Séminaire de
topologie algébrique

Décembre 1999
Janvier 2000

Les foncteurs dérivés de la limite des tours de groupes

On peut généraliser des constructions universelles comme le produit, le pullback et leurs constructions duales à l'aide de **limites directes et inverses**. Cette construction fonctorielle donne lieu, sous quelques hypothèses légères, aux **foncteurs dérivés de la limite**. Avant d'étudier ces constructions dans le cas des tours de groupes abéliens, nous allons mettre en place la théorie des **δ-foncteurs** introduite par A. Grothendieck dans [Gr]. Ce point de vue va nous permettre de calculer assez facilement tous les foncteurs dérivés à droite de la limite inverse des tours de groupes abéliens. Ensuite, nous verrons que les résultats obtenus, en particulier la suite exacte à six termes $\varprojlim$-$\varprojlim^1$, se généralisent au cas des tours de groupes non-nécessairement abéliens. Finalement, nous appliquerons nos résultats aux fantômes entre deux types d'homotopie [McG].

Table des matières

1 Systèmes directs et inverses, limites.

1.1 Définitions

1 Définition. Tout ensemble quasi-ordonné $(I, \leqslant)$ (i.e. $\leqslant$ est réflexive et transitive) donne lieu à une catégorie, qu'on note également I, constituée des éléments de l'ensemble I comme objets et d'un morphisme $i \to j$ pour tout $i \leqslant j$. On dit d'une catégorie ainsi obtenue qu'elle est **quasi-ordonnée**.

2 Exemples. L'ensemble $\mathbb{N}$ définit la catégorie $\cdots \to \bullet \to \bullet$. L'ensemble $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$, muni du quasi-ordre $(a,b) \leqslant (a',b')$ si et seulement si $a \leqslant a'$ et $b \leqslant b'$, définit la catégorie $\bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$. Un ensemble I muni du quasi-ordre trivial, i.e. $i \leqslant j$ si et seulement si $i = j$, définit une catégorie **discrète**.

3 Définition. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et I une catégorie quasi-ordonnée. Un foncteur (resp. cofoncteur) $D : I \to \mathcal{C}$ est appelé un **système direct** (resp. **inverse**).

4 Remarque. Soit $D : I \to \mathcal{C}$ un système direct (resp. inverse), on a $D(j \to k)D(i \to j) = D(i \to j \to k)$ (resp. $D(i \to j)D(j \to k) = D(i \to j \to k)$). Remarquons encore que l'on pourrait se passer des deux définitions ci-dessus pour n'en garder qu'une, en effet, un système inverse $I \to \mathcal{C}$ peut être vu comme un système direct $I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ via l'identification évidente de I et I^{op} (il faut encore se convaincre que si I est la catégorie obtenue à partir de l'ensemble quasi-ordonné $(I, \leqslant)$ alors I^{op} s'obtient à partir de l'ensemble quasi-ordonné $(I, \geqslant)$ où $j \geqslant i$ si et seulement si $i \leqslant j$).

5 Exemples. Soit $\mathcal{AG}$ la catégorie des groupes abéliens. Un système inverse $\mathbb{N} \to \mathcal{AG}$ est appelé une **tour de groupes abéliens**. Une telle tour est la donnée de groupes abéliens et d'homomorphismes comme suit :

$$\cdots \longrightarrow G_{i+1} \xrightarrow{f_i} G_i \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_0} G_0.$$

Soient X un espace topologique et I la catégorie donnée par la topologie de X, i.e. formée des parties ouvertes de X quasi-ordonnée par l'inclusion. Un système inverse $I \to \mathcal{C}$ est généralement appelé un **préfaisceau**.

6 Définition. Soit $D : I \to \mathcal{C}$ un système direct (resp. inverse). Soient encore L un objet de $\mathcal{C}$ et $L : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ le **foncteur constant** (i.e. qui envoie tout objet de $\mathcal{I}$ sur L et tout morphisme sur id_L). Une transformation naturelle $u : D \to L$ (resp. $u : L \to D$) est **universelle** (resp. **co-universelle**) si pour toute transformation naturelle $\eta : D \to L'$ (resp. $\eta : L' \to D$), avec L' un foncteur constant, il existe une unique transformation naturelle $\theta : L \to L'$ (resp. $\theta : L' \to L$) qui fait commuter le diagramme de gauche (resp. de droite) suivant :

$$\begin{tikzcd} L' & \\ D \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "u"'] & L, \arrow[ul, dotted, "\theta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L' \arrow[dl, dotted, "\theta"'] \arrow[d, "\eta"] \\ L \arrow[r, "u"'] & D. \end{tikzcd}$$

