Modules croisés et 2-types

Alain Clément

Le théorème de Kan et Thurston [KT76] établit une équivalence entre une certaine catégorie de fractions (i.e. localisation) de la catégorie des groupes topogéniques (nomenclature empruntée à A. Heller [He80]) et la catégorie homotopique des CW-complexes connexes. Par exemple, cette équivalence associe un groupe parfait à un espace simplement connexe. On peut se demander quelle est l'allure d'un tel groupe parfait si l'espace en question est une pièce de Postnikov (i.e. ne possède qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non-triviaux). En 1949, J.H.C. Whitehead [Wh49] établit une équivalence entre la catégorie des 2-types (i.e. CW-complexes ne possédant que des groupes d'homotopie triviaux sauf éventuellement en dimension 1 et 2) et une localisation de la catégorie (algébrique) des modules croisés (cf. infra pour une définition). Cette équivalence a été étudiée notamment par H.-J. Baues [Ba89], G. J. Ellis [El92], [EP86] et J.-L. Loday [Lo82]. En particulier, G. J. Ellis [El92] calcule les premiers groupes d'homologie d'un 2-type à l'aide des modules croisés.

Dans cet exposé, nous allons montrer que cette méthode permet de borner inférieurement et supérieurement la torsion (co)homologique entière d'un 2-type ne possédant que des groupes d'homotopie finis. En corollaire nous montrerons qu'un tel 2-type ne possède pas de borne supérieure universelle pour les exposants de ses groupes d'homologie entière (la preuve se base sur la connaissance de l'homologie entière des espaces d'Eilenberg-MacLane associés à des groupes abéliens finis). Nous calculerons également des bornes inférieure et supérieure du groupe gamma de Whitehead $\Gamma_3(X)$ d'un CW-complexe connexe dont les deux premiers groupes d'homotopie sont finis.

Table des matières

1 Modules croisés

1. Définition. Un **module croisé** est un homomorphisme de groupes $\partial : M \to G$ muni d'une action $(g, m) \mapsto gm$ de G sur M qui vérifie les relations suivantes :

1. $\partial(gm) = g(\partial m)g^{-1}$ (i.e. ∂ est G-équivariant),
2. $(\partial m)m' = mm'm^{-1}$,

pour tout $g \in G$ et $m, m' \in M$, i.e. tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} G \times M \arrow[r, "\text{action}"] \arrow[d, "id\times\partial"'] & M \arrow[d, "\partial"] \\ G \times G \arrow[r, "\text{conjug.}"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times M \arrow[r, "\text{action}"] & M \arrow[d, equal] \\ M \times M \arrow[u, "\partial\times id"] \arrow[r, "\text{conjug.}"'] & M. \end{tikzcd}$$

Soient $\partial : M \to G$ et $\partial' : M' \to G'$ des modules croisés. Un **morphisme** de modules croisés $\phi : \partial \to \partial'$ est une paire d'homomorphismes de groupes $\phi_1 : G \to G'$ et $\phi_2 : M \to M'$ qui vérifient les relations suivantes :

1. $\partial'\phi_2(m) = \phi_1\partial(m)$,
2. $\phi_2(gm) = (\phi_1 g)(\phi_2 m)$ (i.e. ϕ_2 est ϕ_1-équivariant),

pour tout $g \in G$ et $m \in M$, i.e. tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\phi_2"'] & G \arrow[d, "\phi_1"] \\ M' \arrow[r, "\partial'"'] & G' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times M \arrow[r, "\text{action}"] \arrow[d, "\phi_1\times\phi_2"'] & M \arrow[d, "\phi_2"] \\ G' \times M' \arrow[r, "\text{action}"'] & M'. \end{tikzcd}$$

Um morphisme de modules croisés $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ est un **isomorphisme** si ϕ_1 et ϕ_2 sont des isomorphismes de groupes. On note **CrMod** la catégorie ainsi définie des modules croisés.

2. Remarque. Le sous-groupe ∂M est normal dans G, $\ker \partial$ est dans le centre de M et $\ker \partial$ est un $G/\partial M$-module.

3. Définition. Soient $\partial : M \to G$ un module croisé, X un ensemble et $i : X \to M$ une application. Le module croisé $\partial : M \to G$ est **libre sur l'application** $\delta : X \to G$ si $\delta = \partial i$ et si pour tout module croisé $\partial' : M' \to G$ et toute application $i' : X \to M'$ telle que $\delta = \partial' i'$ il existe un unique morphisme de modules croisés $\phi = (id, \phi_2) : \partial \to \partial'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, dotted, "\phi_2"] \arrow[ddrr, "\partial"] & & \\ & M' \arrow[dr, "\partial'"] & \\ X \arrow[uu, "i"] \arrow[ur, "i'"] \arrow[rr, "\delta"'] & & G. \end{tikzcd}$$

4. Remarque. On peut toujours construire un module croisé libre sur $\delta : X \to G$ (cf. [BH82]) et un tel module croisé est unique à (un seul) isomorphisme près.

5. Définition. Soit $\partial : M \to G$ un module croisé. Les **groupes d'homotopie** de ∂ sont définis comme suit :

$$\pi_n(\partial) = \begin{cases} \operatorname{coker} \partial & \text{si } n = 1, \\ \ker \partial & \text{si } n = 2 \text{ et} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un morphisme de modules croisés est une **équivalence faible** s'il induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie.

2 Complexes croisés

6. Définition. Un **complexe croisé** est un complexe de groupes et d'homomorphismes de groupes

$$\cdots \longrightarrow G_n \xrightarrow{\partial_n} G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1,$$

tel que

1. ∂_2 est un module croisé,
2. pour tout $n \geqslant 3$, G_n est un $\pi_1(\partial_2)$-module (de sorte que c'est également un G_1-module via la surjection canonique $G_1 \to \pi_1(\partial_2)$),
3. pour tout $n \geqslant 3$, ∂_n est $\pi_1(\partial_2)$-équivariant, i.e. le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\partial_2) \times G_n \arrow[r, "\text{action}"] \arrow[d, "id\times\partial_n"'] & G_n \arrow[d, "\partial_n"] \\
\pi_1(\partial_2) \times G_{n-1} \arrow[r, "\text{action}"'] & G_{n-1}.
\end{tikzcd}$$

Un **morphisme de complexes croisés** $\phi : (G_*, \partial_*) \to (G'_*, \partial'_*)$ est une famille d'homomorphismes de groupes $\phi_n : G_n \to G'_n$, $n \geqslant 1$, qui vérifient les relations suivantes :

1. pour tout $n \geqslant 1$, $\partial'_{n+1}\phi_{n+1} = \phi_n\partial_{n+1}$,
2. pour tout $n \geqslant 2$, ϕ_n est ϕ_1-équivariant,

i.e. tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
G_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"'] & G_n \arrow[d, "\phi_n"] \\
G'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & G'_n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G_1 \times G_n \arrow[r, "\text{action}"] \arrow[d, "\phi_1\times\phi_n"'] & G_n \arrow[d, "\phi_n"] \\
G'_1 \times G'_n \arrow[r, "\text{action}"'] & G'_n.
\end{tikzcd}$$

On note **CrCplx** la catégorie ainsi définie des complexes croisés.

7. Remarque. La catégorie des modules croisés est clairement une sous-catégorie des complexes croisés.

8. Définition. Un complexe croisé (G_*, ∂_*) est **libre** si

1. G_1 est un groupe libre,
2. ∂_2 est un module croisé libre,
3. pour tout $n \geqslant 3$, G_n est un $\pi_1(\partial_2)$-module libre.

9. Définition. Soit (G_*, ∂_*) un complexe croisé. Les **groupes d'homotopie** de (G_*, ∂_*) sont définis comme suit :

$$\pi_n(G_*, \partial_*) = \begin{cases} G_1/\partial_2 G_2 & \text{si } n = 1, \text{ et} \\ \ker\partial_n/\operatorname{im}\partial_{n+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un morphisme de complexes croisés est une **équivalence faible** s'il induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie.

