

# Navigacija i upravljanje projektila

Mirza Hodžić

Mentor: prof. dr. Naser Prljača



FAKULTET ELEKTROTEHNIKE  
UNIVERZITET U TUZLI

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>4</b>
<b>2 Jednačine kretanja tijela</b>	<b>5</b>
2.1 Koordinatni sistemi . . . . .	5
2.2 Jednačine kretanja čvrstog tijela . . . . .	8
<b>3 Sile koje djeluju na projektil</b>	<b>15</b>
3.1 Gravitaciona sila . . . . .	15
3.2 Pogonska sila . . . . .	15
3.3 Aerodinamičke sile . . . . .	16
3.4 Aerodinamički momenti . . . . .	18
<b>4 Dinamički model</b>	<b>20</b>
4.1 Rasprezanje dinamičkog modela . . . . .	21
<b>5 Uvod u proporcionalnu navigaciju</b>	<b>24</b>
5.1 Opis planarnog susreta . . . . .	24
5.2 Izvođenje upravljačkog zakona . . . . .	25
5.3 Izmjenjena proporcionalna navigacija . . . . .	27
5.4 Optimalnost zakona proporcionalne navigacije . . . . .	27
5.5 Linearizacija . . . . .	28
5.6 Petlja navođenja i zero effort miss . . . . .	30
5.7 Adjungovani sistem i petlja navođenja . . . . .	32
5.8 Adjungovani stohastički sistemi . . . . .	35

# Popis slika

2.1	Koordinatni sistem vezan za tijelo . . . . .	6
2.2	Eulerovi uglovi . . . . .	6
2.3	Ubacicu svoju sliku . . . . .	7
2.4	Predstava šest stepeni slobode . . . . .	9
3.1	Ugaone veze . . . . .	17
3.2	Veza između sistema tijela i sistema vjetra . . . . .	18
5.1	Prikaz planarnog susreta . . . . .	24
5.2	Linearizacija jednačina proporcionalne navigacije . . . . .	29
5.3	Petlja navođenja . . . . .	30
5.4	Proporcionalana navigacija u Simulinku . . . . .	31
5.5	Ubrzanja projektila i promašaj za $N = 4$ i $N = 5$ . . . . .	31
5.6	Simulink model izmjenjene proporcionalne navigacije . . . . .	32
5.7	Ubrzanje projektila i promašaj vođen promjenjenom proporcionalnom naivgacijom, $N = 3$ . . . . .	32
5.8	Adjungovana petlja navođenja . . . . .	34
5.9	Simulink dijagram adjungovanog sistema . . . . .	34
5.10	Odzivi adjungovanog sistema . . . . .	35
5.11	Adjungovani stohastički model . . . . .	38
5.12	Simulink model adjungovanog stohastičkog sistema . . . . .	38
5.13	Očekivana vrijednost kvadrata promašaja . . . . .	39

# Uvod

# Jednačine kretanja tijela

## 2.1 Koordinatni sistemi

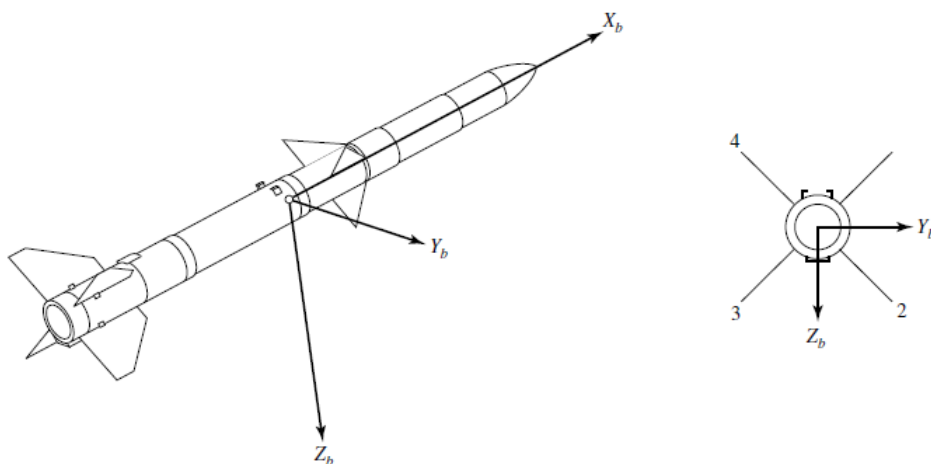
Orijentacija osa koordinatnog sistema preko kojih su određeni vektori ili tenzori potpuno je proizvoljna. Obično se jedna od osi (e.g.  $x$  osa) poravnava sa geometrijskom osom tijela. Ako se tijelo kreće stalnom brzinom tada se jedan koordinatni sistem može koristiti za sve veličine, međutim ako se tijelo rotira tada se naslućuju dva koordinatna sistema:

- Koordinatni sistem vezan za zemlju
- Koordinatni sistem vezan za tijelo

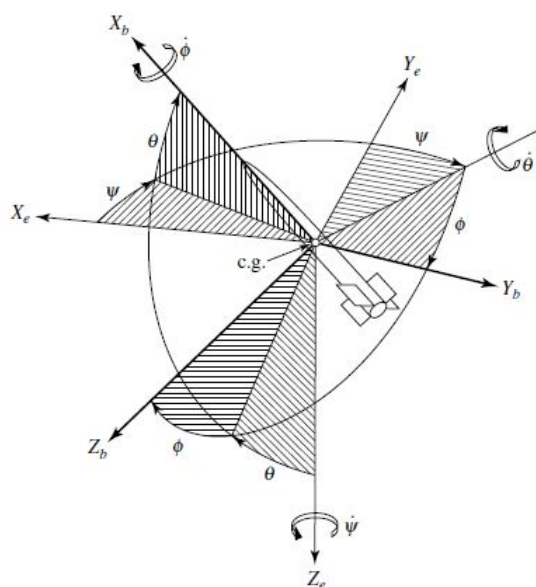
Koordinatni sistem vezan za zemlju je inercijalni iako se zemlje rotira u odnosu na geometrijsku osu. Sastoji se od tri ordinate, jedna predstavlja poziciju po sjevernoj osi, jedna po lokalnoj istočnoj osi i jedna predstavlja vertikalnu poziciju. Ose koordinatnog sistema vezanog za zemlju su označene sa  $X_e, Y_e, Z_e$ . Drugim riječima,  $X_e$  i  $Y_e$  leže u ravni dok je  $Z_e$  usmjeren ka centru Zemlje.

Koordinatni sistem vezan za tijelo sastoji se iz tri ordinate sa ishodištem u centru gravitacije letjelice:  $x$  osa koja je usmjerena ka nosu letjelice tj. podudara se sa longitudinalnom osom,  $y$  ose koja je usmjerena ka desnom krilu letjelice i  $z$  ose koja dopunjava lijevo orijentisani koordinatni sistem. Da se definiše položaj letjelice u odnosu na koordinatni sistem koriste se Eulerovi uglovi ( $\psi, \theta, \phi$ ). Ovo znači da se bilo koja rotacija, odnosno transformacija iz sistema tijela u sistem Zemlje može postići sa tri rotacije oko osi i to prva rotacija za ugao  $\phi$  oko longitudinalne, za ugao  $\theta$  oko lateralne i za ugao  $\psi$  oko normalne ose. Transformacija  $T_b^e$  koja ostvaruje transformaciju iz koordinatnog sistema vezanog za zemlju u koordinatni sistem vezan za tijelo je data sa:

$$T_b^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$



Slika 2.1: Koordinatni sistem vezan za tijelo



Slika 2.2: Eulerovi uglovi

,odnosno:

$$T_b^e = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

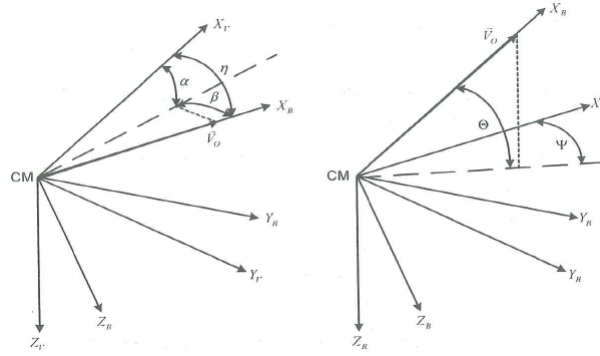
Treba primjetiti da rezultatna matrica  $C_e^b$  može imati singularitete, pa se domen Eulerovih uglova ograničava na sljedeći način:

$$\begin{aligned} -\pi &\leq \phi < \pi \quad \text{ili} \quad 0 \leq \phi < 2\pi \\ -\pi &\leq \psi < \pi \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ili} \quad 0 \leq \theta < \pi \end{aligned}$$

Ovo znači da u ovom slučaju postoji beskonačno mnogo načina da se ostvari željena transformacija. Ovaj problem se može riješiti uvođenjem jediničnog kvaterniona. Još jedan iznimno važan koordinatni sistem je *koordinatni sistem brzine tijela* (*BKS*). Ovaj Koordinatni sistem se koristi kad god relativno kretanje objekta u odnosu na okolinu ima za posljedicu pojavu reaktivnih sila. Koordinatni sistem brzine je vezan za vektor brzinu objekta. Ishodište koordinatnog sistema brzine tijela se podudara sa centrom mase tijela (centar mase se može mijenjati tokom leta zbog utroška goriva), dok je  $X$  osa kolinearna sa vektorom brzine objekta. Druge dvije ose se proizvoljno definišu u ravni normalnoj na vektor brzine. Najčešće se uzima da  $Z$  osa zadovoljava barem jedan od naredna dva uslova:

- $Z$  leži u presjeku ravni normalne na vektor brzine i vertikalne ravni simetrije pokretnog objekta.
- $Z$  leži u presjeku ravni normalne na vektor brzine i vertikalne ravni referentnog koordinatnog sistema.