7 Proposition. *Avec les mêmes hypothèses que dans la définition ci-dessus, une transformation universelle $u : D \to L$ (resp. co-universelle $u : L \to D$) est essentiellement unique. Précisément, si $u' : D \to L$ (resp. $u' : L \to D$) est une transformation universelle (resp. co-universelle) alors il* *existe une unique équivalence naturelle $\varphi : L \simeq L'$ qui fait commuter le diagramme de gauche (resp. de droite) suivant :*

$$\begin{tikzcd} L' \\ D \arrow[u, "u'"] \arrow[r, "u"'] & L, \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[ul, phantom, "\simeq"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & L' \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "u'"] \arrow[dl, phantom, "\simeq"] \\ L \arrow[r, "u"'] & D. \end{tikzcd}$$

On dit que l'objet L est la **limite directe** *(resp.* **inverse***) du système direct (resp. inverse) $D : I \to \mathcal{C}$, on note $L = \varinjlim D$ (resp. $L = \varprojlim D$).*

Démonstration. D'une part, puisque $u : D \to L$ est universelle, il existe une unique transformation naturelle $\varphi : L \to L$ telle que $\varphi u = u'$. D'autre part, puisque $u' : D \to L$ est universelle, il existe une unique transformation naturelle $\psi : L \to L$ telle que $\psi u' = u$. Ainsi on a $\psi\varphi u = u$, de sorte que $\psi\varphi = id$ puisque u est universelle. De même, par universalité de u', on a $\varphi\psi = id$. Donc φ est une équivalence naturelle. On procède de même pour une transformation co-universelle. □

Soient $D : I \to \mathcal{C}$ et $D' : I \to \mathcal{C}$ deux systèmes directs (resp. inverse). Soit encore $d : D \to D'$ une transformation naturelle des foncteurs (resp . cofoncteurs) D et D'. Supposons qu'il existe des limites à ces systèmes. Par universalité il existe une unique transformation naturelle (entre foncteurs constants) $\varinjlim d : \varinjlim D \to \varinjlim D'$ (resp. $\varprojlim d : \varprojlim D \to \varprojlim D'$) telle que le diagramme de gauche (resp. de droite) commute :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d"'] & \varinjlim D \arrow[d, "\varinjlim d"] \\ D' \arrow[r, "u'"'] & \varinjlim D', \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varprojlim D \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varprojlim d"'] & D \arrow[d, "d"] \\ \varprojlim D' \arrow[r, "u'"'] & D', \end{tikzcd}$$

où u et u' sont les transformations universelles des limites. Il est clair que ces transformations naturelles induisent des morphismes dans la catégorie $\mathcal{C}$.

8 Proposition. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et I une catégorie quasi-ordonnée. Considérons la catégorie des systèmes directs (resp inverses) de source I et de cible $\mathcal{C}$. Avec les définitions qui précèdent, $\varinjlim(-)$ (resp. $\varprojlim(-)$) définit un* **foncteur** *sur cette catégorie à valeurs dans la catégorie $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Routine ! □

1.2 Exemples classiques

Soit $D : \{\bullet\ \bullet\} \to \mathcal{C}$ un système direct (resp. inverse). La limite directe (resp. inverse) du système D, si elle existe, est le **coproduit** (resp. **produit**) dans $\mathcal{C}$. En effet, la limite directe du système direct D est l'objet L de $\mathcal{C}$ donné par la transformation naturelle universelle $u : D \to L$ qui est telle que pour toute transformation naturelle $\eta : D \to L'$, avec L' un foncteur constant à valeurs dans $\mathcal{C}$, il existe une unique transformation naturelle $\theta : L \to L'$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} L' & \\ D \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "u"'] & L. \arrow[ul, dotted, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

Ainsi, soient C_1, C_2 des objets de $\mathcal{C}$, L' un objet de $\mathcal{C}$ et $\eta_i : C_i \to L'$ deux morphismes ($i = 1, 2$). On a donc les diagrammes commutatifs suivants, induits par le diagramme ci-dessus :

$$\begin{tikzcd} L' & \\ C_i \arrow[u, "\eta_i"] \arrow[r, "u_i"'] & L, \arrow[ul, dotted, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

avec θ unique. L'objet L est bien le coproduit de C_1 et C_2 dans la catégorie $\mathcal{C}$. On procède de même pour le produit de deux objets (on prend la limite inverse), ainsi que pour le (co)produit d'une collection arbitraire d'objets de $\mathcal{C}$ (on prend une catégorie discrète arbitraire comme système direct ou inverse).

On prouve de même que la limite directe (resp. inverse) du système $D : \{\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet\} \to \mathcal{C}$, si elle existe, est le pushout (resp pullback) dans la catégorie $\mathcal{C}$. En effet, soit $u : L \to D$ la transformation naturelle entre le système inverse D et le foncteur constant de la limite inverse L. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, equal] & C_1 \arrow[d] \\ L \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, equal] & C_2 \\ L \arrow[r, "u_3"] & C_3. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

En d'autres termes, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d] \\ C_3 \arrow[r] & C_2, \end{tikzcd}$$

avec la propriété universelle du pullback.

