbol{A}$.

# Algoritmo de las inflaciones

## Algoritmo de las inflaciones

**función** `inflaciones(`$\boldsymbol{A}$`):`

  **repetir mientras** *exista una entrada no diagonal* $(\boldsymbol{A})_{s\,r} = 1$ **:**

    $\boldsymbol{A} := \left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)$

- Se justifica en que $\left|\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}^{-1}(1)\right| < \infty$ permanece constante en cada iteración mientras que $\left|\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}^{-1}(1) \cap \mathbf{N}^n\right|$ crece.
- Cota superior del número de raíces positivas $\mathrm{O}\left(n \cdot 6^n\right)$ (Kosakowska – 2012).

# Algoritmo de las inflaciones

## Algoritmo de las inflaciones

**función** `inflaciones(`$\boldsymbol{A}$`):`

**repetir mientras** *exista una entrada no diagonal* $(\boldsymbol{A})_{s\,r} = 1$ **:**

$$\boldsymbol{A} := \left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)$$

- Se justifica en que $\left|\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}^{-1}(1)\right| < \infty$ permanece constante en cada iteración mientras que $\left|\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}^{-1}(1) \cap \mathbf{N}^n\right|$ crece.
- Cota superior del número de raíces positivas $\mathrm{O}\left(n \cdot 6^n\right)$ (Kosakowska – 2012).

# Algoritmo de las inflaciones

## Algoritmo de las inflaciones

**función** `inflaciones(`$\boldsymbol{A}$`)`:

  **repetir mientras** *exista una entrada no diagonal* $(\boldsymbol{A})_{s\,r} = 1$ **:**

    $\boldsymbol{A} := \left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{E}_{s\,r}^{-1}\right)$

- Se justifica en que $\left|\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}^{-1}(1)\right| < \infty$ permanece constante en cada iteración mientras que $\left|\mathbf{q}_{\boldsymbol{A}}^{-1}(1) \cap \mathbf{N}^n\right|$ crece.
- Cota superior del número de raíces positivas $\mathrm{O}\left(n \cdot 6^n\right)$ (Kosakowska – 2012).

# $\mathbb{A}$-bloques

## Definiciones

- Sean $\mathrm{X}$ y $\mathrm{Y}$ conjuntos disjuntos de vértices. Denotamos por $\mathrm{F}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ el bigrafo no separable obtenido uniendo cada par de vértices $(x,y)$ con $x\in\mathrm{X}$ e $y\in\mathrm{Y}$ por una arista sólida, y todos los demás pares de vértices por una arista punteada, tal bigrafo se llama un $\mathbb{A}$ bloque.

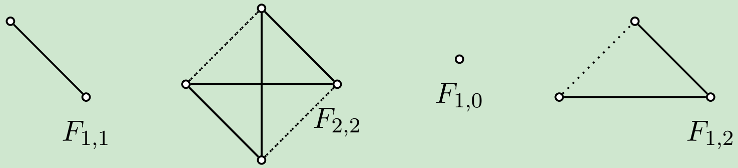
## Ejemplo

# $\mathbb{A}$-bloques

## Definiciones

- Sean $\mathrm{X}$ y $\mathrm{Y}$ conjuntos disjuntos de vértices. Denotamos por $\mathrm{F}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ el bigrafo no separable obtenido uniendo cada par de vértices $(x, y)$ con $x \in \mathrm{X}$ e $y \in \mathrm{Y}$ por una arista sólida, y todos los demás pares de vértices por una arista punteada, tal bigrafo se llama un $\mathbb{A}$ bloque.

## Ejemplo



# $\mathbb{A}_n$

**Definiciones**

Una componente biconexa de una gráfica, es una subgráfica biconexa maximal (no contenida propiamente en ninguna otra subgráfica biconexa).

# Vértices de corte

## Definición (F. Harary – 1969)

Sea $G$ una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de $G$.
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

## Ejemplo

# Vértices de corte

**Definición (F. Harary – 1969)**

Sea $G$ una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de $G$.
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

**Ejemplo**



Universidad Autónoma del Estado de Morelos

# Vértices de corte

## Definición (F. Harary – 1969)

Sea $G$ una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de $G$.
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

## Ejemplo

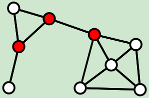
# Vértices de corte

## Definición (F. Harary – 1969)

Sea $G$ una gráfica.

- $\kappa(G)$ denota a la cantidad de componentes conexas de $G$.
- $v \in V(G)$ es un **vértice de corte** si $\kappa(G) < \kappa(G - v)$.

