

Navigacija i upravljanje projektila

Mirza Hodžić

Mentor: prof. dr. Naser Prljača



FAKULTET ELEKTROTEHNIKE
UNIVERZITET U TUZLI

Sadržaj

| | |
|--|-----------|
| 1 | 5 |
| 2 Jednačine kretanja tijela | 6 |
| 2.1 Koordinatni sistemi | 6 |
| 2.2 Jednačine kretanja čvrstog tijela | 10 |
| 3 Sile koje djeluju na projektil | 17 |
| 3.1 Gravitaciona sila | 17 |
| 3.2 Pogonska sila | 18 |
| 3.3 Aerodinamičke sile | 19 |
| 3.4 Aerodinamički momenti | 21 |
| 4 Dinamički model | 23 |
| 4.1 Softverska implementacija modela | 25 |
| 4.2 Rasprezanje dinamičkog modela | 35 |
| 4.3 Linearizacija u okolini nominalne trajektorije | 36 |
| 5 Uvod u proporcionalnu navigaciju | 40 |
| 5.1 Opis planarnog susreta | 40 |
| 5.2 Izvođenje upravljačkog zakona | 41 |
| 5.3 Izmjenjena proporcionalna navigacija | 43 |
| 5.4 Optimalnost zakona proporcionalne navigacije | 43 |
| 5.5 Linearizacija | 44 |
| 5.6 Petlja navođenja i zero effort miss | 46 |
| 5.7 Adjungovani sistem i petlja navođenja | 48 |
| 5.8 Adjungovani stohastički sistemi | 51 |
| 6 Sinteza autopilota | 56 |
| 6.1 Upravljanje i stabilizacija ugla propinjanja | 56 |
| 6.2 Upravljanje normalnim ubrzanjem | 61 |
| 6.3 Sinteza sistema za vođenje proporcionalnom navigacijom | 66 |

Popis slika

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Koordinatni sistem vezan za tijelo | 7 |
| 2.2 | Eulerovi uglovi | 7 |
| 2.3 | Ubacicu svoju sliku | 8 |
| 2.4 | Predstava šest stepeni slobode | 11 |
| 3.1 | Ugaone veze | 20 |
| 3.2 | Veza između sistema tijela i sistema vjetra | 21 |
| 4.1 | Simulink model projektila | 26 |
| 4.2 | Simulink model projektila | 27 |
| 4.3 | Orijentacija projektila i ugao napada i klizanja pri jediničnom otklonu krmila visine | 30 |
| 4.4 | Brzine projektila u sistemu tijela i inercijalnom sistemu | 30 |
| 4.5 | Putanja projektila za jedinični otklon krmila visine | 31 |
| 4.6 | Vertikalno i normalno ubrzanje projektila za jedinični otklon krmila visine | 31 |
| 4.7 | Putanje pri jediničnom otklonu krmila pravca | 32 |
| 4.8 | Orijentacija projektila i ugao klizanja za jedinični otklon krmila pravca | 32 |
| 4.9 | Trajektorija horizontalnog hita sa jediničnim otklonom elerona | 33 |
| 4.10 | Orijentacija projektila pri horizontalnom hitcu sa jediničnim otklonom elerona | 34 |
| 4.11 | Vertikalno i normalno ubrzanje pri jediničnom otklonu elerona | 34 |
| 4.12 | Blok dijagram lineariziranog modela longitudinalnog kretanja | 39 |
| 5.1 | Prikaz planarnog susreta | 40 |
| 5.2 | Linearizacija jednačina proporcionalne navigacije | 45 |
| 5.3 | Petlja navođenja | 46 |
| 5.4 | Proporcionalna navigacija u Simulinku | 47 |
| 5.5 | Ubrzanja projektila i promašaj za $N = 4$ i $N = 5$ | 47 |
| 5.6 | Simulink model izmjenjene proporcionalne navigacije | 48 |

| | | |
|------|---|----|
| 5.7 | Ubrzanje projektila i promašaj vođen promjenjenom proporcionalnom naivgacijom, $N = 3$ | 48 |
| 5.8 | Adjungovana petlja navođenja | 50 |
| 5.9 | Simulink dijagram adjungovanog sistema | 50 |
| 5.10 | Odzivi adjungovanog sistema | 51 |
| 5.11 | Adjungovani stohastički model | 54 |
| 5.12 | Simulink model adjungovanog stohastičkog sistema | 54 |
| 5.13 | Očekivana vrijednost kvadrata promašaja | 55 |
| 6.1 | Odziv ugla propinjanja u otvorenoj povratnoj sprezi | 57 |
| 6.2 | Povratna sprega po uglu propinjanja | 57 |
| 6.3 | Odziv ugla propinjanja sa zatvorenim povratnom spregom po uglu propinjanja | 58 |
| 6.4 | Odziv ugla propinjanja sa integralnim kompenzatorom | 59 |
| 6.5 | Regulacija sa integralnim kompenzatorom | 59 |
| 6.6 | Povratna sprega po brzini i uglu propinjanja | 59 |
| 6.7 | Simulink shema kaskadne regulacije ugla propinjanja | 60 |
| 6.8 | Odzivi ugla propinjanja sa povratnom spregom po brzini i uglu propinjanja | 60 |
| 6.9 | Odziv normalnog ubrzanja na odskočni otklon krmila visine | 61 |
| 6.10 | Blok dijagram sistem za upravljanje normalnim ubrzanjem | 61 |
| 6.11 | Odziv normalnog ubrzanja sa zatvorenim spregom po ubrzanju je prikazan | 62 |
| 6.12 | Upravljanje normalnim ubrzanjem sa akcelerometrom i brzinskim žiroskopom | 62 |
| 6.13 | Odziv sistema sa povratnom spregom po ubrzanju i brzini ugla propinjanja | 63 |
| 6.14 | PI regulacija normalnog ubrzanja | 64 |
| 6.15 | Odziv normalnog ubrzanja sa PI regulatorom i povratnom spregom sa brzinskim žiroskopom i akcelerometrom | 65 |

Uvod

Jednačine kretanja tijela

2.1 Koordinatni sistemi

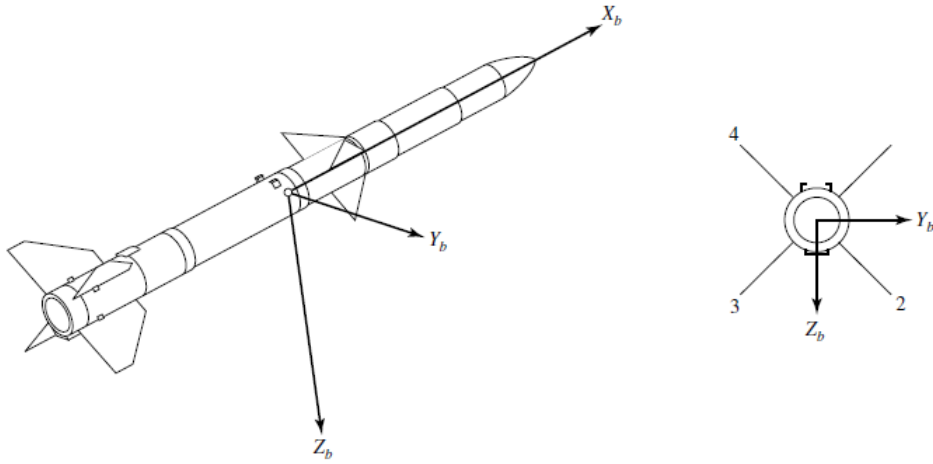
Orijentacija osa koordinatnog sistema preko kojih su određeni vektori ili tenzori potpuno je proizvoljna. Obično se jedna od osi (e.g. x osa) poravnava sa geometrijskom osom tijela. Ako se tijelo kreće stalnom brzinom tada se jedan koordinatni sistem može koristiti za sve veličine, međutim ako se tijelo rotira tada se naslućuju dva koordinatna sistema:

- Koordinatni sistem vezan za zemlju
- Koordinatni sistem vezan za tijelo

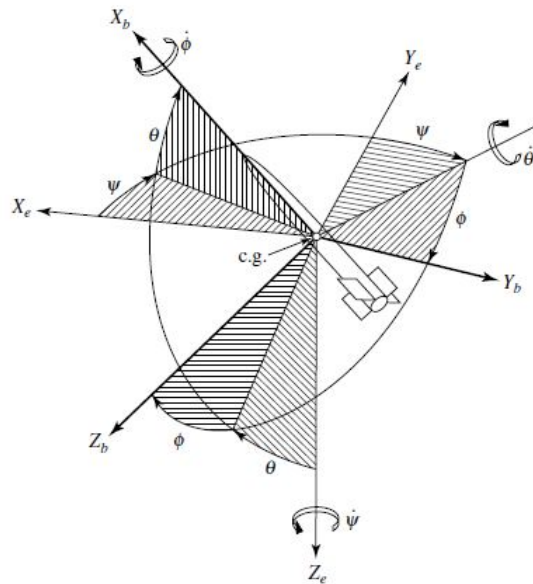
Koordinatni sistem vezan za zemlju je inertcijalni iako se zemlje rotira u odnosu na geometrijsku osu. Sastoji se od tri ordinate, jedna predstavlja poziciju po sjevernoj osi, jedna po lokalnoj istočnoj osi i jedna predstavlja vertikalnu poziciju. Ose koordinatnog sistema vezanog za zemlju su označene sa X_e, Y_e, Z_e . Drugim riječima, X_e i Y_e leže u ravni dok je Z_e usmjeren ka centru Zemlje.

Koordinatni sistem vezan za tijelo sastoji se iz tri ordinate sa ishodištem u centru gravitacije letjelice: x osa koja je usmjerena ka nosu letjelice tj. podudara se sa longitudinalnom osom, y ose koja je usmjerena ka desnom krilu letjelice i z ose koja dopunjava lijevo orijentisani koordinatni sistem. Da se definiše položaj letjelice u odnosu na koordinatni sistem koriste se Eulerovi uglovi (ψ, θ, ϕ) . Ovo znači da se bilo koja rotacija, odnosno transformacija iz sistema tijela u sistem Zemlje može postići sa tri rotacije oko osi i to prva rotacija za ugao ϕ oko longitudinalne, za ugao θ oko lateralne i za ugao ψ oko normalne ose. Transformacija T_b^e koja ostvaruje transformaciju iz koordinatnog sistema vezanog za zemlju u koordinatni sistem vezan za tijelo je data sa:

$$T_{z \rightarrow b} = T_1(\phi)T_2(\theta)T_3(\psi) \quad (2.1)$$



Slika 2.1: Koordinatni sistem vezan za tijelo



Slika 2.2: Eulerovi uglovi

,gdje je:

$$T_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$T_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$T_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

,odnosno:

$$T_{z \rightarrow b} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

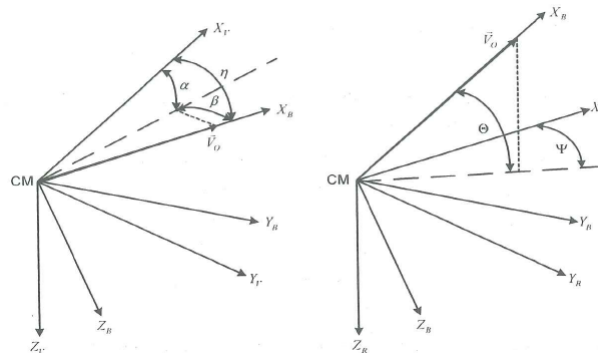
Treba primjetiti da rezultatna matrica $T_{z \rightarrow b}$ može imati singularitete, pa se domen Eulerovih uglova ograničava na sljedeći način:

$$\begin{aligned} -\pi &\leq \phi < \pi \quad \text{ili} \quad 0 \leq \phi < 2\pi \\ -\pi &\leq \psi < \pi \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ili} \quad 0 \leq \psi < 2\pi \end{aligned}$$

Ovo znači da u ovom slučaju postoji beskonačno mnogo načina da se ostvari željena transformacija. Ovaj problem se može riješiti uvođenjem jediničnog kvaterniona. Još jedan iznimno važan koordinatni sistem je *koordinatni sistem brzine tijela (BKS)*. Ovaj Koordinatni sistem se koristi kad god relativno kretanje objekta u odnosu na okolinu ima za posljedicu pojavu reaktivnih sila. Koordinatni sistem brzine je vezan za vektor brzinu objekta. Ishodište koordinatnog sistema sistema brzine tijela se podudara sa centrom mase tijela (centar mase se može mijenjati tokom leta zbog utroška goriva), dok je X osa kolinearna sa vektorom brzine objekta. Druge dvije ose se proizvoljno definišu u ravni normalnoj na vektor brzine. Najčešće se uzima da Z osa zadovoljava barem jedan od naredna dva uslova:

- Z leži u presjeku ravni normalne na vektor brzine i vertikalne ravni simetrije pokretnog objekta.
- Z leži u presjeku ravni normalne na vektor brzine i vertikalne ravni referentnog koordinatnog sistema.

Koordinatni sistem brzine je prikazan na slici 2.3. Ugao između X ose sistema



Slika 2.3: Ubacicu svoju sliku

tijela i X ose sistema brzine je označen sa η i ovim uglom se i definiše koordinatni

sistem brzine tijela. Ugao α je ugao između Z_b ose sistema tijela i projekcije vektora brzine na vertikalnu ravan sistema tijela. Ovaj ugao se napadni ugao o kojem će više riječi biti kasnije. Ugao β je ugao između vektora brzine i vertikalne ravni sistema tijela. Ovaj ugao se zove ugao klizanja i o njemu će više riječi biti kasnije. Transformacija sistema brzine u sistem tijela se postiže rotacijom oko Y ose sistema tijela za ugao α praćene rotacijom oko Z ose dobijenog sistema za ugao β . Odgovarajuća matrica transformacije je:

$$T_{v \rightarrow b} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Nakon množenja matrica, dobija se:

$$T_{v \rightarrow b} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Veza između sistema Zemlje (inercijalnog sistema) i sistema brzine je data uglovima Θ (ugla elevacije vektora brzine) i Ψ , ugla azimuta vektora brzine. Transformacija iz inercijalnog sistema u sistem brzine se dobija rotacijom za Θ oko X ose sistema brzine, zatim rotacijom oko Z ose za Ψ . Odgovarajuća matrica transformacije je:

$$T_{z \rightarrow v} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Nakon množenja matrica, dobija se:

$$T_{z \rightarrow v} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ \sin \Theta \cos \Psi & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Sada su dobijene matrice koje opisuju transformacije iz sistema Zemlje u sistem tijela, iz brzinskog sistema u sistem tijela i iz sistema Zemlje u brzinski koordinatni sistem. Ako je potrebna obrnuta transformacija, može se iskoristiti osobina da elementarne matrice transformacije imaju ortogonalne kolone, tj. njihov skalarni proizvod je nula. Odavde slijedi da je transponovana matrica elementarne transformacije jednaka svom inverzu, odnosno $T_i(\epsilon)^T = T_i^{-1}(\epsilon)$. Uzmimo sada $T_{z \rightarrow b}$. Vrijedi:

$$T_{z \rightarrow b} = T_1(\phi)T_2(\theta)T_3(\psi)$$

pa je:

$$\begin{aligned}
 T_{z \rightarrow b}^T &= T_3^T(\psi)T_2^T(\theta)T_1^T(\phi) \\
 &= T_3^{-1}(\psi)T_2^{-1}(\theta)T_1^{-1}(\phi) \\
 &= [T_1(\phi)T_2(\theta)T_3(\psi)]^{-1} = T_{z \rightarrow b}^{-1} = T_{b \rightarrow z}
 \end{aligned}$$

Ovo sada znači da se inverzna matrica transformacije može naći transponovanjem originalne matrice transformacije.

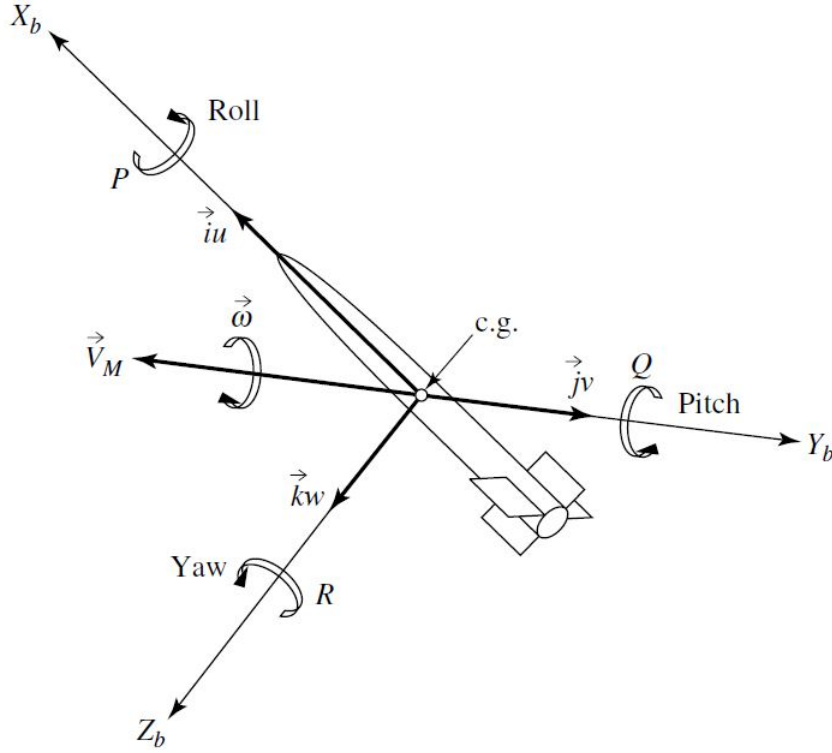
2.2 Jednačine kretanja čvrstog tijela

Sada ćemo posmatrati tipični projektil i izvesti jednačine koje opisuju njegovo kretanje. Pretpostaviti će se da čvrsto tijelo nema promjena u obliku pri kretanju. Translacija tijela podrazumijeva da svaka duž koja spaja bilo koje dvije tačke u tijelu bude paralelna svojoj datoj originalnoj poziciji, prema tome čvrsto tijelo se može posmatrati kao čestica čija je masa skoncentrisana u jednoj tački koja se zove *centar mase*. Dalje se pretpostavlja da se oblik tijela ne mjenja usljed djelovanja sila na tijelo. Ovom pretpostavkom se dobija da međusobni utjecaj dijelica tijela eleiminisan pa se translacija može potpuno opisati translacijom centra mase i da se rotacija može potpuno opisati rotacijom oko centra mase. Dodatno pretpostavlja se da se ravan simetrije poklapa sa ravninom $X_b - Z_b$ kao što je to prikazano na slici 2.1. Također pretpostavlja se da je masa tijela konstantna. Važno je napomenuti da se jednačine tijela određuju u koordinatnom sistemu vezanom za tijelo. Nadalje, projektil ima šest stepeni slobode(6-DOF). Ovih šest stepeni se sastoje iz od tri translacije i tri rotacije. Translacije se sastoje od kretanja duž osi X_b, Y_b, Z_b brzinom $v_m = (u, v, w)$, a rotacije se sastoje od rotacija oko ovih osi ugaonom brzinom $\omega = (P, Q, R)$. Šest stepeni slobode je prikazano na slici 2.4 Kao što je ranije rečeno dinamički model projektila se dobija Newtonovim zakonom dinamike, koji kaže da je suma svih vanjskih sila jednaka brzini promjene impulsa tijela i da je suma svih vanjskih momenata jednaka brzini promjene moomenta impulsa. Prema tome vrijede relacije:

$$\sum F = \frac{d(mv_m)}{dt}|_{Zemlja} \quad (2.10)$$

$$\sum M = \frac{dH}{dt}|_{Zemlja} \quad (2.11)$$

gdje je H ugaoni momentum a $\sum M$ je suma svih vanjskih momenata koji djeluju na tijelo. Naravno, prethodne relacije predstavljaju promjene vektora u odnosu na inercijalni prostor. Rezultantna vanjska sila koja djeluje na tijelo se može razložiti na sile koje djeluju po osama koordinatnog sistema vezanog za tijelo projektila, pa



Slika 2.4: Predstava šest stepeni slobode

se može napisati:

$$\sum \Delta F = \sum \Delta F_x i + \sum \Delta F_y j + \sum \Delta F_z k \quad (2.12)$$

Poredeći prethodnu jednačinu sa 2.10 dobija se:

$$F_x = \frac{d(mu)}{dt}, F_y = \frac{d(mv)}{dt}, F_z = \frac{d(mw)}{dt} \quad (2.13)$$

Analogno, dobija se da vrijedi:

$$L = \frac{dH_x}{dt}, M = \frac{dH_y}{dt}, N = \frac{dH_z}{dt} \quad (2.14)$$

Gdje su L , M i N moment valjanja, moment propinjanja i moment zakretanja respektivno i H_x , H_y i H_z su komponente momenta impulsa duž osa tijela. Sada želimo proširiti jednačine 2.13 i 2.14 kako bi smo dobili jednačine kretanja za svaki stepen slobode. U svrhu toga koristi se formula za brzinu promjenu brzine projektila u inercijalnom sistemu, tj. u koordinatnom sistemu vezanom za zemlju i ona je data relacijom:

$$\left(\frac{dv_m}{dt} \right)_{Zemlja} = \left(\frac{dv_m}{dt} \right)_{tijelo} + \omega \times v_m \quad (2.15)$$

Prema tome vrijedi da je ukupna vanjska sila koja djeluje na tijelo data sa:

$$F = m \left(\frac{dv_m}{dt} \right)_{tijelo} + m(\omega \times v_m) \quad (2.16)$$

gdje je vektorski proizvod linearne brzine i ugaone brzine dat sa:

$$\omega \times v_m = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ u & v & w \end{vmatrix} = (wQ - vR)i + (uR - wP)j + (vP - uQ)k \quad (2.17)$$