Koordinatni sistem brzine je prikazan na slici 2.3. Ugao između  $X$  ose sistema



Slika 2.3: Ubacicu svoju sliku

tijela i  $X$  ose sistema brzine je označen sa  $\eta$  i ovim uglom se i definiše koordinatni sistem brzine tijela. Ugao  $\alpha$  je ugao između  $Z_b$  ose sistema tijela i projekcije vektora brzine na vertikalnu ravan sistema tijela. Ovaj ugao se naziva napadni ugao o kojem će više riječi biti kasnije. Ugao  $\beta$  je ugao između vektora brzine i vertikalne ravni sistema tijela. Ovaj ugao se zove ugao klizanja i o njemu će više riječi biti kasnije. Transformacija sistema brzine u sistem tijela se postiže rotacijom oko  $Y$  ose sistema tijela za ugao  $\alpha$  praćene rotacijom oko  $Z$  ose dobijenog sistema za ugao  $\beta$ . Odgovarajuća matrica transformacije je:

$$T_{tijelo}^{brzina} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Veza između sistema Zemlje (inercijalnog sistema) i sistema brzine je data uglovima  $\Theta$  (ugla elevacije vektora brzine) i  $\Psi$ , ugla azimuta vektora brzine. Transformacija iz inercijalnog sistema u sistem brzine se dobija rotacijom za  $\Theta$  oko  $X$  ose sistema brzine, zatim rotacijom oko  $Z$  ose za  $\Psi$ . Odgovarajuća matrica transformacije je:

$$T_{brzina}^{zemlja} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

## 2.2 Jednačine kretanja čvrstog tijela

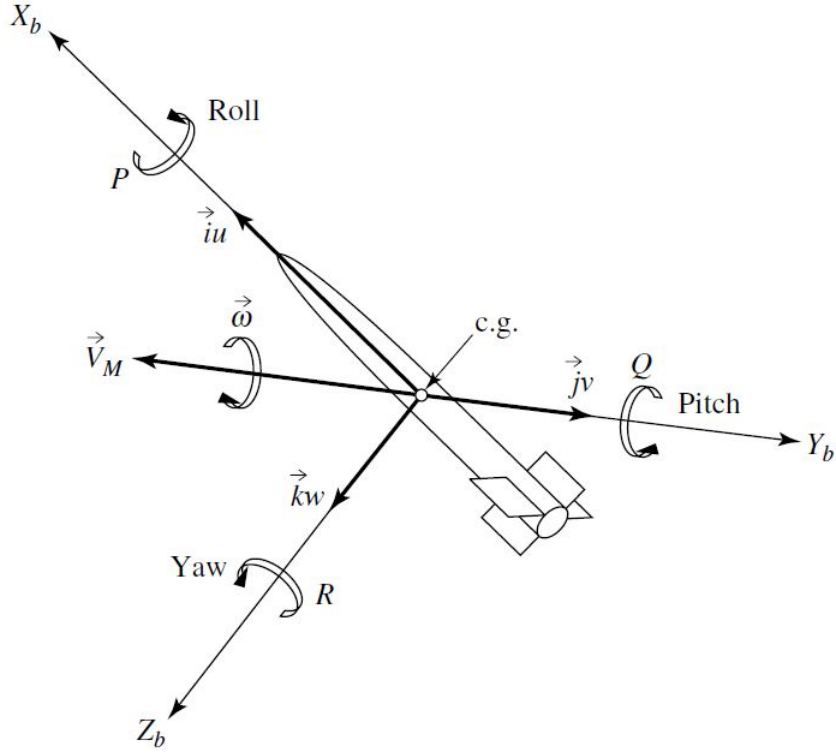
Sada ćemo posmatrati tipični projektil i izvesti jednačine koje opisuju njegovo kretanje. Pretpostaviti će se da čvrsto tijelo nema promjena u obliku pri kretanju. Translacija tijela podrazumijeva da svaka duž koja spaja bilo koje dvije tačke u tijelu bude paralelna svojoj datoj originalnoj poziciji, prema tome čvrsto tijelo se može posmatrati kao čestica čija je masa skoncentrisana u jednoj tački koja se zove *centar mase*. Dalje se pretpostavlja da se oblik tijela ne mjenja usljed djelovanja sila na tijelo. Ovom pretpostavkom se dobija da međusobni utjecaj dijelica tijela eliminisan pa se translacija može potpuno opisati translacijom centra mase i da se rotacija može potpuno opisati rotacijom oko centra mase. Dodatno pretpostavlja se da se ravan simetrije poklapa sa ravninom  $X_b - Z_b$  kao što je to prikazano na slici 2.1. Također pretpostavlja se da je masa tijela konstantna. Važno je napomenuti da se jednačine tijela određuju u koordinatnom sistemu vezanom za tijelo. Nadalje, projektil ima šest stepeni slobode (6-DOF). Ovih šest stepeni se sastoje iz od tri translacije i tri rotacije. Translacije se sastoje od kretanja duž osi  $X_b, Y_b, Z_b$  brzinom  $v_m = (u, v, w)$ , a rotacije se sastoje od rotacija oko ovih osi ugaonom brzinom  $\omega = (P, Q, R)$ . Šest stepeni slobode je prikazano na slici 2.4 Kao što je ranije rečeno dinamički model projektila se dobija Newtonovim zakonom dinamike, koji kaže da je suma svih vanjskih sila jednaka brzini promjene impulsa tijela i da je suma svih vanjskih momenata jednaka brzini promjene momenta impulsa. Prema tome vrijede relacije:

$$\sum F = \frac{d(mv_m)}{dt} \Big|_{Zemlja} \quad (2.5)$$

$$\sum M = \frac{dH}{dt} \Big|_{Zemlja} \quad (2.6)$$

gdje je  $H$  ugaoni momentum a  $\sum M$  je suma svih vanjskih momenata koji djeluju na tijelo. Naravno, prethodne relacije predstavljaju promjene vektora u odnosu na inercijalni prostor. Rezultantna vanjska sila koja djeluje na tijelo se može razložiti na sile koje djeluju po osama koordinatnog sistema vezanog za tijelo projektila, pa





Slika 2.4: Predstava šest stepeni slobode

se može napisati:

$$\sum \Delta F = \sum \Delta F_x i + \sum \Delta F_y j + \sum \Delta F_z k \quad (2.7)$$

Poredeći prethodnu jednačinu sa 2.5 dobija se:

$$F_x = \frac{d(mu)}{dt}, F_y = \frac{d(mv)}{dt}, F_z = \frac{d(mw)}{dt} \quad (2.8)$$

Analogno, dobija se da vrijedi:

$$L = \frac{dH_x}{dt}, M = \frac{dH_y}{dt}, N = \frac{dH_z}{dt} \quad (2.9)$$

Gdje su  $L$ ,  $M$  i  $N$  moment valjanja, moment propinjanja i moment zakretanja respektivno i  $H_x$ ,  $H_y$  i  $H_z$  su komponente momenta impulsa duž osa tijela. Sada želimo proširiti jednačine 2.8 i 2.9 kako bi smo dobili jednačine kretanja za svaki stepen slobode. U svrhu toga koristi se formula za brzinu promjenu brzine projektila u inercijalnom sistemu, tj. u koordinatnom sistemu vezanom za zemlju i ona je data relacijom:

$$\left( \frac{dv_m}{dt} \right)_{Zemlja} = \left( \frac{dv_m}{dt} \right)_{tijelo} + \omega \times v_m \quad (2.10)$$

Prema tome vrijedi da je ukupna vanjska sila koja djeluje na tijelo data sa:

$$F = m \left( \frac{dv_m}{dt} \right)_{tijelo} + m(\omega \times v_m) \quad (2.11)$$

gdje je vektorski proizvod linearne brzine i ugaone brzine dat sa:

$$\omega \times v_m = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ u & v & w \end{vmatrix} = (wQ - vR)i + (uR - wP)j + (vP - uQ)k \quad (2.12)$$

Koristeći se činjenicom da je  $v_m = ui + vj + wk$  i uvrštavanjem prethodne jednačine u 2.11 dobija se:

$$\sum \Delta F = m(\dot{u}i + \dot{v}j + \dot{w}k) + (wQ - vR)i + (uR - wP)j + (vP - uQ)k \quad (2.13)$$

Sada, poredeći sa 2.7 dobijaju se jednačine:

$$\sum \Delta F_x = m(\dot{u} + wQ - vR) \quad (2.14)$$

$$\sum \Delta F_y = m(\dot{v} + uR - wP) \quad (2.15)$$

$$\sum \Delta F_z = m(\dot{w} + vP - uQ) \quad (2.16)$$

Prethodno dobivene tri jednačine predstavljaju *linearne jednačine kretanja*. Sada treba odrediti ove tri jednačine za rotaciono kretanje. Da bi se to postiglo potrebno je imati izraz za moment impulsa  $H$  kao što imamo izraz za impuls kod translatorsnog kretanja. Moment impulsa oko proizvoljne tačke  $O$  materijalne tačke je dat sa:

$$H = r \times mV = mr \times (\omega \times r) \quad (2.17)$$

Vektor momenta impulsa  $H$  je normalan  $r$  i na  $v$  i  $H$  je usmjeren isto kao i moment impulsa  $M$ . Moment impulsa cijelog tijela oko tačke  $O$  je dat sa:

$$H = \sum r \times mv_m = \sum mr \times (\omega \times r) = \sum m [\omega(r \cdot r) - r(r \cdot \omega)] \quad (2.18)$$

ili u formi integrala:

$$H = \int r \times (\omega \times r) dm \quad (2.19)$$

Sada slijedi:

$$\omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{vmatrix} = (zQ - yR)i + (xR - zP)j + (yP - xQ)k \quad (2.20)$$

i konačno:

$$r \times (\omega \times r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ zQ - yR & xR - zP & yP - xQ \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

Sada se konačno dobija izraz za moment impulsa:

$$\begin{aligned} H = & i \int [(y^2 + z^2)P - xyQ - xzR] dm + j \int [(z^2 + x^2)Q - yzR - xyP] dm \\ & + k \int [(x^2 + y^2)R - xzP - yzQ] dm \end{aligned} \quad (2.22)$$

Kada se uvedu oznake:

$$\begin{aligned} I_x = \int (y^2 + z^2) dm, I_y = \int (x^2 + z^2) dm, I_z = \int (x^2 + y^2) dm \\ I_{xy} = \int xy dm, I_{yz} = \int yz dm, I_{xz} = \int xz dm \end{aligned} \quad (2.23)$$

