

# Navigacija i upravljanje projektila

Mirza Hodžić

Mentor: prof. dr. Naser Prljača



FAKULTET ELEKTROTEHNIKE  
UNIVERZITET U TUZLI

# Sadržaj

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> |  | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>Jednačine kretanja tijela</b>                       | <b>5</b>  |
| 2.1      | Koordinatni sistemi . . . . .                          | 5         |
| 2.2      | Jednačine kretanja čvrstog tijela . . . . .            | 6         |
| <b>3</b> | <b>Sile koje djeluju na projektil</b>                  | <b>12</b> |
| 3.1      | Aerodinamičke sile . . . . .                           | 12        |
| 3.2      | Aerodinamički momenti . . . . .                        | 13        |
| <b>4</b> | <b>Uvod u proporcionalnu navigaciju</b>                | <b>14</b> |
| 4.1      | Opis planarnog susreta . . . . .                       | 14        |
| 4.2      | Izvođenje upravljačkog zakona . . . . .                | 15        |
| 4.3      | Izmjenjena proporcionalna navigacija . . . . .         | 17        |
| 4.4      | Optimalnost zakona proporcionalne navigacije . . . . . | 17        |
| 4.5      | Linearizacija . . . . .                                | 18        |
| 4.6      | Zero effort miss . . . . .                             | 19        |

# Popis slika

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Koordinatni sistem vezan za tijelo . . . . .                | 5  |
| 2.2 | Eulerovi uglovi . . . . .                                   | 6  |
| 2.3 | Predstava šest stepeni slobode . . . . .                    | 7  |
| 4.1 | Linearizacija jednačina proporcionalne navigacije . . . . . | 18 |

Nedovršeno

# Uvod

Nedodovršeno

# Jednačine kretanja tijela

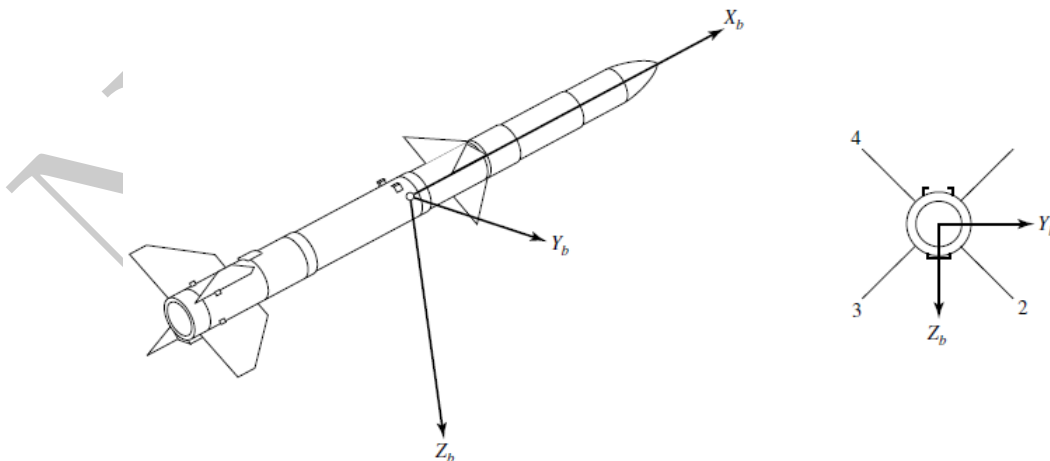
## 2.1 Koordinatni sistemi

Orijentacija osa koordinatnog sistema preko kojih su određeni vektori ili tenzori potpuno je proizvoljna. Obično se jedna od osi (e.g.  $x$  osa) poravnava sa geometrijskom osom tijela. Ako se tijelo kreće stalnom brzinom tada se jedan koordinatni sistem može koristiti za sve veličine, međutim ako se tijelo rotira tada se naslućuju dva koordinatna sistema:

- Koordinatni sistem vezan za zemlju
- Koordinatni sistem vezan za tijelo

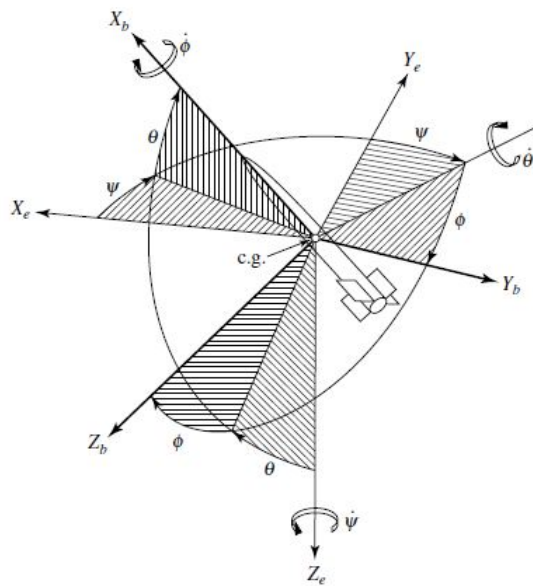
Koordinatni sistem vezan za zemlju je inercijalni iako se zemlje rotira u odnosu na geometrijsku osu. Sastoji se od tri ordinate, jedna predstavlja poziciju po sjevernoj osi, jedna po lokalnoj istočnoj osi i jedna predstavlja vertikalnu poziciju. Ose koordinatnog sistema vezanog za zemlju su označene sa  $X_e, Y_e, Z_e$ . Drugim riječima,  $X_e$  i  $Y_e$  leže u ravni dok je  $Z_e$  usmjeren ka centru Zemlje.

