

# Navigacija i upravljanje projektila

Mirza Hodžić

Mentor: prof. dr. Naser Prljača



FAKULTET ELEKTROTEHNIKE  
UNIVERZITET U TUZLI

# Sadržaj

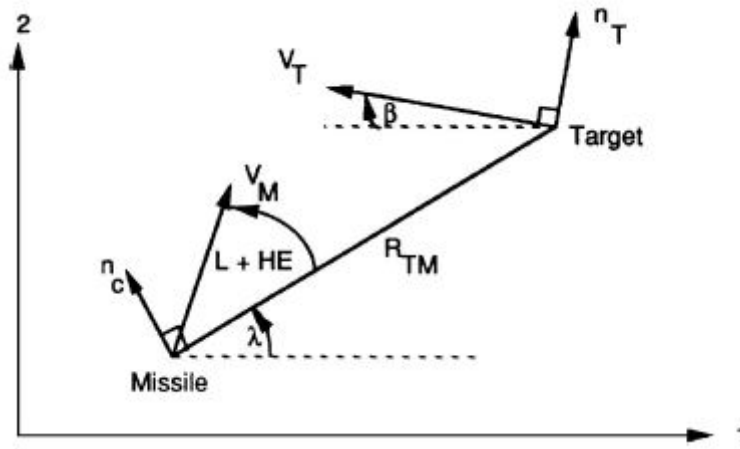
1		3
2	Uvod u proporcionalnu navigaciju	4
2.1	Opis planarnog susreta . . . . .	4
2.2	Izvođenje upravljačkog zakona . . . . .	5
2.3	Izmjenjena proporcionalna navigacija . . . . .	7
2.4	Optimalnost zakona proporcionalne navigacije . . . . .	7
2.5	Linearizacija . . . . .	8
2.6	Zero effort miss . . . . .	9

# Uvod

Nedodovršeno

# Uvod u proporcionalnu navigaciju

## 2.1 Opis planarnog susreta



Udaljenost između mete i projektila u svakom trenutku je data sa:

$$r(t) = r_T(t) - r_M(t) \quad (2.1)$$

Brzina približavanja projektila meti je data sa:

$$v_c = -\dot{r}(t) \quad (2.2)$$

Ugaono ubrzanje mete je dato sa:

$$\dot{\beta} = \frac{n_T}{v_T} \quad (2.3)$$

Komponente vektora brzine mete u koordinatnom sistemu vezanom za zemlju su date sa:

$$v_{T1} = -v_T \cos \beta \quad (2.4)$$

$$v_{T2} = v_T \sin \beta \quad (2.5)$$

Slično tome, brzina i ubrzanje projektila su date sa:

$$\dot{v}_{M1} = a_{M1} \quad (2.6)$$

$$\dot{v}_{M2} = a_{M2} \quad (2.7)$$

$$\dot{R}_{M1} = v_{M1} \quad (2.8)$$

$$\dot{R}_{M2} = v_{M2} \quad (2.9)$$

Ugao *Line of sight* se može izračunati kao:

$$\lambda = \arctan \frac{R_{TM2}}{R_{TM1}} \quad (2.10)$$

Pa je:

$$\dot{\lambda} = \frac{R_{TM1}v_{TM2} - R_{TM2}v_{TM1}}{r^2} \quad (2.11)$$

Ugao između vektora pozicije i vektora brzine je dat sa:

$$L = \arcsin \frac{v_T \sin(\beta + \lambda)}{v_M} \quad (2.12)$$

Također treba uzeti u obzir da je:

$$v_{cl} = -\dot{r} = v_M \cos \delta - v_T \cos \theta \quad (2.13)$$

Te da će doći do sudara samo u slučaju da vrijedi:

$$v_M \cos \delta > v_T \cos \theta \quad (2.14)$$

Upravljački zakon proporcionalne navigacije je dat sa:

$$n_C = N' v_c \dot{\lambda} \quad (2.15)$$

## 2.2 Izvođenje upravljačkog zakona

$$\sin \lambda = \frac{y}{r} \quad (2.16)$$

Za male uglove može se koristiti aproksimacija:

$$\lambda \approx \frac{y}{r} \quad (2.17)$$

, pa je:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)r(t) - y(t)\dot{r}(t)}{r^2} \quad (2.18)$$

$$\ddot{\lambda}(t) = \frac{\ddot{y}(t) - 2\dot{\lambda}(t)\dot{r}(t) - \lambda(t)\ddot{r}(t)}{r(t)} \quad (2.19)$$

