Navigacija i upravljanje projektila

Mirza Hodžic

Mentor: prof. dr. Naser Prljača

A thesis presented for the degree of Doctor of Philosophy

FAKULTET ELEKETROTEHNIKE
UNIVERZITET U TUZLI

Date

Sadržaj

Popis slika

Popis tablica

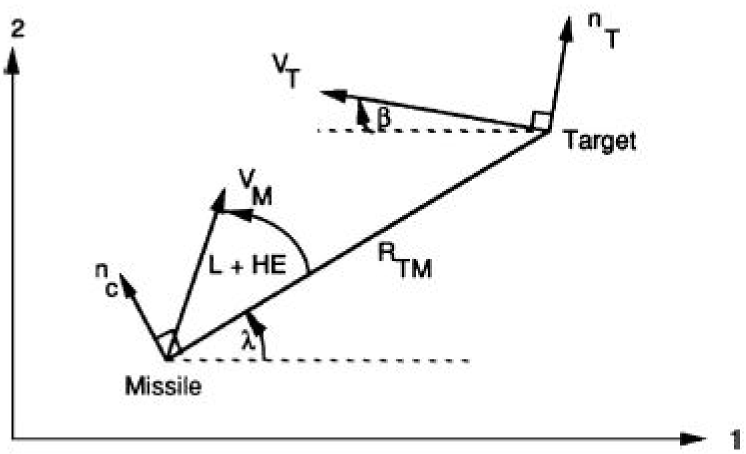
Poglavlje 1

Uvod

Poglavlje 2

Uvod u proporcionalnu navigaciju

2.1 Osnovne jednačine



Udaljenost između mete i projektila u svakom trenutku je data sa:

$$r(t) = r_T(t) - r_M(t) \tag{2.1}$$

Brzina približavanja projektila meti je data sa:

$$v_c = -\dot{r}(t) \tag{2.2}$$

Ugaono ubrzanje mete je dato sa:

$$\dot{\beta} = \frac{n_T}{v_T} \tag{2.3}$$

Kompnente vektora brzine mete u koordinatnom sistemu vezanom za zemlju su date sa:

$$v_{T1} = -v_T \cos\beta \tag{2.4}$$

$$v_{T2} = v_T \sin\beta \tag{2.5}$$

Slično tome, brzina i ubrzanje projektila su date sa:

$$\dot{v}_{M1} = a_{M1} \tag{2.6}$$

$$\dot{v}_{M2} = a_{M2} \tag{2.7}$$

$$\dot{R}_{M1} = v_{M1} \tag{2.8}$$

$$\dot{R}_{M2} = v_{M2} \tag{2.9}$$

Ugao *Line of sight* se može izračunati kao:

$$\lambda = \arctan \frac{R_{TM2}}{R_{TM1}} \tag{2.10}$$

Pa je:

$$\dot{\lambda} = \frac{R_{TM1}v_{TM2} - R_{TM2}v_{TM1}}{r^2} \tag{2.11}$$

Ugao između vektora pozicije i vektora brzine je dat sa:

$$L = \arcsin \frac{v_T \sin(\beta + \lambda)}{v_M} \tag{2.12}$$

Također treba uzeti u obzir da je:

$$v_{cl} = -\dot{r} = v_M \cos\delta - v_T \cos\theta \tag{2.13}$$

Te da će doći do sudara samo u slučaju da vrijedi:

$$v_M \cos\delta > v_T \cos\theta \tag{2.14}$$

Upravljački zakon proporcionalne navigacije je dat sa:

$$n_C = N' v_c \dot{\lambda} \tag{2.15}$$

2.2 Izvođenje upravljačkog zakona

$$\sin\lambda = \frac{y}{r} \tag{2.16}$$

Za male uglove može se koristiti aproksimacija:

$$\lambda \approx \frac{y}{r} \tag{2.17}$$

, pa je:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)r(t) - y(t)\dot{r}(t)}{r^2} \tag{2.18}$$

$$\ddot{\lambda}(t) = \frac{\ddot{y}(t) - 2\dot{\lambda}(t)\dot{r}(t) - \lambda(t)\ddot{r}(t)}{r(t)} \tag{2.19}$$