Koordinatni sistem vezan za tijelo sastoji se iz tri ordinate sa ishodištem u centru gravitacije letjelice:  $x$  osa koja je usmjerena ka nosu letjelice tj. podudara se sa longitudinalnom osom,  $y$  ose koja je usmjerena ka desnom krilu letjelice i  $z$  ose koja dopunjava lijevo orijentisani koordinatni sistem. Da se definiše položaj letjelice u



Slika 2.1: Koordinatni sistem vezan za tijelo

odnosu na koordinatni sistem koriste se Eulerovi uglovi ( $\psi, \theta, \phi$ ). Ovo znači da se bilo koja rotacija, odnosno transformacija iz sistema tijela u sistem Zemlje može postići sa tri rotacije oko osi i to prva rotacija za ugao  $\phi$  oko longitudinalne, za



Slika 2.2: Eulerovi uglovi

ugao  $\theta$  oko lateralne i za ugao  $\psi$  oko normalne ose. Transformacija  $C_e^b$  koja ostvaruje transformaciju iz koordinatnog sistema vezanog za zemlju u koordinatni sistem vezan za tijelo je data sa:

$$C_e^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

,odnosno:

$$C_e^b = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

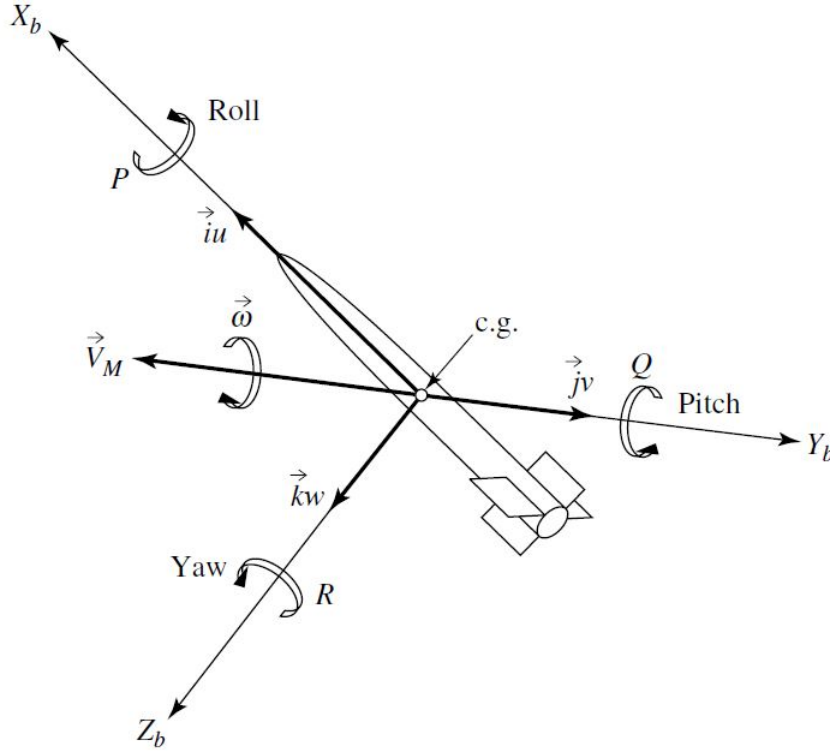
Treba primjetiti da rezultatna matrica  $C_e^b$  može imati singularitete, pa se domen Eulerovih uglova ograničava na sljedeći način:

$$\begin{aligned} -\pi &\leq \phi < \pi \quad \text{ili} \quad 0 \leq \phi < 2\pi \\ -\pi &\leq \psi < \pi \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ili} \quad 0 \leq \theta < \pi \end{aligned}$$

Ovo znači da u ovom slučaju postoji beskonačno mnogo načina da se ostvari željena transformacija. Ovaj problem se može riješiti uvođenjem jediničnog kvaterniona.

## 2.2 Jednačine kretanja čvrstog tijela

Sada ćemo posmatrati tipični projektil i izvesti jednačine koje opisuju njegovo kretanje. Pretpostaviti će se da čvrsto tijelo nema promjena u obliku pri kretanju. Translacija tijela podrazumijeva da svaka duž koja spaja bilo koje dvije tačke u



