Un espace pour lequel $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2)$ est un rétract

par Alain Clément

On va construire un espace topologique X qui ne possède que deux groupes d'homotopie non-triviaux, à savoir $\pi_2(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\pi_3(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pour lequel ni $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2)$ ni $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 3)$ ne sont des facteurs directs, mais dont $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2)$ est un rétract. La construction d'un tel espace est motivée par un article de F. R. Cohen et F. P. Peterson [3] dans lequel les auteurs exhibent une application $\Omega f : \Omega\Sigma BSO(3) \to K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2)$ qui n'admet pas de section mais qui induit une injection en cohomologie mod 2. Historiquement, l'espace que nous allons étudier a permis à C. Schochet [5] de prouver que de façon générale on n'a pas $E^2 = E^\infty$ dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'un système de Postnikov à deux étages.
On commencera par un bref exposé de la théorie de Postnikov. Ensuite on construira l'espace X et on en déduira les propriétés qu'on vient d'énoncer. Tous les espaces topologiques qu'on va considérer sont des CW-complexes pointés et connexes (par arcs).

1. La théorie de Postnikov

Rappelons qu'un CW-complexe (défini par J.H.C. Whitehead en 1949) est construit à partir de cellules qu'on attache par leur bord. Le sous-complexe constitué des cellules de X de dimension $\leq n$ est appelé le n-squelette de X et noté X^n. La suite des squelettes, $X^0 \subset X^1 \subset \ldots \subset X^n \subset \ldots \subset X$, possède les propriétés suivantes:
1. l'inclusion $X^i \subset X^j$ est une cofibration ($i \leq j$),
2. on a $H_k X^n \cong H_k X$ si $k < n$ et $H_k X^n \cong 0$ si $k > n$,
3. le quotient X^n/X^{n-1} a le type d'homotopie d'un bouquet de n-sphères.
On peut résumer ces observations à l'aide du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d, dotted, no head] & \\
& X^n \arrow[dl] \arrow[r] & \bigvee_{\alpha_n} S^n_{\alpha_n} \\
X & X^2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, dotted, no head] & \bigvee_{\alpha_2} S^2_{\alpha_2} \\
& X^1 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[r] & \bigvee_{\alpha_1} S^1_{\alpha_1} \\
& X^0. \arrow[uul] \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

La théorie de Postnikov, apparue entre 1957 et 1959, est l'analogue en homotopie de cette décomposition de l'espace X, utilisant des fibrations plutôt que des cofibrations.

Lemme 1.
Soient X un CW-complexe et $n \geq 1$ un entier. Il existe un CW-complexe X' et une inclusion $i : X \to X'$ tels que $i_* : \pi_k X \to \pi_k X'$ est un isomorphisme pour tout $k \leq n$ et $\pi_{n+1} X' = 0$.

Preuve: Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de représentants pour les générateurs du groupe $\pi_{n+1} X$. On pose

$$X' = X \sqcup (\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} D^{n+2}_\alpha)/ \sim$$

où D^{n+2} est une $(n+2)$-cellule et $x \sim \alpha(x)$ pour tout $x \in \partial D^{n+2}_\alpha$ et pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$. On vérifie que $i_*([\alpha]) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$. La suite exacte de la paire (X', X) en homotopie fournit le résultat. $\square$

Remarquons que X' est obtenu en attachant des cellules de dimension $n+2$ au CW-complexe X, de sorte que l'inclusion $i : X \to X'$ induit un isomorphisme en homologie jusqu'en dimension n. Notons également que la construction de X' dépend du choix de l'ensemble de générateurs pour le groupe $\pi_{n+1}X$.