Uvedimo vremenski varijantne koeficijente:

$$a_1(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{r(t)} \tag{2.20}$$

$$a_2(t) = 2\frac{\dot{r}(t)}{r(t)} \tag{2.21}$$

$$b(t) = \frac{1}{r(t)} \tag{2.22}$$

Pa se dobija diferencijalna jednačina drugog reda sa varijabilnim koeficijenitma:

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} + b(t)\ddot{y}(t) \tag{2.23}$$

Uzimajući u obzir dobija se:

$$\ddot{y}(t) = -a_M(t) + a_T(t) \tag{2.24}$$

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} - b(t)a_M(t) + b(t)a_T(t) \tag{2.25}$$

Neka je $x_1(t) = \lambda$ i $x_2(t) = \dot{\lambda}$. Tada je susret projektila i mete opisan sljdećim diferencijalnim jednačinama prvog reda.

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2.26}$$

$$\dot{x}_2 = -a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u + b(t)f \tag{2.27}$$

,gdje je uzeto $u = a_M(t)$ i vanjska smetnja $f = a_T(t)$. Prvo posmatrajmo slučaj kada meta ne ubrzava, tj. kada je $f = 0$. Sada se problem proporcionalne navigacije može predstaviti kao:

> Pronaći upravljački signal u tako da je sistem opisan jednačinama 2.26 i 2.27 asimptotski stabilan u odnosu na x_2

Shodno tome, uzmimo Lyapunovu funkciju Q:

$$Q = \frac{1}{2}cx_2^2 \tag{2.28}$$

Izvod po vremenu duž bilo koje trajektorije je:

$$\dot{Q} = cx_2(-a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u(t)) \tag{2.29}$$

Sada se vidi da upravljački signal

$$u = kx_2 = k\dot{\lambda} \tag{2.30}$$

Stabilizuje sistem dat sa 2.26 i 2.27 ako k zadovoljava:

$$kb(t) + a_2(t) > 0 \tag{2.31}$$

,odnosno

$$k > -2\dot{r}(t) = 2v_{cl} \tag{2.32}$$

Prema tome, uvodeći *efektivni navigacijski odnos* N, izraz 2.30 postaje:

$$u = Nv_{cl}\dot{\lambda}(t) \quad , N > 2 \tag{2.33}$$

čime je potpuno određen zakon vođenja proporcionalne navigacije. Za trodimenzionalni slučaj se bira kandidat funkcija:

$$Q = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} d_s\dot{\lambda}_s^2 \tag{2.34}$$

, gdje su d_s pozitivni koeficijenti. Analogno se dobija upravljački zakon:

$$u_s = Nv_{cl}\dot{\lambda}_s \quad , N > 2 \ (s = 1, 2, 3) \tag{2.35}$$

2.3 Izmjenjena proporcionalna navigacija

Za mete koje manevrišu i imaju neko normalno ubrzanje, za planarni sustre, izvod Lyapunove kandidat funkcije je:

$$\dot{Q} = cx_2(-a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u(t) + b(t)f) \tag{2.36}$$