Slika 2.3: Predstava šest stepeni slobode

tijelu bude paralelna svojoj datoj originalnoj poziciji, prema tome čvrsto tijelo se može posmatrati kao čestica čija je masa skoncentrisana u jednoj tački koja se zove *centar mase*. Dalje se pretpostavlja da se oblik tijela ne mjenja usljed djelovanja sila na tijelo. Ovom pretpostavkom se dobija da međusobni utjecaj dijelica tijela eliminisan pa se translacija može potpuno opisati translacijom centra mase i da se rotacija može potpuno opisati rotacijom oko centra mase. Dodatno pretpostavlja se da se ravan simetrije poklapa sa ravninom  $X_b - Z_b$  kao što je to prikazano na slici 2.1. Također pretpostavlja se da je masa tijela konstantna. Važno je napomenuti da se jednačine tijela određuju u koordinatnom sistemu vezanom za tijelo. Nadalje, projektil ima šest stepeni slobode (6-DOF). Ovih šest stepeni se sastoje iz od tri translacije i tri rotacije. Translacije se sastoje od kretanja duž osi  $X_b, Y_b, Z_b$  brzinom  $v_m = (u, v, w)$ , a rotacije se sastoje od rotacija oko ovih osi ugaonom brzinom  $\omega = (P, Q, R)$ . Šest stepeni slobode je prikazano na slici 2.3. Kao što je ranije rečeno dinamički model projektila se dobija Newtonovim zakonom dinamike, koji kaže da je suma svih vanjskih sila jednaka brzini promjene impulsa tijela i da je suma svih vanjskih momenata jednaka brzini promjene momenta impulsa. Prema tome vrijede relacije:

$$\sum F = \frac{d(mv_m)}{dt} \Big|_{Zemlja} \quad (2.3)$$

$$\sum M = \frac{dH}{dt} \Big|_{Zemlja} \quad (2.4)$$

gdje je  $H$  ugaoni momentum a  $\sum M$  je suma svih vanjskih momenata koji djeluju na tijelo. Naravno, prethodne relacije predstavljaju promjene vektora u odnosu na inercijalni prostor. Rezultantna vanjska sila koja djeluje na tijelo se može razložiti na sile koje djeluju po osama koordinatnog sistema vezanog za tijelo projektila, pa

se može napisati:

$$\sum \Delta F = \sum \Delta F_x i + \sum \Delta F_y j + \sum \Delta F_z k \quad (2.5)$$

Poredeći prethodnu jednačinu sa 2.3 dobija se:

$$F_x = \frac{d(mu)}{dt}, F_y = \frac{d(mv)}{dt}, F_z = \frac{d(mw)}{dt} \quad (2.6)$$

Analogno, dobija se da vrijedi:

$$L = \frac{dH_x}{dt}, M = \frac{dH_y}{dt}, N = \frac{dH_z}{dt} \quad (2.7)$$

Gdje su  $L, M$  i  $N$  moment valjanja, moment propinjanja i moment zakretanja respektivno i  $H_x, H_y$  i  $H_z$  su komponente momenta impulsa duž osa tijela. Sada želimo proširiti jednačine 2.6 i 2.7 kako bi smo dobili jednačine kretanja za svaki stepen slobode. U svrhu toga koristi se formula za brzinu promjenu brzine projektila u inercijalnom sistemu, tj. u koordinatnom sistemu vezanom za zemlju i ona je data relacijom:

$$\left( \frac{dv_m}{dt} \right)_{zemlja} = \left( \frac{dv_m}{dt} \right)_{tijelo} + \omega \times v_m \quad (2.8)$$

Prema tome vrijedi da je ukupna vanjska sila koja djeluje na tijelo data sa:

$$F = m \left( \frac{dv_m}{dt} \right)_{tijelo} + m(\omega \times v_m) \quad (2.9)$$

gdje je vektorski proizvod linearne brzine i ugaone brzine dat sa:

$$\omega \times v_m = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ u & v & w \end{vmatrix} = (wQ - vR)i + (uR - wP)j + (vP - uQ)k \quad (2.10)$$

Koristeći se činjenicom da je  $v_m = ui + vj + wk$  i uvrštavanjem prethodne jednačine u 2.9 dobija se:

$$\sum \Delta F = m(\dot{u}i + \dot{v}j + \dot{w}k) + (wQ - vR)i + (uR - wP)j + (vP - uQ)k \quad (2.11)$$

Sada, poredeći sa 2.5 dobijaju se jednačine:

$$\sum \Delta F_x = m(\dot{u} + wQ - vR) \quad (2.12)$$

$$\sum \Delta F_y = m(\dot{v} + uR - wP) \quad (2.13)$$

$$\sum \Delta F_z = m(\dot{w} + vP - uQ) \quad (2.14)$$

Prethodno dobivene tri jednačine predstavljaju *linearne jednačine kretanja*. Sada treba odrediti ove tri jednačine za rotaciono kretanje. Da bi se to postiglo potrebno je imati izraz za moment impulsa  $H$  kao što imamo izraz za impuls kod translatorsnog



kretanja. Moment impulsa oko proizvoljne tačke  $O$  materijalne tačke je dat sa:

$$H = r \times mV = mr \times (\omega \times r) \quad (2.15)$$

Vektor momenta impulsa  $H$  je normalan  $r$  i na  $v$  i  $H$  je usmjeren isto kao i moment impulsa  $M$ . Moment impulsa cijelog tijela oko tačke  $O$  je dat sa:

$$H = \sum r \times mv_m = \sum mr \times (\omega \times r) = \sum m [\omega(r \cdot r) - r(r \cdot \omega)] \quad (2.16)$$

ili u formi integrala:

$$H = \int r \times (\omega \times r) dm \quad (2.17)$$

Sada slijedi:

$$\omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{vmatrix} = (zQ - yR)i + (xR - zP)j + (yP - xQ)k \quad (2.18)$$

i konačno:

$$r \times (\omega \times r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ zQ - yR & xR - zP & yP - xQ \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