Tada se dobija:

$$H = (PI_x - RI_{xz})i + QI_yj + (RI_z - PI_{xz})k \quad (2.24)$$

Sada se vektor momenta impulsa može zapisati preko svojih komponenti:

$$H_x = PI_x - RI_{xz} \quad (2.25)$$

$$H_y = QI_y \quad (2.26)$$

$$H_z = RI_z - PI_{xz} \quad (2.27)$$

Sada su potrebni izvodi momenta impulsa kako bi smo dobili izraz za resultantni moment. Pošto je izvod vektora u inercijalnom prostoru jednak zbiru izvoda pojedinačnih komponenti vektora. Prema tome vrijedi:

$$\frac{dH_x}{dt} = I_x \frac{dP}{dt} - I_{xz} \frac{dR}{dt} \quad (2.28)$$

$$\frac{dH_y}{dt} = I_y \frac{dQ}{dt} \quad (2.29)$$

$$\frac{dH_z}{dt} = I_z \frac{dR}{dt} - I_{xz} \frac{dP}{dt} \quad (2.30)$$

Relacija 2.6 se može napisati kao:

$$\sum \Delta M = \frac{dH}{dt} + \omega \times H \quad (2.31)$$

Ako se uvaži da je  $\sum \Delta M = \sum \Delta Li + \sum \Delta Mj + \sum \Delta Nk$ , korištenjem prethodno dobivenih izraza za izvod momenta impulsa dobija se:

$$\sum \Delta L = \dot{P}I_x + QR(I_z - I_y) - (\dot{R} + PQ)I_{xz} \quad (2.32)$$

$$\sum \Delta M = \dot{Q}I_y + PR(I_x - I_z) + (P^2 - R^2)I_{xz} \quad (2.33)$$

$$\sum \Delta N = \dot{R}I_z + PQ(I_y - I_x) - (\dot{P} - QR)I_{xz} \quad (2.34)$$

Prethodne tri jednačine zajedno sa jednačinama 2.14, 2.15 i 2.16 predstavljaju jednačine projektila sa šest stepeni slobode. Ove jednačine su simultane linearne jednačine kretanja sa šest promjenjivih  $u, v, w, P, Q$  i  $R$  koje potpuno opisuju kretanje čvrstog tijela. Rješenja ovih jednačina se mogu dobiti numeričkim metodama na digitalnom računaru. Analitička rješenja dovoljne tačnosti se mogu dobiti linearizacijom.  $I_x, I_y$  i  $I_{xz}$  su konstantne i za projekte sa krstastom konfiguracijom vrijedi  $I_y = I_z$  i  $I_{xz}$ . Prema tome, vrijedi:

$$\sum \Delta L = \dot{P}I_x + QR(I_z - I_y) \quad (2.35)$$

$$\sum \Delta M = \dot{Q}I_y + PR(I_x - I_z) \quad (2.36)$$

$$\sum \Delta N = \dot{R}I_z + PQ(I_y - I_x) \quad (2.37)$$

Transformacijom prethodnih jednačina dobija se:

$$\frac{dP}{dt} = QR \frac{I_y - I_z}{I_x} + \frac{L}{I_x} \quad (2.38)$$

$$\frac{dQ}{dt} = PR \frac{I_z - I_x}{I_y} + \frac{M}{I_y} \quad (2.39)$$

$$\frac{dR}{dt} = PQ \frac{I_x - I_y}{I_z} + \frac{N}{I_z} \quad (2.40)$$

Sada je još potrebno odrediti ugaone brzine u zavisnosti od Eulerovih uglova. Izvođenje ovih jednačina zahtjeva pronalaženje izvoda matrice transformacije, što je poprilično zahtjevno, pa će ovdje biti samo navedene diferencijalne jednačine koje daju brzinu promjene Eulerovih uglova:

$$\frac{d\psi}{dt} = (Q \sin \phi + R \cos \phi) / \cos \theta \quad (2.41)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q \cos \phi - R \sin \phi \quad (2.42)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = P + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) \sin \theta \quad (2.43)$$

Sada koristeći matricu transformacije  $C_e^b$  se mogu dobiti komponente brzine u koor-

dinatom sistemu Zemlje:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_z \\ \dot{Y}_z \\ \dot{Z}_z \end{bmatrix} = C_e^b \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Sada je jasno da se integracijom jednačina 2.38, 2.39 i 2.40 dobijaju ugaone brzine u sistemu tijela, a integracijom jednačina 2.41, 2.42 i 2.43 se dobija orijentacija u odnosu na zemlju. Da bi se dobila pozicija tijela u odnosu na sistem Zemlje treba riješiti matricnu jednačinu 2.44. Da bi se ona mogla numerički riješiti treba naći izraze za izvode brzinu u sistemu tijela. Oni se mogu dobiti iz jednačina 2.14, 2.15 i 2.16. Nakon transformacije ovih jednačina ima se:

$$\frac{du}{dt} = vR - wQ + F_x/m \quad (2.45)$$

$$\frac{dv}{dt} = wP - uR + F_y/m \quad (2.46)$$

$$\frac{dw}{dt} = uQ - vR + F_z/m \quad (2.47)$$

Sada se nakon rješavanja prethodne tri jednačine mogu dobiti vrijednosti brzina u sistemu tijela te nakon toga može se riješiti jednačina 2.44 i tako dobiti poziciju u odnosu na sistem Zemlje. Prethodnih 12 jednačina se može predstaviti u prostoru stanja ako se uzme vektor varijabli stanja:

$$\vec{X} = [u \quad v \quad w \quad P \quad Q \quad R \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad x_z \quad y_z \quad z_z]^T$$

i vektor upravljačkih promjenljivih:

$$\vec{u} = [\delta_v \quad \delta_P \quad \delta_e]^T$$

,gdje je  $\delta_v$  ugao otklona krmila visine,  $\delta_P$ , ugao otklona krmila i  $\delta_e$ , ugao toklona elerona. Upravljačke varijable se na prvu ruku ne vide i predstavljenim jednačinama, ali ubrzo ćemo se uvjeriti da sile i momenti koji djeuju na projektil zavise upravo od ovih upravljačkih varijabli. Ovime se dobija nelinearna vektorska jednačina:

$$\dot{\vec{X}} = f(\vec{X}, \vec{u}, t) \quad (2.48)$$

Prethodna jednačina je doista nelinearna najprije zbog prirode modela, postojanja trigonometrijskih funkcija i zbog nelinearne zavisnosti sila i momenata od otklona upravljačkih površina. Kako bi se izvršila sinteza regulatora prethodna jednačina se najprije treba linearizirati za određeni režim leta. Već se nadzire da se linearizacija može izvršiti nalaženjem prvih izvoda vektorske funkcije  $f(\vec{X}, \vec{u}, t)$  za određene

uslove leta. Dobijena matrica bi imala 144 elementa koji su u stvari prvi izvodi raznih parametara modela pa je evidentno da treba poznavati zavisnosti parametra od vremena i međusobne zavisnosti varijabli stanja.

# Sile koje djeluju na projektil

Ranije su izvedene jednačine(Eulerove) koje opisuju kretanje projektila. U ovim jednačinama se pojavljuju sile i momenti koji djeluju na projektil, te je neophodno i njih odrediti kako bi se postigao potpun dinamički model projektila. Također, poznavanje prirode ovih sila je neophodno kako bi se moglo upravljati projektilom jer se upravo kontrolom ovih sila postiže upravljanje projektila. Sile koje djeluju na projektil su u letu su aerodinamičke, pogonske sile i gravitaciona sila. Ove sile se mogu razložiti po osama koordinatnog sistema vezanog za tijelo i mogu se izraziti u inercijalnom koordinatnom sistemu.

## 3.1 Gravitaciona sila

Prije svega važno je istaći da se gravitaciona sila ne može koristiti za upravljanje projektilom i ona predstavlja ništa više od vanjske smetnje na sistem automatskog upravljanja. Gravitaciona sila predstavlja vektor koji je usmjeren ka centru Zemlje i u inercijalnom koordinatnom sistemu je dat sa:

$$G_{Zemlja} = [0 \ 0 \ mg]^T \quad (3.1)$$

Da bi se dobila vrijednost gravitacione sile u neinercijalnom koordinatnom sistemu, treba se koristiti matrica transformacije:

$$G_{tijelo} = C_e^b G_{Zemlja} \quad (3.2)$$

Gravitaciona sila se u opštem slučaju mijenja u vremenu pošto se masa projektila mijenja usljed utroška goriva pri letu projektila. Varijacije u gravitacionom ubrzanju se zanemaruju pri promjeni geografske širine. Promjena mase projektila je od ključne važnosti za balističke projekte kod kojih 90% mase čini

## 3.2 Pogonska sila

$$P_{tijelo} = [P \ 0 \ 0]^T \quad (3.3)$$

### 3.3 Aerodinamičke sile

Aerodinamička sila je posljedica djelovanja pritiska okolnog fluida na tijelo u pokretu. Aerodinamička sila se može razložiti na tri komponente koje su definisane u nastavku:

- **Uzgon**- Uzgon je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je normalna na relativno kretanje vjetra.
- **Otpor**- Otpor je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je paralelna relativnom kretanju vjetra.
- **Bočna sila**- Bočna sila je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je normalna na uzgon i otpor.

Ovdje se posmatraju projektili koji se zakreću da bi skrenuli(skid to turn) i kod takvih projektila aerodinamičke sile su date sa:

$$\text{Otpor} \quad R_x = C_x q S \quad (3.4)$$

$$\text{Uzgon} \quad R_z = C_z q S \quad (3.5)$$

$$\text{Bočna sila} \quad R_y = C_y q S \quad (3.6)$$

,gdje su  $C_x$ ,  $C_y$  i  $C_z$  aerodinamički koeficijenti,  $q$  dinamički pritisak slobodnog strujanja u tački daleko od objekta i iznosi  $q = \frac{1}{2}\rho v^2$ ,  $S$  je referentna površina i  $v$  je brzina vazduha,  $\rho$  predstavlja atmosferski pritisak.

Treba napomenuti da se aerodinamičke sile i momenti izražavaju bezdimenzionalnim veličinama. To se postiže tako što se dogovorom utvrdi da se sila(il moment) predstavlja svojim odgovarajućim aerodinamičkim koeficijentom. Prema tome,  $C_x$  potpuno određuje silu otpora i slično vrijedi i za ostale koeficijente.

