# Navigacija i upravljanje projektila

**Mirza Hodžic**

Mentor: prof. dr. Naser Prljača

FAKULTET ELEKETROTEHNIKE

UNIVERZITET U TUZLI

# Sadržaj

# Popis slika

# Uvod

# Jednačine kretanja tijela

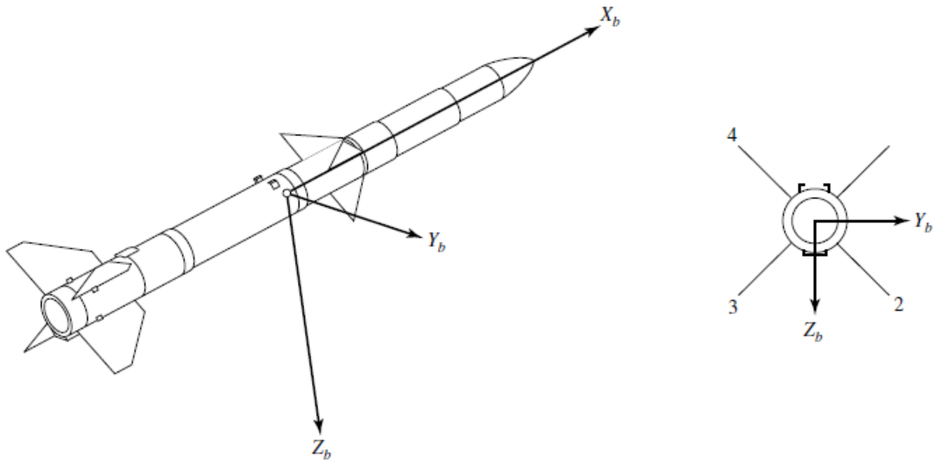
## 2.1 Koordinatni sistemi

Orijentacija osa koordinatnog sistema preko kojih su određeni vektori ili tenzori potpuno je proizvoljna. Obično se jedna od osi(e.g. $x$ osa) poravnava sa geometrijskom osom tijela. Ako se tijelo kreće stalnom brzinom tada se jedan koordinatni sistem može koristiti za sve veličine, međutim ako se tijelo rotira tada se naslućuju dva koordinatna sistema:

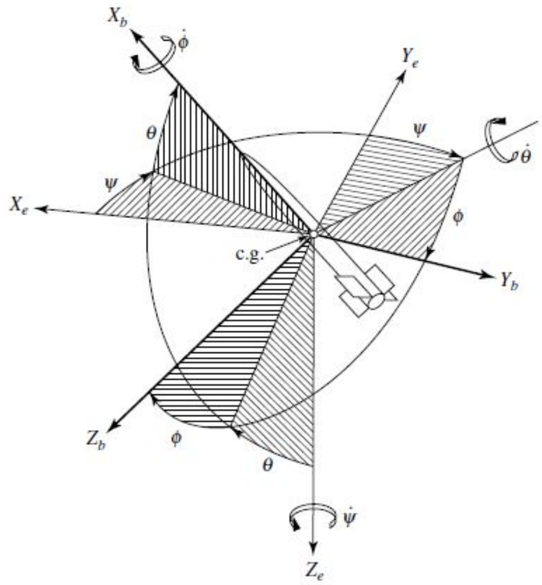
- Koordinatni sistem vezan za zemlju
- Koordinatni sistem vezan za tijelo

Koordinatni sistem vezan za zemlju je inertcijalni iako se zemlje rotira u odnosu na geomtrijsku osu. Sastoji se od tri ordinate, jedna predstavlja poziciju po sjevernoj osi, jedna po lokaloj istočnoj osi i jedna predstavlja vertikalnu poziciju. Ose koordinatnog sistema vezanog za zemlju su označene sa $X_e, Y_e, Z_e$. Drugim riječima, $X_e$ i $Y_e$ leže u ravni dok je $Z_e$ usmjeren ka centru Zemlje.
Koordinatni sistem vezan za tijelo sastoji se iz tri ordinate sa ishodištem u centru gravitacije letjelice: $x$ osa koja je usmjerena ka nosu letjelice tj. podudara se sa longitudinalnom osom, $y$ ose koja je usmjerena ka desnom krilu letjelice i $z$ ose koja dopunjava lijevo orijentisani koordinatni sistem. Da se definiše položaj letjelice u odnosu na koordinatni sistem koriste se Eulerovi uglovi$(\psi, \theta, \phi)$. Ovo znači da se bilo koja rotacija, odnosno transformacija iz sistema tijela u sistem Zemlje može postići sa tri rotacije oko osi i to prva rotacija za ugao $\phi$ oko longitudinalne, za ugao $\theta$ oko lateralne i za ugao $\psi$ oko normalne ose. Transformacija $C_e^b$ koja ostvaruje transformaciju iz koordinatnog sistema vezanog za zemlju u koordinatni sistem vezan za tijelo je data sa:

$$C_e^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$




Slika 2.1: Koordinatni sistem vezan za tijelo




Slika 2.2: Eulerovi uglovi

,odnosno:

$$C_e^b = \begin{bmatrix} cos\theta cos\psi & cos\theta sin\psi & -sin\theta \\ sin\phi sin\theta cos\psi - cos\phi sin\psi & sin\phi sin\theta sin\psi + cos\phi cos\psi & sin\phi cos\theta \\ c\phi s\theta c\psi + sin\phi sin\psi & cos\phi sin\theta sin\psi - sin\phi cos\psi & cos\phi cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Treba primjetiti da rezultantna matrica $C_e^b$ može imati singularitete, pa se domen Euloerovih uglova ograničava na sljedeći način:

$$-\pi \leq \phi < \pi \quad ili \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$
$$-\pi \leq \psi < \pi$$
$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad ili \quad 0 \leq \psi < 2\pi$$

Ovo znači da u ovom slučaju postoji beskonačno mnogo načina da se ostvari željena transformacija. Ovaj problem se može riješiti uvođenjem jediničnog kvaterniona.

## 2.2 Jednačine kretanja čvrstog tijela

Sada ćemo posmatrati tipični projektil i izvesti jednačine koje opisuju njegovo kretnaje. Pretpostaviti će se da čvrsto tijelo nema promjena u obliku pri kretanju. Translacija tijela podrazumijeva da svaka duž koja spaja bilo koje dvije tačke u tijelu bude paralelna svojoj datoj originalnoj poziciji, prema tome čvrsto tijelo se može posmatrati kao čestica čija je masa skoncentrisana u jednoj tački koja se zove *centar mase*. Dalje se pretpostavlja da se oblik tijela ne mjenja usljed djelovanja sila na tijelo. Ovom pretpostavkom se dobija da međusobni utjecaj dijelića tijela eleiminisan pa se transalcija može potpuno opisati translacijom centra mase i da se rotacija može potpuno opisati rotacijom oko centra mase. Dodatno pretpostavlja se da se ravan simetrije poklapa sa ravninom $X_b - Z_b$ kao što je to prikazano na slici 2.1. Također pretpostavlja se da je masa tijela konstantna. Važno je napomenuti da se jednačine tijela određuju u koordinatnom sistemu vezanom za tijelo. Nadalje, projektil ima šest stepeni slobode(6-DOF). Ovih šest stepeni se sastoje iz od tri translacije i tri rotacije. Translacije se sastoje od kretanja duž osi $X_b, Y_b, Z_b$ brzinom $v_m = (u, v, w)$, a rotacije se sastoje od rotacija oko ovih osi ugaonom brzinom $\omega = (P, Q, R)$. Šest stepeni slobode je prikazano na slici 2.3 Kao što je ranije rečeno dinamički model projektila se dobija Newtonovim zakonom dinamike, koji kaže da je suma svih vanjskih sila jednaka brzini promjene impulsa tijela i da je suma svih vanjskih momenata jednaka brzini promjene moomenta impulsa. Prema tome vrijede relacije:

$$\sum F = \frac{d(mv_m)}{dt}|_{Zemlja} \tag{2.3}$$

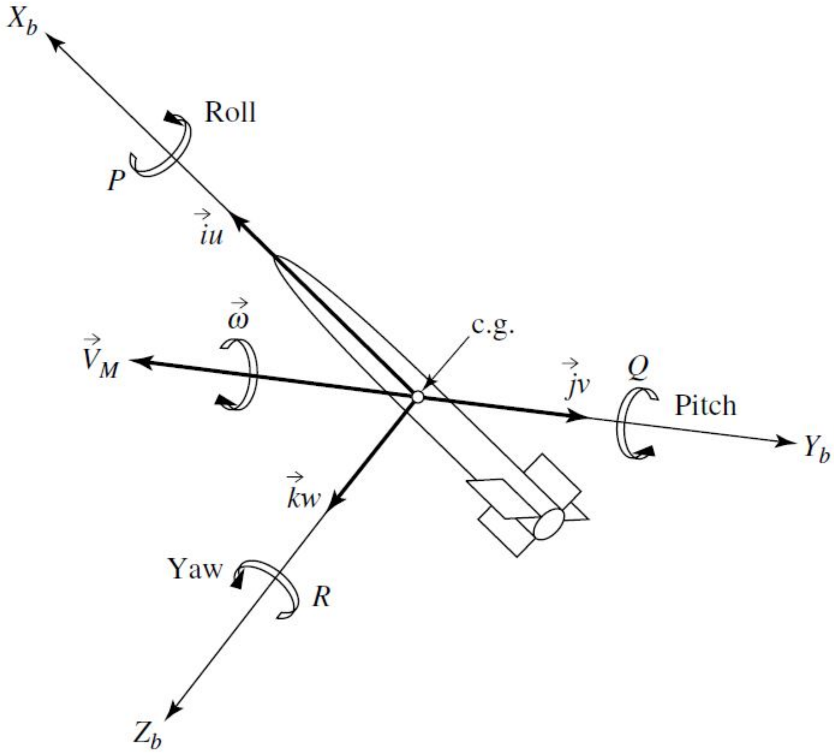
$$\sum M = \frac{dH}{dt}|_{Zemlja} \tag{2.4}$$

gdje je $H$ ugaoni momentum a $\sum M$ je suma svih vanjskih momenata koji djeluju na tijelo. Naravno, prethodne relacije predstavljaju promjene vektora u odnosu na inertcijalni prostor. Rezultantna vanjska sila koja djeluje na tijelo se može razložiti na sile koje djeluju po osama koordinatnog sistema vezanog za tijelo projektila, pa se može napisati:

$$\sum \Delta F = \sum \Delta F_x i + \sum \Delta F_y j + \sum \Delta F_z k \tag{2.5}$$