Odakle se zaključuje da je upravljaki signal koji stabilizuje sistem:

$$u = Nv_{cl}\dot{\lambda}(t) + a_T(t) \quad , N > 2 \tag{2.37}$$

2.4 Optimalnost zakona proporcionalne navigacije

Ako je promjena LOS ugla različita od nule, tada se primjenjuje normalno ubrzanje kako bi se promjena svela na nulu. U prethodnoj sekciji se proporcionalna navigacija predstavila kao problem upravljanja gdje je normalno ubrzanje bilo upravljački signal, a brzina promjene LOS ugla bila varijabla stanja. Proporcionalna navigacija se može posmatrati kao problem optimalnog upravljanja. Treba pronaći indeks performansi koji proporcionalna navigacija minimizira. Ovo predstavlja inverzni problem problem optimalnog upravljanja. Pretpostavimo da se projektil približava meti konstantnom brzinom. Ignorišuči dinamiku projektila, vrijedi:

$$\ddot{y} = -a_M, \ y = r\lambda, \ r(\tau) = v_{cl}\tau \tag{2.38}$$

Također pretpostavlja se da nema kašnjenja u dinamici projektila, tj. da je $a_M = a_{M_c}$. Definišimo sada ineks performansi:

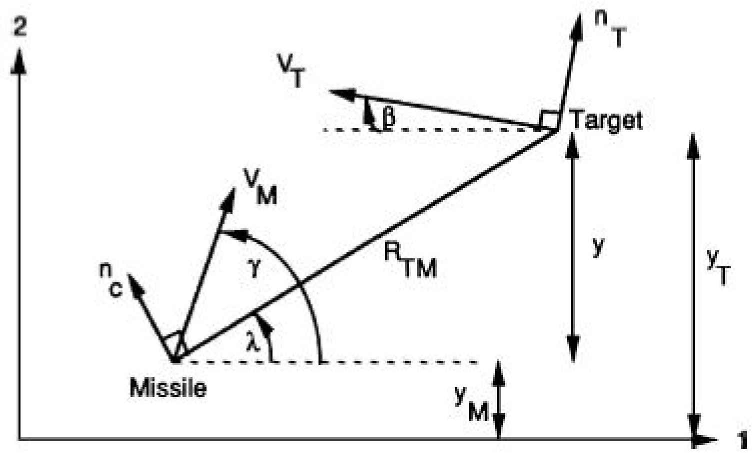
$$J = \frac{1}{2}Cy^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} a_M^2 dt \tag{2.39}$$

Prvi član predstavlja promašaj(miss distance), a drugi predstavlja energiju energiju utrošenu u toku leta. Ideja je pronaći upravljanje a_M koje minimizira kriterij performanse J. Koriteći Bellman-Lyapunov pristup dobija se da je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3\tau}{3/C + \tau^3}(y(t) + \dot{(y)}(t)\tau) \tag{2.40}$$

Nulti promašaj se dobija za $C \to \infty$, pa je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3}{\tau^2}(y(t) + \dot{(y)}(t)\tau) \tag{2.41}$$



Uzimajući u obzir da je:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{y}(t)r(t) - y(t)\dot{t}(t)}{r^2} = \frac{\dot{y}(t)\tau + y(t)}{r} \tag{2.42}$$

jer je, $r = v_{cl}\tau$, dobija se:

$$a_M(t) = 3v_{cl}\dot{\lambda} \tag{2.43}$$

Ovo znači da pod uvedenim pretpostavkama, proporcionalna navigacija minimizira kriterij performanse J i izbor efektivnog navigacijskog odnosa $N = 3$ garantuje da nulti promašaj.

2.5 Linearizacija

Linearizacija se može lahko izvršiti ako se definišu nove veličine koje su prikazane na slci **??**. Relativno ubrzanje se može odrediti sa slike i iznosi:

$$\ddot{y} = n_T \cos\beta - n_c \cos\lambda \tag{2.44}$$

Ako su uglovi leta mali, tada vrijedi:

$$\ddot{y} = n_T - n_c \tag{2.45}$$

Slično tako vrijedi:

$$\lambda = \frac{y}{r} \tag{2.46}$$

Za čeoni slučaj vrijedi:

$$v_{cl} = v_M + v_t \tag{2.47}$$

Za potjeru vrijedi:

$$v_{cl} = v_M - v_t \tag{2.48}$$

Sada se može linearizirati i jednačina za udaljenost:

$$r(t) = v_{cl}(t_F - t) \tag{2.49}$$

gdje je t_F ukupno vrijeme leta.
Definišimo i veličinu *time to go* t_{go}:

$$t_{go} = t_F - t \tag{2.50}$$

Linearizirani promašaj se definisše kao udaljenost mete i projektila na kraju leta, ili:

$$Miss = y(t_f) \tag{2.51}$$

2.6 Zero effort miss

Ranije je pokazano da vrijedi:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)r(t) + y(t)v_{cl}}{r^2} \tag{2.52}$$