Uvedimo vremenski varijantne koeficijente:

$$a_1(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{r(t)} \quad (2.20)$$

$$a_2(t) = 2\frac{\dot{r}(t)}{r(t)} \quad (2.21)$$

$$b(t) = \frac{1}{r(t)} \quad (2.22)$$

Pa se dobija diferencijalna jednačina drugog reda sa varijabilnim koeficijentima:

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} + b(t)\ddot{y}(t) \quad (2.23)$$

Uzimajući u obzir dobija se:

$$\ddot{y}(t) = -a_M(t) + a_T(t) \quad (2.24)$$

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} - b(t)a_M(t) + b(t)a_T(t) \quad (2.25)$$

Neka je  $x_1(t) = \lambda$  i  $x_2(t) = \dot{\lambda}$ . Tada je susret projektila i mete opisan sljedećim diferencijalnim jednačinama prvog reda.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.26)$$

$$\dot{x}_2 = -a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u + b(t)f \quad (2.27)$$

,gdje je uzeto  $u = a_M(t)$  i vanjska smetnja  $f = a_T(t)$ . Prvo posmatrajmo slučaj kada meta ne ubrzava, tj. kada je  $f = 0$ . Sada se problem proporcionalne navigacije može predstaviti kao:

Pronaći upravljački signal  $u$  tako da je sistem opisan jednačinama 2.26 i 2.27 asimptotski stabilan u odnosu na  $x_2$

Shodno tome, uzmimo Lyapunovu funkciju  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{2}cx_2^2 \quad (2.28)$$

Izvod po vremenu duž bilo koje trajektorije je:

$$\dot{Q} = cx_2(-a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u(t)) \quad (2.29)$$

Sada se vidi da upravljački signal

$$u = kx_2 = k\dot{\lambda} \quad (2.30)$$

Stabilizuje sistem dat sa 2.26 i 2.27 ako  $k$  zadovoljava:

$$kb(t) + a_2(t) > 0 \quad (2.31)$$

,odnosno

$$k > -2\dot{r}(t) = 2v_{cl} \quad (2.32)$$

Prema tome, uvodeći *efektivni navigacijski odnos*  $N$ , izraz 2.30 postaje:

$$u = Nv_{cl}\dot{\lambda}(t) \quad , N > 2 \quad (2.33)$$

čime je potpuno određen zakon vođenja proporcionalne navigacije. Za trodimenzionalni slučaj se bira kandidat funkcija:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^3 d_s \dot{\lambda}_s^2 \quad (2.34)$$

, gdje su  $d_s$  pozitivni koeficijenti. Analogno se dobija upravljački zakon:

$$u_s = N v_{cl} \dot{\lambda}_s, \quad N > 2 \quad (s = 1, 2, 3) \quad (2.35)$$

## 2.3 Izmjenjena proporcionalna navigacija

Za mete koje manevrišu i imaju neko normalno ubrzanje, za planarni sustre, izvod Lyapunove kandidat funkcije je:

$$\dot{Q} = c x_2 (-a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u(t) + b(t)f) \quad (2.36)$$