Sada se konačno dobija izraz za moment impulsa:

$$\begin{aligned} H = & i \int [(y^2 + z^2)P - xyQ - xzR] dm + j \int [(z^2 + x^2)Q - yzR - xyP] dm \\ & + k \int [(x^2 + y^2)R - xzP - yzQ] dm \end{aligned} \quad (2.20)$$

Kada se uvedu oznake:

$$\begin{aligned} I_x = \int (y^2 + z^2) dm, I_y = \int (x^2 + z^2) dm, I_z = \int (x^2 + y^2) dm \\ I_{xy} = \int xy dm, I_{yz} = \int yz dm, I_{xz} = \int xz dm \end{aligned} \quad (2.21)$$

Tada se dobija:

$$H = (PI_x - RI_{xz})i + QI_yj + (RI_z - PI_{xz})k \quad (2.22)$$

Sada se vektor momenta impulsa može zapisati preko svojih komponenti:

$$H_x = PI_x - RI_{xz} \quad (2.23)$$

$$H_y = QI_y \quad (2.24)$$

$$H_z = RI_z - PI_{xz} \quad (2.25)$$

Sada su potrebni izvodi momenta impulsa kako bi smo dobili izraz za rezultatni moment. Pošto je izvod vektora u inercijalnom prostoru jednak zbiru izvoda poje-

dinačnih komponenti vektora. Prema tome vrijedi:

$$\frac{dH_x}{dt} = I_x \frac{dP}{dt} - I_{xz} \frac{dR}{dt} \quad (2.26)$$

$$\frac{dH_y}{dt} = I_y \frac{dQ}{dt} \quad (2.27)$$

$$\frac{dH_z}{dt} = I_z \frac{dR}{dt} - I_{xz} \frac{dP}{dt} \quad (2.28)$$

Relacija 2.4 se može napisati kao:

$$\sum \Delta M = \frac{dH}{dt} + \omega \times H \quad (2.29)$$

Ako se uvaži da je  $\sum \Delta M = \sum \Delta L_i + \sum \Delta M_j + \sum \Delta N_k$ , korištenjem prethodno dobivenih izraza za izvod momenta impulsa dobija se:

$$\sum \Delta L = \dot{P}I_x + QR(I_z - I_y) - (\dot{R} + PQ)I_{xz} \quad (2.30)$$

$$\sum \Delta M = \dot{Q}I_y + PR(I_x - I_z) + (P^2 - R^2)I_{xz} \quad (2.31)$$

$$\sum \Delta N = \dot{R}I_z + PQ(I_y - I_x) - (\dot{P} - QR)I_{xz} \quad (2.32)$$

Prethodne tri jednačine zajedno sa jednačinama 2.12, 2.13 i 2.14 predstavljaju jednačine projektila sa šest stepeni slobode. Ove jednačine su simultane linearne jednačine kretanja sa šest promjenjivih  $u, v, w, P, Q$  i  $R$  koje potpuno opisuju kretanje čvrstog tijela. Rješenja ovih jednačina se mogu dobiti numeričkim metodama na digitalnom računaru. Analitička rješenja dovoljne tačnosti se mogu dobiti linearizacijom.  $I_x, I_y$  i  $I_{xz}$  su konstantne i za projekte sa krstastom konfiguracijom vrijedi  $I_y = I_z$  i  $I_{xz} = 0$ . Prema tome, vrijedi:

$$\sum \Delta L = \dot{P}I_x + QR(I_z - I_y) \quad (2.33)$$

$$\sum \Delta M = \dot{Q}I_y + PR(I_x - I_z) \quad (2.34)$$

$$\sum \Delta N = \dot{R}I_z + PQ(I_y - I_x) \quad (2.35)$$

Transformacijom prethodnih jednačina dobija se:

$$\frac{dP}{dt} = QR \frac{I_y - I_z}{I_x} + \frac{L}{I_x} \quad (2.36)$$

$$\frac{dQ}{dt} = PR \frac{I_z - I_x}{I_y} + \frac{M}{I_y} \quad (2.37)$$

$$\frac{dR}{dt} = PQ \frac{I_x - I_y}{I_z} + \frac{N}{I_z} \quad (2.38)$$

Sada je još potrebno odrediti ugaone brzine u zavisnosti od Eulerovih uglova. Izvođenje ovih jednačina zahtjeva pronalaženje izvoda matrice transformacije, što je poprilično zahtjevno, pa će ovdje biti samo navedene diferencijalne jednačine koje daju brzinu

promjene Eulerovih uglova:

$$\frac{d\psi}{dt} = (Q \sin \phi + R \cos \phi) / \cos \theta \quad (2.39)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q \cos \phi - R \sin \phi \quad (2.40)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = P + \left( \frac{d\psi}{dt} \right) \sin \theta \quad (2.41)$$