Poredeći prethodnu jednačinu sa 2.3 dobija se:

$$F_x = \frac{d(mu)}{dt}, F_y = \frac{d(mv)}{dt}, F_z = \frac{d(mw)}{dt} \tag{2.6}$$




Slika 2.3: Predstava šest stepeni slobode

Analogno, dobija se da vrijedi:

$$L = \frac{dH_x}{dt}, M = \frac{dH_y}{dt}, N = \frac{dH_z}{dt} \tag{2.7}$$

Gdje su $L, M$ i $N$ moment valjanja, moment propinjanja i moment zakretanja respektivno i $H_x, H_y$ i $H_z$ su komponente momenta impulsa duž osa tijela. Sada želimo proširiti jednačine 2.6 i 2.7 kako bi smo dobili jednačine kretanja za svaki stepen slobode. U svrhu toga koristi se formula za brzinu promjenu brzine projektila u inercijalnom sistemu, tj. u koordinatnom sistemu vezanom za zemlju i ona je data relacijom:

$$\left(\frac{dv_m}{dt}\right)_{Zemlja} = \left(\frac{dv_m}{dt}\right)_{tijelo} + \omega \times v_m \tag{2.8}$$

Prema tome vrijedi da je ukupna vanjska sila koja djeluje na tijelo data sa:

$$F = m\left(\frac{dv_m}{dt}\right)_{tijelo} + m(\omega \times v_m) \tag{2.9}$$

gdje je vektorrski proizvod linearne brzine i ugaone brzine dat sa:

$$\omega \times v_m = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ u & v & w \end{vmatrix} = (wQ - vR)i + (uR - wP)j + (vP - uQ)k \tag{2.10}$$

Koristeći se činjenicom da je $v_m = ui + vj + wk$ i uvrštavanjem prethodne jednačine u 2.9 dobija se:

$$\sum \Delta F = m(\dot{u}i + \dot{v}j + \dot{w}k) + (wQ - vR)i + (uR - wP)j + (vP - uQ)k \tag{2.11}$$

Sada, poredeći sa 2.5 dobijaju se jednačine:

$$\sum \Delta F_x = m(\dot{u} + wQ - vR) \tag{2.12}$$

$$\sum \Delta F_y = m(\dot{v} + uR - wP) \tag{2.13}$$

$$\sum \Delta F_z = m(\dot{w} + vP - uQ) \tag{2.14}$$

Prethodno dobivene tri jednačine predstavljaju *linearne jednačine kretanja*. Sada treba odrediti ove tri jednačine za rotaciono kretanje. Da bi se to postiglo potrebno je imati izraz za moment impulsa $H$ kao što imamo izraz za impuls kod translatornog kretanja. Moment impulsa oko proizvoljne tačke $O$ materijalne tačke je dat sa:

$$H = r \times mV = mr \times (\omega \times r) \tag{2.15}$$

Vektor momenta impulsa $H$ je normalan $r$ i na $v$ i $H$ je usmjeren isto kao i moment impulsa $M$. Moment impulsa cijelog tijela oko tačke $O$ je dat sa:

$$H = \sum r \times mv_m = \sum mr \times (\omega \times r) = \sum m\left[\omega(r \cdot r) - r(r \cdot \omega)\right] \tag{2.16}$$

ili u formi integrala:

$$H = \int r \times (\omega \times r) dm \tag{2.17}$$

Sada slijedi:

$$\omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{vmatrix} = (zQ - yR)i + (xR - zP)j + (yP - xQ)k \tag{2.18}$$

i konačno:

$$r \times (\omega \times r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ zQ - yR & xR - zP & yP - xQ \end{vmatrix} \tag{2.19}$$

Sada se konačno dobija izraz za moment impulsa:

$$
\begin{aligned}
H = i\int\Big[(y^2+z^2)P - xyQ - xzR\Big]\,dm + j\int\Big[(z^2+x^2)Q - yzR - xyP\Big]\,dm \\
+ k\int\Big[(x^2+y^2)R - xzP - yzQ\Big]\,dm
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Kada se uvedu oznake:

$$
\begin{aligned}
I_x = \int(y^2+z^2)dm, I_z = \int(y^2+x^2)dm, I_z = \int(x^2+z^2)dm \\
I_{xy} = \int xydm, I_{yz} = \int yzdm, I_{xz} = \int xzdm
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Tada se dobija:

$$
H = (PI_x - RI_{xz})i + QI_yj + (RI_z - PI_{xz})k \tag{2.22}
$$

Sada se vektor momenta impulsa može zapisati preko svojih komponenti:

$$
H_x = PI_x - RI_{xz} \tag{2.23}
$$

$$
H_y = QI_y \tag{2.24}
$$

$$
H_z = RI_z - PI_{xz} \tag{2.25}
$$

Sada su potrebni izvodi momenta impulsa kako bi smo dobili izraz za rezultantni moment. Pošto je izvod vektora u inercijalnom prostoru jednak zbiru izvoda pojedinačnih komponenti vektora. Prema tome vrijedi:

$$
\frac{dH_x}{dt} = I_x\frac{dP}{dt} - Ixz\frac{dR}{dt} \tag{2.26}
$$

$$
\frac{dH_y}{dt} = I_y\frac{dQ}{dt} \tag{2.27}
$$

$$
\frac{dH_z}{dt} = I_z\frac{dR}{dt} - I_{xz}\frac{dP}{dt} \tag{2.28}
$$

Relacija 2.4 se može napisati kao:

$$
\sum \Delta M = \frac{dH}{dt} + \omega \times H \tag{2.29}
$$

Ako se uvaži da je $\sum \Delta M = \sum \Delta Li + \sum \Delta Mj + \sum \Delta Nk$, korištenjem prethodno dobivenih izraza za izvod momenta impulsa dobija se:

$$
\sum \Delta L = \dot{P}I_x + QR(I_z - I_y) - (\dot{R} + PQ)I_{xz} \tag{2.30}
$$

$$\sum \Delta M = \dot{Q} I_y + PR(I_x - I_z) + (P^2 - R^2) I_{xz} \tag{2.31}$$

$$\sum \Delta N = \dot{R} I_y + PQ(I_y - I_x) - (\dot{P} - QR) I_{xz} \tag{2.32}$$

Prethodne tri jednačine zajedno sa jednačinama 2.12,2.13 i 2.14 predstavljaju jednačine projektila sa šest stepeni slobode. Ove jednačine su simultane linearne jednačine kretanja sa šest promjenjivih $u, v, w, P, Q$ i $R$ koje potpuno opsiuju kretanje čvrstog tijela. Rješenja ovih jednačina se mogu dobiti numeričkim metodama na digitalnom računaru. Analitička rješenja dovoljne tačnosti se mogu dobiti linearizacijom. $I_x, I_y$ i $I_{xz}$ su konstantne i za projektile sa krstastom konfiguracijom vrijedi $I_y = I_z$ i $I_{xz}$. Prema tome, vrijedi:

$$\sum \Delta L = \dot{P} I_x + QR(I_z - I_y) \tag{2.33}$$

$$\sum \Delta M = \dot{Q} I_y + PR(I_x - I_z) \tag{2.34}$$

$$\sum \Delta N = \dot{R} I_z + PQ(I_y - I_x) \tag{2.35}$$

Transformacijom prethodnih jednačina dobija se:

$$\frac{dP}{dt} = QR\frac{I_y - I_z}{I_x} + \frac{L}{I_x} \tag{2.36}$$

$$\frac{dQ}{dt} = PR\frac{I_z - I_x}{I_y} + \frac{M}{I_y} \tag{2.37}$$

$$\frac{dR}{dt} = PQ\frac{I_x - I_y}{I_z} + \frac{N}{I_z} \tag{2.38}$$

Sada je još potrebno odrediti ugaone brzine u zavisnosti od Eulerovih uglova. Izvođenje ovih jednačina zahtjeva pronalaženje izvoda matrice transformacije, što je poprilično zahtjevno, pa će ovdje biit samo navedene diferencijalne jednačine koje daju brzinu prmjene Eulerovih uglova:

$$\frac{d\psi}{dt} = (Q \sin\phi + R\cos\phi)/\cos\theta \tag{2.39}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q\cos\phi - R\sin\phi \tag{2.40}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = P + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)\sin\theta \tag{2.41}$$