Odakle se zaključuje da je upravljački signal koji stabilizuje sistem:

$$u = N v_{cl} \dot{\lambda}(t) + a_T(t), \quad N > 2 \quad (2.37)$$

## 2.4 Optimalnost zakona proporcionalne navigacije

Ako je promjena LOS ugla različita od nule, tada se primjenjuje normalno ubrzanje kako bi se promjena svela na nulu. U prethodnoj sekciji se proporcionalna navigacija predstavila kao problem upravljanja gdje je normalno ubrzanje bilo upravljački signal, a brzina promjene LOS ugla bila varijabla stanja. Proporcionalna navigacija se može posmatrati kao problem optimalnog upravljanja. Treba pronaći indeks performansi koji proporcionalna navigacija minimizira. Ovo predstavlja inverzni problem problem optimalnog upravljanja. Pretpostavimo da se projektil približava meti konstantnom brzinom. Ignorišući dinamiku projektila, vrijedi:

$$\ddot{y} = -a_M, \quad y = r\lambda, \quad r(\tau) = v_{cl}\tau \quad (2.38)$$

Također pretpostavlja se da nema kašnjenja u dinamici projektila, tj. da je  $a_M = a_{M_e}$ . Definišimo sada indeks performansi:

$$J = \frac{1}{2} C y^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} a_M^2 dt \quad (2.39)$$

Prvi član predstavlja promašaj (miss distance), a drugi predstavlja energiju energiju utrošenu u toku leta. Ideja je pronaći upravljanje  $a_M$  koje minimizira kriterij performanse  $J$ . Koristeći Bellman-Lyapunov pristup dobija se da je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3\tau}{3/C + \tau^3} (y(t) + \dot{y}(t)\tau) \quad (2.40)$$

Nulti promašaj se dobija za  $C \rightarrow \infty$ , pa je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3}{\tau^2} (y(t) + \dot{y}(t)\tau) \quad (2.41)$$

Uzimajući u obzir da je:

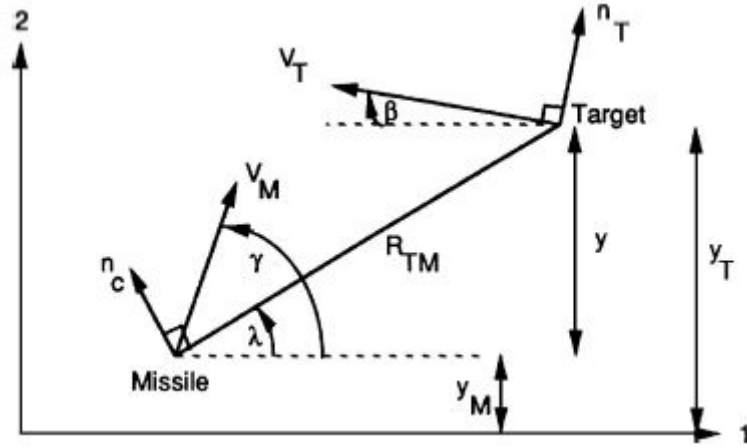
$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{y}(t)r(t) - y(t)\dot{r}(t)}{r^2} = \frac{\dot{y}(t)\tau + y(t)}{r} \quad (2.42)$$

jer je,  $r = v_{cl}\tau$ , dobija se:

$$a_M(t) = 3v_{cl}\dot{\lambda} \quad (2.43)$$

Ovo znači da pod uvedenim pretpostavkama, proporcionalna navigacija minimizira kriterij performanse  $J$  i izbor efektivnog navigacijskog odnosa  $N = 3$  garantuje da multi promašaj.

## 2.5 Linearizacija



Slika 2.1: Linearizacija jednačina proporcionalne navigacije

Linearizacija se može lahko izvršiti ako se definišu nove veličine koje su prikazane na slici 2.1. Relativno ubrzanje se može odrediti sa slike i iznosi:

$$\ddot{y} = n_T \cos \beta - n_c \cos \lambda \quad (2.44)$$

Ako su uglovi leta mali, tada vrijedi:

$$\ddot{y} = n_T - n_c \quad (2.45)$$

Slično tako vrijedi:

$$\lambda = \frac{y}{r} \quad (2.46)$$

Za čeonu slučaj vrijedi:

$$v_{cl} = v_M + v_t \quad (2.47)$$

Za potjeru vrijedi:

$$v_{cl} = v_M - v_t \quad (2.48)$$

Sada se može linearizirati i jednačina za udaljenost:

$$r(t) = v_{cl}(t_F - t) \quad (2.49)$$

gdje je  $t_F$  ukupno vrijeme leta.