Sada koristeći matricu transformacije  $C_e^b$  se mogu dobiti komponente brzine u koordinatnom sistemu Zemlje:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_z \\ \dot{Y}_z \\ \dot{Z}_z \end{bmatrix} = C_e^b \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Sada je jasno da se integracijom jednačina 2.36, 2.37 i 2.38 dobijaju ugaone brzine u sistemu tijela, a integracijom jednačina 2.39, 2.40 i 2.41 se dobija orijentacija u odnosu na zemlju. Da bi se dobila pozicija tijela u odnosu na sistem Zemlje treba riješiti matricnu jednačinu 2.42. Da bi se ona mogla numerički riješiti treba naći izraze za izvode brzina u sistemu tijela. Oni se mogu dobiti iz jednačina 2.12, 2.13 i 2.14. Nakon transformacije ovih jednačina ima se:

$$\frac{du}{dt} = vR - wQ + F_x/m \quad (2.43)$$

$$\frac{dv}{dt} = wP - uR + F_y/m \quad (2.44)$$

$$\frac{dw}{dt} = uQ - vR + F_z/m \quad (2.45)$$

Sada se nakon rješavanja prethodne tri jednačine mogu dobiti vrijednosti brzina u sistemu tijela te nakon toga može se riješiti jednačina 2.42 i tako dobiti poziciju u odnosu na sistem Zemlje. Prethodnih 12 jednačina se može predstaviti u prostoru stanja ako se uzme vektor varijabli stanja:

$$\vec{X} = [u \quad v \quad w \quad P \quad Q \quad R \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad x_z \quad y_z \quad z_z]^T$$

i vektor upravljačkih promjenljivih:

$$\vec{u} = [\delta_v \quad \delta_P \quad \delta_e]^T$$

,gdje je  $\delta_v$  ugao otklona krmila visine,  $\delta_P$ , ugao otklona krmila i  $\delta_e$ , ugao toklona elerona. Ovim se dobija nelinearna vektorska jednačina:

$$\dot{\vec{X}} = f(\vec{X}, \vec{u}) \quad (2.46)$$

# Sile koje djeluju na projektil

Sile koje djeluju na projektil su u letu su aerodinamičke, pogonske sile i gravitaciona sila. Ove sile se mogu razložiti po osama koordinatnog sistema vezanog za tijelo.

## 3.1 Aerodinamičke sile

Aerodinamička sila je posljedica djelovanja pritiska okolnog fluida na tijelo u pokretu. Aerodinamička sila se može razložiti na tri komponente koje su definisane u nastavku:

- **Uzgon**- Uzgon je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je normalna na relativno kretanje vjetra.
- **Otpor**- Otpor je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je paralelna relativnom kretanju vjetra.
- **Bočna sila**- Bočna sila je komponenta rezultantne aerodinamičke sile koja je normalna na uzgon i otpor.

Ovdje se posmatraju projektili koji se zakreću da bi skrenuli(skid to turn) i kod takvih projektila aerodinamičke sile su date sa:

$$\text{Uzgon} \quad R_x = C_x q S \quad (3.1)$$

$$\text{Otpor} \quad R_z = C_z q S \quad (3.2)$$

$$\text{Bočna sila} \quad R_y = C_y q S \quad (3.3)$$

,gdje su  $C_x, C_y$  i  $C_z$  aerodinamički koeficijenti,  $q$  dinamički pritisak slobodnog strujanja u tački daleko od objekta i iznosi  $q = \frac{1}{2} \rho v^2$ ,  $S$  je referentna površina i  $v$  je brzina vazduha,  $\rho$  predstavlja atmosferski pritisak.

U opštem slučaju koeficijenti aerodinamičkih sila su funkcije varijabli stanja pa se može napisati:

$$C_x = C_x(\alpha, \beta M, q, \delta_v, \delta_P, \delta_e) \quad (3.4)$$

,gdje je  $M$  Mahov broj- odnos tekuće brzine i brzine zvuka,  $\alpha$  napadni ugao i  $\beta$  ugao klizanja. Slično tako vrijedi:

$$C_z = C_z(\alpha, \beta M, q, \delta_v, \delta_P, \delta_e) \quad (3.5)$$

Razvojem u Taylorov red i odbacivanjem viših članova dobija se aproksimacija aerodinamičkih koeficijenata:

$$C_x = C_{x_0} + C_{x_1} \alpha \quad (3.6)$$

$$C_z = C_{z_0} + C_{z_1} \quad (3.7)$$

,gdje je:

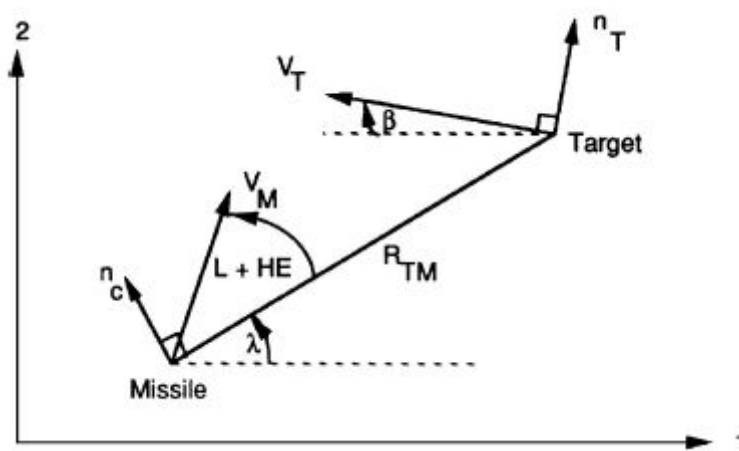
$$C_{x_0} = \left. \frac{\partial c_x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$
$$C_{x_1} = \frac{\partial c_x}{\partial \alpha}$$