Sada koristeći matricu transformacije $C_e^b$ se mogu dobiti komponente brzine u koordinatnom sistemu Zemlje:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_z \\ \dot{Y}_z \\ \dot{Z}_z \end{bmatrix} = C_e^b \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Sada je jasno da se integracijom jednačina 2.36,2.37 i 2.38 dobijaju ugaone brzine u sistemu tijela, a integracijom jednačina 2.39,2.40 i 2.41 se dobija orijentacija u odnosu na zemlju. Da bi se dobila pozicija tijela u odnosu na sistem Zemlje treba riješiti matričnu jednačinu 2.42. Da bi se ona mogla numerički riješiti treba naći izraze za izvode brzinu u sistemu tijela. Oni se mogu dobiti iz jednačina 2.12, 2.13 i 2.14. Nakon transformacije ovih jednačina ima se:

$$\frac{du}{dt} = vR - wQ + F_x/m \tag{2.43}$$

$$\frac{dv}{dt} = wP - uR + F_y/m \tag{2.44}$$

$$\frac{dw}{dt} = uQ - vR + F_z/m \tag{2.45}$$

Sada se nakon rješavanja prethodne tri jendačine mogu dobiti vrijednosti brzina u sistemu tijela te nakon toga može se riješiti jednačina 2.42 i tako dobiti poziciju u odnosu na sistem Zemlje. Prethodnih 12 jednačina se može predstaviti u prostoru stanja ako se uzme vekor varijabli stanja:

$$\vec{X} = [u \quad v \quad w \quad P \quad Q \quad R \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad x_z \quad y_z \quad z_z \quad ]^T$$

i vektor upralvjačkih promjenljivih:

$$\vec{u} = [\delta_v \quad \delta_P \quad \delta_e \quad ]^T$$

,gdje je $\delta_v$ ugao otklona krmila visine, $\delta_P$, ugao otklona krmila i $\delta_e$, ugao toklona elerona. Ovime se dobija nelinearna vekotrska jednačina:

$$\vec{X} = f(\vec{X}, \vec{u}) \tag{2.46}$$

# Sile koje djeluju na projektil

Ranije su izvedene jednačine(Eulerove) koje opisuju kretanje projektila. U ovim jednačinama se pojavljuju sile i momenti koji djeluju na projektil, te je nephodno i njih odrediti kako bi se postigao potpun dinamilki model projektila. Također, poznavanje prirode ovih sila je neophodno kako bi se moglo upravljati projektilom jer se upravo kontrolom ovih sila postiže upravljanje projektila. Sile koje djeluju na projektil su u letu su aerodinamičke, pogonske sile i gravitaciona sila. Ove sile se mogu razložiti po osama kooridnatnog sistema vezanog za tijelo i mogu se izraziti u inercijalnom kooridnatnom sistemu.

## 3.1 Gravitaciona sila

Prije svega važno je istaći da se gravitaciona sila ne može koristiti za upralvjanje projektilom i ona predstavlja ništa više od vanjske smetnje na sistem automatskog upralvjanja. Gravitaciona sila predstavlja vektor koji je usmjeren ka centru Zemlje i u inercijalnom kooridnatnom sistemu je dat sa:

$$G_{Zemlja} = [0\ 0\ mg]^T \tag{3.1}$$

Da bi se dobila vrijednost gravitacione sile u neinercijalnom kooridnatnom sistemu, treba se koristiti matrica transformacije:

$$G_{tijelo} = C_e^b G_{Zemlja} \tag{3.2}$$

Gravitaciona sila se u opštem slučaju mijenja u vremenu pošto se masa projektila mijenja usljed utroška goriva pri letu projektila. Varijacije u gravitacionom ubrzanju se zanemaruju pri promjeni geografske širine. Promjena mase projektila je od krucijalne važnosti za balističke projektile kod kojih 90% mase čini

## 3.2 Pogonska sila

$$P_{tijelo} = [P\ 0\ 0]^T \tag{3.3}$$

## 3.3 Aerodinamičke sile

Aerodinamička sila je posljedica djelovanja pritiska okolnog fluida na tijelo u pokretu. Aerodinamička sila se može razložiti na tri komponente koje su definisane u nastavku:

- **Uzgon**- Uzgon je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je normalna na relativno kretanje vjetra.
- **Otpor**- Otpor je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je paralelna relativnom kretanju vjetra.
- **Bočna sila**- Bočna sila je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je normalna na uzogn i otpor.

Ovdje se posmatraju projektili koji se zakreću da bi skrenuli(skid to turn) i kod takvih projektila aerodinamičke sile su date sa:

$$\text{Otpor} \quad R_x = C_x q S \tag{3.4}$$

$$\text{Uzgon} \quad R_z = C_z q S \tag{3.5}$$

$$\text{Bočna sila} \quad R_y = C_y q S \tag{3.6}$$

,gdje su $C_x, C_y$ i $C_z$ aerodinamički koeficijenti, $q$ dinamički pritisak slobodnog strujanaja u tački daleko od objekta i iznosi $q = \frac{1}{2}\rho v^2$, $S$ je referentna površina i $v$ je brzina vazduha, $\rho$ predstavlja atmosferski pritisak.
Treba napomenuti da se aerodinamičke sile i momenti izražavaju bezdimenzionalnim veličinama. To se postiže tako što se dogovorom utvrdi da se sila(ili moment) predstavlja svojim odgovarajućim aerodinamičkim koeficijentom. Prema tome, $C_x$ potpuno određuje silu otpora i slično vrijedi i za ostale koeficijente.
U opštem slučaju koeficijenti aerodinamičkih sila su funkcije varijabli stanja pa se može napisati:

$$C_x = C_x(\alpha, \beta, M, q, \delta_v, \delta_P, \delta_e) \tag{3.7}$$

,gdje je $M$ Mahov broj- odnos tekuće brzine i brzine zvuka, $\alpha$ napadni ugao i $\beta$ ugao klizanja. Slično tako vrijedi:

$$C_y = C_y(M, \beta, \delta_P) \tag{3.8}$$

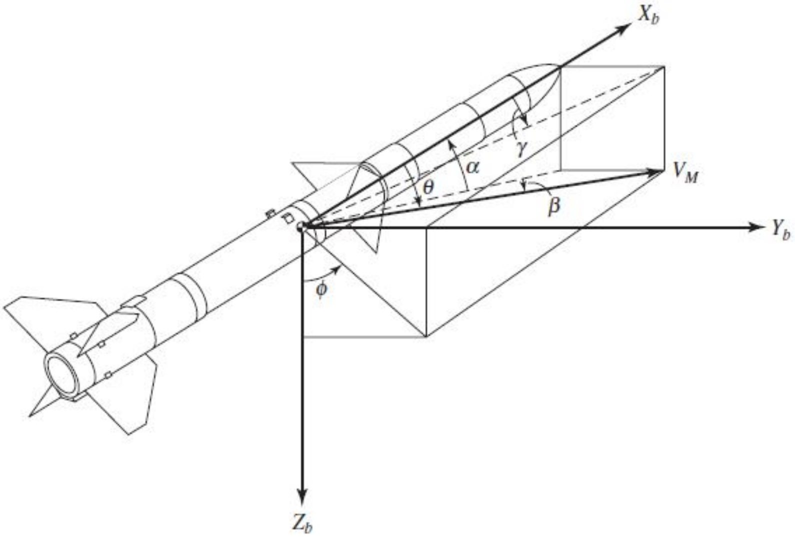
$$C_z = C_z(M, \beta, \delta_v) \tag{3.9}$$

Uglovi $\alpha, \beta$ i $\gamma$ su prikazani na slici 3.1 i definisani su sa:

$$\alpha = arctg(w/u) \tag{3.10}$$

$$\beta = \arcsin(v/v_m) \tag{3.11}$$

Dodatno, napadni ugao $\alpha$ definiše rotaciju sistema tijela oko $Y_b$ ose, a ugao klizaanja




Slika 3.1: Ugaone veze

$\beta$ definiše rotaciju sistema tijela oko $Z_b$ ose. Sada je potrebno poznavati analitičke oblike aerodinamičkih koeficijenata u zavisnosti od odgovarajućih varijabli staanja. Linearizacijom aerodinamičkih koeficijanata u okolini trenutnih vrijednosti varijabli stanja dobijaju se linearne relacije za aerodinamičke koeficijente koje su izražene u obliku sume *aerodinamičkih izvoda* i varijabli stanja. Razvojem u Taylorov red i odbacivanjem viših članova dobija se aproksimacija aerodinamičkih koeficijenata:

$$C_x = C_{x_0} + C_{x_\alpha}|\alpha| + C_{x^2_\alpha}\alpha^2 + C_{x_\beta}|\beta| + C_{x^2_\beta}\beta^2 + C_{x_\alpha\beta}|\alpha||\beta| \tag{3.12}$$