Definišimo i veličinu *time to go*  $t_{go}$ :

$$t_{go} = t_F - t \quad (2.50)$$



Linearizirani promašaj se definiše kao udaljenost mete i projektila na kraju leta, ili:

$$Miss = y(t_f) \quad (2.51)$$

## 2.6 Zero effort miss

Ranije je pokazano da vrijedi:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)r(t) + y(t)v_{cl}}{r^2} \quad (2.52)$$

Kako vrijedi  $r = v_{cl}t_{go}$ , tada se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)t_{go} + y(t)}{v_{cl}t_{go}^2} \quad (2.53)$$

Definišimo sada veličinu *Zero effort miss*, koja predstavlja buduće relativno rastojanje projektila i mete:

$$ZEM = \dot{y}(t)t_{go} + y(t) \quad (2.54)$$

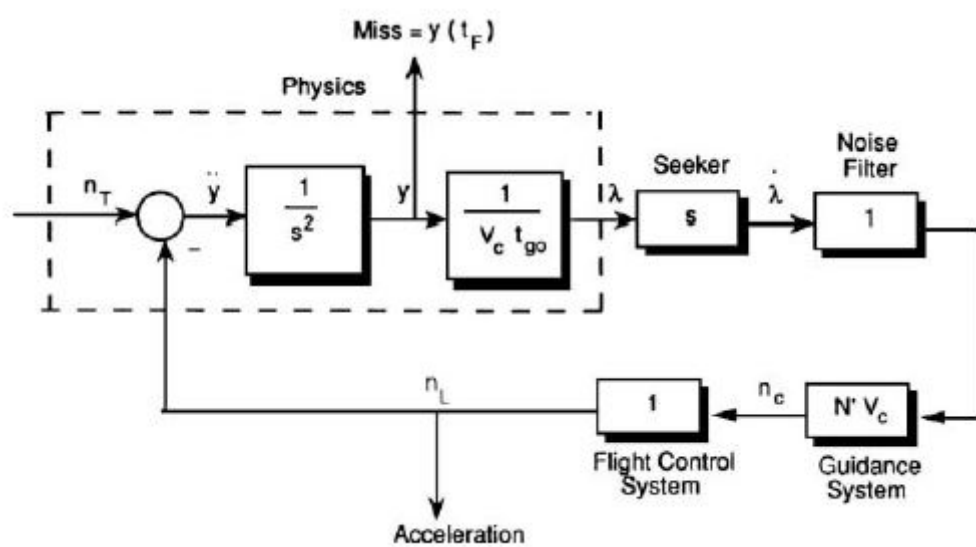
pa se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{ZEM}{v_{cl}t_{go}^2} \quad (2.55)$$

Ako se pretpostavi da će se pod uticajem ubrzanja  $a_c$  postići sudar,  $ZEM$  se može smatrati budućom tačkom susreta, pa se zakon vođenja proporcionalne navigacije može iskazati kao:

$$a_c(t) = N \frac{ZEM}{t_{go}^2} \quad (2.56)$$

Sada se vidi da je normalno ubrzanje projektila direktno proporcionalno  $ZEM$ -u i inverzno proporcionalno kvadratu preostalom vremenu leta, što znači da se generiše veće ubrzanje što je susret bliži. Pošto se  $ZEM$  posmatra kao buduća tačka susreta, koja se računa na osnovu znanja ili pretpostavki budućeg kretanja mete, PN vođenje se smatra prediktivnim.  $ZEM$  je koristan jer se može izračunati mnoštvom metoda uključujući i on-line numeričku integraciju nelinearnih diferencijalnih jednačina projektila i mete.



# Bibliografija

- Shneydor, N.A. (1998.). *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control*. Elsevier Science.
- Siouris, George M. (2004.). *Missile Guidance and Control Systems*. Springer-Verlag New York.
- Yanushevsky, R. (2007.). *Modern Missile Guidance*. Taylor & Francis.
- Zarchan, P. (2007.). *Tactical and Strategic Missile Guidance*. AIAA Tactical Missile Series v. 219. American Institute of Aeronautics i Astronautics.