## 3.2 Aerodinamički momenti

Nedovoljeno

# Uvod u proporcionalnu navigaciju

## 4.1 Opis planarnog susreta



Udaljenost između mete i projektila u svakom trenutku je data sa:

$$r(t) = r_T(t) - r_M(t) \quad (4.1)$$

Brzina približavanja projektila meti je data sa:

$$v_{cl} = -\dot{r}(t) \quad (4.2)$$

Ugaono ubrzanje mete je dato sa:

$$\dot{\beta} = \frac{n_T}{v_T} \quad (4.3)$$

Komponente vektora brzine mete u koordinatnom sistemu vezanom za zemlju su date sa:

$$v_{T1} = -v_T \cos \beta \quad (4.4)$$

$$v_{T2} = v_T \sin \beta \quad (4.5)$$

Slično tome, brzina i ubrzanje projektila su date sa:

$$\dot{v}_{M1} = a_{M1} \quad (4.6)$$

$$\dot{v}_{M2} = a_{M2} \quad (4.7)$$

$$\dot{R}_{M1} = v_{M1} \quad (4.8)$$

$$\dot{R}_{M2} = v_{M2} \quad (4.9)$$

Ugao *Line of sight* se može izračunati kao:

$$\lambda = \arctan \frac{R_{TM2}}{R_{TM1}} \quad (4.10)$$

Pa je:

$$\dot{\lambda} = \frac{R_{TM1}v_{TM2} - R_{TM2}v_{TM1}}{r^2} \quad (4.11)$$

Ugao između vektora pozicije i vektora brzine je dat sa:

$$L = \arcsin \frac{v_T \sin(\beta + \lambda)}{v_M} \quad (4.12)$$

Također treba uzeti u obzir da je:

$$v_{cl} = -\dot{r} = v_M \cos \delta - v_T \cos \theta \quad (4.13)$$

Te da će doći do sudara samo u slučaju da vrijedi:

$$v_M \cos \delta > v_T \cos \theta \quad (4.14)$$

Upravljački zakon proporcionalne navigacije je dat sa:

$$n_C = N' v_c \dot{\lambda} \quad (4.15)$$

## 4.2 Izvođenje upravljačkog zakona

$$\sin \lambda = \frac{y}{r} \quad (4.16)$$

Za male uglove može se koristiti aproksimacija:

$$\lambda \approx \frac{y}{r} \quad (4.17)$$

, pa je:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)r(t) - y(t)\dot{r}(t)}{r^2} \quad (4.18)$$

$$\ddot{\lambda}(t) = \frac{\ddot{y}(t) - 2\dot{\lambda}(t)\dot{r}(t) - \lambda(t)\ddot{r}(t)}{r(t)} \quad (4.19)$$

Uvedimo vremenski varijantne koeficijente:

$$a_1(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{r(t)} \quad (4.20)$$

$$a_2(t) = 2\frac{\dot{r}(t)}{r(t)} \quad (4.21)$$

$$b(t) = \frac{1}{r(t)} \quad (4.22)$$

Pa se dobija diferencijalna jednačina drugog reda sa varijabilnim koeficijentima:

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} + b(t)\ddot{y}(t) \quad (4.23)$$

Uzimajući u obzir dobija se:

$$\ddot{y}(t) = -a_M(t) + a_T(t) \quad (4.24)$$

$$\ddot{\lambda}(t) = -a_1(t)\lambda - a_2(t)\dot{\lambda} - b(t)a_M(t) + b(t)a_T(t) \quad (4.25)$$

Neka je  $x_1(t) = \lambda$  i  $x_2(t) = \dot{\lambda}$ . Tada je susret projektila i mete opisan sljedećim diferencijalnim jednačinama prvog reda.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.26)$$

$$\dot{x}_2 = -a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u + b(t)f \quad (4.27)$$

,gdje je uzeto  $u = a_M(t)$  i vanjska smetnja  $f = a_T(t)$ . Prvo posmatrajmo slučaj kada meta ne ubrzava, tj. kada je  $f = 0$ . Sada se problem proporcionalne navigacije može predstaviti kao:

Pronaći upravljački signal  $u$  tako da je sistem opisan jednačinama 4.26 i 4.27 asimptotski stabilan u odnosu na  $x_2$

Shodno tome, uzmimo Lyapunovu funkciju  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{2}cx_2^2 \quad (4.28)$$

Izvod po vremenu duž bilo koje trajektorije je:

$$\dot{Q} = cx_2(-a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - b(t)u(t)) \quad (4.29)$$