Proposition 2.
Soient X un CW-complexe et $n \geq 1$ un entier. Il existe un CW-complexe $X[n]$ et une inclusion $i_n : X \to X[n]$ tels que $i_* : \pi_k X \to \pi_k X[n]$ est un isomorphisme pour tout $k \leq n$ et $\pi_k X[n] = 0$ pour tout $k > n$. On appelle **extension** $(n+1)$**-anticonnexe** *un tel espace.*

Preuve: A l'aide du lemme, on construit X' tel que $\pi_{n+1}X' = 0$. En itérant, on construit $X^{(r)}$ tel que $\pi_{n+s}X^{(r)} = 0$ pour tout $1 \leq s \leq r$. On a $X^{(r)} \subset X^{(r+1)}$ pour tout $r \geq 1$, de sorte qu'on peut poser

$$X[n] = \bigcup_{r \geq 1} X^{(r)}.$$

$\square$

Le résultat suivant, dont on trouvera une démonstration topologique dans [6], Chap. IX, Theorem 1.5, p.418, assure qu'une extension anticonnexe est unique à homotopie près. Le lecteur trouvera également une preuve simpliciale dans [4], Theorem 4.24, pp.110-111.

Théorème 3.
Soit $f : X \to Y$ une application entre deux CW-complexes et $m, n \geq 1$ des entiers. Soient encore $X[m]$ et $Y[n]$ des extensions anticonnexes de X et Y respectivement. On a les résultats suivants:
1. si $m \geq n$ alors il existe une application $f_{m,n} : X[m] \to Y[n]$ qui étend f,
2. si $m \geq n-1$ alors deux applications $f_{m,n}, g_{m,n} : X[m] \to Y[n]$ qui étendent f sont homotopes.
En particulier, toute extension anticonnexe d'un CW-complexe est unique à homotopie près.

L'unicité se prouve en considérant l'identité $id_X : X \to X$ et deux extensions anticonnexes $X[m]_0$ et $X[m]_1$ de X. En effet, en vertu de la première assertion, il existe deux applications $f : X[m]_0 \to X[m]_1$ et $g : X[m]_1 \to X[m]_0$ qui étendent id_X, la seconde assertion affirme que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes aux identités appropriées.

Définition 1.
Soient X un CW-complexe et $n \geq 1$ un entier. On appelle n**-ième section de Postnikov** *l'inclusion (unique à homotopie près) de X dans une de ses extensions $(n+1)$-anticonnexe, on la note $\alpha_n : X \to X[n]$.*

Comme corollaire du théorème ci-dessus, on obtient également un lien naturel entre deux sections de Postnikov consécutives. On verra dans ce qui va suivre que ce lien renferme beaucoup d'information sur la structure de l'espace.

Corollaire 4.
Soient X un CW-complexe, $n \geq 2$ un entier et α_{n-1}, α_n les $(n-1)$-ième et n-ième sections de Postnikov de X. Il existe une application $\gamma_{n-1} : X[n] \to X[n-1]$, unique à homotopie près, qui fait commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & X[n] \arrow[dd, "\gamma_{n-1}"] \\
X \arrow[ur, "\alpha_n"] \arrow[dr, "\alpha_{n-1}"'] & \\
 & X[n-1].
\end{tikzcd}$$

Preuve: Il suffit d'étendre l'identité sur X et de poser $\gamma_{n-1} = id_{n,n-1}$. $\square$

La fibre homotopique de l'application γ_{n-1} est $K(\pi_n X, n)$, de sorte qu'on a le diagramme commutatif à homotopie près suivant, qu'on nomme **tour de Postnikov**:

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, dotted, no head] & \\
 & X[n+1] \arrow[d, "\gamma_n"] & K(\pi_{n+1}X,n+1) \arrow[l] \\
X \arrow[ur, "\alpha_{n+1}"] \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[dr, "\alpha_{n-1}"] \arrow[ddr, "\alpha_1"'] & X[n] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & K(\pi_n X,n) \arrow[l] \\
 & X[n-1] \arrow[d, dotted, no head] & K(\pi_{n-1}X,n-1) \arrow[l] \\
 & X[1] & K(\pi_1 X,1). \arrow[l, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