1.3 Le cas des tours de groupes abéliens

9 Théorème. *Soit $D : I \to \mathcal{AG}$ un système direct de groupes abéliens. La limite directe $\varinjlim D$ est le quotient de $\bigoplus_{k \in I} D(k)$ par le sous-groupe engendré par tous les éléments de la forme $(\iota_i -$*

$\iota_j D(i \to j))(x_i)$ où $x_i \in D(i)$, $i \to j$ est un morphisme de I et ι_i est l'inclusion canonique $D(i) \hookrightarrow \bigoplus_{k\in I} D(k)$. Une transformation naturelle est donnée par

$$u_i : D(i) \overset{\iota_i}{\hookrightarrow} \textstyle\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} D(k) \xrightarrow{proj} \varinjlim D,$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soit $D : I \to \mathcal{AG}$ un système inverse de groupes abéliens. La limite inverse $\varprojlim D$ est donnée par

$$\{x = \{x_k\} \in \prod_{k\in I} D(k) \mid x_i = D(i \to j)x_j \text{ pour tout morphisme } i \to j \text{ de } I\}.$$

Une transformation naturelle est donnée par

$$u_i : \varprojlim D \overset{can.}{\hookrightarrow} \textstyle\prod_{k\in\mathbb{N}} D(k) \xrightarrow{proj} D(i),$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. En particulier, il existe toujours de telles limites.

Démonstration. Une preuve pour la limite directe est donnée dans [Dold] Proposition 5.7, p.274. Donnons une preuve pour la limite inverse. Soit $\eta : L' \to D$ une transformation naturelle avec L' un foncteur constant. Par universalité du produit il existe un homomorphisme θ' qui fait commuter le diagramme suivant pour tout $i \leqslant j$:

$$\begin{tikzcd}
 & & L' \arrow[dll, dotted, bend right, "\theta"'] \arrow[dl, "\theta'"'] \arrow[d, "\eta_i"] \arrow[dr, bend left, "\eta_j"] & \\
\varprojlim D \arrow[r, hook, "\text{can.}"] & \prod_{k\in\mathbb{N}} D(k) \arrow[r, two heads, "p_i"] \arrow[drr, bend right, "p_j"'] & D(i) & \\
 & & & D(j). \arrow[ul, "D(i\to j)"']
\end{tikzcd}$$

Il faut donc juste vérifier que θ' se restreint à θ i.e. $\operatorname{im}\theta' \subset \varprojlim D$ i.e. $p_i x = D(i \to j)p_j x$ pour tout $x = \theta' z \in \operatorname{im}\theta'$. Par commutativité on a bien $p_i x = p_i\theta' z = \eta_i z = D(i \to j)\eta_j z = D(i \to j)p_j\theta' z = D(i \to j)p_j x$. □

10 Remarque. Ce résultat se généralise très facilement à tous les systèmes direct et inverse dans une catégorie abélienne (e.g. les modules ou les complexes).

Nous allons nous intéresser plus particulièrement au cas des tours de groupes abéliens.

11 Corollaire. *Soit $D : \mathbb{N} \to \mathcal{AG}$ une tour de groupes abéliens (système inverse). Considérons l'action du groupe $\prod_{k\in\mathbb{N}} D(k)$ sur lui-même donnée par*

$$(g_1, g_2, g_3, \dots) \cdot (x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1 + g_1 - D(1 \to 2)g_2, x_2 + g_2 - D(2 \to 3)g_3, \dots).$$

La limite inverse $\varprojlim D$ est le stabilisateur de $(0, 0, 0, \dots)$.

Démonstration. Rappelons que le stabilisateur de $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ est le sous-groupe formé des $g = (g_1, g_2, g_3, \dots)$ tels que $g \cdot x = x$. Dans notre cas, si $(g_1, g_2, g_3, \cdots)$ est un stabilisateur de $(0, 0, 0, \dots)$ cela signifie que $(g_1 - D(1 \to 2)g_2, g_2 - D(2 \to 3)g_3, g_3 - D(3 \to 4)g_4, \dots)$ vaut $(0, 0, 0, \dots)$, de sorte que $g_i = D(i \to j)g_j$ pour tout $i \leqslant j$. $\square$

12 Remarque. Nous verrons que l'orbite de $(0, 0, 0, \dots)$ détermine complètement le premier foncteur dérivé $\varprojlim^1$ de la limite inverse d'une tour de groupes abéliens. De plus, nous verrons que l'action définie ci-dessus se généralise très facilement aux groupes non-nécessairement abéliens et permet ainsi une généralisation du foncteur dérivé de la limite au cas des tours de groupes.

13 Exemple. Soit G un groupe abélien. Considérons la tour de groupes abéliens suivante :

$$\cdots \longrightarrow G \xrightarrow{=} G \xrightarrow{=} G \xrightarrow{=} G.$$

Montrons que sa limite inverse est G. Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \varprojlim$, alors par le théorème ci-dessus on doit avoir $x_i = x_{i+1}$ pour tout i, ainsi la limite directe est formée des éléments de la forme $(x, x, x, \dots)$ pour tout $x \in G$, elle est donc clairement isomorphe à G.