Sada se vidi da upravljački signal

$$u = kx_2 = k\dot{\lambda} \quad (4.30)$$

Stabilizuje sistem dat sa 4.26 i 4.27 ako  $k$  zadovoljava:

$$kb(t) + a_2(t) > 0 \quad (4.31)$$

,odnosno

$$k > -2\dot{r}(t) = 2v_{cl} \quad (4.32)$$

Prema tome, uvodeći *efektivni navigacijski odnos*  $N$ , izraz 4.30 postaje:

$$u = Nv_{cl}\dot{\lambda}(t) \quad , N > 2 \quad (4.33)$$

čime je potpuno određen zakon vođenja proporcionalne navigacije. Za trodimenzionalni slučaj se bira kandidat funkcija:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^3 d_s \dot{\lambda}_s^2 \quad (4.34)$$



, gdje su  $d_s$  pozitivni koeficijenti. Analogno se dobija upravljački zakon:

$$u_s = N v_{cl} \dot{\lambda}_s, \quad N > 2 \quad (s = 1, 2, 3) \quad (4.35)$$

### 4.3 Izmjenjena proporcionalna navigacija

Za mete koje manevrišu i imaju neko normalno ubrzanje, za planarni sustre, izvod Lyapunove kandidat funkcije je:

$$\dot{Q} = c x_2 (-a_1(t) x_1 - a_2(t) x_2 - b(t) u(t) + b(t) f) \quad (4.36)$$

Odakle se zaključuje da je upravljački signal koji stabilizuje sistem:

$$u = N v_{cl} \dot{\lambda}(t) + a_T(t), \quad N > 2 \quad (4.37)$$

### 4.4 Optimalnost zakona proporcionalne navigacije

Ako je promjena LOS ugla različita od nule, tada se primjenjuje normalno ubrzanje kako bi se promjena svela na nulu. U prethodnoj sekciji se proporcionalna navigacija predstavila kao problem upravljanja gdje je normalno ubrzanje bilo upravljački signal, a brzina promjene LOS ugla bila varijabla stanja. Proporcionalna navigacija se može posmatrati kao problem optimalnog upravljanja. Treba pronaći indeks performansi koji proporcionalna navigacija minimizira. Ovo predstavlja inverzni problem problem optimalnog upravljanja. Pretpostavimo da se projektil približava meti konstantnom brzinom. Ignorišući dinamiku projektila, vrijedi:

$$\ddot{y} = -a_M, \quad y = r \lambda, \quad r(\tau) = v_{cl} \tau \quad (4.38)$$

Također pretpostavlja se da nema kašnjenja u dinamici projektila, tj. da je  $a_M = a_{M_c}$ . Definišimo sada indeks performansi:

$$J = \frac{1}{2} C y^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} a_M^2 dt \quad (4.39)$$

Prvi član predstavlja promašaj (miss distance), a drugi predstavlja energiju energiju utrošenu u toku leta. Ideja je pronaći upravljanje  $a_M$  koje minimizira kriterij performanse  $J$ . Koristeći Bellman-Lyapunov pristup dobija se da je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3\tau}{3/C + \tau^3} (y(t) + \dot{y}(t)\tau) \quad (4.40)$$

Nulti promašaj se dobija za  $C \rightarrow \infty$ , pa je optimalno upravljanje dato sa:

$$a_M(t) = \frac{3}{\tau^2} (y(t) + \dot{y}(t)\tau) \quad (4.41)$$

Uzimajući u obzir da je:

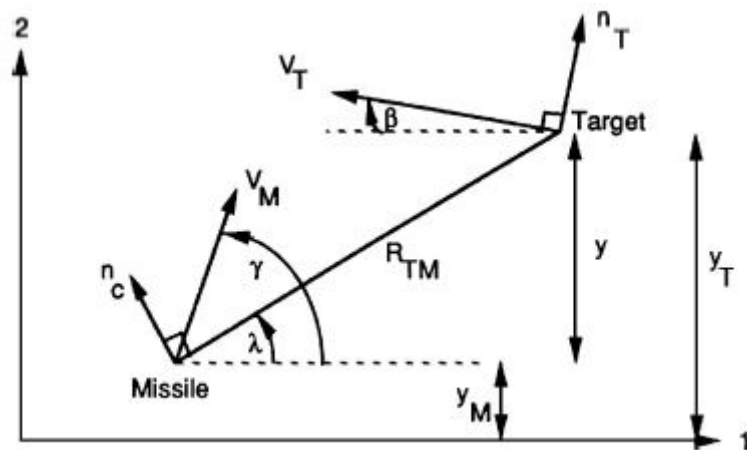
$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{y}(t)r(t) - y(t)\dot{r}(t)}{r^2} = \frac{\dot{y}(t)\tau + y(t)}{r} \quad (4.42)$$

jer je,  $r = v_{cl}\tau$ , dobija se:

$$a_M(t) = 3v_{cl}\dot{\lambda} \quad (4.43)$$

Ovo znači da pod uvedenim pretpostavkama, proporcionalna navigacija minimizira kriterij performanse  $J$  i izbor efektivnog navigacijskog odnosa  $N = 3$  garantuje da multi promašaj.