On peut voir toute application $f : X \to Y$ comme une fibration à homotopie près (cf. [2], 2.2, pp.10-11). En effet, le produit fibré $I^f = \{(x, \omega) \in X \times Y^{[0,1]} \mid \omega(0) = *\}$ a le type d'homotopie de X et donne lieu à la fibration suivante:

$$T^f \hookrightarrow I^f \xrightarrow{p} Y,$$

où $p : (x, \omega) \mapsto \omega(1)$ et $T^f = \{(x, \omega) \in I^f \mid \omega(1) = f(x) \text{ pour tout } x \in X\}$ est la fibre.
Notons $X(n)$ la fibre homotopique de la section de Postnikov $\alpha_n : X \to X[n]$. La fibration

$$X(n) \longrightarrow X \longrightarrow X[n]$$

induit une suite exacte longue en homotopie qui montre que
1. $X(n)$ est n-connexe,
2. l'inclusion $X(n) \to X$ induit un isomorphisme $\pi_k X(n) \cong \pi_k X$ pour tout $k > n$.
L'application γ_{n-1} de la tour de Postnikov induit une inclusion $\widehat{\gamma_{n-1}} : X[n] \to \widehat{X[n-1]}$ où

$$\widehat{X[n-1]} = I_{\gamma_{n-1}} / \{[x, t] = [x, 0] \mid x \in X[n],\ t \in [0, 1]\},$$

avec $I_{\gamma_{n-1}}$ le cylindre de l'application γ_{n-1} (qu'on obtient en amalgamant la partie supérieure de $X[n] \times [0, 1]$ sur $X[n-1]$ via γ_{n-1}). En effet, par construction, $\widehat{X[n-1]}$ contient $X[n-1]$ comme sous-espace et tous deux ont même type d'homotopie. On peut donc considérer la paire $(\widehat{X[n-1]}, X[n])$ qu'on conviendra de noter $(X[n-1], X[n])$.

Proposition 5.
Soient X un CW-complexe et $n \geq 2$ un entier. On a $\pi_{n+1}(X[n-1], X[n]) \cong \pi_n X$ et $\pi_k(X[n-1], X[n])$ trivial si $k \neq n+1$.

Preuve: Par inspection de la suite exacte en homotopie de la paire $(X[n-1], X[n])$. □

Proposition 6.
Soient X un CW-complexe simple et $n \geq 2$ un entier. L'homomorphisme d'Hurewicz

$$h_{n+1} : \pi_{n+1}(X[n-1], X[n]) \to H_{n+1}(X[n-1], X[n])$$

est un isomorphisme, de même que l'homomorphisme

$$\kappa^{n+1} : H_{n+1}(X[n-1], X[n]) \xrightarrow{h_{n+1}^{-1}} \pi_{n+1}(X[n-1], X[n]) \xrightarrow{\partial} \pi_n X[n] \xrightarrow{(\alpha_n)_*^{-1}} \pi_n X,$$

où ∂ est l'homomorphisme de connexion dans la suite exacte longue de la paire en homotopie et α_n la n-ième section de Postnikov. De plus, $H_k(X[n-1], X[n])$ est trivial pour tout $k \leq n$.

Preuve: Le CW-complexe $X[n]$ possède les même groupes d'homotopie que X jusqu'en dimension n et est $(n+1)$-anticonnexe, $X[n]$ est donc simple. Le théorème d'Hurewicz et la proposition précédente permettent de conclure. □

L'application κ^{n+1} appartient au groupe $\mathrm{Hom}(H_{n+1}(X[n-1], X[n]); \pi_n X)$. Considérons la décomposition du groupe de cohomologie $H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n X)$ donnée par le théorème des coefficients universels. On a la suite exacte courte scindée suivante:

$$\mathrm{Ext}(H_n(X[n-1], X[n]), \pi_n X) \rightarrowtail H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n X) \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Hom}(H_{n+1}(X[n-1], X[n]), \pi_n X).$$