Koristeći se činjenicom da je $v_m = ui + vj + wk$ i uvrštavanjem prethodne jednačine u 2.16 dobija se:

$$\sum \Delta F = m(\dot{u}i + \dot{v}j + \dot{w}k) + (wQ - vR)i + (uR - wP)j + (vP - uQ)k \quad (2.18)$$

Sada, poredeći sa 2.12 dobijaju se jednačine:

$$\sum \Delta F_x = m(\dot{u} + wQ - vR) \quad (2.19)$$

$$\sum \Delta F_y = m(\dot{v} + uR - wP) \quad (2.20)$$

$$\sum \Delta F_z = m(\dot{w} + vP - uQ) \quad (2.21)$$

Prethodno dobivene tri jednačine predstavljaju *linearne jednačine kretanja*. Sada treba odrediti ove tri jednačine za rotaciono kretanje. Da bi se to postiglo potrebno je imati izraz za moment impulsa H kao što imamo izraz za impuls kod translatorsnog kretanja. Moment impulsa oko proizvoljne tačke O materijalne tačke je dat sa:

$$H = r \times mV = mr \times (\omega \times r) \quad (2.22)$$

Vektor momenta impulsa H je normalan r i na v i H je usmjeren isto kao i moment impulsa M . Moment impulsa cijelog tijela oko tačke O je dat sa:

$$H = \sum r \times mv_m = \sum mr \times (\omega \times r) = \sum m [\omega(r \cdot r) - r(r \cdot \omega)] \quad (2.23)$$

ili u formi integrala:

$$H = \int r \times (\omega \times r) dm \quad (2.24)$$

Sada slijedi:

$$\omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{vmatrix} = (zQ - yR)i + (xR - zP)j + (yP - xQ)k \quad (2.25)$$

i konačno:

$$r \times (\omega \times r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ zQ - yR & xR - zP & yP - xQ \end{vmatrix} \quad (2.26)$$

Sada se konačno dobija izraz za moment impulsa:

$$\begin{aligned} H = & i \int [(y^2 + z^2)P - xyQ - xzR] dm + j \int [(z^2 + x^2)Q - yzR - xyP] dm \\ & + k \int [(x^2 + y^2)R - xzP - yzQ] dm \end{aligned} \quad (2.27)$$

Kada se uvedu oznake:

$$\begin{aligned} I_x = \int (y^2 + z^2) dm, I_y = \int (x^2 + z^2) dm, I_z = \int (x^2 + y^2) dm \\ I_{xy} = \int xy dm, I_{yz} = \int yz dm, I_{xz} = \int xz dm \end{aligned} \quad (2.28)$$

Tada se dobija:

$$H = (PI_x - RI_{xz})i + QI_yj + (RI_z - PI_{xz})k \quad (2.29)$$

Sada se vektor momenta impulsa može zapisati preko svojih komponenti:

$$H_x = PI_x - RI_{xz} \quad (2.30)$$

$$H_y = QI_y \quad (2.31)$$

$$H_z = RI_z - PI_{xz} \quad (2.32)$$

Sada su potrebni izvodi momenta impulsa kako bi smo dobili izraz za resultantni moment. Pošto je izvod vektora u inercijalnom prostoru jednak zbiru izvoda pojedinačnih komponenti vektora. Prema tome vrijedi:

$$\frac{dH_x}{dt} = I_x \frac{dP}{dt} - I_{xz} \frac{dR}{dt} \quad (2.33)$$

$$\frac{dH_y}{dt} = I_y \frac{dQ}{dt} \quad (2.34)$$

$$\frac{dH_z}{dt} = I_z \frac{dR}{dt} - I_{xz} \frac{dP}{dt} \quad (2.35)$$

Relacija 2.11 se može napisati kao:

$$\sum \Delta M = \frac{dH}{dt} + \omega \times H \quad (2.36)$$

Ako se uvaži da je $\sum \Delta M = \sum \Delta Li + \sum \Delta Mj + \sum \Delta Nk$, korištenjem prethodno dobivenih izraza za izvod momenta impulsa dobija se:

$$\sum \Delta L = \dot{P}I_x + QR(I_z - I_y) - (\dot{R} + PQ)I_{xz} \quad (2.37)$$

$$\sum \Delta M = \dot{Q}I_y + PR(I_x - I_z) + (P^2 - R^2)I_{xz} \quad (2.38)$$

$$\sum \Delta N = \dot{R}I_z + PQ(I_y - I_x) - (\dot{P} - QR)I_{xz} \quad (2.39)$$

Prethodne tri jednačine zajedno sa jednačinama 2.19, 2.20 i 2.21 predstavljaju jednačine projektila sa šest stepeni slobode. Ove jednačine su simultane linearne jednačine kretanja sa šest promjenjivih u, v, w, P, Q i R koje potpuno opisuju kretanje čvrstog tijela. Rješenja ovih jednačina se mogu dobiti numeričkim metodama na digitalnom računaru. Analitička rješenja dovoljne tačnosti se mogu dobiti linearizacijom. I_x, I_y i I_{xz} su konstantne i za projekte sa krstastom konfiguracijom vrijedi $I_y = I_z$ i $I_{xz} = 0$. Prema tome, vrijedi:

$$\sum \Delta L = \dot{P}I_x + QR(I_z - I_y) \quad (2.40)$$

$$\sum \Delta M = \dot{Q}I_y + PR(I_x - I_z) \quad (2.41)$$

$$\sum \Delta N = \dot{R}I_z + PQ(I_y - I_x) \quad (2.42)$$

Transformacijom prethodnih jednačina dobija se:

$$\frac{dP}{dt} = QR \frac{I_y - I_z}{I_x} + \frac{L}{I_x} \quad (2.43)$$

$$\frac{dQ}{dt} = PR \frac{I_z - I_x}{I_y} + \frac{M}{I_y} \quad (2.44)$$

$$\frac{dR}{dt} = PQ \frac{I_x - I_y}{I_z} + \frac{N}{I_z} \quad (2.45)$$

Sada je još potrebno odrediti ugaone brzine u zavisnosti od Eulerovih uglova. Izvođenje ovih jednačina zahtjeva pronalaženje izvoda matrice transformacije, što je poprilično zahtjevno, pa će ovdje biti samo navedene diferencijalne jednačine koje daju brzinu promjene Eulerovih uglova:

$$\frac{d\psi}{dt} = (Q \sin \phi + R \cos \phi) / \cos \theta \quad (2.46)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q \cos \phi - R \sin \phi \quad (2.47)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = P + \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \sin \theta \quad (2.48)$$

Sada koristeći matricu transformacije C_e^b se mogu dobiti komponente brzine u koor-

dinatom sistemu Zemlje:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_z \\ \dot{Y}_z \\ \dot{Z}_z \end{bmatrix} = C_e^b \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Sada je jasno da se integracijom jednačina 2.43, 2.44 i 2.45 dobijaju ugaone brzine u sistemu tijela, a integracijom jednačina 2.46, 2.47 i 2.48 se dobija orijentacija u odnosu na zemlju. Da bi se dobila pozicija tijela u odnosu na sistem Zemlje treba riješiti matricnu jednačinu 2.49. Da bi se ona mogla numerički riješiti treba naći izraze za izvode brzinu u sistemu tijela. Oni se mogu dobiti iz jednačina 2.19, 2.20 i 2.21. Nakon transformacije ovih jednačina ima se:

$$\frac{du}{dt} = vR - wQ + F_x/m \quad (2.50)$$

$$\frac{dv}{dt} = wP - uR + F_y/m \quad (2.51)$$

$$\frac{dw}{dt} = uQ - vR + F_z/m \quad (2.52)$$

Sada se nakon rješavanja prethodne tri jednačine mogu dobiti vrijednosti brzina u sistemu tijela te nakon toga može se riješiti jednačina 2.49 i tako dobiti poziciju u odnosu na sistem Zemlje. Prethodnih 12 jednačina se može predstaviti u prostoru stanja ako se uzme vektor varijabli stanja:

$$\vec{X} = [u \quad v \quad w \quad P \quad Q \quad R \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad x_z \quad y_z \quad z_z]^T$$

i vektor upravljačkih promjenljivih:

$$\vec{u} = [\delta_v \quad \delta_P \quad \delta_e]^T$$

,gdje je δ_v ugao otklona krmila visine, δ_P , ugao otklona krmila i δ_e , ugao toklona elerona. Upravljačke varijable se na prvu ruku ne vide i predstavljenim jednačinama, ali ubrzo ćemo se uvjeriti da sile i momenti koji djeuju na projektil zavise upravo od ovih upravljačkih varijabli. Ovime se dobija nelinearna vektorska jednačina:

$$\dot{\vec{X}} = f(\vec{X}, \vec{u}, t) \quad (2.53)$$

Prethodna jednačina je doista nelinearna najprije zbog prirode modela, postojanja trigonometrijskih funkcija i zbog nelinearne zavisnosti sila i momenata od otklona upravljačkih površina. Kako bi se izvršila sinteza regulatora prethodna jednačina se najprije treba linearizirati za određeni režim leta. Već se nadzire da se linearizacija može izvršiti nalaženjem prvih izvoda vektorske funkcije $f(\vec{X}, \vec{u}, t)$ za određene

uslove leta. Dobijena matrica bi imala 144 elementa koji su u stvari prvi izvodi raznih parametara modela pa je evidentno da treba poznavati zavisnosti parametra od vremena i međusobne zavisnosti varijabli stanja.

Sile koje djeluju na projektil

Ranije su izvedene jednačine(Eulrove) koje opisuju kretanje projektila. U ovim jednačinama se pojavljuju sile i momenti koji djeluju na projektil, te je nephodno i njih odrediti kako bi se postigao potpun dinamilki model projektila. Također, poznavanje prirode ovih sila je neophodno kako bi se moglo upravljati projektilom jer se upravo kontrolom ovih sila postiže upravljanje projektila. Sile koje djeluju na projektil su u letu su aerodinamičke, pogonske sile i gravitaciona sila. Ove sile se mogu razložiti po osama kooridnatnog sistema vezanog za tijelo i mogu se izraziti u inercijalnom kooridnatnom sistemu.

3.1 Gravitaciona sila

Prije svega važno je istaći da se gravitaciona sila ne može koristiti za upralvjanje projektilom i ona predstavlja ništa više od vanjske smetnje na sistem automatskog upralvjanja. Gravitaciona sila predstavlja vektor koji je usmjeren ka centru Zemlje i u inercijalnom kooridnatnom sistemu je dat sa:

$$G_z = [0 \ 0 \ mg]^T \quad (3.1)$$

Da bi se dobila vrijednost gravitacione sile u kooridnatnom sistemu tijela, treba se koristiti matrica transformacije:

$$G_b = T_{z \rightarrow b} G_z \quad (3.2)$$

Korištenjem 2.5, dobija se:

$$G_b = mg \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Na sličan način, korištenjem 2.8. se dobija i vektor gravitacione sile u brzinskom koordinatnom sistemu:

$$G_v = T_{z \rightarrow v} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = mg \begin{bmatrix} -\sin \Theta \\ 0 \\ \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Gravitaciona sila se u opštem slučaju mijenja u vremenu pošto se masa projektila mijenja usljed utroška goriva pri letu projektila. Varijacije u gravitacionom ubrzanju se zanemaruju pri promjeni geografske širine. Promjena mase projektila je od krucijalne važnosti za balističke projekte kod kojih 90% mase čini gorivo.

3.2 Pogonska sila

Pogonska sila je sila koju generiše mlazni motor projektila. Karakteristike motora zavise od zahtjeva vođenja i od prirode mete. Motor se nalazi na stražnjem dijelu projektila i stvara reaktivnu silu. Intenzitet ove sile varira u zavisnosti od tipa motora i zadatka projektila. Tipovi projektila mogu biti:

- All-boost- ima za posljedicu veliko ubrzanje projektila i kratko vrijeme leta pošto se gorivo potroši u kratkom roku
- All-sustain- ima za posljedicu stalnu brzinu projektila i dugo vrijeme leta
- Boost-sustain- Ovaj tip motora kombinuje najbolje osobine prethodna dva tipa

Ovdje će se pretpostaviti da mlazni motor generiše silu konstantnog intenziteta. Za većinu projektila smjer sile se ne mijenja i zbog građe projektila uvijek djeluje u pozitivnom smjeru X_b ose pa je pogonska sila u koordinatnom sistemu tijela data sa:

$$P_{tijelo} = [P \ 0 \ 0]^T \quad (3.5)$$

Pogonska sila izražena u sistemu brzine je data sa:

$$P_v = T_{b \rightarrow v} \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T_{v \rightarrow b}^T \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Pa se dobija:

$$P_v = P \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.3 Aerodinamičke sile

Aerodinamička sila je posljedica djelovanja pritiska okolnog fluida na tijelo u pokretu. Aerodinamička sila se može razložiti na tri komponente koje su definisane u nastavku:

- **Uzgon**- Uzgon je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je normalna na relativno kretanje vjetra.
- **Otpor**- Otpor je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je paralelna relativnom kretanju vjetra.
- **Bočna sila**- Bočna sila je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je normalna na uzgon i otpor.

Ovdje se posmatraju projektili koji se zakreću da bi skrenuli(skid to turn) i kod takvih projektila aerodinamičke sile su date sa:

$$\text{Otpor} \quad R_x = C_x q S \quad (3.8)$$

$$\text{Uzgon} \quad R_z = C_z q S \quad (3.9)$$

$$\text{Bočna sila} \quad R_y = C_y q S \quad (3.10)$$

,gdje su C_x , C_y i C_z aerodinamički koeficijenti, q dinamički pritisak slobodnog strujanja u tački daleko od objekta i iznosi $q = \frac{1}{2}\rho v^2$, S je referentna površina i v je brzina vazduha, ρ predstavlja atmosferski pritisak.

Treba napomenuti da se aerodinamičke sile i momenti izražavaju bezdimenzionalnim veličinama. To se postiže tako što se dogovorom utvrdi da se sila(ili moment) predstavlja svojim odgovarajućim aerodinamičkim koeficijentom. Prema tome, C_x potpuno određuje silu otpora i slično vrijedi i za ostale koeficijente.

U opštem slučaju koeficijenti aerodinamičkih sila su funkcije varijabli stanja pa se može napisati:

$$C_x = C_x(\alpha, \beta, M, q, \delta_v, \delta_P, \delta_e) \quad (3.11)$$

,gdje je M Mahov broj- odnos tekuće brzine i brzine zvuka, α napadni ugao i β ugao klizanja. Slično tako vrijedi:

$$C_y = C_y(M, \beta, \delta_P) \quad (3.12)$$

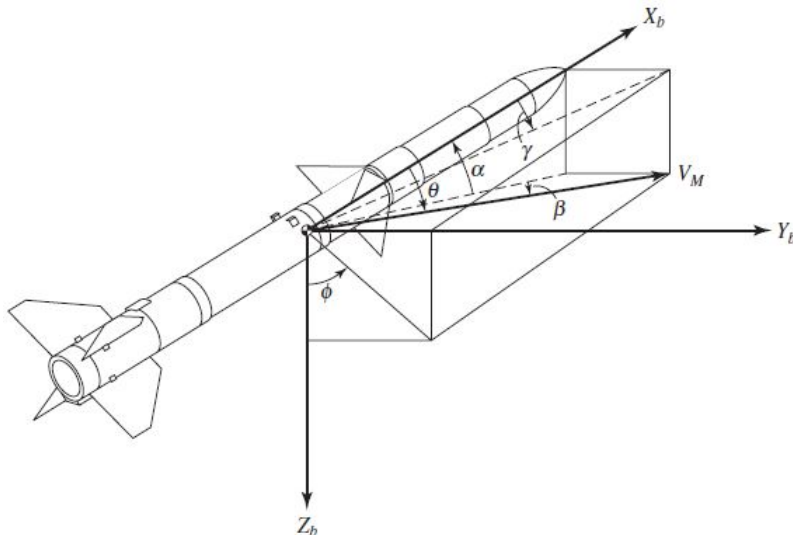
$$C_z = C_z(M, \beta, \delta_v) \quad (3.13)$$

Uglovi α , β i γ su prikazani na slici 3.1 i definisani su sa:

$$\alpha = \arctg(w/u) \quad (3.14)$$

$$\beta = \arcsin(v/v_m) \quad (3.15)$$

Dodatno, napadni ugao α definiše rotaciju sistema tijela oko Y_b ose, a ugao klizaanja



Slika 3.1: Ugaone veze

β definiše rotaciju sistema tijela oko Z_b ose. Sada je potrebno poznavati analitičke oblike aerodinamičkih koeficijenata u zavisnosti od odgovarajućih varijabli stanja. Linearizacijom aerodinamičkih koeficijenata u okolini trenutnih vrijednosti varijabli stanja dobijaju se linearne relacije za aerodinamičke koeficijente koje su izražene u obliku sume *aerodinamičkih izvoda* i varijabli stanja. Razvojem u Taylorov red i odbacivanjem viših članova dobija se aproksimacija aerodinamičkih koeficijenata:

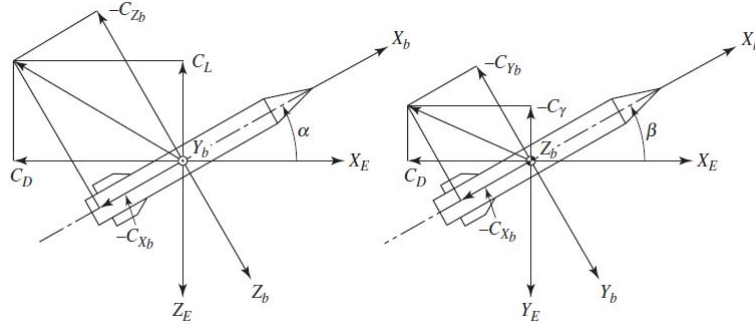
$$C_x = C_{x_0} + C_{x_{\alpha\delta_v}} \alpha + C_{x_{\alpha}^2} \alpha^2 - C_{x_{\delta_v^2}} \quad (3.16)$$

$$C_z = C_z^{\alpha} \alpha + C_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_z^q q + C_z^{\delta_v} \delta_v \quad (3.17)$$

$$C_y = C_y^{\beta} \beta + C_y^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + C_y^q q + C_y^{\delta_P} \delta_P \quad (3.18)$$

,gdje je $C_{x_0} = \frac{\partial c_x}{\partial \alpha}|_{\alpha=0}$, $C_{x_1} = \frac{\partial c_x}{\partial \alpha}$ i slično tako za ostale izvode.

Također je važno istaći da su ovi koeficijenti(tj. sile) izražene u *koordinatnom sistemu vjetra* relativnom toku vazduha. Koordinatni sistem vazduha je prikazan na slici 3.2. Čest se u literaturi ovi koeficijenti definišu u *koordinatnom sistemu brzine tijela*, kod kojeg se X osa podudara sa brzinom letjelice, ali zbog pretpostavke da je brzina vjetra zanemariva u inercijalnom koordinatnom sistemu razlika u ovim koordinatnim sistemima ne igra ulogu. Izuzetno je korisno imati i vrijednosti aero-



Slika 3.2: Veza između sistema tijela i sistema vjetra

dinamičkih sila u koordinatnom sistemu tijela. One su date sa:

$$\begin{bmatrix} F_{ax} \\ F_{ay} \\ F_{az} \end{bmatrix} = -\frac{\rho v_m^2 \pi D^2}{8} \begin{bmatrix} C_{x0} + \alpha^2 + \beta^2 \\ C_{NA}\alpha \\ C_{NA}\beta \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.4 Aerodinamički momenti

Momenti se mogu podijeliti na momente koji su posljedica aerodinamičkog tereta i pogonske sile koja ne djeluje kroz centar gravitacije. Moment koji je posljedica rezultantne sile koja ne djeluje na centar koordinatnog sistema tijela se može podijeliti na tri komponente, i to:

- **Moment valjanja** je moment oko lateralne ose(Y_b) projektila i generisan je od uzgonom i otporom koje djeluju na tijelo. Pozitivan moment je u smjeru gore od nosa letjelice
- **Moment propinjanja** je moment oko longitudinalne ose(X_b) projektila. Posljedica je uzgona koji je uzrokovan nekom vrstom elerona. Pozitivan moment propinjanja uzrokuje kretanje nadole desnog krila.
- **Moment zakretanja** je moment oko vertikalne ose projektila(Z_b). Pozitivan moment zakretanja ima za posljedicu da se nos aviona zakrene u desno.

Kvantitativno, momenti su dati sa:

$$\text{Moment valjanja} \quad L = C_l q S b \quad (3.20)$$

$$\text{Moment propinjanja} \quad M = C_m q S c \quad (3.21)$$

$$\text{Moment zakretanja} \quad N = C_n q S b \quad (3.22)$$

,gdje je b raspon krila, c je razmak između početne i krajnje ivice krila mjerene u smjeru paralelnom toku vazduha, S je površina platforme krila. Isto kao i kod slučaja sa silama, koeficijenti momenata također zavise od više promjenjivljih i potrebno ih je linearizirati.