## Ejemplo



# $\mathbb{A}_n$

**Corolario**

*Una forma unitaria $q$ es de tipo $\mathbb{A}_n$ si y solo si $\mathbf{B_q}$ es conexa, sus componentes biconexas son $\mathbb{A}$-bloques y todo vértice de corte pertenece a exactamente dos de estas componentes.*

**Demostración.**

Mediante el algoritmo de las inflaciones y el algoritmo de recorrido en profundidad. $\square$

# $\mathbb{A}$-bloques

**Lema**

*Todo $\mathbb{A}$-bloque es de tipo $\mathbb{A}_n$*

# $\mathbb{A}$-bloques

**Lema**

*Sean $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ particiones de $\mathbf{B}$, si $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ son $\mathbb{A}$-bloques, entonces $\mathbf{B}$ es de tipo $\mathbb{A}_n$*

# $\mathbb{A}$-bloques

**Lema**

*Si* $\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2} \ldots \mathbf{B_n}$ *son* $\mathbb{A}$*-bloques, entonces* $\mathbf{B}$ *es de tipo* $\mathbb{A}_n$

# Descripción de el problema

- El problema propuesto es la clasificación algorítmica en gráficas de tipo $\mathbb{D}_n$
- Para esto se propone usar el algoritmo de componentes triconexas para caracterizar las de tipo $D_n$

# Algoritmo de Componentes triconexas

1. Divide las aristas múltiples para formar enlaces triples y un grafo biconexo simple $G'$.
2. Encuentra los componentes de separación de $G'$.
3. Combina los enlaces triples y triángulos en enlaces y polígonos.

# Componentes triconexas

Sea $G = (V, E)$ un multigrafo. Sea $H = (W, F)$ un subgrafo de $G$, defininimos una relacion de equivalencia sobre $E - F$ como sigue:

## Definiciones

1. $\forall e \in E - F$, $e \widetilde{=} e$.
2. $\forall e, f \in E - F$, $e \widetilde{=} f$ si y solo si existe un camino que une $e, f$ que no tiene un vértice en $W$.

# Componentes triconexas

Si $H = \{\{a,b\},\emptyset\}$ las clases de equivalencia son llamadas clases de separación relativas al par $\{a,b\}$.

## Definiciones

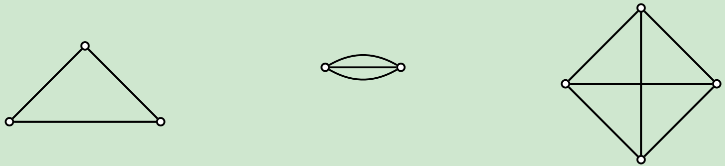
- Sean $S_1, S_2, \ldots, S_k$, las clases de separación relativas a el par $(a,b)$. Si existe una partición $(A,B)$ de $\{1,2,...,k\}$ tal que $|E_1 = \bigcup_{i\in A} S_i| \geqslant 2$ y $|E = \bigcup_{j\in B} S_j| \geqslant 2$, decimos que $\{a,b\}$ es un par de separación.

# Componentes triconexas

## Definiciones

- Si $G$ es biconexa y $G$ no tiene par de separación entonces $G$ es triconexa.

## Ejemplo



1

# La operación de división

- Estos grafos son biconexos.
- Por lo tanto podemos dividir los grafos de división hasta que no sea posible dividir.
- Los grafos obtenidos se dividen en tres clases, los tres enlaces, los triángulos y los grafos triconexos con mas de 3 aristas.
- Estos son llamados los componentes de división de $G$. No son únicos.

# La operación de división

El siguiente resultado es debido a Hopcroft and Tarjan[6].

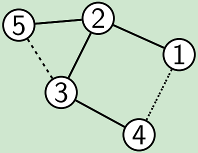
**Lema**

*El número total de aristas en todos los componentes de división no excede* $3|E| - 6$

# La operación de división

Sea $G$ el bigrafo y $H = \{\{2,3\}, \emptyset\}$

## Ejemplo




La clase de equivalencia de $2 — 5$ es el conjunto:
$S_1 = \{2 — 5, 3 \cdots 5\}$
La clase de equivalencia de $1 \cdots 4$ es el conjunto:
$S_1 = \{1 \cdots 4, 1 — 2, 4 — 3\}$
La clase de equivalencia de $2 — 3$ es el conjunto:
$S_1 = \{2 — 3\}$

# La operación de división

P

ara saber si $\{2, 3\}$ es un par de separación hay que encontrar una partición de $\{1, 2, 3\} = A \cup B$, $A \cap B = \{\emptyset\}$ tal que se cumple que $|E(H_1)| \geqslant 2, |E(H_2)| \geqslant 2$.
En este caso $A = \{1, 3\}$, $B = \{2\}$ es una partición posible que buscamos y entonces $\{2, 3\}$ es un par de separación.