Or d'après le lemme $H_n(X[n-1], X[n]) = 0$, de sorte que ρ est un isomorphisme et l'application κ^{n+1} peut être vue comme une classe de cohomologie appartenant au groupe $H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n X)$ via ρ^{-1}. Considérons encore l'inclusion j de $X[n-1]$ dans la paire $(X[n-1], X[n])$. Elle induit l'homomorphisme suivant en cohomologie:

$$j^* : H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n X) \to H^{n+1}(X[n-1]; \pi_n X).$$

On est maintenant en mesure de définir les **invariants de Postnikov** d'un CW-complexe simple.

Définition 2.
Soient X un CW-complexe simple et $n \geq 2$ un entier. Le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov ou k-invariant de X, noté k^{n+1}, est la classe de cohomologie

$$j^* \circ \rho^{-1}(\kappa^{n+1}) \in H^{n+1}(X[n-1]; \pi_n X).$$

Considérons un espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, n)$. D'après le théorème des coefficients universels en cohomologie, on a $H^n(K(G, n); G) \cong \mathrm{Hom}(H_n K(G, n), G) \cong \mathrm{Hom}(G, G)$. Rappelons que la **classe caractéristique** de l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, n)$ est la classe de cohomologie $u_n \in H^n(K(G, n); G)$ qui correspond à l'identité dans $\mathrm{Hom}(G, G)$. Le résultat suivant (cf. [6], Chap. V, Theorem 6.17, p.243) classifie certaines classes d'applications homotopes à l'aide de classes de cohomologie.

Théorème 7. (Eilenberg)
Soient X un CW-complexe simple, G un groupe abélien et $n \geq 2$ un entier. Les groupes

$$[X, K(G, n)] \text{ et } H^n(X; G)$$

sont isomorphes via $[f : X \to K(G, n)] \mapsto f^*(u_n)$, où $f^* : H^n(K(G, n); G) \to H^n(X; G)$ est l'induite de f et u_n désigne la classe caractéristique de $K(G, n)$.

Le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X, k^{n+1}, est une classe de cohomologie de $H^{n+1}(X[n-1]; \pi_n X)$. Donc d'après le théorème d'Eilenberg, il lui correspond une classe d'applications homotopes $[k]$ telle que $k^*(u_{n+1}) = k^{n+1}$. On dira que l'application k correspond à k^{n+1} par le théorème d'Eilenberg.

Lemme 8.
Soient X un CW-complexe simple et $n \geq 2$ un entier. La n-ième section de Postnikov, $X[n]$, a le type d'homotopie de la fibre homotopique de n'importe quelle application continue qui correspond au $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X par le théorème d'Eilenberg.

Preuve: Cf. [2], 6.2-6.3, pp.29-33. □

Théorème 9.
Soient X un CW-complexe simple, $n \geq 2$ un entier et $k : X[n-1] \to K(\pi_n X, n+1)$ une application continue qui correspond au $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X par le théorème d'Eilenberg. Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près (le carré du bas est un pullback homotopique):

$$\begin{tikzcd}
K(\pi_n X, n) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & K(\pi_n X, n) \arrow[d] \\
X[n] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & * \arrow[d] \\
X[n-1] \arrow[r, "k"'] & K(\pi_n X, n+1),
\end{tikzcd}$$

où la colonne de droite est la fibration des chemins de $K(\pi_n X, n+1)$.

Preuve: Le pullback de $* \to K(\pi_n X, n+1)$ et de k a le type d'homotopie de la fibre de k, donc de $X[n]$ d'après le lemme. □

Corollaire 10.
Soient X un CW-complexe simple et $n \geq 2$ un entier. Le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X est trivial si et seulement si $X[n]$ a le type d'homotopie du produit $X[n-1] \times K(\pi_n X, n)$.