14 Exemple. Considérons la tour de groupes abéliens suivante :

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z}.$$

Montrons que sa limite inverse est triviale. Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \varprojlim$, alors par le thèorème ci-dessus on doit avoir $x_i = 3x_{i+1}$ pour tout i. Soit k le plus petit entier tel que $x_k \neq 0$. Si $k > 0$ alors $0 = x_{k-1} = 3x_k$ et $x_k = 0$, ce qui contredit la minimalité de k. Si $k = 0$ alors $x_0 = m3^r$ avec $m, r \geqslant 1$ et $3 \not| m$. Ainsi $x_r = m$, or $x_r = 3x_{r+1}$, de sorte que $3|m$, ce qui est absurde. Ainsi $x_i = 0$ pour tout i.

15 Lemme. *Soit $d : D \to D'$ une transformation naturelle de tours de groupes abéliens $D, D' : \mathbb{N} \to \mathcal{AG}$ (systèmes inverses). Si on identifie $\varprojlim D$, resp. $\varprojlim D'$, aux stabilisateurs de $(0, 0, 0, \dots)$ pour l'action de $\prod_{k\in\mathbb{N}} D(k)$, resp. $\prod_{k\in\mathbb{N}} D'(k)$, définie plus haut, alors $\varprojlim d : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (d_1(x_1), d_2(x_2), d_3(x_3), \dots)$. En particulier, $\ker \varprojlim d = \prod_{k\in\mathbb{N}} \ker d_k$.*

Démonstration. On vérifie immédiatement que d'après le théorème 9 et le corollaire 11, les diagrammes suivants commutent pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{tikzcd} Stab(0) \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "\varprojlim d"'] & D(i) \arrow[d, "d_i"] \\ Stab(0) \arrow[r, "u'_i"'] & D'(i). \end{tikzcd}$$

Montrons que $\ker \varprojlim d = \prod_{k\in\mathbb{N}} \ker d_k$. Soit $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ker \varprojlim d$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $d_i u_i(x) = d_i(x_i) = 0$ par commutativité du diagramme ci-dessus, i.e. $x_i \in \ker d_i$ pour tout i. Soit $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que $x_i \in \ker d_i$ pour tout i, alors on a $\varprojlim d(x) = (d_i(x_i))_{i\in\mathbb{N}} = 0$, i.e. $x \in \ker \varprojlim d$. $\square$

16 Remarque. On a toujours $\mathrm{im} \varprojlim d \subset \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{im}\, d_k$ mais de manière générale on n'a pas $\prod_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{im}\, d_k \subset \mathrm{im} \varprojlim d$. En effet, soit $x' = (x'_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{im}\, d_k$, alors $x'_i = d_i(x_i)$ pour tout i, mais rien ne permet d'affirmer que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ appartient bien au stabilisateur de 0.

17 Théorème. *Le foncteur* $\varprojlim(-)$ *est exact à gauche sur la catégorie des tours de groupes abéliens. En d'autres termes, toute suite exacte courte de tours de groupes abéliens* $0 \to D'' \to D \to D' \to 0$ *induit une suite exacte de groupes abéliens* $0 \to \varprojlim D'' \to \varprojlim D \to \varinjlim D'$. *En particulier,* $\varprojlim(-)$ *préserve les monomorphismes.*

Démonstration. Vérifions à l'aide du lemme ci-dessus l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \varprojlim D'' \xrightarrow{d''_*} \varprojlim D \xrightarrow{d_*} \varprojlim D'.$$

Commençons par montrer que d''_* est injective : soit $x'' = (x''_i) \in \ker d''_*$, d'après le lemme on a $x''_i \in \ker d''_i = 0$ pour tout i, de sorte que $x'' = 0$ et $\ker d''_* = 0$. Montrons que $\operatorname{im} d''_* \subset \ker d_*$: soit $x = (x_i) \in \operatorname{im} d''_*$, alors $x_i = d''_i(x''_i)$ et $d_i(x_i) = d_i d''_i(x''_i) = 0$ pour tout i, ainsi $x \in \ker d_*$. Montrons que $\ker d_* \subset \operatorname{im} d''_*$: soit $x = (x_i) \in \ker d_*$, alors $x_i \in \ker d_i = \operatorname{im} d''_i$ et $x_i = d''_i(x''_i)$ pour tout i ; il faut encore montrer que $x'' = (x''_i) \in \varprojlim D''$ i.e. que $x''_i = D''(i \to i+1)x''_{i+1}$ pour tout i : on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
D''(i+1) \arrow[r, "d''_{i+1}"] \arrow[d, "D''(i\to i+1)"'] & D(i+1) \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "D(i\to i+1)"] & D'(i+1) \arrow[d, "D'(i\to i+1)"] \\
D''(i) \arrow[r, "d''_i"'] & D(i) \arrow[r, "d_i"'] & D'(i),
\end{tikzcd}$$

avec d''_i et d''_{i+1} injectifs et $x_i = D(i \to i+1)x_{i+1}$ par hypothèse. Ainsi on a $d''_i D''(i \to i+1)x''_{i+1} = D(i \to i+1)d''_{i+1}x''_{i+1} = D(i \to i+1)x_{i+1} = x_i = d''_i x''_i$, d'où $x''_i = D''(i \to i+1)x''_{i+1}$ par injectivité de d''_i. □

18 Remarque. Nous verrons qu'il existe un moyen de "mesurer" à quel point la suite exacte induite n'est pas courte grâce au premier foncteur dérivé $\varprojlim^1$.