U opštem slučaju koeficijenti aerodinamičkih sila su funkcije varijabli stanja pa se može napisati:

$$C_x = C_x(\alpha, \beta, M, q, \delta_v, \delta_P, \delta_e) \quad (3.7)$$

,gdje je  $M$  Mahov broj- odnos tekuće brzine i brzine zvuka,  $\alpha$  napadni ugao i  $\beta$  ugao klizanja. Slično tako vrijedi:

$$C_y = C_y(M, \beta, \delta_P) \quad (3.8)$$

$$C_z = C_z(M, \beta, \delta_v) \quad (3.9)$$

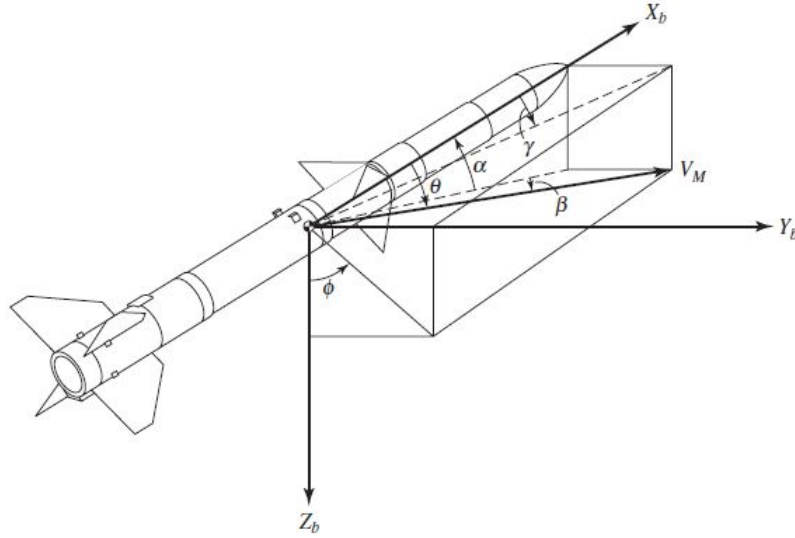
Uglovi  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  su prikazani na slici 3.1 i definisani su sa:

$$\alpha = \arctg(w/u) \quad (3.10)$$



$$\beta = \arcsin(v/v_m) \quad (3.11)$$

Dodatno, napadni ugao  $\alpha$  definiše rotaciju sistema tijela oko  $Y_b$  ose, a ugao klizaanja



Slika 3.1: Ugaone veze

$\beta$  definiše rotaciju sistema tijela oko  $Z_b$  ose. Sada je potrebno poznavati analitičke oblike aerodinamičkih koeficijenata u zavisnosti od odgovarajućih varijabli stanja. Linearizacijom aerodinamičkih koeficijenata u okolini trenutnih vrijednosti varijabli stanja dobijaju se linearne relacije za aerodinamičke koeficijente koje su izražene u obliku sume *aerodinamičkih izvoda* i varijabli stanja. Razvojem u Taylorov red i odbacivanjem viših članova dobija se aproksimacija aerodinamičkih koeficijenata:

$$C_x = C_{x_0} + C_{x_\alpha}|\alpha| + C_{x_\alpha^2}\alpha^2 + C_{x_\beta}|\beta| + C_{x_\beta^2}\beta^2 + C_{x_{\alpha\beta}}|\alpha||\beta| \quad (3.12)$$

$$C_z = C_{z_0} + C_z^\alpha\alpha + C_z^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + C_z^q q + C_z^{\delta_v}\delta_v \quad (3.13)$$

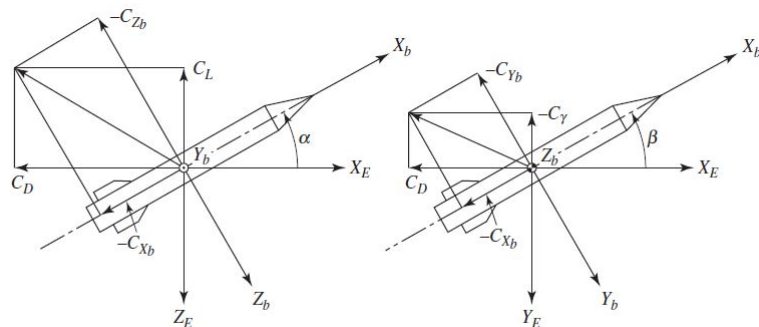
$$C_y = C_{y_0} + C_y^\alpha\alpha + C_y^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + C_y^q q + C_y^{\delta_P}\delta_P \quad (3.14)$$

U datom slučaju aerodinamički koeficijent otpora imaju jednostavniji oblik

$$C_x = C_{x_0} + C_{x_1}\alpha \quad (3.15)$$

,gdje je  $C_{x_0} = \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}|_{\alpha=0}$ ,  $C_{x_1} = \frac{\partial C_x}{\partial \alpha}$  i slično tako za ostale izvode.

Također je važno istaći da su ovi koeficijenti(tj. sile) izražene u *koordinatnom sistemu vjetra* relativnom toku vazduha. Koordinatni sistem vazduha je prikazan na slici 3.2. Čest se u literaturi ovi koeficijenti definišu u *koordinatnom sistemu brzine tijela*, kod kojeg se  $X$  osa podudara sa brzinom letjelice, ali zbog pretpostavke da je brzina vjetra zanemariva u inercijalnom koordinatnom sistemu razlika u ovim koordinatnim sistemima ne igra ulogu. Pošto su jednačinama kretanja tijela sile izražene sistemu tijela, potrebno je imati transformaciju koja transformiše aerodinamičke sile



Slika 3.2: Veza između sistema tijela i sistema vjetra

u sistem tijela i njihova veza je data sa:

$$\begin{bmatrix} C_{x_b} \\ C_{y_b} \\ C_{z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_x \\ C_y \\ -C_z \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Sada se vraćanjem u 3.4,3.5 i 3.6 mogu odrediti aerodinamičke sile koje djeluju na projektil.

### 3.4 Aerodinamički momenti

Momenti se mogu podijeliti na momente koji su posljedica aerodinamičkog tereta i pogonske sile koja ne djeluje kroz centar gravitacije. Moment koji je posljedica rezultantne sile koja ne djeluje na centar koordinatnog sistema tijela se može podijeliti na tri komponente, i to:

- **Moment valjanja** je moment oko lateralne ose( $Y_b$ ) projektila i generisan je od uzgonom i otporom koje djeluju na tijelo. Pozitivan moment je u smjeru gore od nosa letjelice
- **Moment propinjanja** je moment oko longitudinalne ose( $X_b$ ) projektila. Posljedica je uzgona koji je uzrokovan nekom vrstom elerona. Pozitivan moment propinjanja uzrokuje kretanje nadole desnog krila.
- **Moment zakretanja** je moment oko vertikalne ose projektila( $Z_b$ ). Pozitivan moment zakretanja ima za posljedicu da se nos aviona zakrene u desno.

Kvantitativno, momenti su dati sa:

$$\text{Moment valjanja} \quad L = C_l q S b \quad (3.17)$$

$$\text{Moment propinjanja} \quad M = C_m q S c \quad (3.18)$$

$$\text{Moment zakretanja } N = C_n q S b \quad (3.19)$$

,gdje je  $b$  raspon krila,  $c$  je razmak između početne i krajnje ivice krila mjerene u smjeru paralelnom toku vazduha,  $S$  je površina platforme krila. Isto kao i kod slučaja sa silama, koeficijenti momenata također zavise od više promjenjivljih i potrebno ih je linearizirati.

Linearizirani koeficijenti momenta su:

$$C_M = C_M^\alpha \alpha + C_M^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_M^Q Q + C_M^{\delta_v} \delta_v \quad (3.20)$$

,koeficijent momenta skretanja je:

$$C_N = C_N^\beta \beta + C_N^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + C_N^R R + C_N^{\delta_P} \delta_P \quad (3.21)$$

Pri čemu je za krstastu konfiguraciju  $C_M^\alpha = C_N^\beta$ ,  $C_N^{\dot{\beta}} = C_M^{\dot{\alpha}}$ ,  $C_M^Q = C_N^R$ ,  $C_M^{\delta_v} = C_N^{\delta_P}$ . Koeficijent momenta valjanja se linearizuje tako da se dobije:

$$C_L = C_L^P P + C_L^Q Q + C_L^R R + C_L^\alpha \alpha + C_L^\beta \beta + C_L^{\delta_e} \delta_e + C_L^{\delta_v} \delta_v + C_L^{\delta_P} \delta_P \quad (3.22)$$

# Dinamički model

Potpun nelinearni dinamički model sastoji iz 12 diferencijalnih jednačina koje su predstavljene ranije. Iznimno je teško dobiti analitičko rješenje ovih diferencijalnih jednačina pa se obično pribjegava numeričkoj simulaciji modela. Zadatak autopilota je da osigura brz prelaz stanja i stabilan odziv u okolini nominalne trajektorije. Pokazaće se da se za nominalnu trajektoriju čitav model može raspregnuti što ima za posljedicu potpuno razdvajanje modela na dva podsistema. Ova praksa je korištena kod starih letjelica zbog uštede računarske moći, ali to danas više nije problem zbog razvoja digitalnih računara, međutim raspreganje dinamičkog modela je i danas korisno u svrhu sinteze regulatora. Raspreganje dinamičkog modela uvodi netačnosti u model pošto je za raspreganje potrebno zanemarivanje određenih veličina pa se preporučuje ispitivanje regulatora na nelinearnom modelu. U nastavku su sumarno prikazane ranije izvedene relacije koje opisuju model projektila krstaste konfiguracije pri čemu treba primjetiti da su ove jednačine sada prikazane u koordinatnom sistemu brzine. Korišten je indeks  $v$ (velocity) da se označi vektor u sistemu brzine i indeks  $b$ (body) da se označi vektor u sistemu tijela. Da bi se transformisao vektor iz sistema tijela u sistem brzine treba se koristiti inverz matrice transformacije date sa 2.3, koji iznosi:

$$T_b^v = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Nakon množenja matrica dobija se:

$$T_b^v = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Sada se konačno može napisati svih 12 diferencijalnih jednačina modela u koordinatnom sistemu brzine.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F_{xv}}{m} \quad (4.3)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{F_{yv}}{mv \cos \Theta} \quad (4.4)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{F_{zv}}{mv} \quad (4.5)$$

$$\frac{dP}{dt} = L/I_x \quad (4.6)$$

$$\frac{dQ}{dt} = [M + (I_z - I_x)RP]/I_y \quad (4.7)$$

$$\frac{dR}{dt} = [N + (I_x - I_y)PQ]/I_z \quad (4.8)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = (R \cos \phi + Q \sin \phi) / \cos \theta \quad (4.9)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q \cos \phi - R \sin \phi \quad (4.10)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = P + (R \cos \phi + Q \sin \phi) \tan \theta \quad (4.11)$$

$$\frac{dx_z}{dt} = V \cos \Theta \cos \Psi \quad (4.12)$$

$$\frac{dy_z}{dt} = V \cos \Theta \sin \Psi \quad (4.13)$$

$$\frac{dz_z}{dt} = V \sin \Theta \quad (4.14)$$

Ovaj nelinearni model ima tri ulaza (otkloni kontrolnih površina) i svaka od varijabli stana može izlaz pa se kod lineariziranog modela može predstaviti 36 prenosnih funkcija, međutim zbog prirode posmatrane konfiguracije neke od ovih prenosnih funkcija će identički biti jednake nuli. Jedan primjer ovakve prensone funkcije jeste veza između otklona upravljačke površine za stabilizaciju ugla valjanja i brzine projektila.