3 Complexe croisé libre de J.H.C. Whitehead

10. Théorème. *Soient A un CW-complexe réduit connexe et X un CW-complexe obtenu à partir de A par adjonction de 2-cellules. Alors $\partial_2 : \pi_2(X, A) \to \pi_1(A)$ (où ∂_2 est l'homomorphisme de connexion de la suite exacte longue de la paire (X, A) en homotopie) est un module croisé libre sur l'application $\delta : \{2\text{-cellules de } X\} \to \pi_1(A)$ qui envoie une 2-cellule sur le mot de $\pi_1(A)$ correspondant à son bord.*

Démonstration. [Wh49] ou [Ra80, Theorem 3.1] ou encore [Ba89]. □

11. Corollaire. *Soit X un CW-complexe réduit connexe. Il existe un module croisé libre ∂_X avec $\pi_1(\partial_X) \cong \pi_1(X)$ et $\pi_2(\partial_X) \cong \pi_2(X)$.*

Démonstration. Soient X^1, X^2 et X^3 respectivement les 1-, 2- et 3-squelettes de X. Le 2-squelette X^2 est obtenu à partir du 1-squelette X^1 par adjonction de 2-cellules, ainsi la paire (X^2, X^1) vérifie les conditions du théorème et $\partial_2 : \pi_2(X^2, X^1) \to \pi_1(X^1)$ est un module croisé libre. Considérons l'homomorphisme de connection $\partial_3 : \pi_3(X^3, X^2) \to \pi_2(X^2, X^1)$ de la suite exacte longue du triple (X^3, X^2, X^1) en homotopie. On vérifie que $\operatorname{im} \partial_3 \subset \ker \partial_2 = \pi_2(\partial_2)$, ainsi on peut poser $\partial_X : \operatorname{coker} \partial_3 \to \pi_1(X^1)$, induite par ∂_2 [$\partial_X(z + \operatorname{im} \partial_3) = \partial_2(z) + \partial_2(\operatorname{im} \partial_3) = \partial_2(z)$ pour tout $z \in \pi_2(X^2, X^1)$]. C'est un module croisé libre [parce que ∂_2 l'est] et on peut montrer [Wh49] que $\pi_1(\partial_X) \cong \pi_1(X)$ et $\pi_2(\partial_X) \cong \pi_2(X)$. □

12. Remarque. C'est historiquement le premier exemple de module croisé, découvert et ainsi baptisé par J.H.C. Whitehead. Nous verrons que cette façon (fonctorielle) d'associer un module croisé à un CW-complexe connexe induit une équivalence de catégorie. En fait, nous donnerons une construction équivalente, mais pour les 2-types uniquement.

13. Remarque. Un 2-type est entièrement déterminé par ses deux groupes d'homotopie $\pi_1 X$ et $\pi_2 X$ et son invariant de Postnikov $k^3 \in H^3(\pi_1 X, \pi_2 X)$. En fait on peut montrer que dans ce cas ∂_X représente k^3. En effet, pour tout groupe G et tout $\mathbb{Z}G$-module A il y a une bijection entre les éléments de $H^3(G; A)$ et l'ensemble de certaines classes d'équivalence sur les modules croisés $\partial : M \to G$ vérifiant $\pi_1(\partial) \cong G$ et $\pi_2(\partial) \cong A$ (cf. [MW50] pour une liste de références).

De façon plus générale, J.H.C. Whitehead [Wh49] prouve le résultat suivant (cf. également [Ba90]) :

14. Théorème. *Soient $\mathbf{CW^r}$ la catégorie des CW-complexes réduits connexes et $\mathbf{FCrCplx}$ la catégorie des complexes croisés libres. Il existe un foncteur $(G_*^{(-)}, \partial_*^{(-)}) : \mathbf{CW^r} \to \mathbf{FCrCplx}$ tel que*

$$\pi_n(G_*^X, \partial_*^X) \cong \begin{cases} \pi_n(X) & \text{si } n = 1,\ 2, \\ \widetilde{Hu}\pi_3(X) & \text{si } n = 3 \text{ et} \\ H_n(\widetilde{X}; \mathbb{Z}) & \text{si } n \geqslant 4, \end{cases}$$

où $\widetilde{X}$ est le revêtement universel de X et $\widetilde{Hu} : \pi_3(X) \cong \pi_3(\widetilde{X}) \to H_3(\widetilde{X}; \mathbb{Z})$ est l'homomorphisme d'Hurewicz.

15. Remarque. Le complexes croisé libre (G_*^X, ∂_*^X) est obtenu à partir du squelette de X en posant $G_1^X = \pi_1(X^1)$ et $G_n^X = \pi_n(X^n, X^{n-1})$ pour tout $n \geqslant 2$, ∂_n^X est l'homomorphisme de connexion de la suite exacte longue du triple (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}).

4 Equivalence entre modules croisés et 2-types

Nous allons construire, d'une part, un foncteur $B(-)$ de la catégorie des modules croisés dans la catégorie des CW-complexes réduits connexes et, d'autre part, un foncteur $\chi(-)$ de la catégorie des 2-types dans la catégorie des modules croisés. Nous remarquerons qu'ils induisent une équivalence de catégories, à savoir la catégorie homotopique des 2-types et la catégorie des fractions (localisation) de la catégorie des modules croisés par les équivalences faibles. De plus, cette équivalence respecte les foncteurs d'homotopie $\pi_*(-)$ définis dans chacune de ces deux catégories, en d'autres termes, les groupes d'homotopie d'un module croisé et ceux du 2-type correspondant sont isomorphes.

16. Lemme. *Soient* $\mathbf{CW^r}$ *la catégorie des CW-complexes réduits connexes et* $\mathbf{CrMod}$ *la catégorie des modules croisés. Il existe un foncteur* $B(-) : \mathbf{CrMod} \to \mathbf{CW^r}$ *qui fait commuter le diagramme de foncteurs suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{CrMod} \arrow[rr, "B(-)"] \arrow[dr, "\pi_*(-)"'] & & \mathbf{CW^r} \arrow[dl, "\pi_*(-)"] \\
& \mathbf{Groups}/_{\cong}, &
\end{tikzcd}$$

où **Groups** *désigne la catégorie des groupes et* $\pi_*(-)$ *les foncteurs d'homotopie. On appelle* $B(\partial)$ *l'***espace classifiant** *du module croisé* ∂*.*

Démonstration. On montre que tout module croisé $\partial : M \to G$ donne lieu à une classe de cohomologie $H^3(G; M)$ (cf. remarque 13) invariante à équivalence faible. Il suffit de construire un 2-type à l'aide des groupes d'homotopie du module croisé et en considérant la classe de cohomologie comme son unique invariant de Postnikov. Pour une preuve plus détaillée et simpliciale, cf. [Lo82] ou [El92, p.4]. $\square$

17. Lemme. *Soient* **2-types** *la catégorie des* 2*-types et* **CrMod** *la catégorie des modules croisés. Il existe un foncteur* $\chi(-) : \mathbf{2\text{-}types} \to \mathbf{CrMod}$ *qui fait commuter le diagramme de foncteurs suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{2\text{-}types} \arrow[rr, "\chi(-)"] \arrow[dr, "\pi_*(-)"'] & & \mathbf{CrMod} \arrow[dl, "\pi_*(-)"] \\
& \mathbf{Groups}/_{\cong}, &
\end{tikzcd}$$

où **Groups** *désigne la catégorie des groupes et* $\pi_*(-)$ *les foncteurs d'homotopie.*

Démonstration. Soit X un 2-type connexe. Soient J un ensemble de générateurs du groupe fondamental $\pi_1(X)$ et $f : \bigvee_{\alpha \in J} S^1_\alpha \to X$ une application telle que $\alpha = [f|_{S^1_\alpha}] \in \pi_1(X)$ pour tout $\alpha \in J$. On considère la fibre U de f qui induit la suite exacte en homotopie suivante :

$$0 \longrightarrow \pi_2(X) \longrightarrow \pi_1(U) \xrightarrow{\chi(X)} \pi_1(\bigvee_{\alpha \in J} S^1_\alpha) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X) \longrightarrow 0,$$

où $\pi_1(\bigvee_{\alpha \in J} S^1_\alpha)$ est le groupe libre engendré par les éléments de J. On vérifie facilement que $\chi(X)$ est un module croisé dont les groupes d'homotopie sont isomorphes à $\pi_1(X)$ et $\pi_2(X)$. $\square$

18. Théorème. *Les foncteurs* $B(-)$ *et* $\chi(-)$ *induisent les foncteurs*

$$B(-) : (\mathbf{CrMod})\Sigma^{-1} \longleftrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{2\text{-}types}) : \chi(-)$$

qui constituent une équivalence de catégories, où $(\mathbf{CrMod})\Sigma^{-1}$ *désigne la catégorie des fractions des modules croisés pour lesquels toutes les équivalences faibles (i.e. les éléments de* Σ*) ont été inversés, et où* $\mathbf{Ho}(2\text{-}\mathbf{types})$ *désigne la catégorie homotopique des* 2*-types. De plus, le diagramme de foncteurs suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{CrMod} \arrow[rr, bend left, "B(-)"] \arrow[dr, "\pi_*(-)"'] & & 2\text{-}\mathbf{types}^{(\mathbf{r})\ 1} \arrow[ll, bend left, "\chi(-)"] \arrow[dl, "\pi_*(-)"] \\
& \mathbf{Groups}/_{\cong}. &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. [Lo82, pp.190-193]. □

[1] signifie que l'on regarde la catégorie d'arrivée 2-**types** comme constituée de CW-complexes réduits.

5 Homologie cellulaire et revêtement universel

19. Définition. Soit X un CW-complexe. Le **complexe de chaîne cellulaire** de X, noté $Cell_*(X)$ est le complexe de groupes libre-abéliens

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow \cdots \ (n \geqslant 2),$$

avec l'homomorphisme $d_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ donné par la composition

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

où ∂ est l'homomorphisme de connexion de la suite exacte longue de la paire (X^n, X^{n-1}) en homotopie et j_* est induite par l'inclusion de X^{n-1} dans la paire (X^{n-1}, X^{n-2}).

20. Remarque. Le groupe $H_n(X^n, X^{n-1})$ est libre-abélien engendré par les n-cellules du CW-complexe X, i.e.

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \cong \bigoplus_{n\text{-cellules}} \mathbb{Z}.$$

On vérifie qu'une telle suite est effectivement un complexe dont l'homologie est en fait l'homologie singulière du CW-complexe X.