Linearizirani koeficijenti momenta su:

$$C_M = C_M^\alpha \alpha + C_M^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_M^Q Q/(2v_m) + C_M^{\delta_v} \delta_v \quad (3.23)$$

,koeficijent momenta skretanja je:

$$C_N = C_N^\beta \beta + C_N^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + C_N^R R/(2v_m) + C_N^{\delta_P} \delta_P \quad (3.24)$$

Pri čemu je za krstastu konfiguraciju $C_M^\alpha = C_N^\beta$, $C_N^{\dot{\beta}} = C_M^{\dot{\alpha}}$, $C_M^Q = C_N^R$, $C_M^{\delta_v} = C_N^{\delta_P}$. Koeficijent momenta valjanja se linearizuje tako da se dobije:

$$C_L = C_L^P P/(2v_m) + C_L^Q Q/(2v_m) + C_L^R R/(2v_m) + C_L^\alpha \alpha + C_L^\beta \beta + C_L^{\delta_e} \delta_e + C_L^{\delta_v} \delta_v + C_L^{\delta_P} \delta_P \quad (3.25)$$

Važno je istaći da se kod proračuna momenta valjanja ističu samo koeficijenti C_L^P i $C_L^{\delta_e}$ a u nekim analizama se uzimaju i koeficijenti C_L^α i C_L^β . Prema tome, koeficijent momenta valjanja se približno može izraziti kao:

$$C_L \approx C_L^P P/(2v_m) + C_L^{\delta_e} \delta_e \quad (3.26)$$

Najvažnije od svega je činjenica da su aerodinamički momenti posljedica geometrijskog razmaka centra gravitacije i napadne tačke aerodinamičkih sila(tj. centra pritiska). Ova razlika se izražava preko veličine zvane *statički stabilitet*. Konkretno, vrijedi:

$$C_M^\alpha = C_z^\alpha (X_{cg} - X_{cp})/C \quad (3.27)$$

$$C_N^\beta = C_y^\beta (X_{cg} - X_{cp})/C \quad (3.28)$$

Fizikalna interpretacija statičkog stabiliteta je takva da ako letjelica ima centar gravitacije bliže nosu nego centar pritiska, da će letjelica sama po sebi doći u stacionarno stanje nakon svakog prelaznog procesa. Konkretno, komercijalni avioni imaju relativno veliki statički stabilitet. Oni se odlikuju sporim i stabilnim prelaznim procesima. S druge strane, borbeni avioni(npr. F22 Raptor) imaju relativno mali statički stabilitet ili su nestabilni. Ovo je posljedica potrebe za agresivnim manevrima u toku borbe. Pošto se ovakve letjelice odlikuju brzim prelaznim procesima, neophodno je u svakom trenutku korigovati otklon kontrolnih površina što pilot ne može samostalno uraditi.

Dinamički model

Potpun nelinearni dinamički model sastoji iz 12 diferencijalnih jednačina koje su predstavljene ranije. Iznimno je teško dobiti analitičko rješenje ovih diferencijalnih jednačina pa se obično pribjegava numeričkoj simulaciji modela. Zadatak autopilota je da osigura brz prelaz stanja i stabilan odziv u okolini nominalne trajektorije. Pokazaće se da se za nominalnu trajektoriju čitav model može raspregnuti što ima za posljedicu potpuno razdvajanje modela na dva podsistema. Ova praksa je korištena kod starih letjelica zbog uštede računarske moći, ali to danas više nije problem zbog razvoja digitalnih računara, međutim rasprezanje dinamičkog modela je i danas korisno u svrhu sinteze regulatora. Rasprezanje dinamičkog modela uvodi netačnosti u model pošto je za rasprezanje potrebno zanemarivanje određenih veličina pa se preporučuje ispitivanje regulatora na nelinearnom modelu. U nastavku su sumarno prikazane ranije izvedene relacije koje opisuju model projektila krstaste konfiguracije pri čemu treba primjetiti da su ove jednačine sada prikazane u koordinatnom sistemu brzine. Korišten je indeks v (velocity) da se označi vektor u sistemu brzine i indeks b (body) da se označi vektor u sistemu tijela. Da bi se transformisao vektor iz sistema tijela u sistem brzine treba se koristiti inverz matrice transformacije date sa 2.7, koji iznosi:

$$T_b^v = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Nakon množenja matrica dobija se:

$$T_b^v = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Sada se konačno može napisati svih 12 diferencijalnih jednačina modela u koordinatnom sistemu brzine.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F_{xv}}{m} \quad (4.3)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{F_{yv}}{mV \cos \Theta} \quad (4.4)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{F_{zv}}{mV} \quad (4.5)$$

$$\frac{dP}{dt} = L/I_x \quad (4.6)$$

$$\frac{dQ}{dt} = [M + (I_z - I_x)RP]/I_y \quad (4.7)$$

$$\frac{dR}{dt} = [N + (I_x - I_y)PQ]/I_z \quad (4.8)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = (R \cos \phi + Q \sin \phi) / \cos \theta \quad (4.9)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q \cos \phi - R \sin \phi \quad (4.10)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = P + (R \cos \phi + Q \sin \phi) \tan \theta \quad (4.11)$$

$$\frac{dx_z}{dt} = V \cos \Theta \cos \Psi \quad (4.12)$$

$$\frac{dy_z}{dt} = V \cos \Theta \sin \Psi \quad (4.13)$$

$$\frac{dz_z}{dt} = V \sin \Theta \quad (4.14)$$

Ovaj nelinearni model ima tri ulaza (otkloni kontrolnih površina) i svaka od varijabli stana može izlaz pa se kod lineariziranog modela može predstaviti 36 prenosnih funkcija, međutim zbog prirode posmatrane konfiguracije neke od ovih prenosnih funkcija će identički biti jednake nuli. Jedan primjer ovakve prenosne funkcije jeste veza između otklona upravljačke površine za stabilizaciju ugla valjanja i brzine projektila. U prethodnom poglavlju su razvijeni izrazi za sile u koordinatnom sistemu tijela, pa su u nastavku navedene jednačine koje opisuju model u koordinatnog sis-

temu tijela:

$$\frac{du}{dt} = Rv - Qw + (F_{ax} + F_{gx} + T)/m \quad (4.15)$$

$$\frac{dv}{dt} = Pw - Ru + (F_{ay} + F_{gy})/m \quad (4.16)$$

$$\frac{dw}{dt} = Qu - Pv + (F_{az} + F_{gz})/m \quad (4.17)$$

$$\frac{dP}{dt} = L/I_x \quad (4.18)$$

$$\frac{dQ}{dt} = PR \frac{I_z - I_x}{I_y} + M/I_y \quad (4.19)$$

$$\frac{dR}{dt} = PQ \frac{I_x - I_y}{I_z} + N/I_z \quad (4.20)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = P + Q \sin \phi \tan \theta + R \cos \phi \tan \theta \quad (4.21)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q \cos \theta - R \sin \phi \quad (4.22)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = (R \cos \phi + Q \sin \phi) / \cos \theta \quad (4.23)$$

Ovakav prikaza dinamičkog modela je naročito koristan za simulaciju dinamike projektila.

4.1 Softverska implementacija modela

Od velike je koristi imati implementiran dinamički model kako bi se imao bolji uvid u dinamiku projektila. Također neophodno je imati implementiran nelinearni model za potrebe dizajna linearnih regulatora. Regulatori su linearni, ali je potrebno imati i uvjerljiv nelinearni model kako bi se ispitala performanse regulatora. Dinamički model je implementiram koristeći Matlab i Simulink polazeći od jednostavne ideje, da se koristeći prethodno dobivene izraze, izračunaju izvodi varijabli stanja te da se one nakon toga integrale čime se dobijaju stvarne vrijednosti varijabli stanja. Riješene su jednačine od 4.15 do 4.23 uz izraze za ugao napada i ugao klizanja. Prisjetimo se da vrijedi:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w}{v}\right)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

Prema tome, vrijedi:

$$\dot{\alpha} = \frac{u\dot{w} - w\dot{u}}{w^2 + v^2} \quad (4.24)$$

$$\dot{\beta} = \frac{u\dot{v} - v\dot{u}}{u^2 + v^2} \quad (4.25)$$

Također je korištena činjenica da vrijedi:

$$\Theta = \theta - \alpha \quad (4.26)$$

$$\Psi = \psi - \beta \quad (4.27)$$

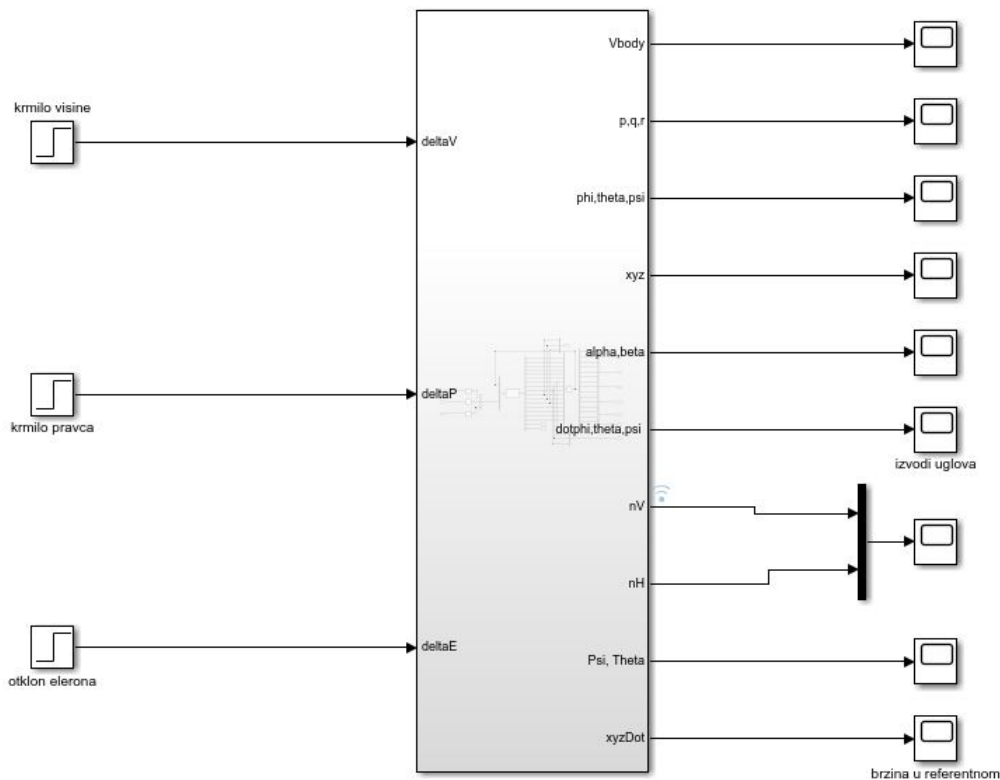
Iz čega se mogu dobiti vertikalno i horizontalno ubrzanje vezano za koordinatni sistem prema relacijama:

$$a_V = v_m \dot{\Theta} + g \cos \Theta \quad (4.28)$$

$$a_H = v_m \dot{\Psi} \cos \Theta \quad (4.29)$$

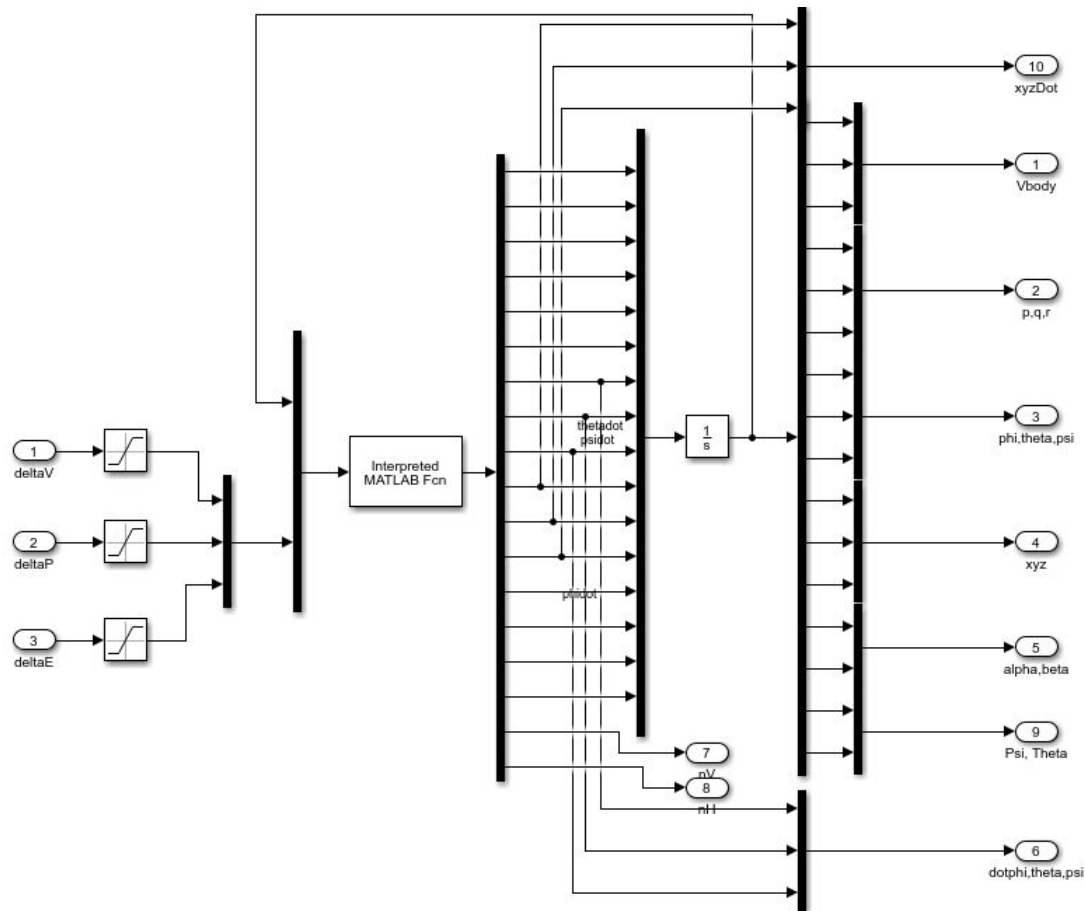
Ova dva ubrzanje su normalna na vektor brzine projektila.

U nastavku je prikazan simulink dijagram koji služi kao nelinearni model projektila sa šest stepeni slobode. Na prethodnoj slici je predstavljen podsistem koji iza sebe



Slika 4.1: Simulink model projektila

krije pravu dinamiku projektila. Na narednoj slici je prikazan ovaj podsistem. Na



Slika 4.2: Simulink model projektila

slici 4.2 se vidi da je kod modela u obzir uzeto da se može postići samo konačan otklon kontrolnih površina. Dalje, koristi se blok interpretirane Matlab funkcije kako bi se riješile simultane diferencijalne jednačine modela, koje se prosljeđuju u integrator sa određenim početnim uslovima. Također ova interpretirana funkcija računa i normalno i vertikalno ubrzanje projektila, kao i ugao elevacije i azimuta vektora brzine. Dakle, ova interpretirana Matlab funkcija kao ulaze ima sve varijable stanja, napadni ugao α i ugao klizanja β , ugao elevacije vektora brzine Θ , ugao azimuta vektora brzine Ψ i otklone upravljačkih površina. U nastavku je prikazan Matlab kod interpretirane funkcije koja rješava jednačine dinamičkog modela.

```

1     function out = modelSolver(X,alpha,beta,Psi, Theta, U)
2
3     u = X(1);
4     v = X(2);
5     w = X(3);
6     p = X(4);
7     q = X(5);
8     r = X(6);
9     phi = X(7);
10    theta = X(8);
    
```

```

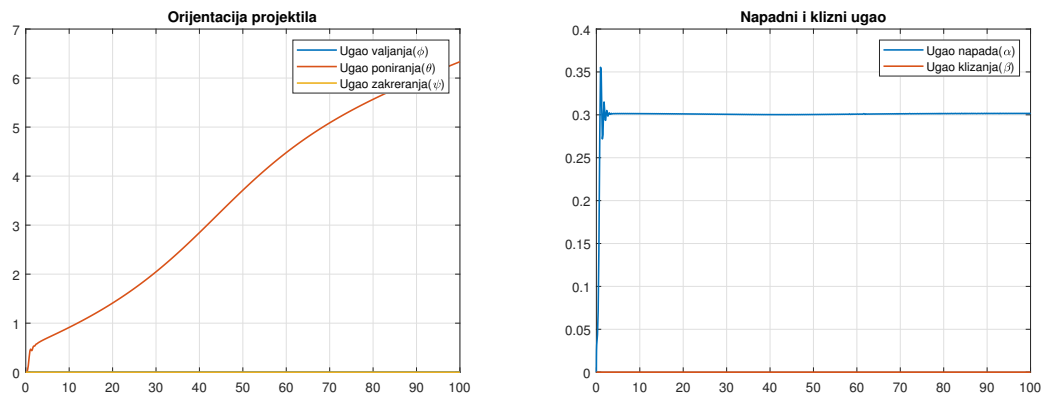
11     psi = X(9);
12
13     xz = X(10);
14     yz = X(11);
15     zz = X(12);
16
17     u1 = U(1);
18     u2 = U(2);
19     u3 = U(3);
20
21     %-----CONSTANTS-----%
22     m = 52.5;
23     Ix = 0.16;
24     Iy = 14;
25     Iz = Iy;
26     g= 9.81;
27     l = 0.127;
28     rho = 1.225;
29     D = 127/1000;
30     S = 0.0127;
31     vm = sqrt(u^2+v^2+w^2);
32
33     Q = (rho*(vm^2))/2;
34     %-----COEFFICIENTS-----%
35
36     %lift
37
38     Cx0 = 10;
39     Cna = 3.330;
40
41     Fa = -rho*pi*D^2*vm^2*[Cx0+alpha^2 + beta^2;Cna*beta;Cna*alpha]/8;
42
43     Fax = Fa(1);
44     Fay = Fa(2);
45     Faz = Fa(3);
46     %moments
47
48     X = 0.55;
49
50     Cma = -Cna*X/l;
51     CmΔV = 10;
52
53     Cmq = -300;
54     Cm = Cma*alpha + CmΔV*u1 + Cmq*q/(2*vm);
55
56     Mm = Cm*Q*S*l;
57
58     Cnb = -Cma;
59     CnΔP = -CmΔV;
60     Cnr = -300;
61     Cn = Cnb*beta + CnΔP*u2 + Cnr*r/(2*vm);
62     Nm = Cn*Q*S*l;
63
64
65     ClΔE = 1.4;
66     Clp = -9;

```

```

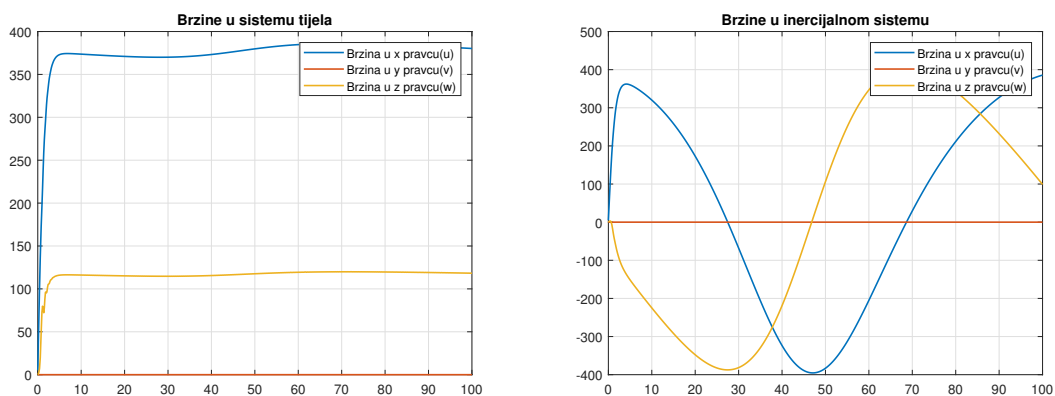
67
68     Cl = ClΔE*u3 + Clp*p/(2*vm);
69     Lm = Cl*Q*S*l;
70
71     Tphi = [1 0 0;
72             0 cos(phi) sin(phi);
73             0 -sin(phi) cos(phi)];
74     Ttheta = [cos(theta) 0 -sin(theta);
75              0 1 0;
76              sin(theta) 0 cos(theta)];
77     Tpsi = [cos(psi) sin(psi) 0;
78            -sin(psi) cos(psi) 0;
79            0 0 1];
80
81     Thrust = 12650;
82     udot = v*r - w*q + (Fax+Thrust)/m -g*sin(theta);
83     vdot = p*w - r*u + Fay/m + g*cos(theta)*sin(phi);
84     wdot = q*u - p*v + Faz/m + g*cos(theta)*cos(phi);
85
86     pdot = Lm/Ix;%pdot
87     qdot = p*r*(Iz-Ix)/Iy +Mm/Iy;%qdot
88     rdot = p*q*(Ix-Iy)/Iz + Nm/Iz;%rdot
89
90     phidot = p*q*sin(phi)*tan(theta)+r*cos(phi)*tan(theta);
91     thetadot = q*cos(phi) - r*sin(phi);
92     psidot = q*sin(phi)/cos(theta) + r*cos(phi)/cos(theta);
93
94     xyzZemlja = Tpsi'*Ttheta'*Tphi'*[u;v;w];
95
96     Xdot = [udot;vdot;wdot;pdot;qdot;rdot;phidot;thetadot;psidot;xyzZemlja];
97
98     alphasdot = (wdot*u - udot*w)/(w^2+u^2);
99     betasdot = (vdot*u - v*udot)/(u^2+v^2);
100
101     Thetadot = thetadot-alphasdot;
102     Psidot = psidot - betasdot;
103
104     nV = vm*Thetadot + g*cos(Theta);
105     nH = vm*Psidot*cos(Theta);
106
107     out = [Xdot; alphasdot; betasdot;Psidot;Thetadot;nV;nH];
108     end
    
```

Model projektila je MIMO sistem sa tri ulazne varijable i puno više izlaze pa je u nastavku predstavljeno nekoliko značajnih odziva na otklone kotnrolnih površina. U nastavku se razmatra šta se dešava sa projektilom kada se pobudi sa jediničnim otklonom krmila visine. Treba uzeti u obzir da je uzeto u modelu da se postiže zasićenje otklona svih površina pri otklonu od 25 stepeni. Prvo pogledajmo šta se desi sa orijentacijom projektila za jedinični otklon krmila visine. Sada se vide očekivani rezultati. Kada se otkloni krmilo visine, projektil se usmjeri lagano prema gore. Grafik na kojem je prikazan ugao propinjanja je dat u radijanima, pa se prema skoro linearnom odzivu može naslutiti da je putanja projektila kružne prirode. U