Preuve: Le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov est trivial si et seulement si $X[n]$ a le type d'homotopie de la fibre homotopique T^* de l'application constante sur le point base $* : X[n-1] \to K(\pi_n X, n+1)$. Or, par définition, pour toute application $f : X \to Y$, on a $T^f = \{(x, \omega) \in X \times Y^{[0,1]} \mid \omega(0) = * \text{ et } \omega(1) = f(x) \text{ pour tout } x \in X\}$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} X[n] \simeq T^* &= \{(x,\omega) \in X[n-1] \times PK(\pi_n X, n+1) \mid \omega(0) = \omega(1) = *\} \\ &= X[n-1] \times \Omega K(\pi_n X, n+1) \\ &\simeq X[n-1] \times K(\pi_n X, n). \end{aligned}$$

□

2. Construction de X

Dans la suite, on notera K_n l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n)$. Considérons l'ensemble des classes d'applications homotopes $[K_2 \times K_2, K_4]$. D'après le théorème d'Eilenberg, cet ensemble est en bijection avec le groupe de cohomologie $H^4(K_2 \times K_2; \pi_4 K_4)$ qui est isomorphe à $H^4(K_2; \mathbb{F}_2) \otimes \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 \otimes H^4(K_2; \mathbb{F}_2) \oplus H^2(K_2; \mathbb{F}_2) \otimes H^2(K_2; \mathbb{F}_2)$ par le théorème des coefficients universels. En fait, si l'on considère les classes caractéristiques $u, v \in H^2(K_2; \mathbb{F}_2)$ des deux facteurs ci-dessus, on a

$$[K_2 \times K_2, K_4] \longleftrightarrow \mathbb{F}_2[u^2 \otimes 1] \oplus \mathbb{F}_2[1 \otimes v^2] \oplus \mathbb{F}_2[u \otimes v],$$

où $u \otimes v$ n'est autre que le produit cup $u \otimes 1 \cup 1 \otimes v$ dans l'anneau de cohomologie $H^*(K_2 \times K_2; \mathbb{F}_2)$. On notera u^2, v^2 et uv au lieu de $u^2 \otimes 1$, $1 \otimes v^2$ et $u \otimes v$ respectivement. Considérons l'élément uv ainsi qu'un représentant $k : K_2 \times K_2 \to K_4$ de la classe d'applications homotopes qui lui est associée. Notons X la fibre de l'application k. On a donc la fibration

$$X \xrightarrow{\alpha} K_2 \times K_2 \xrightarrow{k} K_4.$$

Cette dernière induit une suite exacte longue en homotopie qui devient

$$0 \longrightarrow \pi_4 K_4 \xrightarrow{\partial} \pi_3 X \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_2 X \xrightarrow{\alpha_*} \pi_2(K_2 \times K_2) \longrightarrow 0.$$

Par exactitude, les homomorphismes ∂ et α_* sont des isomorphismes. Ainsi l'espace X ne possède que deux groupes d'homotopie non-triviaux et ce sont bien $\pi_2(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\pi_3(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, comme annoncé en début d'article. L'élément uv est le seul invariant de Postnikov non-trivial de X.

3. Ni K_2 ni K_3 ne sont des facteurs directs de X

Le résultat suivant affirme que les invariants de Postnikov d'un produit de deux espaces sont déterminés par les invariants de Postnikov de chaque espace.

Lemme 11.
Soient X et Y deux CW-complexe simples, $n \geq 2$ un entier et $k^{n+1}(X) \in H^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X))$, $k^{n+1}(Y) \in H^{n+1}(Y[n-1]; \pi_n(Y))$ et $k^{n+1}(X \times Y) \in H^{n+1}((X \times Y)[n-1]; \pi(X \times Y))$ les $(n+1)$-ièmes invariants de Postnikov de X, Y et $X \times Y$ respectivement. On a la relation suivante:

$$k^{n+1}(X \times Y) = H^{n+1}(p_1[n-1]; \pi_n(i_1))(k^{n+1}(X)) + H^{n+1}(p_2[n-1]; \pi_n(i_2))(k^{n+1}(Y)),$$

où $p_1[n-1] : (X \times Y)[n-1] \to X[n-1]$, $p_2[n-1] : (X \times Y)[n-1] \to Y[n-1]$ sont induites par les projections évidentes et $i_1 : X \to X \times Y$, $i_2 : Y \to X \times Y$ sont les inclusions évidentes.