On peut associer (fonctoriellement) à tout complexe croisé libre (G_*, ∂_*) un complexe de chaîne $(CG_*, C\partial_*)$ constitué de $\pi_1(G_*, \partial_*)$-modules libres (cf. [El92, p.8]).

21. Définition. Soit X un CW-complexe réduit connexe. On appelle **complexe de chaîne de Whitehead** de X le complexe de chaîne $(CG_*^X, C\partial_*^X)$ qu'on note $\widetilde{C}_*(X)$.

22. Théorème. *Soit X un CW-complexe réduit connexe. Le complexe de chaîne de Whitehead $\widetilde{C}_*(X)$ est isomorphe au complexe de chaîne cellulaire $Cell_*(\widetilde{X}) = \{H_n(\widetilde{X}^n, \widetilde{X}^{n-1})\}_{n \geqslant 0}$ du revêtement universel $\widetilde{X}$ de X, i.e.*

$$\widetilde{C}_*(X) \cong Cell_*(\widetilde{X}).$$

Démonstration. [Wh49]. □

23. Remarque. Si X n'est pas réduit (mais connexe), alors il a le type d'homotopie d'un CW-complexe réduit connexe X' dont le complexe de chaîne cellulaire est identique en dimensions supérieures ou égales à 2, ce que l'on note

$$Cell_*(X) \cong_{(2)} Cell_*(X').$$

En particulier, pour tout $n \geqslant 2$ on a $H_n(X; A) \cong H_n(X'; A)$.

24. Théorème. *Soit X un CW-complexe réduit connexe. Le complexe de chaîne cellulaire du revêtement universel $\widetilde{X}$ de X est composé de $\pi_1(X)$-modules libres engendrés par les cellules du CW-complexe X, i.e. pour tout $n \geqslant 1$*

$$H_n(\widetilde{X}^n, \widetilde{X}^{n-1}) \cong \bigoplus_{n\text{-cellules de } X} \mathbb{Z}\pi_1(X).$$

Démonstration. Soient X^n et X^{n-1} respectivement les n- et $(n-1)$-squelettes du CW-complexe X. L'ouvert $X^n - X^{n-1}$ est la réunion disjointe de l'intérieur des n-cellules $e^n = D^n - \partial D^n$, i.e.

$$X^n - X^{n-1} = \coprod_{n\text{-cellules}} e^n.$$

Remarquons que $H_n(X^n, X^{n-1})$ est le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les composantes connexes de $X^n - X^{n-1}$. Considérons la projection $p : \widetilde{X} \to X$ du revêtement universel sur X. L'ouvert $p^{-1}(X^n - X^{n-1})$ est clairement la réunion disjointe des ouverts $p^{-1}(e^n)$. Or $p^{-1}(e^n)$ est homéomorphe à

$$p^{-1}(e^n) \cong \coprod_{x \in e^n} p^{-1}(x) \cong \coprod_{x \in e^n} \pi_1(X) \cong e^n \times \pi_1(X)$$

($\pi_1(X)$ muni de la topologie discrète) et contient donc $|\pi_1(X)|$ composantes connexes. L'ouvert $\widetilde{X}^n - \widetilde{X}^{n-1}$ contient donc $|\pi_1(X) \times \{n\text{-cellules de } X\}|$ composantes connexes. Ainsi le groupe $H_n(\widetilde{X}^n, \widetilde{X}^{n-1})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $\pi_1(X) \times \{n\text{-cellules de } X\}$, c'est donc un $\mathbb{Z}\pi_1(X)$-module libre engendré par les n-cellules de X. □

25. Corollaire. *Soient X un CW-complexe réduit connexe et A un $\pi_1(X)$-module. Considérons $Cell_*(X)$ le complexe de chaîne cellulaire de X et $Cell_*(\widetilde{X})$ le complexe de chaîne cellulaire du revêtement universel $\widetilde{X}$ de X. Alors*

$$Cell_*(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}\pi_1(X)} A \cong Cell_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A.$$

En particulier, si $\widetilde{C}_*(X)$ est le complexe de chaîne de Whitehead associé à X alors

$$H_*(X; A) \cong H_*(\widetilde{C}_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}\pi_1(X)} A).$$

□

26. Remarque. On peut établir un résultat analogue en cohomologie. En particulier, si $\widetilde{C}_*(X)$ est le complexe de chaîne de Whitehead associé à X alors

$$H^*(X; A) \cong H_*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\pi_1(X)}(\widetilde{C}_*(X); A)).$$

On a donc prouvé qu'il existe un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{CW^r} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\widetilde{C}_*(-) \otimes_{\mathbb{Z}\pi_1(-)} A"] \arrow[dr, "H(-;A)"'] & \mathbf{FCrCplx} \arrow[r] & \mathbf{Cplx} \arrow[dl, "H(-)"] \\
 & \mathbf{Ab}/_{\cong}, &
\end{tikzcd}$$

où **Ab** désigne la catégorie des groupes abéliens, A désigne un $\pi_1(-)$-module et H le foncteur de (co)homologie.

On a donc le diagramme commutatif de foncteurs suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{CrMod} \arrow[rr, bend left, "B(-)"] \arrow[dr, "\pi_*(-)"'] & & \mathbf{2\text{-}types^{(r)}} \arrow[ll, bend left, "\chi(-)"] \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\widetilde{C}_*(-) \otimes_{\mathbb{Z}\pi_1(-)} A"] \arrow[dl, "\pi_*(-)"] \arrow[dr, "H(-;A)"'] & \mathbf{FCrCplx} \arrow[r] & \mathbf{Cplx} \arrow[dl, "H(-)"] \\
 & \mathbf{Groups}/_{\cong} & & \mathbf{Ab}/_{\cong}. &
\end{tikzcd}$$

Nous allons exploiter ce diagramme dans la suite de cet exposé. Nous verrons qu'il permet d'étudier l'homologie des 2-types.

6 Lemme de Shapiro pour les modules croisés

Un résultat remarquable affirme que l'exposant de la (co)homologie d'un groupe fini est borné par l'ordre du groupe. La démonstration de ce fait se base sur la construction d'une application de **transfert** ainsi que sur le **lemme de Shapiro**. Nous allons généraliser ces derniers aux modules croisés.

27. Définition. Soient $\partial : M \to G$ un module croisé et H un sous-groupe de G contenant $\partial(M)$. On note $\partial_H : M \to H$ le module croisé induit par ∂. Dans un tel cas, on dit que (∂, ∂_H) est une **paire admissible de modules croisés**. Clairement, le groupe $\pi_1(\partial_H)$ est un sous-groupe de $\pi_1(\partial)$ et $\pi_2(\partial_H) = \pi_2(\partial)$. On pose $\pi_1^G = \pi_1(\partial)$ et $\pi_1^H = \pi_1(\partial_H)$.

28. Exemple. La paire $(\partial : M \to G, \partial_{\partial(M)})$ est admissible et $\pi_1^{\partial(M)}$ est trivial, ainsi $B(\partial_{\partial(M)})$ est l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi_2(\partial), 2)$. Cet exemple montre qu'on sait transporter la construction du revêtement universel d'un 2-type à la catégorie des modules croisés.

29. Lemme. *Soit $(\partial : M \to G, \partial_H)$ une paire admissible de modules croisés. L'espace classifiant $B(\partial_H)$ a le type d'homotopie du revêtement $\widetilde{B(\partial)}^H$ de $B(\partial)$ correspondant au sous-groupe π_1^H du groupe fondamental π_1^G.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les modules croisés $\chi(B(\partial_H))$ et $\chi(\widetilde{B(\partial)}^H)$ sont faiblement équivalents, i.e. qu'il existe un morphisme de modules croisés qui induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie. Les espaces $B(\partial_H)$ et $\widetilde{B(\partial)}^H$ ont des groupes fondamentaux isomorphes à π_1^H. D'après la preuve du lemme 17, on obtient le module croisé $\chi(B(\partial_H))$ en appliquant $\pi_1(-)$ à la fibration $U \to \bigvee_{\alpha\in J} S^1_\alpha \to B(\partial_H)$, où J est un ensemble de générateurs du groupe π_1^H. La suite exacte longue de cette fibration donne la suite exacte suivante, où χ désigne $\chi(B(\partial_H))$ et F le groupe libre sur J :

$$0 \longrightarrow \pi_2(\partial) \xrightarrow{i} \pi_1(U) \xrightarrow{\chi} F \xrightarrow{f_*} \pi_1^H \longrightarrow 0.$$

De même, on obtient le module croisé $\chi(\widetilde{B(\partial)}^H)$ en appliquant $\pi_1(-)$ à la fibration $U' \to \bigvee_{\alpha\in J} S^1_\alpha \to \widetilde{B(\partial)}^H$. La suite exacte longue de cette fibration donne la suite exacte suivante, où χ' désigne $\chi(\widetilde{B(\partial)}^H)$:

$$0 \longrightarrow \pi_2(\partial) \xrightarrow{i'} \pi_1(U') \xrightarrow{\chi'} F \xrightarrow{f_*} \pi_1^H \longrightarrow 0.$$

