Chasser dans les catégories abéliennes

par Alain Clément

1. Introduction

Les groupes abéliens, les modules sur un anneau, les complexes de groupes abéliens ou de modules ainsi que les faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique sont des exemples de catégories abéliennes. La définition d'un telle catégorie est axiomatique et n'impose pas que les objets soient des ensembles munis d'une structure, ni d'ailleurs que les morphismes soient des applications. On va néanmoins montrer qu'il est possible de "chasser" dans de telles catégories.
Les notions et définitions catégoriques, en particulier celles des catégories abéliennes, sont prérequises à la bonne compréhension de ce qui suit. Le lecteur intéressé trouvera dans la bibliographie une liste non-exhaustive d'ouvrages traitant du sujet.

2. Problématique

Considérons la catégorie des groupes abéliens. On connait des résultats très généraux dans cette catégorie, comme par exemple le lemme des cinq, le lemme du serpent et le lemme des neuf. En général, on établit ces résultats en "chassant" dans des diagrammes. Bien que cette terminologie ne soit pas bien définie, le procédé revient essentiellement à prendre un élément dans l'un des groupes du diagramme et d'inférer sur celui-ci en utilisant les propriétés d'injectivité et de surjectivité des homomorphismes avoisinants.
A titre d'exemple, voici une version allégée du lemme des cinq.

Lemme 1.
Considérons le diagramme commutatif de groupes abéliens et d'homomorphismes suivant, dont les lignes sont exactes et les deux homomorphismes latéraux sont injectifs:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, tail, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Alors l'homomorphisme du milieu est également injectif.

Preuve: Soit $b \in \ker\beta$. Par injectivité de γ et par commutativité on a $b \in \ker g$, et par exactitude il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. On a $f'\alpha(a) = \beta f(a) = \beta(b) = 0$, de sorte que $\alpha(a) = 0$ par injectivité de f', $a = 0$ par injectivité de α et finalement $b = 0$. $\square$

Une question alors légitime est de savoir si ce lemme est valide dans toutes les catégories où l'on peut parler de l'exactitude d'une suite, en particulier dans les catégories abéliennes. Le théorème de Freyd-Mitchell permet de répondre par l'affirmative.

Théorème 2. (Freyd-Mitchell)
Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie abélienne. Il existe un anneau R et un foncteur F de $\mathcal{A}$ dans R-mod, la catégorie des R-modules (à gauche), qui est exact, plein et fidèle, i.e. tel que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(FM, FN)$$

pour tout couple d'objets M et N de $\mathcal{A}$.

Considérons le diagramme du lemme 1 ci-dessus, mais dans une catégorie abélienne quelconque $\mathcal{A}'$ (pas nécessairement petite). Le résultat suivant nous permet d'envelopper ce diagramme dans une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}'$, mais petite.

Lemme 3.
Soit $\mathcal{A}_0$ une petite sous-catégorie d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}'$ (par exemple $\mathcal{A}_0$ est un diagramme de $\mathcal{A}'$). Il existe une petite sous-catégorie pleine et abélienne $\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}'$ qui contienne $\mathcal{A}_0$.

Preuve: On va construire $\mathcal{A}$ par récurrence sur les entiers. Supposons qu'on ait construit $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\ldots$, $\mathcal{A}_n$ en partant de $\mathcal{A}_0$. On considère la sous-catégorie pleine $\mathcal{A}_{n+1}$ de $\mathcal{A}'$ constituée des objets de $\mathcal{A}_n$ ainsi que d'un seul représentant de tous les noyaux, conoyaux et produits que l'on peut construire à l'aide des morphismes de $\mathcal{A}_n$. On définit $\mathcal{A}$ comme la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}'$ avec pour classe d'objets l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} obj\mathcal{A}_n$. $\square$

Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie abélienne qui contienne le diagramme du lemme 1. D'après le théorème de Freyd-Mitchell, il existe un anneau R et un foncteur F exact, plein et fidèle, de $\mathcal{A}$ dans R-mod. On peut appliquer le lemme des cinq à l'image du diagramme dans R-mod. Il s'ensuit que le R-homomorphisme du milieu est injectif, i.e. un monomorphisme. Ainsi, dans $\mathcal{A}$, le morphisme du milieu est également un monomorphisme.

La preuve du théorème de Freyd-Mitchell est difficile (cf. [3] et [4]). Le but de cet article est de donner une preuve "concrète" du lemme des cinq, valide dans toutes les catégories abéliennes, en s'inspirant de la méthode de S. MacLane dans [2], pp. 198-205.