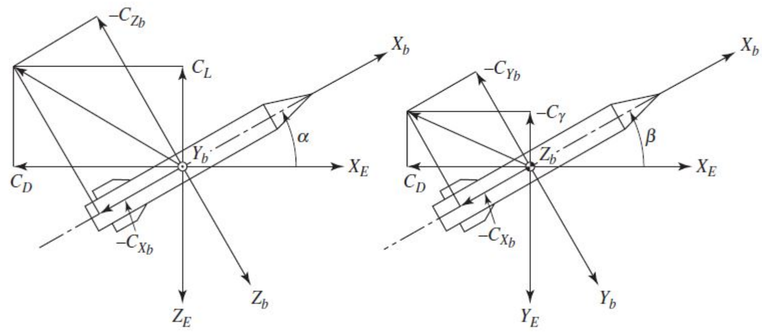
$$C_z = C_{z_0} + C_z^\alpha\alpha + C_z^{\dot\alpha}\dot\alpha + C_z^q q + C_z^{\delta_v}\delta_v \tag{3.13}$$

$$C_y = C_{y_0} + C_y^\alpha\alpha + C_y^{\dot\alpha}\dot\alpha + C_y^q q + C_y^{\delta_P}\delta_P \tag{3.14}$$

U datom slučaju aerodinamički koeficijent otpora imaju jednostavniji oblik

$$C_x = C_{x_0} + C_{x_1}\alpha \tag{3.15}$$

,gdje je $C_{x_0} = \frac{\partial c_x}{\partial \alpha}|_{\alpha=0}$, $C_{x_1} = \frac{\partial c_x}{\partial \alpha}$ i slično tako za ostale izvode.
Također je važno istaći da su ovi koeficijenti(tj. sile) izražene u *kooridnatnom sistemu vjetra* relativnom toku vazduha. Koordinatni sistem vazduha je prikazan na slici 3.2. Čest se u literaturi ovi koeficijenti definišu u *kooridnatnom sistemu brzine tijela*, kod kojeg se $X$ osa podudara sa brzinom letjelice, ali zbog pretpostavke da je brzina vjetra zanemariva u inercijalnom kooridnatnom sistemu razlika u ovim koordinatnim sistemima ne igra ulogu. Pošto su jednačinama kretanja tijela sile izražene sistemu tijela, potrebno je imati transformaciju koja transformiše aerodinamičke sile




Slika 3.2: Veza između sistema tijela i sistema vjetra

u sistem tijela i njihova veza je data sa:

$$\begin{bmatrix} C_{x_b} \\ C_{y_b} \\ C_{z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_x \\ C_y \\ -C_z \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Sada se vraćanjem u 3.4,3.5 i 3.6 mogu odrediti aerodinamičke sile koje djeluju na projektil.

## 3.4 Aerodinamički momenti

Momenti se mogu podjeliti na momente koji su posljedica aerodinamičkog tereta i pogonske sile koja ne djeulje kroz centar gravitacije. Moment koji je posljedica rezultantne sile koja ne djeluje na centar kooridnatnog sistema tijela se može podjeliti na tri komponente, i to:

- **Moment valjanja** je moment oko lateralne ose($Y_b$) projektila i generisan je od uzgonom i otporom koje djeluju na tijelo. Pozitivan moment je u smjero gore od nosa letjelice

- **Moment propinjanja** je moment oko longitudinalne ose($X_b$) projektila. Posljedica je uzogna koji je uzrokovan nekom vrstom elerona. Pozitivan moment propinjanja uzrokuje kretanje nadole desnog krila.

- **Moment zakretanja** je moment oko vetikalne ose projektila($Z_b$). Pozitivan moment zakretanja ima za posljedicu da se nos aviona zakrene u desno.

Kvantitativno, momenti su dati sa:

$$\text{Moment valjanja} \quad L = C_l q S b \tag{3.17}$$

$$\text{Moment propinjanja} \quad M = C_m q S c \tag{3.18}$$

$$\text{Moment zakretanja} \quad N = C_n q S b \tag{3.19}$$

,gdje je $b$ raspon krila, $c$ je razmak između početne i krajnje ivice krila mjerene u smjeru paralelnom toku vazduha, $S$ je površina platforme krila. Isto kao i kod slučaja sa silama, koeficijenti momenata također zavise od više promjenjivljih i potrebno ih je linearizirati.
Linearizirani koeficijenti momenta su:

$$C_M = C_M^{\alpha}\alpha + C_M^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + C_M^{Q}Q + C_M^{\delta_v}\delta_v \tag{3.20}$$

,koeficijent momenta skretanja je:

$$C_N = C_N^{\beta}\beta + C_N^{\dot{\beta}}\dot{\beta} + C_N^{R}R + C_N^{\delta_P}\delta_P \tag{3.21}$$

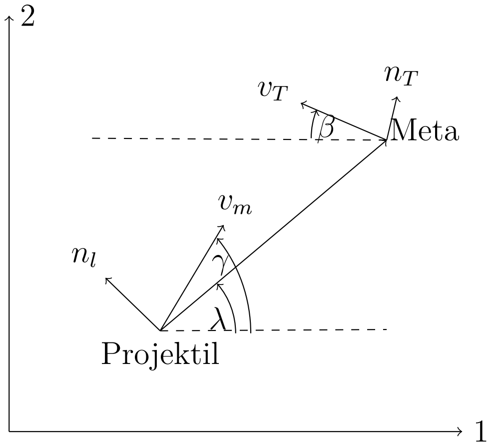
Pri čemu je za krstastu konfiguraciju $C_M^{\alpha} = C_N^{\beta}$, $C_N^{\dot{\beta}} = C_M^{\dot{\alpha}}$, $C_M^{Q} = C_N^{R}$, $C_M^{\delta_v} = C_N^{\delta_P}$.
Koeficijent momenta valjanja se linearizuje tako da se dobije:

$$C_L = C_L^{P}P + C_l^{Q}Q + C_L^{R}R + C_L^{\alpha}\alpha + C_L^{\beta}\beta + C_L^{\delta_e}\delta_e + C_L^{\delta_v}\delta_v + C_L^{\delta_P}\delta_P \tag{3.22}$$

# Dinamički model

# Uvod u proporcionalnu navigaciju

## 5.1 Opis planarnog susreta




Slika 5.1: Prikaz planarnog susreta

Udaljenost između mete i projektila u svakom trenutku je data sa:

$$r(t) = r_T(t) - r_M(t) \tag{5.1}$$

Brzina približavanja projektila meti je data sa:

$$v_{cl} = -\dot{r}(t) \tag{5.2}$$

Ugaono ubrzanje mete je dato sa:

$$\dot{\beta} = \frac{n_T}{v_T} \tag{5.3}$$

Kompnente vektora brzine mete u koordinatnom sistemu vezanom za zemlju su date sa:

$$v_{T1} = -v_T \cos\beta \tag{5.4}$$

$$v_{T2} = v_T \sin\beta \tag{5.5}$$

Slično tome, brzina i ubrzanje projektila su date sa:

$$\dot{v}_{M1} = a_{M1} \tag{5.6}$$

$$\dot{v}_{M2} = a_{M2} \tag{5.7}$$

$$\dot{R}_{M1} = v_{M1} \tag{5.8}$$

$$\dot{R}_{M2} = v_{M2} \tag{5.9}$$

Ugao *Line of sight* se može izračunati kao:

$$\lambda = \arctan \frac{R_{TM2}}{R_{TM1}} \tag{5.10}$$

Pa je:

$$\dot{\lambda} = \frac{R_{TM1} v_{TM2} - R_{TM2} v_{TM1}}{r^2} \tag{5.11}$$

Ugao između vektora pozicije i vektora brzine je dat sa:

$$L = \arcsin \frac{v_T \sin{(\beta + \lambda)}}{v_M} \tag{5.12}$$

Također treba uzeti u obzir da je:

$$v_{cl} = -\dot{r} = v_M \cos\delta - v_T \cos\theta \tag{5.13}$$

Te da će doći do sudara samo u slučaju da vrijedi:

$$v_M \cos\delta > v_T \cos\theta \tag{5.14}$$

Upravljački zakon proporcionalne navigacije je dat sa:

$$n_C = N' v_c \dot{\lambda} \tag{5.15}$$

## 5.2 Izvođenje upravljačkog zakona

$$\sin\lambda = \frac{y}{r} \tag{5.16}$$

Za male uglove može se koristiti aproksimacija:

$$\lambda \approx \frac{y}{r} \tag{5.17}$$

, pa je:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t) r(t) - y(t)\dot{r}(t)}{r^2} \tag{5.18}$$

$$\ddot{\lambda}(t) = \frac{\ddot{y}(t) - 2\dot{\lambda}(t)\dot{r}(t) - \lambda(t)\ddot{r}(t)}{r(t)} \tag{5.19}$$

Uvedimo vremenski varijantne koeficijente:

$$a_1(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{r(t)} \tag{5.20}$$

$$a_2(t) = 2\frac{\dot{r}(t)}{r(t)} \tag{5.21}$$

$$b(t) = \frac{1}{r(t)} \tag{5.22}$$

Pa se dobija diferencijalna jednačina drugog reda sa varijabilnim koeficijenitma:

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} + b(t)\ddot{y}(t) \tag{5.23}$$

Uzimajući u obzir dobija se:

$$\ddot{y}(t) = -a_M(t) + a_T(t) \tag{5.24}$$

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} - b(t)a_M(t) + b(t)a_T(t) \tag{5.25}$$

Neka je $x_1(t) = \lambda$ i $x_2(t) = \dot{\lambda}$. Tada je susret projektila i mete opisan sljdećim diferencijalnim jednačinama prvog reda.