Preuve: Par définition des invariants de Postnikov on a $k^{n+1}(X) = j_X^* \rho^{-1}(\kappa^{n+1}(X))$, $k^{n+1}(Y) = j_Y^* \rho^{-1}(\kappa^{n+1}(Y))$, $k^{n+1}(X \times Y) = j_{X \times Y}^* \rho^{-1}(\kappa^{n+1}(X \times Y))$ où $j_X^* : H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n(X)) \to H^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X))$ est induite par l'inclusion de $X[n-1]$ dans la paire $(X[n-1], X[n])$, où ρ

est l'isomorphisme donné par le théorème des coefficients universels $H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n(X)) \to \mathrm{Hom}(H_{n+1}(X[n-1], X[n]), \pi_n(X))$ et où $\kappa^{n+1}(X)$ est l'isomorphisme donné par la composition suivante:

$$H_{n+1}(X[n-1], X[n]) \xrightarrow{h_{n+1}^{-1}} \pi_{n+1}(X[n-1], X[n]) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X[n]) \xrightarrow{(\alpha_n)_*^{-1}} \pi_n(X),$$

avec h_{n+1} l'homomorphisme d'Hurewicz, ∂ l'homomorphisme de connection et α_n la n-ième section de Postnikov. On procède de façon analogue pour définir les invariants de Postnikov de Y et $X \times Y$. On vérifie immédiatement qu'on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n(X)) \arrow[r, "j_X^*"] \arrow[d, "H^{n+1}(q_1[n-1]; \pi_n(i_1))"'] & H^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X)) \arrow[d, "H^{n+1}(p_1[n-1], \pi_n(i_1))"] \\
H^{n+1}((X \times Y)[n-1], (X \times Y)[n]; \pi_n(X \times Y)) \arrow[r, "j_{X\times Y}^*"'] & H^{n+1}((X \times Y)[n-1]; \pi_n(X \times Y)),
\end{tikzcd}$$

où q_1 désigne la projection de paires évidente, p_1 la projection évidente et i_1 l'injection évidente. Par naturalité du théorème des coefficients universels on le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n(X)) \arrow[r, "\rho", "\cong"'] \arrow[d, "H^{n+1}(q_1[n-1]; \pi_n(i_1))"'] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(X[n-1], X[n]), \pi_n(X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(H_{n+1}(q_1[n-1]), \pi_n(i_1))"] \\
H^{n+1}((X \times Y)[n-1], (X \times Y)[n]; \pi_n(X \times Y)) \arrow[r, "\cong", "\rho"'] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}((X \times Y)[n-1], (X \times Y)[n]), \pi_n(X \times Y)).
\end{tikzcd}$$

On a $H^{n+1}(p_1[n-1]; \pi_n(i_1))(k^{n+1}(X)) = H^{n+1}(p_1[n-1]; \pi_n(i_1)) j_X^* \ rho^{-1}(\kappa^{n+1}(X))$ par définition de l'invariant de Postnikov, avec $\kappa^{n+1}(X) = (\alpha_n)_*^{-1} \partial h_{n+1}^{-1}$. Par commutativité des deux diagrammes ci-dessus on a

$$H^{n+1}(p_1[n-1]; \pi_n(i_1)) j_X^* \rho^{-1} = j_{X\times Y}^* \rho^{-1} \mathrm{Hom}(H_{n+1}(q_1[n-1]), \pi_n(i_1)).$$