Slika 4.3: Orijentacija projektila i ugao napada i klizanja pri jediničnom otklonu krmila visine

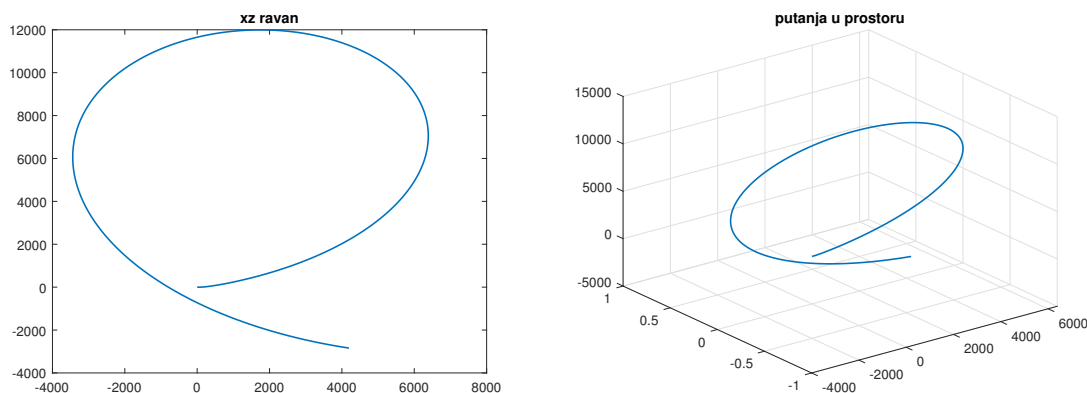
ovu tvrdnju ćemo se uvjeriti poslije. Dalje, vidimo da je napadni ugao konstantan u toku cijele putanje, što znači da se projektil uvijek kreće u smjeru z ose tijela. Ovo ne znači nužno da se projektil penje. Dalje, ugao klizanja je nula tko cijele putanje što znači da projektil ne skreće sa putanje, tj. da je vrijednost pomjeraja po y osi uvijek nula. To se također vidi na graficima za ugao zakretanja. Treba primjetiti da je ugao valjanja također nula za jedinični otklon krmila visine. Ovo su itekako važni zaključci, jer se primjećuje da otklon krmila visine uzrokuje kretanje samo u vertikalnoj ravni pa se već naslućuje da postoji nezavisnost kretanja u vertikalnoj i horizontalnoj ravni. Poslije ćemo se uvjeriti da je ova osobina od krucijalne važnosti za dizajn autopilota za zadatak vođenja. Sada pogledajmo, odzive brzina projektila koji su prikazani na slici 4.4. Prvo što se primjeti jest da je brzina u y smjerovima



Slika 4.4: Brzine projektila u sistemu tijela i inercijalnom sistemu

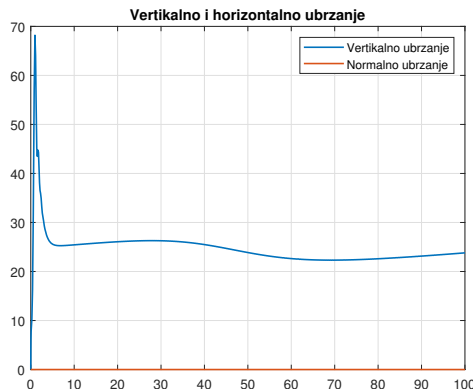
oba sistema uvijek nula. Dalje, posmatrajući sistem tijela vidi se da brzine nakon nekog vremena dostignu maksimalnu brzinu. Glede, sistema tijela, brzina u x smjeru je stalna kao posljedica čeine sile otpora vazduha. Posmatrajući inercijalni sistem, vidi se brzine u x i z smjeru imaju promjene koje slične na kružno kretanje. Suma njihovih kvadrata će dati približno neku konstantnu vrijednost, pa se zaključuje da

se projektil za slučaj otklona krmila visine, doista kreće po kružnici. Uvjerimo se u tu tvrdnju skicirajući putanju projektila. Čitalac treba da primjeti da je na ovoj slici izvršena promjena znaka visine projektila. Sada se jasno vidi da projektil pravi



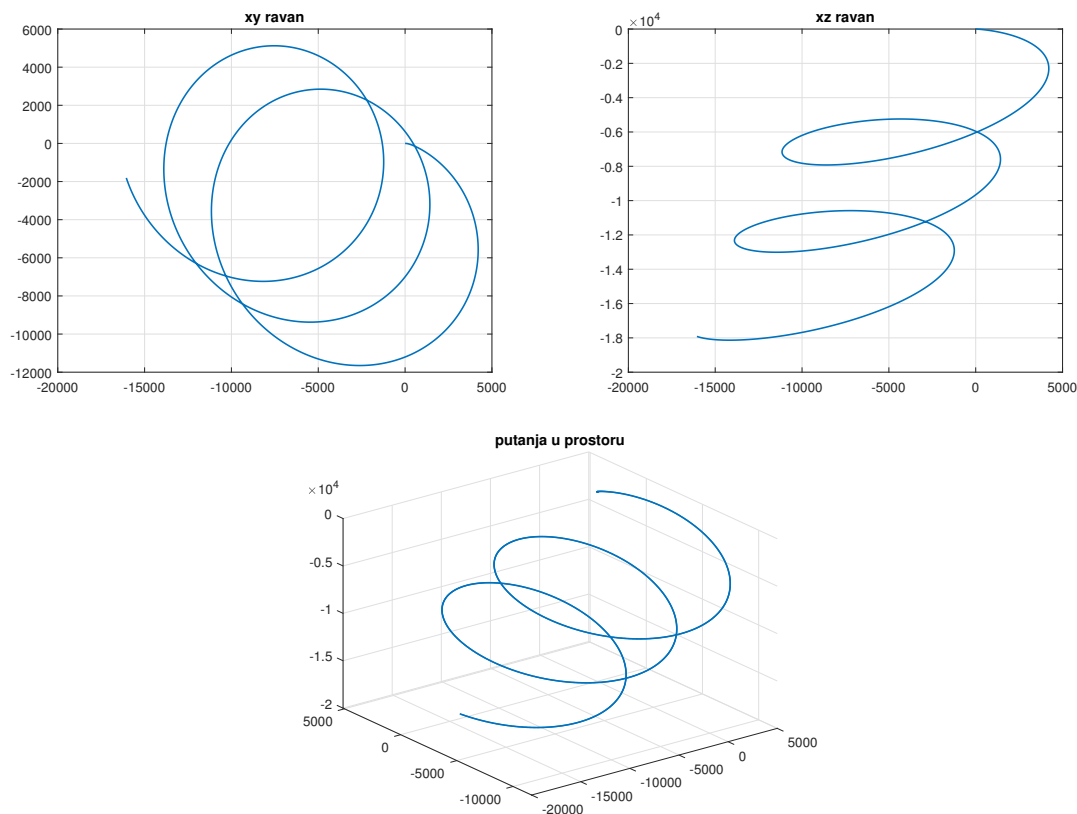
Slika 4.5: Putanja projektila za jedinični otklon krmila visine

kružnu putanju u prostoru. Poslije će se vidjeti da su normalna ubrzanje važna za proces vođenja projektila, pa treba razmotriti šta se dešava sa ubrzanjima kada se imaju otkloni kontrolnih površina. Na slici 4.6 su prikazani vertikalno i horizontalno ubrzanje projektila. Sada se jasno vidi da se za jedinični otklon krmila visine postiže



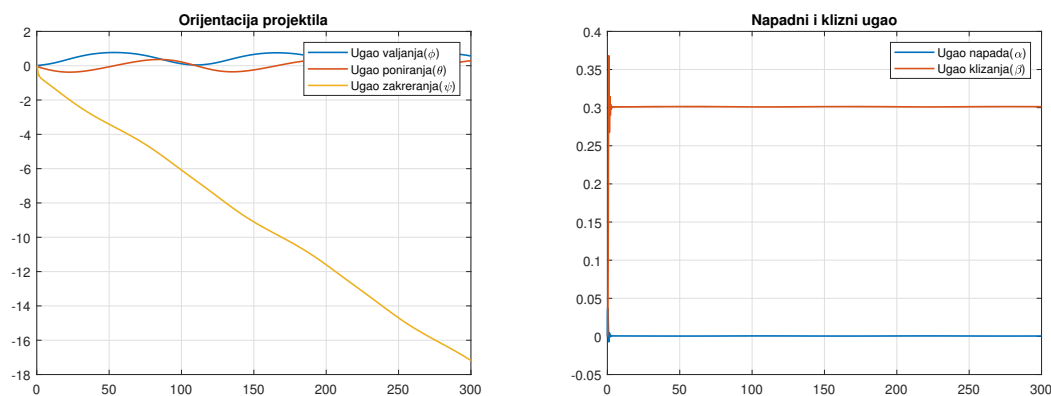
Slika 4.6: Vertikalno i normalno ubrzanje projektila za jedinični otklon krmila visine

stalno vertikalno ubrzanje, što se slaže sa činjenicom da projektil čini kružnu putanju u xz ravnini. Nulto horizontalno ubrzanje se slaže sa činjenicom da projektil ne čini pomjeraje u horizontalnoj ravnini. Sada posmatrajmo odziv projektila za jedinični otklon krmila pravca. Ovdje će se izvršiti duža simulacija kako bi se dobila bolja analiza. Na slici 4.7 su prikazane putanje u xz i xy ravninama kada se ima jedinični otklon krmila pravca projektila. Sada se vidi da kada se zakrene krmilo visine, da projektil čini kružnu putanju u xy ravni, što je bilo i očekivano. Naravno pomjeraj po x osi mora da postoji zbog stalne sile potiska. Vidi se da u xz ravnini, projektil pada na zemlju ali i treba primjetiti da se projektil u nekim trenutcima počinje dizati



Slika 4.7: Putanje pri jediničnom otklonu krmila pravca

po z osi. Ovo je posljedica postojanja pogonske sile i statičke stabilnosti projektila. Pošto je centar gravitacije projektila ispred centra pritiska, projektil se počne rotirati tako da mu nos pokazuje ka zemlji, međutim zbog otklona krmila visine on počne rotirati u oko svoje z ose pa u jednom trenutku njegov nos bude okrenut suprotno od zemlje te zbog pogonske sile kratko započne kretanje ka gore sve dok se zbog otklona krmila pravca ne nastavi rotirati i posljedično nastavi smanjivati visinu. Promjene orijentacije projektila se vide na slici 4.8 Vidi se na prethodnoj slici da ugao valjanja

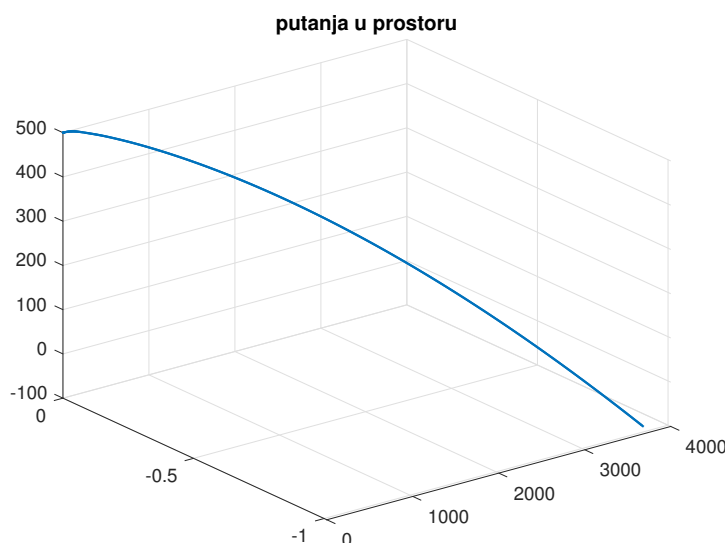


Slika 4.8: Orijentacija projektila i ugao klizanja za jedinični otklon krmila pravca

i ugao poniranja variraju, što objašnjava varijacije visine projektila i vidi se ugao

zakretanja opada što objašnjava kružno kretanje u xy ravnini. Posljedica toga je i konstantan ugao klizanja. Važno je istaći da je kanal pravca sistem neminimalne faze jer se za pozitav otklon krmila pravca, dobija negativan odziv ugla zakretanja.

U nastavku se posmatra primjer horizontalnog hitca početnom brzinom od $100m/s$ u x smjeru sa visine $500m$. Kada ne bi bilo otpora vazduha i pogonske sile za očekivati je da će projektil pasti na zemlju za 10.09 sekundi. Naravno, zbog postojanja pogonske sile projektil će za nešto kraće vrijeme dotaknuti tlo. Pri ovoj simulaciji pretpostavljen je jedinični otklon elerona, pa će se pojaviti i valjanje. Na slici 4.9 su prikazane putanje kod ovog primjera. Vidi se da u ovom primjeru projek-

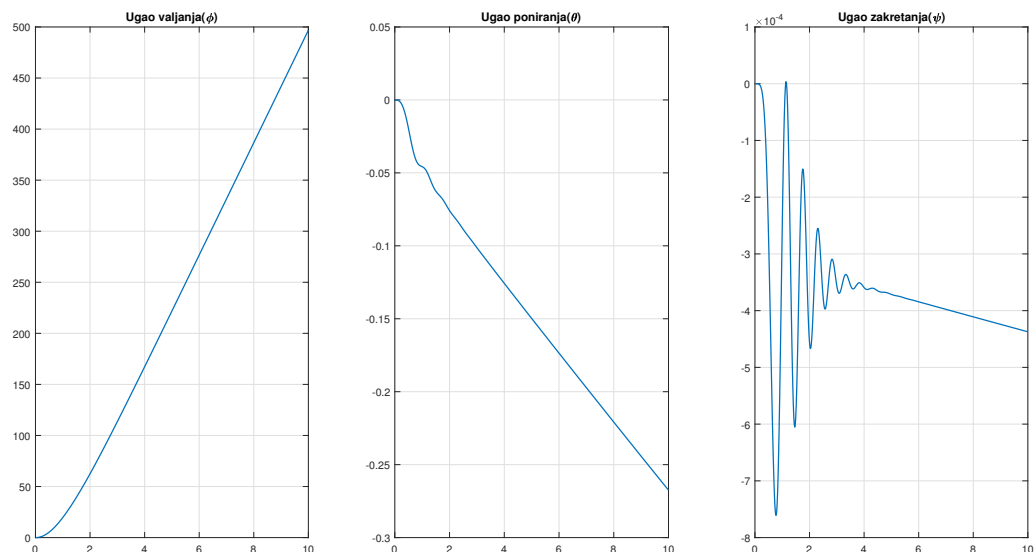


Slika 4.9: Trajektoirja horizontalnog hitca sa jediničnim otklonom elerona

til, kao što je i očekivano, približno prati parabolu. Sada pogledajmo šta se dešava sa orijentacijom projektila. Na slici 4.10 su prikazani Eulerovi uglovi. Zbog otklona elerona dolazi do porasta ugaone brzine valjanja što ima za posledicu rast ugla valjanja. Prisjetimo se da se ugao valjanja ponaša kao čisti integrator i da je opisan diferencijalnom jednačinom:

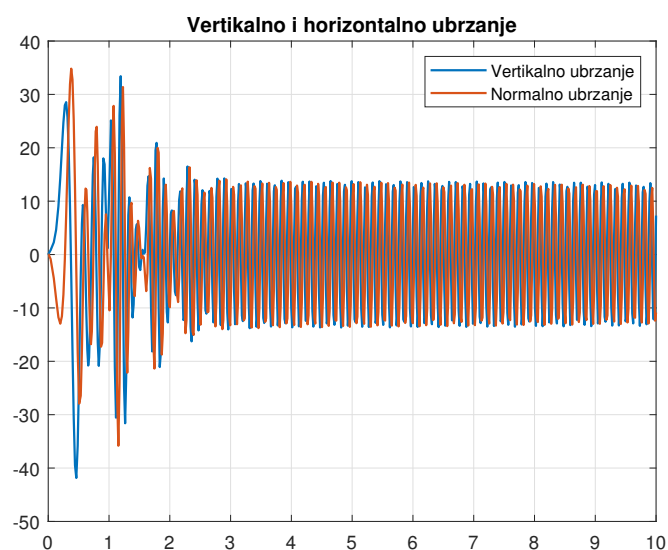
$$\frac{dP}{dt} = L$$

Zbog ovoga za bilo kakvu promjenu otklona elerona, dolazi do rasta(po amplitudi) ugla valjanja. Promjena ugla propinjanja se može jednostavno objasniti pojavom uzgona. Pošto se centar pritiska nalazi iza centra gravitacije, javlja se moment koji zakreće projektil nadole. Kada bi simulacija duže trajala ugao propinjanja bi dosegao vrijednost skoro -90 stepeni. Posmatrajući treći grafik na kojem je prikazan ugao zakretanja vide se male promjene ugla zakretanja(ređa 10^{-4}). U ovom primjeru, bočno kretanje je zanemarljivo, ali ako postoje komponente brzine u sva tri smjera sistema tijela tada promjena brzine valjanja može imati ozbiljne posljedice na stabilnost projektila i čak dovodi u pitanje proces vođenja. Za bolji uvid, na slici



Slika 4.10: Orijentacija projektila pri horizontalnom hitcu sa jediničnim otklonom elerona

4.11 su prikazani vertikalno i horizontalno ubrzanje projektila(poslije će se pokazati da su vertikalno i horizontalno ubrzanje presudni za proces vođenja). Ovdje se vide



Slika 4.11: Vertikalno i normalno ubrzanje pri jediničnom otklonu elerona

velike oscilacije ubrzanja kada se pojavi kretanje u kanalu valjanja. Pošto se ova ubrzanja koriste kao referentna vrijednost kod vođenja projektila, neophodno je stabilizirati kanal valjanja kako bi se poboljšala regulacija ubrzanja. Dalje, pri velikim brzinama projektila i kretanju u kanalu valjanja dolazi do pojave couplinga kanala visine i kanala skretanja. Prema tome svi projektili krstaste konfiguracije kao prvi zahtjev pri dizajnu autopilota imaju stabilizaciju ugla valjanja.

4.2 Rasprezanje dinamičkog modela

Sada će se u svrhu lakše analize i sinteze regulatora izvršiti rasprezanje dinamičkog modela. Ideja je da se uvedu neke pretpostavke koje će omogućiti da se predstavljene jednačine razdvoje na grupe nezavisnih jednačina. Treba da je ispunjeno:

- Projektil se kreće u vertikalnoj ravni referentnog koordinatnog sistema.
- Osa x_z leži u ravni kretanja.

Prva pretpostavka iziskuje $\beta, \phi, P, R \approx 0$. Činjenica da je $P, R \approx 0$ znači da se tijelo rotira samo oko Y_b ose, dalje, pretpostavka da je $\beta \approx 0$ znači da je usmjerenje letjelica isto kao i vektor brzine i konačno činjenica da je $\phi \approx 0$ znači da nema valjanja. Druga pretpostavka iziskuje $\Psi, \psi, y_z \approx 0$. Ovo znači da nema skretanja, da projektil može mjenjati samo visinu i udaljenost po X_z osi. Dakle ove dvije pretpostavke ograničavaju kretanje letjelice na vertikalnu ravan sa dopuštanjem propinjanja i kretanjem naprijed. Sada preostale jednačine koje su okarakterisane varijablama stanja:

$$V, \Theta, \theta, \alpha, Q, x_z, z_z$$

Definišu *longitudinalno kretanje* (kretanje u vertikalnoj ravni). Jednačine okarakterisan varijablama koje su u ovom slučaju zanemarene definišu *lateralno kretanje* (bočno) koje se sastoji od kretanja u horizontalnoj ravni, skretanja i valjanja ali bez propinjanja. Sada se ova dva podsistema mogu odvojeno posmatrati. Sada ostaje samo da se sile koje su objašnjene u prethodnom poglavlju pretvorimo iz sistema tijela i sistema Zemlje u sistem brzine i da ih se uvrsti u jednačine koje opisuju model u sistemu brzine. Jednačine koje predstavljaju longitudinalno kretanje su:

$$m \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha - R_{otp} - G \sin \Theta \quad (4.30)$$

$$mV \frac{d\Theta}{dt} = -P \sin \alpha - R_{uzg} + G \cos \Theta \quad (4.31)$$

$$I_x \frac{dQ}{dt} \approx M \quad (4.32)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q \quad (4.33)$$

$$\frac{dx_z}{dt} = V \cos \Theta \quad (4.34)$$

$$\frac{dz_z}{dt} = -V \sin \Theta \quad (4.35)$$

Također iz matrice transformacije Tz^v (treba invertovati Tv^z) se dobija za uvedene pretpostavke:

$$\Theta = \theta - \alpha \quad (4.36)$$

Sada se mogu napisati i jednačine za lateralno kretanje:

$$mV \cos \Theta \frac{d\Psi}{dt} = -P \cos \alpha \sin \beta \cos \phi - P \sin \alpha \sin \phi - R_{side} \cos \phi - R_{uzg} \sin \phi \quad (4.37)$$

$$I_x \frac{dP}{dt} = L \quad (4.38)$$

$$I_z \frac{dR}{dt} = N + (I_x - I_y) \quad (4.39)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = (R \cos \phi + q \sin \phi) / \cos \theta \quad (4.40)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = P + (R \cos \phi - q \sin \phi) / \tan \theta \quad (4.41)$$

$$\frac{dy_z}{dt} = V \cos \Theta \sin \Psi \quad (4.42)$$

Pri čemu se iz Tz^v pokazuje:

$$\Psi \approx \psi - \beta \quad (4.43)$$

Još uvijek se nisu u diferencijalne jednačine uvele linearizirane vrijednosti za aerodinamičke sile i momente pa se u jednačinama ne pojavljuju upravljačke varijable, zbog toga će se u nastavku uraditi poptuna linearizacija dinamičkog modela. Tada će se dobiti zavisnost varijabli stanja od ulaza, pa je na osnovu toga moguće riješiti ove jednačine da bi se odredile varijable stanja. Iz ovoga slijedi i obrat tj. da se mogu odrediti otkloni upravljačkih površina da bi se postigle željene vrijednosti varijabli stanja koje zahtjeva zakon vođenja. Naravno ovakav postupak je u otvorenoj petlji pa se zbog netačnosti modela preporučuje upravljanje u zatvorenoj povratnoj sprezi.