19 Exemple. Considérons la tour de groupes abéliens de l'exemple 13 pour $G = \mathbb{Z}/2$ ainsi que celle de l'exemple 14. La suite (verticale) de tours (horizontales) suivante est clairement exacte :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, "2"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, "2"'] & \mathbb{Z}. \arrow[d, "2"'] \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, "\text{red.}"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, "\text{red.}"'] & \mathbb{Z}. \arrow[d, "\text{red.}"'] \\
\cdots \arrow[r, equal] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{Z}/2 \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

La suite de limites inverses $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ est exacte mais pas courte !

2 Les foncteurs dérivés à droite de la limite inverse

2.1 La théorie de A. Grothendieck : les δ-foncteurs

20 Définition. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes. Un **δ-foncteur homologique** (resp. **cohomologique**) F est une famille de foncteurs additifs $F_n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (resp. $F^n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$), avec $F_n = 0$ (resp. $F^n = 0$) si $n < 0$, telle que pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$ il existe des morphismes de connexion $\partial_n : F_nC \to F_{n-1}A$ (resp. $\partial^n : F^nC \to F^{n+1}A$) qui vérifient les deux conditions suivantes :
1. la suite longue

$$\cdots \longrightarrow F_{n+1}C \xrightarrow{\delta_{n+1}} F_nA \longrightarrow F_nB \longrightarrow F_nC \xrightarrow{\delta_n} F_{n-1}A \longrightarrow \cdots$$

$$\text{(resp.} \qquad \cdots \longrightarrow F^{n-1}C \xrightarrow{\delta^{n-1}} F^nA \longrightarrow F^nB \longrightarrow F^nC \xrightarrow{\delta^n} F^{n+1}A \longrightarrow \ldots)$$

est exacte. En particulier F_0 (resp F^0) est exact à droite (resp. gauche).
2. pour tout morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

les diagrammes suivants commutent pour tout n :

$$\begin{tikzcd} F_nC \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d] & F_{n-1}A \arrow[d] \\ F_nC' \arrow[r, "\delta_n"'] & F_{n-1}A' \end{tikzcd} \quad \text{resp.} \quad \begin{tikzcd} F^nC \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d] & F^{n+1}A \arrow[d] \\ F^nC' \arrow[r, "\delta^n"'] & F^{n+1}A'. \end{tikzcd}$$

21 Exemple. L'homologie est un δ-foncteur homologique de la catégorie des complexes de chaine dans la catégorie des groupes abéliens. La cohomologie est un δ-foncteur cohomologique de la catégorie des complexes de cochaine dans la catégorie des groupes abéliens.

22 Définition. Soient F et G deux δ-foncteurs homologiques (resp. cohomologiques). Un **morphisme de δ-foncteurs** $f : F \to G$ est une famille de transformations naturelles $f_n : F_n \to G_n$ (resp. $f^n : F^n \to G^n$) telle que pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$ les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} F_nC \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "f_n"'] & F_{n-1}A \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ G_nC \arrow[r, "\delta_n"'] & G_{n-1}A \end{tikzcd} \quad \text{resp.} \quad \begin{tikzcd} F^nC \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "f^n"'] & F^{n+1}A \arrow[d, "f^{n+1}"] \\ G^nC \arrow[r, "\delta^n"'] & G^{n+1}A. \end{tikzcd}$$

On dit que f **commute avec les δ**.

23 Définition. Un δ-foncteur homologique U est **universel** si pour tout δ-foncteur homologique F et toute transformation naturelle $f_0 : F_0 \to U_0$ il existe un unique morphisme de δ-foncteurs homologiques $f : F \to U$ qui étend f_0. Un δ-foncteur cohomologique U est **universel** si pour tout δ-foncteur cohomologique F et toute transformation naturelle $f^0 : U^0 \to F^0$ il existe un unique morphisme de δ-foncteurs cohomologiques $f : U \to F$ qui étend f^0.