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{5.26}$$

$$\dot{x}_2 = -a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u + b(t)f \tag{5.27}$$

,gdje je uzeto $u = a_M(t)$ i vanjska smetnja $f = a_T(t)$. Prvo posmatrajmo slučaj kada meta ne ubrzava, tj. kada je $f = 0$. Sada se problem proporcionalne navigacije može predstaviti kao:

Pronaći upravljački signal $u$ tako da je sistem opisan jednačinama 5.26 i 5.27 asimptotski stabilan u odnosu na $x_2$

Shodno tome, uzmimo Lyapunovu funkciju $Q$:

$$Q = \frac{1}{2}cx_2^2 \tag{5.28}$$

Izvod po vremenu duž bilo koje trajektorije je:

$$\dot{Q} = cx_2(-a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u(t)) \tag{5.29}$$

Sada se vidi da upravljački signal

$$u = kx_2 = k\dot{\lambda} \tag{5.30}$$

Stabilizuje sistem dat sa 5.26 i 5.27 ako $k$ zadovoljava:

$$kb(t) + a_2(t) > 0 \tag{5.31}$$

,odnosno

$$k > -2\dot{r}(t) = 2v_{cl} \tag{5.32}$$

Prema tome, uvodeći *efektivni navigacijski odnos* $N$, izraz 5.30 postaje:

$$u = Nv_{cl}\dot{\lambda}(t) \quad , N > 2 \tag{5.33}$$

čime je potpuno određen zakon vođenja proporcionalne navigacije. Za trodimenzionalni slučaj se bira kandidat funkcija:

$$Q = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} d_s\dot{\lambda}_s^2 \tag{5.34}$$

, gdje su $d_s$ pozitivni koeficijenti. Analogno se dobija upravljački zakon:

$$u_s = Nv_{cl}\dot{\lambda}_s \quad , N > 2 \ (s = 1, 2, 3) \tag{5.35}$$

## 5.3 Izmjenjena proporcionalna navigacija

Za mete koje manevrišu i imaju neko normalno ubrzanje, za planarni sustre, izvod Lyapunove kandidat funkcije je:

$$\dot{Q} = cx_2(-a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u(t) + b(t)f) \tag{5.36}$$

Odakle se zaključuje da je upravljaki signal koji stabilizuje sistem:

$$u = Nv_{cl}\dot{\lambda}(t) + \frac{N}{2}a_T(t) \quad , N > 2 \tag{5.37}$$

## 5.4 Optimalnost zakona proporcionalne navigacije

Ako je promjena LOS ugla različita od nule, tada se primjenjuje normalno ubrzanje kako bi se promjena svela na nulu. U prethodnoj sekciji se proporcionalna navigacija predstavila kao problem upravljanja gdje je normalno ubrzanje bilo upravljački signal, a brzina promjene LOS ugla bila varijabla stanja. Proporcionalna navigacija se može posmatrati kao problem optimalnog upravljanja. Treba pronaći indeks performansi koji proporcionalna navigacija minimizira. Ovo predstavlja inverzni problem problem optimalnog upravljanja. Pretpostavimo da se projektil približava meti konstantnom brzinom. Ignorišuči dinamiku projektila, vrijedi:

$$\ddot{y} = -a_M, \; y = r\lambda, \; r(\tau) = v_{cl}\tau \tag{5.38}$$

Također pretpostavlja se da nema kašnjenja u dinamici projektila, tj. da je $a_M = a_{M_c}$. Definišimo sada ineks performansi:

$$J = \frac{1}{2}Cy^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} a_M^2 dt \tag{5.39}$$

Prvi član predstavlja promašaj(miss distance), a drugi predstavlja energiju energiju utrošenu u toku leta. Ideja je pronaći upravljanje $a_M$ koje minimizira kriterij performanse $J$. Koriteći Bellman-Lyapunov pristup dobija se da je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3\tau}{3/C + \tau^3}(y(t) + \dot{y}(t)\tau) \tag{5.40}$$

Nulti promašaj se dobija za $C \to \infty$, pa je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3}{\tau^2}(y(t) + \dot{y}(t)\tau) \tag{5.41}$$

Uzimajući u obzir da je:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{y}(t)r(t) - y(t)\dot{t}(t)}{r^2} = \frac{\dot{y}(t)\tau + y(t)}{r} \tag{5.42}$$

jer je, $r = v_{cl}\tau$, dobija se:

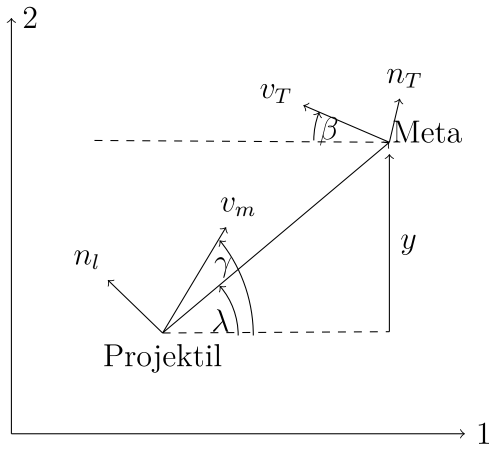
$$a_M(t) = 3v_{cl}\dot{\lambda} \tag{5.43}$$

Ovo znači da pod uvedenim pretpostavkama, proporcionalna navigacija minimizira kriterij performanse $J$ i izbor efektivnog navigacijskog odnosa $N = 3$ garantuje da nulti promašaj.

## 5.5 Linearizacija

Linearizacija se može lahko izvršiti ako se definišu nove veličine koje su prikazane na slici 5.2. Relativno ubrzanje se može odrediti sa slike i iznosi:

$$\ddot{y} = n_T \cos\beta - n_c \cos\lambda \tag{5.44}$$




Slika 5.2: Linearizacija jednačina proporcionalne navigacije

Ako su uglovi leta mali, tada vrijedi:

$$\ddot{y} = n_T - n_c \tag{5.45}$$

Slično tako vrijedi:

$$\lambda = \frac{y}{r} \tag{5.46}$$

Za čeoni slučaj vrijedi:

$$v_{cl} = v_M + v_t \tag{5.47}$$

Za potjeru vrijedi:

$$v_{cl} = v_M - v_t \tag{5.48}$$

Sada se može linearizirati i jednačina za udaljenost:

$$r(t) = v_{cl}(t_F - t) \tag{5.49}$$

gdje je $t_F$ ukupno vrijeme leta.
Definišimo i veličinu *time to go* $t_{go}$:

$$t_{go} = t_f - t \tag{5.50}$$

Linearizirani promašaj se definisše kao udaljenost mete i projektila na kraju leta, ili:

$$Miss = y(t_f) \tag{5.51}$$

## 5.6 Petlja navođenja i zero effort miss

Ranije je pokazano da vrijedi:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)r(t) + y(t)v_{cl}}{r^2} \tag{5.52}$$

Kako vrijedi $r = v_{cl}t_{go}$, tada se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)t_{go} + y(t)}{v_{cl}t_{go}^2} \tag{5.53}$$

Definišimo sada veličinu *Zero effort miss*, koja predstavlja buduće relativno rastojanje projektila i mete:

$$ZEM = \dot{y}(t)t_{go} + y(t) \tag{5.54}$$

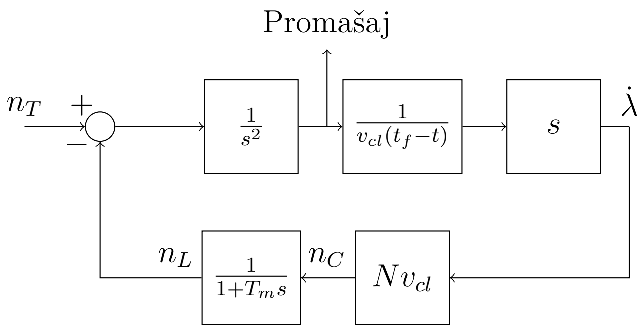
pa se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{ZEM}{v_{cl}t_{go}^2} \tag{5.55}$$

Ako se pretpstavi da će se pod uticajem ubrzanja $a_c$ postići sudar, $ZEM$ se može smatrati budućom tačkom susreta, pa se zakon vođenja proprcionalne navigacije može iskazati kao:

$$a_c(t) = N\frac{ZEM}{t_{go}^2} \tag{5.56}$$

Sada se vidi da je normalno ubrzanje projektila direktno proprorcionalnu $ZEM$-u i inverzno proporcionalno kvadratu preostalom vremenu leta, što znači da se generiše veće ubrzanje što je susret bliži. Pošto se $ZEM$ posmatra kao buduća tačka susreta, koja se računa na osnovu znanja ili pretpostavki budučeg kretanja mete, PN vođenje se smatra prediktivnim. $ZEM$ je koristan jer se može izračunati mnoštvom metoda uključujući i on-line numeričku integraciju nelinearnih diferencijalnih jednačina projektila i mete. Pretohdno izvedene linaerizovane jednačine proporcionalne navigacije se mogu prikazati blok dijagramom kao na slici 5.3. Ulaz sistema je ubrzanje mete, a