Kako vrijedi $r = v_{cl}t_{go}$, tada se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)t_{go} + y(t)}{v_{cl}t_{go}^2} \tag{2.53}$$

Definišimo sada veličinu *Zero effort miss*, koja predstavlja buduće relativno rastojanje projektila i mete:

$$ZEM = \dot{y}(t)t_{go} + y(t) \tag{2.54}$$

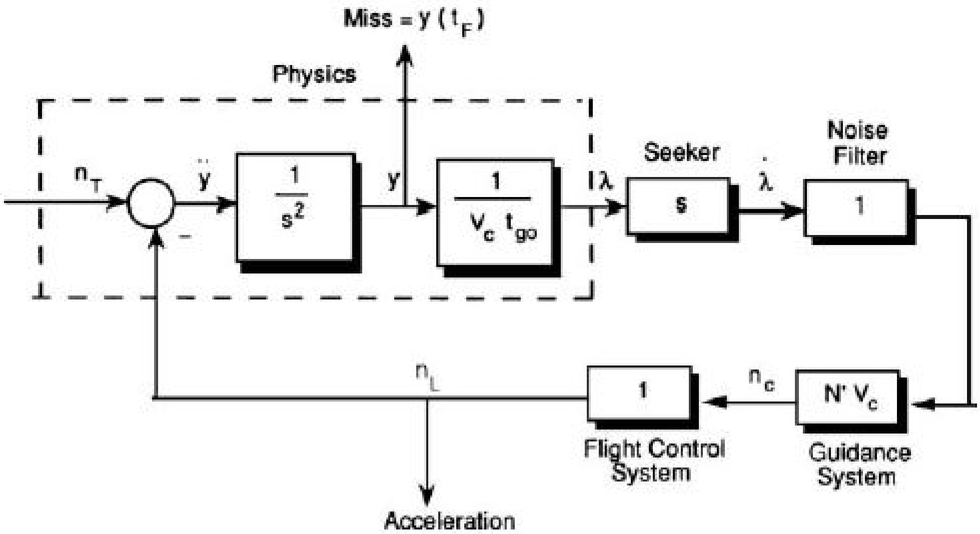
pa se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{ZEM}{v_{cl}t_{go}^2} \tag{2.55}$$

Ako se pretpstavi da će se pod uticajem ubrzanja a_c postići sudar, ZEM se može smatrati budućom tačkom susreta, pa se zakon vođenja proprcionalne navigacije može iskazati kao:

$$a_c(t) = N\frac{ZEM}{t_{go}^2} \tag{2.56}$$

Sada se vidi da je normalno ubrzanje projektila direktno proprorcionalnu ZEM-u i inverzno proporcionalno kvadratu preostalom vremenu leta, što znači da se generiše veće ubrzanje što je susret bliži. Pošto se ZEM posmatra kao buduća tačka susreta, koja se računa na osnovu znanja ili pretpostavki budučeg kretanja mete, PN vođenje se smatra prediktivnim. ZEM je koristan jer se može izračunati mnoštvom metoda uključujući i on-line numeričku integraciju nelinearnih diferencijalnih jednačina projektila i mete.


Miss = y (t_F)
Physics
n_T
ÿ
1/s^2
y
1/(V_c t_go)
λ
Seeker
s
λ̇
Noise Filter
1
n_L
1
Flight Control System
n_c
N' V_c
Guidance System
Acceleration