Cohomologie entière des tours de Postnikov finies

Alain Clément
+41 21 692 35 62
alain.clement@ima.unil.ch

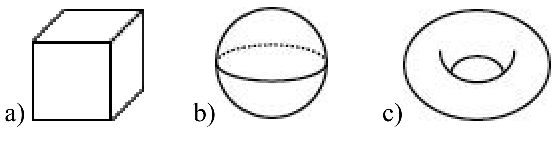
Il est toujours difficile pour un mathématicien de parler de son travail. La difficulté réside dans le fait que les objets qu'il étudie sont abstraits. On rencontre assez rarement un *espace vectoriel*, une *catégorie abélienne* ou une *transformée de Laplace* au coin de la rue !

Cependant, même si les objets mathématiques sont difficiles à cerner pour un non-mathématicien, les méthodes pour les étudier sont essentiellement les mêmes que celles utilisées dans les autres disciplines scientifiques. On décortique les objets complexes en composantes plus simples à étudier. On dresse la liste des propriétés des objets mathématiques, puis on les classe en formant des familles d'objets partageant un caractère commun. On cherche des façons différentes, mais équivalentes, de formuler un problème. Etc.

Mon travail concerne le domaine mathématique de la *topologie algébrique*. Le but ultime de cette discipline est de parvenir à *classifier* tous les *espaces topologiques* en faisant usage de l'*algèbre*.

Cette activité est comparable à celle d'un ornithologue (topologue) qui étudierait les oiseaux (les espaces topologiques) par exemple à l'aide de jumelles (l'algèbre). S'il voit un oiseau de petite taille, arboricole, chanteur et bâtisseur de nids, pourvu de pattes à quatre doigts, dont trois en avant et un, muni d'une forte griffe, en arrière, alors il en déduira à coup sûr que c'est un passereau. Il lui restera encore à déterminer si c'est un moineau, un merle ou un rossignol.

Considérons ci-dessous quelques exemples d'espaces topologiques: a) un cube creux, b) une sphère et c) un tore creux (c.-à-d. une chambre à air).



Si toute personne normalement constituée perçoit ici trois figures différentes, le topologue, lui, n'en voit que deux ! De son point de vue, le cube et la sphère ne sont pas différents puisque ils sont *homéomorphes*: on peut transformer l'un en l'autre de façon continue (il suffirait de souffler dans le cube pour obtenir la sphère). Par contre, la sphère et le tore ne sont pas homéomorphes: triturez la sphère de toutes les façons (sans la déchirer), jamais vous n'obtiendrez le tore.

Il existe un infinité d'espaces topologiques et, contrairement à ce que l'on serait naïvement tenté de croire, déterminer si deux d'entre eux sont homéomorphes est très difficile en général. Pour essayer de résoudre ce problème, les topologues ont eu l'idée de faire intervenir l'algèbre dans leurs raisonnements. Ce fut la naissance de la *théorie de l'homotopie*. Il s'agit, suivant une recette bien particulière, d'associer à tout espace topologique une infinité de ce que les algébristes appellent des *groupes*. Les groupes ainsi obtenus sont appelés *groupes d'homotopie* de l'espace topologique.

Les mathématiciens ont commencé par montrer que deux espaces topologiques qui sont homéomorphes (par exemple le cube et la sphère) ont les même groupes d'homotopie. On parle alors d'*invariants* (les groupes d'homotopie sont bien invariants relativement à des espaces topologiques qui sont homéomorphes). Par conséquent, deux espaces topologiques qui n'ont pas les mêmes groupes d'homotopie ne peuvent en aucun cas être homéomorphes. C'est là un excellent moyen de *classer* les espaces topologiques (pensez à l'ornithologue qui observe les pattes des oiseaux pour déterminer s'il a affaire à un passereau ou non).

Mon travail porte sur les espaces topologiques qui n'ont qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non nuls. De tels espaces sont appelés des *tours de Postnikov finies*. On y étudie leurs *groupes de cohomologie entière*, une autre famille d'invariants, à l'instar des groupes d'homotopie.

On mesure d'une certaine manière la taille d'un groupe de cohomologie à l'aide de la notion d'*exposant*; ainsi, un groupe de cohomologie possédant un exposant est relativement petit.

L'un des résultats principaux de ce travail porte sur une étude de la taille des groupes de cohomologie des tours de Postnikov finies. Il s'agit du théorème suivant: un H-espace topologique 1-connexe 2-local et de type fini qui ne possède qu'un ou deux groupes d'homotopie non nuls n'a pas d'exposant pour son groupe gradué de cohomologie entière réduite.

S'il fallait interpréter qualitativement ce résultat, on pourrait dire que plus un espace est petit du point de vue de la cohomologie (c.-à-d. s'il possède un exposant cohomologique), plus il est intéressant du point de vue de l'homotopie (c.-à-d. il aura plus de deux groupes d'homotopie non nuls).

Il ressort de mon travail que de tels espaces sont très intéressants dans le sens où ils peuvent avoir une infinité de groupes d'homotopie non nuls. Jean-Pierre Serre, médaillé Fields en 1954, a montré que toutes les sphères de dimension >1 ont une infinité de groupes d'homotopie non nuls. Des espaces avec un exposant cohomologique aux sphères, il n'y a qu'un pas à franchir...