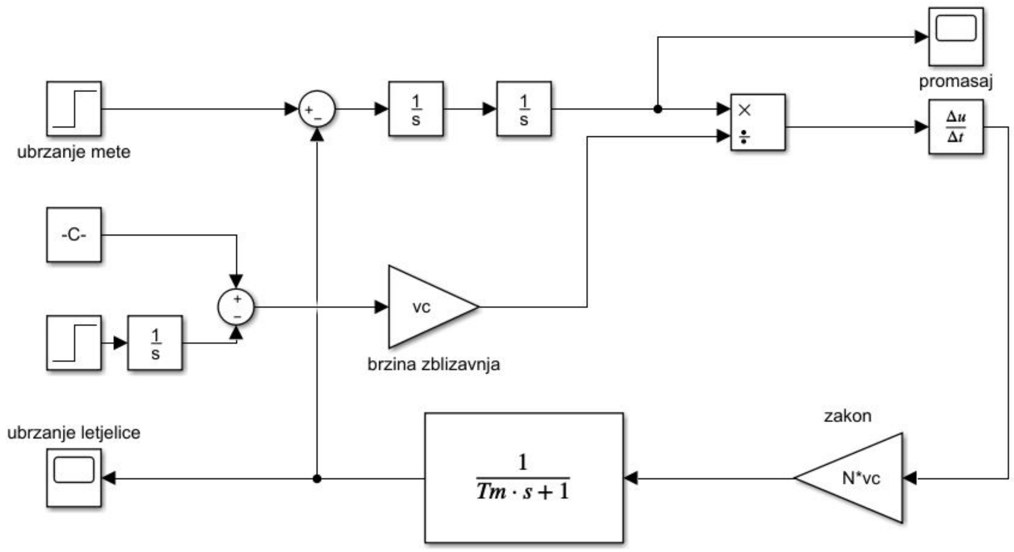



Slika 5.3: Petlja navođenja

u povratnoj sprezi se nalazi upralvjački zakon. Pretpostavlja se da je model trekera idealni diferencijator i sistem za navođenje ne uvodi nikakvo kašnjenje. U stvarnosti, sistem za navođenje se modelira prenosnom funkcijom prvog reda, tj:

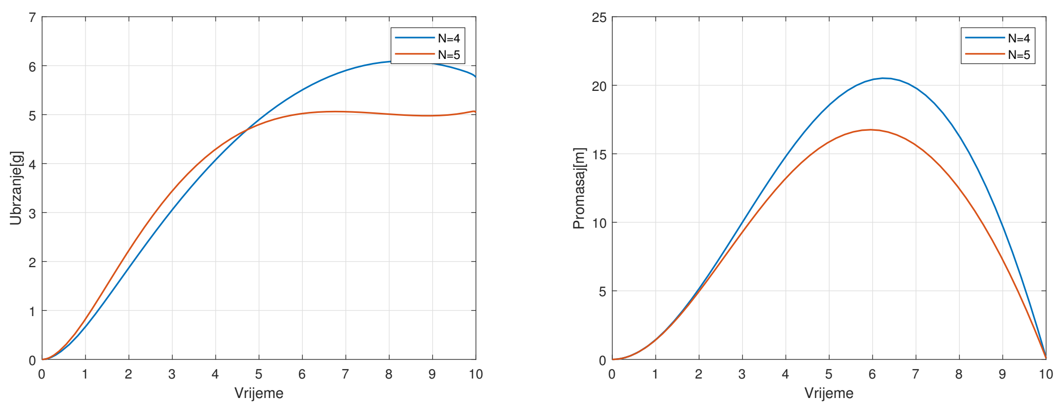
$$\frac{n_L}{n_c} = \frac{1}{1 + sT} \tag{5.57}$$

,gdje je $n_L$ ostvareno ubrzanje projektila, a $n_c$ zahtjevano ubrzanje projektila. Ko-



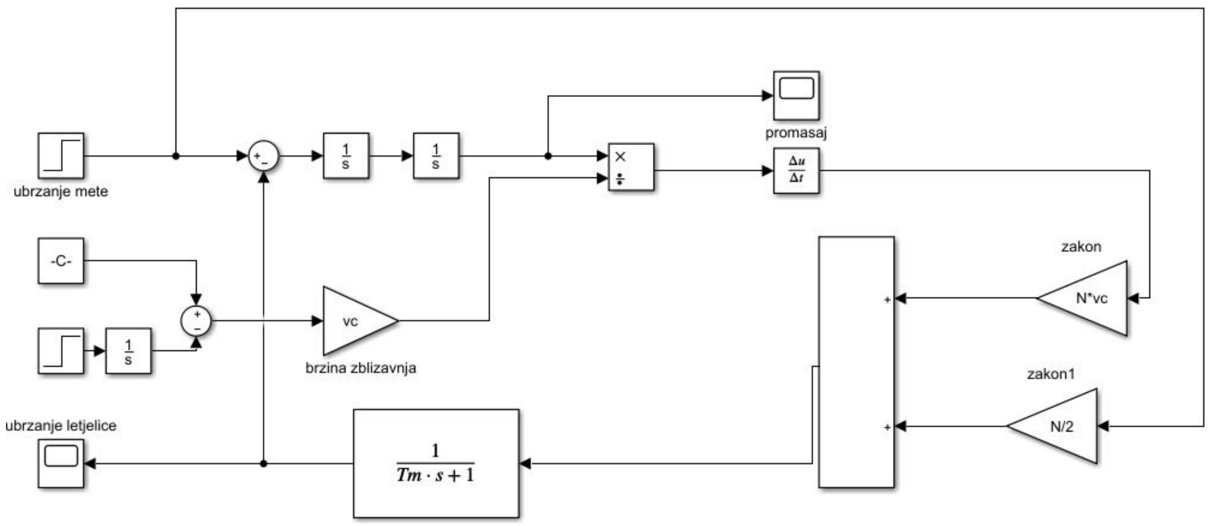

Slika 5.4: Proporcionalana navigacija u Simulinku

risteći Simulink dijagram sa slike 5.4 izvršene su simulacije za $N = 4$ i $N = 5$ pri ubrzanju mete od $3g$. Ubrzanja projektila su prikazana na grafu 5.5. Vidi se

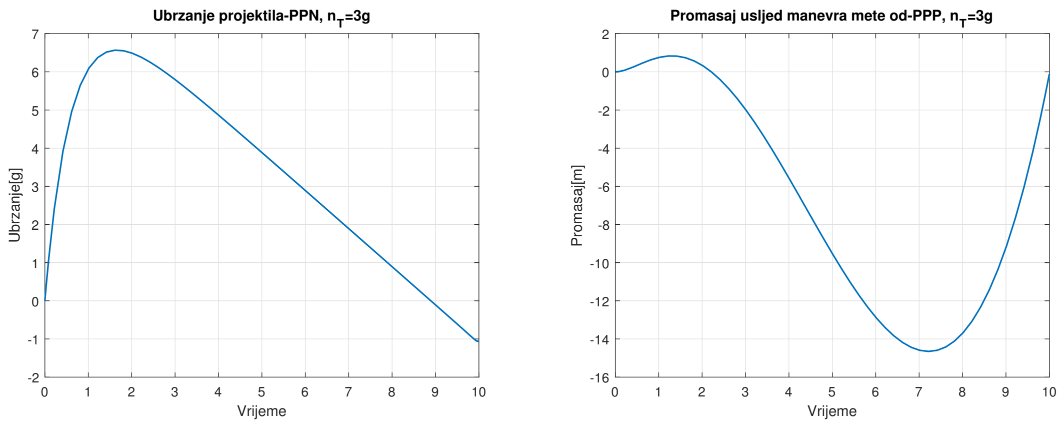



Slika 5.5: Ubrzanja projektila i promašaj za $N = 4$ i $N = 5$

da veći efektivni navigacijski odnos zahtjeva manje ubrzanje projektila pa su time smanjeni i zahtjevi za performanasam projektila, međutim veći efektivni navigacijski odnos daje manji promašaj što se vidi na grafiku za promašaj na slici 5.5. U oba slučaja ostvaren je sudar unutar deset sekundi. U nastavku je na slici 5.6 prikazan simulink model izmjenjene proporcionalne navigacije. Ubrzanje projektila




Slika 5.6: Simulink model izmjenjene proporcionalne navigacije




Slika 5.7: Ubrzanje projektila i promašaj vođen promjenjenom proporcionalnom naivgacijom, $N = 3$

i promašaj su prikazana na graficima na slici 5.7. Sada se konačno vidi da i kod proporcionalne navigacije i kod promjenjene proporcionalne navigacije se grantuje sudar unutar vrmena leta ako se izabere $N = 3$. Dalje se vidi da ubrzanje projektila kod promjenjene proporcionalne navigacije počinje od nula za razliku od čiste proporcionalne navigacije. Kod promjenjene proporcionalne navigacije promašaj može postati negativan što iziskuje promjenu smjera normalnog ubrzanja projektila.