4.3 Linearizacija u okolini nominalne trajektorije

Generalno, kada se priča o linearizaciji sistema, radi se o linearizaciji oko neke radne tačke. Ideja je da se diferencijalna jednačina u okolini te radne tačke predstavi linearnim segmentnom, te da nakon toga ona ima linearnu zavisnot od ulaznih parametara. Kod kretanja projektila umjesto pojma radne tačke se uvodi pojam *nominalne trajektorije*. To je trajektorija po kojoj projektil leti kada su sve varijable stanja upravo onakve kako se od njih očekuje da budu i kada nema vanjskih poremećaja na projektil osim aerodinamičkog otpora i gravitacije. Sada se kao suprotnost nominalnoj trajektoriji uvodi pojam *poremećajnog kretanja* koje se odlikuje odstupanjem varijabli stanja od nominalnih vrijednosti. Pri ovome se pretpostavlja da su odstupanja varijabli stanja pri poremećajnom kretanju relativno mala u odnosu na njihove nominalne vrijednosti. Svaka nominalna trajektorija određena je nekom vrijednošću vektora stanja X_{nom} . Do ostalih vrijednosti može se doći rješavanjem jednačine:

$$\dot{\vec{X}}_{nom} = f(\vec{X}_{nom}, \delta_{nom}) \quad (4.44)$$

Sada će se izvršiti linearizacija modela longitudinalnog kretanja. Pretpostavlja se da u okolini radne tačke, vrijednosti varijabli stanja imaju oblik:

$$x = x_0 + \Delta x \quad (4.45)$$

Prisjetimo se samo da u okolini nominalne trajektorije upravljački signal može definirati kao:

$$u(t) = u_0(t) + \Delta u(t) \quad (4.46)$$

Pa je:

$$\dot{x}_0(t) + \Delta \dot{x}(t) = f(x_0(t) + \Delta x(t), u_0(t) + \Delta u(t)) \quad (4.47)$$

Funkcija na desnoj strani se može raziti u Taylorov red i nakon odbacivanja članova višeg reda se dobija:

$$\dot{x}_0(t) + \Delta \dot{x}(t) = f(x_0(t), u_0(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u \quad (4.48)$$

Sada se može napisati:

$$\Delta \dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u \quad (4.49)$$

Parcijalni izvodi se uzimaju tako da vrijedi $x = x_0$ i $u = u_0$.

Kod modela longitudinalnog kretanja će se izvršiti isti postupak s tim da će se linearizirati svaka jednačina posebno. Sada za model longitudinalnog kretanja, ako se pretpostavi da se projektil kreće po nominalnoj trajektiri, vrijede jednačine:

$$V = V_0 + \Delta V \quad (4.50)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha \quad (4.51)$$

$$\Theta = \Theta_0 + \Delta \Theta \quad (4.52)$$

$$\theta = \theta_0 + \Delta \theta \quad (4.53)$$

$$Q = Q_0 + \Delta Q \quad (4.54)$$

$$z_z = z_{z0} + \Delta z_z \quad (4.55)$$

$$\delta_V = \delta_{V0} + \Delta \delta_V \quad (4.56)$$

Koristeći pretpostavku da je $\cos \alpha_0 \approx 1$ i koristeći gore predstavljenu metodologiju linearizacije može se dobiti:

$$\frac{d\Delta V}{dt} = \frac{P^V - F_o^V}{m} \Delta V - \frac{P\alpha + F_0^\alpha}{m} \Delta \alpha - g \cos \Theta_0 \Delta \Theta + \frac{F_u^{\delta V}}{m} \delta_V + \frac{X_P}{m} \quad (4.57)$$

$$\frac{d\Delta \Theta}{dt} = \frac{P^V - F_u^V}{m} \Delta V + \frac{P - F_u^\alpha}{mV} \Delta \alpha - \frac{g}{V} \sin \Theta_0 \Delta \Theta - \frac{F_u^{\delta V}}{\Delta_V} + \frac{Z_P}{mV} \quad (4.58)$$

$$\frac{d\Delta Q}{dt} = \frac{M^V}{I_y} \Delta V + \frac{M^\alpha}{I_y} \Delta Q + \frac{M^{\dot{\alpha}}}{I_y} \Delta \dot{\alpha} + \frac{M^{\delta V}}{I_y} \Delta \delta_V + \frac{M^{\dot{\delta}_V}}{I_y} \Delta \dot{\delta}_V + \frac{M_P}{I_y} \quad (4.59)$$

$$\frac{d\Delta \theta}{dt} = \Delta Q \quad (4.60)$$

$$\frac{d\Delta x_z}{dt} = \cos \Theta_0 \Delta V - V \sin \Theta_0 \Delta \Theta \quad (4.61)$$

$$\frac{d\Delta z_z}{dt} = \sin \Theta_0 \Delta V + V \cos \Theta_0 \Delta \Theta \quad (4.62)$$

$$\Delta \alpha = \Delta \theta - \Delta \Theta \quad (4.63)$$

U koeficijentima dobijenih diferencijalnih jednačina su exponentima označeni izvodi te veličine. Konkretno, $P^V = \frac{\partial P}{\partial V}$, $F_o^\alpha = \frac{\partial F_o}{\partial \alpha} = QSC_\alpha^\alpha$ etc. Svi ovi parcijalni izvodi su objašnjeni kada se govorilo o prirodi aerodinamičkih sila i momenata i oni se često za projektil daju tabelarno. Članovi X_P , Z_P i M_P predstavljaju poremećaje u vidu sila i momenata i oni ovdje djelom predstavljaju ulaze u sistem. Sada se u ovim jednačinama po prvi put eksplicitno vide upravljačke varijable. Na isti način se mogu naći i linearizirane jednačine za lateralno kretanje. Ako se nađe Laplasova transformacija gornjih jednačina, rješavanjem dobijenog sistema algebarskih jednačina dobija se karakteristični polinom funkcija prenosa (sjetimo se da kod MIMO sistema, sve prenosne funkcije imaju isti karakteristični polinom). Radi se o polinomu četvrtog reda kod kojeg je jedan par polova po modulu dosta veći od drugog para polova po modulu. Sada je jasno da se kretanje letjelice može razdvojiti na *brzo prigušeno* kretanje koje može biti oscilatorno ili aperiodičko i na *fugoidno (sporo prigušeno)*. Dinamiku modela longitudinalnog kretanja određuje dominantni par polova koji je manji po modulu pa je kretanje letjelice određeno fugoidnim kretanje. Sada je jasno da se polovi koji opsiuju brzoprigušeno kretanje mogu odbaciti pa će karakteristični polinom imati samo dva pola. Dakle, sada se posmatraju samo jednačine koje opisuju kratkoperiodično kretanje. Brzoperiodično kretanje je određeno jednačinom promjene brzine (prva diferencijalna jednačina) pa se nakon uvođenja ove pretpostavke odbacuje ova jednačina i u ostalim se anulira ΔV . Sada teba primjetiti da se u lineariziranim jednačinama pojavljuje koeficijent $-\frac{g}{V} \sin \Theta_0$. Ovaj koeficijent predstavlja uticaj gravitacije na longitudinalno kretanje. Za male elevacione uglove, ovaj koeficijent je jako blizak nuli. Čak i kada trajektorija puno odstupa od horizontalne, brzina projektila je najmanje 20 puta veća

od gravitacionog ubrzanja pa se uticaj gravitacije na longitudinalno kretanje može zanemariti. Ova pretpostavka u prenosnim funkcijama uvodi pol u nuli, tj. pod ovom pretpostavkom sistem će se ponašati kao integrator i sam će osigurati nultu grešku stacionarnog stanja. Međutim ako ova pretpostavka nije ispunjena tada će se pojaviti pol blizak nuli, pa će prelazni proces biti dug možda čak i nestabilan. Sada, pod ovim pretpostavkama dobijaju sljedeće prenosne funkcije:

$$\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta\delta_V(s)} = \frac{K(T_1s + 1)}{s(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)} \quad (4.64)$$

$$\frac{\Delta\Theta(s)}{\Delta\delta_V(s)} = \frac{K}{s(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)} \quad (4.65)$$

$$\frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta\delta_V(s)} = \frac{KT_1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (4.66)$$

$$\frac{\Delta n_z(s)}{\Delta\delta_V(s)} = \frac{V}{g} \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (4.67)$$

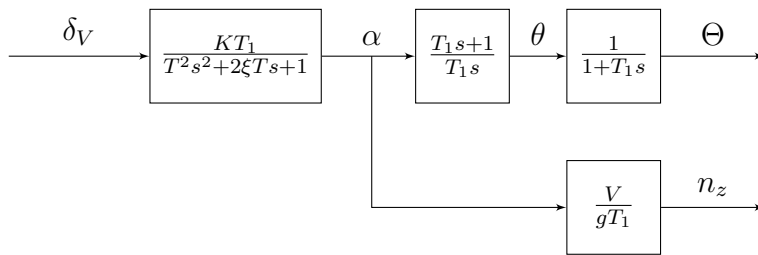
,gdje $n_z = \frac{V\dot{\Theta}}{g}$ predstavlja *normalno preopterećenje*, tj. odnos ubrzanja koje je normalno na pravac brzine i gravitacione konstante. Evidentno je da je normalno ubrzanje definisano izrazom:

$$a_z = V\dot{\Theta} \quad (4.68)$$

I predstavlja jako bitnu veličinu jer mnogi zakoni vođenja generišu komandne signale u vidu normalnog ubrzanja projektil, pa će se i posebna pažnja posvetiti upravljanju normalnog ubrzanja. Prenosna funkcija koja određuje normalno ubrzanje je:

$$\frac{\Delta a_z(s)}{\Delta\delta_V(s)} = \frac{KV}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (4.69)$$

Evidentno je da za dobijanje lineariziranog modela longitudinalnog kretanja uvedeno

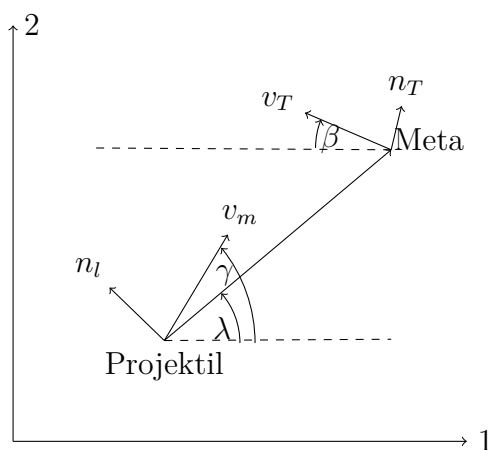


Slika 4.12: Blok dijagram lineariziranog modela longitudinalnog kretanja

puno pretpostavki i da će bilo kakvo odstupanje od ovih pretpostavki umanjiti vjerodostojnost modela, ali se pokazuje da je ovaj linearizirani model dosta dobra aproksimacija pri nominalnim uslovima leta.

Uvod u proporcionalnu navigaciju

5.1 Opis planarnog susreta



Slika 5.1: Prikaz planarnog susreta

Udaljenost između mete i projektila u svakom trenutku je data sa:

$$r(t) = r_T(t) - r_M(t) \quad (5.1)$$

Brzina približavanja projektila meti je data sa:

$$v_{cl} = -\dot{r}(t) \quad (5.2)$$

Ugaono ubrzanje mete je dato sa:

$$\dot{\beta} = \frac{n_T}{v_T} \quad (5.3)$$

Komponente vektora brzine mete u koordinatnom sistemu vezanom za zemlju su date sa:

$$v_{T1} = -v_T \cos \beta \quad (5.4)$$

$$v_{T2} = v_T \sin \beta \quad (5.5)$$

Slično tome, brzina i ubrzanje projektila su date sa:

$$\dot{v}_{M1} = a_{M1} \quad (5.6)$$

$$\dot{v}_{M2} = a_{M2} \quad (5.7)$$

$$\dot{R}_{M1} = v_{M1} \quad (5.8)$$

$$\dot{R}_{M2} = v_{M2} \quad (5.9)$$

Ugao *Line of sight* se može izračunati kao:

$$\lambda = \arctan \frac{R_{TM2}}{R_{TM1}} \quad (5.10)$$

Pa je:

$$\dot{\lambda} = \frac{R_{TM1}v_{TM2} - R_{TM2}v_{TM1}}{r^2} \quad (5.11)$$

Ugao između vektora pozicije i vektora brzine je dat sa:

$$L = \arcsin \frac{v_T \sin(\beta + \lambda)}{v_M} \quad (5.12)$$

Također treba uzeti u obzir da je:

$$v_{cl} = -\dot{r} = v_M \cos \delta - v_T \cos \theta \quad (5.13)$$

Te da će doći do sudara samo u slučaju da vrijedi:

$$v_M \cos \delta > v_T \cos \theta \quad (5.14)$$

Upravljački zakon proporcionalne navigacije je dat sa:

$$n_C = N' v_c \dot{\lambda} \quad (5.15)$$

5.2 Izvođenje upravljačkog zakona

$$\sin \lambda = \frac{y}{r} \quad (5.16)$$

Za male uglove može se koristiti aproksimacija:

$$\lambda \approx \frac{y}{r} \quad (5.17)$$

, pa je:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)r(t) - y(t)\dot{r}(t)}{r^2} \quad (5.18)$$

$$\ddot{\lambda}(t) = \frac{\ddot{y}(t) - 2\dot{\lambda}(t)\dot{r}(t) - \lambda(t)\ddot{r}(t)}{r(t)} \quad (5.19)$$

Uvedimo vremenski varijantne koeficijente:

$$a_1(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{r(t)} \quad (5.20)$$

$$a_2(t) = 2\frac{\dot{r}(t)}{r(t)} \quad (5.21)$$

$$b(t) = \frac{1}{r(t)} \quad (5.22)$$

Pa se dobija diferencijalna jednačina drugog reda sa varijabilnim koeficijentima:

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} + b(t)\ddot{y}(t) \quad (5.23)$$

Uzimajući u obzir dobija se:

$$\ddot{y}(t) = -a_M(t) + a_T(t) \quad (5.24)$$

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} - b(t)a_M(t) + b(t)a_T(t) \quad (5.25)$$

Neka je $x_1(t) = \lambda$ i $x_2(t) = \dot{\lambda}$. Tada je susret projektila i mete opisan sljedećim diferencijalnim jednačinama prvog reda.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.26)$$

$$\dot{x}_2 = -a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u + b(t)f \quad (5.27)$$

,gdje je uzeto $u = a_M(t)$ i vanjska smetnja $f = a_T(t)$. Prvo posmatrajmo slučaj kada meta ne ubrzava, tj. kada je $f = 0$. Sada se problem proporcionalne navigacije može predstaviti kao:

Pronaći upravljački signal u tako da je sistem opisan jednačinama 5.26 i 5.27 asimptotski stabilan u odnosu na x_2

Shodno tome, uzmimo Lyapunovu funkciju Q :

$$Q = \frac{1}{2}cx_2^2 \quad (5.28)$$

Izvod po vremenu duž bilo koje trajektorije je:

$$\dot{Q} = cx_2(-a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u(t)) \quad (5.29)$$

Sada se vidi da upravljački signal

$$u = kx_2 = k\dot{\lambda} \quad (5.30)$$

Stabilizuje sistem dat sa 5.26 i 5.27 ako k zadovoljava:

$$kb(t) + a_2(t) > 0 \quad (5.31)$$

,odnosno

$$k > -2\dot{r}(t) = 2v_{cl} \quad (5.32)$$

Prema tome, uvodeći *efektivni navigacijski odnos* N , izraz 5.30 postaje:

$$u = Nv_{cl}\dot{\lambda}(t) \quad , N > 2 \quad (5.33)$$

čime je potpuno određen zakon vođenja proporcionalne navigacije. Za trodimenzionalni slučaj se bira kandidat funkcija:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^3 d_s \dot{\lambda}_s^2 \quad (5.34)$$

, gdje su d_s pozitivni koeficijenti. Analogno se dobija upravljački zakon:

$$u_s = Nv_{cl}\dot{\lambda}_s \quad , N > 2 \quad (s = 1, 2, 3) \quad (5.35)$$

5.3 Izmjenjena proporcionalna navigacija

Za mete koje manevrišu i imaju neko normalno ubrzanje, za planarni sustre, izvod Lyapunove kandidat funkcije je:

$$\dot{Q} = cx_2(-a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u(t) + b(t)f) \quad (5.36)$$

Odakle se zaključuje da je upravljački signal koji stabilizuje sistem:

$$u = Nv_{cl}\dot{\lambda}(t) + \frac{N}{2}a_T(t) \quad , N > 2 \quad (5.37)$$

5.4 Optimalnost zakona proporcionalne navigacije

Ako je promjena LOS ugla različita od nule, tada se primjenjuje normalno ubrzanje kako bi se promjena svela na nulu. U prethodnoj sekciji se proporcionalna navigacija predstavila kao problem upravljanja gdje je normalno ubrzanje bilo upravljački signal, a brzina promjene LOS ugla bila varijabla stanja. Proporcionalna naviga-

cija se može posmatrati kao problem optimalnog upravljanja. Treba pronaći indeks performansi koji proporcionalna navigacija minimizira. Ovo predstavlja inverzni problem problem optimalnog upravljanja. Pretpostavimo da se projektil približava meti konstantnom brzinom. Ignorišući dinamiku projektila, vrijedi:

$$\ddot{y} = -a_M, \quad y = r\lambda, \quad r(\tau) = v_{cl}\tau \quad (5.38)$$

Također pretpostavlja se da nema kašnjenja u dinamici projektila, tj. da je $a_M = a_{Mc}$. Definišimo sada indeks performansi:

$$J = \frac{1}{2}Cy^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} a_M^2 dt \quad (5.39)$$

Prvi član predstavlja promašaj (miss distance), a drugi predstavlja energiju energiju utrošenu u toku leta. Ideja je pronaći upravljanje a_M koje minimizira kriterij performanse J . Koriteći Bellman-Lyapunov pristup dobija se da je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3\tau}{3/C + \tau^3}(y(t) + \dot{y}(t)\tau) \quad (5.40)$$

Nulti promašaj se dobija za $C \rightarrow \infty$, pa je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3}{\tau^2}(y(t) + \dot{y}(t)\tau) \quad (5.41)$$

Uzimajući u obzir da je:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{y}(t)r(t) - y(t)\dot{r}(t)}{r^2} = \frac{\dot{y}(t)\tau + y(t)}{r} \quad (5.42)$$

jer je, $r = v_{cl}\tau$, dobija se:

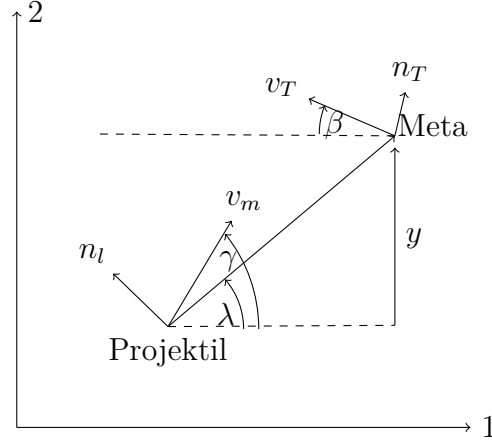
$$a_M(t) = 3v_{cl}\dot{\lambda} \quad (5.43)$$

Ovo znači da pod uvedenim pretpostavkama, proporcionalna navigacija minimizira kriterij performanse J i izbor efektivnog navigacijskog odnosa $N = 3$ garantuje da nulti promašaj.

5.5 Linearizacija

Linearizacija se može lahko izvršiti ako se definišu nove veličine koje su prikazane na slici 5.2. Relativno ubrzanje se može odrediti sa slike i iznosi:

$$\ddot{y} = n_T \cos \beta - n_c \cos \lambda \quad (5.44)$$



Slika 5.2: Linearizacija jednačina proporcionalne navigacije

Ako su uglovi leta mali, tada vrijedi:

$$\ddot{y} = n_T - n_c \quad (5.45)$$

Slično tako vrijedi:

$$\lambda = \frac{y}{r} \quad (5.46)$$

Za čeonu slučaj vrijedi:

$$v_{cl} = v_M + v_t \quad (5.47)$$

Za potjeru vrijedi:

$$v_{cl} = v_M - v_t \quad (5.48)$$

Sada se može linearizirati i jednačina za udaljenost:

$$r(t) = v_{cl}(t_F - t) \quad (5.49)$$

gdje je t_F ukupno vrijeme leta.