## 4.1 Rasprezanje dinamičkog modela

Sada će se u svrhu lakše analize i sinteze regulatora izvršiti rasprezanje dinamičkog modela. Ideja je da se uvedu neke pretpostavke koje će omogućiti da se predstavljene jednačine razdvoje na grupe nezavisnih jednačina. Treba da je ispunjeno:

- Projektil se kreće u vertikalnoj ravni referentnog koordinatnog sistema.
- Osa  $x_z$  leži u ravni kretanja.

Prva pretpostavka iziskuje  $\beta, \phi, P, R \approx 0$ . Činjenica da je  $P, R \approx 0$  znači da se tijelo rotira samo oko  $Y_b$  ose, dalje, pretpostavka da je  $\beta \approx 0$  znači da je usmjerenje letjelica

isto kao i vektor brzine i konačno činjenica da je  $\phi \approx 0$  znači da nema valjanja. Druga pretpostavka iziskuje  $\Psi, \psi, y_z \approx 0$ . Ovo znači da nema skretanja, da projektil može mjenjati samo visinu i udaljenost po  $X_z$  osi. Dakle ove dvije pretpostavke ograničavaju kretanje letjelice na vertikalnu ravan sa dopuštenjem propinjanja i kretanjem naprijed. Sada preostale jednačine koje su okarakterisane varijablama stanja:

$$V, \Theta, \theta, \alpha, Q, x_z, z_z$$

Definišu *longitudinalno kretanje* (kretanje u vertikalnoj ravni). Jednačine okarakterisan varijablama koje su u ovom slučaju zanemarene definišu *lateralno kretanje* (bočno) koje se sastoji od kretanja u horizontalnoj ravni, skretanja i valjanja ali bez propinjanja. Sada se ova dva podsistema mogu odvojeno posmatrati. Sada ostaje samo da se sile koje su objašnjenje u prethodnom poglavlju pretvorimo iz sistema tijela i sistema Zemlje u sistem brzine i da ih se uvrsti u jednačine koje opisuju model u sistemu brzine. Jednačine koje predstavljaju longitudinalno kretanje su:

$$m \frac{dv}{dt} = P \cos \alpha - R_{otp} - G \sin \Theta \quad (4.15)$$

$$mV \frac{d\Theta}{dt} = -P \sin \alpha - R_{uzg} + G \cos \Theta \quad (4.16)$$

$$I_x \frac{dQ}{dt} \approx M \quad (4.17)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q \quad (4.18)$$

$$\frac{dx_z}{dt} = V \cos \Theta \quad (4.19)$$

$$\frac{dz_z}{dt} = -V \sin \Theta \quad (4.20)$$

Također iz matrice transformacije  $Tz^v$  (treba invertovati  $Tv^z$ ) se dobija za uvedene pretpostavke:

$$\Theta = \theta - \alpha \quad (4.21)$$

Sada se mogu napisati i jednačine za lateralno kretanje:

$$mV \cos \Theta \frac{d\Psi}{dt} = -P \cos \alpha \sin \beta \cos \phi - P \sin \alpha \sin \phi - R_{side} \cos \phi - R_{uzg} \sin \phi \quad (4.22)$$

$$I_x \frac{dP}{dt} = L \quad (4.23)$$

$$I_z \frac{dR}{dt} = N + (I_x - I_y) \quad (4.24)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = (R \cos \phi + q \sin \phi) / \cos \theta \quad (4.25)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = P + (R \cos \phi - q \sin \phi) / \tan \theta \quad (4.26)$$

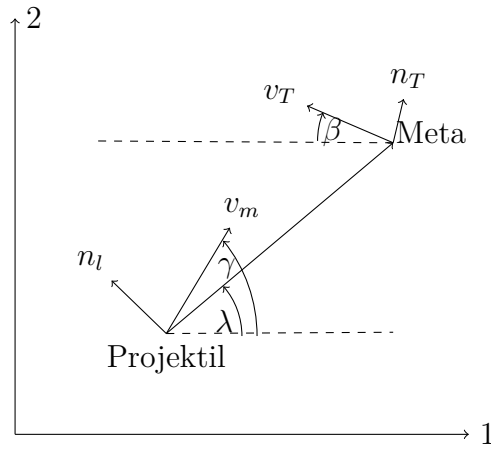
$$\frac{dy_z}{dt} = V \cos \Theta \sin \Psi \quad (4.27)$$

Pri čemu se iz  $Tz^v$  pokazuje:

$$\Psi \approx \psi - \beta \quad (4.28)$$

# Uvod u proporcionalnu navigaciju

## 5.1 Opis planarnog susreta



Slika 5.1: Prikaz planarnog susreta

Udaljenost između mete i projektila u svakom trenutku je data sa:

$$r(t) = r_T(t) - r_M(t) \quad (5.1)$$

Brzina približavanja projektila meti je data sa:

$$v_{cl} = -\dot{r}(t) \quad (5.2)$$

Ugaono ubrzanje mete je dato sa:

$$\dot{\beta} = \frac{n_T}{v_T} \quad (5.3)$$

Komponente vektora brzine mete u koordinatnom sistemu vezanom za zemlju su date sa:

$$v_{T1} = -v_T \cos \beta \quad (5.4)$$

$$v_{T2} = v_T \sin \beta \quad (5.5)$$



Slično tome, brzina i ubrzanje projektila su date sa:

$$\dot{v}_{M1} = a_{M1} \quad (5.6)$$

$$\dot{v}_{M2} = a_{M2} \quad (5.7)$$

$$\dot{R}_{M1} = v_{M1} \quad (5.8)$$

$$\dot{R}_{M2} = v_{M2} \quad (5.9)$$

Ugao *Line of sight* se može izračunati kao:

$$\lambda = \arctan \frac{R_{TM2}}{R_{TM1}} \quad (5.10)$$

Pa je:

$$\dot{\lambda} = \frac{R_{TM1}v_{TM2} - R_{TM2}v_{TM1}}{r^2} \quad (5.11)$$

Ugao između vektora pozicije i vektora brzine je dat sa:

$$L = \arcsin \frac{v_T \sin(\beta + \lambda)}{v_M} \quad (5.12)$$

Također treba uzeti u obzir da je:

$$v_{cl} = -\dot{r} = v_M \cos \delta - v_T \cos \theta \quad (5.13)$$

Te da će doći do sudara samo u slučaju da vrijedi:

$$v_M \cos \delta > v_T \cos \theta \quad (5.14)$$

Upravljački zakon proporcionalne navigacije je dat sa:

$$n_C = N' v_c \dot{\lambda} \quad (5.15)$$

## 5.2 Izvođenje upravljačkog zakona

$$\sin \lambda = \frac{y}{r} \quad (5.16)$$

Za male uglove može se koristiti aproksimacija:

$$\lambda \approx \frac{y}{r} \quad (5.17)$$

, pa je:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)r(t) - y(t)\dot{r}(t)}{r^2} \quad (5.18)$$

$$\ddot{\lambda}(t) = \frac{\ddot{y}(t) - 2\dot{\lambda}(t)\dot{r}(t) - \lambda(t)\ddot{r}(t)}{r(t)} \quad (5.19)$$

Uvedimo vremenski varijantne koeficijente:

$$a_1(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{r(t)} \quad (5.20)$$

$$a_2(t) = 2\frac{\dot{r}(t)}{r(t)} \quad (5.21)$$

$$b(t) = \frac{1}{r(t)} \quad (5.22)$$

Pa se dobija diferencijalna jednačina drugog reda sa varijabilnim koeficijentima:

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} + b(t)\ddot{y}(t) \quad (5.23)$$

Uzimajući u obzir dobija se:

$$\ddot{y}(t) = -a_M(t) + a_T(t) \quad (5.24)$$

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} - b(t)a_M(t) + b(t)a_T(t) \quad (5.25)$$

Neka je  $x_1(t) = \lambda$  i  $x_2(t) = \dot{\lambda}$ . Tada je susret projektila i mete opisan sljedećim diferencijalnim jednačinama prvog reda.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.26)$$

$$\dot{x}_2 = -a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u + b(t)f \quad (5.27)$$

,gdje je uzeto  $u = a_M(t)$  i vanjska smetnja  $f = a_T(t)$ . Prvo posmatrajmo slučaj kada meta ne ubrzava, tj. kada je  $f = 0$ . Sada se problem proporcionalne navigacije može predstaviti kao:

Pronaći upravljački signal  $u$  tako da je sistem opisan jednačinama 5.26 i 5.27 asimptotski stabilan u odnosu na  $x_2$

Shodno tome, uzmimo Lyapunovu funkciju  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{2}cx_2^2 \quad (5.28)$$

Izvod po vremenu duž bilo koje trajektorije je:

$$\dot{Q} = cx_2(-a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u(t)) \quad (5.29)$$

Sada se vidi da upravljački signal

$$u = kx_2 = k\dot{\lambda} \quad (5.30)$$

Stabilizuje sistem dat sa 5.26 i 5.27 ako  $k$  zadovoljava:

$$kb(t) + a_2(t) > 0 \quad (5.31)$$

,odnosno

$$k > -2\dot{r}(t) = 2v_{cl} \quad (5.32)$$

Prema tome, uvodeći *efektivni navigacijski odnos*  $N$ , izraz 5.30 postaje:

$$u = Nv_{cl}\dot{\lambda}(t) \quad , N > 2 \quad (5.33)$$

čime je potpuno određen zakon vođenja proporcionalne navigacije. Za trodimenzionalni slučaj se bira kandidat funkcija:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^3 d_s \dot{\lambda}_s^2 \quad (5.34)$$