## 5.7 Adjungovani sistem i petlja navođenja

Direktna simulacija lineariziranih jednačina proporcionalne navigacije se uvijek može koristiti za generisanje upravljačkog signala(tj. normalnog ubrzanja) projektila ali je tehnika nazvana *adjungovana tehnika* historijski bila glavni računarski alat za dizajn i analizu vođenih projektila. Adjungovana tehnika je zasnovana na impulsnom odzivu sistema i koristi se za analizu LTI sistema kao što je petlja navođenja

projektila. Koristeći ovu tehniku mogu se dobiti tačne vrijednosti bilo koje veličine u datom trenutku.
Poznato je da je odziv sistema na prooizvoljni ulaz potpuno određen impulsnim odzivom sistema, pa tj. vrijedi da je odziv linearnog sistema dat sa:

$$y(t) = \int_{o}^{t} u(\tau)h(t,\tau)d\tau \tag{5.58}$$

Fizikalno, impuslni odziv $h(t-\tau)$ predstavlja odziv sistema na impulsnu pobudu koja se primjeni na sistem u trenutku $\tau$. Prema tome određivanje odziva sistema zahtjeva analitičku formu impulsnog odziva. Svaki linearni sistem ima i svoj adjungovani sistem i veza između impulsnog odziva linearnog sistema i njegovog adjungovanog sistema je data sa:

$$h^*(t_f-\tau, t_f-t) = h(t,\tau) \tag{5.59}$$

Ako se uzme da je ulaz sistema Heavysideov impuls, tada je odziv sistema dat sa:

$$y(t) = a\int_{0}^{t} h^*(t_f-\tau, t_f-t)d\tau \tag{5.60}$$

,nakon uvođenja smjene $x = t_f - \tau$, dobija se:

$$y(t) = a\int_{t_f-t}^{t_f} h^*(x, t_f-t)dx \tag{5.61}$$

Pošto je veličina od interesa promašaj na kraju leta uzima se $t_f = t$, pa prethodna relacija postaje:

$$y(t_f) = a\int_{0}^{t_f} h^*(x, 0)dx \tag{5.62}$$

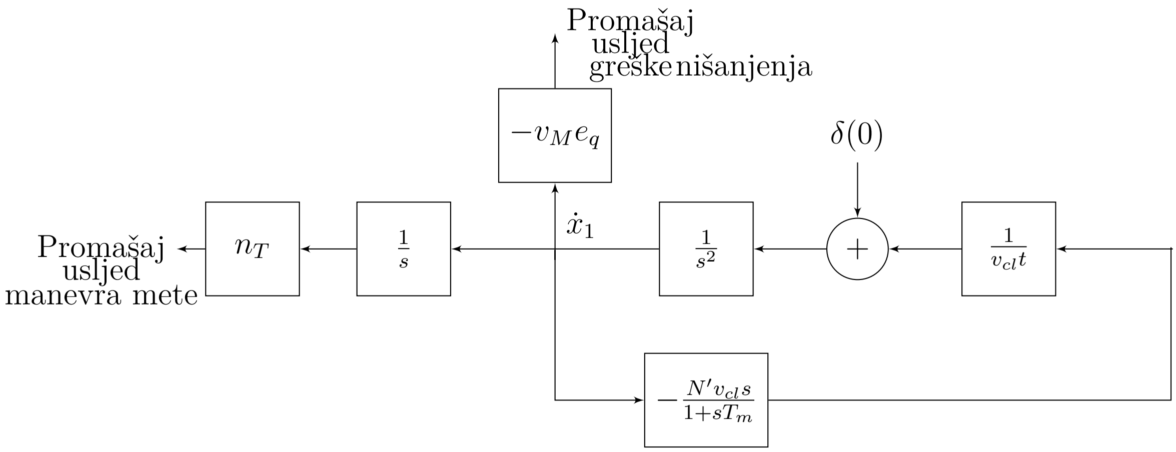
Vidi se da se integracija vrši po posmatranom vremenu i da ne zavisi od trenutka primjene impulsa na adjunogvani sistem. Ovo znači da se izlaz u trenutku $t_f$ može dobiti primjenjujući impuls u početnom trenutku, te zatim integrišući ulaz. Konstrukcija adjungovanog modela se vrši prema naredna tri koraka:

1. Pretvoriti sve ulaze sistema u impulse

2. Zamjeniti $t$ sa $t_f - t$ i obratno na mjestima gdje se vrijeme pojavljuje kao argument

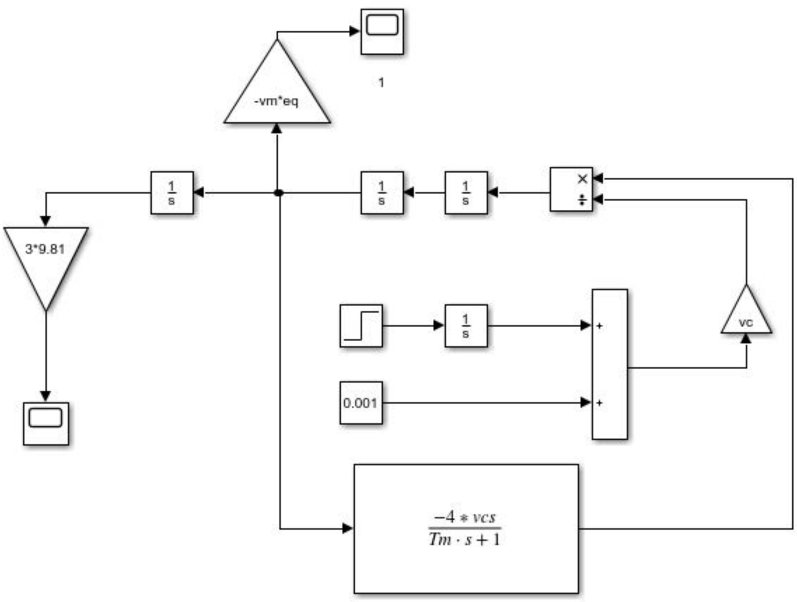
3. Promjeniti smjer toka svih signala, mjenjajući sume sa čvorovima i obratno

Koristeći navedena pravila dobija se adjungovana petlja navođenja prikazana na slici 5.8, s tim da je kao smetnja u sistem dodata još i početna greška nišanjenja data sa $v_M e_q$ ,za $v_M = 610\frac{m}{s}$ i $e_q = 20\,\text{deg}$. Sada je moguće dobiti promašaj usljed manevra mete i promašaj usljed početne greške nišanjenja sve u jednoj simulaciji! Jedinični impuls se može predstaviti kao početni uslov kod prvog integratora. Na



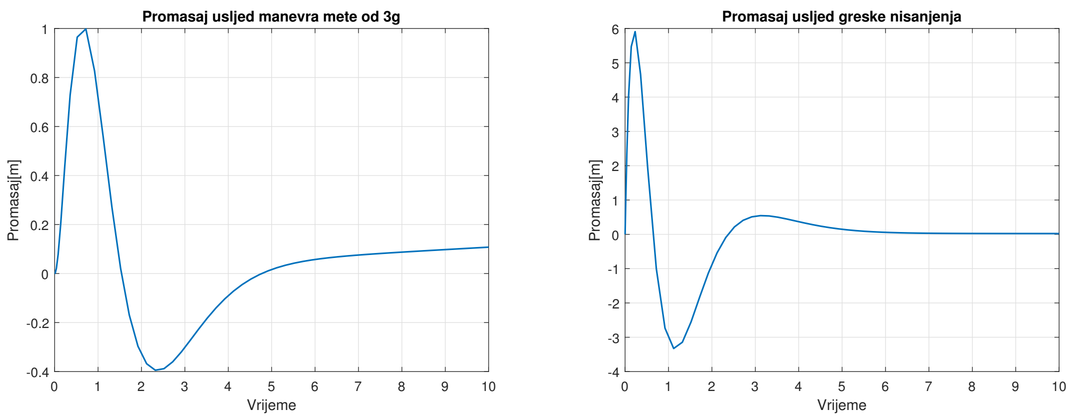

Slika 5.8: Adjungovana petlja navođenja

slici 5.9 je predstavljen Simulink dijagram adjungovanog sistema. Simulacija za




Slika 5.9: Simulink dijagram adjungovanog sistema

date vrijednosti daje promašaj usljed početne greške nišanjenja i promašaj usljed konstantnog manevra mete i oni su prikazani na slici 5.10.




Slika 5.10: Odzivi adjungovanog sistema

## 5.8 Adjungovani stohastički sistemi

Pored mnoštva informacija koje adjungovani sistem daje pri analizi determinističkih sistema, adjugnovana tehnika je dosta korisna pri analizi stohastičkih sistema što je naročito korisno pri analizi petlje navođenja jer su manevri mete u stvarnosti stohastički. Prije nego se prikaže upotreba adjungovane tehnike na petlji navođenja sa stohastičkim ulazima, potrebno je se prisjetiti nekoliko važnih definicija.
Očekivana vrijednost slučajne promjenljive $x$ čija funkcija gustoće vjerovatnoće $p(x)$ je definisana sa:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \tag{5.63}$$

Standardna devijacija je data sa:

$$\sigma = \sqrt{E(x^2) - E^2(x)} \tag{5.64}$$

Autokorelaciona funkcija je data sa¿

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \tag{5.65}$$

Autokorelaciona funkcija predstavlja sličnost dvaju identičnih funkcija pri čemu su one smaknute za neki vremenski interval. Fourieova transformacija autokorelacione funkcije se zove *spektralna gustoća snage* i data je sa:

$$\Phi_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{5.66}$$

Kod bijelog šuma spektralna gustoća snage je konstanta tj.

$$\Phi_{xx} = \phi_0 \tag{5.67}$$

Autokorelaciona funkcija bijelog šuma je delta impuls tj.

$$\phi_{xx} = \Phi_0 \delta(t) \tag{5.68}$$

Ovo znači da je bijeli šum samo u jednoj tački identičan samom sebi. Kod stohastičkih sistema, izlaz je opisan očekivanom vrijednosšću kvadrata izlaza. Prema tome, ako su ulazi tipa bijelog šuma tada vrijedi:

$$y^2(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau_1)h(t,\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{t} x(\tau_2)h(t,\tau_2)d\tau_2 \tag{5.69}$$