24 Proposition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et S un foncteur additif. Un δ-foncteur universel U avec $U_0 = S$ (resp. $U^0 = S$) est essentiellement unique. Précisément, si U' est une δ-foncteur universel avec $U'_0 = S$ (resp. ${U'}^0 = S$) alors il existe un unique isomorphisme de δ-foncteurs $f : U \to U'$. En particulier, pour tout n les objets U_n (resp. U^n) sont essentiellement uniques. Ce sont les* **satellites à gauche** *(resp.* **à droite***) du foncteur S.*

Démonstration. Routine ! □

25 Remarque. Nous verrons plus loin que les foncteurs dérivés à droite d'un foncteur F forment un δ-foncteur cohomologique universel et sont donc les satellites à droite de F. Nous verrons également un **critère de détection des satellites** qui nous permettra de dire si un δ-foncteur est universel i.e. s'il constitue une famille de satellites. Grâce à ce critère, nous calculerons les foncteurs dérivés à droite (i.e. les satellites à droite) de la limite d'une tour de groupes abéliens. Une première **obstruction** évidente pour une famille de foncteurs à constituer une famille de satellites à gauche (resp. à droite) est l'exactitude à droite (resp. à gauche) de ces foncteurs.

2.2 Résolutions injectives

26 Définition. Un objet I d'une catégorie $\mathcal{C}$ est **injectif** si pour tout monomorphisme $\iota : A \to B$ et tout morphisme $\varphi : A \to I$ il existe un morphisme $\psi : B \to I$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} I & \\ A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, tail, "\iota"'] & B. \arrow[ul, dotted, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

On dit que la catégorie $\mathcal{C}$ possède **suffisemment d'injectifs** si pour tout objet A de $\mathcal{C}$ il existe un monomorphisme $A \to I$ avec I injectif.

27 Définition. Soient $\mathcal{A}b$ une catégorie abélienne et $C : C_0 \to C_1 \to C_2 \to \dots$ un complexe de cochaine. Le complexe de cochaine C est acyclique si $H^n(C) = 0$ pour tout $n > 0$. Le complexe de cochaine C est injectif si C_n est injectif pour tout n.

28 Théorème. *Soit $A : A_0 \to A_1 \to A_2 \to \dots$ un complexe de cochaine acyclique et $I : I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots$ un complexe de cochaine injectif. Tout homomorphisme $\varphi : H^0(A) \to H^0(I)$ est induit par un morphisme de cochaines $\varphi : A \to I$ unique à homotopie près.*

Démonstration. □

29 Définition. Soient $\mathcal{A}b$ une catégorie abélienne et A un objet de $\mathcal{A}b$. Un complexe de cochaine I est une **résolution injective** de A si I est injectif et acyclique avec $H^0(I) = A$. On dit qu'une catégorie abélienne possède **suffisemment d'injectifs** si tout objet possède une résolution injective.

30 Proposition. *Soit $\mathcal{A}b$ une catégorie abélienne possédant suffisemment d'injectifs. Tout objet de $\mathcal{A}b$ possède une résolution injective.*

Démonstration. □

31 Proposition. *Soient $\mathcal{A}b$ une catégorie abélienne complète possédant suffisemment d'injectifs et I une petite catégorie. La catégorie abélienne complète de foncteurs $\mathcal{A}b^I$ possède suffisemment d'injectifs.*

Démonstration. □

32 Exemple. La catégorie des tours de groupes abéliens possède suffisemment d'injectifs. En effet, c'est une catégorie de foncteurs dans la catégorie des groupes abéliens qui est abélienne et complète. En particulier toute tour de groupes abéliens possède une résolution injective.

33 Proposition. *Soit $D : \mathbb{N} \to \mathcal{AG}$ une tour de groupes abéliens. Il existe un monomorphisme de tours de groupes abéliens $A \to I$ avec I injectif et constitué uniquement d'épimorphismes.*

Démonstration. □

34 Remarque. Les notions duales de celles présentées ci-dessus donnent lieu aux objets **projectifs** et aux résolutions projectives, pour lesquels il existe des résultats duaux.

2.3 Critère de détection des satellites

35 Définition. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et F un foncteur additif. On dit que F est **effaçable** si pour tout objet A de $\mathcal{A}$ il existe un monomorphisme $i : A \to I$ avec I injectif et tel que $F(i) = 0$. On dit que F est **coeffaçable** si pour tout objet A de $\mathcal{A}$ il existe un épimorphisme $p : P \to A$ avec P projectif et tel que $F(p) = 0$.

36 Théorème. *Soit U un δ-foncteur homologique (resp. cohomologique). Si U_n (resp. U^n) est coeffaçable (resp. effaçable) pour tout $n \geqslant 1$ alors U est universel et les U_n (resp. U^n) sont les satellites à gauche (resp. à droite) de U_0 (resp. U^0).*

Démonstration. Etablissons la preuve dans le cas cohomologique et dans la catégorie des groupes abéliens. Soient F un δ-foncteur cohomologique et $f^0 : U^0 \to F^0$ une transformation naturelle. On doit montrer que f^0 admet une unique extension $f : U \to F$ qui est un morphisme de δ-foncteurs cohomologiques. On doit donc commencer par construire des transformations naturelles f^1, f^2, ...qui commutent avec les *delta* puis montrer l'unicité.