, gdje su  $d_s$  pozitivni koeficijenti. Analogno se dobija upravljački zakon:

$$u_s = Nv_{cl}\dot{\lambda}_s \quad , N > 2 \quad (s = 1, 2, 3) \quad (5.35)$$

### 5.3 Izmjenjena proporcionalna navigacija

Za mete koje manevrišu i imaju neko normalno ubrzanje, za planarni sustre, izvod Lyapunove kandidat funkcije je:

$$\dot{Q} = cx_2(-a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u(t) + b(t)f) \quad (5.36)$$

Odakle se zaključuje da je upravljački signal koji stabilizuje sistem:

$$u = Nv_{cl}\dot{\lambda}(t) + \frac{N}{2}a_T(t) \quad , N > 2 \quad (5.37)$$

### 5.4 Optimalnost zakona proporcionalne navigacije

Ako je promjena LOS ugla različita od nule, tada se primjenjuje normalno ubrzanje kako bi se promjena svela na nulu. U prethodnoj sekciji se proporcionalna navigacija predstavila kao problem upravljanja gdje je normalno ubrzanje bilo upravljački signal, a brzina promjene LOS ugla bila varijabla stanja. Proporcionalna naviga-

cija se može posmatrati kao problem optimalnog upravljanja. Treba pronaći indeks performansi koji proporcionalna navigacija minimizira. Ovo predstavlja inverzni problem problem optimalnog upravljanja. Pretpostavimo da se projektil približava meti konstantnom brzinom. Ignorišući dinamiku projektila, vrijedi:

$$\ddot{y} = -a_M, \quad y = r\lambda, \quad r(\tau) = v_{cl}\tau \quad (5.38)$$

Također pretpostavlja se da nema kašnjenja u dinamici projektila, tj. da je  $a_M = a_{Mc}$ . Definišimo sada indeks performansi:

$$J = \frac{1}{2}Cy^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} a_M^2 dt \quad (5.39)$$

Prvi član predstavlja promašaj (miss distance), a drugi predstavlja energiju energiju utrošenu u toku leta. Ideja je pronaći upravljanje  $a_M$  koje minimizira kriterij performanse  $J$ . Koriteći Bellman-Lyapunov pristup dobija se da je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3\tau}{3/C + \tau^3}(y(t) + \dot{y}(t)\tau) \quad (5.40)$$

Nulti promašaj se dobija za  $C \rightarrow \infty$ , pa je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3}{\tau^2}(y(t) + \dot{y}(t)\tau) \quad (5.41)$$

Uzimajući u obzir da je:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{y}(t)r(t) - y(t)\dot{r}(t)}{r^2} = \frac{\dot{y}(t)\tau + y(t)}{r} \quad (5.42)$$

jer je,  $r = v_{cl}\tau$ , dobija se:

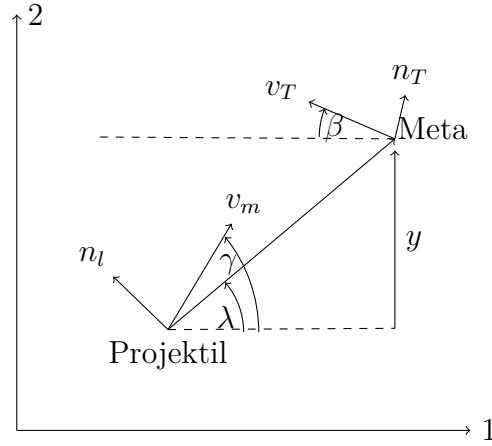
$$a_M(t) = 3v_{cl}\dot{\lambda} \quad (5.43)$$

Ovo znači da pod uvedenim pretpostavkama, proporcionalna navigacija minimizira kriterij performanse  $J$  i izbor efektivnog navigacijskog odnosa  $N = 3$  garantuje da nulti promašaj.

## 5.5 Linearizacija

Linearizacija se može lahko izvršiti ako se definišu nove veličine koje su prikazane na slici 5.2. Relativno ubrzanje se može odrediti sa slike i iznosi:

$$\ddot{y} = n_T \cos \beta - n_c \cos \lambda \quad (5.44)$$



Slika 5.2: Linearizacija jednačina proporcionalne navigacije

Ako su uglovi leta mali, tada vrijedi:

$$\ddot{y} = n_T - n_c \quad (5.45)$$

Slično tako vrijedi:

$$\lambda = \frac{y}{r} \quad (5.46)$$

Za čeonu slučaj vrijedi:

$$v_{cl} = v_M + v_t \quad (5.47)$$

Za potjeru vrijedi:

$$v_{cl} = v_M - v_t \quad (5.48)$$

Sada se može linearizirati i jednačina za udaljenost:

$$r(t) = v_{cl}(t_F - t) \quad (5.49)$$

gdje je  $t_F$  ukupno vrijeme leta.

Definišimo i veličinu *time to go*  $t_{go}$ :

$$t_{go} = t_f - t \quad (5.50)$$

Linearizirani promašaj se definiše kao udaljenost mete i projektila na kraju leta, ili:

$$Miss = y(t_f) \quad (5.51)$$

## 5.6 Petlja navođenja i zero effort miss

Ranije je pokazano da vrijedi:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)r(t) + y(t)v_{cl}}{r^2} \quad (5.52)$$

Kako vrijedi  $r = v_{cl}t_{go}$ , tada se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)t_{go} + y(t)}{v_{cl}t_{go}^2} \quad (5.53)$$

Definišimo sada veličinu *Zero effort miss*, koja predstavlja buduće relativno rastojanje projektila i mete:

$$ZEM = \dot{y}(t)t_{go} + y(t) \quad (5.54)$$

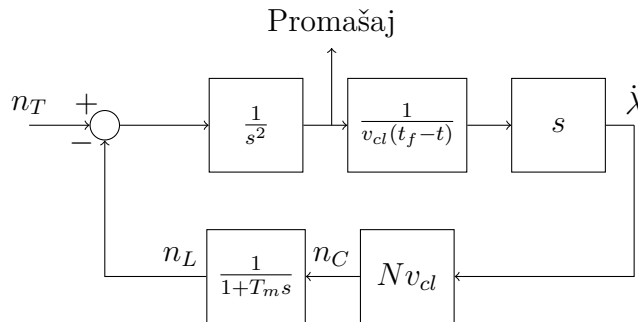
pa se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{ZEM}{v_{cl}t_{go}^2} \quad (5.55)$$

Ako se pretpostavi da će se pod uticajem ubrzanja  $a_c$  postići sudar,  $ZEM$  se može smatrati budućom tačkom susreta, pa se zakon vođenja proporcionalne navigacije može iskazati kao:

$$a_c(t) = N \frac{ZEM}{t_{go}^2} \quad (5.56)$$

Sada se vidi da je normalno ubrzanje projektila direktno proporcionalnu  $ZEM$ -u i inverzno proporcionalno kvadratu preostalom vremenu leta, što znači da se generiše veće ubrzanje što je susret bliži. Pošto se  $ZEM$  posmatra kao buduća tačka susreta, koja se računa na osnovu znanja ili pretpostavki budućeg kretanja mete, PN vođenje se smatra prediktivnim.  $ZEM$  je koristan jer se može izračunati mnoštvom metoda uključujući i on-line numeričku integraciju nelinearnih diferencijalnih jednačina projektila i mete. Prethodno izvedene linealizovane jednačine proporcionalne navigacije se mogu prikazati blok dijagramom kao na slici 5.3. Ulaz sistema je ubrzanje mete, a



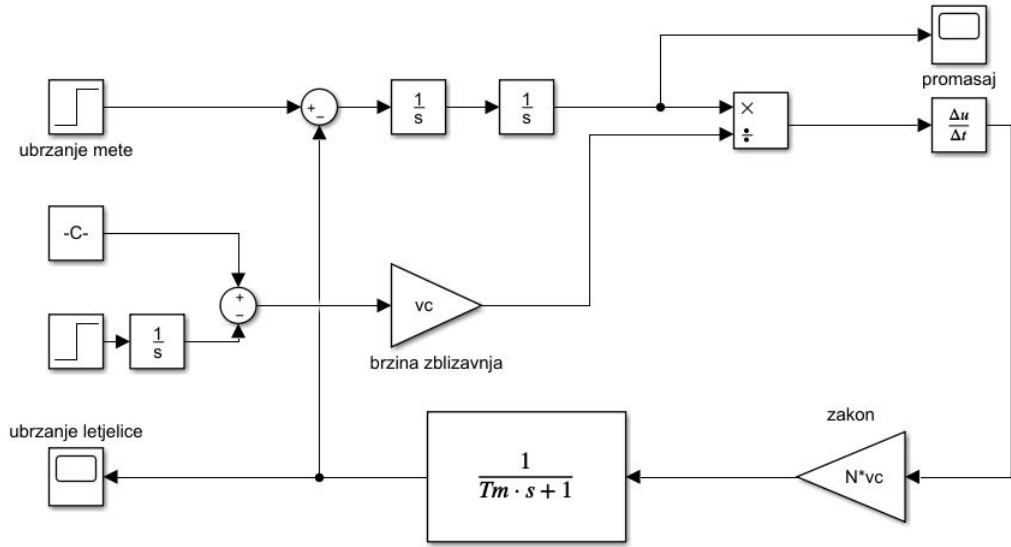
Slika 5.3: Petlja navođenja

u povratnoj sprezi se nalazi upravljački zakon. Pretpostavlja se da je model trekera

idealni diferencijator i sistem za navođenje ne uvodi nikakvo kašnjenje. U stvarnosti, sistem za navođenje se modelira prenosnom funkcijom prvog reda, tj:

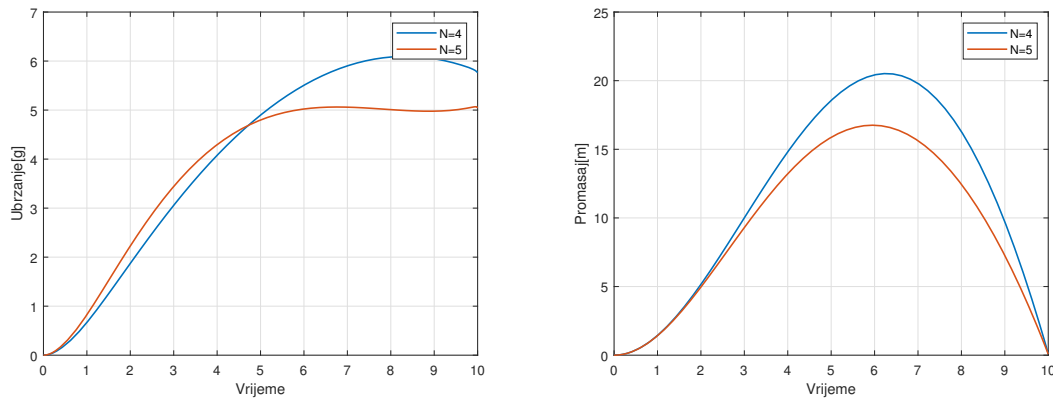
$$\frac{n_L}{n_c} = \frac{1}{1 + sT} \quad (5.57)$$

,gdje je  $n_L$  ostvareno ubrzanje projektila, a  $n_c$  zahtjevano ubrzanje projektila. Ko-



Slika 5.4: Proporcionalana navigacija u Simulinku

risteći Simulink dijagram sa slike 5.4 izvršene su simulacije za  $N = 4$  i  $N = 5$  pri ubrzanju mete od  $3g$ . Ubrzanja projektila su prikazana na grafu 5.5. Vidi se



Slika 5.5: Ubrzanja projektila i promasaj za  $N = 4$  i  $N = 5$

da veći efektivni navigacijski odnos zahtjeva manje ubrzanje projektila pa su time smanjeni i zahtjevi za performansama projektila, međutim veći efektivni navigacijski odnos daje manji promasaj što se vidi na grafiku za promasaj na slici 5.5. U oba slučaja ostvaren je sudar unutar deset sekundi. U nastavku je na slici 5.6 prikazan simulink model izmjenjene proporcionalne navigacije. Ubrzanje projektila





projektila. Koristeći ovu tehniku mogu se dobiti tačne vrijednosti bilo koje veličine u datom trenutku.

Poznato je da je odziv sistema na proizvoljni ulaz potpuno određen impulsnim odzivom sistema, pa tj. vrijedi da je odziv linearnog sistema dat sa:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)h(t, \tau)d\tau \quad (5.58)$$

Fizikalno, impulsni odziv  $h(t-\tau)$  predstavlja odziv sistema na impulsnu pobudu koja se primjeni na sistem u trenutku  $\tau$ . Prema tome određivanje odziva sistema zahtjeva analitičku formu impulsnog odziva. Svaki linearni sistem ima i svoj adjungovani sistem i veza između impulsnog odziva linearnog sistema i njegovog adjungovanog sistema je data sa:

$$h^*(t_f - \tau, t_f - t) = h(t, \tau) \quad (5.59)$$

Ako se uzme da je ulaz sistema Heavysideov impuls, tada je odziv sistema dat sa:

$$y(t) = a \int_0^t h^*(t_f - \tau, t_f - t)d\tau \quad (5.60)$$

,nakon uvođenja smjene  $x = t_f - \tau$ , dobija se:

$$y(t) = a \int_{t_f-t}^{t_f} h^*(x, t_f - t)dx \quad (5.61)$$

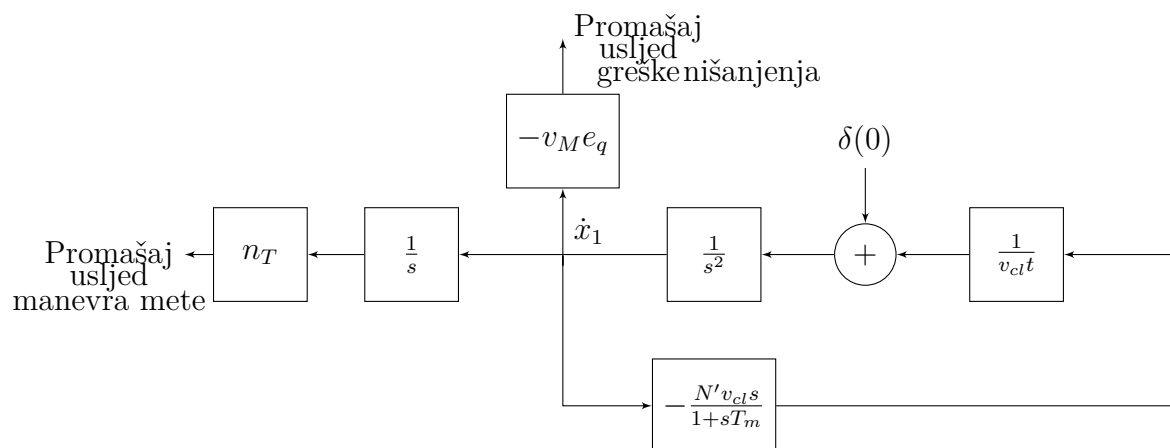
Pošto je veličina od interesa promašaj na kraju leta uzima se  $t_f = t$ , pa prethodna relacija postaje:

$$y(t_f) = a \int_0^{t_f} h^*(x, 0)dx \quad (5.62)$$

Vidi se da se integracija vrši po posmatranom vremenu i da ne zavisi od trenutka primjene impulsa na adjungovani sistem. Ovo znači da se izlaz u trenutku  $t_f$  može dobiti primjenjujući impuls u početnom trenutku, te zatim integrišući ulaz. Konstrukcija adjungovanog modela se vrši prema naredna tri koraka:

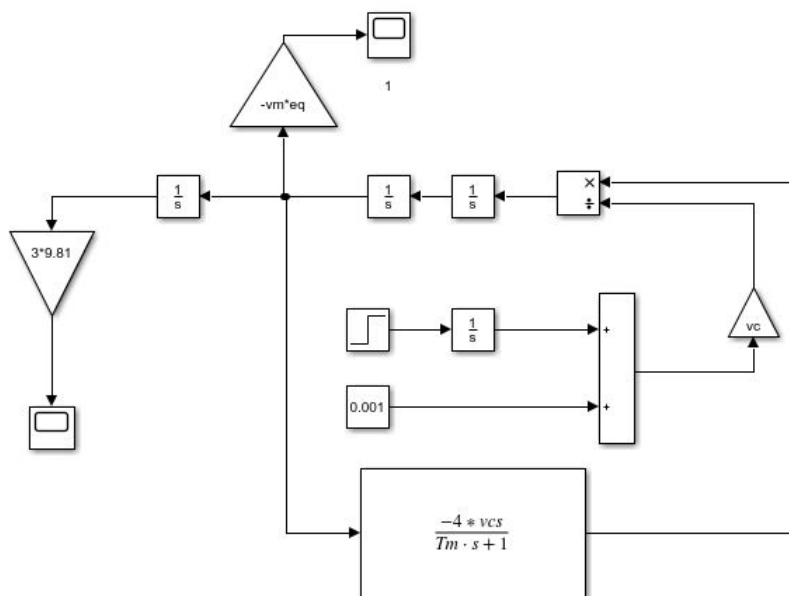
1. Pretvoriti sve ulaze sistema u impulse
2. Zamjeniti  $t$  sa  $t_f - t$  i obratno na mjestima gdje se vrijeme pojavljuje kao argument
3. Promjeniti smjer toka svih signala, mjenjajući sume sa čvorovima i obratno

Koristeći navedena pravila dobija se adjungovana petlja navođenja prikazana na slici 5.8, s tim da je kao smetnja u sistem dodata još i početna greška nišanjenja data sa  $v_M e_q$ , za  $v_M = 610 \frac{m}{s}$  i  $e_q = 20 \text{ deg}$ . Sada je moguće dobiti promašaj usljed manevra mete i promašaj usljed početne greške nišanjenja sve u jednoj simulaciji! Jedinični impuls se može predstaviti kao početni uslov kod prvog integratora. Na



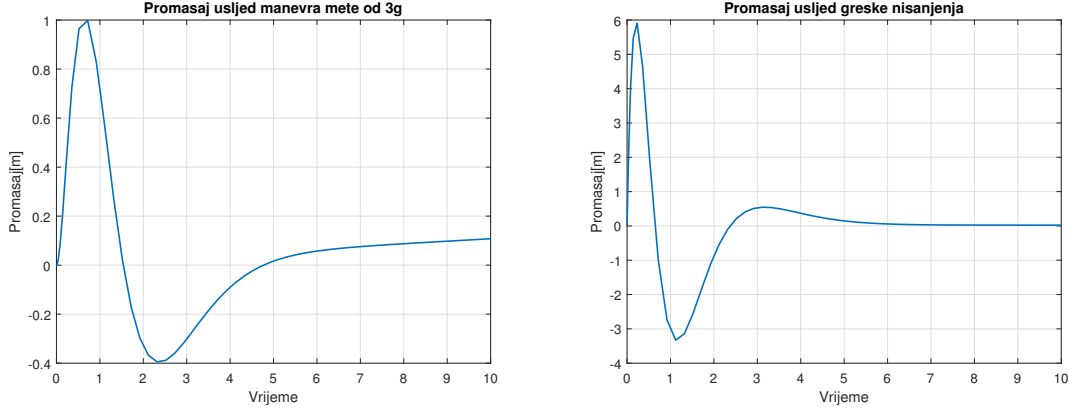
Slika 5.8: Adjungovana petlja navođenja

slici 5.9 je predstavljen Simulink dijagram adjungovanog sistema. Simulacija za



Slika 5.9: Simulink dijagram adjungovanog sistema

date vrijednosti daje promašaj usljed početne greške nišanjenja i promašaj usljed konstantnog manevra mete i oni su prikazani na slici 5.10.