Ako je $x(t)$ slučajna promjenljiva, može se naći i očekvana vrijednost kvadrata izlaza:

$$E[y^2(t)] = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} h(t,\tau_1)h(t,\tau_2)E[x(\tau_1)x(\tau_2)]d\tau_1 d\tau_2 \tag{5.70}$$

Ako je ulaz $x(t)$ tipa bijelog šuma spektralne gustoće snage $\Phi$, tada se prethodni dovjni integral može pojednostaviti zbog impuslne prirode autokorelacione funkcije bijelog šuma, pa vrijedi:

$$E[y^2(t)] = \Phi \int_{-\infty}^{t} h^2(t,\tau)d\tau \tag{5.71}$$

Sada se prisjetimo da je impulsni odziv adjungovanog sistema $h^*(t_f - \tau, t_f - t) = h(t,\tau)$ i nakon uvođenja smjene $x = t_f - \tau$, dobija se:

$$E[y^2(t)] = \Phi \int_{t_f - t}^{t_f} [h^*(x, t_f - t)]^2 dx \tag{5.72}$$

Pošto je u interesu promašaj na kraju leta, to je:

$$E[y^2(t_f)] = \Phi \int_{0}^{t_f} [h^*(x,0)]^2 dx \tag{5.73}$$

Sada se vidi da se očekivana vrijednost kvadrata izlaza može dobiti tako što se kvadrira i integrira izlaz stohstičkog sistema i to sve u toku samo jedne simulacije. Prednost adjungovane metode postaje veća kada se uzme u obzir da na stohastički sistem može djelovati više slučajnih ulaza. Kod adjungovane metode, ulazi postaju izlazi pa se superpozicijom pri samo jednoj simulaciji može dobiti tačna statisička analiza stohastičkog sistema i analiza utjecaja svakog ulaza(tipa bijelog šuma) na performanse sistema.

Sada pretpostavimo da meta izvodi manevar konstantnog normalnog ubrazanja i da ga počinje izvoditi u trenutku $T$ koji je dat uniformnom raspodjelom i to tako da vrijedi:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_f}, & za 0 \leq t \leq t_f \\ 0 & zat \geq T \end{cases} \tag{5.74}$$

Prema tome ulaz u petlju vođenja je dat sa:

$$x(t) = n_T u(t - T) \tag{5.75}$$

Ovo znači da je vjerovatnoća pojave manevra jednako vjerovatno u toku cijelog leta. Prema tome, autokorelaciona funkcija ulaza u petlju vođenja je:

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_1)p(T)dT \tag{5.76}$$

pa se dobija:

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = \int_{0}^{t_f} n_T(t_1 - T)n_T(t_2 - T)\frac{dT}{t_f} \tag{5.77}$$

Ako se pretpostavi da je $0 < t_1 < t_2 < t_f$, dobija se autokorelacione funkcija ulaza:

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = \frac{n_T^2}{t_f}\int_0 t_1 dT \tag{5.78}$$

Autokorelaciona funkcija sistema sa impulsnim odzivom $h(t)$ koji je vođen bijelim šumom se može izraziti kao:

$$\phi_y y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1 - \tau)\int_{-\infty}^{t_2} h(t_2 - \tau)\phi_{uu}(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \tag{5.79}$$

Gdje je $\phi_{uu}(t_1, t_2) = \Phi_u \delta(\tau_1 - \tau_2)$, autokorealciona funkcija bijelog šuma i $\Phi_u$ je spektralna gustoće snage i pretpostavlja se da je ona konstantna za cijelo vrijeme leta tj. da vrijedi:

$$\Phi_u(t) = \begin{cases} \Phi_u, & 0 \leq t \leq t_f \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \tag{5.80}$$

Pa se dobija:

$$\phi_y y(t_1, t_2) = \Phi_u \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau)h(t_2 - \tau)d\tau 1 \tag{5.81}$$

Sada poredeći prethodnu jednačinu sa 5.78 zaključuje se da su dvije autokorelacione funkcije iste ako je:

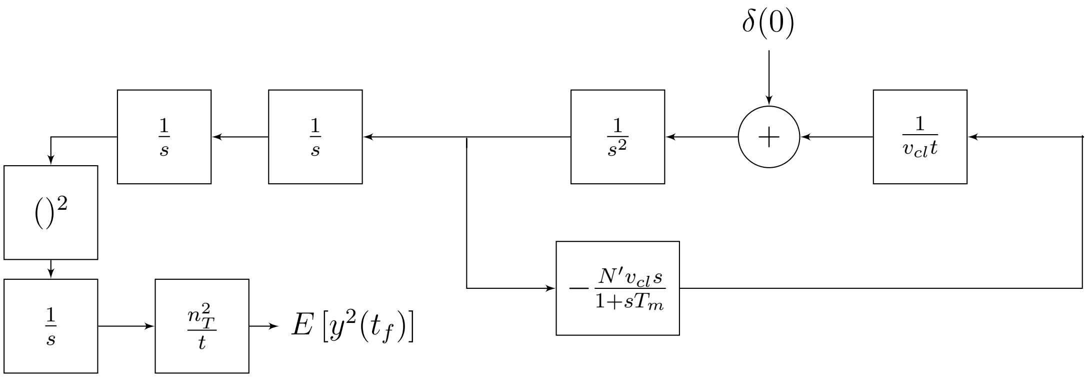
$$\Phi_u = \frac{n_T^2}{t_f} \tag{5.82}$$

$$h(t) = 1 \tag{5.83}$$

Sada se vidi da je manevar konstante amplitude $n_T$, kod koga je vrijeme početka djelovanja uniformno raspoređeno u toku vremena leta $t_f$ ima istu autokorelacionu funkciju kao i linearni sistem sa prenosnom funkcijom $H(s) = \frac{1}{s}$ na koji djeluje bijeli šum spektralne gustoće snage dat sa:

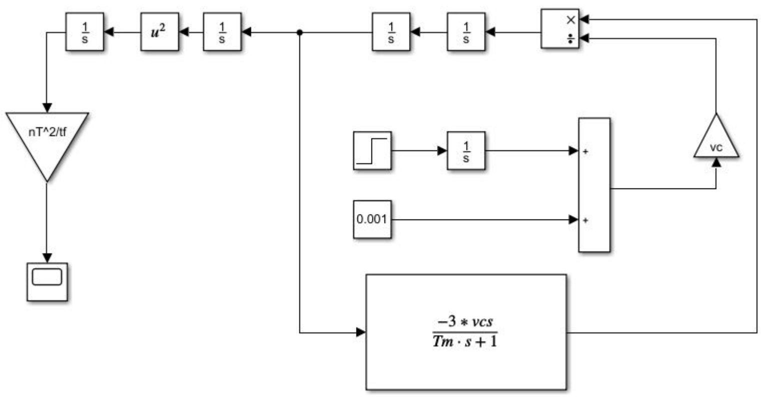
$$\Phi_u(t) = \begin{cases} \Phi_u, & 0 \leq t \leq t_f \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Sada će se prikazati primjena adjungovane tehnike na sthastički sistem. Važe ista pravila za kreiranje adjungovanog sitema kao i ranije sa jednim dodatnim pravilom da se svi stohastički ulazi se moraju modelirati kao bijeli šum koji na kraju postaju izlazi adjungovanog sistema. Pošto se ulaz originalnog sistema modelira kao bjeli šum kroz integrato, adjungovani model će promjeniti tok signala i kvadrirati i integrisati izlaz. Dobijeni adjungovani model je prikazan na slici 5.11. Na slici 5.12 je



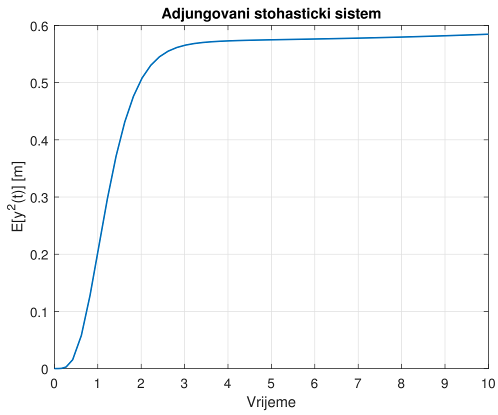

Slika 5.11: Adjungovani stohastički model

prikazan Simulink model ajdungovanog stohastičkog sistema. Impulsni signal je u Simulink modelu unešen kao početni uslov na odgovarajućem integratoru. Dobija se




Slika 5.12: Simulink model ajdungovanog stohastičkog sistema

očekivana vrijednost kvadrata promašaja kao što je prikazano na grafiku 5.13 Vidi se da je očekivana vrijednost kvadrata promašaja naglo porasla u prve tri sekunde




Slika 5.13: Očekivana vrijednost kvadrata promašaja

leta. Ovo je zbog toga što je upravo u tom intervalu promašaj najveći, nakon toga promašaj počinje opadati.

# Bibliografija

Shneydor, N.A. (1998.). *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control*. 1. Elsevier Science.

Siouris, George M. (2004.). *Missile Guidance and Control Systems*. Springer-Verlag New York.

Yanushevsky, R. (2007.). *Modern Missile Guidance*. Taylor & Francis.

Zarchan, P. (2007.). *Tactical and Strategic Missile Guidance*. AIAA Tactical Missile Series v. 219. American Institute of Aeronautics i Astronautics.

Drela, M. (2014.). *Flight Vehicle Aerodynamics*. FLIGHT VEHICLE AERODYNAMICS. MIT Press.