# La operación de división

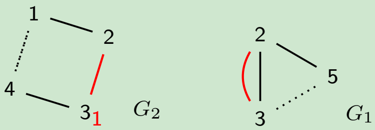
**A**

hora supongamos $\{a,b\}$ es un para de separación. Si $H=\{\{a,b\}\emptyset\}$ y $S_1,S_2,\ldots,S_k$ son las clases de separación del par $\{a,b\}$(las clases de equivalencia definidas por $H$). Sea $A,B$ la partición del conjunto $\{1,2,\ldots,k\}$ tal que $|E(H_1)|\geqslant 2, |E(H_2)|\geqslant 2$. Si $H_1=(V(E_1,E_1))$ y $H_2=(V(E_2,E_2))$ entonces $V(E_1)\cap V(E_1=\{a,b\}$. Sea $G_i=H_i+a$—$b$ para $i\in\{1,2\}$. Las $G_i$ son los bigrafos de división de $G$ en $\{a,b\}$. La arista $a$—$b$ es llamada arista virtual.

# La operación de división

Donde $A = \{1, 3\}$ y $B = \{2\}$

## Ejemplo




Donde $A = \{2, 3\}$ y $B = \{1\}$

## Ejemplo

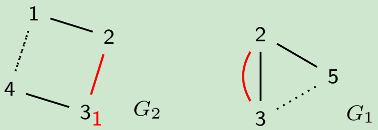



A esta arista se le coloca una etiqueta $n$ para distinguirla de otras arista virtuales. o

# La operación de división

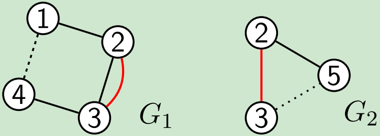
Donde $A = \{1, 3\}$ y $B = \{2\}$

## Ejemplo




Donde $A = \{2, 3\}$ y $B = \{1\}$

## Ejemplo




A esta arista se le coloca una etiqueta $n$ para distinguirla de otras arista virtuales. o

# La operación de unión

- Sean $H_1$ y $H_2$ particiones de $G$ tal que ambas contengan la misma arista virtual $(a, b, n)$.
- Combinamos estos dejando que $H = H_1 + H_2 - (a, b, n)$.

# La operación de unión

- Ahora supongamos que dividimos $G$ en sus componentes de división.
- Entonces los enlaces triples son combinados tanto posible para formar un conjunto de enlaces y triángulos son combinados tanto posible para formar un conjunto de polígonos.
- El conjunto final de grafos es llamado conjunto completo de componentes de $G$.

# La operación de unión

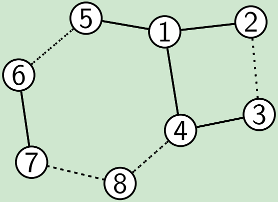
**Lema**

*Un conjunto completo de componentes triconexos es único hasta isomorfismo.*

## Definiciones

Una bigráfica cumple la condición de ciclo si todo ciclo sin cuerdas tiene un número impar de aristas punteadas.

## Ejemplo



# $\mathbb{D}$-nucleo

- Una bigráfica cíclica $H = x_1 - x_2 - \cdots - x_h - x_1$ (todos los $x_i$ distintos para $1 \leqslant i \leqslant h$) que satisface la condición de ciclo.
- Por convención exigimos $h > 2$ permitiendo a H colapsar en un doble enlace cuando h $= 2$ (un $n$-enlace es un manojo de $n$ aristas paralelas).
- A esta bigráfica $H$ le llamaremos el $\mathbb{D}$-núcleo.

# Lecturas complementarias I

M. Abarca & D. Rivera
Graph Theoretical and Algorithmic Characterizations of Positive Definite Symmetric Quasi-Cartan Matrices.
*Fundamenta Informaticae*. 149(3):241–261, 2016.

M. Barot.
A characterization of positive unit forms.
*Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. 5:87–94, 1999.

M. Barot.
A characterization of positive unit forms, part II.
*Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. 7:13–22, 2001.