Procédons par récurrence. Supposons qu'il existe une transformation naturelle $f^n : U^n \to F^n$. Puisque U^n est effaçable, il existe un monomorphisme $i : A \to I$ avec I injectif et tel que $U^n(i) = 0$. Considérons la suite exacte courte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} I \xrightarrow[\text{can.}]{p} \operatorname{coker} i \longrightarrow 0$. Elle induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} U^n I \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f^n"'] & U^n \operatorname{coker} i \arrow[r, two heads, "\delta^n"] \arrow[d, "f^n"'] & U^{n+1} A \arrow[r, "0"] \arrow[d, dotted, "f^{n+1}"] & U^{n+1} I \\ F^n I \arrow[r, "p_*"'] & F^n \operatorname{coker} i \arrow[r, "\delta^n"'] & F^{n+1} A. \end{tikzcd}$$

On définit $f^{n+1}(x) = \delta^n f^n x'$ avec $x' \in U^n \operatorname{coker} i$ tel que $\delta^n x' = x$. On montre très facilement en chassant dans ce diagramme que f^n est bien définie.
Montrons que f^n est une transformation naturelle (ce qui prouve que f^n ne dépend pas du choix de i).
Montrons que f^n commute avec les δ.
Montrons que f^n est unique. □

37 Remarque. La preuve ci-dessus reste valable dans toute catégorie abélienne, comme l'a affirmé M. André dans une communication personnelle à S. MacLane [Mac], pp.198-205. On peut également s'en convaincre en utilisant le théorème suivant dû à Lubkin, Heron, Freyd et Mitchell : pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}b$ il existe un anneau R et un foncteur plein, fidèle et exact $\mathcal{A}b \to R - \mathcal{M}od$ (cf. [Mi]).

2.4 Foncteurs dérivés à droite et satellites

38 Proposition. *Soient $\mathcal{A}b$ une catégorie abélienne possèdant suffisement d'injectifs et $F : \mathcal{A}b \to \mathcal{AG}$ un foncteur additif. Soient encore $I : I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots$ et $I' : I'_0 \to I'_1 \to I'_2 \to \dots$ deux résolutions injectives de l'objet A de $\mathcal{A}b$. Considérons les complexes $FI : FI_0 \to FI_1 \to FI_2 \to \dots$ et $FI' : FI'_0 \to FI'_1 \to FI'_2 \to \dots$. Pour tout n entier on définit les groupes abéliens $R^n_I F(A)$ par $H^n(FI)$ et $R^n_{I'}F(A)$ par $H^n(FI')$. Il existe un isomorphisme $\eta_{I,I'} : R^n_I F(A) \cong R^n_{I'}F(A)$.*

Démonstration. □

39 Proposition. *Avec les mêmes hypothèse que la Proposition 38.*
1. *$R^n F$ est un foncteur additif pour tout $n \geqslant 0$, c'est le n-ième* **foncteur dérivé** *du foncteur additif F,*
2. *si F est exact à gauche alors $R^0 F$ est naturellement équivalent à F,*
3. *$R^n F$ est effaçable pour tout $n \geqslant 1$.*

Démonstration. □

40 Théorème. *Avec les mêmes hypothèse que la Proposition 38. Si F est exact à gauche alors la famille de foncteurs dérivés à droite $R^n F$ forme un δ-foncteur cohomologique $R^* F$ avec $R^0 F = F$.*

Démonstration. □

41 Corollaire. *Avec les mêmes hypothèse que la Proposition 38. Si F est exact à gauche alors le δ-foncteur cohomologique R^*F est universel et les foncteurs R^nF sont les satellites à droite de F.*

Démonstration. D'après le Théorème 40 les R^nF forment un δ-foncteur cohomologique, or d'après le lemme précédent les R^nF sont effaçables, ainsi d'après le Théorème 36 les R^nF forment un δ-foncteur cohomologique universel. $\square$

42 Remarque. Dans la catégorie des tours de groupes abéliens, nous allons construire un δ-foncteur cohomologique $\varprojlim^n$, $n \geqslant 0$, tel que $\varprojlim^0 = \varprojlim$ et les $\varprojlim^n$ sont effaçables pour $n \geqslant 1$. Ainsi nous aurons prouvé que cette famille de foncteurs est en fait la famille des satellites à droite, i.e. des foncteurs dérivés à droite, de $\varprojlim^0$. Nous aurons donc calculé les foncteurs dérivés à droite du foncteur $\varprojlim$.