Definišimo i veličinu *time to go* t_{go} :

$$t_{go} = t_f - t \quad (5.50)$$

Linearizirani promašaj se definiše kao udaljenost mete i projektila na kraju leta, ili:

$$Miss = y(t_f) \quad (5.51)$$

5.6 Petlja navođenja i zero effort miss

Ranije je pokazano da vrijedi:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)r(t) + y(t)v_{cl}}{r^2} \quad (5.52)$$

Kako vrijedi $r = v_{cl}t_{go}$, tada se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)t_{go} + y(t)}{v_{cl}t_{go}^2} \quad (5.53)$$

Definišimo sada veličinu *Zero effort miss*, koja predstavlja buduće relativno rastojanje projektila i mete:

$$ZEM = \dot{y}(t)t_{go} + y(t) \quad (5.54)$$

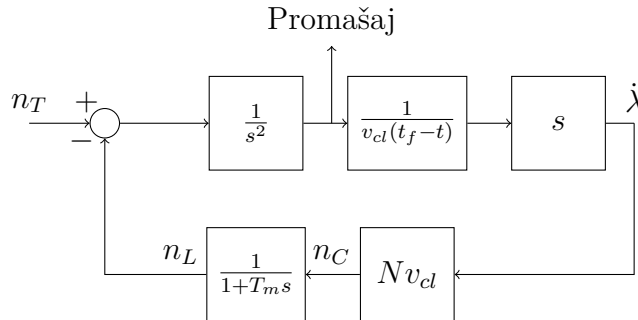
pa se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{ZEM}{v_{cl}t_{go}^2} \quad (5.55)$$

Ako se pretpostavi da će se pod uticajem ubrzanja a_c postići sudar, ZEM se može smatrati budućom tačkom susreta, pa se zakon vođenja proporcionalne navigacije može iskazati kao:

$$a_c(t) = N \frac{ZEM}{t_{go}^2} \quad (5.56)$$

Sada se vidi da je normalno ubrzanje projektila direktno proporcionalnu ZEM -u i inverzno proporcionalno kvadratu preostalom vremenu leta, što znači da se generiše veće ubrzanje što je susret bliži. Pošto se ZEM posmatra kao buduća tačka susreta, koja se računa na osnovu znanja ili pretpostavki budućeg kretanja mete, PN vođenje se smatra prediktivnim. ZEM je koristan jer se može izračunati mnoštvom metoda uključujući i on-line numeričku integraciju nelinearnih diferencijalnih jednačina projektila i mete. Prethodno izvedene linealizovane jednačine proporcionalne navigacije se mogu prikazati blok dijagramom kao na slici 5.3. Ulaz sistema je ubrzanje mete, a



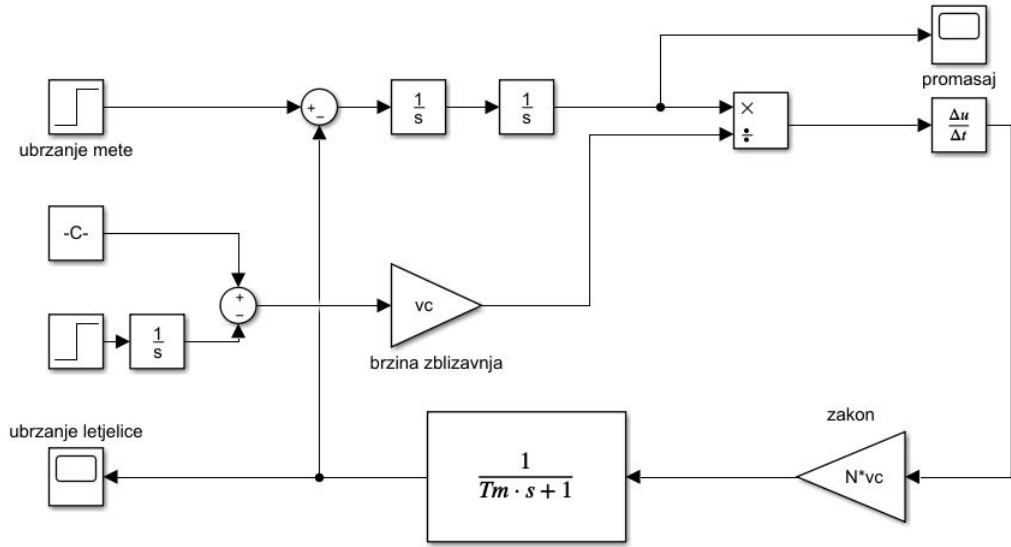
Slika 5.3: Petlja navođenja

u povratnoj sprezi se nalazi upravljački zakon. Pretpostavlja se da je model trekera

idealni diferencijator i sistem za navođenje ne uvodi nikakvo kašnjenje. U stvarnosti, sistem za navođenje se modelira prenosnom funkcijom prvog reda, tj:

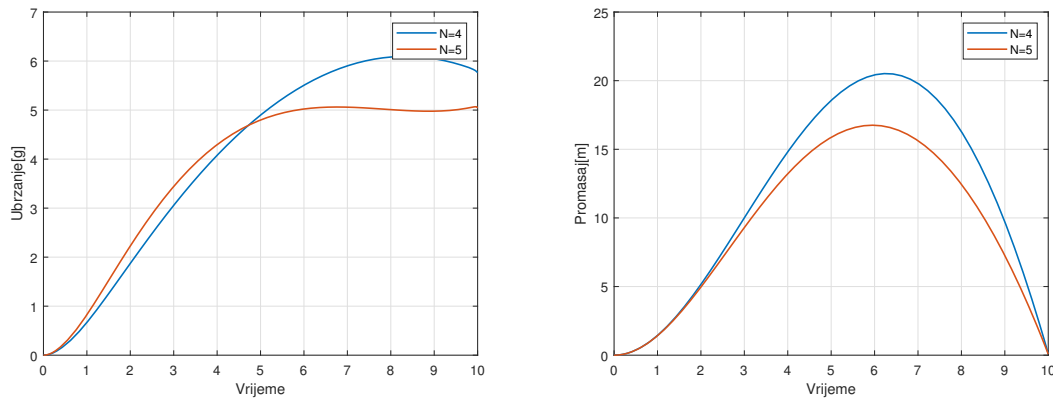
$$\frac{n_L}{n_c} = \frac{1}{1 + sT} \quad (5.57)$$

,gdje je n_L ostvareno ubrzanje projektila, a n_c zahtjevano ubrzanje projektila. Ko-



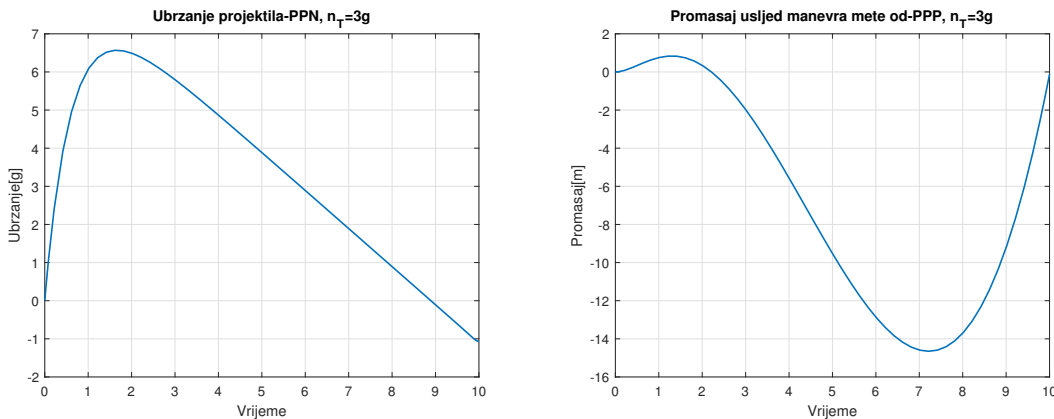
Slika 5.4: Proporcionalana navigacija u Simulinku

risteći Simulink dijagram sa slike 5.4 izvršene su simulacije za $N = 4$ i $N = 5$ pri ubrzanju mete od $3g$. Ubrzanja projektila su prikazana na grafu 5.5. Vidi se



Slika 5.5: Ubrzanja projektila i promasaj za $N = 4$ i $N = 5$

da veći efektivni navigacijski odnos zahtjeva manje ubrzanje projektila pa su time smanjeni i zahtjevi za performansam projektila, međutim veći efektivni navigacijski odnos daje manji promasaj što se vidi na grafiku za promasaj na slici 5.5. U oba slučaja ostvaren je sudar unutar deset sekundi. U nastavku je na slici 5.6 prikazan simulink model izmjenjene proporcionalne navigacije. Ubrzanje projektila



i promašaj su prikazana na graficima na slici 5.7. Sada se konačno vidi da i kod proporcionalne navigacije i kod promjenjene proporcionalne navigacije se grantuje sudar unutar vrmena leta ako se izabere $N = 3$. Dalje se vidi da ubrzanje projektila kod promjenjene proporcionalne navigacije počinje od nula za razliku od čiste proporcionalne navigacije. Kod promjenjene proporcionalne navigacije promašaj može postati negativan što iziskuje promjenu smjera normalnog ubrzanja projektila.

Direktna simulacija lineariziranih jednačina proporcionalne navigacije se uvijek može koristiti za generisanje upravljačkog signala (tj. normalnog ubrzanja) projektila ali je tehnika nazvana *adjungovana tehnika* historijski bila glavni računarski alat za dizajn i analizu vođenih projektila. Adjungovana tehnika je zasnovana na impulsnom odzivu sistema i koristi se za analizu LTI sistema kao što je petlja navođenja

projektila. Koristeći ovu tehniku mogu se dobiti tačne vrijednosti bilo koje veličine u datom trenutku.

Poznato je da je odziv sistema na proizvoljni ulaz potpuno određen impulsnim odzivom sistema, pa tj. vrijedi da je odziv linearnog sistema dat sa:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)h(t, \tau)d\tau \quad (5.58)$$

Fizikalno, impulsni odziv $h(t-\tau)$ predstavlja odziv sistema na impulsnu pobudu koja se primjeni na sistem u trenutku τ . Prema tome određivanje odziva sistema zahtjeva analitičku formu impulsnog odziva. Svaki linearni sistem ima i svoj adjungovani sistem i veza između impulsnog odziva linearnog sistema i njegovog adjungovanog sistema je data sa:

$$h^*(t_f - \tau, t_f - t) = h(t, \tau) \quad (5.59)$$

Ako se uzme da je ulaz sistema Heavysideov impuls, tada je odziv sistema dat sa:

$$y(t) = a \int_0^t h^*(t_f - \tau, t_f - t)d\tau \quad (5.60)$$

,nakon uvođenja smjene $x = t_f - \tau$, dobija se:

$$y(t) = a \int_{t_f-t}^{t_f} h^*(x, t_f - t)dx \quad (5.61)$$

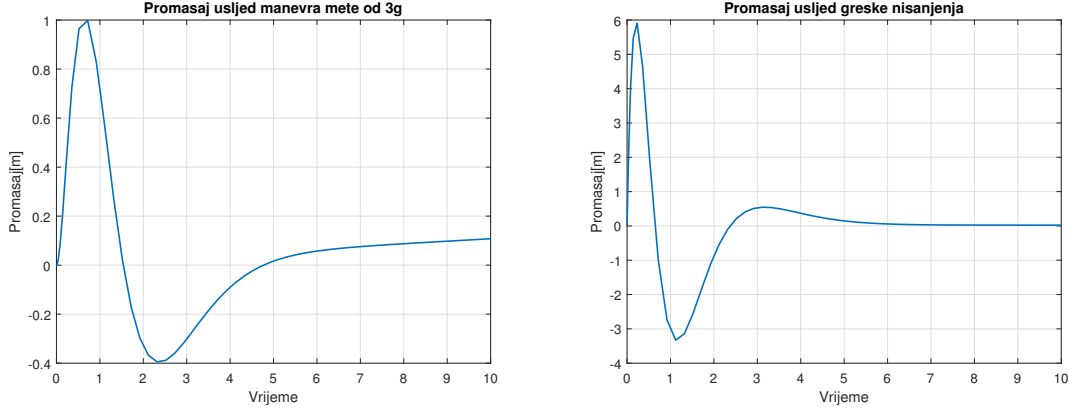
Pošto je veličina od interesa promašaj na kraju leta uzima se $t_f = t$, pa prethodna relacija postaje:

$$y(t_f) = a \int_0^{t_f} h^*(x, 0)dx \quad (5.62)$$

Vidi se da se integracija vrši po posmatranom vremenu i da ne zavisi od trenutka primjene impulsa na adjungovani sistem. Ovo znači da se izlaz u trenutku t_f može dobiti primjenjujući impuls u početnom trenutku, te zatim integrišući ulaz. Konstrukcija adjungovanog modela se vrši prema naredna tri koraka:

1. Pretvoriti sve ulaze sistema u impulse
2. Zamjeniti t sa $t_f - t$ i obratno na mjestima gdje se vrijeme pojavljuje kao argument
3. Promjeniti smjer toka svih signala, mjenjajući sume sa čvorovima i obratno

Koristeći navedena pravila dobija se adjungovana petlja navođenja prikazana na slici 5.8, s tim da je kao smetnja u sistem dodata još i početna greška nišanjenja data sa $v_M e_q$, za $v_M = 610 \frac{m}{s}$ i $e_q = 20 \text{ deg}$. Sada je moguće dobiti promašaj usljed manevra mete i promašaj usljed početne greške nišanjenja sve u jednoj simulaciji! Jedinični impuls se može predstaviti kao početni uslov kod prvog integratora. Na



Slika 5.10: Odzivi adjungovanog sistema

5.8 Adjungovani stohastički sistemi

Pored mnoštva informacija koje adjungovani sistem daje pri analizi determinističkih sistema, adjugnovana tehnika je dosta korisna pri analizi stohastičkih sistema što je naročito korisno pri analizi petlje navođenja jer su manevri mete u stvarnosti stohastički. Prije nego se prikaže upotreba adjungovane tehnike na petlji navođenja sa stohastičkim ulazima, potrebno je se prisjetiti nekoliko važnih definicija.

Očekivana vrijednost slučajne promjenljive x čija funkcija gustoće vjerovatnoće $p(x)$ je definisana sa:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (5.63)$$

Standardna devijacija je data sa:

$$\sigma = \sqrt{E(x^2) - E^2(x)} \quad (5.64)$$

Autokorelaciona funkcija je data sa:

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \quad (5.65)$$

Autokorelaciona funkcija predstavlja sličnost dvaju identičnih funkcija pri čemu su one smaknute za neki vremenski interval. Fourieova transformacija autokorelacione funkcije se zove *spektralna gustoća snage* i data je sa:

$$\Phi_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (5.66)$$

Kod bijelog šuma spektralna gustoća snage je konstanta tj.

$$\Phi_{xx} = \phi_0 \quad (5.67)$$

Autokorelaciona funkcija bijelog šuma je delta impuls tj.

$$\phi_{xx} = \Phi_0 \delta(t) \quad (5.68)$$

Ovo znači da je bijeli šum samo u jednoj tački identičan samom sebi. Kod stohastičkih sistema, izlaz je opisan očekivanom vrijednosšću kvadrata izlaza. Prema tome, ako su ulazi tipa bijelog šuma tada vrijedi:

$$y^2(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau_1)h(t, \tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^t x(\tau_2)h(t, \tau_2)d\tau_2 \quad (5.69)$$

Ako je $x(t)$ slučajna promjenljiva, može se naći i očekvana vrijednost kvadrata izlaza:

$$E[y^2(t)] = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t h(t, \tau_1)h(t, \tau_2)E[x(\tau_1)x(\tau_2)]d\tau_1d\tau_2 \quad (5.70)$$

Ako je ulaz $x(t)$ tipa bijelog šuma spektralne gustoće snage Φ , tada se prethodni dvojni integral može pojednostaviti zbog impulsne prirode autokorelacione funkcije bijelog šuma, pa vrijedi:

$$E[y^2(t)] = \Phi \int_{-\infty}^t h^2(t, \tau)d\tau \quad (5.71)$$

Sada se prisjetimo da je impulsni odziv adjungovanog sistema $h^*(t_f - \tau, t_f - t) = h(t, \tau)$ i nakon uvođenja smjene $x = t_f - \tau$, dobija se:

$$E[y^2(t)] = \Phi \int_{t_f-t}^{t_f} [h^*(x, t_f - t)]^2 dx \quad (5.72)$$

Pošto je u interesu promašaj na kraju leta, to je:

$$E[y^2(t_f)] = \Phi \int_0^{t_f} [h^*(x, 0)]^2 dx \quad (5.73)$$

Sada se vidi da se očekivana vrijednost kvadrata izlaza može dobiti tako što se kvadrira i integrira izlaz stohastičkog sistema i to sve u toku samo jedne simulacije. Prednost adjungovane metode postaje veća kada se uzme u obzir da na stohastički sistem može djelovati više slučajnih ulaza. Kod adjungovane metode, ulazi postaju izlazi pa se superpozicijom pri samo jednoj simulaciji može dobiti tačna statistička analiza stohastičkog sistema i analiza utjecaja svakog ulaza(tipa bijelog šuma) na performanse sistema.

Sada pretpostavimo da meta izvodi manevar konstantnog normalnog ubrzanja i da ga počinje izvoditi u trenutku T koji je dat uniformnom raspodjelom i to tako da

vrijedi:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_f}, & za 0 \leq t \leq t_f \\ 0 & za t \geq T \end{cases} \quad (5.74)$$

Prema tome ulaz u petlju vođenja je dat sa:

$$x(t) = n_T u(t - T) \quad (5.75)$$

Ovo znači da je vjerovatnoća pojave manevra jednako vjerovatno u toku cijelog leta. Prema tome, autokorelaciona funkcija ulaza u petlju vođenja je:

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_2)p(T)dT \quad (5.76)$$

pa se dobija:

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = \int_0^{t_f} n_T(t_1 - T)n_T(t_2 - T)\frac{dT}{t_f} \quad (5.77)$$

Ako se pretpostavi da je $0 < t_1 < t_2 < t_f$, dobija se autokorelacione funkcija ulaza:

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = \frac{n_T^2}{t_f} \int_0^{t_1} t_1 dT \quad (5.78)$$

Autokorelaciona funkcija sistema sa impulsnim odzivom $h(t)$ koji je vođen bijelim šumom se može izraziti kao:

$$\phi_{yy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1 - \tau) \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2 - \tau)\phi_{uu}(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.79)$$

Gdje je $\phi_{uu}(t_1, t_2) = \Phi_u \delta(\tau_1 - \tau_2)$, autokorelaciona funkcija bijelog šuma i Φ_u je spektralna gustoće snage i pretpostavlja se da je ona konstantna za cijelo vrijeme leta tj. da vrijedi:

$$\Phi_u(t) = \begin{cases} \Phi_u, & 0 \leq t \leq t_f \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (5.80)$$

Pa se dobija:

$$\phi_{yy}(t_1, t_2) = \Phi_u \int_0^{t_1} h(t_1 - \tau)h(t_2 - \tau)d\tau \quad (5.81)$$

Sada poredeći prethodnu jednačinu sa 5.78 zaključuje se da su dvije autokorelacione funkcije iste ako je:

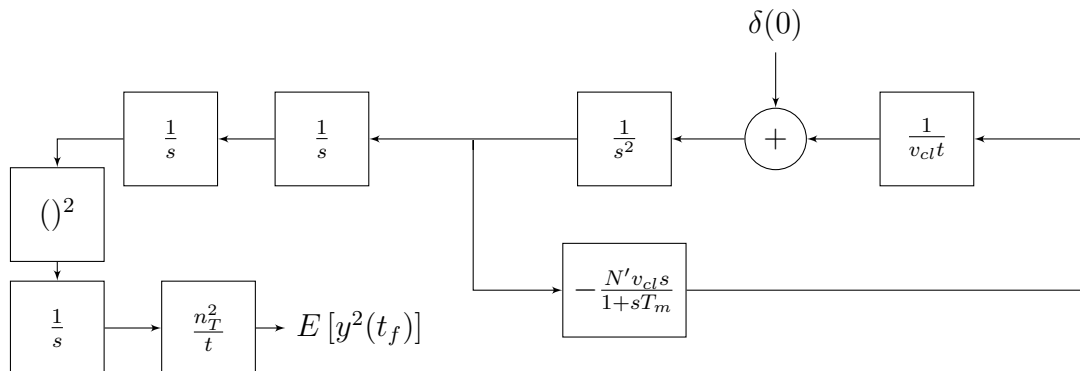
$$\Phi_u = \frac{n_T^2}{t_f} \quad (5.82)$$

$$h(t) = 1 \quad (5.83)$$

Sada se vidi da je manevar konstante amplitude n_T , kod koga je vrijeme početka djelovanja uniformno raspoređeno u toku vremena leta t_f ima istu autokorelacionu funkciju kao i linearni sistem sa prenosnom funkcijom $H(s) = \frac{1}{s}$ na koji djeluje bijeli šum spektralne gustoće snage dat sa:

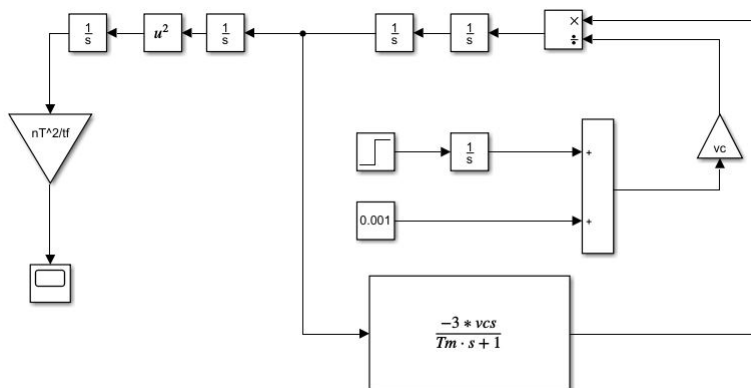
$$\Phi_u(t) = \begin{cases} \Phi_u, & 0 \leq t \leq t_f \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Sada će se prikazati primjena adjungovane tehnike na sthastički sistem. Važe ista pravila za kreiranje adjungovanog sistema kao i ranije sa jednim dodatnim pravilom da se svi stohastički ulazi se moraju modelirati kao bijeli šum koji na kraju postaju izlazi adjungovanog sistema. Pošto se ulaz originalnog sistema modelira kao bjeli šum kroz integrator, adjungovani model će promijeniti tok signala i kvadrirati i integrisati izlaz. Dobijeni adjungovani model je prikazan na slici 5.11. Na slici 5.12 je



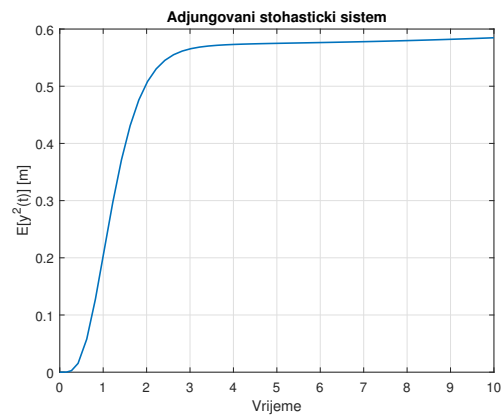
Slika 5.11: Adjungovani stohastički model

prikazan Simulink model adjungovanog stohastičkog sistema. Impulsni signal je u Simulink modelu unešen kao početni uslov na odgovarajućem integratoru. Dobija se



Slika 5.12: Simulink model adjungovanog stohastičkog sistema

očekivana vrijednost kvadrata promašaja kao što je prikazano na grafiku 5.13 Vidi se da je očekivana vrijednost kvadrata promašaja naglo porasla u prve tri sekunde



Slika 5.13: Očekivana vrijednost kvadrata promašaja

leta. Ovo je zbog toga što je upravo u tom intervalu promašaj najveći, nakon toga promašaj počinje opadati.