Les deux suites ci-dessus induisent les suites exactes courtes scindées suivantes :

$$\begin{tikzcd} \pi_2(\partial) \arrow[r, tail, "i"] & \pi_1(U) \arrow[r, two heads, shift left, "\chi"] & \operatorname{im}\chi \arrow[l, shift left, "\sigma"] \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} \pi_2(\partial) \arrow[r, tail, "i'"] & \pi_1(U') \arrow[r, two heads, shift left, "\chi'"] & \operatorname{im}\chi', \arrow[l, shift left, "\sigma'"] \end{tikzcd}$$

les sections provenant du fait que les sous-groupes $\operatorname{im}\chi$ et $\operatorname{im}\chi'$ sont également libres [par exemple, on calcule que $H^2(\operatorname{im}\chi; \pi_2(\partial))$ est trivial ou on construit explicitement une section sur les générateurs de $\operatorname{im}\chi$ qu'on étend par linéarité]. On a donc les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(U) &\xrightarrow{\cong} \pi_2 \rtimes \ker f_* \\ x &\longmapsto (i^{-1}(x - \sigma\chi(x)), \chi(x)) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \varphi' : \pi_1(U') &\xrightarrow{\cong} \pi_2 \rtimes \ker f_* \\ x &\longmapsto (i'^{-1}(x - \sigma'\chi'(x)), \chi'(x)). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \pi_2(\partial) \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & \pi_1(U) \arrow[r, two heads, "\chi"] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & \operatorname{im}\chi \arrow[d, equal] \\ \pi_2(\partial) \arrow[r, tail, "\text{can.}"] \arrow[d, equal] & \pi_2(\partial) \rtimes \ker f_* \arrow[r, two heads, "\text{can.}"] & \ker f_* \arrow[d, equal] \\ \pi_2(\partial) \arrow[r, tail, "i'"'] & \pi_1(U') \arrow[r, two heads, "\chi'"'] \arrow[u, "\varphi'", "\cong"'] & \operatorname{im}\chi'. \end{tikzcd}$$

Le morphisme de modules croisés cherché est donné par $\phi = (id, \varphi'^{-1} \circ \varphi) : \chi \to \chi'$, qui, comme le montre clairement le diagramme, induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie. $\square$

30. Définition. Soient $(\partial : M \to G, \partial_H)$ une paire admissible de modules croisés et A un π_1^H-module. On définit le π_1^G**-module induit** par

$$\mathrm{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A = \mathbb{Z}\pi_1^G \otimes_{\mathbb{Z}\pi_1^H} A$$

ainsi que le π_1^G**-module coinduit** par

$$\mathrm{Coind}_{\partial_H}^{\partial} A = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\pi_1^H}(\mathbb{Z}\pi_1^G, A).$$

31. Remarque. Si A est un π_1^G-module alors on peut considérer les homomorphismes canoniques suivants :

$$\begin{array}{rcl} ind_{\partial_H}^{\partial} : \mathrm{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A & \twoheadrightarrow & A \\ g \otimes a & \longmapsto & ga \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} coind_{\partial_H}^{\partial} : A & \hookrightarrow & \mathrm{Coind}_{\partial_H}^{\partial} A \\ a & \longmapsto & (g \mapsto ga), \end{array}$$

qu'on appelle respectivement l'**induction** et la **coinduction**.

32. Théorème (lemme de Shapiro). *Soient (∂, ∂_H) une paire admissible de modules croisés et A un π_1^H-module. Alors on a les isomorphismes suivants :*

1. $H_*(B(\partial_H); A) \cong H_*(B(\partial); \mathrm{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A)$ *et*
2. $H^*(B(\partial_H); A) \cong H^*(B(\partial); \mathrm{Coind}_{\partial_H}^{\partial} A)$.

Démonstration. Les revêtements universels des CW-complexes $B(\partial)$ et $\widetilde{\widetilde{B(\partial)}}^H$ ont clairement le même type d'homotopie. Ainsi, les complexes cellulaires $Cell_*(\widetilde{\widetilde{B(\partial)}})$ et $Cell_*(\widetilde{\widetilde{B(\partial)}}^H)$ sont isomorphes (via l'induite de la projection du revêtement, remarquons que l'on utilise le fait que les revêtements sont obtenus à partir du même CW-complexe, à savoir $B(\partial)$; on ne peut par exemple pas affirmer que $Cell_*(B(\partial))$ et $Cell_*(B(\partial_H))$ sont isomorphes, bien que d'après le lemme précédent $B(\partial_H)$ et $\widetilde{B(\partial)}^H$ ont le même type d'homotopie). Or, $\widetilde{B(\partial)}^H$ n'est pas forcément un CW-complexe réduit, mais il a le type d'homotopie d'un CW-complexe réduit connexe X qui possède le même complexe cellulaire en dimensions supérieures ou égales à 2, ainsi $Cell_*(\widetilde{\widetilde{B(\partial)}}^H) \cong_{(2)} Cell_*(\widetilde{X})$. Donc, d'après le théorème 22, on a $\widetilde{C}_*(B(\partial)) \cong_{(2)} \widetilde{C}_*(X)$. Il s'ensuit que $\widetilde{C}_*(B(\partial)) \otimes_{\mathbb{Z}\pi_1^H} A \cong_{(2)} \widetilde{C}_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}\pi_1^H} A$, et avec la définition du module induit on obtient

$$\widetilde{C}_*(B(\partial)) \otimes_{\mathbb{Z}\pi_1^G} \mathrm{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A \cong_{(2)} \widetilde{C}_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}\pi_1^H} A.$$

On conclut à l'aide du corollaire 25 que $H_n(B(\partial); \mathrm{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A) \cong H_n(X; A) \cong H_n(\widetilde{B(\partial)}^H; A)$ pour tout $n \geqslant 2$. D'après le lemme ci-dessus, pour tout $n \geqslant 2$ on a ,

$$H_n(B(\partial)); \mathrm{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A) \cong H_n(B(\partial_H); A).$$

Le résultat en dimensions 0 et 1 s'établit en remarquant que pour tout module croisé ∂ on a $H_{0\ (\text{resp. } 1)}(B(\partial); A) \cong H_{0\ (\text{resp. } 1)}(\pi_1(\partial); A)$ (cf. [El92, Proposition 5(iv), p.9]) et en utilisant le lemme de Shapiro pour les groupes. On procède de manière analogue pour démontrer le théorème en cohomologie. $\square$

7 Transfert (co)homologique

33. Définition. Soient (∂, ∂_H) une paire admissible de modules croisés et A un π_1^G-module. L'induction $ind_{\partial_H}^{\partial}$ induite en homologie via $H_*(B(\partial);-)$ s'appelle la **corestriction homologique**, on la note

$$cor_{\partial_H}^{\partial} : H_*(B(\partial); \mathrm{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A) \to H_*(B(\partial); A),$$

et la coinduction $coind_{\partial_H}^{\partial}$ induite en cohomologie via $H^*(B(\partial);-)$ s'appelle la **corestriction cohomologique**, on la note

$$cor_{\partial_H}^{\partial} : H^*(B(\partial); \mathrm{Coind}_{\partial_H}^{\partial} A) \to H^*(B(\partial); A).$$

34. Lemme. *Soient $(\partial : M \to G, \partial_H)$ une paire admissible de modules croisés et A un π_1^G-module. Si l'indice de π_1^H dans π_1^G, $(\pi_1^H : \pi_1^G)$, est fini, alors on a un isomorphisme*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Coind}_{\partial_H}^{\partial} A &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A \\ f &\longmapsto \sum_{r \in R} r \otimes f(r^{-1}), \end{aligned}$$

où R est un système complet de représentants de π_1^G/π_1^H.

Démonstration. Puisque l'indice $(\pi_1^H : \pi_1^G)$ est fini, il suffit de remarquer que $\bigoplus_{r \in R} r\mathbb{Z}\pi_1^H$ est isomorphe à $\mathbb{Z}\pi_1^G$ via $(rh_r)_{r \in R} \mapsto \sum_{r \in R} rh_r$. □

35. Définition. Soient $(\partial : M \to G, \partial_H)$ une paire admissible de modules croisés et A un π_1^G-module. Si l'indice de π_1^H dans π_1^G, $(\pi_1^H : \pi_1^G)$, est fini, alors on définit le **transfert** par la composée

$$tr_{\partial_H}^{\partial} : A \xrightarrow{coind_{\partial_H}^{\partial}} \mathrm{Coind}_{\partial_H}^{\partial} A \xrightarrow[\cong]{\Phi} \mathrm{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A$$

et le **cotransfert** par la composée

$$cotr_{\partial_H}^{\partial} : \mathrm{Coind}_{\partial_H}^{\partial} A \xrightarrow[\cong]{\Phi} \mathrm{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A \xrightarrow{ind_{\partial_H}^{\partial}} A.$$

Le transfert $tr_{\partial_H}^{\partial}$ induit en homologie via $H_*(B(\partial);-)$ s'appelle le **transfert homologique** ou la **restriction homologique**, on la note

$$res_{\partial_H}^{\partial} : H_*(B(\partial); A) \to H_*(B(\partial); \mathrm{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A),$$

et le cotransfert $cotr_{\partial_H}^{\partial}$ induit en cohomologie via $H^*(B(\partial);-)$ s'appelle le **transfert cohomologique** ou la **restriction cohomologique**, on la note

$$res_{\partial_H}^{\partial} : H^*(X; A) \to H^*(X; \mathrm{Coind}_{\partial_H}^{\partial} A).$$