Ainsi $H^{n+1}(p_1[n-1]; \pi_n(i_1))(k^{n+1}(X)) = j_{X\times Y}^* \rho^{-1}(\pi_n(i_1)(\alpha_n)_*^{-1} \partial h_{n+1}^{-1} H_{n+1}(q_1[n-1]))$. Or on vérifie facilement que $\pi_n(i_1)(\alpha_n)_*^{-1} \partial h_{n+1}^{-1} H_{n+1}(q_1[n-1]) = i_{\pi_n(X)} p_{\pi_n(X)} \kappa^{n+1}(X \times Y)$ où $i_{\pi_n(X)}$ désigne l'inclusion de $\pi_n(X)$ dans $\pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ et $p_{\pi_n(X)}$ la projection de $\pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ sur $\pi_n(X)$. Finalement on a

$$H^{n+1}(p_1[n-1]; \pi_n(i_1))(k^{n+1}(X)) = j_{X\times Y}^* \rho^{-1}(i_{\pi_n(X)} p_{\pi_n(X)} \kappa^{n+1}(X \times Y)).$$

Un calcul similaire montre que

$$H^{n+1}(p_2[n-1]; \pi_n(i_2))(k^{n+1}(Y)) = j_{X\times Y}^* \rho^{-1}(i_{\pi_n(Y)} p_{\pi_n(Y)} \kappa^{n+1}(X \times Y)).$$

La somme de ces deux égalités fournit le résultat cherché. □

Proposition 12.
Ni K_2 ni K_3 ne sont des facteurs directs de X.

Preuve: Supposons que X contienne K_2 en facteur. Alors $X \simeq K_2 \times Y$ avec $\pi_2(Y) \cong \pi_3(Y) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comparons les invariants de Postnikov de X et de $K_2 \times Y$. D'une part, l'invariant de Postnikov de X est uv par construction. D'autre part, d'après le lemme précédent, le seul invariant de Postnikov non-trivial de $K_2 \times Y$ est un élément de $\{0, u^2, v^2\}$. Notons $k' : K_2 \times K_2 \to K_4$ l'application qui le représente. On a donc le diagramme commutatif à homotopie près suivant:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\simeq"'] & K_2 \times K_2 \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\simeq"', "\varphi"] & K_4 \arrow[d, equal] \\
K_2 \times Y \arrow[r, "\alpha"'] & K_2 \times K_2 \arrow[r, "k'"'] & K_4.
\end{tikzcd}$$

Supposons que k' représente u^2. En observant le carré de droite, il résulte que $\varphi^* : H^*(K_2 \times K_2; \mathbb{F}_2) \to H^*(K_2 \times K_2; \mathbb{F}_2)$ est un isomorphisme d'anneaux tel que $\varphi^*(u)^2 = \varphi^*(u^2) = uv$. Puisque φ^* est un isomorphisme, supposons que $\varphi^*(u) = u$. Alors $u^2 = uv$, ce qui est absurde. Supposons que $\varphi^*(u) = v$. Alors $v^2 = uv$, ce qui est également absurde. De même, si l'on suppose que k' représente 0 ou v^2, on obtient une contradiction. Donc X ne contient pas K_2 en facteur.
Supposons que X contienne K_3 en facteur. Alors $X \simeq Y \times K_3$ avec $\pi_2(Y) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc $Y \simeq K_2 \times K_2$, de sorte que $X \simeq K_2 \times K_2 \times K_3$. Par le lemme précédent, l'invariant de Postnikov de $K_2 \times K_2 \times K_3$ est trivial. Il s'ensuit que l'invariant de Postnikov de X est trivial, ce qui est absurde.
□

4. K_2 est un rétract de X

Considérons l'application $i_1 : K_2 \to K_2 \times K_2$ donnée par l'inclusion dans le premier facteur. On a clairement que $i_1^*(u) = u$ et $i_1^*(v) = 0$. Ainsi $i_1^*(uv) = i_1^*(u)i_1^*(v) = 0$. En d'autres termes on a $ki_1 \simeq *$, de sorte que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\alpha"] \\
K_2 \arrow[ur, dotted, "\theta"] \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, bend right, "*"'] & K_2 \times K_2 \arrow[d, "k"] \\
& K_4.
\end{tikzcd}$$