3. Remarques préliminaires

Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes abéliens. Les deux lemmes suivants montrent que la famille des sous-groupes de G et la famille des sous-groupes de H ont un rôle à jouer dans la détermination de l'injectivité et de la surjectivité de f.

Lemme 4.
Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes abéliens. Alors f est injectif si et seulement si pour tous sous-groupes G' et G'' de G tels que $f(G') = f(G'')$ on a $G' = G''$.

Preuve: Supposons f injectif et $f(G') = f(G'')$. Soit $g' \in G'$. Il existe $g'' \in G''$ tel que $f(g') = f(g'')$. Par injectivité de f on a $g' = g''$. Ainsi $G' = G''$. Réciproquement, $f(\ker f) = 0 = f(0)$, ainsi $\ker f = 0$ i.e. f est injectif. $\square$

Lemme 5.
Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes abéliens. Alors f est surjectif si et seulement si pour tout sous-groupe H' de H il existe un sous-groupe G' de G tel que $f(G') = H'$.

Preuve: Si f est surjectif on prend $f^{-1}(H')$ pour G'. Réciproquement, il existe un sous-groupe G' de G tel que $f(G') = H$, donc f est surjectif. $\square$

Remarquons encore que les sous-groupes d'un groupe abélien G sont complètement déterminés par les homomorphismes injectifs arrivant dans G.

4. Définitions

Dans ce paragraphe, $\mathcal{A}$ désigne un petite catégorie abélienne. Soit A un objet de $\mathcal{A}$. Notons $A_\#$ l'ensemble $\bigsqcup_{S\in obj\mathcal{A}} \hom_{\mathcal{A}}(S, A)$ de tous les morphismes vers A. On va partitionner $A_\#$ en classes, de sorte que chacune d'elles contienne un monomorphisme. Ces classes joueront le rôle des familles de sous-groupes rencontrées dans le paragraphe précédent. Considérons la relation binaire $\sim_A$ sur $A_\#$ définie comme suit: soient $a, a' \in A_\#$, disons $a : S \to A$ et $a' : S' \to A$, alors $a \sim_A a'$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dr, "a"] & \\
X \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & A \\
 & S' \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}$$

en d'autres termes s'il existe deux épimorphismes $u : X \to S$ et $u' : X \to S'$ tels que $au = a'u'$. Cette relation est clairement réflexive et symétrique.

Montrons qu'elle est transitive et donc que c'est une relation d'équivalence. Soient $a, a', a'' \in A_{\#}$, disons $a : S \to A$, $a' : S' \to A$ et $a'' : S'' \to A$, tels que $a \sim_A a'$ et $a' \sim_A a''$. Alors on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & S \arrow[dr, "a"] & & \\
 & X \arrow[ur, two heads, "u"] \arrow[dr, "u'"] & & A \arrow[dr, equal] & \\
X'' \arrow[ur, dotted, two heads, "w"] \arrow[dr, dotted, two heads, "w''"'] & & S' \arrow[ur, "a'"] \arrow[dr, "a'"] & & A \\
 & X' \arrow[ur, "v'"] \arrow[dr, "v''"'] & & A \arrow[ur, equal] & \\
 & & S'' \arrow[ur, "a''"'] & &
\end{tikzcd}$$

où le carré de gauche est un pullback. On conclut en remarquant que, dans toute catégorie abélienne, un pullback d'épimorphismes est constitué d'épimorphismes (cf. [2], p.199), de sorte que uw et $v''w''$ sont des épimorphismes et $a \sim_A a''$.

Notons A_* l'ensemble quotient $A_{\#}/\sim_A$. On écrira $[a]_A$ la classe de $a \in A_{\#}$ dans A_*. Par exemple la classe nulle $[0]_A$ est constituée de tous les morphismes nuls. Autre exemple, si u est un épimorphisme, on a $[au]_A = [a]_A$. Exercice[1] : de quoi est constituée la classe $[id_A]_A$? Exercice[2] : de quoi est constituée la classe $[-a]_A$ pour tout $a \in A_{\#}$?

Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{A}$. Notons f_* l'application $A_* \to B_*$ donnée par $f_*[a]_A = [fa]_B$. Montrons que f_* est bien définie. Soient $a, a' \in A_{\#}$, disons $a : S \to A$ et $a' : S' \to A$, tels que $a \sim_A a'$. Alors le diagramme suivant montre que $fa \sim_B fa'$

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dr, "a"] \arrow[drr, bend left, "fa"] & & \\
X' \arrow[ur, two heads, "u"] \arrow[dr, two heads, "u"'] & & A \arrow[r, "f"] & B. \\
 & S' \arrow[ur, "a'"] \arrow[urr, bend right, "fa'"'] & &
\end{tikzcd}$$

De plus, on vérifie facilement que $(fg)_* = f_* g_*$ et que $(id_A)_* = id_{A_*}$. Donc $(-)_*$ est un foncteur covariant de $\mathcal{A}$ dans la catégorie des ensembles. Exercice[3] : que peut-on dire de l'application 0_* induite par le morphisme nul? Le paragraphe suivant est dédié à l'étude de ce foncteur.

5. Quelques propriétés du foncteur "star"

On va montrer que le foncteur $(-)_*$ permet de détecter les monomorphismes, les épimorphismes et l'exactitude d'une suite dans une catégorie abélienne.

On va adopter les notations suivantes: soit A un objet d'une petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, on notera $a \in A$ lorsque $[a]_A \in A_*$; soit $f : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{A}$, pour tout $a \in A$ on notera $f(a) \in B$ lorsque $f_*([a]_A) \in B_*$; on notera $\ker f$ le sous-ensemble de A_* donné par $\{[a]_A \mid f_*[a]_A = [0]_B\}$ i.e. $\{a \in A \mid f(a) = 0\}$; on notera $\mathrm{im} f$ le sous-ensemble de B_* donné par $\{f_*[a]_A \mid [a]_A \in A_*\}$ i.e. $\{f(a) \mid a \in A\}$.

Lemme 6. (détection des monomorphismes)
Soit $f : A \to B$ un morphisme d'une catégorie abélienne. Les assertions suivantes sont équivalentes:
1. f est un monomorphisme,
2. $f(a) = f(a')$ implique $a = a'$ pour tous $a, a' \in A$,
3. $\ker f = \{0\}$.

Preuve: Montrons que 1 implique 2. Supposons que f soit un monomorphisme. Soient $a, a' \in A_{\#}$ tels que $f_*[a]_A = f_*[a']_A$. Alors il existe deux épimorphismes u et u' tels que $fau = fa'u'$, de sorte que $au = a'u'$ puisque f est un monomorphisme. On a bien $[a]_A = [a']_A$. Montrons que 2 implique 3. Soit $a \in A_{\#}$ tel que $f_*[a]_A = [0]_B$. On a $f_*[a]_A = [0]_B = f_*[0]_A$ de sorte que $[a]_A = [0]_A$.

Finalement, montrons que si $\ker f = \{[0]_A\}$ alors f est un monomorphisme. Montrons que 3 implique 1. Soient g et h deux morphismes tels que $fg = fh$. Alors $f(g-h) = 0$ et $f_*[g-h]_A = [0]_A$, de sorte que $[g-h]_A = [0]_A$. Ainsi il existe deux épimorphismes u et u' tels que $(g-h)u = 0u' = 0$, d'où $g - h = 0$, puisque u est un épimorphisme, et finalement $g = h$. □

Lemme 7. (détection des épimorphismes)
Soit $f : A \to B$ un morphisme d'une catégorie abélienne. Les assertions suivantes sont équivalentes:
1. f est un épimorphisme,
2. pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$,
3. $\mathrm{im} f = \{b \in B\}$ *(on conviendra de noter B au lieu de $\{b \in B\}$).*

Preuve: Les assertions 2 et 3 sont clairement équivalentes. Montrons que 1 implique 2. Supposons que f soit un épimorphisme. Soit $b : T \to B \in B_{\#}$. On construit le pullback suivant

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dotted, "a"] \arrow[d, dotted, two heads, "g"'] & A \arrow[d, two heads, "f"] \\ T \arrow[r, "b"'] & B, \end{tikzcd}$$

avec g un épimorphisme. On a bien $f_*[a]_A = [fa]_B = [bg]_B = [b]_B$ puisque g est un épimorphisme. Montrons que 2 implique 1. Considérons $[id_B]_B \in B_*$. Il existe $[a]_A \in A_*$ tel que $f_*[a]_A = [fa]_B = [id_B]_B$. Ainsi fa est un épimorphisme et a fortiori f aussi. □

Rappelons la définition de suite exacte dans une catégorie abélienne.