36. Lemme. *Soient $(\partial : M \to G, \partial_H)$ une paire admissible de modules croisés et A un π_1^G-module. Si l'indice $(\pi_1^H : \pi_1^G)$ est fini, alors*

1. *la composée $cor_{\partial_H}^{\partial} \circ res_{\partial_H}^{\partial}$ est la multiplication par $(\pi_1^H : \pi_1^G)$ et*
2. *si de plus π_1^H est normal dans π_1^G et A est un π_1^G-module trivial, la composée $res_{\partial_H}^{\partial} \circ cor_{\partial_H}^{\partial}$ est la multiplication par $(\pi_1^H : \pi_1^G)$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, on a les compositions suivantes :

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A \arrow[d, "ind_{\partial_H}^{\partial}"'] & g \otimes a \arrow[d, mapsto] \\
a \arrow[d, mapsto] & A \arrow[d, "coind_{\partial_H}^{\partial}"'] & ga \arrow[d, mapsto] \\
(g \mapsto ga) \arrow[d, mapsto] & \operatorname{Coind}_{\partial_H}^{\partial} A \arrow[d, "\Phi"', "\cong"] & (g' \mapsto g'ga) \arrow[d, mapsto] \\
\displaystyle\sum_{r \in R} r \otimes r^{-1} a \arrow[d, mapsto] & \operatorname{Ind}_{\partial_H}^{\partial} A \arrow[d, "ind_{\partial_H}^{\partial}"'] & \displaystyle\sum_{r \in R} r \otimes r^{-1} ga \\
\displaystyle\sum_{r \in R} r r^{-1} a = |R| a & A &
\end{tikzcd}$$

Si A est un $\mathbb{Z}\pi_1^G$-module trivial, alors $\sum_{r \in R} r \otimes r^{-1} ga = \sum_{r \in R} 1 \otimes a = |R|(1 \otimes a)$. Or, si de plus π_1^H est normal dans π_1^G, alors $|R|(g \otimes a) = (|R|g) \otimes a = 1 \otimes (|R|ga) = 1 \otimes (|R|a) = |R|(1 \otimes a)$. Ces homomorphismes induisent donc clairement la multiplication par l'indice $(\pi_1^H : \pi_1^G)$ en (co)homologie via $H(B(\partial); -)$. $\square$

8 (Co)homologie des 2-types

37. Théorème. *Soient $(\partial : M \to G, \partial_H)$ une paire admissible de modules croisés et A un π_1^G-module. Si l'indice $(\pi_1^H : \pi_1^G)$ est fini, alors les diagrammes de gauche suivants commutent, et si de plus π_1^H est normal dans π_1^G et A est un π_1^G-module trivial, alors les diagrammes de droite suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd}
& H_*(B(\partial_H);A) \arrow[dr, "cor"] & \\
H_*(B(\partial);A) \arrow[ur, "res"] \arrow[rr, "(\pi_1^H:\pi_1^G)"'] & & H_*(B(\partial);A),
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H_*(B(\partial_H);A) \arrow[rr, "(\pi_1^H:\pi_1^G)"] \arrow[dr, "cor"'] & & H_*(B(\partial_H);A) \\
& H_*(B(\partial);A), \arrow[ur, "res"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& H^*(B(\partial_H);A) \arrow[dr, "cor"] & \\
H^*(B(\partial);A) \arrow[ur, "res"] \arrow[rr, "(\pi_1^H:\pi_1^G)"'] & & H^*(B(\partial);A),
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^*(B(\partial_H);A) \arrow[rr, "(\pi_1^H:\pi_1^G)"] \arrow[dr, "cor"'] & & H^*(B(\partial_H);A) \\
& H^*(B(\partial);A). \arrow[ur, "res"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On applique le lemme de Shapiro au lemme précédent. □

38. Corollaire. *Soient $\partial : M \to G$ un module croisé avec $\pi_1 = \pi_1(\partial)$ et $\pi_2 = \pi_2(\partial)$ finis et A un groupe abélien. Le diagramme suivant commute (où H désigne le foncteur de (co)homologie) :*

$$\begin{tikzcd}
& H(K(\pi_2,2);A) \arrow[rr, "|\pi_1|"] \arrow[dr, "cor"] & & H(K(\pi_2,2);A) \\
H(B(\partial);A) \arrow[ur, "res"] \arrow[rr, "|\pi_1|"'] & & H(B(\partial);A). \arrow[ur, "res"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On applique le théorème à la paire admissible $(\partial, \partial_{\partial(M)})$ (cf. remarque 28). □

39. Corollaire. *Soient X un 2-type connexe avec $\pi_1 = \pi_1(X)$ et $\pi_2 = \pi_2(X)$ finis et A un groupe abélien. Le diagramme suivant commute (où H désigne le foncteur de (co)homologie) :*

$$\begin{tikzcd}
& H(K(\pi_2,2);A) \arrow[rr, "|\pi_1|"] \arrow[dr, "cor"] & & H(K(\pi_2,2);A) \\
H(X;A) \arrow[ur, "res"] \arrow[rr, "|\pi_1|"'] & & H(X;A). \arrow[ur, "res"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On applique le corollaire précédent au module croisé $\chi(X)$. □

9 Le théorème fondamental de Cartan

Nous allons brièvement exposer la méthode de H. Cartan qui permet de calculer l'homologie entière des espaces d'Eilenberg-MacLane simplement connexes. On trouvera un exposé complet dans [Ca54].

40. Définition. Soit A une algèbre graduée commutative (au sens gradué). L'algèbre A est munie d'un **système de puissances divisées** si pour tout élément $x \in A$ de degré pair non négatif il existe une suite d'éléments $\gamma_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, qui satisfont les relations suivantes :

1. $\gamma_0(x) = 1$, $\gamma_1(x) = x$ et $\deg \gamma_k(x) = k \deg x$,
2. $\gamma_k(x)\gamma_l(x) = \binom{k+l}{k}\gamma_{k+l}(x)$,
3. $\gamma_k(x+y) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(x)\gamma_j(y)$ (formule de Leibniz),
4. pour tout $k \geqslant 2$, d'une part $\gamma_k(xy) = 0$ si $\deg x$ et $\deg y$ sont impairs et d'autre part $\gamma_k(xy) = x^k\gamma_k(y)$ si $\deg x$ et $\deg y \geqslant 2$ sont pairs,
5. $\gamma_k(\gamma_l(x)) = \prod_{i=l}^{(k-1)l} \binom{i+l-1}{i}\gamma_{kl}(x)$.

Si de plus l'algèbre A possède une différentielle d, le système de puissances divisées est dit **compatible** avec la différentielle si pour tout $k \geqslant 0$ on a :

6. $d(\gamma_{k+1}(x)) = d(x)\gamma_k(x)$.

41. Exemple. Soit $q \geqslant 1$ un entier. On note $P(y, 2q)$ l'algèbre de polynômes divisée à un générateur y de degré pair $2q$. C'est le $\mathbb{Z}$-module engendré par $y_0 = 1$, $y_1 = y$ et les y_i tels que $\deg y_i = 2iq$ pour tout $i \geqslant 0$, la structure d'algèbre étant donnée par la relation

$$y_i y_j = \binom{i+j}{i} y_{i+j}$$

pour tout $i, j \geqslant 0$. C'est une algèbre différentielle graduée commutatives (au sens gradué) munie d'un système de puissances divisées compatible avec la différentielle. Il suffit de prendre la différentielle d triviale, i.e. $d = 0$, et de définir

$$\gamma_0(y_i) = 1 \text{ et } \gamma_j(y_i) = \prod_{k=i}^{(j-1)i} \binom{k+i-1}{k} y_{ij}$$

pour tout $i, j \geqslant 0$. En patriculier on a $\gamma_i(y) = y_i$ pour tout $i \geqslant 0$.

42. Définition. Soit $q \geqslant 1$ un entier. On appelle **complexe élémentaire de type (I)** toute algèbre extérieure sur $\mathbb{Z}$ à un générateur x de degré $2q-1$, notée $\Lambda(x, 2q-1)$, et munie de la différentielle triviale, et toute algèbre de polynômes divisée à un générateur y de degré pair $2q$, notée $P(y, 2q)$, munie du système de puissances divisées (cf. exemple ci-dessus) compatible avec la différentielle triviale. On appelle **complexe élémentaire de type (II)** les algèbres différentielles graduées $\Lambda(x, 2q-1) \otimes P(y, 2q)$ et $P(x, 2q) \otimes \Lambda(y, 2q+1)$ munies de la structure d'algèbre donnée par

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{\deg a' \deg b}(aa') \otimes (bb')$$

et de la différentielle définie par

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^{\deg a} a d(b).$$

Remarquons qu'un tel complexe est donné par une paire de générateurs (x, y) tels que $\deg y = 1 + \deg x$. On définit le **degré d'une paire de générateurs** (x, y) comme le degré du premier générateur x. On appelle **complexe** tout produit tensoriel (fini ou infini) de complexes élémentaires muni de la structure d'algèbre différentielle graduée suivante : soient A et B deux complexes élémentaires, $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$,

- $(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{\deg a' \deg b}(aa') \otimes (bb')$,
- $d(a \otimes b) = d(a) \otimes b + (-1)^{\deg a} a \otimes d(b)$.