Sinteza autopilota

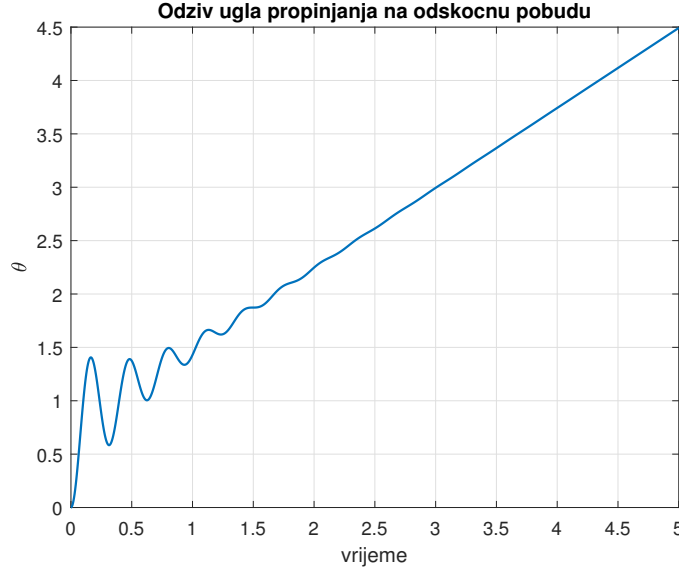
Autopilot je sistem sa zatvorenom povratnom spregom unutar sistema za vođenje objekta u prostoru koji osigurava da projektil dostigne ubrzanje koje mu sistem vođenja zapovjeda. Funkcija autopilota je da stabilizuje i vodi projektil tako što zadaje upravljačke signale kontrolnim površinama koji tjeraju projektil da se rotira odnosno da translira. Pošto tranzijentni odziv projektila varira sa promjenom uslova leta, tako i parametri autopilota treba da se mijenjaju sa uslovima leta pa prema tome dobro dizajniran autopilot osigurava skoro linearan odziv. Najčešće se za projektovanje autopilota koristi linerizirani model drugog reda koji je ranije izveden.

6.1 Upravljanje i stabilizacija ugla propinjanja

Glavni zadatak autopilota ugla propinjanja je da stabilizuje projektil, tj. da pruži stabilizaciju propinjanja projektila oko longitudinalne ose. Ovo se postiže tako što se mjeri brzina propinjanja i taj signal se koristi da bi se otklonile kontrolne površine za iznos koji je potreban da bi se borilo protiv poremećaja. Poremećaji u uglu propinjanja mogu nastati zbog atmosferskih poremećaja ili zbog asimetričnosti letjelice. Dalje, često se zahtjeva da ugao propinjanja prati određenu referentnu vrijednost. Ovo se može zahtijevati kod "zemlja- zrak" projektila kod kojih se zahtjeva da projektil ima isti ugao pri kojem je lansiran sa platforme. Viđeno je ranije da odziv ugla propinjanja neograničeno raste na stalan otklon krmila visine i da u početku leta ima kratkoperiodične oscilacije. Uvođenjem povratne sprege, može se postići da ugao propinjanja postigne zadatu stacionarnu vrijednost, ali kratkoperiodične oscilacije će i dalje ostati i mogu praviti probleme. Kratkoperiodične oscilacije se mogu ukloniti uvođenjem dodatne povratne sprege po brzini ugla propinjanja i time povećati stabilnost procesa. Uvođenjem integralnog kompenzatora može se povećati brzina odziva. U nastavku će se projektovati regulator ugla propinjanja za linerizirani model longitudinalnog kretanja koji je dat prenosnom funkcijom:

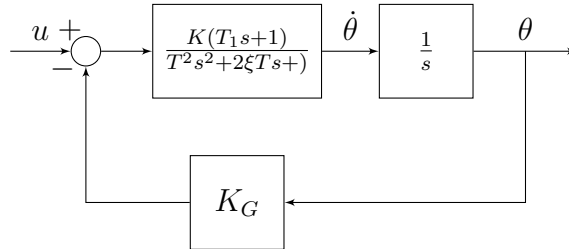
$$\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta\delta_V(s)} = \frac{K(T_1s + 1)}{s(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)} \quad (6.1)$$

Za $K = 0.75$, $T_1 = 1s$, $\omega_n = 20 \frac{rad}{s}$ i $\xi = 0.1$. Postojenje nule u prenosnoj funkciji uvodi oscilacije i povećava preskok sistema sa zatvorenim povratnom spregom. Odziv ugla propinjanja na odskočnu pobudu je dat na slici 6.1 Ako se želi da ugao



Slika 6.1: Oodziv ugla propinjanja u otvorenoj povratnoj sprezi

propinjanja prati neku referentnu vrijednost može se uvesti povratna sprega po uglu propinjanja preko slobodnog brzinskog žiroskopa. Blok dijagram sistem sa zatvorenim povratnom spregom po uglu propinjanja dat je na slici 6.2. Prenosna funkcija



Slika 6.2: Povratna sprega po uglu propinjanja

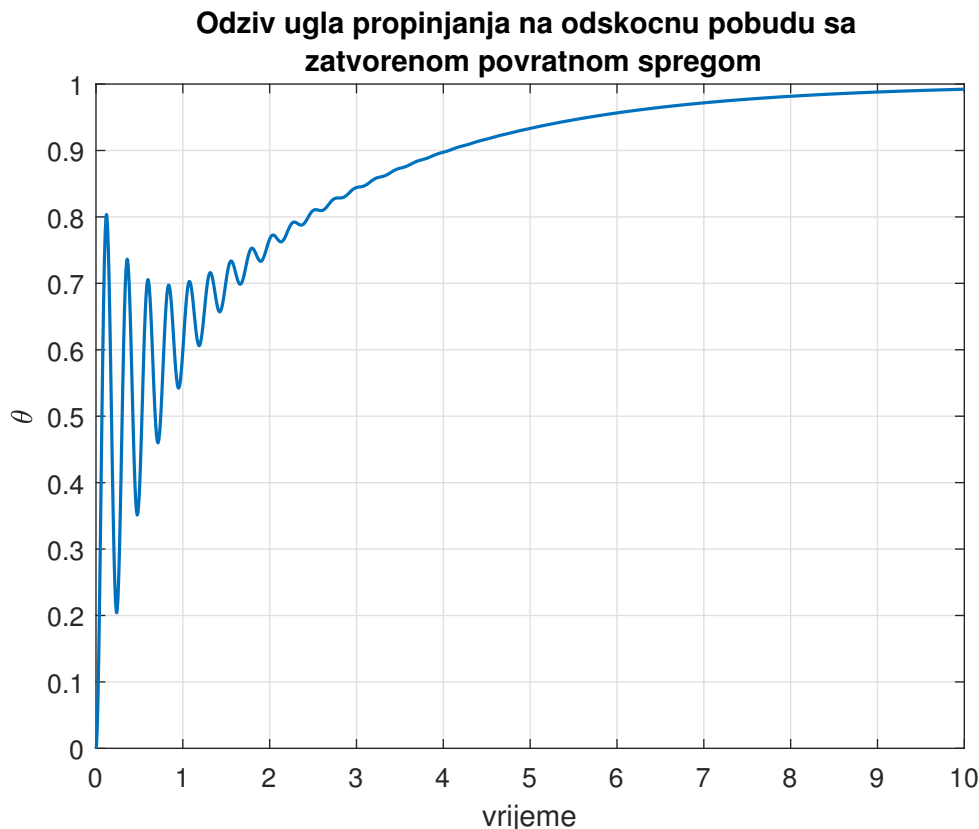
sistema sa zatvorenim povratnom spregom je data sa:

$$\frac{\theta(s)}{\delta_V(s)} = \frac{\frac{K_G K(T_1 s + 1)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}}{1 + \frac{K_G K(T_1 s + 1)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}} = \frac{K(T_1 s + 1)}{T^2 s^3 + 2\xi T s^2 + (1 + K K_G T_1)s + K K_G} \quad (6.2)$$

Sada se vidi da je stacionarna vrijednost odziva ugla propinjanja na odskočnu pobudu:

$$\theta_{stac} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{K(T_1 s + 1)}{T^2 s^3 + 2\xi T s^2 + (1 + K K_G T_1)s + K K_G} = \frac{1}{K_G} \quad (6.3)$$

Odziv ugla propinjanja sa zatvorenim povratnom spregom po uglu propinjanja je data na slici 6.3 Sada se vidi da se uvođenjem povratne sprege po uglu propinjanja osi-

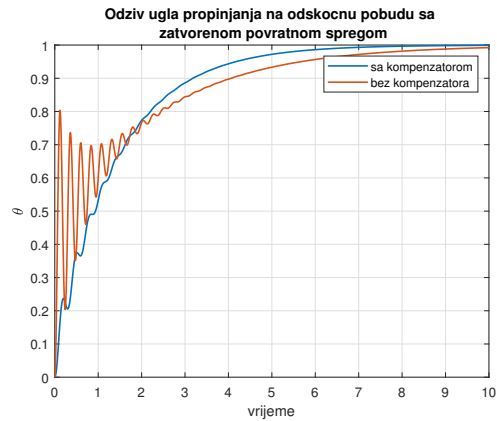


Slika 6.3: Odziv ugla propinjanja sa zatvorenim povratnom spregom po uglu propinjanja

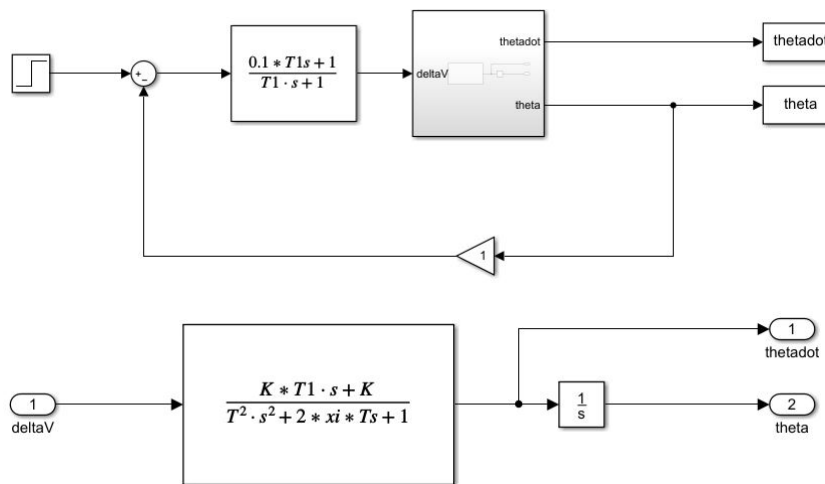
gurava da ugao propinjanja prati referentnu vrijednost, ali se vidi i da je odziv sporiji i da i dalje postoje kratkoperiodične oscilacije na početku propinjanja. Ove oscilacije su posljedica postojanja nule u prenosnoj funkciji zatvorene petlje. Uvođenjem integralnog kompenzatora, ova nula se može pokratiti sa polom kompenzatora i tako dobiti glađi odziv. Uvedimo kompenzator sa prenosnom funkcijom:

$$G_c(s) = \frac{\alpha T_c s + 1}{T_c s + 1} \quad \alpha < 1 \quad (6.4)$$

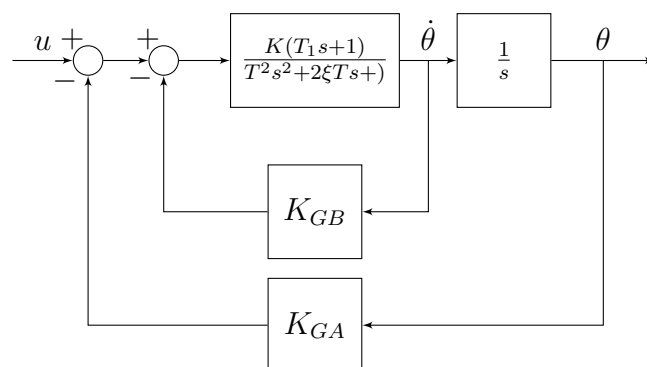
Ako se za pol kompenzatora uzme $T_c = T_1$, tada će nula sistema sa otvorenim povratnom spregom biti u $-\frac{1}{\alpha T_1}$ što daje veću kontrolu nad postavljanjem polova. Povoljnim odabirom parametra α nula se može postaviti na proizvoljnu lokaciju. Odziv sistema sa integralnim kompenzatorom je prikazan na slici 6.4. Simulink blok dijagram za simulaciju odziva sa integralnim kompenzatorom je prikazan na slici 6.5. Dodatno, stabilnost odziva se može povećati uvođenjem dodatne povratne sprege po brzini ugla propinjanja. Ako se uvede povratna samo po brzini, tada će se stabilizovati samo brzina promjene ugla propinjanja a sam ugao propinjanja će imati oblik rampe. Blok dijagram ovog upravljačkog sistema je dat na slici 6.6. Vrijednost izvoda ugla propinjanja se dobija pomoću brzinskog žiroskopa, a vrijednost ugla



Slika 6.4: Odziv ugla propinjanja sa integralnim kompenzatorom



Slika 6.5: Regulacija sa integralnim kompenzatorom



Slika 6.6: Povratna sprega po brzini i uglu propinjanja

propinjanja se dobija pomoću slobodnog žiroskopa. Pojačanje povratne grane iznosi:

$$H(s) = K_{GA} + sK_{GB} \quad (6.5)$$

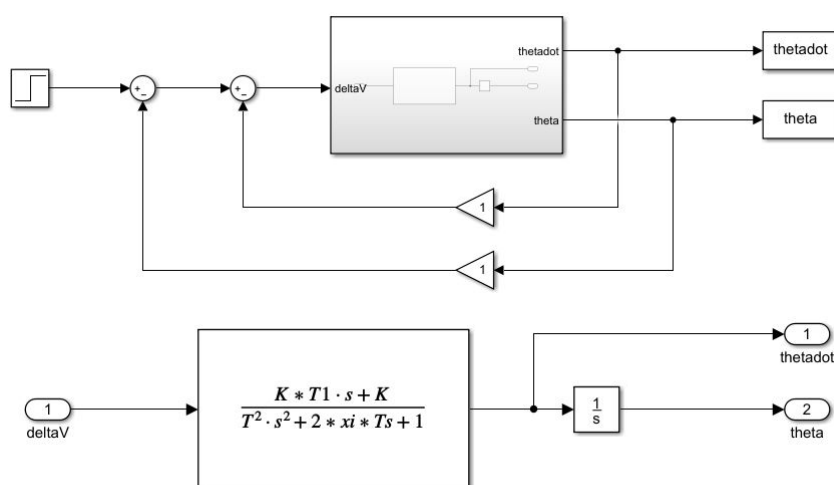
,a pojačanje direktne grane je:

$$P(s) = \frac{1}{s} \frac{K(T_1 s + 1)}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad (6.6)$$

Pa je ukupna funkcija prenosa:

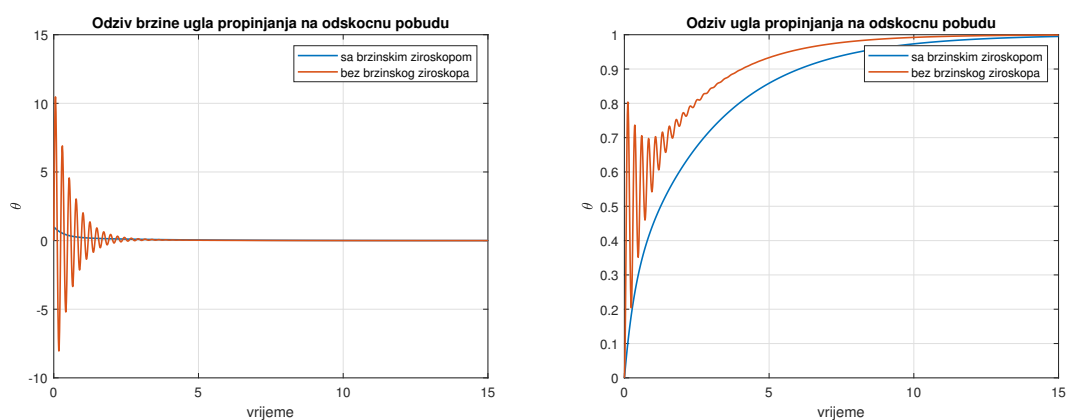
$$\frac{\theta(s)}{\delta_V(s)} = \frac{K(T_1 s + 1)}{T^2 s^3 + (2\xi T + K K_{GB} T_1) s^2 + (1 + K K_{GB} + K K_{GA} T_1) s + K K_{GA}} \quad (6.7)$$

Ovaj sistem je prikazan Simulink blok dijagramom na slici 6.7. Stacionarna vrijed-



Slika 6.7: Simulink shema kaskadne regulacije ugla propinjanja

nost na odskočnu pobudu iznosi $\frac{1}{K_{GA}}$



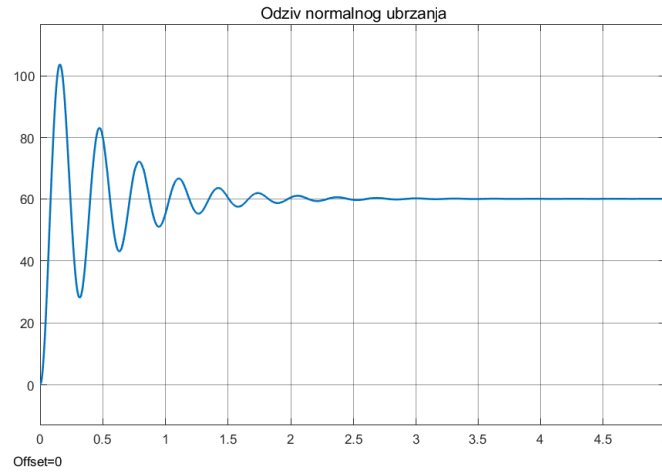
Slika 6.8: Odzivi ugla propinjanja sa povratnom spregom po brzini i uglu propinjanja

6.2 Upravljanje normalnim ubrzanjem

Kako je razmatrano u prethodnom poglavlju, kod proporcionalne navigacije, se projektilu zadaju normalna ubrzanja kako bi on pogodio metu pa je od posebnog interesa imati sistem za regulaciju normalnog ubrzanja projektila. Jasno je da će to opet biti upravljanje u zatvorenoj povratnoj sprezi. Normalno ubrzanje projektila pri longitudinalnom kretanju je dato prenosnom funkcijom:

$$\frac{n_L(s)}{\delta_V(s)} = \frac{KV}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} \quad (6.8)$$

Stacionarna vrijednost iznosi KV . Odziv na odskočni otklon krmila visine je dat na slici 6.9. Ako se uvede povratna sprega po normalnom ubrzanju pomoću akcele-

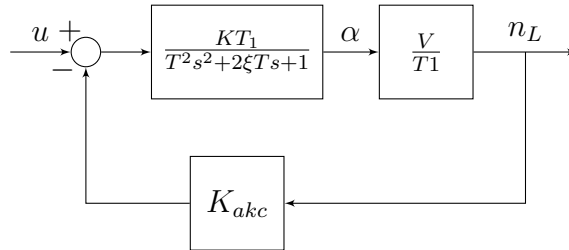


Slika 6.9: Odziv normalnog ubrzanja na odskočni otklon krmila visine

rometra kao na slici 6.10, tada je prenosna funkcija zatvorene petlje:

$$\frac{n_L(s)}{u(s)} = \frac{KV}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1 + K_{akc}KV} \quad (6.9)$$