Définition 1.
Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *une composition de deux morphismes dans une catégorie abélienne. Considérons la décomposition $f = m_f e_f$ avec m_f un monomorphisme et e_f un épimorphisme. On dit que la composition ci-dessus est* **exacte** *en B si d'une part $gf = 0$ et si d'autre part tout morphisme f' tel que $gf' = 0$ se factorise via m_f i.e. $f' = m_f f''$.*

Remarque: Cette définition imite la définition usuelle d'exactitude pour des groupes abéliens: on veut que la composée gf soit triviale et on veut que tout élément tué par g soit dans l'image de f.

Lemme 8. (détection de l'exactitude)
Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *une composition de deux morphismes dans une catégorie abélienne. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
1. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *est exacte en B (au sens de la définition ci-dessus),*
2. $gf = 0$ et pour tout $b \in \ker g$ il existe $a \in A$ tel que $b = f(a)$,
3. $\mathrm{im} f = \ker g$,

Preuve: Les assertions 2 et 3 sont clairement équivalentes. Montrons que 1 implique 2. D'une part on a $g_* f_* = (gf)_* = 0_*$. D'autre part, considérons la décomposition $f = m_f e_f$ avec m_f un monomorphisme et e_f un épimorphisme. Soit $b \in B_{\#}$, disons $b : T \to B$, tel que $g_*[b]_B = [gb]_C = [0]_C$. On a donc $gb = 0$. Ainsi b se factorise via m_f et on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dotted, two heads, "u"] \arrow[d, dotted, "a"'] & T \arrow[r, equal] \arrow[d, "b'"] & T \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, two heads, "e_f"'] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \cdot \arrow[r, tail, "m_f"'] & B, \end{tikzcd}$$

où le carré de gauche est un pullback. On a bien $f_*[a]_A = [fa]_B = [bu]_B = [b]_B$ puisque u est un épimorphisme. Montrons que 2 implique 1. D'une part, on a $(gf)_*[id_A]_A = [gf]_C = [0]_C$, de sorte que $gf = 0$. D'autre part, considérons la décomposition $f = m_f e_f$ comme ci-dessus. Remarquons qu'en fait $m_f = \ker(\mathrm{coker} f)$. Soit f' tel que $gf' = 0$. On a $g_*[f']_B = [gf]_C = [0]_C$. Ainsi il existe $[a]_A \in A_*$ tel que $[f']_B = f_*[a]_A$ i.e. $f'u = fau'$ avec u et u' des épimorphismes. On a donc $\mathrm{coker}(f)fau' = \mathrm{coker}(f)f'u = 0$ et $\mathrm{coker}(f)f' = 0$ puisque u est un épimorphisme. Ainsi f' se factorise via $\ker(\mathrm{coker} f) = m_f$. □

6. Le lemme des cinq

Théorème 9. (lemme des cinq)
Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Considérons le diagramme commutatif aux lignes exactes suivant:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Si les deux morphismes latéraux sont des monomorphismes (resp. des épimorphismes) alors le morphisme du milieu est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).

Preuve: En vertu du lemme 3, on se place dans $\mathcal{A}'$, une petite sous-catégorie pleine et abélienne qui contienne le diagramme. Supposons que les deux morphismes latéraux soient des monomorphismes. Avec l'aide des résultats du paragraphe précédent, il suffit de lire, *mutatis mutandis*, la preuve du lemme 1 pour prouver que le morphisme du milieu est un monomorphisme. La seconde assertion est duale à la première. En effet, la catégorie duale de $\mathcal{A}'$ est également abélienne et les monomorphismes (resp. épimorphismes) de cette catégorie sont les épimorphismes (resp. monomorphismes) de $\mathcal{A}$. □

Remarquons qu'on peut donner une preuve directe du lemme des cinq sans "sortir" de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Pour cela on utilise les propriétés universelles des noyaux et conoyaux.

Dans un prochain article, on affinera nos méthodes de chasse dans les catégories abéliennes. On donnera en particulier une seconde preuve du lemme des cinq sans invoquer la dualité et on prouvera le lemme du serpent.

[1] La classe $[id_A]_A$ est constituée de tous les épimorphismes arrivant dans A.
[2] On a $[a]_A = [-a]_A$.
[3] L'application 0_* est l'application qui envoie toute classe sur la classe nulle $[0]$.

[1] J. P. Freyd, *Abelian categories*, Harper & Row, New-York, 1964
[2] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics*5*, New-York, USA, 1971
[3] Barry Mitchell, *Theory of Categories*, Pure and Applied Mathematics*17*, USA, 1965
[4] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics*38*, New-York, USA, 1994