2.5 Le cas des tours de groupes abéliens

43 Lemme. *Soit $d : D \to D'$ une transformation naturelle de tours de groupes abéliens $D, D' : \mathbb{N} \to \mathcal{AG}$. Considérons l'action du groupe $\prod_{k\in\mathbb{N}} D(k)$ (resp. $\prod_{k\in\mathbb{N}} D'(k)$) sur lui-même donnée plus haut. On définit $\varprojlim^1 D$ par le quotient de $\prod_{k\in\mathbb{N}} D(k)$ par l'orbite de $(0,0,0,\dots)$ et $\varprojlim^1 d$: $(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto [d_1(x_1), d_2(x_2), d_3(x_3), \dots]$ où $[\dots]$ désigne la classe évidente. Ainsi défini, $\varprojlim^1$ est un foncteur additif et effaçable.*

Démonstration. On vérifie facilement que $\varprojlim^1$ est un foncteur additif. Montrons qu'il est effaçable. Soit $D \to I$ un monomorphisme avec I une tour de groupes abéliens injective. D'après la proposition 33 on peut prendre I constituée uniquement d'épimorphismes. Montrons en toute généralité que $\varprojlim^1$ s'annule sur toute tour de groupes abéliens constituée uniquement d'épimorphismes. Soit I une telle tour. Montrons que tout élément $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ de $\prod_{k\in\mathbb{N}} D(k)$ est dans l'orbite de $(0,0,0,\dots)$ i.e. qu'il existe une suite $(g_1, g_2, g_3, \dots)$ telle que x_n s'écrive $g_n - D(n \to n+1)g_{n+1}$ pour tout n. Soit g_1 quelconque, et choisissons par récurrence des g_{n+1} tels que $D(n \to n+1)g_{n+1} = g_n - x_n$. C'est possible par surjectivité des $D(n \to n+1)$. On a bien $g_n - D(n \to n+1)g_{n+1} = g_n - (g_n - x_n) = x_n$. $\square$

44 Lemme. *Soit $D : \mathbb{N} \to \mathcal{AG}$ une tour de groupes abéliens. La famille de foncteurs additifs $\varprojlim^n$, définie par $\varprojlim^0 = \varprojlim$, $\varprojlim^1$ comme ci-dessus et $\varprojlim^n$ trivial pour tout $n \geqslant 2$, forme un δ-foncteur cohomologique.*

Démonstration. $\square$

45 Théorème. *Soit $D : \mathbb{N} \to \mathcal{AG}$ une tour de groupes abéliens. Considérons l'action du groupe $\prod_{k\in\mathbb{N}} D(k)$ sur lui-même donnée par*

$$(g_1, g_2, g_3, \dots) \cdot (x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1 + g_1 - D(1 \to 2)g_2, x_2 + g_2 - D(2 \to 3)g_3, \dots).$$

La limite inverse et ses foncteurs dérivés à droite sont donnés par
1. $\varprojlim D$ est le stabilisateur de $(0,0,0,\dots)$, la fonctorialité de $\varprojlim$ étant donnée par le Lemme 15,

2. $\varprojlim^1 D$ *est le quotient de* $\prod_{k\in\mathbb{N}} D(k)$ *par l'orbite de* $(0,0,0,\dots)$*, la fonctorialité étant donnée par le Lemme 43 ; c'est le premier foncteur dérivé à droite de* $\varprojlim$*,*
3. *les autres foncteurs dérivés à droite de* $\varprojlim$ *sont triviaux.*

Démonstration. Puisque $\varprojlim^1$ est effaçable, au même titre que tous les $\varprojlim^n$ pour $n \geqslant 2$, le δ-foncteur cohomologique formé par les $\varprojlim^n$ est universel et les $\varprojlim^n$ sont les satellites à droite de la limite inverse, ce sont donc les foncteurs dérivés à droite de la limite inverse. □

46 Corollaire. *Toute suite exacte courte de tours de groupes abéliens* $0 \to D'' \to D \to D' \to 0$ *induit une suite exacte à six termes*

$$0 \longrightarrow \varprojlim D'' \longrightarrow \varprojlim D \longrightarrow \varprojlim D' \xrightarrow{\delta} \varprojlim^1 D'' \longrightarrow \varprojlim^1 D \longrightarrow \varprojlim^1 D' \longrightarrow 0.$$

C'est **la suite exacte** $\varprojlim$**-**$\varprojlim^1$*.*

Démonstration. Les $\varprojlim^n$ forment un δ-foncteur cohomologique et beaucoup d'entre-eux sont triviaux. □

Références

[B-K] A. K. Bousfield, D. M. Kan. *Homotopy Limits, Completions and Localizations.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304, Springer-Verlag (1972).

[Dold] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology.* Springer-Verlag (1972).

[Gr] A. Grothendieck. *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tohoku J. Math. **9**, 119-221 (1957).

[H-S] P. J. Hilton, U. Stammbach. *A Course in Homological Algebra.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 4, 2nd Edition, Springer-Verlag (1996).

[Kan] D. M. Kan. *Adjoint functors.* Trans. Amer. Math. Soc. **87**, 294-329 (1958).

[Mac] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5, Springer-Verlag (1971).

[McG] C. A. McGibbon. *Phantom maps.* Handbook of Algebraic Topology, 1209-1258. Elsevier (1995).

[Mi] B. Mitchell. *Theory of categories.* New-York - London : Academic Press (1965).

[Weibel] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge studies in advanced mathematics, Vol. 38, Cambridge University Press (1994).