Il existe donc une application $\theta : K_2 \to X$ telle que $\alpha\theta \simeq i_1$. Considérons la projection sur le premier facteur $p_1 : K_2 \times K_2 \to K_2$. On a $(p_1\alpha\theta)^*(u) = \theta^*\alpha^*p_1^*(u) = i_1^*p_1^*(u) = u$. En d'autres termes $p_1\alpha\theta$ est homotope à l'identité par le théorème d'Eilenberg et K_2 est un rétract de X via $p_1\alpha$. Remarquons que la composée $p_2\alpha$ est également une rétraction de X sur K_2 dès lors qu'on relève dans X l'inclusion dans le second facteur au lieu de i_1.

5. Discussion

On a donc construit deux rétractions de X sur K_2, à savoir les composées de $\alpha : X \to K_2 \times K_2$, la seconde section de Postnikov de X, avec les projections sur l'un des deux facteurs. Ainsi l'algèbre graduée de cohomologie $H^*(K_2; \mathbb{F}_2)$ s'injecte dans $H^*(X; \mathbb{F}_2)$, bien que X ne contienne pas K_2 en facteur. C'est donc un exemple complémentaire à celui de F. R. Cohen et F. P. Peterson. En effet, l'application exhibée par ces derniers est lacée et induit un monomorphisme non-scindé, ce qui n'est pas le cas dans notre exemple où les rétractions ne sont en fait même pas des H-applications (l'invariant de Postnikov de X n'est pas primitif).

L'espace X possède encore une autre propriété intéressante qui se déduit de ce qui précède. On sait par les travaux de H. Cartan [1] que le groupe gradué d'homologie entière de l'espace K_2 possède des éléments d'ordre arbitrairement grand. Par exemple $H_{2^r}(K_2; \mathbb{Z})$ possède un élément d'ordre 2^r. Les résultats ci-dessus affirment que l'induite en homologie entière de $\theta : K_2 \to X$ est une injection. Donc l'homologie entière de X possède également de la 2-torsion arbitrairement grande. C'est un exemple d'espace ne possédant qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non-triviaux, qui n'est pas un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane et qui ne possède pas d'exposant universel pour ses groupes d'homologie entière. A ma connaissance, on ne trouve pas trace d'un tel exemple dans la littérature.

Pour conclure, considérons tous les espaces qui ont les mêmes groupes d'homotopie que ceux de X (on altère l'invariant de Postnikov pour recoller K_3 sur $K_2 \times K_2$). On peut montrer qu'il en existe six (à équivalence d'homotopie près), dont deux qui contiennent K_2 en facteur et trois pour lesquels K_2 est un rétract. Il reste donc un espace (celui dont l'invariant de Postnikov est $u^2 + uv + v^2$) pour lequel on peut montrer que K_2 n'est pas un rétract.

6. Bibliographie

[1] Henri Cartan, *Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie*, Séminaire H. Cartan, Ecole Norm. Sup., 1955

[2] Alain Clément, *Sur une décomposition des invariants de Postnikov*, Travail de diplôme, Université de Lausanne, 1998

[3] Frederick R. Cohen, Frank P. Peterson, *Some free module over the cohomology of $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2)$: A short walk in the Alps*, Conferences on Algebraic Topology (Proceedings), Arolla, Switzerland, 1999

[4] John McCleary, *User's Guide to Spectral Sequences*, Mathematics Lecture Series, Publish or Perish, 1985

[5] Claude Schochet, *A two-stage Postnikov system where $E_2 \neq E_\infty$ in the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Transactions of the AMS, *vol. 157*, pp. 113-118, 1971

[6] George W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics, *vol. 61*, Springer-Verlag, 1978