De plus, $A \otimes B$ admet un unique système de puissances divisées qui prolonge les puissances divisées données sur A et B et qui reste compatible avec la différentielle.

Le lemme suivant nous donne l'homologie entière des complexes élémentaires.

43. Lemme. *Soient $q \geqslant 1$ et n des entiers. On a les résultats suivants :*

1. $H_n(\Lambda(x, 2q-1)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } n = 0 \textit{ ou } n = 2q-1, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$
2. $H_n(P(x, 2q)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } 2q \textit{ divise } n, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$
3. *Les cycles homogènes du complexe élémentaire $\Lambda(x, 2q-1) \otimes P(y, 2q)$ muni de la différentielle définie par $d(x \otimes 1) = 0$ et $d(1 \otimes y) = hx \otimes 1$ pour un certain $h \in \mathbb{Z}$, sont 1 et les multiples entiers de $x \otimes \gamma_l(y)$ pour tout $l \geqslant 0$. Un cycle $x \otimes \gamma_l(y)$ est de degré $(l+1)\deg(x) + l$ et détermine une classe d'homologie d'ordre $|h|$.*
4. *Les cycles homogènes du complexe élémentaire $P(x, 2q) \otimes \Lambda(y, 2q+1)$ muni de la différentielle définie par $d(x \otimes 1) = 0$ et $d(1 \otimes y) = hx \otimes 1$ pour un certain $h \in \mathbb{Z}$, sont 1 et les multiples entiers de $\gamma_l(x) \otimes 1$ pour tout $l \geqslant 0$. Un cycle $\gamma_l(x) \otimes 1$ est de degré $l \deg(x)$ et détermine une classe d'homologie d'ordre $|lh|$.*

Démonstration. Facile à partir des définitions. □

44. Remarque. Les deux dernières assertions du lemme permettent de détecter en quelles dimensions apparaissent des éléments d'ordre $|h|$ ou un multiple de $|h|$. En particulier, les paires de générateurs (x, y) avec $\deg(x, y) = \deg(x)$ pair sont susceptibles de fournir des classes d'homologie d'ordre arbitrairement grand.

Nous allons décrire brièvement la construction de H. Cartan qui associe à tout groupe abélien de type fini G et tout entier non négatif n un complexe X. On appliquera cette construction aux cas particuliers où G est un groupe cyclique fini d'ordre une puissance d'un premier et un groupe abélien fini. De façon générale, il s'agit de construire des complexe élémentaires à partir d'un système de générateurs du groupe G et de symboles particuliers que nous allons définir.

45. Définition. Soit p un premier. On appelle **p-mot** toute suite finie (éventuellement vide) formée des symboles σ, γ_p et φ_p, qu'on appelle lettres. La **hauteur** d'un p-mot est le nombre total de lettres égales à σ ou φ_p. Le degré d'un p-mot est le nombre défini par récurrence comme suit : le degré du p-mot vide est 0 et si α est un p-mot on a les relations

1. $\deg(\sigma\alpha) = 1 + \deg \alpha$,
2. $\deg(\gamma_p\alpha) = p \deg \alpha$,
3. $\deg(\varphi_p\alpha) = 2 + p \deg \alpha$.

Un p-mot α est dit de **première espèce** (resp. de **deuxième espèce**) s'il est non vide de degré pair, si pour chaque lettre de α égale à γ_p ou φ_p le nombre de lettres égales à σ situées à droite est pair, et si la dernière lettre de α est égale à σ (resp. φ_p). Pour tout entier $f \geqslant 1$ considérons encore le symbole ψ_{p^f} qu'on définit de hauteur 1 et de degré 2. On note $\mathcal{W}_p$ l'ensemble des p-mots et $\mathcal{W}_p^I$ (resp. $\mathcal{W}_p^{II}$) l'ensemble des p-mots de première (resp. deuxième) espèce.

46. Remarque. On peut calculer explicitement le degré et la hauteur des p-mot de première et deuxième espèce. En effet, un tel p-mot est de la forme

$$\alpha = \gamma_p^{A_{i+1}} \epsilon_i \gamma_p^{A_i} \epsilon_{i-1} \gamma_p^{A_{i-1}} \dots \epsilon_1 \gamma_p^{A_1} \beta$$

où $i \geqslant 0$ est un entier, $A_j \geqslant 0$ un est un entier pour tout $1 \leqslant j \leqslant i+1$, $\epsilon_j \in \{\sigma^2, \varphi_p\}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant i$ et $\beta = \sigma^2$ (resp. $\beta = \varphi_p$) si α est de première (resp. deuxième) espèce. Ainsi on a une formule pour le degré et la hauteur d'un tel p-mot :

$$\deg(\alpha) = 2p^{A_{i+1}} \Big(1 + \sum_{j=0}^{i-1} p^{\left(\sum_{k=i-j}^{i} (2 - |\epsilon_k| + A_k)\right)}\Big)$$

et

$$h(\alpha) = |\beta| + \sum_{j=1}^{i} |\epsilon_j| \text{ où } |*| = \begin{cases} 1 & \text{si } * = \varphi_p, \\ 2 & \text{si } * = \sigma^2. \end{cases}$$

De façon plus grossière, la moitié du degré d'un tel p-mot est de la forme

$$\frac{\deg(\alpha)}{2} = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_l p^l$$

où $l \geqslant 0$ correspond au nombre de lettres égales à φ_p ou γ_p dans α et $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_l$ sont des entiers tels que $\sum_{j=0}^{l} a_j = i + 1$.

47. Définition. Soient G un groupe abélien de type fini, $n \geqslant 1$ un entier et p un premier. Le groupe G est somme directe finie de groupes cycliques engendrés par des éléments d'ordre infini ou égal à une puissance d'un nombre premier. Soit S l'ensemble de ces générateurs.

1. On note $X(0)$ le produit tensoriel de tous les complexes élémentaires de type (I) ayant pour générateurs de degré n les éléments de la forme $\sigma^n s$, pour $s \in S$ d'ordre infini. Suivant la parité de l'entier n, les complexes élémentaires considérés sont des algèbres extérieures ou des algèbres de polynomes divisées, munies de la différentielle triviale.
2. On note $X'(p)$ le produit tensoriel des complexes élémentaires de type (II) ayant pour générateurs les paires de la forme $(\sigma^n s, \sigma^{n-1}\psi_{p^f} s)$, avec $\deg(\sigma^n s) = n$, pour $s \in S$ d'ordre égal à p^f, $f \geqslant 1$ un entier. La différentielle de ces complexes est donnée par
$$d(\sigma^n s \otimes 1) = 0 \text{ et } d(1 \otimes \sigma^{n-1}\psi_{p^f} s) = (-1)^{n-1} p^f (\sigma^n s \otimes 1).$$
3. On note $X''(p)$ le produit tensoriel de tous les complexes élémentaires de type (II) ayant pour générateurs les paires de la forme $(\sigma^{k+1}\gamma_p \alpha s, \sigma^k \varphi_p \alpha s)$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-3$ un entier, $\alpha \in \mathcal{W}_p^I$ de hauteur $n-k-1$ et $s \in S$ d'ordre infini ou égal à une puissance de p. La différentielle de ces complexes est donnée par
$$d(\sigma^{k+1}\gamma_p \alpha s \otimes 1) = 0 \text{ et } d(1 \otimes \sigma^k \varphi_p \alpha s) = (-1)^k p (\sigma^{k+1}\gamma_p \alpha s \otimes 1).$$
4. Pour tout $s \in S$ d'ordre p^f on définit l'élément $s' = p^{f-1}s$ qui est d'ordre p. On note $X'''(p)$ le produit tensoriel de tous les complexes élémentaires du type (ii) ayant pour générateurs les paires de la forme $(\sigma^{k+1}\gamma_p \alpha s', \sigma^k \varphi_p \alpha s')$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-2$ un entier et $\alpha \in \mathcal{W}_p^{II}$ de hauteur $n-k-1$. La différentielle de ces complexes est donnée par
$$d(\sigma^{k+1}\gamma_p \alpha s' \otimes 1) = 0 \text{ et } d(1 \otimes \sigma^k \varphi_p \alpha s') = (-1)^k p (\sigma^{k+1}\gamma_p \alpha s' \otimes 1).$$

On pose $X(p) = X'(p) \otimes X''(p) \otimes X'''(p)$ et on définit le **complexe de Cartan** associé au groupe G et à l'entier n par

$$X = X(0) \otimes \Big(\bigotimes_{p \text{ premier}} X(p) \Big).$$

48. Remarque. Le lemme 43 permet de calculer l'homologie entière des complexes $X(0)$, $X'(p)$, $X''(p)$ et $X'''(p)$ pour tout premier p. En effet, chaque complexe est le produit tensoriel de complexes élémentaires de type (I) ou (II) dont on connait l'homologie entière grâce à ce lemme. On obtient le résultat souhaité en appliquant la formule de Künneth.