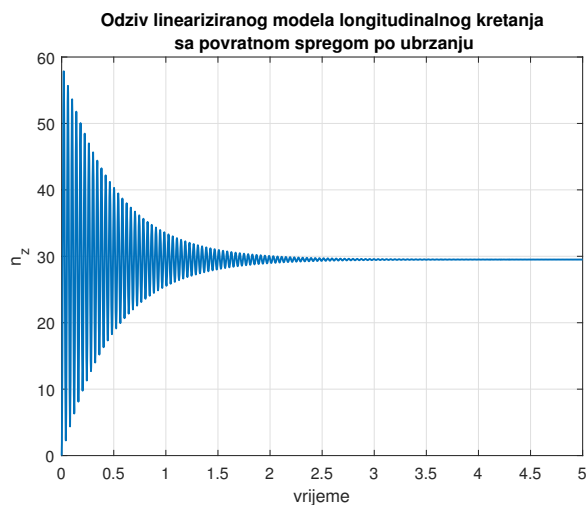
Korištenjem teoreme o konačnoj vrijednosti dobija se da je stacionarna vrijednost



Slika 6.10: Blok dijagram sistem za upravljanje normalnim ubrzanjem

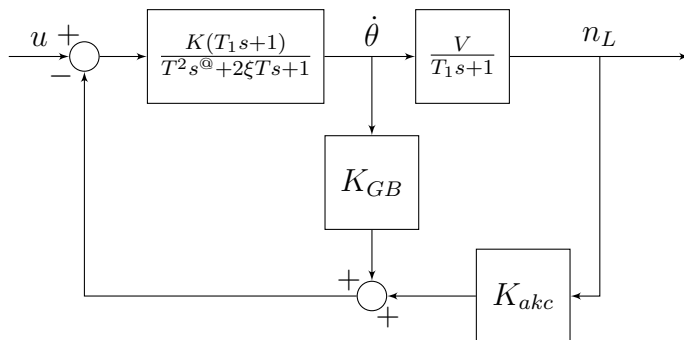
na odskočni pobudu sistema sa zatvorenom spregom sada $\frac{KV}{1+K_{akc}KV}$. Za velike vrijednosti pojačanja poratne sprege ima se da je stacionarna vrijednost odziva $1/K_{akc}$

pa na prvi pogled izgleda da se može postići proizvoljno pojačanje ali treba uzeti u obzir da ubrzanje projektila može lahko doći u zasićenje i da isto tako otklon krmila može dostići maksimalnu vrijednost. Sopstvena frekvencija sistema sa zatvorenim spregom je sada povećana i iznosi $\frac{1+K_{akc}KV}{T^2}$ a novi koeficijent prigušenja je smanjen i iznosi $\xi(1+K_{akc}KV)^{-1/2}$. Ovo nije dobra osobina s obzirom da se od autopilota zahtjeva da poveća koeficijent prigušenja kako bi se povećala stabilnost sistema. Generalno, performanse projektila su obično manje od zahtjevanih pa je uvijek zadatak autopilota da ih poboljša. Odziv normalnog ubrzanja sa zatvorenim spregom po ubrzanju je prikazan na slici 6.11. Jasno se sa grafika vidi da su oscilacije



Slika 6.11: Odziv normalnog ubrzanja sa zatvorenim spregom po ubrzanju je prikazan

povećane jer je smanjen koeficijent prigušenja. Da bi se nadoknadio smanjeni koeficijent prigušenja, u svrhu njegova povećanja može se uvesti nova povratna sprega po brzini promjene ugla propinjanja kao što je to prikazano na slici 6.12 Sada je



Slika 6.12: Upravljanje normalnim ubrzanjem sa akcelerometrom i brzinskim žiroskopom

prenosna funkcija zatvorene petlje data sa:

$$\frac{n_L(s)}{u(s)} = \frac{KV}{T^2 s^2 + (2\xi T + KK_{GB}T_1)s + 1 + KK_{GB} + KK_{akc}V} \quad (6.10)$$

Sada je nova stacionaran vrijednost odziva:

$$n_{Lstac} = \frac{KV}{1 + KK_{GB} + KK_{akc}V}$$

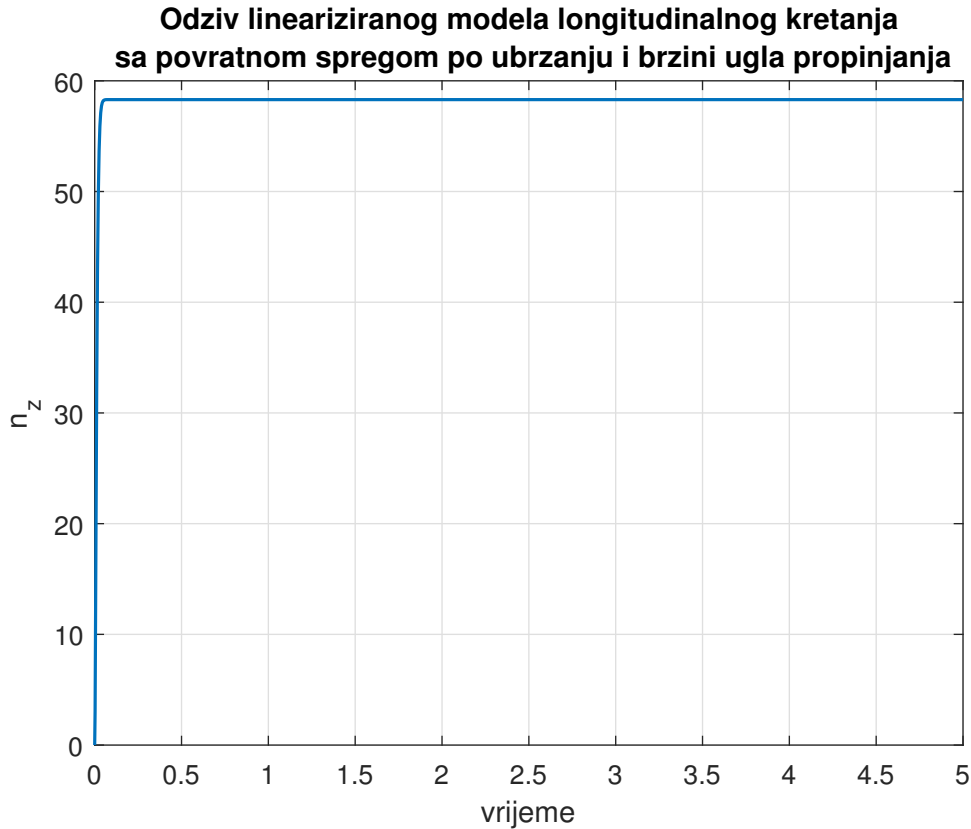
,a novi faktor prigušenja je dat sa:

$$\xi' = \frac{1}{2} \frac{2\xi T + KK_G T_1}{\sqrt{1 + KK_G + KK_{akc}V}}$$

I nova prirodna frekvencija je određena sa:

$$\omega'_n = \frac{\sqrt{1 + KK_G + KK_{akc}V}}{T}$$

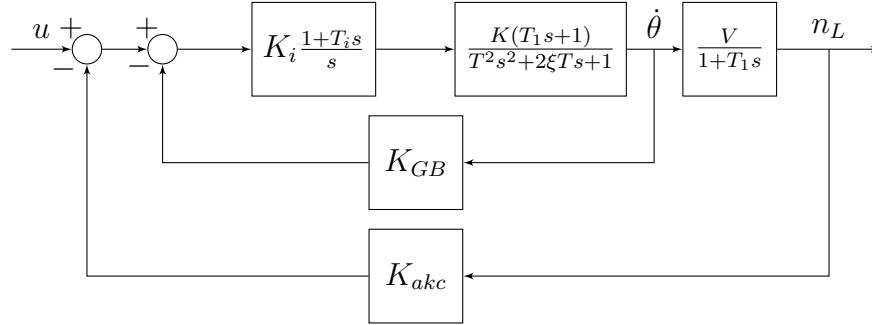
Odziv za referentnu vrijednost $60 \frac{m}{s^2}$ je dat na slici 6.13 Vidi se sa grafika na slici



Slika 6.13: Odziv sistema sa povratnom spregom po ubrzanju i brzini ugla propinjanja

6.13 da odziv ne prati referentnu vrijednost. Naravno, iz jednačine 6.2 se vidi da ako se uzme pojačanje akcelerometra $K_{akc} = 1 - \frac{1+KK_{GB}}{KV}$ da će se eliminisati greška

stacionarnog stanja, ali ovo je naivno rješenje pošto sada pojačanje akcelerometra zavisi od parametara projektila koji se mijenjaju sa uslovima leta. Robusnije rješenje je uvesti PI regulator u direktnu granu (sl. 6.14) kako bi se eliminisala greška stacionarnog stanja. Neka je PI regulator dat prenosnom funkcijom:



Slika 6.14: PI regulacija normalnog ubrzanja

$$G_{PI} = K_i \frac{1 + T_i s}{s} \quad (6.11)$$

Ako se tačka u kojoj je $\dot{\theta}$ izmjesti nakon bloka $\frac{V}{1 + T_1 s}$ dobija ju se dvije povratne petlje po istoj veličini pa se mogu pretvoriti u jednu povratnu petlju. Tada je pojačanje povratne petlje dato sa:

$$L(s) = K_{akc} + K_{GB} \frac{1 + T_1 s}{s} \quad (6.12)$$

a pojačanje direktne grane je:

$$P(s) = K_i \frac{1 + T_i s}{s} \frac{KV}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad (6.13)$$

Sada se nakon dosta algebre dolazi do ukupne prenosne funkcije:

$$M(s) = \frac{K_i KV (1 + T_i s)}{T^2 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (6.14)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2\xi T + K_{GB} K_i K T_i T_1 \\ a_1 &= 1 + K_i K_{akc} K V T_i + K_{GB} K_i K (T_i + T_1) \\ a_0 &= K_{akc} K V K_i + K_{GB} K_i K \end{aligned}$$

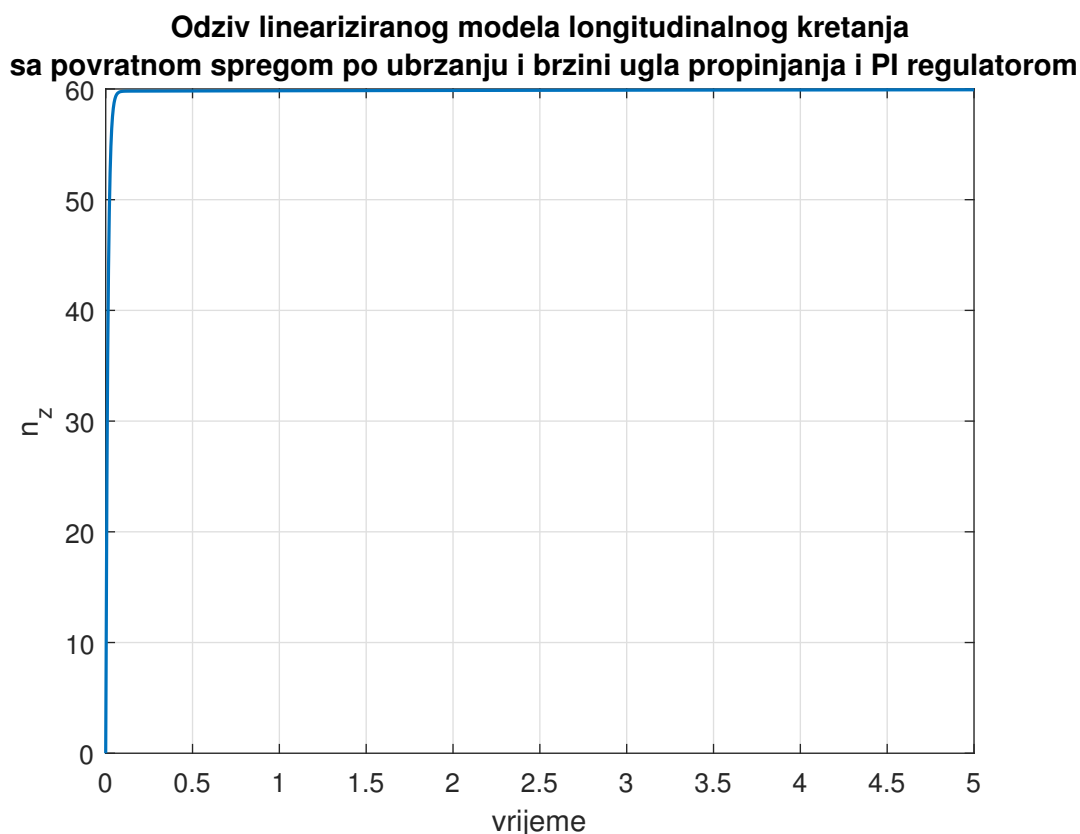
Sada je stacionarna vrijednost odziva na odskočnu pobudu:

$$n_{Lstac} = \frac{K_i KV}{K_{akc} K V K_i + K_{GB} K_i K} = \frac{V}{K_{akc} V + K_{GB}} \quad (6.15)$$

Sada, ako se zahtjeva da odziv nema greške stacionarnog stanja, treba odabrati:

$$K_{akc} = 1 - \frac{K_{GB}}{V} \quad (6.16)$$

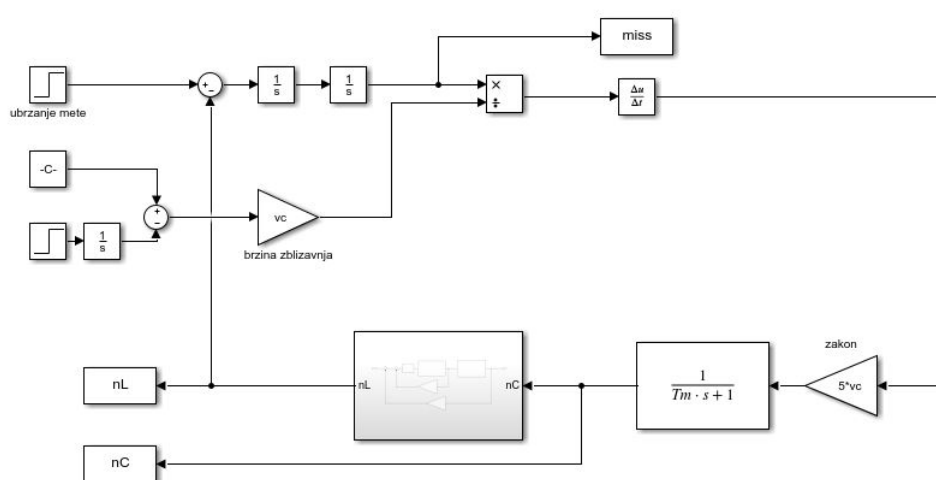
Ovo je dosta bolje rješenje, budući da ovdje treba poznavati samo brzinu projektila. Parametri PI regulatora i pojačanje brzinskog žiroskopa se mogu odabrati da zadovolje neki kriterij. Na grafiku 6.15 je prikazan odziv i vidi se da nema greške stacionarnog stanja. Uzeto je jedinično pojačanje brzinskog žiroskopa i prenosna funkcija PI regulatora $G_{PI} = 5 \frac{1+s}{s}$. Ovo je naizgled izvrsno rješenje ali treba uvijek uzeti u obzir da normalno ubrzanje projektila može doći u zasićenje i da prevelika ubrzanja mogu dovesti sistem u nestabilno stanje. Također maksimalno normalno ubrzanje ograničeno je maksimalnim otklonom krmila visine pa treba koristiti anti-windup schemu za upravljanje kako se ne bi akumulirala prevelika greška.

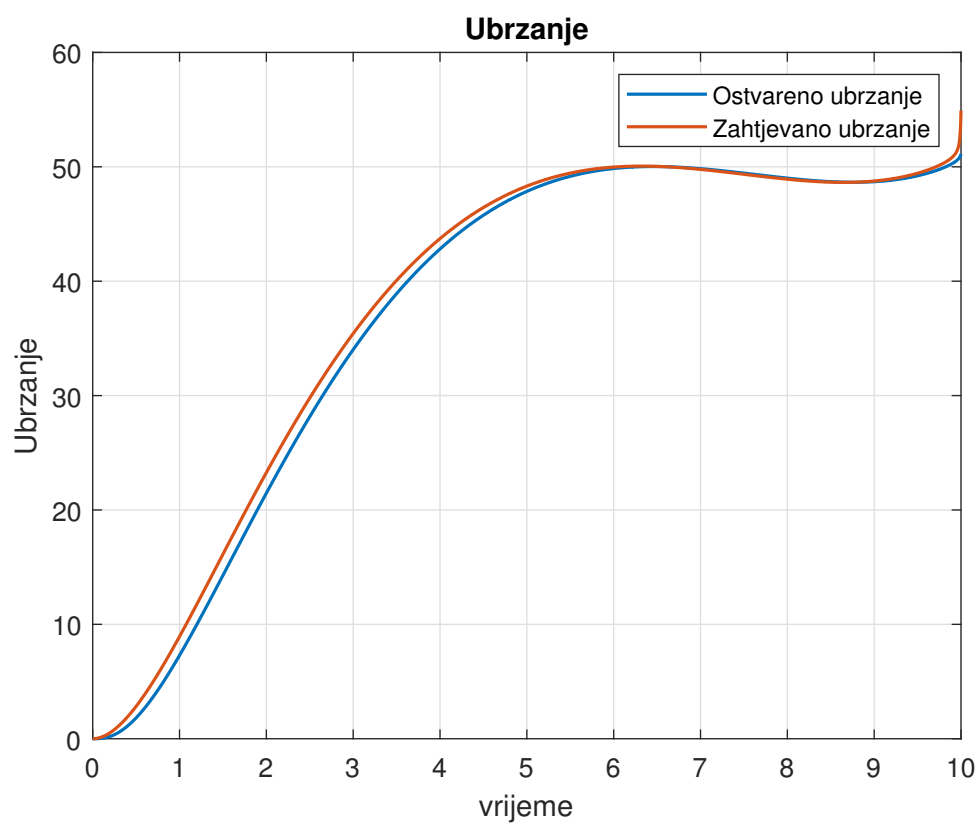
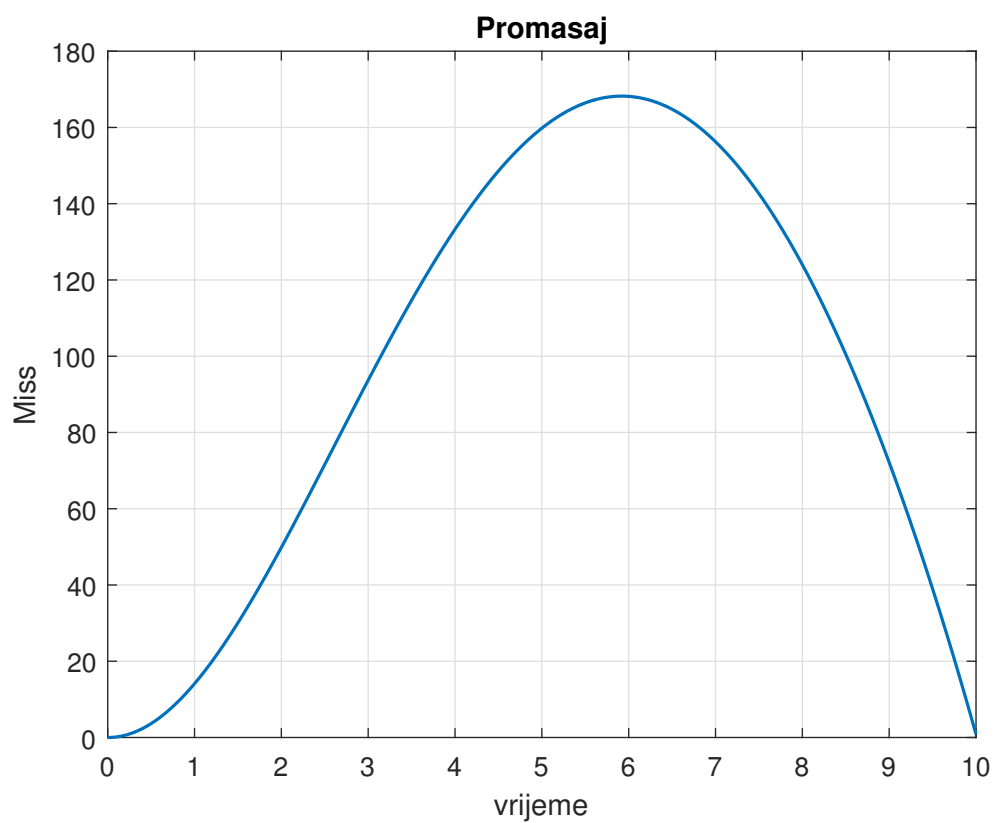


Slika 6.15: Odziv normalnog ubrzanja sa PI regulatorom i povratnom spregom sa brzinskim žiroskopom i akcelerometrom

6.3 Sinteza sistema za vođenje proporcionalnom navigacijom

Sada kada je poznata upravljačka struktura normalnog ubrzanja, može se u potpunosti dizajnirati sistem navigacije projektila koristeći se ranije opisanom metodom proporcionalne navigacije. Ranije su predstavljene simulacije vođenja proporcionalnom navigacijom, ali one nisu uključivale neizostavnu dinamiku projektila. Da bi se odradila simulacija sa dinamikom projektila, upravljački sistem za normalno ubrzanje će se predstaviti kao podsistem u simulinku i koristiti će se u ranije izložen Simulink dijagram za lineariziranu proporcionalnu navigaciju(5.4).





Bibliografija

- Shneydor, N.A. (1998.). *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control*. 1. Elsevier Science.
- Siouris, George M. (2004.). *Missile Guidance and Control Systems*. Springer-Verlag New York.
- Graovac, S. (2005.). *Automatsko vođenje objekata u prostoru*. Akademska misao.
- Yanushevsky, R. (2007.). *Modern Missile Guidance*. Taylor & Francis.
- Zarchan, P. (2007.). *Tactical and Strategic Missile Guidance*. AIAA Tactical Missile Series v. 219. American Institute of Aeronautics i Astronautics.
- Drela, M. (2014.). *Flight Vehicle Aerodynamics*. FLIGHT VEHICLE AERODYNAMICS. MIT Press.