## 4.5 Linearizacija



Slika 4.1: Linearizacija jednačina proporcionalne navigacije

Linearizacija se može lahko izvršiti ako se definišu nove veličine koje su prikazane na slici 4.1. Relativno ubrzanje se može odrediti sa slike i iznosi:

$$\ddot{y} = n_T \cos \beta - n_c \cos \lambda \quad (4.44)$$

Ako su uglovi leta mali, tada vrijedi:

$$\ddot{y} = n_T - n_c \quad (4.45)$$

Slično tako vrijedi:

$$\lambda = \frac{y}{r} \quad (4.46)$$

Za čeonu slučaj vrijedi:

$$v_{cl} = v_M + v_t \quad (4.47)$$

Za potjeru vrijedi:

$$v_{cl} = v_M - v_t \quad (4.48)$$

Sada se može linearizirati i jednačina za udaljenost:

$$r(t) = v_{cl}(t_F - t) \quad (4.49)$$

gdje je  $t_F$  ukupno vrijeme leta.

Definišimo i veličinu *time to go*  $t_{go}$ :

$$t_{go} = t_F - t \quad (4.50)$$

Linearizirani promašaj se definiše kao udaljenost mete i projektila na kraju leta, ili:

$$Miss = y(t_f) \quad (4.51)$$

## 4.6 Zero effort miss

Ranije je pokazano da vrijedi:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)r(t) + y(t)v_{cl}}{r^2} \quad (4.52)$$

Kako vrijedi  $r = v_{cl}t_{go}$ , tada se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{y}(t)t_{go} + y(t)}{v_{cl}t_{go}^2} \quad (4.53)$$

Definišimo sada veličinu *Zero effort miss*, koja predstavlja buduće relativno rastojanje projektila i mete:

$$ZEM = \dot{y}(t)t_{go} + y(t) \quad (4.54)$$

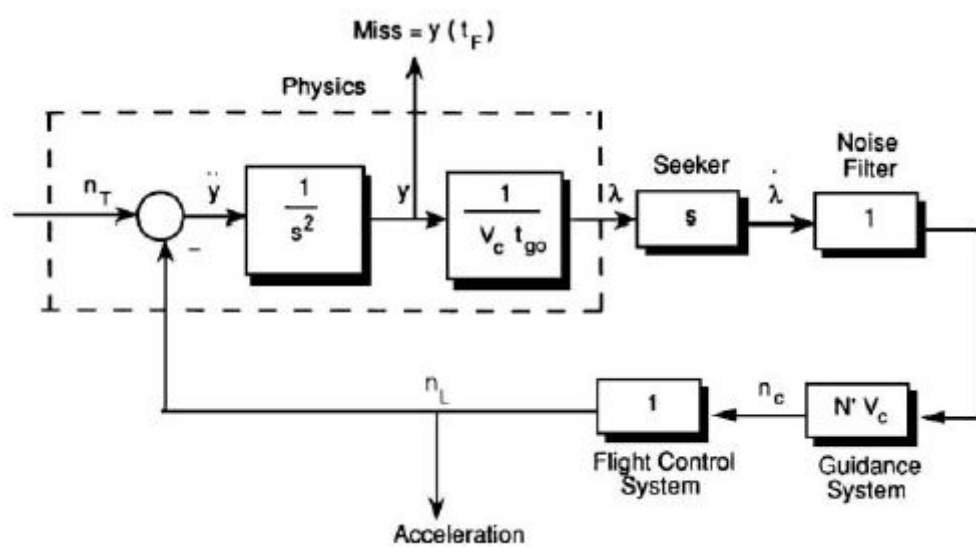
pa se dobija:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{ZEM}{v_{cl}t_{go}^2} \quad (4.55)$$

Ako se pretpostavi da će se pod uticajem ubrzanja  $a_c$  postići sudar,  $ZEM$  se može smatrati budućom tačkom susreta, pa se zakon vođenja proporcionalne navigacije može iskazati kao:

$$a_c(t) = N \frac{ZEM}{t_{go}^2} \quad (4.56)$$

Sada se vidi da je normalno ubrzanje projektila direktno proporcionalno  $ZEM$ -u i inverzno proporcionalno kvadratu preostalom vremenu leta, što znači da se generiše veće ubrzanje što je susret bliži. Pošto se  $ZEM$  posmatra kao buduća tačka susreta, koja se računa na osnovu znanja ili pretpostavki budućeg kretanja mete, PN vođenje se smatra prediktivnim.  $ZEM$  je koristan jer se može izračunati mnoštvom metoda uključujući i on-line numeričku integraciju nelinearnih diferencijalnih jednačina projektila i mete.



# Bibliografija

- Shneydor, N.A. (1998.). *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control*. 1. Elsevier Science.
- Siouris, George M. (2004.). *Missile Guidance and Control Systems*. Springer-Verlag New York.
- Yanushevsky, R. (2007.). *Modern Missile Guidance*. Taylor & Francis.
- Zarchan, P. (2007.). *Tactical and Strategic Missile Guidance*. AIAA Tactical Missile Series v. 219. American Institute of Aeronautics i Astronautics.
- Drela, M. (2014.). *Flight Vehicle Aerodynamics*. FLIGHT VEHICLE AERODYNAMICS. MIT Press.