49. Théorème (fondamental de H. Cartan). *Soient $n \geqslant 1$ un entier, G un groupe abélien fini et S un sous-ensemble de G formé d'éléments d'ordre une puissance d'un nombre premier et tel que G puisse s'écrire comme somme directe des sous-groupes cycliques engendreé par ces éléments. Soit encore $X = X(0) \otimes (\bigotimes_{p \text{ premier}} X(p))$ le complexe de Cartan associé à n et à G (pour le système de générateurs S). Il existe un unique homomorphisme d'algèbres graduées $\lambda : H_*X \to H_*K(G,n)$ qui de plus est surjectif. De façon précise, $H_*K(G,n)$ est somme directe des images des homomorphismes $\lambda_p : H_*(X(0) \otimes \tilde{X}(p)) \to H_*K(G,n)$, où p est un premier et $\tilde{X}(p)$ est le sous-complexe de $X(p)$ formé des éléments de degré strictement positif. Chaque λ_p est un épimorphisme sur la composante p-primaire de $H_*K(G,n)$. Le noyau de λ_p se compose de la somme des composantes q-primaires de $H_*(X(0) \otimes \tilde{X}(p))$ pour $q \neq p$.*

Démonstration. [Ca54] ou [Po96, Chapitre II]. □

50. Remarque. Dans sa version originale, le théorème fondamental permet de calculer l'homologie entière des espaces d'Eilenberg-MacLane simplement connexes associés à un groupe abélien de type fini. Dans le cas des groupes abélien finis d'ordre p^f, avec p un premier et $f \geqslant 1$ un entier, le théorème donne un algorithme de calcul faisant intervenir l'homologie entière du complexe $X(p)$, i.e. des complexes élémentaires $X'(p)$, $X''(p)$ et $X'''(p)$. En effet, il suffit de calculer la composante p-primaire de l'homologie entière des complexes ci-dessus, chacun de ces complexes étant engendré par des paires de générateurs décrites dans la définition 47, on obtient ainsi les groupes gradués $(H_*X'(p))_p$, $(H_*X''(p))_p$ et $(H_*X'''(p))_p$ auxquels il suffit d'appliquer la formule de Künneth.

Quelques groupes d'homologie entière (en dimensions 0-35) de l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}_2, 2)$

n	$H_n(-;\mathbb{Z})$	$\log_2 o$	$\log_2 e$
0	$\mathbb{Z}$	∞	∞
1	0	0	0
2	$\mathbb{Z}_2$	1	1
3	0	0	0
4	$\mathbb{Z}_4$	2	2
5	$\mathbb{Z}_2$	1	1
6	$\mathbb{Z}_2$	1	1
7	$\mathbb{Z}_2$	1	1
8	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$	4	3
9	$2\mathbb{Z}_2$	2	1
10	$2\mathbb{Z}_2$	2	1
11	$3\mathbb{Z}_2$	3	1
12	$2\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$	4	2
13	$3\mathbb{Z}_2$	3	1
14	$5\mathbb{Z}_2$	5	1
15	$4\mathbb{Z}_2$	4	1
16	$4\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$	8	4
17	$7\mathbb{Z}_2$	7	1
18	$6\mathbb{Z}_2$	6	1
19	$8\mathbb{Z}_2$	8	1
20	$8\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$	10	2
21	$9\mathbb{Z}_2$	9	1
22	$11\mathbb{Z}_2$	11	1
23	$12\mathbb{Z}_2$	12	1
24	$12\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$	15	3
25	$14\mathbb{Z}_2$	14	1
26	$17\mathbb{Z}_2$	17	1
27	$17\mathbb{Z}_2$	17	1
28	$18\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$	20	2
29	$22\mathbb{Z}_2$	22	1
30	$22\mathbb{Z}_2$	22	1
31	$25\mathbb{Z}_2$	25	1
32	$27\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{32}$	32	5
33	$29\mathbb{Z}_2$	29	1
34	$32\mathbb{Z}_2$	32	1
35	$36\mathbb{Z}_2$	36	1

10 Exposants homologiques des espaces d'Eilenberg-MacLane

Nous allons considérer les paires de générateurs, associées à un entier $n \geqslant 2$ et à un groupe cyclique fini d'ordre une puissance d'un premier et dont s est un générateur, qui engendrent les complexes élémentaires de type (II) et qui sont susceptibles de fournir des classes d'homologie d'ordre arbitrairement grand. Ce sont les paires de la forme $(\sigma^n s, \sigma^{n-1}\psi_{p^f} s)$, $(\sigma^{k+1}\gamma_p\alpha s, \sigma^k\varphi_p\alpha s)$, avec $\alpha \in \mathcal{W}_p^I$ de hauteur $n-k-1$ $(0 \leqslant k \leqslant n-3)$, et $(\sigma^{k+1}\gamma_p\alpha s, \sigma^k\varphi_p\alpha s)$, avec $\alpha \in \mathcal{W}_p^{II}$ de hauteur $n-k-1$ $(0 \leqslant k \leqslant n-2)$, et telles que σ^n, $\sigma^{k+1}\gamma_p\alpha$ sont de degrés pair (cf. remarque 44).

51. Définition. Soient $n \geqslant 2$ un entier, p un premier et $f \geqslant 1$ un entier. On pose

$$\mathcal{G}'_{n,p,f} = \{(\sigma^n, \sigma^{n-1}\psi_{p^f})\},$$

$$\mathcal{G}''_{n,p} = \{(\sigma^{k+1}\gamma_p\alpha, \sigma^k\varphi_p\alpha) \mid 0 \leqslant k \leqslant n-3,\ \alpha \in \mathcal{W}_p^I \text{ de hauteur } n-k-1\},$$

$$\mathcal{G}'''_{n,p} = \{(\sigma^{k+1}\gamma_p\alpha, \sigma^k\varphi_p\alpha) \mid 0 \leqslant k \leqslant n-2,\ \alpha \in \mathcal{W}_p^{II} \text{ de hauteur } n-k-1\}.$$

De façon générale, pour tout $\mathcal{U} \subset \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ on pose

$$\mathcal{U}^+ = \{(x,y) \in \mathcal{U} \mid \deg(x,y) \text{ pair}\},$$

ainsi que

$$\min\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathcal{U} \mid \deg(x,y) \text{ est minimal}\}.$$

52. Lemme. *Soient $n \geqslant 3$ un entier et p un premier. On a*

$$\min \mathcal{G}''_{n,p} = \{\underbrace{(\sigma^{n-2}\gamma_p\sigma^2, \sigma^{n-3}\varphi_p\sigma^2)}_{\textit{de degré } n-2+2p}\},$$

$$\min(\mathcal{G}''_{n,p})^+ = \begin{cases} \emptyset & \textit{si } n = 3, \\ \{\underbrace{(\sigma^{n-2}\gamma_p\sigma^2, \sigma^{n-3}\varphi_p\sigma^2)}_{\textit{de degré } n-2+2p}\} & \textit{si } n \geqslant 4 \textit{ est pair,} \\ \{\underbrace{(\sigma^{n-3}\gamma_p\varphi_p\sigma^2, \sigma^{n-4}\varphi_p^2\sigma^2)}_{\textit{de degré } n-3+2p(1+p)}\} & \textit{si } n \geqslant 5 \textit{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $(x,y) \in \mathcal{G}''_{n,p}$ avec $n \geqslant 3$. Raisonnons sur x. D'après la remarque 46 on a

$$\deg(x) = k + 1 + 2p(a_0 + a_1 p + \cdots + a_l p^l)$$

avec $l+1 \geqslant 1$ le nombre de lettres égales à φ_p ou γ_p dans x et $\sum_{j=0}^{l} a_j = i+1$. On a également

$$h(x) = 2 + \sum_{j=1}^{i} |\epsilon_j| = n - k - 1,$$

c'est-à-dire

$$k = n - 3 - \sum_{j=1}^{i} |\epsilon_j|.$$

Ainsi, lorsque k augmente, i diminue et l'un des a_j diminue également, de sorte que $\deg(x)$ est minimal lorsque k est maximal.