Slika 5.10: Odzivi adjungovanog sistema

## 5.8 Adjungovani stohastički sistemi

Pored mnoštva informacija koje adjungovani sistem daje pri analizi determinističkih sistema, adjugnovana tehnika je dosta korisna pri analizi stohastičkih sistema što je naročito korisno pri analizi petlje navođenja jer su manevri mete u stvarnosti stohastički. Prije nego se prikaže upotreba adjungovane tehnike na petlji navođenja sa stohastičkim ulazima, potrebno je se prisjetiti nekoliko važnih definicija. Očekivana vrijednost slučajne promjenljive  $x$  čija funkcija gustoće vjerovatnoće  $p(x)$  je definisana sa:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (5.63)$$

Standardna devijacija je data sa:

$$\sigma = \sqrt{E(x^2) - E^2(x)} \quad (5.64)$$

Autokorelaciona funkcija je data sa:

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \quad (5.65)$$

Autokorelaciona funkcija predstavlja sličnost dvaju identičnih funkcija pri čemu su one smaknute za neki vremenski interval. Fourieova transformacija autokorelacione funkcije se zove *spektralna gustoća snage* i data je sa:

$$\Phi_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (5.66)$$

Kod bijelog šuma spektralna gustoća snage je konstanta tj.

$$\Phi_{xx} = \phi_0 \quad (5.67)$$

Autokorelaciona funkcija bijelog šuma je delta impuls tj.

$$\phi_{xx} = \Phi_0 \delta(t) \quad (5.68)$$

Ovo znači da je bijeli šum samo u jednoj tački identičan samom sebi. Kod stohastičkih sistema, izlaz je opisan očekivanom vrijednosšću kvadrata izlaza. Prema tome, ako su ulazi tipa bijelog šuma tada vrijedi:

$$y^2(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau_1)h(t, \tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^t x(\tau_2)h(t, \tau_2)d\tau_2 \quad (5.69)$$

Ako je  $x(t)$  slučajna promjenljiva, može se naći i očekvana vrijednost kvadrata izlaza:

$$E[y^2(t)] = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)E[x(\tau_1)x(\tau_2)]d\tau_1d\tau_2 \quad (5.70)$$

Ako je ulaz  $x(t)$  tipa bijelog šuma spektralne gustoće snage  $\Phi$ , tada se prethodni dvojni integral može pojednostaviti zbog impulsne prirode autokorelacione funkcije bijelog šuma, pa vrijedi:

$$E[y^2(t)] = \Phi \int_{-\infty}^t h^2(t, \tau)d\tau \quad (5.71)$$

Sada se prisjetimo da je impulsni odziv adjungovanog sistema  $h^*(t_f - \tau, t_f - t) = h(t, \tau)$  i nakon uvođenja smjene  $x = t_f - \tau$ , dobija se:

$$E[y^2(t)] = \Phi \int_{t_f-t}^{t_f} [h^*(x, t_f - t)]^2 dx \quad (5.72)$$

Pošto je u interesu promašaj na kraju leta, to je:

$$E[y^2(t_f)] = \Phi \int_0^{t_f} [h^*(x, 0)]^2 dx \quad (5.73)$$

Sada se vidi da se očekivana vrijednost kvadrata izlaza može dobiti tako što se kvadrira i integrira izlaz stohastičkog sistema i to sve u toku samo jedne simulacije. Prednost adjungovane metode postaje veća kada se uzme u obzir da na stohastički sistem može djelovati više slučajnih ulaza. Kod adjungovane metode, ulazi postaju izlazi pa se superpozicijom pri samo jednoj simulaciji može dobiti tačna statistička analiza stohastičkog sistema i analiza utjecaja svakog ulaza(tipa bijelog šuma) na performanse sistema.

Sada pretpostavimo da meta izvodi manevar konstantnog normalnog ubrzanja i da ga počinje izvoditi u trenutku  $T$  koji je dat uniformnom raspodjelom i to tako da

vrijedi:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_f}, & za 0 \leq t \leq t_f \\ 0 & za t \geq T \end{cases} \quad (5.74)$$

Prema tome ulaz u petlju vođenja je dat sa:

$$x(t) = n_T u(t - T) \quad (5.75)$$

Ovo znači da je vjerovatnoća pojave manevra jednako vjerovatno u toku cijelog leta. Prema tome, autokorelaciona funkcija ulaza u petlju vođenja je:

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_2)p(T)dT \quad (5.76)$$

pa se dobija:

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = \int_0^{t_f} n_T(t_1 - T)n_T(t_2 - T)\frac{dT}{t_f} \quad (5.77)$$

Ako se pretpostavi da je  $0 < t_1 < t_2 < t_f$ , dobija se autokorelacione funkcija ulaza:

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = \frac{n_T^2}{t_f} \int_0^{t_1} t_1 dT \quad (5.78)$$

Autokorelaciona funkcija sistema sa impulsnim odzivom  $h(t)$  koji je vođen bijelim šumom se može izraziti kao:

$$\phi_{yy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1 - \tau) \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2 - \tau) \phi_{uu}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.79)$$

Gdje je  $\phi_{uu}(t_1, t_2) = \Phi_u \delta(\tau_1 - \tau_2)$ , autokorelaciona funkcija bijelog šuma i  $\Phi_u$  je spektralna gustoće snage i pretpostavlja se da je ona konstantna za cijelo vrijeme leta tj. da vrijedi:

$$\Phi_u(t) = \begin{cases} \Phi_u, & 0 \leq t \leq t_f \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (5.80)$$

Pa se dobija:

$$\phi_{yy}(t_1, t_2) = \Phi_u \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau)h(t_2 - \tau)d\tau \quad (5.81)$$

Sada poredeći prethodnu jednačinu sa 5.78 zaključuje se da su dvije autokorelacione funkcije iste ako je:

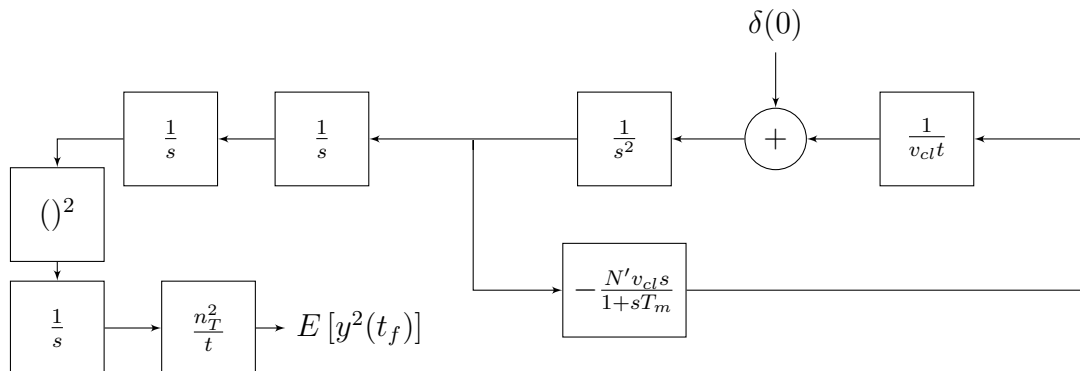
$$\Phi_u = \frac{n_T^2}{t_f} \quad (5.82)$$

$$h(t) = 1 \quad (5.83)$$

Sada se vidi da je manevar konstante amplitude  $n_T$ , kod koga je vrijeme početka djelovanja uniformno raspoređeno u toku vremena leta  $t_f$  ima istu autokorelacionu funkciju kao i linearni sistem sa prenosnom funkcijom  $H(s) = \frac{1}{s}$  na koji djeluje bijeli šum spektralne gustoće snage dat sa:

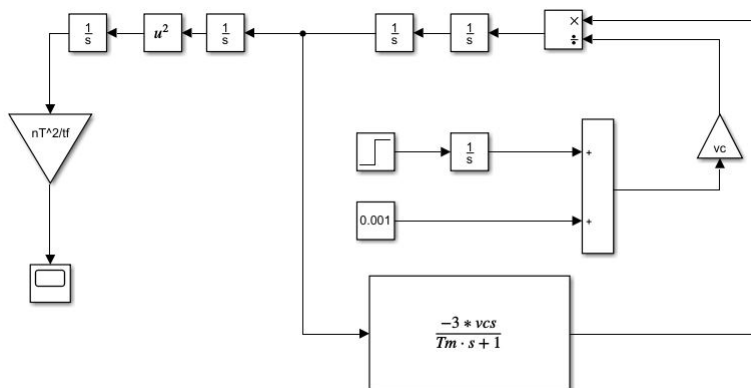
$$\Phi_u(t) = \begin{cases} \Phi_u, & 0 \leq t \leq t_f \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Sada će se prikazati primjena adjungovane tehnike na sthastički sistem. Važe ista pravila za kreiranje adjungovanog sistema kao i ranije sa jednim dodatnim pravilom da se svi stohastički ulazi se moraju modelirati kao bijeli šum koji na kraju postaju izlazi adjungovanog sistema. Pošto se ulaz originalnog sistema modelira kao bjeli šum kroz integrator, adjungovani model će promijeniti tok signala i kvadrirati i integrisati izlaz. Dobijeni adjungovani model je prikazan na slici 5.11. Na slici 5.12 je



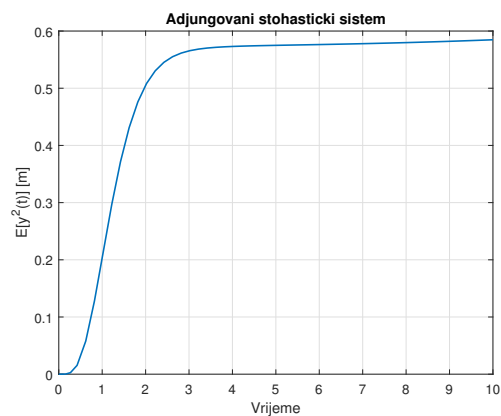
Slika 5.11: Adjungovani stohastički model

prikazan Simulink model adjungovanog stohastičkog sistema. Impulsni signal je u Simulink modelu unešen kao početni uslov na odgovarajućem integratoru. Dobija se



Slika 5.12: Simulink model adjungovanog stohastičkog sistema

očekivana vrijednost kvadrata promašaja kao što je prikazano na grafiku 5.13 Vidi se da je očekivana vrijednost kvadrata promašaja naglo porasla u prve tri sekunde



Slika 5.13: Očekivana vrijednost kvadrata promašaja

leta. Ovo je zbog toga što je upravo u tom intervalu promašaj najveći, nakon toga promašaj počinje opadati.

# Bibliografija

- Shneydor, N.A. (1998.). *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control*. 1. Elsevier Science.
- Siouris, George M. (2004.). *Missile Guidance and Control Systems*. Springer-Verlag New York.
- Graovac, S. (2005.). *Automatsko vođenje objekata u prostoru*. Akademski misao.
- Yanushevsky, R. (2007.). *Modern Missile Guidance*. Taylor & Francis.
- Zarchan, P. (2007.). *Tactical and Strategic Missile Guidance*. AIAA Tactical Missile Series v. 219. American Institute of Aeronautics i Astronautics.
- Drela, M. (2014.). *Flight Vehicle Aerodynamics*. FLIGHT VEHICLE AERODYNAMICS. MIT Press.