Supposons $n \geqslant 3$. Le degré de x est minimal lorsque $k = n-3$ et a fortiori on a $i = 0$, de sorte que $x = \sigma^{n-2}\gamma_p\sigma^2$ est de degré minimal. Remarquons que $\deg(x) = n-2+2p$ est impair si n l'est. Supposons n impair. Nous allons déterminer quelles sont les valeurs de k qui rendent $\deg(x)$ minimal et pair. Si $n = 3$ alors la seule valeur possible pour k est 0, de sorte que $x = \sigma\gamma_p\sigma^2$ est de degré minimal et $\deg(x)$ est forcément impair. Si $n \geqslant 4$ posons $k = n-4$, alors a fortiori on a $i = 1$ et $\epsilon_1 = \varphi_p$, de sorte que $x = \sigma^{n-3}\gamma_p\varphi_p\sigma^2$ est de degré minimal pair $\deg(x) = n-3+2p(1+p)$. □

53. Lemme. *Soient $n \geqslant 2$ un entier et p un premier. On a*

$$\min \mathcal{G}'''_{n,p} = \{\underbrace{(\sigma^{n-1}\gamma_p\varphi_p, \sigma^{n-2}\varphi_p^2)}_{\text{de degré } n-1+2p}\},$$

$$\min(\mathcal{G}'''_{n,p})^+ = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n = 2, \\ \{\underbrace{(\sigma^{n-2}\gamma_p\varphi_p^2, \sigma^{n-3}\varphi_p^3)}_{\text{de degré } n-2+2p(1+p)}\} & \text{si } n \geqslant 4 \text{ est pair,} \\ \{\underbrace{(\sigma^{n-1}\gamma_p\varphi_p, \sigma^{n-2}\varphi_p^2)}_{\text{de degré } n-1+2p}\} & \text{si } n \geqslant 3 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathcal{G}'''_{n,p}$ avec $n \geqslant 2$. Raisonnons sur x. On sait que $\deg(x)$ est minimal lorsque k est maximal. Supposons $n \geqslant 2$. Le degré de x est minimal lorsque $k = n - 2$ et a fortiori on a $i = 0$, de sorte que $x = \sigma^{n-1}\gamma_p\varphi_p$ est de degré minimal. Remarquons que $\deg(x) = n - 1 + 2p$ est impair (resp. pair) si n est pair (resp. impair). Supposons n pair. Nous allons déterminer quelles sont les valeurs de k qui rendent $\deg(x)$ minimal et pair. Si $n = 2$ alors la seule valeur possible pour k est 0, de sorte que $x = \sigma\gamma_p\varphi_p$ est de degré minimal et $\deg(x)$ est forcément impair. Si $n \geqslant 4$ posons $k = n-3$, alors a fortiori on a $i = 1$ et $\epsilon_1 = \varphi_p$, de sorte que $x = \sigma^{n-2}\gamma_p\varphi_p^2$ est de degré minimal pair $\deg(x) = n-2+2p(1+p)$. □

On est maintenant en mesure de détecter des éléments d'ordre une puissance quelconque du premier p dans l'homologie des espaces d'Eilenberg-MacLane associés aux groupes cycliques d'ordre une puissance de p.

54. Théorème. *Soient $n \geqslant 2$ un entier, p un premier et $f \geqslant 1$ un entier. Soit encore $r \geqslant f$ un entier. Si $n = 2$ alors une classe d'homologie d'ordre p^r apparaît pour la première fois en dimension $2p^{r-f}$ dans l'algèbre $H_*K(\mathbb{Z}/p^f, 2)$. Si $n \geqslant 3$ est impair alors une classe d'homologie d'ordre p^r apparaît pour la première fois en dimension $p^{r-1}(n-1+2p)$ dans l'algèbre $H_*K(\mathbb{Z}/p^f, n)$. Si $n \geqslant 4$ est pair alors une classe d'homologie d'ordre p^r apparaît pour la première fois en dimension $p^{r-1}(n-2+2p)$ dans l'algèbre $H_*K(\mathbb{Z}/p^f, n)$.*

Démonstration. Soient, lorsque c'est possible, $(x_1, y_1) \in \min(\mathcal{G}'_{n,p,f})^+$, $(x_2, y_2) \in \min(\mathcal{G}''_{n,p})^+$ et $(x_3, y_3) \in \min(\mathcal{G}'''_{n,p})^+$. Supposons $n = 2$. D'après les lemmes 52 et 53, la seule paire de générateurs susceptible de générer des clases d'homologie d'ordre arbitrairement grand est $(x_1, y_1) = (\sigma^2 s, \sigma\psi_{p^f} s)$. On a $\deg(x_1, y_1) = 2$ de sorte que (x_1, y_1) détermine des classes d'homologie d'ordre lp^f en dimension $2l$, pour tout $l \geqslant 1$. En ne considérant que la partie p-primaire de l'homologie, (x_1, y_1) détermine des classes d'homologie d'ordre p^{f+s} en dimension $2p^s$, pour tout $s \geqslant 0$. Ainsi la première classe d'homologie d'ordre p^r apparaît en dimension $2p^{r-f}$. Supposons $n \geqslant 3$ impair. D'après les lemmes 52 et 53, la paire de générateurs $(x_3, y_3) = (\sigma^{n-1}\gamma_p\varphi_p s, \sigma^{n-2}\varphi_p^2 s)$ est de degré minimal $n-1+2p$ et génère des classes d'homologie d'ordre lp en dimension $l(n-1+2p)$, pour tout $l \geqslant 1$. En ne considérant que la partie p-primaire de l'homologie, (x_3, y_3) détermine une classe d'homologie d'ordre p^r en dimension $p^{r-1}(n-1+2p)$. Supposons $n \geqslant 4$ pair. D'après les lemmes 52 et 53, la paire de générateurs $(x_2, y_2) = (\sigma^{n-2}\gamma_p\sigma^2 s, \sigma^{n-3}\varphi_p\sigma^2 s)$ est de degré minimal $n-2+2p$ et génère des classes d'homologie d'ordre lp en dimension $l(n-2+2p)$, pour tout $l \geqslant 1$. En ne considérant que la partie p-primaire de l'homologie, (x_2, y_2) détermine une classe d'homologie d'ordre p^r en dimension $p^{r-1}(n-2+2p)$. □

55. Corollaire. *Soit K un espace d'Eilenberg-MacLane simplement connexe possédant un groupe d'homotopie fini. Alors K ne possède pas de borne supérieure universelle pour les exposants de ses groupes d'homologie entière.* □

11 Résultat principal

On désignera un 2-type connexe par la fibration provenant de la tour de Postnikov suivante :

$$K(\pi_2(X),2) \to X \to K(\pi_1(X),1).$$

On dira qu'un tel 2-type est **fini** si ses groupes d'homotopie sont finis.

56. Théorème. *Soit $K(\pi_2,2) \to X \to K(\pi_1,1)$ un 2-type fini. Alors pour tout $n \geqslant 0$ on a*

$$\exp(H_n(K(\pi_2,2);\mathbb{Z})) \textit{ divise } |\pi_1| \cdot \exp(H_n(X;\mathbb{Z})) \textit{ divise } |\pi_1|^2 \cdot \exp(H_n(K(\pi_2,2);\mathbb{Z})).$$

Démonstration. Découle immédiatement du corollaire 39. □

57. Corollaire. *Si X est un 2-type fini, alors il ne possède pas de borne supérieure universelle pour les exposants de ses groupes d'homologie entière.*

Démonstration. Découle immédiatement du théorème ci-dessus et du corollaire 55. □

58. Corollaire. *Soient X un CW-complexe connexe dont les deux premiers groupes d'homotopie sont finis et $\Gamma_3(X)$ son 3-ième groupe gamma de Whitehead. Alors*

$$\exp(\pi_2(X) \otimes \mathbb{Z}/2) \textit{ divise } |\pi_1(X)| \cdot \exp \Gamma_3(X) \textit{ divise } |\pi_1(X)|^2 \cdot \exp(\pi_2(X) \otimes \mathbb{Z}/2).$$

Démonstration. On prouve facilement que $\Gamma_3(X) \cong H_4(X[2];\mathbb{Z})$ où $X[2]$ désigne la 2-ième section de Postnikov de X qui est un 2-type fini. Le résultat découle immédiatement du fait que $H_4(K(\pi_2(X),2);\mathbb{Z}) \cong \pi_2(X) \otimes \mathbb{Z}/2$. □

Références

[Ba89] Hans-Joachim BAUES, "*Algebraic homotopy*", *Cambridge Studies in Advances Mathematics*, vol. 15, Cambridge University Press, 1989.

[Ba90] Hans-Joachim BAUES, "*Combinatorial homotopy and 4-dimensional complexes*", Max Planck Institut, 1990.

[BH82] R. BROWN and J. HUEBSCHMANN, "*Identities among relations*", *Low dimensional topology*, London Mathematical Society Lecture Notes 48 (University Press, Cambridge, 1982) 215-238.

[Ca54] H. CARTAN, "*Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie*", Séminaire H. Cartan Ecole Norm. Sup. (1954/1955).

[El92] Graham J. ELLIS, "*Homology of 2-types*", *J. London Math. Soc.* (2) 46 (1992) 1-27.

[El95] Graham J. ELLIS, "*Homology of 2-types : corrigendum and addendum*", *J. London Math. Soc.* (2) 52 (1995) 447-448.

[EP86] G. J. ELLIS and T. PORTER, "*Free and projective crossed modules and the second homology group of a group*", *Journal of Pure and Applied Algebra* 40 (1986) 27-31.

[He80] Alex HELLER, "*On the homotopy theory of topogenic groups and groupoïds*", *Illinois Journal of Mathematics* (4) 24 (1980) 577-605.

[KT76] D. M. KAN and W. P. THURSTON, "*Every connected space has the homology of a* $K(\pi, 1)$", *Topology* 15 (1976) 253-258.

[Lo82] J.-L. LODAY, "*Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups*", *J. Pure Appl. Algebra* 24 (1982) 179-202.

[MW50] S. MACLANE and J. H. C. WHITEHEAD, "*On the 3-type of a complex*", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 36 (1950) 41-48.

[Po96] Nicole POINTET-TISCHLER, "*Invariants de Postnikov des espaces de lacets*", Université de Lausanne, Institut de Mathématiques (1996).

[Ra80] John G. RATCLIFFE, "*Free and projective crossed modules*", J. London Math. Soc. (2) 22 (1980) 66-74.

[Wh49] J. H. C. WHITEHEAD, "*Combinatorial homotopy II*", *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949) 453-496.